

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»  
(СГАУ)**

**Факультет летательных аппаратов**

**С.Н. Перов**

**Курс лекций по дисциплине  
СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ  
НАДЕЖНОСТИ**

**Электронный ресурс**

**Самара 2013г.**

УДК 624.041: 519.2

С 24

Автор-составитель: **Перов Сергей Николаевич**

**Статистическая механика и теория надёжности** [Электронный ресурс]: электрон. курс лекций / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост: С.Н. Перов. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

© Самарский государственный

аэрокосмический университет, 2013

## ВВЕДЕНИЕ

Весь курс приближенно (укрупнено) можно разбить на три больших раздела

1. Элементы теории вероятностей и теории случайных функций.
2. Решение задач статистической динамики.
3. Надежность.

В чем необходимость подхода к решению задач прочности и надежности?

1. Нагрузки на конструкцию л.а. носят случайный характер.
2. Свойства материалов, прочность элементов конструкций, технологические факторы процесса изготовления имеют статистический характер.

Именно поэтому нельзя в явном виде всегда записать условие прочности:

$$S \leq R.$$

Можно лишь поставить условие, чтобы в течение срока службы конструкции это неравенство было выполнено с той или иной вероятностью, достаточно близкой к единице. Отсюда естественным образом вытекает вероятностная трактовка инженерных расчетов на прочность.

**Особая важность решения задачи обеспечения достаточной надежности на современном этапе.**

В чем же природа случайных явлений, т. е. мы говорим случайное явление, случайная нагрузка. Почему?

Рассмотрим на простом примере. Полет артиллерийского снаряда. Факторы, влияющие на полет:

- 1) положение и движение ствола орудия в момент выстрела;

2) размеры, формы, вес, распределение масс, характер поверхности снаряда;

3) вес заряда, состав пороха, размеры его зерен, его температура, микроструктура зерен и т.д.

4) состояние атмосферы в тех точках пространства, через которое пролетает снаряд.

Все факторы невозможно перечислить. Именно поэтому возникает рассеяние. Баллистика изучает лишь основные закономерности и учитывает всего три фактора: начальная скорость, угол наклона вектора начальной скорости к горизонту и баллистический коэффициент снаряда.

Рассеивание снарядов зависит от совершенства оружия и прицельных устройств. Поэтому попадание в определенную цель при одном выстреле может быть случайностью на одном этапе развития артиллерийской техники, а на другом этапе может быть необходимостью. Именно в этом прослеживается та диалектическая связь между случайностью и необходимостью, о которой говорится в философских трудах.

Случайные события в наших отраслях знания носят не какой-то необходимый характер, как в явлениях микромира (соотношение неопределенностей), просто идет от недоучета на первый взгляд второстепенных факторов. А если учитывать все факторы, то очень сложно составить математическую модель явления.

## Элементы теории вероятностей

### Законы распределения. Квантиль.

**Событие** – качественный или количественный результат опыта, который осуществляется при определенных условиях.

**Опыт** – осуществление определенных условий и действий, при которых наблюдается данное событие или явление.

Событие называется **достоверным**, если оно не может не появиться в результате данного опыта.

Событие называется **невозможным**, если оно не может появиться в результате данного опыта.

Событие, которое может появиться или не появиться в результате данного опыта, называется **случайным** событием.

Объективной математической оценкой возможности реализации случайного события является вероятность.

Классическое определение вероятности: **вероятность – число исходов, благоприятствующих данному событию к общему числу исходов.**

Однако, в сложных задачах классическое определение вероятности, которое в конечном счете выведено из более простого понятия равновозможности и теории азартных игр, оказывается недостаточным и заменяется статистическим определением.

Чтобы ввести понятие статистической вероятности, сначала надо ввести понятие частоты события.

**Частота данного события** есть отношение числа появлений данного события к числу всех произведенных опытов.

**Вероятность события при данных условиях опыта** называется теоретической частотой события, около которой имеет тенденцию стабилизироваться действительная частота события при повторении опыта в данных условиях.

Статистическая вероятность случайного события, таким образом, является числовой характеристикой, которая обладает следующим свойством. При достаточно большой серии испытаний частота событий неограниченно приближается к этой характеристике.

Два события называются **несовместными** в данном опыте, если в результате данного опыта они не могут появиться одновременно.

Вероятность суммы любого количества (конечного или бесконечного) несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Вполне естественно, что вероятность событий полной группы:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

Группа событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется **полной**, если в результате опыта обязательно появляется хотя бы одно из них.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

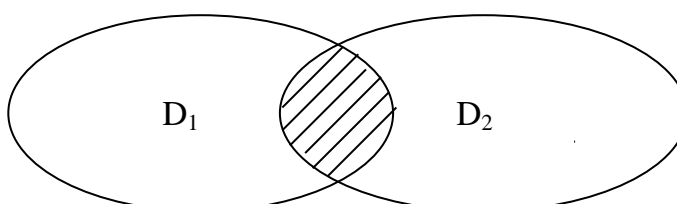
Правила для сложения вероятностей, если события совместны

$$P \sum_i A_i = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i,j,\dots,n} P(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

Правила умножения вероятностей для независимых событий:

$$P \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Сложение и умножение вероятностей можно графически проиллюстрировать следующим образом:

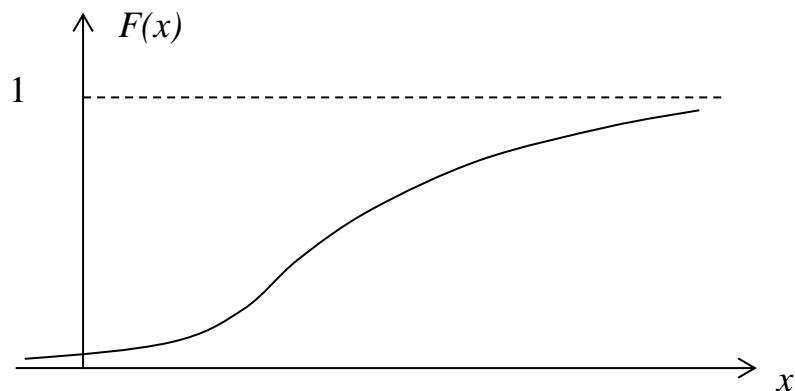


Рассмотрим случайную величину  $X$ , которая изменяется в пределах  $(a, b)$  и может принимать значение  $x$ . Для того, чтобы полностью охарактеризовать случайную величину, необходимо задать множество ее возможных значений и дать способ определения и сравнения между собой вероятностей этих значений. Такая характеристика случайной величины называется ее законом распределения.

Наиболее общей формой закона распределения случайной величины является ее функция распределения. Функцией распределения или интегральным законом распределения случайной величины  $X$  называется вероятность выполнения неравенства  $x < X$ , рассматриваемая как функция переменной  $x$ .

$$F(x) = P(X < x).$$

Внешний вид интегрального закона распределения:



Свойства функции распределения:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

3. Функция неубывающая, т.е. при  $x_1 < x_2$   $F(x_2) \geq F(x_1)$

Равенство обеспечивается в том случае, когда интервал  $(x_1, x_2)$  не содержит ни одного возможного значения случайной величины  $X$ . Зная функцию распределения случайной величины  $X$ , можно определить

вероятность попадания значения этой величины на любой интервал числовой оси. Т.к. событие  $X < b$  является суммой несовместных событий  $X < a$  и  $a \leq X < b$ , то согласно теории сложения вероятностей:

$$P(x < b) = P(x < a) + P(a \leq x < b).$$

Отсюда на основании определения функции распределения:

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a).$$

Отсюда:  $P(x = a) = F(a + 0) - F(a)$ , т.е. вероятность того, что случайная величина примет данное значение, равна скачку функции распределения в точке  $a$ . Если функция распределения непрерывна при  $x < a$ , то вероятность того, что случайная величина примет значение  $a$  равна нулю. Тогда:

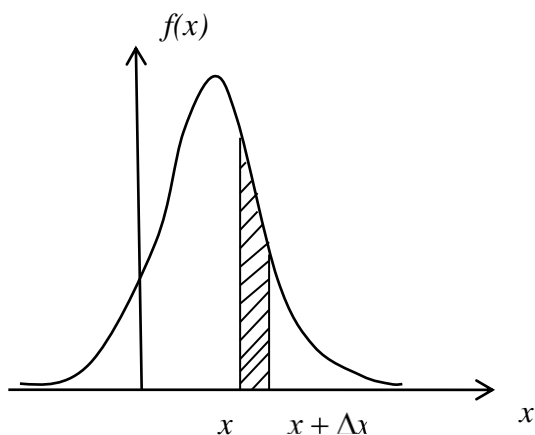
$$P(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

Случайные величины, функции распределения которых непрерывны и дифференцируемы на всей числовой оси, называются непрерывными случайными величинами. Производная  $f(x) = F'(x)$  называется плотностью вероятности или дифференциальным законом распределения этой случайной величины.

$$P(x < x < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x) \Delta x$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x < x < x + \Delta x) / \Delta x$$

Отсюда  $f(x) \geq 0$ . **Функция плотности вероятности есть функция неотрицательная.**





Заштрихованная область – вероятность попадания случайной величины в интервал.  $(x, x + \Delta x)$

Вероятность попадания случайной величины в интервал  $(a, b)$  можно записать в виде:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

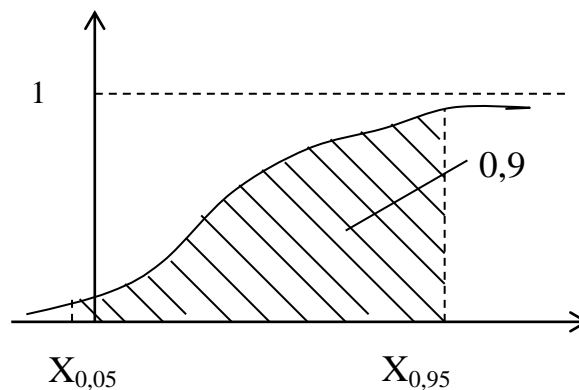
Полагая  $a = -\infty$ ;  $b = x$ , получим выражение функции распределения через плотность вероятности:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Из свойств функции распределения следует, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

Это есть так называемое условие нормировки.

### Определение квантиля.



Квантилью  $x_p$  случайной величины  $X$  называется решение уравнения вида:

$$F(x_p) = p \text{ или } P(x < x_p) = p$$

$$P(x < x_{0,05}) = 0,05$$

$$P(x < x_{0,95}) = 0,95$$

$$P(x_{0,05} < x < x_{0,95}) = F(x_{0,95}) - F(x_{0,05}) = 0,90.$$

Часто в реальных задачах законы распределения случайных величин очень сложны; их, во-первых, трудно определить, а, во-вторых, достаточно сложно описать аналитически. Кроме того, для целого ряда задач

оказывается вполне достаточным знание числовых характеристик случайных величин.

### Числовые характеристики случайной величины.

Начальным моментом порядка  $k$  случайной величине  $x$  называется интеграл:

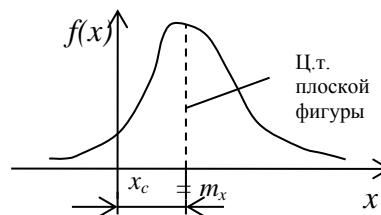
$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Особое значение имеет начальный момент первого порядка

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \text{ который называется математическим ожиданием и}$$

который получил далее специальную идентификацию  $\alpha_1 = m_x = \langle X \rangle = M[X]$ .

Геометрическая интерпретация математического ожидания вытекает из теоретической механики:



$$x = \int x f(x) dx / \int f(x) dx = mx$$

Математическое ожидание – среднее значение случайной величины. Обобщая, можно получить математическое ожидание произвольной функции  $\varphi(x)$  случайной величины  $X$ :

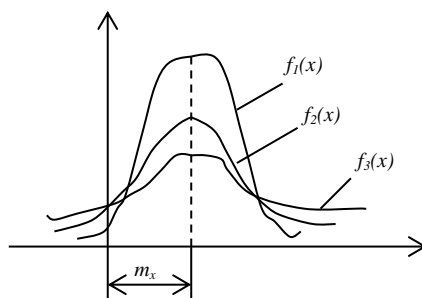
$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

И

$$\alpha^k = M[x^k], k = 1, 2, \dots$$

Математическое ожидание ни в какой мере не может полностью охарактеризовать степень рассеяния случайной величины.

Например:



Поэтому, чтобы охарактеризовать степень сосредоточенности или степень рассеяния возможных значений случайной величины около среднего значения, обычно пользуются центральными моментами случайной величины.

$$\mu_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k f(x) dx$$

Очевидно,  $\mu_1 = 0$ .

Особое значение имеет центральный момент второго порядка, который называется дисперсией случайной величины и обозначается:

$$D_x = D[x] = M[(x-m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x) dx$$

Дисперсия характеризует рассеяние случайной величины относительно среднего. Знание оказывается достаточным для решения многих задач теории вероятностей. Дисперсия как характеристика рассеяния очень удобна, однако лишена наглядности, потому имеет квадратную размерность, поэтому используют среднее квадратическое отклонение.

$$S_x = \sqrt{D_x}$$

Иногда используется такая характеристика, как коэффициент вариации:

$$v_x = S_x / m_x$$

Центральные моменты случайной величины могут быть выражены через начальные моменты

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3$$

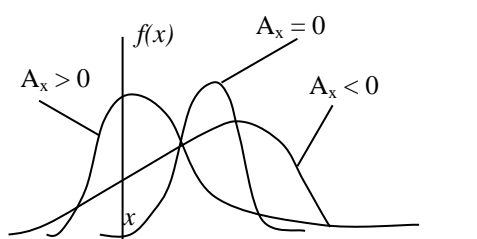
$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3 m_x + 6\alpha_2 m_x^2 - 3m_x^4$$

$$\mu_5 = \alpha_5 - 5\alpha_4 m_x + 10\alpha_3 m_x^2 - 10\alpha_2 m_x^3 + 4m_x^5$$

Центральные моменты имеют определенный геометрический смысл или интерпретацию. Так, например, величина:

$$A_x = \mu_3 / S_x^3$$

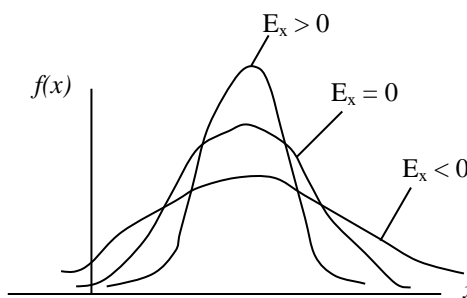
Называется коэффициентом асимметрии и является безразмерной величиной.



$$E_x = \frac{\mu_4}{S_x^4} - 3$$

- эксцесс, характеризует островершинность функции

плотности вероятностей.

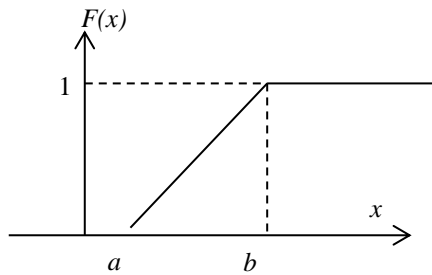


### Примеры законов распределения.

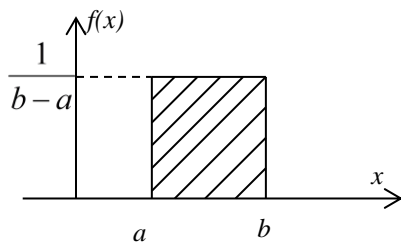
#### **Закон равномерного распределения.**

Задается следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ (x-a)/(b-a), & \text{если } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$$



Легко можно получить функцию плотности вероятности.



Для этого закона имеем:

$$m_x = \frac{1}{2} (a + b)$$

$$D_x = \frac{1}{12} (b - a)^2$$

$$A_x = 0$$

$$E_x = -1,2$$

### Нормальный закон распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2S_x^2}}; -\infty < x < \infty;$$

Закон распределения случайной величины имеет очень большое значение среди прочих теоретических законов распределения. Носит название Гауссовского распределения. Полностью определяют закон распределения для нормального закона  $m_x$  и  $S_x$ . Для нормального закона  $A_x = 0$ ,  $E_x = 0$ .

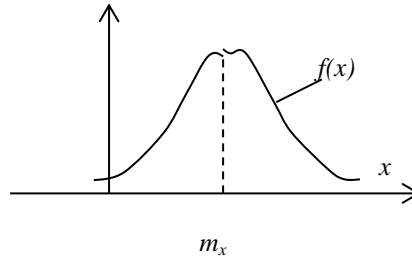
Нетрудно убедиться в том, что выполняется условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{делаем замену переменных.}$$

$$(x - m_x) / S_x = t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

Обычный вид функции плотности вероятности нормального закона.



Если  $m_x = 0$ , распределение симметричное относительно оси ординат.

А так распределение симметрично в любом случае.

Нормальный закон распределения в теории вероятностей и математической статистике играет особую роль. Почему?

1. Согласно теории вероятностей, к нормальному распределению приближается распределение тех случайных величин, которые формируются под действием большого количества независимых или почти независимых факторов, величина каждого из которых незначительна.

2. Нормальным законом распределения часто пользуются для замены реальных законов распределения, даже если они заведомо не являются нормальными из-за простоты (описывают всего два параметра  $m_x$  и  $S_x$ ). И если случайная величина распределена нормально, то распределение считается нормальным и после линейного преобразования случайной величины (включая дифференцирование и интегрирование).

Функция распределения нормального закона записывается в виде:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_x} \exp(-(x - m_x)^2 / 2S_x^2) dx$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал  $(a, b)$

$$P(a < x < b) = \int_a^b 1/\sqrt{2\pi S_x} \exp(-(x-m_x)^2/2S_x^2) dx = \text{делаем замену переменных}$$

$$t = \frac{x-m_x}{S_x}; \quad x = S_x \cdot t + m_x; \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m_x}{S_x}}^{\frac{b-m_x}{S_x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \cdot dt = \Phi_1\left(\frac{b-m_x}{S_x}\right) - \Phi_1\left(\frac{a-m_x}{S_x}\right);$$

$$\Phi_1(u) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt - \text{некая протабулированная функция Лапласа.}$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\Phi_1(-\infty) = 0$$

$$\Phi_1(0) = 1/2$$

$$\Phi_1(\infty) = 1$$

Функция распределения:

$$F(x) = \Phi_1((x-m_x)/S_x)$$

Можно ввести для нормального закона распределения еще некоторые функции:

$$\Phi_2(u) = 1/\sqrt{2\pi} \int_0^u e^{-t^2/2} dt$$

$$\Phi_2(0) = 0$$

$$\Phi_2(\infty) = 1/2$$

$$\Phi_2(-u) = -\Phi_2(u)$$

$$F(x) = 1/2 + \Phi_2((x-m_x)/S_x)$$

$$\Phi_3(u) = 2/\sqrt{2\pi} \int_0^u e^{-t^2/2} dt$$

$$\Phi_3(0) = 0$$

$$\Phi_3(\infty) = 1$$

$$\Phi_3(-u) = -\Phi_3(u)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (1 + \Phi_3((x-m_x)/S_x))$$

И, наконец, интеграл вероятности

$$\Phi(u) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал  $(a, b)$

$$P(a < x < b) = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{b-m_x}{S_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{S_x}\right) \right].$$

Функция распределения:

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{x - m_x}{\sqrt{2} S_x} \right) \right]$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал симметричный относительно  $m_x$

$$P(|x - m_x| < \varepsilon) = \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} S_x} \right)$$

Пусть  $\varepsilon = k S_x$ , тогда

$$P(|x - m_x| < k S_x) = \Phi \left( \frac{k}{\sqrt{2}} \right)$$

$k$	1	2	3	4
$P$	0,6826	0,9543	0,9973	0,9999

Из таблицы можно сделать вывод, что с вероятностью 0,9973 отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превосходит  $3S_x$ . Правило трех сигма.

Функция плотности вероятности для нормального закона распределения центрированной нормированной величины, которая записывается в виде  $u = (x - m_x) / S_x$  можно представить:

$$f_0(u) = 1 / \sqrt{2\pi} \exp(-u^2 / 2)$$

Математическое ожидание равно нулю, среднеквадратическое отклонение равно 1.

$$f(x) = \frac{1}{S_x} f_0 \left( \frac{x - m_x}{S_x} \right), F(x) = F_0 \left( \frac{x - m_x}{S_x} \right)$$

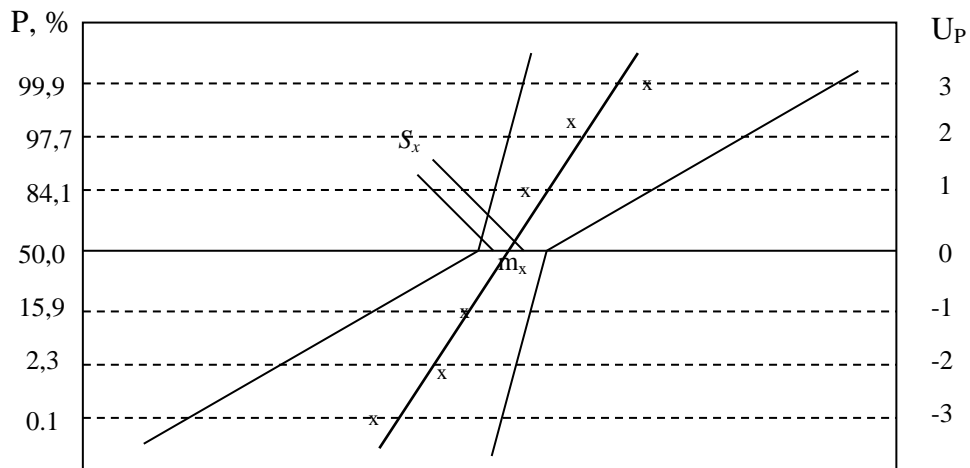
Величина  $U_p = (x - m_x) / S_x$  называется квантилью центрированного нормированного закона распределения.

Если  $p < 0,5$ , то  $U_p = -U_{1-p}$ , т. е. закон распределения квантилей четный.



Для того чтобы определить, соответствует ли выбранный закон распределения случайной величины истинному, существуют определенные критерии согласия, которые обладают достаточной универсальностью независимо от закона распределения случайной величины.

Для оценки «нормальности» распределения случайной величины существует специальный метод, который основан на использовании квантилей центрированной нормированной случайной величины.



Метод был разработан в 1914г. американским инженером Хазеном.

На вероятностной бумаге в прямоугольной системе координат по оси ординат наносится шкала, соответствующая «интегралу Гусса»

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

По оси абсцисс линейная или логарифмическая шкала.

Исходя из системы координат  $x, y$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) можно путем преобразования  $y \rightarrow u = \Phi^{-1}(y)$  можно получить систему координат  $x, u$  с линейной шкалой  $u$ .

Поскольку всякую функцию  $\Phi_1(x, m_x, S_x^2)$  нормального распределения можно путем линейного преобразования  $u = (x - m_x) / S_x$  превратить в нормированное нормальное распределение, кривая  $y = \Phi(x, m_x, S_x^2)$  в системе

координат  $x$ ,  $u$  приобретает вид прямой  $u = (x - m_x) / S_x$ , проходящей через точку  $x = m_x$ ,  $u = 0$  и обладающей наклоном  $1/S_x$

$$y = \Phi(0) = 0,5$$

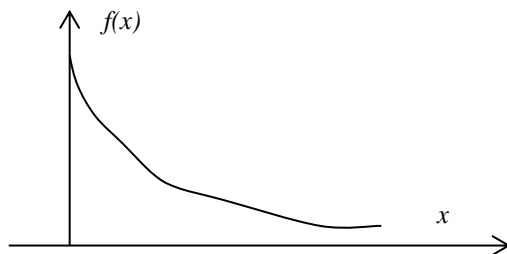
$$y = \Phi(1) = 0,8413$$

### Экспоненциальный закон распределения

Функция плотности вероятностей для него записывается в виде:

$$f(x) = ke^{-kx}; 0 < x < \infty$$

И имеет примерно следующий вид:

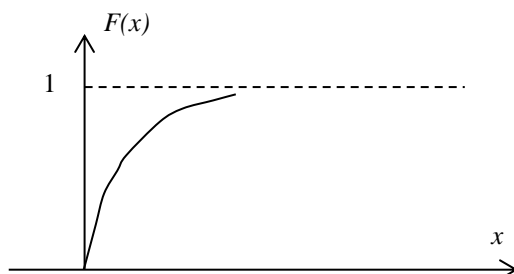


Удовлетворяет условиям нормировки:  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$

Какие величины принимают неотрицательные значения? Предел текучести, предел прочности и т.д.

Функция распределения:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = -\int_0^x e^{-kt} d(-kt) = -e^{-kx} I_0^x = -e^{-kx} + 1 = 1 - e^{-kx};$$



Экспоненциальный закон распределения имеет следующие числовые характеристики:

$$m_x = 1/k; D_x = 1/k^2;$$

$$A_x = 2; E_x = 6$$

Вероятностную бумагу можно построить и для этого закона. Если точки наблюдения ложатся на прямую, стало быть, закон этот.

### Закон распределения Вейбулла

$$f(x) = k/x_0 (x-x_1)^{k-1} \exp(-(x-x_1)^k / x_0) \quad 0 < x < \infty$$

$$F(x) = 1 - \exp[-(x-x_1)^k / x_0]$$

$x_1, x_0, k$  – параметры.

Плохо то, что три параметра. Очень часто берут  $x_1 = 0$ . Менее точно.

В этом случае:

$$f(x) = kx^{k-1}/x_0 \exp(-x^k / x_0)$$

$$F(x) = 1 - \exp[-x^k / x_0]$$

$$\text{Тогда: } m_x = ax_0^{1/k}; D_x = bx_0^{\frac{2}{k}}$$

$$a = \Gamma(1/k + 1); b = \sqrt{\Gamma(2/k + 1) - a^2}$$

$\Gamma$  – гамма – функция.

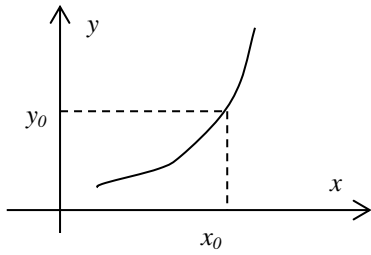
### Функциональные преобразования случайных величин

Очень часто на практике необходимо уметь определять закон распределения и т.д.

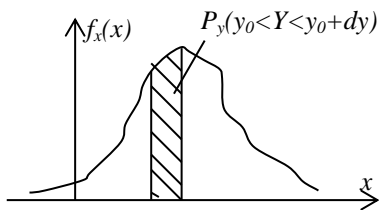
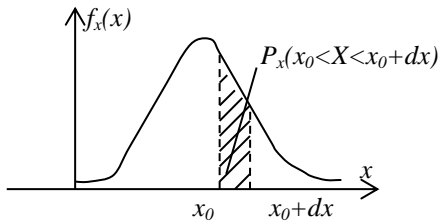
Пусть имеем две случайные величины  $X$  и  $Y$ , которые связаны между собой функциональной зависимостью  $y = \varphi(x)$ .

Функция  $\varphi(x)$  – непрерывная, монотонная, дифференцируемая функция. Известна функция плотности вероятности для случайной величины  $X \Rightarrow f_x(x)$ .

Необходимо определить  $f_y(y)$ .



Можем найти обратную функцию  $X = \varphi(Y)$ .



Так как связь однозначная, то  $P_x = P_y$

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy$$

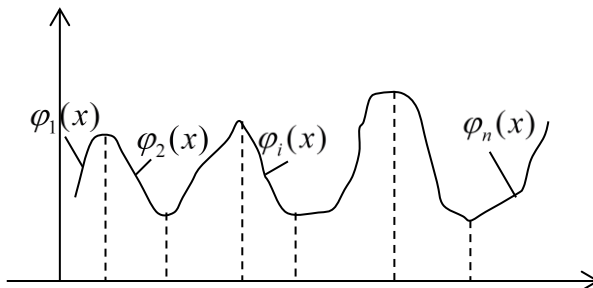
$$f_y(y) = f_x(x) \frac{dx}{dy}.$$

Отсюда легко получить, имея в виду,  $x = \varphi(y)$ .

$$f_y(y) = f_x[\varphi(y)] \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|.$$

Таким образом осуществляется: и т.д.

Если связь неоднозначная, то разбиваем на однозначные участки:



Вероятность попадания случайной величины  $Y$  в интервал

$$y_0 < y < y_0 + dy \Rightarrow x_1 < X < x_1 + dx$$

$$x_2 < X < x_2 + dx$$

.....

$$x_n < X < x_n + dx$$

Все эти события образуют полную группу событий

$$P_y = \sum_{i=1}^n P_{x_i} \Rightarrow f_y(y)dy = \sum_{i=1}^n f_x(x_i)dx \Rightarrow x_i = \psi_i(y)$$

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^n f_x[\psi_i(y)] \left| \frac{d\psi_i(y)}{dy} \right|.$$

Рассмотрим некоторые примеры

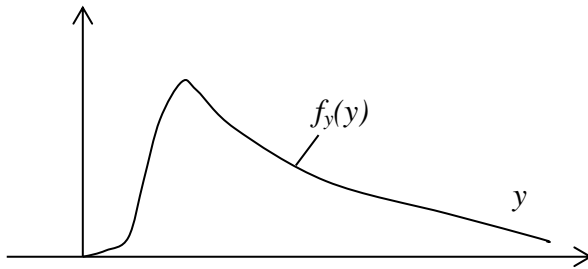
$$y = e^x; f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_x} \exp \left[ -\frac{(x - m_x)^2}{2S_x^2} \right];$$

$$f_y(y) = f_x[\psi(y)] |\psi'(y)|;$$

$$X = \psi(Y) = \ln(y); \quad \psi'(y) = \frac{1}{y};$$

$$f_y(y) = 1/\sqrt{2\pi} S_x \exp \left[ -(\ln y - m_x)^2 / 2S_x^2 \right] 1/|y| - \text{логарифмически нормальный}$$

закон распределения.



$$0 < y < \infty; m_y = e^{m_x + \frac{D_x}{2}}; D_y = e^{2m_x + D_x} (e^{D_x} - 1); A_y = e^{3D_x}; E_y = -3e^{3D_x} + 12e^{D_x} - 6$$

Рассмотрим примеры.

$$1. \sigma = \frac{M}{W}; \text{Известно} \Rightarrow f_M(M)$$

$$M = \psi(\sigma) = \sigma \cdot W; \quad \psi'(\sigma) = W;$$

$$\text{Тогда имеем: } f_\sigma(\sigma) = f_M(\sigma M) \cdot W$$

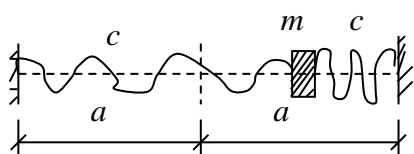
$$2. Y=x^2;$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_x}} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2S_x^2}\right);$$

$$X = \psi(Y) = \pm\sqrt{y}; \quad |\psi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}};$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[ \exp\left(-\frac{(\sqrt{y}-m_x)^2}{2S_x^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{y}+m_x)^2}{2S_x^2}\right) \right];$$

$$3. x = \sin \omega t;$$



$\omega$  - круговая частота колебания;

$a$  - амплитуда колебаний.

Определить функцию плотности вероятности события, заключающуюся в том, что в случайный момент времени  $t$  тело окажется на расстоянии  $x$  от положения равновесия.

$$P(x < X < x + dx) = c_1 \frac{dx}{x};$$

$$P(x < X < x + dx) = f(x)dx$$

$$c_1 \frac{dx}{x} = f(x)dx; \quad f(x) = c_1 \frac{1}{x}; \quad \dot{x} = a\omega \cos \omega t; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t};$$

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}; \quad f(x) = \frac{c_1}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{c_1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left( c_1 = \frac{\omega}{\pi}; a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) = \frac{\omega \pi}{\pi \omega} = 1;$$

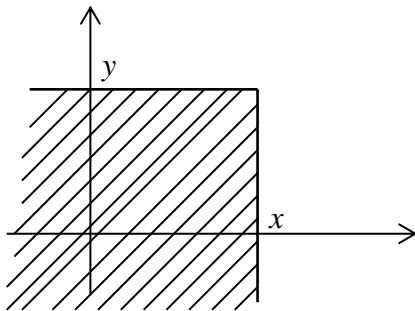
$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

## Система двух случайных величин

Совместной функцией распределения двух случайных величин  $X, Y$  называется вероятность совместного выполнения следующих двух неравенств:

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y) - \text{двумерная функция распределения.}$$

Геометрическая интерпретация – вероятность попадания конца вектора в заштрихованную область:



Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами:

1.  $F(x, y)$  – неубывающая функция
2.  $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
3.  $F(x, \infty) = F_1(x)$   
 $F(\infty, y) = F_2(y)$
4.  $F(\infty, \infty) = 1$

Само собой разумеется, что три последних условия можно записать в виде пределов как  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ .

Функция плотности вероятности системы двух случайных величин:

$$1. f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \Rightarrow f(x, y) \geq 0$$

$$2. F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 - \text{условия нормировки}$$

$$\text{Определим: } F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx.$$

Отсюда вытекает условие согласованности:

$$4. f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Есть еще такая характеристика – условная функция распределения:

$$F(x/y) = P(X < x; Y = y)$$

$$F(y/x) = P(X = x; Y < y).$$

В более общем случае:

Условной функцией распределения случайной величины  $X$  называется условная вероятность неравенства  $X < x$ , если событие  $B$  произошло.

На основании общего определения плотности вероятности условными плотностями вероятности называются производные соответствующих условных функций распределения.

$$f(x/y) = \frac{\partial F(x/y)}{\partial x}, \quad f(y/x) = \frac{\partial F(y/x)}{\partial y}. \quad \text{Но имеем: } F(x/y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_2(y)};$$

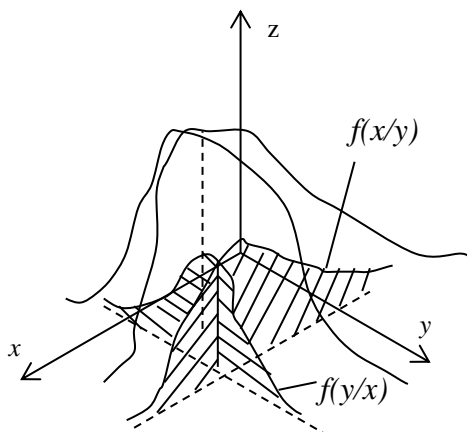
Тогда можно записать:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}; \quad f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}; \quad f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Отсюда следует:  $f(x, y) = f_1(x)f(y/x) = f_2(y)f(x/y)$ .

Определение (на основании этого): Двумерная плотность вероятности случайных величин  $X, Y$  равна произведению плотности вероятности одной из них и условной плотности вероятности другой относительно первой.

Геометрическая интерпретация условной плотности вероятности:





Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются зависимыми, если события  $X < x$  и  $Y < y$  зависимы при каких-нибудь значениях  $x, y$ . Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются независимыми, если события  $X < x$  и  $Y < y$  независимы при любых  $x, y$ .

Для независимых случайных величин имеет место равенство (по теореме перемножения вероятностей):  $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ ,  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ .

Из всего вышесказанного, очевидно следует вывод, что двумерный закон распределения полностью описывает распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  и их условные законы распределения.

### Числовые характеристики системы двух случайных величин

#### 1. Начальные моменты.

Определение:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y) dx dy \quad - \text{начальные моменты порядка } r = k + s$$

$\alpha_{0,0} = 1$  - из условия нормировки

$$\alpha_{1,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = m_x$$

$$\alpha_{0,1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy = m_y$$

Очевидно, можно записать:

$$\alpha_{k,0}(x,y) = \alpha_k(x)$$

$$\alpha_{0,s}(x,y) = \alpha_s(y)$$

Начальный момент  $\alpha_{1,1}$  используется достаточно редко, однако если  $\alpha_{1,1} = 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  ортогональны.

#### 2. Центральные моменты.

Определение:

$$\mu_{k,s}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y) dx dy \quad - \text{порядок момента } r = k + s.$$

$\mu_{0,0} = 1$  - из условия нормировки

$$\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0$$

$$\mu_{2,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f_1(x) dx = D_x;$$

$$\mu_{0,2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy = D_y$$

$$\mu_{k,0}(x, y) = \mu_k(x)$$

$$\mu_{0,s}(x, y) = \mu_s(y)$$

Среди смешанных моментов случайных величин особую роль играет центральный смешанный момент второго порядка  $\mu_{1,1}$ , который обычно называется корреляционным моментом или смешанным моментом второго порядка случайных величин  $X$  и  $Y$ .

$$\mu_{1,1}(x, y) = K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy$$

Вместо корреляционного момента  $\Rightarrow$  коэффициент корреляции (безразмерная величина).

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{S_x S_y}.$$

Интерпретация из теоретической механики:

Принимаем всю распределенную в пространстве массу за 1, а плотность вероятности за объемную плотность. Тогда: математические ожидания  $m_x, m_y$  - координаты центра масс;  $D_x, D_y$  - центральные моменты инерции;  $K_{xy}$  - соответствующие центральные моменты инерции.

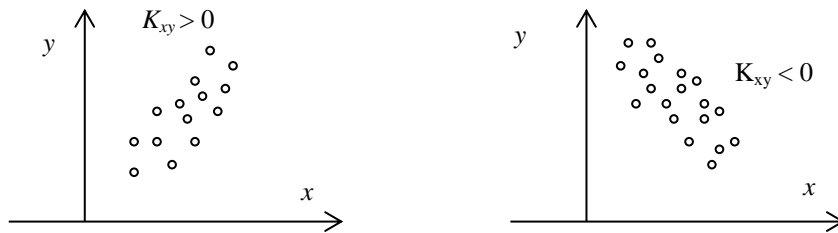
Корреляционный момент  $K_{xy}$  независимых случайных величин равен нулю:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f_1(x) f_2(y) dy dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = 0$$

$K_{xy}$  может быть равен нулю и для зависимых случайных величин. Для этого достаточно, чтобы распределение вероятностей было симметрично относительно одной из прямых  $x = m_x$  или  $y = m_y$ .

Случайные величины  $X, Y$  называются некоррелированными, если их корреляционный момент равен 0. Случайные величины  $X, Y$  называются некоррелированными, если  $K_{xy} = 0$ , нет вероятностной зависимости.



*Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.*

Центральные моменты можно выразить через начальные моменты.

### Система $n$ случайных величин

Распределение системы  $n$  случайных величин характеризует совместная функция распределения или  $n$ -мерная функция распределения, которая представляет собой выполнение следующих неравенств:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

Свойства  $n$ -мерной функции распределения:

- $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  (если хотя бы одно  $x_i \rightarrow 0$ ).

- $F(x_1, x_2, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{1,2,\dots,m}(x_1, x_2, \dots, x_m)$

- $F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$

Функция плотности вероятности (аналогично предыдущему):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \geq 0$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$f_{1,2,\dots,m}(x_1,\dots,x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n \text{ - условие согласованности.}$$

(n-m)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \text{ - условие нормировки.}$$

(n)

Функцию плотности вероятности можно записать через условные функции плотности вероятности:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2 / x_1) f(x_3 / x_1 x_2) \dots f(x_n / x_1 x_2 \dots x_{n-1})$$

Для независимых случайных величин:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$

### Числовые характеристики n-мерного закона распределения

$$\alpha_{r_1, r_2, \dots, r_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} f(x_1 x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

(n)

$$\mu_{r_1, r_2, \dots, r_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{x_1})^{r_1} (x_2 - m_{x_2})^{r_2} \dots (x_n - m_{x_n})^{r_n} f(x_1 x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

(n)

Можно записать:  $\alpha_{r_i=1, r_{j \neq i}=0} = m_{x_i}$ ;  $\mu_{r_i=1, r_{j \neq i}=0} = D_{x_i}$  - получим  $n$ -мерный вектор  $m_x$  и  $n$ -мерный вектор  $D_x$ .

Можно получить  $n(n-1)$  корреляционных моментов по формуле:

$$k_{x_i x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j}) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j}) f(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

Если  $i=j$ , то  $K_{x_i x_j} = D_{x_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Очевидно:  $K_{x_i x_j} = K_{x_j x_i}$ .

Коэффициенты корреляции:  $r_{ij} = \frac{K_{ij}}{S_i S_j}$

Совокупность дисперсий и корреляционных моментов  $n$ -мерного закона распределения образует корреляционную матрицу:

$$K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}$$

Матрица коэффициентов корреляции:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Чаще всего  $n$ -мерный закон распределения можно охарактеризовать совокупностью  $m_x$  и  $K_{ij}$ .

### **$n$ - мерный нормальный закон распределения**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{S_{x_1} S_{x_2} \dots S_{x_n} \sqrt{(2\pi)^n \cdot D}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \left[ \frac{(x_i - m_{x_i})}{S_{x_i}} \cdot \frac{(x_j - m_{x_j})}{S_{x_j}} \right] \right\}$$

Здесь:  $D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$  - определитель

$$D_{ij} < (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$D_{ij}$  - алгебраическое дополнение соответствующего элемента.

Если случайные величины независимы, то:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} S_{x_1} S_{x_2} \dots S_{x_n}} \times \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_{x_i})^2}{2S_{x_i}^2} \right\}$$

Очень важное свойство.

Определим нормальный закон распределения для двух случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix}; \quad r_{12} = r_{21} = r; \quad D = 1 - r^2; \quad D_{11} = D_{22} = 1; \quad D_{12} = D_{21} = r;$$

$$f(x, y) = \frac{1}{S_x S_y 2\pi \sqrt{1-r^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-m_x)^2}{S_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{S_x S_y} + \frac{(y-m_y)^2}{S_y^2} \right] \right\};$$

### Функциональные преобразования системы случайных величин

Имеем четыре случайных величин  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ , связанные между собой функциональной зависимостью:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2); \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2).$$

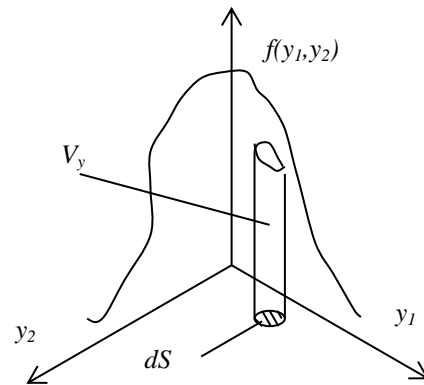
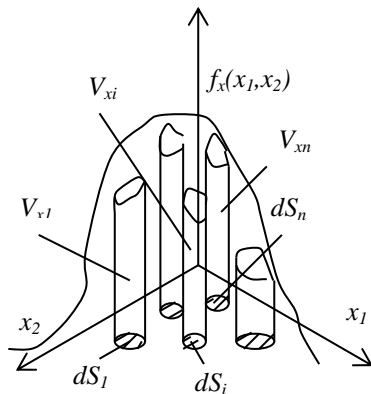
Известна функция плотности вероятности  $f_x(x_1, x_2)$ . Необходимо найти совместную функцию плотности вероятности для системы случайных величин  $Y_1, Y_2 \Rightarrow f_y(y_1, y_2)$ .

При этом, обратная связь неоднозначная:

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2); \quad \text{Для } y_1 \Rightarrow \psi_{11}, \psi_{12}, \dots, \psi_{1n}$$

$$x_2 = \psi_2(y_1, y_2); \quad \text{Для } y_2 \Rightarrow \psi_{21}, \psi_{22}, \dots, \psi_{2n}$$

Графическая интерпретация:



Из вероятности попадания точки  $A$  в область  $dS$ , которая равна объему  $V_y$ , следует, что точка  $B$  попадает в одну из областей  $dS_i$ . Эти события образуют полную группу, поэтому можно записать:

$V_y = \sum_{k=1}^n V_{x_k}$ , т.е. вероятность суммы событий равна сумме вероятностей

(как ранее было доказано).

$$f_y(y_1, y_2) ds = \sum_{k=1}^n f_x(x_{1k}, x_{2k}) dS_k$$

$$f_y(y_1, y_2) ds = \sum_{k=1}^n f_x(x_{1k}, x_{2k}) \left| \frac{dS_k}{dS} \right|$$

Абсолютная величина по той же самой простой причине, что

$$f_y(y_1, y_2) \geq 0$$

$$J = \left| \frac{dS_k}{dS} \right| = \frac{\partial(x_{1k}, x_{2k})}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{1k}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{1k}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_{2k}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{2k}}{\partial y_2} \end{vmatrix};$$

$J$  – Якобин преобразования

Если  $J=0$ , то случайные величины независимы.

Окончательно можно записать:

$$f_y(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^n f_x(x_{1k}, x_{2k}) \left| \frac{\partial(x_{1k}, x_{2k})}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \sum_{k=1}^n f_x(x_{1k}, x_{2k}) \left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_{1k}, x_{2k})} \right|;$$

В случае однозначного соответствия, когда  $x_1 = \psi_1(y_1, y_2)$ ,  $x_2 = \psi_2(y_1, y_2)$

$$f_y(y_1, y_2) = f_x(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \frac{f_x(x_1, x_2)}{\left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|};$$

Рассмотрим частный случай.

Имеются случайные величины  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ . Функциональная связь между ними:  $y_1 = \varphi_1(x_1)$ ,  $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$ . Обратное соответствие однозначное  $x_1 = \psi_1(y_1)$ ,  $x_2 = \psi_2(y_1, y_2)$ .

Известна функция плотности вероятности  $f_x(x_1, x_2)$ . Необходимо определить  $f_y(y_1, y_2)$ .

При решении задачи используется вышеприведенный закон (зависимость) и условие согласованности, т.е. сначала определяется  $f_y(y_1, y_2)$ , а затем уже  $f_y(y_2)$ .

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y_1, y_2) dy_1;$$

$$f_y(y_1, y_2) = \frac{f_x(x_1, x_2)}{\left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|}$$

$$J = \left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}.$$

Отсюда можно записать:

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x(x_1, x_2)}{\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right|} \cdot dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x(x_1, x_2)}{\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right|} \cdot dx_1.$$

Окончательно можно записать, если  $Y_1 \equiv X_1$

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x[x_1, \psi_2(x_1, y_2)]}{\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right|} \cdot dx_1.$$

Рассмотрим примеры.

1. Пусть:

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$f_x(x_1, x_2)$  - известно. Определить  $f_y(y_2)$ .

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 1; \quad x_2 = \psi_2(y_1, y_2) = y_2 - x_1.$$

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x[x_1, y_2 - x_1] dx_1.$$

Если случайные величины  $x_1$  и  $x_2$  независимы, то можно записать:

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(y_2 - x_1) \cdot dx_1 \quad - \quad \text{формула композиции законов}$$

распределения и коротко записывается следующим образом:

$$f_y = f_{x_1} * f_{x_2};$$

2. Пусть:

$$y_1 = x_1;$$



$$y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 x_2;$$

$$\partial \varphi_2 / \partial x_2 = x_1; \quad x_2 = \varphi_2(y_1, y_2) = y_2 / x_1;$$

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x\left(x_1, \frac{y_2}{x_1}\right)}{|x_1|} \cdot dx_1;$$

Если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы:

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}\left(\frac{y_2}{x_1}\right)}{|x_1|} \cdot dx_1.$$

3. Пусть:

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_2 / x_1;$$

$$\partial \varphi_2 / \partial x_2 = 1/x_1; \quad x_2 = \psi_2(y_1, y_2) = x_1 \cdot y_2;$$

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| f_x(x_1, x_1 \cdot y_2) \cdot dx_1.$$

И для независимых случайных величин:

$$f_y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| \cdot f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_1 \cdot y_2) \cdot dx_1$$

Рассмотрим пример функционального преобразования системы двух случайных величин.

Исходная формула

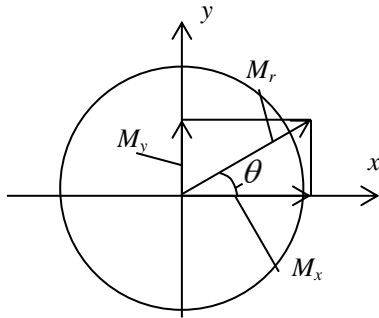
$$f_y(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^n f_x(x_{1k}, x_{2k}) \left| \frac{\partial(x_{1k}, x_{2k})}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{f_x(x_{1k}, x_{2k})}{\left| \frac{\partial(x_{1k}, x_{2k})}{\partial(y_1, y_2)} \right|};$$

$$\left\{ \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Задача.

Определить функцию плотности вероятности эквивалентного изгибающегося момента  $M_r$  в сечении круговой балки, если известна совместная функция плотности вероятности изгибающих моментов  $M_x, M_y$ .

$$f(M_x, M_y) = \frac{1}{2\pi S_x S_y} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{M_x^2}{S_x^2} + \frac{M_y^2}{S_y^2} \right) \right];$$



$$M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Обратная связь:

$$\begin{cases} M_x = M_r \cos \theta \\ M_y = M_r \sin \theta \end{cases} \quad \text{Компоненты вектора } M_r; \theta \in [0, 2\pi].$$

$$f_y(M_r, \theta) = f_x(M_r \cos \theta, M_r \sin \theta) \left| \frac{\partial(M_r \cos \theta \quad M_r \sin \theta)}{\partial(M_r \quad \theta)} \right| \quad - \quad \text{ПОД} \quad \text{ЗНАКОМ}$$

абсолютной величины Якобиан преобразования.

$$f(M_r) = \int_0^{2\pi} f_y(M_r, \theta) d\theta - \text{из условия согласованности.}$$

$$\frac{\partial(M_r \cos \theta \quad M_r \sin \theta)}{\partial(M_r \quad \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(M_r \cos \theta)}{\partial M_r} & \frac{\partial(M_r \cos \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(M_r \sin \theta)}{\partial M_r} & \frac{\partial(M_r \sin \theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \theta & -M_r \sin \theta \\ \sin \theta & M_r \cos \theta \end{vmatrix} = M_r \cos^2 \theta + M_r \sin^2 \theta = M_r;$$

$$f_y(M_r, \theta) = M_r / 2\pi S_x S_y \exp \left[ -\frac{1}{2} (M_r^2 \cos^2 \theta / S_x^2 + M_r^2 \sin^2 \theta / S_y^2) \right] =$$

$$= \frac{M_r}{2\pi S_x S_y} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot L \right];$$

$$L = \frac{M_r^2 \cos^2 \theta S_y^2 + M_r^2 \sin^2 \theta S_x^2}{S_x^2 S_y^2} = \frac{M_r^2 (\cos^2 \theta S_y^2 + \sin^2 \theta S_x^2)}{S_x^2 S_y^2} =$$

$$= \frac{M_r^2 \left( S_y^2 \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) + S_x^2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2\theta + 1) \right)}{2S_x^2 S_y^2} =$$

$$= \frac{M_r^2 \left[ (S_x^2 + S_y^2) + (S_y^2 - S_x^2) \cos 2\theta \right]}{2S_x^2 S_y^2} =$$

$$= \frac{M_r^2 \left[ (S_x^2 + S_y^2) \right]}{2S_x^2 S_y^2} + \frac{M_r^2 \left[ (S_y^2 - S_x^2) \cos 2\theta \right]}{2S_x^2 S_y^2};$$

$$f_y(M_r, \theta) = \frac{M_r}{2\pi S_x S_y} \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{M_r^2 (S_x^2 + S_y^2)}{S_x^2 S_y^2} + \frac{M_r^2 (S_y^2 - S_x^2)}{S_x^2 S_y^2} \cos 2\theta \right) \right];$$

$$f(m_r) = \int_0^{2\pi} \frac{M_r}{2\pi S_x S_y} \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{M_r^2 (S_x^2 + S_y^2)}{S_x^2 S_y^2} \right) \right] \cdot \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{M_r^2 (S_y^2 - S_x^2)}{S_x^2 S_y^2} \cos 2\theta \right) \right] d\theta =$$

$$= \frac{M_r}{2\pi S_x S_y} \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{M_r^2 (S_x^2 + S_y^2)}{S_x^2 S_y^2} \right) \right] \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{M_r^2 (S_y^2 - S_x^2)}{S_x^2 S_y^2} \cos 2\theta \right) \right] d\theta =$$

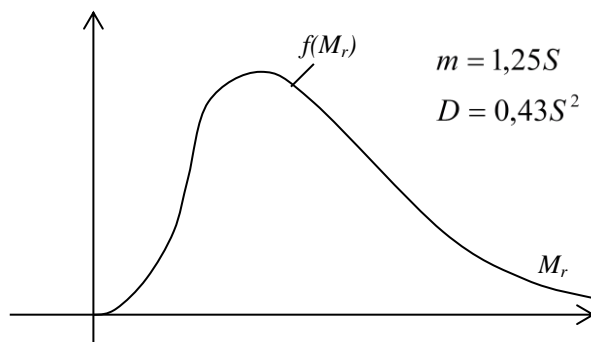
$$= \frac{M_r}{S_x S_y} \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{M_r^2 (S_x^2 + S_y^2)}{S_x^2 S_y^2} \right) \right] \cdot J_0 \left( \frac{M_r^2 (S_y^2 - S_x^2)}{4S_x^2 S_y^2} \right);$$

$J_0(\alpha)$  - Бесселева функция.

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cdot \cos 2\varphi) d\varphi.$$

Часто на практике  $S_x = S_y = S$ .

Тогда  $f(M_r) = \frac{M_r}{S^2} \cdot \exp \left( -\frac{M_r^2}{2S^2} \right)$  - релеевское распределение.



Довольно сложная задача решена, потому что составляющие вектора  $M_r$  были некоррелированы.

## Теоремы о числовых характеристиках

Дадим формулу для математического ожидания произвольной функции  $\varphi(X, Y)$  двух случайных величин  $(X, Y)$ . В соответствии с общим определением математического ожидания мы получим математическое ожидание функции  $\varphi(X, Y)$ , если найдено среднее значение этой функции, придав каждому ее возможному значению  $\varphi(X, Y)$  вес, равный соответствующему элементу вероятности  $f(x, y) dx dy$ . В результате получим формулу:

$$M[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y) f_y(y/x) dy] f_x(x) dx.$$

Для смешанных моментов:

$$\alpha_{ks} = M[X^k Y^s].$$

Для смешанных центральных моментов:

$$\mu_{ks} = M[(X - m_x)^k (Y - m_y)^s].$$

Из этих определений мы можем получить следующие правила для вычисления числовых характеристик случайных величин.

1. Для произвольной неслучайной величины  $C = \text{const}$ .

$$M[C] = C$$

$$D[C] = 0$$

2.  $Y = CX$ ,  $Y, X$  – случайные величины

$$m_y = \langle CX \rangle = C \langle X \rangle = C \cdot m_x$$

$$D_y = \langle \tilde{y}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(y) dy = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = c^2 \cdot D_x$$

$\tilde{y} = y - m_y$  - центрированная случайная величина.

$$D_y = c^2 \cdot D_x.$$

3.  $Z = X + Y$

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy = m_x + m_y ; \text{ (из условия согласованности).}$$

По-другому это правило можно сформулировать:

$$\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle .$$

$$D_z = \langle \tilde{Z}^2 \rangle = \langle (\tilde{X} + \tilde{Y})^2 \rangle = \langle (\tilde{X}^2 + 2\tilde{X}\tilde{Y} + \tilde{Y}^2) \rangle = \langle \tilde{X}^2 \rangle + 2\langle \tilde{X}\tilde{Y} \rangle + \langle \tilde{Y}^2 \rangle = D_x + 2K_{xy} + D_y$$

Если случайные величины  $X, Y$  независимы, то  $K_{xy} = 0$

И:

$$D_z = D_x + D_y$$

4.  $Z = XY$ .

Определим корреляционный момент двух случайных величин  $X, Y$ :

$$k_{xy} = \langle \tilde{X} \cdot \tilde{Y} \rangle = \langle (X - m_x)(Y - m_y) \rangle = \langle XY - m_y X - m_x Y + m_x m_y \rangle =$$

$$\langle XY - m_y \langle X \rangle - m_x \langle Y \rangle + \langle m_x m_y \rangle \rangle =$$

$$= \langle XY \rangle - m_y m_x - m_x m_y + m_x m_y = \langle XY \rangle - m_x m_y .$$

Таким образом:

$$m_z = \langle XY \rangle = m_x m_y + K_{xy} .$$

Если случайные величины независимы  $K_{xy} = 0$

$$m_z = m_x m_y$$

При определении дисперсии предполагаем, что случайные величины  $X, Y$  независимы:

$$D_z = \langle \tilde{Z}^2 \rangle = \langle (XY - m_x m_y)^2 \rangle = \langle X^2 Y^2 - 2XY m_x m_y + m_x^2 m_y^2 \rangle = \langle X^2 Y^2 \rangle - 2m_x m_y \langle XY \rangle + m_x^2 m_y^2 =$$

$$= \langle X^2 \rangle \langle Y^2 \rangle - 2m_x m_y m_x m_y + m_x^2 m_y^2 = \langle X^2 \rangle \langle Y^2 \rangle - m_x^2 m_y^2 .$$

Но мы уже записывали:

$$\mu_2(x) = \alpha_2(x) - m_x^2 ; \mu_2(y) = \alpha_2(y) - m_y^2$$

$$\langle X^2 \rangle = \langle \tilde{X}^2 \rangle + m_x^2$$

$$\langle Y^2 \rangle = \langle \tilde{Y}^2 \rangle + m_y^2 .$$

$$D_z = (D_x + m_x^2)(D_y + m_y^2) - m_x^2 m_y^2$$

И окончательно можно записать:

$$D_z = D_x D_y + m_x^2 D_y + m_y^2 D_x.$$

$$5. Y = \sum_{i=1}^n (a_i x_i) + b_i;$$

Очевидно:

$$m_y = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b;$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{x_i x_j}.$$

### Комплексная случайная величина

До сих пор мы рассматривали действительные случайные величины. Однако в теории вероятности и в теории случайных функций часто бывает удобно пользоваться комплексными случайными величинами. Поэтому для дальнейшего нам необходимо распространить определение математического ожидания, дисперсии и корреляционного момента на комплексные случайные величины.

Рассмотрим комплексную случайную величину:

$$Z = X + iY, \text{ где } X \text{ и } Y \text{ – действительные случайные величины.}$$

Рассматривая комплексную случайную величину  $Z$  как функцию двух действительных случайных величин  $X$  и  $Y$  и распространяя определение математического ожидания произвольной функции на комплексные функции, получим:

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = M[X] + i M[Y];$$

$$m_z = m_x + i m_y.$$

Дисперсия комплексной случайной величины  $Z$  – математическое ожидание квадрата модуля отклонения этой случайной величины от ее математического ожидания.

$$D[Z] = \langle |\tilde{Z}|^2 \rangle = \langle |z - m_z|^2 \rangle = \langle |x + iY - m_x - im_y|^2 \rangle = \langle (x - m_x)^2 + (Y - m_y)^2 \rangle =$$

$$= \langle \tilde{X}^2 \rangle + \langle \tilde{Y}^2 \rangle = D_x + D_y.$$

Дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой части.

Корреляционный момент комплексных случайных величин

$Z_1 = X_1 + iY_1$  и  $Z_2 = X_2 + iY_2$  определяется формулой:

$$k_{z_1 z_2} = \langle (Z_1 - m_{z_1})(Z_2^* - m_{z_2}^*) \rangle = \langle \tilde{Z}_1 \cdot \tilde{Z}_2^* \rangle.$$

Звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина:

$$Z_2^* = X_2 - iY_2;$$

$$K_{z_1 z_2} = K_{x_1 x_2} + K_{y_1 y_2} + i(K_{y_1 x_2} - K_{x_1 y_2}).$$

Корреляционный момент комплексных случайных величин выражается через корреляционные моменты их действительных и мнимых частей. При определении дисперсий и корреляционных моментов комплексных случайных величин сохраняются основные свойства этих характеристик в области действительных случайных величин – дисперсия всегда существенно положительна и является корреляционным моментом случайной величины с самой собой.

Корреляционный момент комплексных случайных величин зависит от порядка, в котором берутся случайные величины, а именно, при изменении порядка случайных величин их корреляционный момент переходит в комплексную сопряженную величину:

$$K_{z_2 z_1} = \langle \tilde{Z}_2 \cdot \tilde{Z}_1^* \rangle = \langle \tilde{Z}_1^* \cdot \tilde{Z}_2 \rangle = K_{z_1 z_2}^*$$

В соответствии с этим корреляционная матрица комплексного случайного вектора обладает тем свойством, что ее элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, являются комплексно сопряженными величинами:

$$K_{12} = K_{21}^*.$$

## Разложение функции распределения в ряд по ортогональным нормированным функциям

В прикладных задачах часто требуется приближенно представить плотность вероятности или функцию распределения случайной величины подходящим аналитическим выражением, зная некоторые числовые характеристики этой величины. Существует несколько способов решения указанной задачи.

Излагаемый способ представления законов распределения основан на разложении их в ряды по соответствующим системам функций.

Пусть  $f(x)$  – плотность вероятности, которую требуется представить аналитическим выражением,  $\varphi(x)$  – некоторая эталонная плотность вероятности;  $g_1(x), g_2(x) \dots g_n(x)$  – система полиномов, ортогональных относительно распределения  $\varphi(x)$ , т.е. удовлетворяющая условиям:

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot g_j(x) \cdot g_k(x) dx = \begin{cases} a_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Если  $a_j = 1$ , то система полиномов называется ортонормированной.

Найдем формальное разложение плотности вероятности  $f(x)$  в ряд вида:

$$f(x) = \varphi(x) [c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \dots] \quad (1)$$

Для определения коэффициентов  $c_k$  умножим это выражение на  $Q_k(x)$  и проинтегрируем результат от  $-\infty$  до  $\infty$ . Тогда можно получить (учитывая условие ортонормированности):

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) Q_k(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ряд (1) при некоторых условиях сходится к  $f(x)$  и, следовательно, может служить для аналитического представления  $f(x)$  с любой степенью точности. Однако сходимость или расходимость ряда не имеет практического значения. Важно лишь, чтобы плотность вероятности  $f(x)$  могла быть с достаточной точностью представлена с помощью небольшого числа (обычно двух-трех) членов ряда.



Разложение (1) можно строить на основе различных, эталонных функций  $\varphi(x)$ . Выбор «эталонной» плотности вероятности  $\varphi(x)$  в значительной мере определяется характером функции  $f(x)$ . Для непрерывных величин широкое распространение получило разложение, основанное на нормальном распределении  $\varphi(x)$ , которое для центрированной нормированной случайной величины имеет вид:

$$\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2).$$

При этом полиномы  $Q_k(x)$  выражаются формулой:

$$Q_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k(x); \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$H_k(x)$  - полиномы Эрмита.

$$H_0(x) = 1;$$

$$H_1(x) = x;$$

$H_{k+1}(x) = x \cdot H_k - k \cdot H_{k-1}$  - рекуррентная формула.

$$H_2(x) = x^2 - 1;$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x;$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

$$\text{Тогда: } c_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_k(x) dx.$$

Если подставить в эту формулу выражения для  $H_k(x)$  получим:

$$c_0 = 1; \quad c_1 = c_2 = 0; \quad c_3 = \alpha_3 / \sqrt{3!}; \quad c_4 = (\alpha_4 - 3) / \sqrt{4!};$$

$$c_5 = (\alpha_5 - 10\alpha_3) / \sqrt{5!}; \quad c_6 = (\alpha_6 - 15\alpha_4 + 30) / \sqrt{6!} \text{ и т.д.}$$

И ряд принимает вид:

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2) \left[ 1 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k H_k(x) / \sqrt{k!} \right].$$

Так как для любой случайной величины  $X$  момент порядка  $k$  соответствующей нормированной величины равен  $\mu_k / S_k$ , то для произвольной случайной величины  $X$ , имеющей среднее квадратичное

отклонение  $S_k$  и  $m_x \neq 0$ , величины  $\alpha_k$  в формулах должны быть заменены соответствующими величинами:  $\mu_k / S_k$ .

В результате получим:

$$c_0 = 1; c_1 = c_2 = 0; c_3 = \mu_3 / \sqrt{3!} S^3 = \frac{A_x}{\sqrt{3!}}; c_4 = 1 / \sqrt{4!} (\mu_4 / S^4 - 3) = \frac{E_x}{\sqrt{4!}}, \text{ и т.д.}$$

Ортонормированные полиномы можно представить в следующем виде:

$$Q_0(x) = 1; Q_k(x) = \sum_{i=0}^k a_{ik} x^i \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ - т.е. степенными функциями.}$$

Как известно:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) Q_k(x) dx; \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Подставляя сюда выражение для полинома, получаем:

$$c_0 = 1; c_k = \sum_{i=0}^k a_{ik} \alpha_i; \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$\alpha_i$  - начальный момент  $k$ -го порядка случайной величины.

$$\text{Получим: } f(x) = \varphi(x) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \sum_{i=0}^k a_{ik} \alpha_i \right].$$

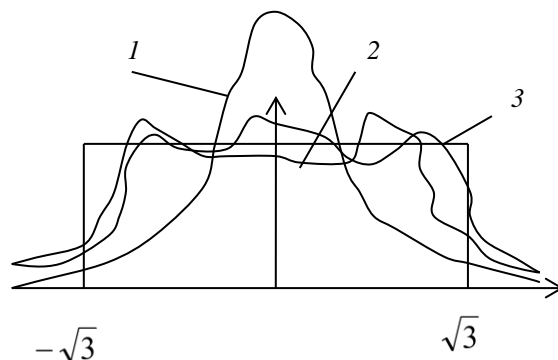
### Пример:

Имеем равномерный закон распределения случайной величины  $X$  на интервале  $[a, b]$ .

$$m_x = (a + b) / 2; D_x = (b - a)^2 / 12.$$

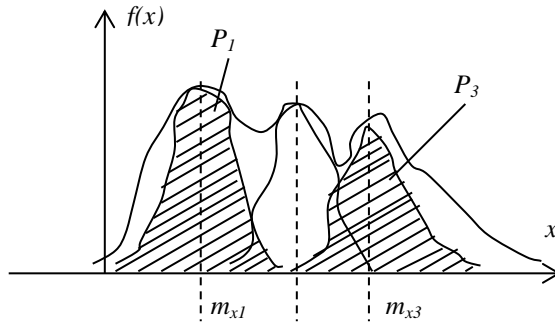
Необходимо представить плотность вероятности рядом Грама-Шарлье.

Если получить функцию плотности вероятности централизованной нормированной случайной величины  $X$ , получим:



## Аналитическое разложение произвольного закона распределения на нормальные составляющие

Реализация идеи данного метода представлена на рисунке:



Пусть заданная функция распределения величины  $X$  выражается через сумму  $n$  нормальных распределений  $f_r(x - m_{xr})$ . Вероятность того, что имеет место распределение  $f_r(x - m_{xr})$  обозначим  $P_r$ .

Тогда можно записать:  $f(x) = \sum_{r=1}^n P_r f_r(x - m_{xr})$ .

$f_r$  - нормальная функция распределения с параметрами  $m_{xr}$ ,  $D_{xr}$ .

Центральный момент  $s$ -го порядка для случайной величины  $X$  можно записать:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx \text{ (по определению).}$$

Введем обозначения:  $\tilde{x} = x - m_x$ ;  $m_r = m_{xr} - m_x$ .

Тогда:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x} + m_{xr} - m_x)^s \sum_{r=1}^n P_r f_r(x - m_{xr}) dx = \sum_{r=1}^n P_r \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x} + m_r)^s f_r(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Подставляя сюда разные значения  $s$  и интегрируя, получаем систему уравнений:

$$\mu_0 = \sum_{r=1}^n P_r = 1$$

$$\mu_1 = \sum_{r=1}^n P_r m_r = 0$$

$$\mu_2 = \sum_{r=1}^n P_r (m_r^2 + D_r)$$

$$\mu_3 = \sum_{r=1}^n P_r (m_r^3 + 3m_r D_r)$$

$$\mu_4 = \sum_{r=1}^n P_r (m_r^4 + 6m_r^2 D_r + 3D_r^2)$$

$$\mu_5 = \sum_{r=1}^n P_r (m_r^5 + 10m_r^3 D_r + 15m_r D_r^2)$$

Напоминаем, для нормального закона распределения:

$$\mu_k = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

$$\mu_k = (k-1)!! S_x^k, \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

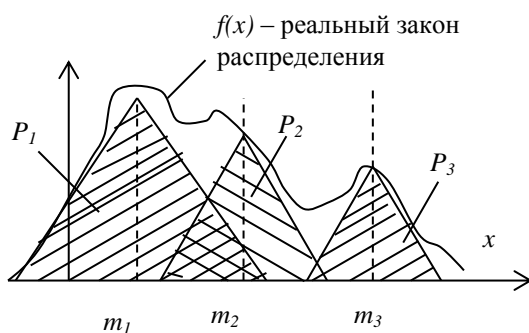
Формулы дают удобную возможность приравнять заменяющую функцию заменяемой по желаемому количеству центральных моментов.

В данном случае имеем 6 уравнений – для определения 6 параметров. Определяем две составляющие, т.к. каждая составляющая определяется тремя параметрами.

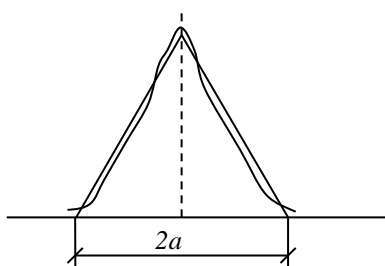
### **Графический способ разложения произвольного закона распределения на нормальные составляющие**

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений вызывает затруднения вычислительного характера. Поэтому представляет интерес простой графический способ разбивки ненормального закона распределения вероятностей на нормальные составляющие.

Для этого необходимо прежде всего разбить заданную диаграмму распределения вероятностей на равнобедренные треугольники, которые при сложении давали бы фигуру, возможно более близкую к заданной.



Равнобедренный треугольник может быть довольно точно заменен нормальной функцией распределения. Но для этого необходимо определить дисперсию  $f(x)$ , если она описывается треугольником.



$D = \frac{a^2}{6}$ . Подставляя это значение в формулу для нормального закона, можно построить  $f(x)$ .

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1;$$

$$\sum_{i=1}^n P_i (m_i - m_x) = 0; \text{ и т.д.}$$

Можно брать много составляющих и достаточно точно аппроксимировать закон.

### **Приведение случайного вектора к случайному вектору с некоррелированными составляющими**

В приложениях часто приходится решать задачу случайного вектора  $X$  другим случайным вектором  $V$ , составляющие которого взаимно некоррелированы и являются линейными функциями составляющих вектора  $X$ .

Положим:

$$X_1 - m_{x1} = V_1$$

$$X_2 - m_{x2} = a_{21}V_1 + V_2$$

$$X_3 - m_{x3} = a_{31}V_1 + a_{32}V_2 + V_3$$

.....

$$X_n - m_{xn} = a_{n1}V_1 + a_{n2}V_2 + \dots + a_{n1n-1}V_{n-1} + V_n$$

Здесь  $V_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) - составляющие случайного вектора  $V$ ;

$a_{i,j}$  - неопределенные коэффициенты, которые мы определим так, чтобы случайные величины  $V_i$ ,  $i=1, \dots, n$  были некоррелированными.

Тогда решая систему уравнений последовательно относительно  $V_1, V_2, \dots, V_n$  можно будет определить все составляющие случайного вектора  $V$ , удовлетворяющего поставленному условию. При этом  $m_{vi} = 0$ , т.е.  $V_i$  - величина центрированная.

Пусть имеем две линейные функции:

$$z = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b;$$

$$U = \sum_{j=1}^m c_j Y_j + d.$$

Тогда их коррелированный момент равен:

$$K_{ZU} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_j^* K_{xij} \quad (1)$$

Далее, очевидно, что

$$D_{V1} = D_{x1} = K_{11}.$$

Пользуясь формулой (1), выразим корреляционный момент случайной величины  $X_2$  и  $X_1$  через дисперсии и корреляционный момент случайных величин  $V_1$  и  $V_2$ :

$$K_{21} = a_{21}D_{V1} + \langle V_2 V_1^* \rangle.$$

Отсюда видно, что для того чтобы сл. величины  $V_1$  и  $V_2$  не были коррелированы, коэффициент  $a_{21}$  следует определить формулой:

$$a_{21} = \frac{K_{21}}{D_{V1}}.$$



Давая в формулах (2, 3, 4) значения  $2, \dots, n$  можно последовательно определить все коэффициенты  $a_{ij}$  и дисперсии сл. величин  $V_i, i = 1, \dots, n$  так, чтобы случайные величины  $V_i, i = 1, \dots, n$  были некоррелированными. Тогда:

$$X_i = m_{xi} + \sum_{j=1}^i a_{ij} V_{ji}; \quad a_{ii} = 1.$$

### Характеристическая функция случайных величин

Характеристической функцией действительной скалярной случайной величины  $X$  называется математическое ожидание функции  $e^{iux}$ , рассматриваемое как функция переменной  $u$ :

$$\theta_x(u) = \langle e^{iux} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx.$$

Характеристические функции обладают рядом свойств, которые позволяют значительно упростить решение многих задач теории вероятности.

Свойства характеристических функций.

1. Характеристическая функция любой случайной величины при всех действительных значениях  $u$  непрерывна и не превосходит по модулю 1.

2.  $\theta_x(-u) = \theta_x^*(u)$  - комплексное свойство нечетности.

3.  $X$  и  $Y$  случайные величины, которые связаны линейной зависимостью:

$$Y = aX + b.$$

Тогда характеристическая функция случайной величины  $Y$

$$\theta_y(u) = \langle e^{iu(ax+b)} \rangle = e^{iub} \cdot \theta_x(au).$$

4.  $Z = X + Y$ ,  $X, Y$  независимы.

$$\theta_z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{iuy} f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f_2(y) dy = \theta_x(u) \theta_y(u).$$

Т.е. характеристическая функция случайной величины  $Z$  равна произведению характеристической функции случайных величин  $X$  и  $Y$ .



Формулу легко обобщить на сумму любого количества независимых случайных величин:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i ;$$

$$\theta_z(u) = \prod_{i=1}^n \theta_{x_i}(u) /$$

5.  $Y = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$  - линейная функция.

$$\theta_y(u) = e^{iub} \prod_{i=1}^n \theta_{x_i}(a_i \cdot u) .$$

Характеристическая функция нормально распределенной величины  $X$ :

$$\theta(u) = \exp(im_x u - \frac{1}{2} D_x u^2) .$$

Согласно определению характеристической функции каждому распределению вероятностей соответствует одна вполне определенная характеристическая функция. Справедливо и обратное утверждение: распределение вероятностей определяется характеристической функцией.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \theta_x(u) du .$$

Если существует момент порядка  $k$  случайной величины  $X$ , то характеристическую функцию можно дифференцировать  $k$  раз, так как в результате получится равномерно (относительно  $u$ ) сходящийся интеграл. Тогда будем иметь:

$$\theta^k(u) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{iux} f(x) dx .$$

Тогда полагая  $u=0$ , получим выражение моментов случайной величины через ее характеристическую функцию:

$$\alpha_k = i^{-k} \theta^k(0) .$$

Если случайная величина  $X$  имеет конечные моменты до порядка  $n$  включительно, то, применяя к характеристической функции формулу Маклорена, получим:

$$\theta(u) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{i^k \alpha_k}{k!} u^k + R_n, \text{ где } R_n - \text{остаточный член.}$$

Таким образом, все существующие моменты случайной величины могут быть найдены путем разложения характеристической функции в степенной ряд.

Аналогично выражаются через характеристическую функцию центральные моменты случайной величины.

$$e^{-iumx} \theta_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(x-m_x)} f(x) dx.$$

Продифференцируем  $k$  раз:

$$\frac{d^k}{du^k} [e^{-iumx} \theta_x(u)] = i^k \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k e^{iu(x-m_x)} f(x) dx.$$

Полагая  $u=0$ , получим:

$$\mu_k = i^{-k} \frac{d^k}{du^k} [e^{-iumx} \theta_x(u)] \Big|_{u=0}.$$

Если случайная величина  $X$  имеет конечные центральные моменты до порядка  $n$  включительно, то, применяя к функции  $e^{-iumx} \theta(u)$  формулу Маклорена, получим:

$$e^{-iumx} \theta(u) = 1 + \sum_{k=2}^n i^k \frac{\mu_k}{k!} u^k + R_n$$

Так могут быть определены все существующие центральные моменты случайные величины.

Рассмотрим пример нормального закона распределения.

$$e^{-iumx} \theta_x(u) = \exp\left(-\frac{1}{2} D_x u^2\right)$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2} D_x U^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot D_x^k}{2^k \cdot k!} \cdot u^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \cdot D_x^k}{2^k \cdot k!} \cdot u^{2k}.$$

Сравнивая две формулы, получим:

$$\mu_{2k-1} = 0;$$

$$\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} D_x^k = (2k-1)!! \cdot D_x^k.$$

Пусть:  $Y = \varphi(X)$

$$\theta_y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\varphi(x)} f(x) dx .$$

Тогда плотность вероятности случайной величины  $Y$ :

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\varphi(x)} f(x) dx .$$

Иногда используется преобразование Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s) ds = \begin{cases} f(t) & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} .$$

### Элементы теории случайных функций

Случайной функцией называется функция, значение которой при каждом данном значении аргумента (или нескольких аргументов) является случайной величиной.

Пример: измерение напряжений в крыле в процессе эксплуатации.

В результате опыта случайная функция может принимать различные конкретные формы. Всякая функция, которой может оказаться равной случайная функция в результате опыта, называется реализацией случайной функции. Идентификация случайной функции:  $X(t)$ ,  $x(t)$ .

Если аргумент случайной функции представляет собой совокупность  $n$  скалярных переменных, то его можно рассматривать как  $n$ -мерный вектор.

Таким образом, аргументами случайных функций могут быть производные скалярные или векторные величины.

Во многих практически интересных задачах роль аргумента случайной функции играет время  $t$ .

При исследовании случайных функций приходится различать два случая:

1. Аргумент случайной функции  $t$  может принимать любые значения в заданном интервале. В этом случае  $X(t)$  обычно называют случайным или стохастическим процессом.

2. Аргумент случайной функции может принимать только определенные дискретные значения. В этом случае  $X(t)$  – случайная последовательность.

Существует два определения непрерывности случайных процессов.

1. Непрерывность по вероятности.
2. Непрерывность в среднеквадратическом.

1. Процесс  $X(t)$  называется непрерывным по вероятности, если при любом  $\varepsilon (\varepsilon > 0)$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P\{|X(t + \Delta) - X(t)| \geq \varepsilon\} = 0, \text{ т.е. будем считать, что за малые промежутки}$$

времени ордината процесса может получить приращение только с малой вероятностью.

2. 
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle |X(t + \Delta) - X(t)|^2 \rangle = 0.$$

### Определение сходимости

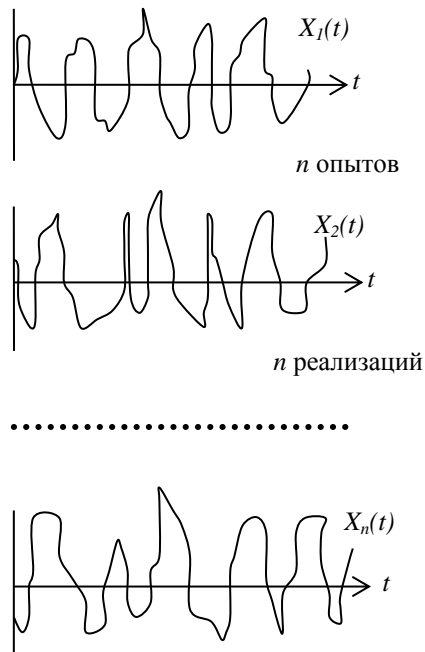
Предел последовательности случайных функций есть такая случайная функция  $X$ , второй начальный момент разности между которой и элементами последовательности  $X_n$  при определенных условиях стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle |X_n(t) - X(t)|^2 \rangle = 0;$$

$$X = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Последовательность случайных функций  $X_n$  сходится по вероятности к функции  $X$ , если при любом  $\varepsilon > 0$  вероятность неравенства  $|X_n - X| \geq \varepsilon$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n(t) - X(t)| > \varepsilon) = 0.$$



Итак, рассмотрим случайную функцию  $X(t)$  и предположим, что для ее исследования произведено  $n$  независимых опытов, т.е. получили  $n$ -реализаций.

При каждом данном значении аргумента  $t$  значение случайной функции  $X(t)$  является обычной скалярной величиной. Естественно, что полной вероятностной характеристикой этого значения является его закон распределения.

Одномерный закон распределения случайной функции  $X(t)$  в общем случае зависит от  $t$  как от параметра и может быть задан одномерной плотностью вероятностью  $f(x_1|t_1)$ .

Одномерный закон распределения случайной функции является достаточной характеристикой случайной функции для тех задач, в которых значения случайной функции при различных значениях аргумента рассматриваются изолированно друг от друга.

Для решения задач, в которых приходится рассматривать совместно значения случайной функции при двух или большем числе значений аргумента, необходимо ввести совместные законы распределения случайной функции при нескольких значениях аргумента.

Двумерным законом распределения случайной функции  $X(t)$  называется совместный закон распределения ее значения  $X(t_1), X(t_2)$  при двух произвольно взятых значениях  $t_1, t_2$  аргумента  $t$ .

Двумерная плотность вероятности:

$$f(x_1, x_2 | t_1, t_2)$$

$n$ -мерным законом распределения случайной функции  $X(t)$  называется закон распределения совокупности ее значений  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  при  $n$  произвольно взятых значениях  $t_1, \dots, t_n$  аргумента  $t$ .

$n$ -мерный закон распределения случайной функции  $X(t)$  характеризуется  $n$ -мерной плотностью вероятности:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_n)$ , которая в общем случае зависит от значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$  аргумента  $t$  как от параметров.

Зная  $n$ -мерную плотность вероятности случайной функции, можно определить все ее плотности вероятности чисел измерений, меньших, чем  $n$ .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m | t_1, t_2, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n.$$

Если значения случайной функции  $X(t)$  при любых различных значениях аргумента  $t_1, t_2, \dots, t_n$  являются независимыми случайными величинами, то  $n$ -мерная плотность вероятности случайной функции  $X(t)$  при любых  $n$  выражается через ее одномерную плотность вероятности формулой:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1 | t_1) \cdot f(x_2 | t_2) \cdot \dots \cdot f(x_n | t_n).$$

Случайная функция считается заданной, если заданы все многомерные законы распределения для любых значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$  из области изменения аргумента  $t$ .

Однако на практике вместо самих многомерных законов распределения в большинстве случаев ограничиваются заданием соответствующих числовых характеристик этих законов.

## Числовые характеристики случайных процессов

### 1. Начальные моменты случайных процессов

$$\alpha_r = \alpha_{r_1 r_2 r_3 \dots r_n}$$

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$$

### 2. Центральные моменты случайных процессов.

$$\mu_r = \mu_{r_1 r_2 r_3 \dots r_n}$$

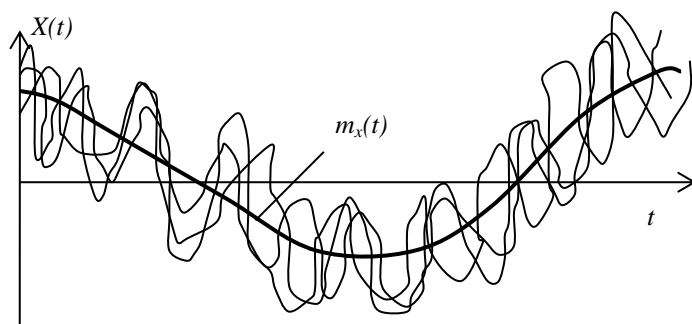
$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

Из бесконечного числа моментов наиболее важными с точки зрения характеристики случайной функции являются моменты первого и второго порядка. Математическое ожидание:

$$\alpha_1 = \langle X(t) \rangle = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x|t) dx.$$

Математическим ожиданием случайного процесса  $X(t)$  называется такая неслучайная функция времени  $m_x(t)$ , значение которой при каждом значении аргумента  $t$  равно математическому ожиданию значений ординат процесса  $X$  при этом  $t$ .

Математическое ожидание случайной функции представляет собой некоторую среднюю функцию, около которой группируются и относительно которой колеблются все возможные реализации случайной функции.

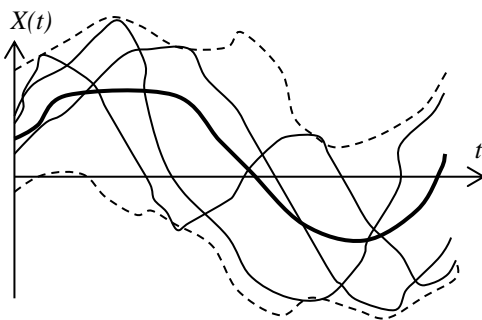
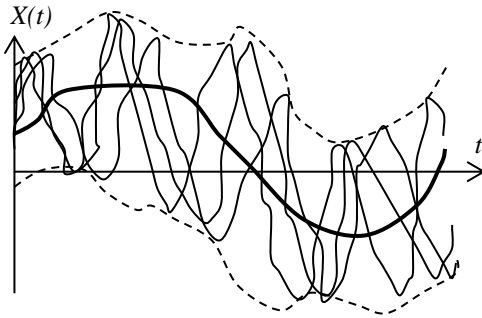


В качестве меры рассеяния значений случайной функции можно принять ее дисперсию.

$$\mu_2(t) = D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f(x|t) dx.$$

Дисперсия случайного процесса есть такая неслучайная функция времени  $D_x(t)$ , значение которой при каждом данном значении аргумента равно дисперсии значения случайного процесса при этом значении аргумента.

Пусть для двух случайных процессов  $m_{x_1}(t) = m_{x_2}(t)$ ,  $D_{x_1}(t) = D_{x_2}(t)$ .



Характер изменения реализаций этих двух случайных процессов различен. Именно для того, чтобы учесть связь между значениями случайной функции при различных значениях аргумента или степень изменчивости случайной функции при изменении аргумента, необходимо задать корреляционную функцию или автокорреляционную функцию случайного процесса  $X(t)$ .

$$\alpha_{1,1} = K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [x^*(t_2) - m_x^*(t_2)] f(x_1, x_2 | t_1, t_2) dx_1 dx_2 .$$

Легко видеть, что дисперсия случайной функции может быть определена как значение корреляционной функции при равных значениях ее двух аргументов.

$$D_x(t) = K_x(t, t) .$$



Взаимной корреляционной функцией или корреляционной функцией связи двух случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  называется корреляционный момент значений этих функций при произвольно взятых значениях их аргументов:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_x(t_1))(y^*(t_2) - m^*(t_2)) f(x, y | t_1, t_2) dx dy.$$

### Классификация случайных процессов

Основная классификация случайных процессов:

1. Стационарные случайные процессы.
2. Нестационарные случайные процессы.

Для стационарных случайных процессов все многомерные законы распределения зависят только от взаимного расположения моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , но не от самих значений этих величин.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0)$$

$t_0$  - любое число.

В частном случае при  $n=1$  и  $n=2$ , полагая  $t_0 = -t_1$ , для стационарных процессов будем иметь:

$$n = 1 \Rightarrow f(x_1 | t_1) = f(x_1 | 0) = f(x_1)$$

$$n = 2 \Rightarrow f(x_1, x_2 | t_1, t_2) = f(x_1, x_2 | 0, t_2 - t_1) = f(x_1, x_2 | t_2 - t_1) = f(x_1, x_2 | \tau); \tau = t_2 - t_1.$$

Т.е. одномерный закон распределения ординаты случайного процесса не зависят от момента времени, для которого эта ордината выбрана, а двумерный закон распределения зависит только от разности моментов времени, для которых выбраны ординаты случайного процесса.

Тогда для стационарных процессов имеем:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = const$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = const$$

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t_1) \cdot \tilde{x}(t_2) \cdot f(x_1, x_2 | t_2 - t_1) \cdot dx_1 dx_2 = K_x(t_2 - t_1) = K(\tau)$$

Классификация стационарных процессов.

Случайные процессы называются стационарными в широком смысле, если их математическое ожидание  $m_x(t)$  и дисперсия  $D_x(t)$  постоянны, а корреляционная функция зависит только от разности моментов времени, для которых взяты ординаты случайного процесса. Такие случайные процессы являются нестационарными для моментов высших порядков.

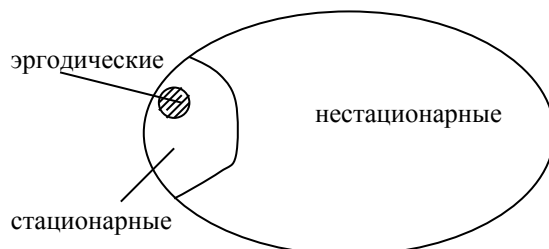
Случайный процесс называется стационарными в узком смысле, если его  $n$ -мерный закон распределения при любом  $n$  зависит только от интервалов  $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1$  и не зависит от положения этих интервалов в области аргументов  $t$ .

Случайные процессы называются эргодическими случайными процессами, если для них выполняется следующее условие:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau = 0.$$

Т.е. случайный стационарный процесс называется эргодическим, если его корреляционная функция затухает при увеличении  $\tau$ . Если  $\varepsilon$  произвольная малая положительная величина, то при достаточно большом  $T_0$ :

$$|K_x(\tau)| < \varepsilon; \text{ при } |\tau| > T_0.$$



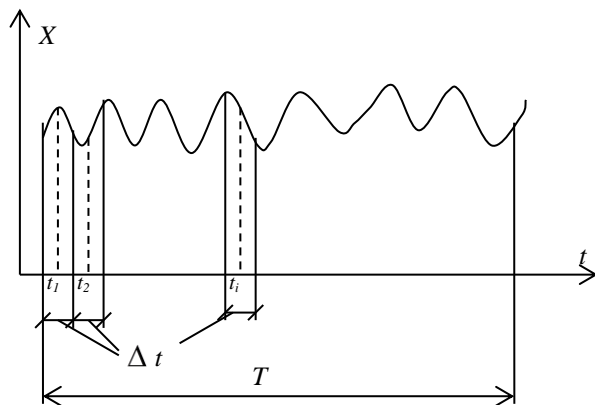
Для эргодических стационарных процессов:

$$m_x = l.i.m. \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$$K_x(\tau) = l.i.m. \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) \cdot \tilde{x}^*(t + \tau) \cdot dt;$$

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) \cdot \tilde{y}^*(t + \tau) \cdot dt .$$

То есть для эргодических стационарных процессов вместо того, чтобы рассматривать ряд ее реализаций при фиксированном значении  $t$ , можно взять значения одной и той же реализации при различных значениях  $t$  на достаточно большом интервале изменения  $t$ .



$$\Delta t = T/n$$

$n$  - количество интервалов

$t_i$  - среднее значение интервалов.

Можно перейти от интеграла к сумме (как обычно):

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i) ;$$

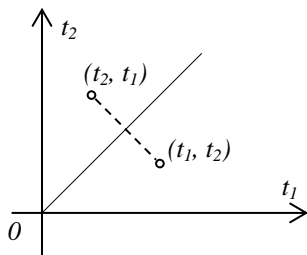
$$K_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} [x(t_{i+m}) - m_x][x(t_i) - m_x]$$

### Свойства корреляционной функции

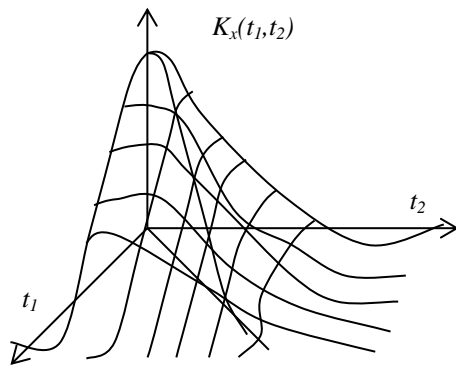
1. Корреляционная функция симметрична.

$K_x(t_2, t_1) = K_x^*(t_1, t_2)$  - в общем случае;

$K_x(t_2, t_1) = K_x(t_1, t_2)$  - для действительного случайного процесса.

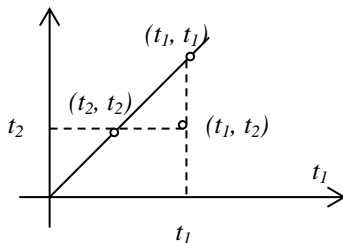


Геометрический смысл свойства симметрии корреляционной функции в случае скалярного аргумента  $t$  состоит в том, что корреляционная функция имеет комплементарно сопряженные значения в точках, симметричных относительно биссектрисы координатного угла плоскости  $t_1, t_2$ . Для действительных случайных процессов это означает, что поверхность, изображающая корреляционную функцию, симметрична относительно плоскости, проходящей через биссектрису координатного угла плоскости  $t_1, t_2$  и ось аппликат.



2.  $\sqrt{K_x(t_1, t_1) \cdot K_x(t_2, t_2)} \geq |\operatorname{Re} K_x(t_1, t_2)|$  - в общем случае  
 $\sqrt{K_x(t_1, t_1) K_x(t_2, t_2)} \geq |K_x(t_1, t_2)|$  - для действительных случайных процессов.

Значение корреляционной функции в любой точке  $(t_1, t_2)$  не может превосходить по модулю среднее геометрическое ее значений на главной диагонали в точке ее пересечения с прямыми, проведенными из данной точки параллельно осям  $t_1, t_2$ .



Иногда используют безразмерную корреляционную функцию:

$$|K_x(t_1, t_2)| = \left| \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1) \cdot K_x(t_2, t_2)}} \right| \leq 1.$$

3. Для вывода третьего свойства корреляционной функции рассмотрим интеграл:

$$J(\varphi) = \int_B \int_B K_x(t_1, t_2) \cdot \varphi(t_1) \cdot \varphi^*(t_2) \cdot dt_1 dt_2.$$

Здесь  $\varphi(t)$  - произвольная функция; оба интеграла берутся в произвольных, по одинаковым пределам.

$$\begin{aligned} \int_B \int_B K_x(t_1, t_2) \varphi(t_1) \varphi^*(t_2) dt_1 dt_2 &= \int_B \int_B M[\tilde{X}(t_1) \tilde{X}^*(t_2)] \varphi(t_1) \varphi^*(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= M \left[ \int_B \int_B \tilde{X}(t_1) \tilde{X}^*(t_2) \varphi(t_1) \varphi^*(t_2) dt_1 dt_2 \right] = M \left[ \int_B \left\{ \int_B \tilde{X}(t_1) \varphi(t_1) dt_1 \right\} \tilde{X}^*(t_2) \varphi^*(t_2) dt_2 \right] = \\ &= M \left[ \int_B \tilde{X}(t_1) \varphi(t_1) dt_1 \cdot \int_B \tilde{X}^*(t_2) \varphi^*(t_2) dt_2 \right] = M \left[ \left| \int_B \tilde{X}(t) \varphi(t) dt \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $J(\varphi) \geq 0$  не может быть отрицательным ни для какой функции  $\varphi(t)$ , и ни для какой области интегрирования  $B$ . Функции, обладающие таким свойством, называются определенно положительными. Это свойство накладывает определенные ограничения на вид корреляционной функции и может быть использовано для оценки пригодности замены  $K(t_1, t_2)$  различными аппроксимирующими выражениями.

Полученные три свойства корреляционной функции справедливы для любых случайных функций. Если случайная функция обладает стационарностью в широком смысле, то эти свойства приобретают более простой вид, т.к. корреляционная функция зависит от одного аргумента:

$$1. K_x(\tau) = K_x^*(-\tau)$$

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau)$$

$$2. K_x(0) \geq |\operatorname{Re} K_x(\tau)|$$

$$K_x(0) \geq |K(\tau)| \text{ - ординаты вещественной корреляционной функции по}$$

модулю не больше дисперсии случайной функции.

$$\rho(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} \text{ - нормированная корреляционная функция.}$$

$$3. \iint_{B B} \varphi(t_1) \varphi^*(t_2) \cdot K_x(\tau) dt_1 dt_2 \geq 0.$$

Примерный вид корреляционных функций для действительных случайных процессов.



### Операции со случайными процессами

1. Рассмотрим сумму двух случайных процессов, зависящих от одного и того же аргумента  $t$ .

$$z(t) = X(t) + Y(t) \quad (1)$$

Пусть известны математические ожидания  $m_x(t), m_y(t)$ , корреляционные функции  $K_x(t_1, t_2), K_y(t_1, t_2)$  и взаимная корреляционная функция  $K_{xy}(t_1, t_2)$ .

Определить математическое ожидание  $m_z(t)$  и корреляционную функцию  $K_z(t_1, t_2)$  процесса  $Z(t)$ .

По теореме сложения математических ожиданий можно непосредственно записать:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

Вычитая почленно из (1), получим:

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t).$$

По определению корреляционной функции имеем:

$$\begin{aligned} K_z(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Z}(t_1) \tilde{Z}^*(t_2) \rangle = \langle (\tilde{X}(t_1) + \tilde{Y}(t_1)) (\tilde{X}^*(t_2) + \tilde{Y}^*(t_2)) \rangle = \\ &= \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{X}^*(t_2) + \tilde{Y}(t_1) \tilde{X}^*(t_2) + \tilde{X}(t_1) \tilde{Y}^*(t_2) + \tilde{Y}(t_1) \tilde{Y}^*(t_2) \rangle = \\ &= K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + K_{xy}(t_1, t_2) + K_{yx}^*(t_2, t_1). \end{aligned}$$

В частном случае, когда случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  не коррелированы, формула принимает вид:

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2).$$

При  $t_1 = t_2 = t$

$$K_z(t_1, t_2) = D_z(t) = D_x(t) + D_y(t) + 2K_{xy}(t).$$

Отсюда следует свойство:

*Добавление к случайной функции неслучайной функции не изменяет значения корреляционной функции.*

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t)$$

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t)$$

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t)$$

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$$

*Центрированный случайный процесс обладает той же корреляционной функцией, что и нецентрированный процесс.*

Определим математическое ожидание и корреляционную функцию суммы произвольного числа случайных функций:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t).$$

Пусть  $m_i(t), K_{ii}(t_1, t_2)$  - математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса  $X_i(t)$ ;  $K_{ij}(t_1, t_2)$  - взаимная корреляционная функция случайных процессов  $X_i(t)$  и  $X_j(t)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

$$m_z(t) = \sum_{i=1}^n m_i(t)$$

$$K_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}(t_1, t_2).$$

В случае некоррелированных слагаемых:

$$K_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{ii}(t_1, t_2).$$

## 2. Дифференцирование случайных процессов.

Пусть заданы математическое ожидание  $m_x(t)$  и корреляционная функция  $K_x(t_1, t_2)$  случайной функции  $X(t)$ . Определить математическое

ожидание  $m_y(t)$  и корреляционную функцию  $K_y(t_1, t_2)$  производной функции  $X(t)$ :

$$Y(t) = X'(t). \quad (2)$$

Т.к. производная есть предел отношения разности значений функции к разности соответствующих значений аргумента, а математическое ожидание разности случайных величин всегда равно разности их математических ожиданий, то операции дифференцирования и математического ожидания можно менять местами. Тогда:

$$\langle Y(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} X(t) \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle;$$

$$m_y(t) = m_x'(t).$$

Вычитая почленно из (2), получим:

$$\tilde{Y}(t) = \frac{d\tilde{X}}{dt};$$

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Y}(t_1) \cdot \tilde{Y}^*(t_2) \rangle = \left\langle \frac{d\tilde{X}(t_1)}{dt_1} \cdot \frac{d\tilde{X}^*(t_2)}{dt_2} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{X}^*(t_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}; \end{aligned}$$

Корреляционная функция производной случайного процесса равна второй смешанной производной ее корреляционной функции.

Для производной порядка  $r$  можно записать:

$$Y(t) = X^{(r)}(t);$$

$$m_y(t) = m_x^{(r)}(t);$$

$$K_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2r} K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^r};$$

Если случайный процесс  $X(t)$  стационарный, то

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau).$$

И тогда для корреляционной функции будем иметь:

$$K_y(t_1, t_2) = -\frac{\partial^2 K_x(\tau)}{\partial \tau^2}.$$



Т.е. выражение зависит только от  $\tau$ . Следовательно производная от стационарной случайной функции является также стационарной случайной функцией.

$$K_y(\tau) = -\frac{\partial^2 K_x(\tau)}{\partial \tau^2};$$

Определим взаимную корреляционную функцию процессов  $Y(t)$  и  $X(t)$ .

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{Y}^*(t_2) \rangle = \left\langle \tilde{X}(t_1) \frac{d}{dt_2} \tilde{X}^*(t_2) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_1, t_2).$$

Для стационарного случайного процесса:

$$K_{xy}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} K_x(\tau).$$

*Для стационарного случайного процесса ординаты самого процесса и его производной в совпадающие моменты времени не коррелированы. По этому признаку чаще всего оценивается стационарный процесс или нет.*

### 3. Интегрирование случайных процессов.

Рассмотрим случайную функцию:

$$Y(s) = \int_T g(s, t) X(t) dt$$

$g(s, t)$  - определенная функция.

Пусть известны математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса  $X(t)$ . Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции  $Y(s)$ .

Математическое ожидание случайной функции  $Y(s)$  на основании свойств математических ожиданий равно:

$$m_y(s) = \langle Y(s) \rangle = \left\langle \int_T g(s, t) X(t) dt \right\rangle = \int_T g(s, t) \langle X(t) \rangle dt;$$

$$m_y(s) = \int_T g(s, t) m_x(t) dt.$$

Вычтем почленно, тогда получим:

$$\tilde{Y}(s) = \int_T g(s, t) \tilde{X}(t) dt. \quad (3)$$

И тогда:

$$\tilde{Y}(s)\tilde{Y}^*(s') = \iint_{T T} g(s,t)g^*(s',t')\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(t')dt dt'.$$

Применяя к этому равенству операцию математического ожидания, найдем корреляционную функцию случайной функции  $Y(s)$ :

$$K_y(s,s') = \iint_{T T} g(s,t)g^*(s',t')K_x(t,t')dt dt'.$$

Заменяя в формуле (3) переменную интегрирования  $t$ , переменной  $t'$ , умножая эту формулу на  $\tilde{X}^*(t)$  и применяя к полученной формуле операцию математического ожидания, найдем взаимную корреляционную функцию интеграла и случайной функции  $X$ :

$$K_{yx}(s,t) = \int_T g(s,t')K_x(t',t)dt'.$$

### Два вида канонического разложения случайного процесса

Таким образом случайная функция (случайный процесс) представляет собой математический объект большой сложности. В общем случае ее можно трактовать как несчетное множество скалярных случайных величин. Естественно встает задача представить случайный процесс в виде линейной комбинации некоррелированных случайных величин, имеющих равное нулю математическое ожидание. Т.е. мы приходим к задаче представления любой случайной функции  $X(t)$  в виде:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_i X_i^0(t);$$

Где  $X_i^0(t)$  - элементарные случайные функции.

Их можно представить в виде:

$$X_i^0(t) = V_i \cdot \varphi_i(t).$$

Здесь  $V_i$  - случайная величина,  $m_{v_i} = 0$ .

$\varphi_i(t)$  - неслучайная функция времени.

Корреляционная функция для элементарной случайной функции тогда запишется:

$$k_{x^0}(t_1,t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi^*(t_2) \cdot D_v.$$

Дисперсия ее при  $t_1 = t_2 = t$ :

$$D_{x^0}(t) = |\varphi(t)|^2 \cdot D_V.$$

Пусть для случайных величин  $V_i$  известны математические ожидания, дисперсии, корреляционные моменты.

Каноническое разложение представляем в виде:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_i V_i \cdot \varphi_i(t); \quad (1)$$

$$\tilde{X}(t_1) = \sum_{i=1} V_i \cdot \varphi_i(t_1);$$

$$\tilde{X}^*(t_2) = \sum_j V_j^* \cdot \varphi_j^*(t_2).$$

И тогда корреляционная функция случайного процесса  $X(t)$ :

$$K_x(t_1, t_2) = \left\langle \sum_i \sum_j V_i V_j^* \varphi_i(t_1) \varphi_j^*(t_2) \right\rangle = \sum_i \sum_j \langle V_i V_j^* \rangle \varphi_i(t_1) \varphi_j^*(t_2).$$

Но нам известно, что

$$\text{при } i = j \quad \langle V_i V_i^* \rangle = D_i;$$

$$\text{при } i \neq j \quad \langle V_i V_j^* \rangle = K_{ij}.$$

И тогда корреляционная функция:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_i \varphi_i(t_1) \varphi_i^*(t_2) \cdot D_i + \sum_i \sum_j \varphi_i(t_1) \varphi_j^*(t_2) \cdot K_{ij}.$$

Если случайные величины  $V_i$  некоррелированные, то разложение вида (1) называется каноническим разложением случайного процесса.

В этом случае:

$V_i$  - коэффициенты канонического разложения;

$\varphi_i(t)$  - координатные функции канонического разложения.

В этом случае корреляционную функцию случайного процесса  $X(t)$  можно представить в виде:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_i \varphi_i(t_1) \varphi_i^*(t_2) \cdot D_i;$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \sum_i |\varphi_i(t)|^2 D_i;$$

Кроме канонического разложения, существует интегральное каноническое разложение случайных процессов.

В этом случае случайный процесс представляется в виде:

$$X(t) = m_x(t) + \int V(\lambda)\varphi(t, \lambda)d\lambda .$$

Здесь  $V(\lambda)$  - случайный процесс, который называется «белым шумом» параметра  $\lambda$ ;

$\varphi(t, \lambda)$  - некоторая неслучайная функция аргумента  $t$  и параметра  $\lambda$ .

Роль некоррелированных элементарных случайных функций в данном случае играют бесконечно малые некоррелированные элементарные случайные функции  $V(\lambda)\varphi(t, \lambda)d\lambda$ .

Функции  $\varphi(t, \lambda)$  аргумента  $t$  при различных фиксированных значениях параметра  $\lambda$  в области  $\Lambda$  называются координатными функциями интегрального канонического представления.

Что такое «белый шум»?

«Белый шум» - любая случайная функция с некоррелированными значениями, имеющая бесконечную дисперсию и конечную дисперсию от нее, по любой конечной области изменения аргумента.

«Белый шум» - случайная функция, математическое ожидание которой тождественно равно нулю, а корреляционная функция содержит множителем  $\delta$ -функцию разности аргументов.

Т.е. если  $V(\lambda)$  - белый шум, то  $\langle V(\lambda) \rangle = 0$

$$\langle V(\lambda_1)V^*(\lambda_2) \rangle = G(\lambda_1)\delta(\lambda_2 - \lambda_1) .$$

Здесь:  $G(\lambda_1)$  - интенсивность «белого шума»,  $\delta(\lambda_2 - \lambda_1)$  - дельта-функция.

Что такое дельта-функция?

Дельта-функцией называется такая функция, которая равна нулю всюду, кроме начала координат, равна бесконечности в начале координат, а интеграл от нее, распространенный на сколь угодно малый отрезок, содержащий начало координат, равен единице.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

Свойства дельта-функции

$$\int_a^b \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 1 & a < t_0 < b \\ 0,5 & t_0 = a, t_0 = b \\ 0 & t_0 < a, t_0 > b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(t) \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & a < t_0 < b \\ \frac{1}{2} f(t_0) & t_0 = a, t_0 = b \\ 0 & t_0 < a, t_0 > b \end{cases}$$

Итак, выразив случайную функцию  $X$  интегральным каноническим разложением, можно записать:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \langle \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} V(\lambda) \cdot V^*(\lambda) \cdot \varphi(t_1, \lambda_1) \cdot \varphi^*(t_2, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \rangle = \\ &= \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \langle V(\lambda) \cdot V^*(\lambda) \rangle \cdot \varphi(t_1, \lambda_1) \cdot \varphi^*(t_2, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} G(\lambda) \delta(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \varphi(t_1, \lambda_1) \varphi^*(t_2, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 ; \end{aligned}$$

И окончательно:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{\Lambda} G(\lambda) \varphi(t_1, \lambda) \varphi^*(t_2, \lambda) d\lambda \quad - \quad \text{корреляционная функция при}$$

интегральном каноническом разложении.

### **Интегральное каноническое разложение стационарного случайного процесса. Спектральная плотность стационарного случайного процесса**

Рассмотрим стационарный случайный процесс  $X(t)$  в конечном интервале  $|t| < T$ . При изменении  $t_1, t_2$  в интервале  $(-T, T)$  разность  $\tau$  изменяется в интервале  $(-2T, 2T)$ . Корреляционная функция  $K_x(\tau)$  случайной функции  $X$  может быть представлена в интервале  $|\tau| < 2T$  рядом Фурье:

$$K_x(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} D_\nu e^{i\omega_\nu \tau}, \quad (1)$$

$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{2T}$  - круговая частота.

$$D_\nu = \frac{1}{4T} \int_{-2T}^{2T} K_x(\tau) e^{-i\omega_\nu \tau} d\tau; (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Введем функцию:

$$S_x^T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} K_x(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (2)$$

Тогда формула для коэффициентов  $D_\nu$  запишется в виде:

$$D_\nu = \frac{\pi}{2T} S_x^T(\omega_\nu) = S_x^T(\omega_\nu) \Delta\omega; (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь:  $\Delta\omega = \frac{\pi}{2T} = \omega_{\nu+1} - \omega_\nu$  - разность между соседними значениями

частоты  $\omega$ . Подставляя последнее выражение в уравнение (1), получим:

$$K_x(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} S_x^T(\omega_\nu) e^{i\omega_\nu \tau} \Delta\omega.$$

Эта функция справедлива при любом  $T$ . Поэтому, переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$  в этой формуле и формуле (2), и принимая во внимание, что при этом  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , получим функцию действительной переменной  $\omega$ :

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cdot e^{i\omega \tau} d\tau.$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cdot e^{i\omega \tau} d\omega. \quad - \text{Соотношения Винера-Хинчина.}$$

$$D[X(t)] = K_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Функция  $S_x(\omega)$  называется спектральной плотностью стационарной случайной функции  $X(t)$ . Эти соотношения показывают, что корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса являются преобразованиями Фурье друг друга. Т.к. корреляционная функция действительной стационарной случайной величины является четной функцией  $\tau$ , то на основании известной формулы Эйлера можно записать:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau;$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega.$$

Формулу для корреляционной функции можно записать в виде:

$$K_x(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega t_1} e^{-i\omega t_2} \, d\omega - \text{т.е. получили интегральное каноническое}$$

представление корреляционной функции. Координатными функциями этого интегрального канонического представления являются показательные функции  $e^{i\omega t}$ , выражающие гармонические колебания всех возможных частот.

Этому представлению корреляционной функции соответствуют интегральные канонические представления стационарного случайного процесса  $X(t)$ :

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega.$$

Здесь  $V(\omega)$  - белый шум переменной  $\omega$ , интенсивность которого равна спектральной плотности  $S_x(\omega)$  случайной функции  $X$ .

$$\begin{aligned} \langle V(\omega_1) V^*(\omega_2) \rangle &= S_x(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1); \\ \langle V(\omega) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

### Некоторые свойства спектральной плотности

1. Спектральная плотность стационарной случайной функции характеризует распределение средней интенсивности колебаний по спектру частот.

2. Спектральная плотность не может иметь отрицательные ординаты, т.е.  $S(\omega) \geq 0$  при любом  $\omega$ .

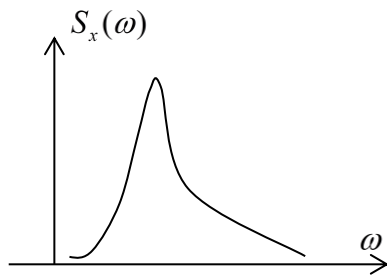
3. Если  $X(t)$  - действительный случайный процесс, то спектральная плотность является четной функцией:

$$S(\omega) = S(-\omega).$$

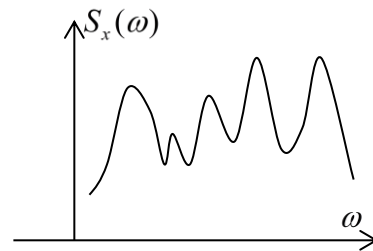
4. При росте абсолютного значения  $\omega$   $S(\omega)$  стремится к нулю настолько быстро, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega < \infty.$$

По виду спектральной плотности случайные процессы могут быть широкополосными и узкополосными.



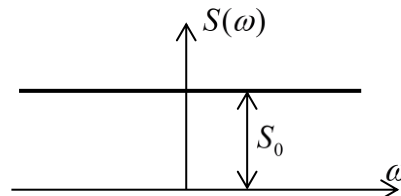
Узкополосный случайный процесс



Широкополосный случайный процесс

Узкополосный случайный процесс иногда характеризуется тем, что  $\omega = const$ , а амплитуда колебаний случайна.

Для «белого шума»:



И последнее свойство спектральной плотности:

Пусть  $Y(t) = X'(t)$ ;

Тогда  $S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Отсюда можно сделать вывод о дифференцируемости процесса  $X(t)$ .

Если  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 s(\omega) d\omega < \infty$ , то процесс дифференцируем, в противном случае

$X(t)$  не имеет производной.

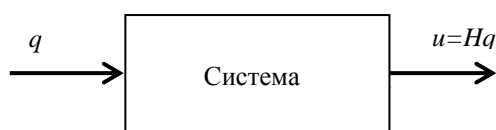


## Задачи и методы статистической динамики

### Предмет статистической динамики. Классификация систем

Предметом статистической динамики является изучение поведения различных систем (механических, электрических, радиотехнических, биологических и т.д.) при случайных внешних воздействиях и (или) случайном изменении свойств системы.

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся во взаимодействии с окружающей средой. Внешние воздействия характеризуются элементами  $q$  из пространства  $Q$ .  $q \in Q$



Поведение системы характеризуется элементами  $u$  из пространства  $U$ .

Математическая природа элементов обоих пространств произвольна. Это могут быть числа, векторы, тензоры, функции одной или нескольких переменных.

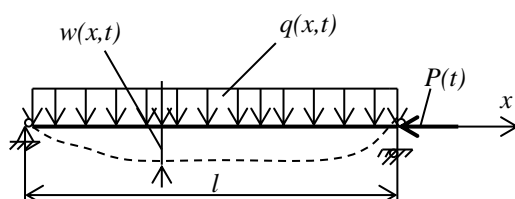
Структура и свойства системы характеризуются оператором  $H$ , посредством которого каждой реализации внешнего воздействия  $q \in Q$  приводится в соответствие реализация поведения  $u \in U$ , т.е.

$$u = Hq$$

Обычно элементы  $q$  называются входными параметрами (переменными, процессами), а параметры поведения системы  $U$  - выходными параметрами (переменными, процессами).

Выбор пространства  $Q$  и  $U$  и, следовательно, оператора  $H$  не является единственным, потому что понятия системы и окружающей среды являются в значительной степени условными.

Пример.



Рассмотрим упругий прямолинейный призматический стержень данной  $l$ , нагруженный осевой силой  $P$  и распределенной поперечной нагрузкой, интенсивность которой равна  $q$ . Эти силы являются функциями времени. Поведение стержня описывается функцией  $w(x,t)$ , равной поперечным смещениям точек, которые лежат на оси стержня.

При некоторых дополнительных предположениях функция  $w(x,t)$  удовлетворяет уравнению:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k \frac{\partial w}{\partial t} = q;$$

$EJ$  - жесткость сечения стержня при изгибе;

$m$  - масса стержня, отнесенная к единице длины;

$k$  - коэффициент вязкого трения;

Кроме того, должны быть начальные и граничные условия. Например:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (t < 0, \quad 0 \leq x \leq l)$$

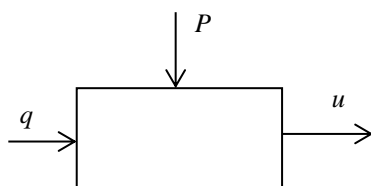
$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq t < \infty, \quad x = 0, l)$$

Дифференциальное уравнение и начальные и граничные условия представляют собой конкретную реализацию операторного соотношения

$$w = H(p, q)$$

Если продольная сила  $P = const$ , то целесообразно включить ее в систему, т.е. целесообразно трактовать упругий стержень, нагруженный постоянной силой  $P$  как систему, на которую действует внешняя нагрузка  $q(x,t)$ .

При таком подходе сила  $P$  становится параметром системы и входит в определение конкретной реализации оператора  $H$ . Воздействие, которое может быть включено в свойства системы, будет называться параметрическим.



Пространство выходных параметров  $U$  называется исчерпывающим, если при помощи его элементов можно описать любое возможное поведение системы.

Пусть пространство  $U$  – исчерпывающее, причем по каждому его элементу  $u$  можно восстановить соответствующий элемент  $q \in Q$ . При этом условии существует обратный оператор  $L$  такой, что

$$Lu = q.$$

Вышеприведенные соотношения устанавливают связь между реализациями входных и выходных параметров детерминистической системы.

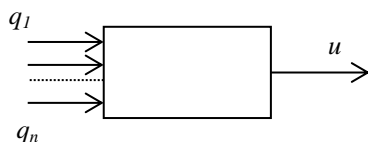
Статистическая динамика решает вопрос определения вероятностных характеристик поведения системы при заданных вероятностных характеристиках воздействий на систему.

В зависимости от того, какие параметры являются заданными, а какие – искомыми, будем различать четыре типа задач статистической динамики.

1. Первая, основная задача состоит в нахождении характеристик выходных параметров при известных характеристиках входных параметров и параметров системы.

2. Вторая задача является обратной по отношению к первой. Она состоит в нахождении характеристик входных параметров по характеристикам выходных параметров. Свойства системы также предполагаются известными.

С точки зрения операторных соотношений решения прямой и обратной задач аналогичны.



Однако решение обратной задачи существенно осложняется, если имеется несколько входных воздействий и если требуется по поведению

системы установить статистические характеристики каждого воздействия в отдельности.

3. Третья задача заключается в определении свойств стохастической системы по известным характеристикам на ее входе и выходе. В самом общем случае может оказаться неизвестной сама структура системы.

Изучение свойств неизвестной системы путем сопоставления ее реакций с входными воздействиями составляет так называемую «проблему черного ящика».

4. Четвертой задачей статистической динамики является отыскание системы, которая при заданных внешних воздействиях обладает заданными свойствами. Примером может служить задача о синтезе оптимальной системы, т.е. системы, которая обладает наилучшими в некотором смысле свойствами.

Если основная задача статистической динамики решена, то, как правило, результаты могут быть использованы для решения остальных задач.

Выбор метода для решения задач статистической динамики в существенной степени зависит от характера системы. Классификацию систем можно провести по различным признакам.

1. В зависимости от того, как ведет себя система при одновременном приложении двух или нескольких воздействий, различаются линейные и нелинейные системы.

Система, описываемая операторным уравнением  $u = Hq$ , называется линейной, если оператор  $H$  удовлетворяет условиям:

$$H(\alpha q) = \alpha Hq;$$

$$H(q_1 + q_2) = Hq_1 + Hq_2.$$

Здесь  $\alpha$  - произвольное число;  $q_1, q_2$  - внешние воздействия.

Если оператор  $H$  этим условиям не удовлетворяет, то система называется нелинейной.

К линейным системам применим принцип суперпозиции, а именно, реакция системы на сумму внешних воздействий может быть найдена как сумма реакций, вычисленных от каждого воздействия в отдельности.

2. Вторым признаком классификации систем – поведение свойств системы во времени.

Система называется стационарной, если ее свойства неизменны во времени. Оператор  $H$  для стационарных систем инвариантен относительно смещения начального момента времени.

Оператор  $H$  нестационарной системы этим свойством не обладает.

Как правило, расширяя систему за счет окружающей среды, мы можем добиться того, что система станет стационарной.

Ползучесть  $\Rightarrow$  бетон (свойства есть  $f(t)$ ).

$$P = const$$

+

кинетические уравнения, описывающие физико-химические процессы в бетоне.

Если  $t_0 = const$  - система стационарная (в явном виде нет зависимости от времени  $t$ ).

+

уравнение теплопроводности.

3. Третьим признаком классификации систем – аналитические свойства оператора  $H$ .

Различают вырожденные и невырожденные операторы.

Оператор  $H$  называется вырожденным, если пространства  $Q$  и  $U$  суть конечномерные евклидовы пространства и если соотношение между элементами этих пространств конечно, т.е. поведение системы описывается конечным числом параметров, причем связь между этими параметрами дается формулами, не содержащими ни дифференциальных, ни интегральных операций.

Вырожденным оператором обладает любая система с конечным числом степеней свободы, если положить временные эффекты пренебрежительно малыми.

4. Четвертый признак классификации – число измерений системы.

Различаются системы с конечным числом степеней свободы (дискретные системы) и распределенные системы. Существенным моментом в задачах, относящихся к распределенным системам, является постановка краевых условий. Задача статистической динамики для распределенных систем называется «*стохастической краевой задачей*».

### **Метод решения задач статистической динамики для вырожденных систем**

Пусть число входных параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$  конечно и пусть эти параметры являются случайными величинами с известной совместной плотностью вероятности  $f_q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

Поведение системы описывается конечным числом выходных параметров – случайными величинами  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

Известна однозначная детерминистическая зависимость между указанными группами параметров:

$$u_j = U_j(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (1)$$

Система, удовлетворяющая этим условиям, является вырожденной.

Нахождение распределений для выходных параметров сводится к применению известных формул теории вероятности, дающих распределение для случайных функций от случайных величин.

Предположим, что  $m < n$  и что соотношения (1) допускают обращение относительно  $m$  переменных  $q_1, q_2, \dots, q_m$ .

$$q_j = Q_j(u_1, u_2, \dots, u_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Если  $Q_i$  - однозначные дифференцируемые функции переменных  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , то решение основной задачи статистической динамики дается формулой:

$$f_u(u_1, u_2, \dots, u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_m; q_1, q_2, \dots, q_n) \times \left| \frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right| dq_{m+1} \dots dq_n$$

В этой формуле использовано обозначение Якобиана преобразований:

$$\frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_m}{\partial u_1} & \frac{\partial Q_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}.$$

Пусть  $m=n$  и соотношение (1) взаимно однозначно. Тогда:

$$f_u(u_1, u_2, \dots, u_n) = f_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \times \left| \frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right|. \quad (2)$$

Если  $m > n$ , то среди  $m$  параметров  $u_1, u_2, \dots, u_m$  будут функционально зависимыми  $(m-n)$  параметров. Если среди  $m$  соотношений (1) можно выбрать  $n$  таких, что обратные функции

$$q_j = Q_j(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

однозначны и дифференцируемы, то для плотности вероятности выходных параметров получим формулу (2).

Приведенные формулы могут быть обобщены на случай, когда функции  $q_1, q_2, \dots, q_n$  не являются однозначными. В этом случае область изменения аргумента следует разбить на подобласти, в пределах каждой из которых функции  $q_1, q_2, \dots, q_n$  останутся однозначными. Затем следует просуммировать вклад каждой из этих подобластей в искомое распределение.

До сих пор предполагалось, что система является детерминистической.

Стохастическая вырожденная система – ансамбль, состоящий из большого числа статистически однородных сопоставленных экземпляров, которые отличаются друг от друга некоторыми параметрами  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

Для наугад взятого экземпляра эти параметры являются случайными числами. Стохастическая система будет задана, если известна совместная плотность вероятности  $f_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$  указанных параметров.

Для стохастической системы задача статистической динамики решается в два этапа.

1. Определяется условное распределение вероятностей для выходных параметров при фиксированных параметрах системы.

2. По формуле полной вероятности определяется распределение выходных параметров для стохастической системы.

Пусть входное воздействие характеризуется одним случайным числом  $q$  реакция системы – одним случайным числом  $u$ , а стохастические свойства системы – одним сл. числом  $r$ . Известны  $f_q(q), f_r(r)$ .

При фиксированном  $r$  связь между входом и выходом дается формулой:

$$u = U(q/r).$$

Если обратная функция  $q = Q(u/r)$  является однозначной и дифференцируемой, то для условной плотности вероятности можно записать:

$$f_u(u/r) = f_q[Q(u/r)] \left| \frac{\partial Q(u/r)}{\partial u} \right|.$$

Тогда безусловная плотность вероятности выходного параметра:

$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_u(u/r) f_r(r) dr - \text{ по формуле полной вероятности.}$$

Приведенные рассуждения допускают обобщения на случай, когда число параметров произвольно.

Выходные данные  $u_1, u_2, \dots, u_m$

Входные параметры  $q_1, q_2, \dots, q_n$

Параметры системы  $r_1, r_2, \dots, r_s$ .

Связь между входом и выходом при фиксированных параметрах:

$$u_j = U_j(q_1, q_2, \dots, q_n | r_1, r_2, \dots, r_s) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$



Пусть  $m < n$ . Обратное соответствие в виде:

$$q_j = Q_j(u_1, u_2, \dots, u_m; q_{m+1}, \dots, q_n | r_1, r_2, \dots, r_s) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Эти соотношения являются однозначными и дифференцируемыми функциями переменных  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

Тогда:

$$f_u(u_1, u_2, \dots, u_m | r_1, r_2, \dots, r_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_q(Q_1, Q_2, \dots, Q_m; q_{m+1}, \dots, q_n) \times \left| \frac{\partial(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right| dq_{m+1} \dots dq_n.$$

И плотность вероятности выходных параметров для стохастической системы найдем по формуле полной вероятности:

$$f_u(u_1, u_2, \dots, u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_u(u_1, u_2, \dots, u_m | r_1, r_2, \dots, r_s) \cdot f_r(r_1, r_2, \dots, r_s) dr_1, dr_2, \dots, dr_s.$$

### Методы решения невырожденных систем

Для невырожденных систем решение задачи статистической динамики, состоящее в получении совместных распределений для выходных параметров, может быть получено лишь в некоторых частных случаях. Обычно приходится удовлетворяться более скромной информацией, например сведениями о математических ожиданиях и младших моментных функциях выходных параметров.

Таким образом, обычно цель решения задачи статистической динамики для невырожденных систем состоит в том, чтобы при известной связи между входными и выходными процессами и известных моментных функциях входного процесса вычислить моментные функции выходного процесса.

Методы, которые позволяют осуществлять подобные решения, называются методами моментных функций.

Существуют две формы записи соотношений между входом и выходом:

$$1. Lu = q;$$

$$2. Hq = u.$$

Оператор  $L$  в дальнейшем линейный дифференциальный оператор. Оператор  $H$  называется линейный интегральный оператор. Для решения задач статистической динамики при соотношении (1) используется метод стохастических дифференциальных уравнений.

При (2) используется метод переходных импульсных функций или метод функций Грина.

### Метод функций Грина

$$u = Hq \quad (1)$$

Система является линейной и детерминистической. Математическое ожидание выходного процесса линейной детерминистической системы связано с математическим ожиданием входного процесса той же зависимостью, что и соответствующие реализации.

$$\langle u \rangle = H \langle q \rangle$$

Запишем соотношение (1) в форме, дающей выход в два различных момента времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$u(t_1) = H_{t_1} q(\tau_1);$$

$$u(t_2) = H_{t_2} q(\tau_2).$$

Здесь  $H_{t_k}$  – оператор, преобразующий процесс  $q(\tau_k)$  в процесс  $u(t_k)$ .

Умножим первое соотношение на второе, используя свойства оператора  $H$ , и применим операцию осреднения к левой и правой части:

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = H_{t_1} H_{t_2} \langle q(\tau_1)q(\tau_2) \rangle.$$

Аналогичные соотношения имеют и моментные функции сколь угодно высокого порядка, т.е.:

$$\langle u(t_1)u(t_2)...u(t_n) \rangle = H_{t_1} H_{t_2} \dots H_{t_n} \langle q(\tau_1)q(\tau_2)...q(\tau_n) \rangle.$$

Но так как по определению корреляционной функции мы можем записать:

$$K_q(t_1, t_2) = \langle \tilde{q}(t_1) \tilde{q}(t_2) \rangle;$$

$K_u(t_1, t_2) = \langle \tilde{u}(t_1) \tilde{u}(t_2) \rangle$ ; где  $\tilde{q}(t)$  и  $\tilde{u}(t)$  - центрированные случайные процессы, то

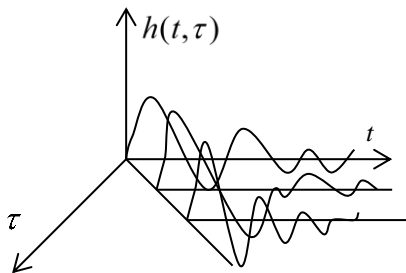
$$K_u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^H \int_{t_2}^H K_q(\tau_1, \tau_2).$$

Рассмотрим случай, когда внешнее воздействие характеризуется одной функцией времени  $q(t)$ , а поведение системы – одной функцией времени  $u(t)$ . Входной процесс можно представить в виде:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad - \quad \text{фильтрующее свойство } \delta\text{-функции, т.е.}$$

непрерывный процесс заменяем бесконечной системой импульсов:

$$H_t q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) H_t \delta(t - \tau) d\tau.$$



Обозначим:

$$h(t, \tau) = H_t \delta(t - \tau) \quad - \quad \text{функция Грина или импульсная переходная функция}$$

– реакция системы на единичный импульс, прикладываемый в момент времени  $t = \tau$ .

Выходной процесс при этом представляется в виде (учитывая условия физической возможности системы):

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) q(\tau) d\tau.$$

Т.к. при  $\tau > t$ ,  $h(t, \tau) = 0$  при  $\tau < t_0$ ,  $q(\tau) = 0$ .

Для математического ожидания выходного процесса можно записать:

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle q(\tau) \rangle d\tau .$$

В общем случае:

$$\langle u(t_1)u(t_2)\dots u(t_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)\dots h(t_n, \tau_n) \times \\ \times \langle q(\tau_1)q(\tau_2)\dots q(\tau_n) \rangle \cdot d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n .$$

Для стационарных систем функция Грина зависит явно только от разности  $t - \tau$  и можно записать для математического ожидания:

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) \langle q(\tau) \rangle d\tau .$$

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_1) \cdot h(t_2 - \tau_2) \langle q(\tau_1)q(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \text{ и т.д.}$$

Для соотношений между корреляционными функциями можно записать:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1) \cdot h(t_2, \tau_2) \cdot K_q(\tau_1, \tau_2) \cdot d\tau_1, d\tau_2 .$$

Для стационарной системы:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_1) \cdot h(t_2 - \tau_2) \cdot K_q(\tau_1, \tau_2) \cdot d\tau_1, d\tau_2 .$$

Если внешнее воздействие является стационарным случайным процессом, то поведение стационарной системы также является стационарным случайным процессом.

Тогда:

$$K_q(t_1, t_2) = K_q(t_2 - t_1) ;$$

$$K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2 - t_1) .$$

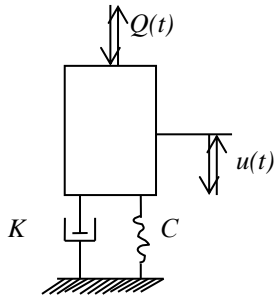
Введем обозначения:  $t_2 - t_1 = \tau$ ;  $t_1 - \tau_1 = \theta_1$ ;  $t_2 - \tau_2 = \theta_2$ .

Получим окончательно:

$$K_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) \cdot h(\theta_2) \cdot K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2) \cdot d\theta_1 d\theta_2 .$$

Рассмотрим применение последней формулы на следующем примере.

Рассмотрим линейную систему с одной степенью свободы, находящуюся под действием случайной силы  $Q(t)$ .



$u(t)$  - перемещение относительно положения равновесия;  $M$  - масса;  $C$  – жесткость упругой связи;  $K$  – коэффициент вязкого трения.

Уравнение колебаний массы с одной степенью свободы записывается в виде:

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + k \frac{du}{dt} + Cu = Q(t).$$

Введем обозначения:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}}$ ;  $2\varepsilon = \frac{K}{M}$ ;  $q(t) = \frac{Q(t)}{M}$ .

Тогда:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t).$$

Для решения задачи необходимо найти функцию Грина, т.е. реакцию системы на единичное импульсное воздействие. Согласно записанному ранее соотношению:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) q(\tau) d\tau$$

Функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 h(t, \tau)}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dh(t, \tau)}{dt} + \omega^2 h(t, \tau) = \delta(t - \tau)$$

при нулевых начальных условиях.

Т.е. мы должны решить неоднородное уравнение при начальных условиях:

$$h(t, \tau) = \dot{h}(t, \tau) = 0.$$

В теории автоматического управления (ТАУ) имеется математический аппарат, позволяющий приводить такие линейные системы к однородным уравнениям с ненулевыми начальными условиями.

Рассматривается в ТАУ такой случай.

Пусть имеется система, оператором которой является линейный дифференциальный оператор общего вида:

$$L = \sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}.$$

Тогда для определения функции Грина необходимо решить уравнение:

$Lh(t, \tau) = \delta(t - \tau)$  при нулевых начальных условиях, т.е.:

$$\left[ \frac{\partial^k h(t, \tau)}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=\tau} = 0; \quad \text{при } k=0, 1, \dots, n-1.$$

Т.е. опять тот же случай – уравнение неоднородное, а начальные условия нулевые.

Оказывается (в ТАУ есть такая теорема) можно заменить указанное уравнение и условие физической возможности системы следующим уравнением и начальными условиями:

$Lh(t, \tau) = 0$  при начальных условиях:

$$\left[ \frac{\partial^k h(t, \tau)}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=\tau} = 0; \quad \text{при } k=0, 1, \dots, n-2;$$

$$\left[ \frac{\partial^{n-1} h(t, \tau)}{\partial t^{n-1}} \right] \Big|_{t=\tau} = \frac{1}{a_n(\tau)}.$$

Таким образом, в нашем случае необходимо решить уравнение:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dh}{dt} + \omega^2 h = 0;$$

при начальных условиях  $h = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 1. \quad (t = 0).$

Несложные вычисления дают:

$$h(t) = \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t.$$

Здесь  $\omega_\varepsilon$  - частота собственных колебаний системы, вычисленная с поправкой на силу трения:

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} .$$

И теперь, когда известна функция Грина, можно все найти на выходе.

Определим корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} k_u(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon\theta_1} \sin \omega_\varepsilon \theta_1 \cdot \frac{1}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon\theta_2} \sin \omega_\varepsilon \theta_2 \cdot K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= \frac{1}{\omega_\varepsilon^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varepsilon(\theta_1 + \theta_2)} \sin \omega_\varepsilon \theta_1 \cdot \sin \omega_\varepsilon \theta_2 \cdot K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 . \end{aligned}$$

Пусть корреляционная функция внешнего воздействия:

$$K_q(\tau) = S_0 \delta(\tau) , \text{ т.е. внешнее воздействие - «белый шум»} .$$

Учитывая фильтрующее свойство  $\delta$  - функции и получим:

$$K_u(\tau) = \frac{S_0 e^{-\varepsilon|\tau|}}{\omega_\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-2\varepsilon\theta} \sin \omega_\varepsilon \theta \cdot \sin \omega_\varepsilon (|\tau| + \theta) d\theta .$$

Или после вычисления интеграла:

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{4\omega_0^2 \varepsilon} \left( \cos \omega_\varepsilon \tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon |\tau| \right) \cdot e^{-\varepsilon|\tau|} .$$

До сих пор мы рассматривали случаи, когда внешнее воздействие и поведение системы описывается единственной функцией времени.

Пусть теперь внешнее воздействие характеризуется  $n$  функциями времени:

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t) ;$$

а поведение системы –  $m$  функциями времени:

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) .$$

Оператор  $H$  является интегральным оператором с матрицей Грина следующего вида:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11}(t, \tau) & h_{12}(t, \tau) & \dots & h_{1n}(t, \tau) \\ h_{21}(t, \tau) & h_{22}(t, \tau) & \dots & h_{2n}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1}(t, \tau) & h_{m2}(t, \tau) & \dots & h_{mn}(t, \tau) \end{bmatrix} .$$

Элементы матрицы  $h_{jk}$  представляют собой реакцию  $j$ -й координаты системы на единичный импульс, соответствующий  $k$ -му воздействию:

$$h_{jk} \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Реализация операторного соотношения:

$$u = Hq;$$

имеет вид:

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^t h_{jk}(t, \tau) q_k(\tau) d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Осредняя соотношение по множеству реализаций, получим формулу:

$$\langle u_j(t) \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^t h_{jk}(t, \tau) \langle q_k(\tau) \rangle d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Для моментных функций второго порядка получаем формулу:

$$\langle u_j(t_1) u_k(t_2) \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_{j\alpha}(t_1, \tau_1) h_{k\beta}(t_2, \tau_2) \langle q_\alpha(\tau_1) q_\beta(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2.$$

Введем взаимные корреляционные функции, равные моментным функциям второго порядка от центрированных процессов:

$$\tilde{q}_j = q_j - \langle q_j \rangle;$$

$$\tilde{u}_k = u_k - \langle u_k \rangle.$$

Обозначим эти функции следующим образом:

$$K_{q_j q_k}(t_1, t_2) = \langle \tilde{q}_j(t_1) \tilde{q}_k(t_2) \rangle;$$

$$K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = \langle \tilde{u}_j(t_1) \tilde{u}_k(t_2) \rangle.$$

Связь между корреляционными функциями входного и выходного процессов дается формулой:

$$K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_{j\alpha}(t_1, \tau_1) h_{k\beta}(t_2, \tau_2) K_{q_\alpha q_\beta}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (j, k = 1, 2, \dots, m)$$

Дальнейшие упрощения, связанные со стационарностью системы и стационарностью процессов, проводятся аналогично тому, как это было сделано ранее для одномерных процессов.



## Метод дифференциальных уравнений

Как уже говорилось, этот метод также является разновидностью метода моментных функций.

Пусть связь между входным и выходным процессами задана в форме:

$$Lu = q;$$

$L$  – дифференциальный оператор.

Если  $L$  – линейный детерминистический оператор, то он представим с оператором осреднения. В результате можем получить уравнение относительно математического ожидания выходного процесса:

$$L \langle u \rangle = \langle q \rangle.$$

Таким образом, математические ожидания связаны теми же дифференциальными уравнениями, что и соответствующие реализации. Начальные условия для математического ожидания выходного процесса получим осреднением начальных условий для реализаций. Так, если начальные условия для реализаций нулевые, то для математического ожидания также ставятся нулевые начальные условия.

Формальный метод получения формул для моментных функций второго и более высокого порядка аналогичен тому, как это мы делали в методе функций Грина.

Пусть  $L_{t_k}$  – оператор, переводящий процесс  $q(t_k)$  в процесс  $u(t_k)$ . Этот оператор действует только на функции переменной  $t_k$ .

$$\text{Пусть } L_{t_k} = a_v \frac{\partial^v}{\partial t_k^v} + a_{v-1} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t_k^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t_k} + a_0,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_v$  - некоторые постоянные.

Запишем исходное уравнение для двух моментов времени  $t_1 \neq t_2$ .

$$L_{t_1} u(t_1) = q(t_1);$$

$$L_{t_2} u(t_2) = q(t_2).$$

Умножая первое уравнение на  $L_{t_2}$  и осредняя результат, получим:

$$L_{t_1} L_{t_2} \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = L_{t_2} \langle q(t_1)u(t_2) \rangle.$$

Из второго уравнения после умножения на  $q(t_1)$  и осреднения находим:

$$L_{t_2} \langle q(t_1)u(t_2) \rangle = \langle q(t_1)q(t_2) \rangle.$$

Учитывая эти соотношения, получим уравнение относительно моментной функции второго порядка:

$$L_{t_1} L_{t_2} \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \langle q(t_1)q(t_2) \rangle. \quad (1)$$

Вообще если  $t_1, t_2, \dots, t_n$  - несовпадающие моменты времени, то моментная функция  $n$ -го порядка удовлетворяет уравнению:

$$L_{t_1} L_{t_2} \dots L_{t_n} \langle u(t_1)u(t_2) \dots u(t_n) \rangle = \langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_n) \rangle. \quad (2)$$

Операторное уравнение, связывающее корреляционные функции  $K_u(t_1, t_2)$  и  $K_q(t_1, t_2)$  выходного и входного процессов, имеет следующий вид:

$$L_{t_1} L_{t_2} K_u(t_1, t_2) = K_q(t_1, t_2). \quad (3)$$

Уравнения 1,2,3 представляют собой уравнения в частных производных. Они должны решаться при начальных условиях, которые получаются осреднением начальных условий для функций  $u(t)$  и для произведений этих функций, взятых в различные моменты времени. Здесь мы имеем по существу многомерную задачу Коши.

Поясним постановку задачи для случая, когда оператор  $L$  имеет вид:

$$L = a_\nu \frac{\partial^\nu}{\partial t_k^\nu} + a_{\nu-1} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t_k^{\nu-1}} + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t_k} + a_0,$$

а начальные условия для функции  $u(t)$  нулевые:

$$u = \frac{du}{dt} = \dots = \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} = 0; \quad (t = 0). \quad (4)$$

Используем для краткости обозначения:

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle u(t_1)u(t_2) \dots u(t_n) \rangle;$$

$$\psi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_n) \rangle.$$

Представим уравнение (2) для моментной функции  $n$ -го порядка в виде:

$$\prod_{k=1}^n (a_\nu \frac{\partial^\nu}{\partial t_k^\nu} + a_{\nu-1} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t_k^{\nu-1}} \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t_k} + a_0) \varphi = \psi .$$

Начальные условия для функции  $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$  выберем с учетом начальных условий (4). Эти условия можно получить следующим образом. Записав начальные условия для функции  $u(t_k)$  одного из аргументов  $t_k$ , умножим каждое из них почленно на произведение функций  $u(t_1)u(t_2)\dots u(t_{k-1})u(t_{k+1})\dots u(t_n)$ . После осреднения получим:

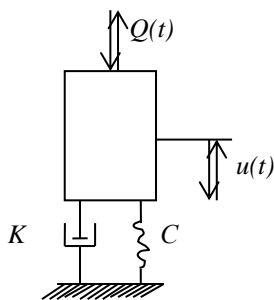
$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} = \dots = \frac{\partial^{\nu-1} \varphi}{\partial t_k^{\nu-1}} = 0 \quad (t_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Можно использовать начальные условия в другой, эквивалентной форме:

$$\varphi = \frac{\partial^n \varphi}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} = \dots = \frac{\partial^{n(\nu-1)} \varphi}{\partial t_1^{\nu-1} \partial t_2^{\nu-1} \dots \partial t_n^{\nu-1}} = 0 \quad (t_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Симметричная форма начальных условий находится в соответствии с условиями симметрии моментных функций по отношению к перестановке аргументов  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

В качестве простого примера рассмотрим определение корреляционной функции на выходе системы, движение которой описывается уравнением:



$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t) .$$

Уравнение (3) для этой системы записывается так:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \omega_0^2 \right) \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \omega_0^2 \right) \cdot K_u(t_1, t_2) = K_q(t_1, t_2) \quad (7)$$

Пусть начальные условия для центрированного выходного процесса  $\tilde{y}(t)$  - нулевые. Начальные условия для корреляционной функции могут быть представлены как в форме (5):

$$K_u = \frac{\partial K_u}{\partial t_1} = 0 \quad (t_1 = 0);$$

$$K_u = \frac{\partial K_u}{\partial t_2} = 0 \quad (t_2 = 0).$$

Так и в форме (6):

$$K_u = \frac{\partial^2 K_u}{\partial t_1 \partial t_2} = 0 \quad (t_1 = 0, t_2 = 0).$$

Если  $\tilde{y}(t)$  - стационарный случайный процесс, то:

$$K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2 - t_1).$$

Обозначим  $t_2 - t_1 = \tau$ . Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{d}{d\tau}; \quad \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau}.$$

Перепишем уравнение (7) следующим образом:

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} - 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) \cdot \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) K_u(\tau) = K_q(\tau). \quad (8)$$

Дополнительные условия получим из рассмотрения свойств корреляционной функции стационарного случайного процесса. Эта функция должна быть четной, т.е.

$$K_u(-\tau) = K_u(\tau). \quad (9)$$

Кроме того, корреляционная функция и ее производные должны быть ограничены на бесконечности, а для корреляционной функции эргодического процесса выполняется более сильное условие.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} K_u(\tau) d\tau = 0.$$

В силу условия четности (9) достаточно определить решение (8) при  $0 \leq \tau < \infty$ . При этом если процесс  $\tilde{y}(t)$  - дифференцируемый, то из условия (9) вытекает, что:

$$\frac{dK_u}{d\tau} = \frac{d^3 K_u}{d\tau^3} = 0 \quad (\tau = 0).$$

Допустим, что внешнее воздействие является стационарным «белым шумом». Его корреляционная функция имеет вид:

$$K_q(\tau) = S_0 \delta(\tau). \quad (10)$$

Из уравнения (8) видно, что четвертая производная от  $K_u(\tau)$  содержит сингулярную составляющую  $S_0 \cdot \delta(\tau)$ . Следовательно, третья производная имеет в нуле скачок, равный  $\frac{1}{2} S_0$ . Вместо неоднородного уравнения (8) с правой частью (10) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} - 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) \cdot \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) K_u(\tau) = 0.$$

с неоднородными начальными условиями:

$$\frac{dK_u}{d\tau} = 0; \quad \frac{d^3 K_u}{d\tau^3} = \frac{1}{2} S_0; \quad (\tau = 0). \quad (11)$$

На бесконечности должно выполняться условие ограниченности.

Решение уравнения ищем в виде:

$$K_u = C e^{r\tau}, \text{ где } r \text{ – характеристический показатель.}$$

Уравнение для определения характеристических показателей имеет вид:

$$(r^2 - 2\varepsilon r + \omega_0^2)(r^2 + 2\varepsilon r + \omega_0^2) = 0$$

Отсюда:

$$r = \pm \varepsilon \pm i\omega_\varepsilon, \quad \omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} - \text{ частота собственных колебаний}$$

системы с учетом демпфирования.

На основании условия ограниченности отбрасываем частные решения, которым соответствуют показатели с положительной действительной частью.

Таким образом:

$$K_u(\tau) = C_1 e^{-(\varepsilon - i\omega_\varepsilon)\tau} + C_2 e^{-(\varepsilon + i\omega_\varepsilon)\tau}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из условий (11):

$$C_1 = \frac{S_0}{8i\omega_\varepsilon(\varepsilon - i \cdot \omega_\varepsilon)};$$

$$C_2 = -\frac{S_0}{8i\omega_\varepsilon(\varepsilon + i \cdot \omega_\varepsilon)}.$$

Подстановка найденных значений в решение дает:

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{8i\omega_\varepsilon} \left( \frac{e^{i\omega_\varepsilon\tau}}{\varepsilon - i \cdot \omega_\varepsilon} - \frac{e^{-i\omega_\varepsilon\tau}}{\varepsilon + i \cdot \omega_\varepsilon} \right), \quad \text{откуда после перехода к}$$

действительному выражению получаем окончательную формулу:

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{4\omega_0^2\varepsilon} \left( \cos \omega_\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon\tau \right) \cdot e^{-\varepsilon\tau}.$$

Формула выведена при  $\tau \geq 0$ . Можно ее распространить на всю действительную ось если заменить  $\tau$  на  $|\tau|$ . Полученная формула совпадает с формулой, полученной решением задачи статистической динамики методом функций Грина.

Метод дифференциальных уравнений можно обобщить на случай, когда как внешнее воздействие, так и реакция системы являются многомерными процессами.

Пусть внешнее воздействие описывается  $n$  функциями  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ .

А поведение системы –  $m$  функциями:  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ .

Операторное уравнение  $Lu = q$  задается матрицей

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1m} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nm} \end{bmatrix}, \quad \text{где } L_{jk} \text{ – линейные операторы.}$$

В развернутом виде исходное уравнение имеет вид:

$$\sum_{k=1}^m L_{jk} u_k = q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения относительно математических ожиданий и моментных функций для многомерного процесса  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  получим осреднением.

Для математических ожиданий имеем систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^m L_{jk} \langle u_k \rangle = \langle q_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Для моментных функций второго порядка:

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m L_{j\alpha} L_{k\beta} \langle u_\alpha(t_1) u_\beta(t_2) \rangle = \langle q_j(t_1) q_k(t_2) \rangle \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

и т.д.

### Метод спектральных представлений

Пусть случайная функция  $q(t)$  может быть представлена в виде конечного или бесконечного ряда:

$$q(t) = \sum_k Q_k \varphi_k(t) \quad (1)$$

$\varphi_k(t)$  - неслучайные координатные функции;

$Q_k$  - случайные величины или коэффициенты разложения.

Случайный процесс будет задан, если известна совместная плотность вероятности  $f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  коэффициентов ряда или полная система моментов этих коэффициентов.

Система координатных функций  $\varphi_k(t)$  и система коэффициентов разложения  $Q_k$  должны быть полными в том смысле, что любая реализация процесса  $q(t)$  может быть представлена в виде канонического разложения.

Зависимость между входом и выходом задана в виде:

$$Lu = q.$$

Система линейная детерминистическая.

Учитывая линейность системы, получим представление для выходного процесса в виде:

$$u(t) = \sum_k Q_k \psi_k(t)$$

$\psi_k(t)$  - некоторые детерминистические функции.

Как их определяют?

$$\sum_k L(Q_k \psi_k(t)) = \sum_k Q_k \varphi_k(t).$$

$$\sum_{k=1} Q_k [L\psi_k(t) - \varphi_k(t)] = 0$$

$$L\psi_k(t) = \varphi_k(t), \quad (2)$$

т.к.  $Q_k$  - произвольные случайные числа неравные нулю.

Функции  $\psi_k(t)$  определяются решением указанного уравнения с учетом начальных и граничных условий.

Моментные функции выходного процесса  $u(t)$  определяются следующим образом:

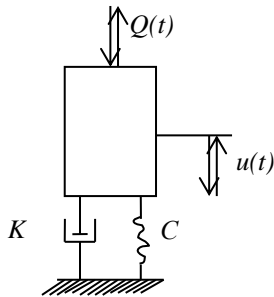
$$\langle u(t) \rangle = \sum_k \langle Q_k \rangle \psi_k(t); \quad (3)$$

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \sum_j \sum_k \langle Q_j Q_k \rangle \psi_j(t_1)\psi_k(t_2); \quad (4)$$

и т.д.

Таким образом, при заданных моментах коэффициентов ряда (1) решение задачи о прохождении процесса через линейную систему сводится к решению вспомогательного уравнения (2) и применению формул типа (3) и (4).

Рассмотрим пример.



$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t).$$

Пусть линейная колебательная система, уравнение которой записано, при  $t < 0$  находится в покое, а в момент  $t = 0$  к системе прикладывается случайная нагрузка:

$$q(t) = \sum_k Q_k e^{-\alpha_k t}.$$

Здесь  $\alpha_k$  - неслучайные положительные числа; функция распределения или моменты случайных величин  $Q_k$  полагаем известными.

Уравнение (2) запишется для данного случая следующим образом:



$$\frac{d^2\psi_k}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\psi_k}{dt} + \omega_0^2 \psi_k = e^{-\alpha_k t}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, будет:

$$\psi_k(t) = \frac{e^{-\alpha_k t} - e^{-\varepsilon t} \left( \cos \omega_\varepsilon t - \frac{\alpha_k - \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \cdot \sin \omega_\varepsilon t \right)}{\omega_0^2 + \alpha_k^2 - 2\varepsilon \alpha_k}.$$

Математическое ожидание и моменты выходного процесса  $u(t)$  могут быть теперь найдены по формулам (3), (4) и т.п.

Например, средний квадрат процесса  $u(t)$  выражается через моменты второго порядка коэффициентов  $Q_1, Q_2$  и функции  $\psi_k(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle u^2(t) \rangle &= \sum_j \sum_k \frac{\langle Q_j Q_k \rangle}{(\omega_0^2 + \alpha_j^2 - 2\varepsilon \alpha_j)(\omega_0^2 + \alpha_k^2 - 2\varepsilon \alpha_k)} \left[ e^{-\alpha_j t} - e^{-\varepsilon t} \left( \cos \omega_\varepsilon t - \frac{\alpha_j - \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right) \right] \times \\ &\times \left[ e^{-\alpha_k t} - e^{-\varepsilon t} \left( \cos \omega_\varepsilon t - \frac{\alpha_k - \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right) \right]. \end{aligned}$$

Часто бывает целесообразно представить входное воздействие в следующем виде:

$$q(t) = \langle q(t) \rangle + \sum_k Q_k \varphi_k(t),$$

а функции  $\varphi_k(t)$  выбираются таким образом, чтобы коэффициенты  $Q_1, Q_2, \dots$  были стохастически независимы. Тогда взаимные моменты второго порядка этих коэффициентов будут равны нулю:

$$\langle Q_j Q_k \rangle = 0 \quad (j \neq k).$$

Т.е. получили каноническое разложение входного процесса.

Если входной процесс  $q(t)$  задан в виде канонического разложения, то корреляционная функция выходного процесса определяется по формуле:

$$K_u(t_1, t_2) = \sum_k \langle Q_k^2 \rangle \psi_k(t_1) \psi_k(t_2).$$

Для упрощения используются иногда комплексные выражения, т.е. функции  $\varphi_k(t)$ ,  $\psi_k(t)$  и коэффициенты  $Q_k$  могут быть комплексными.

При этом целесообразно ввести такое определение для моментов второго порядка и соответствующих моментных функций, чтобы для дисперсий автоматически получались действительные выражения. Этим свойством обладает выражение:

$$K_q(t_1, t_2) = \langle \tilde{q}^*(t_1) \tilde{q}(t_2) \rangle$$

Тогда можно записать:

$$K_q(t_1, t_2) = \sum_k \langle |Q_k|^2 \rangle \varphi_k^*(t_1) \varphi_k(t_2).$$

До сих пор рассматривались дискретные спектральные представления.

Рассмотрим интегральное каноническое разложение случайного стационарного входного процесса:

$$q(t) = \langle q(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \varphi(t|\omega) d\omega.$$

Здесь, как уже говорилось:  $Q(\omega)$  - случайная функция;  $\varphi(t|\omega)$  - неслучайная функция времени  $t$  и параметра преобразования  $\omega$ .

В данном случае условие стохастической ортогональности принимает вид:

$$\langle Q^*(\omega) Q(\omega') \rangle = S_q(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Здесь:  $S(\omega)$  - спектральная плотность входного процесса  $q(t)$ ;  $\delta(\omega)$  - дельта-функция.

Корреляционная функция входного процесса через спектральную плотность выражается зависимостью:

$$K_q(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) \cdot \varphi^*(t_1|\omega) \cdot \varphi(t_2|\omega) \cdot d\omega.$$

Наиболее важным примером стохастически ортогонального интегрального канонического разложения является разложение центрированного стационарного случайного процесса в интеграл Фурье:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Для этого случая разложения, как уже говорилось, справедливы для входного воздействия соотношения Винера-Хинчина:

$$K_q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega;$$

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Пусть процесс, заданный в форме:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \cdot \varphi(t|\omega) \cdot d\omega,$$

проходит через линейную систему, уравнение которой задано в форме:

$$Lu = q.$$

Для выходного процесса получим спектральное представление в виде:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \psi(t|\omega) \cdot d\omega.$$

Здесь  $\psi(t|\omega)$ - неслучайная функция времени  $t$ . Эта функция определяется из решения уравнения:

$$L\psi = \varphi$$

Тогда можно легко вычислить математическое ожидание выходного процесса:

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q(\omega) \rangle \cdot \psi(t|\omega) \cdot d\omega,$$

А также моментную функцию второго порядка:

$$\langle u^*(t_1)u(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q^*(\omega)Q(\omega') \rangle \cdot \psi^*(t_1|\omega)\psi(t_2|\omega') \cdot d\omega d\omega'$$

и т.д.

Поясним реализацию метода спектральных представлений при интегральном каноническом разложении на простом примере. Вновь рассмотрим линейную колебательную систему, движение которой описывается уравнением:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t).$$

Пусть система при  $t < 0$  находится в покое, а при  $t = 0$  на систему начинает действовать случайная нагрузка, которая представляет собой заданную при  $t \geq 0$  реализацию стационарного случайного процесса:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \varphi(t|\omega) d\omega, \text{ где } \varphi(t|\omega) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ e^{i\omega t}, & (t \geq 0) \end{cases}.$$

Решение исходного уравнения ищется в форме:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \psi(t|\omega) d\omega. \quad (1)$$

Функция  $\psi(t|\omega)$  определяется как решение дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2 \psi = e^{i\omega t}.$$

Находим, что:

$$\psi(t|\omega) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-\varepsilon t} \left( \cos \omega_\varepsilon t + \frac{i\omega + \varepsilon}{\omega_\varepsilon} \cdot \sin \omega_\varepsilon t \right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega}.$$

Вероятностные характеристики выходного процесса определяются осреднением соответствующих выражений, получаемых на основе выражения (1).

Например, для среднего квадрата выходного процесса:

$$\langle |u(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) |\psi(t|\omega)|^2 d\omega.$$

При  $t \rightarrow \infty$  средний квадрат стремится к постоянному значению:

$$\langle |u(\infty)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{|\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega|^2}.$$

Это значение соответствует установившейся реакции системы на стационарные воздействия.

Метод спектральных представлений легко распространяется на многомерные случайные процессы. Пусть внешнее воздействие описывается  $n$  функциями:  $q_1(t), \dots, q_n(t)$ , а поведение системы –  $m$  функциями  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ .

Предположим, внешнее воздействие допускает стохастически ортогональное представление следующего типа:

$$q_j(t) = \langle q_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(\omega) \varphi_j(t|\omega) d\omega \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Спектры  $Q_j(\omega)$  удовлетворяют условию типа:

$$\langle Q_j^*(\omega) Q_k(\omega') \rangle = S_{q_j q_k}(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Здесь  $S_{q_j q_k}(\omega)$  - взаимные спектральные плотности процессов  $q_j(t)$  и  $q_k(t)$ . Решение уравнения  $Lu = q$  ищется в виде:

$$u_j(t) = \langle u_j(t) \rangle + \sum_{\alpha=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\alpha}(\omega) \psi_{j\alpha}(t|\omega) d\omega \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Здесь через  $\psi_{j\alpha}(t|\omega)$  обозначены решения детерминистической системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^m L_{jk} \psi_{k\alpha}(t|\omega) = \delta_{j\alpha} \varphi_{\alpha}; \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha = 1, 2, \dots, n \end{cases}.$$

Где  $\delta_{j\alpha}$  - символ Кронекера.

Эти решения имеют смысл детерминистических реакций системы на воздействие:

$$q_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(t|\omega) \quad \text{при всех остальных } q_j = 0.$$

Для рассмотренного случая взаимная корреляционная функция выходных процессов определяется по зависимостям:

$$K_{ujuk}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_{\alpha} q_{\beta}}(\omega) \psi_{j\alpha}^*(t_1|\omega) \psi_{k\beta}(t_2|\omega) d\omega.$$

### **Прохождение стационарного случайного процесса через стационарную линейную систему**

Одна из наиболее часто встречающихся задач статистической динамики состоит в изучении реакции стационарных линейных систем на стационарное случайное воздействие. Методы, изложенные в предыдущих параграфах, полностью применимы к этой задаче.

Представляет интерес получение простых соотношений, дающих решение задачи в замкнутом виде.

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнением:

$$Lu = q. \quad (1)$$

Входной процесс  $q(t)$  - стационарный случайный процесс.

Процесс  $q(t)$  представим в виде стохастического интеграла Фурье.

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

При этом сл. величина  $Q(\omega)$  удовлетворяет условию:

$$\langle Q^*(\omega)Q(\omega') \rangle = S_q(\omega)\delta(\omega - \omega').$$

Спектральная плотность удовлетворяет соотношениям Винера-Хинчина.

Рассмотрим вначале случай, когда оператор  $L$  является линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами:

$$L = a_v \frac{\partial^v}{\partial t_k^v} + a_{v-1} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t_k^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t_k} + a_0, \quad (3)$$

Здесь  $a_0, a_1, \dots, a_v$  - детерминистические числа.

Выходной процесс в этом случае определяется в виде:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \cdot \psi(t|\omega) \cdot d\omega. \quad (4)$$

Неслучайные функции  $\psi(t|\omega)$  определяются из условия:

$$L\psi = e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Поскольку на функцию  $\psi(t)$  не накладывается никаких условий, кроме ограниченности на  $\pm\infty$ , то решение уравнения (4) будет:

$$\psi(t|\omega) = \frac{e^{i\omega t}}{L(i\omega)}. \quad (6).$$

Выражение  $L(i\omega)$ , которое называется импедансом системы, получается из выражения (3) для оператора  $L$  заменой оператора дифференцирования  $d/dt$  на  $i\omega$ .

$$\alpha(i\omega) = a_v(i\omega)^v + a_{v-1}(i\omega)^{v-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0. \quad (7)$$

Корреляционная функция выходного процесса определяется через спектральную плотность входного воздействия:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) \psi^*(t_1|\omega) \psi(t_2|\omega) d\omega.$$

Подставляя в это выражение для координатных функций  $\psi(t|\omega)$ , получим:

$$K_u(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) \cdot e^{i\omega T} d\omega}{|L(i\omega)|^2}. \quad (8)$$

Корреляционную функцию выходного воздействия можно выразить через его спектральную плотность:

$$K_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega.$$

Тогда связь между спектральными плотностями входного и выходного процессов определяется зависимостью:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|L(i\omega)|^2}. \quad (9)$$

Эта формула является основным соотношением, дающим решение задачи о прохождении стационарного процесса через стационарную линейную систему. После того как спектральная плотность выходного процесса найдена, легко вычисляется его корреляционная функция и моментные функции, корреляционные функции производных от выходного процесса, дисперсии выходного процесса и его производные и т.д.

Зависимость (9) можно обобщить на более широкий класс операторов  $L$ .

Пусть оператор  $L$  имеет вид:

$$L = \frac{L_1 \left( \frac{d}{dt} \right)}{L_2 \left( \frac{d}{dt} \right)}. \quad (10)$$

Здесь  $L_1$  и  $L_2$  - линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Порядок  $L_2$  меньше порядка  $L_1$  хотя бы на единицу. Т.е. уравнение системы имеет вид:

$$L_1 u = L_2 q.$$

Если проделать необходимые выкладки, получим выражение для спектральной плотности выхода:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{\left| \frac{L_1(i\omega)}{L_2(i\omega)} \right|^2}.$$

Рассмотрим более широкий класс операторов. Будем искать решение операторного уравнения (1) в виде:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Уравнение (1) в пространстве Фурье имеет вид:

$$L(i\omega)U(\omega) = Q(\omega),$$

где  $L(i\omega)$  - образ оператора  $L$  в этом пространстве.

Для корреляционной функции случайного процесса  $U(\omega)$  и используя формулу:

$$\langle U^*(\omega)U(\omega') \rangle = S_u(\omega)\delta(\omega - \omega'),$$

получим вновь формулу:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|L(i\omega)|^2}.$$

Выражение  $H(i\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$  в теории автоматического управления называется передаточной функцией системы. Тогда связь между спектральными плотностями входа и выхода можно представить:

$$S_u(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_q(\omega).$$



Передаточная функция  $H(i\omega)$  связана с функцией Грина соотношением:

$$H(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt .$$

Проиллюстрируем применение формулы (9) на простейшем примере. Пусть входная функция  $q(t)$  в уравнении:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = q(t)$$

является стационарной случайной функцией со спектральной плотностью  $S_q(\omega)$ . Импеданс системы имеет вид:

$$L(i\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega .$$

Отсюда по формуле (9) находим:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} . \quad (11)$$

Используя эту формулу, можно вычислить различные вероятностные характеристики выходного процесса. Например, для среднего квадрата получаем формулу, которая ранее была получена из рассмотрения нестационарной реакции системы при  $t \rightarrow \infty$

$$\langle |u(\infty)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega)d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} . \quad (12)$$

Для широкого класса функций  $S_q(\omega)$  интеграл в этой формуле может быть вычислен в аналитической форме. Допустим внешнее воздействие – «белый шум». Тогда  $S_q(\omega) = S_0 = const$ . Интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}$$

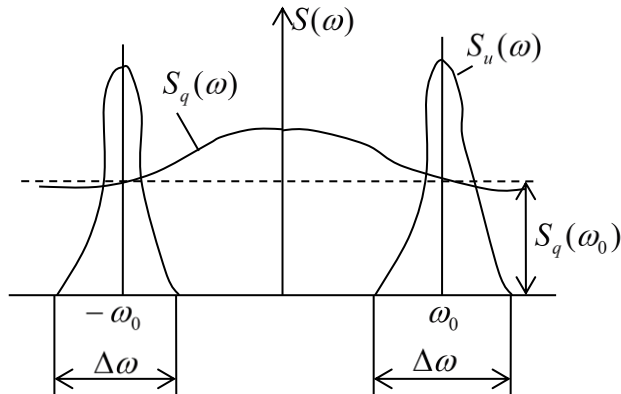
определяется по теореме вычетов.

Окончательно получаем (это то же самое, что и дисперсия):

$$\langle |u|^2 \rangle = \frac{\pi S_0}{2\varepsilon\omega_0^2} . \quad (13)$$

Если диссипация в системе мала, для дисперсии выходного процесса может быть получена приближенная формула, справедливая при произвольной, хотя и медленно меняющейся функции  $S_q(\omega)$ .

То есть, при малом  $\varepsilon$  спектральная плотность в выражении (11) принимает большие значения лишь в достаточно малой окрестности частот  $\pm \omega_0$  (см. рис.)



При этом в формуле (12) интеграл по множеству значений  $-\infty < \omega < \infty$  можно приближенно заменить суммой интегралов по двум достаточно малым интервалам  $\Delta\omega$ , накрывающим частоты  $\pm \omega_0$ . Если в этих интервалах функция  $S_q(\omega)$  меняется достаточно медленно, то по теореме о среднем ее можно вынести за знак интегрирования. Таким образом,

$$\langle |u|^2 \rangle \approx 2S_q(\omega_0) \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}.$$

Подынтегральное выражение в правой части принимает вне интервалов  $\Delta\omega$  пренебрежимо малые значения. Поэтому можно снова распространить область интегрирования на полубесконечный интервал.

$$\int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2} \approx \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2} = \frac{\pi}{4\varepsilon\omega_0^2}.$$

В результате приходим к формуле:

$$\langle |u|^2 \rangle = \frac{\pi S_q(\omega_0)}{2\varepsilon\omega_0^2}. \quad (14).$$

Формула (14) отличается от формулы (13) тем, что в нее входит значение спектральной плотности, соответствующее собственной частоте системы  $\omega_0$ . Механический смысл данного приближенного подхода состоит в следующем. При малом демпфировании колебательная система имеет весьма избирательный характер. Из спектра внешнего воздействия она выбирает те компоненты, частоты которых весьма близки к собственной частоте системы. Выходной процесс является узкополосным, т.е. основная часть энергии процесса сосредоточена в узкой части спектра, лежащей вблизи частоты  $\omega_0$ . Поэтому реакция системы с большой точностью выражается через значения спектральной плотности входного процесса, соответствующие указанной частоте.

В задачах статистической динамики весьма часто приходится вычислять интегралы типа:

$$I_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{|L(i\omega)|^2}. \quad (15)$$

Импеданс  $L(i\omega)$  - рациональная или дробно-рациональная функция. Спектральная плотность  $S_q(\omega)$  является четной функцией  $\omega$ , причем эта функция также обычно является дробно-рациональной. Вместо интеграла типа (15) целесообразно рассматривать интеграл:

$$I_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_v(\omega) d\omega}{l_v(\omega) \cdot l_v(-\omega)}. \quad (16).$$

Здесь  $l_v(\omega)$  и  $m_v(\omega)$  полиномы с комплексными коэффициентами. При этом полином  $m_v(\omega)$  содержит только четные степени  $\omega$ , а его степень по крайней мере на две единицы меньше, чем степень полинома  $\int_{-\infty}^{\infty} l_v(\omega) l_v(-\omega)$ .

Таким образом:

$$\begin{aligned} l_v(\omega) &= a_0 \omega^v + a_1 \omega^{v-1} + \dots + a_{v-1} \omega + a_v; \\ m_v(\omega) &= b_0 \omega^{2v-2} + b_1 \omega^{2v-4} + \dots + b_{v-1} \omega^2 + b_{v-1}; \end{aligned} \quad (17)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_v; b_0, b_1, \dots, b_{v-1}$  - комплексные коэффициенты.

Интеграл (16) вычисляется по теореме вычетов:

$$I_\nu = 2\pi i \sum_{p=1}^{\nu} \operatorname{res} \frac{m_\nu(\omega)}{l_\nu(\omega)l_\nu(-\omega)}.$$

Но вычисления по этой формуле достаточно сложны при  $\nu > 2$ . Вывод формул, связывающих интеграл (16) с коэффициентами полиномов (17), можно найти в специальной литературе. Приведем окончательный результат. Интеграл (16) вычисляется по формуле:

$$I_\nu = \frac{\pi i (-1)^{\nu+1}}{a_0} \cdot \frac{D_{ab}}{D_a}. \quad (18)$$

Здесь  $D_a$  - определитель  $\nu$ -го порядка.

$$D_a = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{vmatrix}.$$

Определитель  $D_{ab}$  получается из определителя  $D_a$  заменой первого столбца на столбец, составленный из коэффициентов полинома  $m_\nu(\omega)$ , т.е. на  $b_0, b_1, \dots, b_{\nu-1}$ :

$$D_{ab} = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\nu-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{vmatrix}.$$

Т.к. система является устойчивой, то  $D_a > 0$  всегда. Развернем формулу (18) для случая, когда  $\nu = 1, 2, 3$ :

$$I_1 = \frac{\pi i b_0}{a_0 a_1}, \quad I_2 = \frac{\pi i}{a_0 a_1} \left( -b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2} \right),$$

$$I_3 = \frac{\pi i \left( -a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3} \right)}{a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)}. \quad (19)$$

Проиллюстрируем применение формул (19) на примере интеграла:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|\omega_0^2 + 2i\varepsilon\omega - \omega^2|^2}.$$

Перепишем его в виде (16). При этом:

$$l_2(\omega) = -\omega^2 + 2i\varepsilon\omega + \omega_0^2; \quad m_2(\omega) = 1.$$

Функция  $m_2(\omega) = const$  постоянна, поскольку на входе действует «белый шум».

Коэффициенты полиномов (17) очевидно будут  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 2i\varepsilon$ ,  $a_2 = \omega_0^2$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$ . Подставляя значения этих коэффициентов во вторую из формул (19), найдем, что

$$I_2 = \frac{\pi}{2\varepsilon\omega_0^2}.$$

В результате приходим к формуле (13):

$$\langle |u|^2 \rangle = \frac{\pi S_0}{2\varepsilon\omega_0^2}.$$

Рассмотрим теперь многомерное стационарное случайное воздействие  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  на линейную систему. Спектральные представления возьмем в виде стохастических интегралов Фурье со спектрами  $Q_j(\omega)$ :

$$q_j(t) = \langle q_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

Нетрудно показать, что если все составляющие  $q_j(t)$  стационарны и стационарно связаны, то представление (20) является стохастически ортогональным. Вычисляя взаимные корреляционные функции

$$K_{q_j q_k}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q_j^*(\omega) Q_k(\omega') \rangle e^{i(\omega t_2 - \omega' t_1)} d\omega d\omega',$$

замечаем, что правые части будут зависеть только от  $\tau = t_2 - t_1$ , если выполнено условие стохастической ортогональности:

$$\langle Q_j^*(\omega) Q_k(\omega') \rangle = S_{q_j q_k}(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Отсюда вытекает формула, связывающая взаимные корреляционные функции со взаимными спектральными плотностями:

$$K_{q_j q_k}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_j q_k}(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (21)$$

и обратное соотношение

$$S_{q_j q_k}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{q_j q_k}(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Решение системы уравнений

$$Lu = q$$

с правыми частями, представленными в формуле (20), ищем в виде:

$$u_j(t) = \langle u_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} U_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Спектры выходного процесса  $U_j(\omega)$  удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^m L_{jk}(i\omega) U_k(\omega) = Q_j(\omega). \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

$L_{jk}(i\omega)$  - образы операторов  $L_{jk}$  в пространстве Фурье.

Пусть  $m=n$ . Обозначим через  $H_{jk}(i\omega)$  элементы следующей матрицы:

$$H(i\omega) = \begin{vmatrix} H_{11}(i\omega) & H_{12}(i\omega) & \dots & H_{1n}(i\omega) \\ H_{21}(i\omega) & H_{22}(i\omega) & \dots & H_{2n}(i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1}(i\omega) & H_{n2}(i\omega) & \dots & H_{nn}(i\omega) \end{vmatrix}.$$

Эта матрица обратная по отношению к матрице с элементами  $L_{jk}(i\omega)$ .

$H_{jk}(i\omega)$  называются передаточными функциями системы. При помощи передаточных функций решение системы (22) записывается в виде:

$$U_j(\omega) = \sum_{k=1}^n H_{jk}(i\omega) \cdot Q_k(\omega). \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Отсюда с учетом соотношения:

$$\langle U_j^*(\omega) U_k(\omega') \rangle = S_{u_j u_k}(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega'),$$

где  $S_{u_j u_k}(\omega)$  - взаимные спектральные плотности выходного процесса,

получим окончательную формулу:

$$S_{u_j u_k}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n H_{j\alpha}(-i\omega) H_{k\beta}(i\omega) S_{q_\alpha q_\beta}(\omega). \quad (23)$$

Эта формула связывает спектральные плотности входного и выходного процессов.

Рассмотрим пример на использование формулы (23).

Пусть линейная система с  $n$  степенями свободы совершает стационарные случайные колебания под действием внешних сил. Предположим, что допускается полное разделение обобщенных координат, т.е. что уравнения колебаний системы могут быть представлены в виде:

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} + 2\varepsilon_j \frac{du_j}{dt} + \omega_j^2 u_j = q_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

$\omega_j$  - парциальные собственные частоты системы;

$\varepsilon_j$  - парциальные коэффициенты демпфирования.

Передаточные функции системы  $H_{jk}(i\omega)$  образуют диагональную матрицу:

$$H_{jk}(i\omega) = \frac{\delta_{jk}}{L_j(i\omega)};$$

$$L_j(i\omega) = \omega_j^2 + 2i\varepsilon_j \omega - \omega^2.$$

Используя формулу (23), находим:

$$S_{u_j u_k}(\omega) = \frac{S_{q_j q_k}(\omega)}{(\omega_j^2 - 2i\varepsilon_j \omega - \omega^2)(\omega_k^2 - 2i\varepsilon_k \omega - \omega^2)}. \quad (25)$$

По известным спектральным плотностям вычисляются дисперсии, корреляционные моменты, корреляционные функции и другие характеристики второго порядка для выходного процесса и его производных. Например, элементы матрицы корреляционных моментов определяется по формуле:

$$K_{u_j u_k}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{q_j q_k}(\omega) d\omega}{L_j(-i\omega) L_k(i\omega)}. \quad (26)$$

Произведем вычисления по этой формуле в предположении, что внешние воздействия являются дельта-коррелированными, т.е. что все

$$S_{q_j q_k}(\omega) = \text{const}.$$

Интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{l_j(-\omega) \cdot l_k(\omega)},$$

где  $l_j(\omega)$  - полином второго порядка:

$$l_j(\omega) = \omega_j^2 + 2i\varepsilon_j \omega - \omega^2,$$

найдем по теореме вычетов:

$$I = 2\pi i \sum_{\alpha} \frac{1}{l_j(-\omega_{j\alpha}) l_k(\omega_{k\alpha})}.$$

## Методы решения задач статистической динамики для нелинейных систем

Анализ поведения нелинейных систем при случайных воздействиях представляет серьезные трудности по сравнению с соответствующим анализом линейных систем. Эти трудности встречаются уже на этапе составления уравнений относительно моментных функций выходного процесса.

Рассмотрим вначале особенности метода дифференциальных уравнений в применении к нелинейным системам. Пусть уравнение системы задано в виде:

$$Lu = q, \text{ где } L - \text{нелинейный оператор.}$$

Для нелинейного оператора несправедлив принцип суперпозиции. Кроме того, сам оператор непереставим с операцией осреднения, т.е.

$$\langle Lu \rangle \neq L \langle u \rangle.$$

Пусть уравнение системы имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \mu u^3 = q(t),$$

где  $\mu$  - некоторая неслучайная постоянная. Это уравнение описывает вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с кубической



нелинейностью под действием случайной силы. Перепишем уравнение в более компактной форме:

$$L_0 u + \mu u^3 = q(t). \quad (1)$$

Здесь  $L_0$  - линейная часть оператора  $L$ .

Для получения уравнения относительно математического ожидания выходного процесса осредняем уравнение (1) по множеству реализаций. В результате приходим к уравнению:

$$L_0 \langle u \rangle + \mu \langle u^3 \rangle = \langle q \rangle.$$

Это уравнение наряду с математическим ожиданием  $\langle u \rangle$  содержит также средний куб выходного процесса. Уравнение относительно среднего куба будет содержать моменты пятого порядка выходного процесса, а также смежные моменты третьего порядка относительно входного и выходного процессов. Т. о., попытка замкнуть систему уравнений приводит к бесконечной системе не разделяющихся уравнений.

Аналогичные трудности возникают при определении моментных функций второго порядка. Перемножая уравнение (1) для двух различных моментов времени и осредняя, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} L_0 L_0 \langle u(t_1)u(t_2) \rangle + \mu L_0 \langle u(t_1)u^3(t_2) \rangle + \mu L_0 \langle u^3(t_1)u(t_2) \rangle + \\ + \mu^2 \langle u^3(t_1)u^3(t_2) \rangle = \langle q(t_1)q(t_2) \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Индексы под символом оператора указывают, на функции какого аргумента оператор действует. Видно, что в это уравнение входят также моментные функции четвертого и пятого порядков.

Выход из положения состоит в переходе к усеченной системе уравнений. Вместо того чтобы рассматривать бесконечную систему, дающую точное решение задачи, ограничиваются рассмотрением приближенной конечной системы.

При этом старшие моментные функции исключают при помощи какой-либо подходящей гипотезы (т.е. все средства хороши). Один из возможных способов состоит в том, что все старшие моментные функции полагаются

равными нулю. Другой способ основан на использовании приближенных соотношений, выражающих старшие моментные функции через младшие моментные функции. Например, можно принять, что старшие моментные функции связаны с младшими функциями соотношениями, справедливыми для нормальных процессов.

Напомним эти соотношения.

Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n$  -  $n$ -мерный центрированный нормальный случайный вектор. Все моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка выражаются через корреляционные моменты. Для моментов порядка  $k=2s$

$$\langle u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} \rangle = \sum \langle u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \rangle \langle u_{\alpha_3} u_{\alpha_4} \rangle \dots \langle u_{\alpha_{2s-1}} u_{\alpha_{2s}} \rangle,$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2s$ .

Сумма, стоящая в правой части, содержит возможные разбиения  $2s$  индексов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s}$  (включая повторяющиеся индексы) на  $s$  пар.  $\alpha_1 \alpha_2, \alpha_3 \alpha_4, \dots, \alpha_{2s-1} \alpha_{2s}$ . Общее число слагаемых в правой части этой формулы равно  $(2s-1)!!$

Воспользуемся этой формулой и выразим моментные функции, входящие в уравнение (2) через корреляционную функцию:

$$K_u(t_1, t_2) = \langle u(t_1)u(t_2) \rangle.$$

При этом входной и выходной процессы считаем центрированными.

$$\langle u(t_1)u^3(t_2) \rangle = 3K_u(t_1, t_2)K_u(t_2, t_2);$$

$$\langle u^3(t_1)u(t_2) \rangle = 3K_u(t_1, t_1)K_u(t_1, t_2);$$

$$\langle u^3(t_1)u^3(t_2) \rangle = 9K_u(t_1, t_1)K_u(t_1, t_2)K_u(t_2, t_2) + 6K_u^3(t_1, t_2).$$

Для стационарных случайных процессов имеем:

$$\langle u(t_1)u^3(t_2) \rangle = 3K_u(\tau)K_u(0);$$

$$\langle u^3(t_1)u(t_2) \rangle = 3K_u(0)K_u(\tau);$$

$$\langle u^3(t_1)u^3(t_2) \rangle = 9K_u^2(0)K_u(\tau) + 6K_u^3(\tau).$$

Подставим найденные выражения в уравнение (2). В результате получим замкнутое уравнение относительно корреляционной функции  $K_u(t_1, t_2)$ .

$$L_0^+ L_0^- K_u(t_1, t_2) + 3\mu K_u(t_2, t_2) L_0^+ K_u(t_1, t_2) + 3\mu K_u(t_1, t_1) L_0^- K_u(t_1, t_2) + 9\mu^2 K_u(t_1, t_1) K_u(t_1, t_2) K_u(t_2, t_2) + 6\mu^2 K_u^3(t_1, t_2) = K_q(t_1, t_2).$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных. Если процессы  $u(t)$  и  $q(t)$  стационарные, то относительно корреляционной функции  $K_u(\tau)$  получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$L_0^+ L_0^- K_u(\tau) + 3\mu K_u(0)(L_0^+ + L_0^-) K_u(\tau) + 9\mu^2 K_u^2(0) K_u(\tau) + 6\mu^2 K_u^3(\tau) = K_q(\tau).$$

При этом для краткости использовано обозначение

$$L_0^\pm = \frac{d^2}{d\tau^2} \pm 2\varepsilon \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2.$$

Таким образом, мы рассмотрели метод усечений.

### Метод малого параметра

Этот метод также дает возможность получения замкнутых соотношений. Рассмотрим нелинейную систему:

$$L_0 u + \mu \varphi(u) = q(t). \quad (1)$$

Здесь:  $L_0$  - линейный оператор;  $\varphi(u)$  - однозначная аналитическая детерминистическая функция,  $\mu$  - малый неслучайный параметр.

Идея метода состоит в замене системы (1) рекуррентной последовательностью линейных систем. Для этого решение ищется в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \dots \quad (2).$$

В ряд по степеням  $\mu$  раскладывается также и нелинейная функция  $\varphi(u)$

$$\varphi(u) = \varphi(u_0) + \mu \varphi'(u_0) u_1 + \dots$$

При этом  $u_0$  - некоторое порождающее решение. Подставляя ряды в уравнение (1) и приравнявая члены, содержащие одинаковые степени малого

параметра, получим последовательность уравнений относительно функций, входящих в разложение (2):

$$\begin{aligned} L_0 u_0 &= q; \\ L_0 u_1 &= -\varphi(u_0); \\ L_0 u_2 &= -\varphi(u_0)u_1; \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения видно, что порождающее решение совпадает с решением соответствующей линейной системы. Существенно, что каждое из уравнений этой системы линейно и что правые части уравнений зависят лишь от функций, найденных на предшествующем этапе вычислений.

Пусть обратному оператору  $L_0^{-1}$  соответствует оператор  $H_0$  с функцией Грина  $h(t, \tau)$ . Тогда решение системы представляется в виде:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \int_{-\infty}^t h(t, \tau) q(\tau) d\tau; \\ u_1(t) &= - \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \varphi[u_0(\tau)] d\tau; \\ u_2(t) &= \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \varphi'[u_0(\tau)] u_1(\tau) d\tau; \\ &\dots \end{aligned}$$

Моментные функции выходного процесса определяются осреднением ряда (2). Так, для математического ожидания выходного процесса:

$$\langle u(t) \rangle = \langle u_0(t) \rangle + \mu \langle u_1(t) \rangle + \mu^2 \langle u_2(t) \rangle + \dots$$

имеем формулу:

$$\langle u(t) \rangle = \langle u_0(t) \rangle - \mu \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle \varphi[u_0(\tau)] \rangle d\tau + \mu^2 \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle \varphi'[u_0(\tau)] u_1(\tau) \rangle d\tau + \dots$$

Моментные функции второго порядка определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle u(t_1) u(t_2) \rangle &= \langle u_0(t_1) u_0(t_2) \rangle + \mu \langle u_0(t_1) u_1(t_2) + u_0(t_2) u_1(t_1) \rangle + \\ &+ \mu^2 \langle u_1(t_1) u_1(t_2) + u_0(t_1) u_2(t_2) + u_0(t_2) u_2(t_1) \rangle + \dots \end{aligned}$$

После подстановки сюда выражений для функций  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и т.д. получаем:

$$\begin{aligned} \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = & \langle u_0(t_1)u_0(t_2) \rangle - \mu \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau_2) \langle u_0(t_1) \phi[u_0(\tau_2)] \rangle d\tau_2 - \\ & - \mu \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau_1) \langle u_0(t_2) \phi[u_0(\tau_1)] \rangle d\tau_1 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Применим формулу (3) для вычисления корреляционной функции на выходе системы:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \mu u^3 = q(t).$$

Пусть  $q(t)$ - центрированный стационарный случайный процесс. Тогда  $u(t)$ - также стационарный центрированный процесс. Замечая, что для стационарной системы  $h(t, \tau) = h(t - \tau)$  и вводя обозначения  $t_1 - \tau_1 = \theta_1$ ,  $t_2 - \tau_2 = \theta_2$ ,  $t_2 - t_1 = \tau$ , перепишем формулу (3) в виде:

$$\begin{aligned} K_u(\tau) = & K_{u_0}(\tau) - \mu \int_0^{\infty} h(\theta_2) \langle u_0(0)u_0^3(\tau - \theta_2) \rangle d\theta_2 - \\ & - \mu \int_0^{\infty} h(\theta_1) \langle u_0(\tau)u_0^3(-\theta_1) \rangle d\theta_1 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $K_{u_0}(\tau)$  - корреляционная функция нулевого приближения, т.е.:

$$K_{u_0}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) K_q(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

В правую часть соотношения (4) входит моментная функция четвертого порядка от нулевого приближения  $u_0(t)$ .

Чтобы найти эту функцию, нужно иметь информацию о распределении процесса  $u_0(t)$ . Если внешнее воздействие является нормальным, то будет нормальным также и процесс  $u_0(t)$ . Тогда для определения моментной функции четвертого порядка можно воспользоваться соотношением:

$$\begin{aligned} \langle u_0(0)u_0^3(\tau - \theta_2) \rangle = & 3K_{u_0}(0)K_{u_0}(\tau - \theta_2) \\ \langle u_0(\tau) u_0^3(-\theta_1) \rangle = & 3K_{u_0}(0)K_{u_0}(\tau + \theta_1). \end{aligned}$$

Подставляя найденное значение в формулу (4), получим окончательно:

$$K_u(\tau) = K_{u_0}(\tau) - 3\mu K_{u_0}(0) \int_0^{\infty} h(\theta) \langle [K_{u_0}(\tau - \theta) + K_{u_0}(\tau + \theta)] d\theta + \dots$$

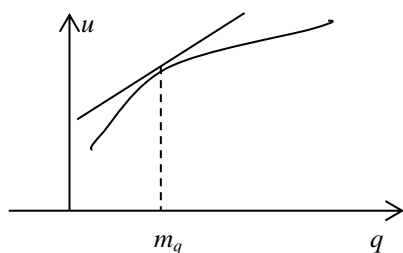
Для случая нормального входного процесса все выписанные члены найдены точно. Члены, содержащие квадраты и более высокие степени малого параметра, будут зависеть от моментных функций процессов  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и т.д. При нормальном внешнем воздействии процессы  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и т.д. свойством нормальности обладать не будут. Поэтому вычисление следующих членов разложения вызывает затруднения, сходные с теми, которые встречались в методе дифференциальных уравнений. Чтобы обойти эти затруднения, придется ввести дополнительные гипотезы о моментных функциях.

Необходимо отметить, что эффективность изложенного метода зависит от величины параметра  $\mu$ . Если  $\mu$  - мало, то точность решения задачи достаточно высока. В противном случае метод не дает удовлетворительных результатов.

### Методы линеаризации нелинейных систем

Пусть зависимость  $u = \varphi(q)$  между входом и выходом нелинейная.

Если кривая, изображающая данную зависимость – плавная кривая, то она может быть заменена в окрестности точки  $m_q$  с большой степенью точности касательной к кривой, т.е.:



$$u = \varphi(q) = \varphi(m_q) + \varphi'(q - m_q).$$

К такой системе уже можно применять те методы решения задачи статистической динамики, которые применимы к любой линейной системе.

Метод линеаризации нелинейных операторов с точки зрения теории случайных функций может быть применен в двух различных вариантах.

Во-первых, можно непосредственно линеаризовать заданную зависимость между случайными функциями и заменить, таким образом, нелинейные уравнения, связывающие случайные функции, линейными.

Во-вторых, можно применить метод канонических разложений, который приводит к замене операций над случайными функциями операциями над обычными случайными величинами, после чего можно применить обычный в теории вероятностей метод линеаризации функциональных зависимостей между случайными величинами.

### Непосредственная линеаризация уравнений нелинейных систем

Пусть поведение нелинейной системы описывается произвольной системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Т.к. всякая система дифференциальных уравнений может быть приведена к системе уравнений первого порядка, имеющей нормальную форму, то достаточно рассмотреть случай, когда система дифференциальных уравнений, описывающая поведение системы имеет вид:

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2, \dots, u_r; q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad q_j = q_j(t); \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$q_j = q_j(t)$  - известные случайные входные воздействия, вся необходимая информация о них известна.

Для того чтобы линеаризовать уравнения (1), разложим их правые части в ряд Тейлора относительно центрированных случайных функций  $\tilde{q}_j$ ,  $\tilde{u}_k$ .

Получим:

$$f_k(t, u_1, u_2, \dots, u_r, q_1, q_2, \dots, q_n) \approx f_k + \sum_{p=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial m_p^u} \tilde{u}_p + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q} \tilde{q}_j. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

Здесь  $f_k = f_k(t, m^u, m_2^u, m_r^u, \dots, m_1^q, \dots, m_n^q)$ .

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим систему приближенных дифференциальных уравнений, линейных относительно центрированных случайных функций  $\tilde{u}_p$  и  $\tilde{q}_j$ :

$$\frac{dm_k^u}{dt} + \frac{d\tilde{u}_k}{dt} = f_k + \sum_{p=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial m_p^u} \cdot \tilde{u}_p + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q} \cdot \tilde{q}_j. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

Для того чтобы приближенно определить математические ожидания случайных функций  $u_k$  следует заменить в уравнениях (3) все случайные функции их математическими ожиданиями. Тогда получим:

$$\frac{dm_k^u}{dt} = f_k(t, m_1^u, \dots, m_r^u, m_1^q, m_2^q, \dots, m_n^q). \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (4)$$

Вычитая уравнения (4) почленно из соответствующих уравнений (3), получим систему приближенных линейных дифференциальных уравнений, связывающих центрированные случайные функции  $\tilde{u}_k$  и  $\tilde{q}_j$ :

$$\frac{d\tilde{u}_k}{dt} = \sum_{p=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial m_p^u} \cdot \tilde{u}_p + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q} \cdot \tilde{q}_j. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (5)$$

После того как уравнения (4), определяющие математические ожидания случайных функций  $u_k$ , проинтегрированы, величины  $m_k^u$ , а, следовательно, и функции  $f_k(t, m_1^u, m_2^u, \dots, m_r^u, m_1^q, \dots, m_n^q)$  и их частные производные, входящие в уравнения (5), будут известными функциями независимой переменной  $t$ . Следовательно, полагая

$$a_{kp}(t) = \frac{\partial f_k(t, m_1^u, \dots, m_r^u, m_1^q, \dots, m_n^q)}{\partial m_p^u}; \quad (k, p = 1, 2, \dots, r) \quad (6)$$

$$b_{kj}(t) = \frac{\partial f_k(t, m_1^u, \dots, m_r^u, m_1^q, \dots, m_n^q)}{\partial m_j^q}. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

Можно переписать уравнения (5) в виде:

$$\frac{d\tilde{u}_k}{dt} = \sum_{p=1}^r a_{kp}(t) \cdot \tilde{u}_p + \sum_{j=1}^n b_{kj}(t) \cdot \tilde{q}_j. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (8)$$

Эта система уравнений является частным случаем общей линейной системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^m L_{pj} u_j = \sum_{j=1}^n L'_{pj} q_j. \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

Поэтому для приближенного определения корреляционных функций и взаимных корреляционных функций случайных функций  $u_k$  можно



применить методы решения задач статистической динамики для линейных систем.

Таким образом, линеаризуя уравнения (1) относительно центрированных случайных процессов  $\tilde{y}_p$  и  $\tilde{q}_j$ , получим в результате систему нелинейных дифференциальных уравнений (4), приближенно определяющую математические ожидания  $m_k^u$  интеграла  $u_k$  системы дифференциальных уравнений (1), и систему линейных дифференциальных уравнений (8), приближенно определяющую отклонения сл. функций  $u_k$  от их математических ожиданий. После интегрирования уравнений (4) коэффициенты линейных уравнений (8) определяются как функции времени  $t$  по формулам 6 и 7. Применяя к уравнениям (8) общие методы, приближенно определяется корреляционная функция векторной случайной функции  $U$ , т.е. все корреляционные и взаимные корреляционные функции ее составляющих.

Пример.

Поведение нелинейной системы описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + u^2 - 1 &= q(t); \\ \frac{du}{dt} &= 1 - u^2 + q(t); \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q(t)$  - действительная стационарная случайная функция времени,  
 $\langle q(t) \rangle = 0$ .

Начальные условия:

$$u(t=0) = u(0) = 1.$$

Необходимо определить математическое ожидание и дисперсию выходной переменной  $u(t)$ .

Заменяя в исходном уравнении случайные функции их математическими ожиданиями, получим дифференциальное уравнение, приближенно определяющее математическое ожидание выходного процесса:

$$m_u' = 1 - m_u^2. \quad (2).$$

Ограничиваясь в разложении правой части уравнения (1) в ряд Тейлора в окрестности точки  $(m_q, m_u)$  членами первой степени и вычитая из полученного уравнения равенство (2), получим приближенное уравнение, связывающее центрированные случайные процессы  $\tilde{u}_p(t)$  и  $\tilde{q}_j(t)$ :

$$\frac{du}{dt} = -2m_u \tilde{u} + \tilde{q}.$$

Решать это уравнение можно разными способами, в том числе и с помощью функций Грина.

$$\tilde{u}(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \tilde{q}(\tau) d\tau.$$

Функция Грина определяется из решения уравнения:

$$\frac{dh}{dt} + 2h = 0;$$

при начальном условии  $h(0) = 1$ .

$$\tilde{u}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2(t-\tau)} \tilde{q}(\tau) d\tau.$$

А дальше легко определяется дисперсия выходного процесса:

$$D_u(t) = \int_0^t \int_0^t \exp(-2(2t - \tau_1 - \tau_2)) K_q(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

### **Линеаризация уравнений нелинейных систем при помощи канонических разложений**

Этот метод часто используют для изучения поведения нестационарных систем.

Пусть поведение системы описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2, \dots, u_r; q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (1)$$

При этом процессы  $q_j(t)$  являются случайными функциями переменных:

$$q_j = q_j(t, u_1, \dots, u_r) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Представим процесс  $q_j(t)$  каноническим разложением:

$$q_j(t) = m_j^q(t) + \sum_v Q_v \varphi_{vj}(t), \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

где  $m_j^q(t)$  и  $\varphi_{vj}(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) являются определенными функциями:

$$\begin{aligned} m_j^q &= m_j^q(t, u_1, \dots, u_r), \quad (j = 1, \dots, n) \\ \varphi_{vj}(t) &= \varphi_{vj}(t, u_1, \dots, u_r), \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (3)$$

а  $Q_v$  - некоррелированные случайные коэффициенты, математические ожидания которых равны нулю.

Если подставить выражения (2) в уравнения (1), то правые части уравнений (1) будут зависеть от случайных величин  $Q_v$ , причем будут вполне определенными не случайными функциями величин  $t, u_1, \dots, u_r$  и параметров  $Q_v$ . В результате интегрирования полученных таким образом уравнений выходные переменные системы  $u_1, \dots, u_r$  выразятся как некоторые вполне определенные функции независимой переменной  $t$  и случайных параметров  $Q_v$ .

$$u_k = \varphi_k(t, Q_1, Q_2, \dots). \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (4)$$

Если функции  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ), рассматриваемые как функции случайных величин  $Q_v$ , достаточно близки к линейным в области возможных значений  $Q_v$ , то можно применить обычный метод линеаризации функций случайных величин и заменить точные равенства (4), приближенными:

$$u_k \approx [u_k]_0 + \sum_v Q_v \left[ \frac{\partial u_k}{\partial Q_v} \right]_0. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (5)$$

Индексом 0 отмечены значения соответствующих величин при нулевых значениях всех параметров  $Q_v$ .

Определив функции  $[u_k]_0$  и соответствующие всем возможным значениям  $v$  функции

$$\psi_{vk}(t) = \left[ \frac{\partial u_k}{\partial Q_v} \right]_0 \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (6)$$

можно, пользуясь общими формулами, приближенно определить математические ожидания

$$m_k^u(t) \approx [u_k]_0, \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (7)$$

а также корреляционные и взаимные корреляционные функции:

$$K_{pj}^u(t_1, t_2) \approx \sum_v D_v \psi_{vp}(t_1) \psi_{vj}^*(t_2). \quad (p, j = 1, 2, \dots, r)$$

Делая элементарные выкладки, можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{dm_k^u}{dt} &= f_k(t, m_1^u, \dots, m_r^u, m_1^q, m_2^q, \dots, m_n^q) \quad (k = 1, 2, \dots, r) \\ m_j^q &= m_j^q(t, m_1^u, \dots, m_r^u) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

Эти уравнения приближенно определяют математические ожидания  $m_1^u, \dots, m_r^u$  случайных функций  $u_1, \dots, u_r$ .

Для определения частных производных функций  $u_k$  по параметрам  $Q_v$  следует продифференцировать уравнения (1) по  $Q_v$ . Тогда будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial u_k}{\partial Q_v} = \sum_{p=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial Q_v} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial Q_v}. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (9)$$

На основании (2) и (3) определяем:

$$\frac{\partial q_j}{\partial Q_v} = \varphi_{vj} + \sum_{p=1}^r \frac{\partial m_j^q}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial Q_v} + \sum_{\mu} \sum_{p=1}^r Q_{\mu} \frac{\partial \varphi_{\mu j}}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial Q_v}. \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Подставляя это выражение в уравнения (9), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial u_k}{\partial Q_v} &= \sum_{p=1}^r \left[ \frac{\partial f_k}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \left( \frac{\partial m_j^q}{\partial u_p} + \sum_{\mu} Q_{\mu} \frac{\partial \varphi_{\mu j}}{\partial u_p} \right) \right] \times \\ &\times \frac{\partial u_p}{\partial Q_v} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \cdot \varphi_{vj}. \quad (k = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы определить значения производных  $\frac{\partial u_1}{\partial Q_v}, \dots, \frac{\partial u_r}{\partial Q_v}$  при нулевых значениях всех параметров  $Q_v$ , в уравнениях (10) следует положить все величины  $Q_{\mu}$  равными нулю.

После преобразований получим:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial Q_\nu} \right]_0 = \sum_{p=1}^r \left[ \frac{\partial f_k}{\partial m_p^u} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q} \cdot \frac{\partial m_j^q}{\partial m_p^u} \right] \times \left[ \frac{\partial u_p}{\partial Q_\nu} \right]_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q} \cdot \varphi_{vj} \cdot \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (11)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} m_j^q &= m_j^q(t, m_1^u, \dots, m_r^u); & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \varphi_{vj} &= \varphi_{vj}(t, m_1^u, \dots, m_r^u); & (j = 1, 2, \dots, n) \\ f_k &= f_k(t, m_1^u, \dots, m_r^u, m_1^q, \dots, m_n^q). & (k = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (12)$$

Проинтегрировав уравнения (8), найдем математические ожидания  $m_1^u, \dots, m_r^u$  случайных функций  $u_1, \dots, u_r$ , которые являются определенными функциями независимой переменной  $t$ . После этого функции  $m_j^q$ ,  $f_k$ , определяемые формулами (12), и их частные производные в уравнениях (11), а также функции  $\varphi_{vj} = \varphi_{vj}(t, m_1^u, \dots, m_r^u)$  будут известными функциями независимой переменной  $t$ . Введем для краткости обозначения:

$$\begin{aligned} a_{kp}(t) &= \frac{\partial f_k}{\partial m_p^u} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q} \cdot \frac{\partial m_j^q}{\partial m_p^u}; & (k = 1, 2, \dots, r) \quad (p = 1, 2, \dots, r) \\ b_{kj}(t) &= \frac{\partial f_k}{\partial m_j^q}; & (k = 1, 2, \dots, r) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ c_{vj}(t) &= \varphi_{vj}(t, m_1^u, m_2^u, \dots, m_r^u) & (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание обозначение (13), можно переписать систему уравнений (11) в виде:

$$\frac{d\psi_{vk}}{dt} = \sum_{p=1}^r a_{kp}(t) \psi_{vp} + \sum_{j=1}^n b_{kj}(t) c_{vj}(t) \cdot \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (14)$$

Давая  $\nu$  все возможные значения, получим системы уравнений, определяющие значения производных функций  $u_k$  по всем параметрам  $Q_\nu$  при нулевых значениях этих параметров.

Уравнения (8) и (14) содержат вполне определенные функции и поэтому могут быть проинтегрированы обычными методами (точными или приближенными).

Проинтегрировав систему уравнений (8), найдем  $m_1^u, \dots, m_r^u$  как функции переменной  $t$ . После этого по формулам (13) определяются коэффициенты

линейных уравнений (14). Проинтегрировав системы линейных уравнений (14) для всех возможных значений  $\nu$ , определим координатные функции  $\psi_{\nu k}(t)$  приближенного канонического разложения случайной функции  $u$ . Получим:

$$u_k(t) = m_k^u(t) + \sum_{\nu} Q_{\nu} \psi_{\nu k}(t). \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (15)$$

Затем достаточно просто определяются корреляционные функции процессов  $u_k(t)$ . И вообще по каноническому разложению, как это нам уже известно, достаточно просто можно определить все, что нас интересует.

При решении задач статистической динамики нелинейных систем методом канонических разложений необходимо задать начальные условия для систем дифференциальных уравнений (8) и (14). Возможны два вида начальных условий: случайные и неслучайные.

Если начальные условия неслучайные, т.е.

$$t = t_0, \quad u_k = u_{k0} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

то на основании формулы (15) систему уравнений (7), определяющую математические ожидания  $m_k^u$ , следует интегрировать при начальных условиях:

$$t = t_0, \quad m_k^u = u_{k0}, \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

а системы уравнений (14), определяющие координатные функции  $\psi_{\nu k}$ , следует интегрировать при нулевых начальных условиях:

$$t = t_0, \quad \psi_{\nu k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

Если начальные условия случайные, т.е.:

$$t = t_0, \quad u_k = u_{k0},$$

то начальные условия для системы уравнений (8) необходимо задавать в виде:

$$t = t_0, \quad m_k^u = m_{k0}^u, \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

а начальные условия для системы уравнений (14) в виде:

$$t = t_0, \quad \Psi_{\nu k} = \Psi_{\nu k0}.$$

Здесь  $m_{k0}^u$  и  $\psi_{vk0}$  входят в каноническое разложение для начальных условий:

$$u_{k0} = m_{k0}^u + \sum_v Q_v \psi_{vk0}.$$

Пример.

Поведение нелинейной системы описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{du}{dt} = 1 - u^2 + q.$$

Возмущение  $q$  – действительная стационарная случайная функция времени  $t$  и выходной переменной системы  $u$  и имеет равное нулю математическое ожидание. Начальные условия:

$$t=0, u=1.$$

Воспользуемся каноническим разложением стационарного случайного процесса  $q$  в следующем виде:

$$q(t) = \langle q(t) \rangle + \sum_j Q_j e^{i\omega_j t}.$$

Но поскольку  $\langle q(t) \rangle = 0$ , поэтому

$$q(t) = \sum_j Q_j e^{i\omega_j t}.$$

Здесь:  $e^{i\omega_j t}$  – координатная функция для стационарного случайного процесса.

Уравнение (8), определяющее математическое ожидание случайной функции  $u$  в данном случае имеет вид:

$$m_u' = 1 - m_u^2.$$

А это дает:

$$m_u \approx 1.$$

Далее, в данном случае:  $n=r=1$ .

Поэтому в формулах (13)

$a_{11} = -2$ ,  $b_{11} = 1$ ,  $c_{v1}(t) = e^{i\omega_v t}$  и уравнение (14) имеет вид:

$$\frac{d\psi_v}{dt} = -2\psi_v + e^{i\omega_v t}.$$

Интеграл этого уравнения, обращающийся в нуль при  $t=0$ , определяется формулой:

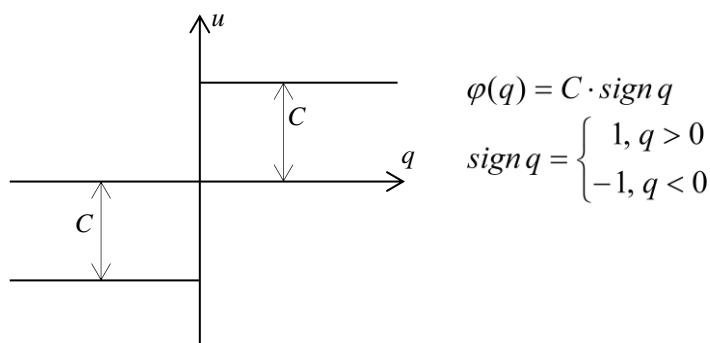
$$\psi_v(t) = \frac{e^{i\omega_v t} - e^{-2t}}{2 + \omega_v}.$$

Зная эти координатные функции, легко можно найти дисперсию:

$$D_u(t) = \sum_v D_v \frac{|e^{i\omega_v t} - e^{-2t}|^2}{4 + \omega_v^2};$$

$$D_v = \langle Q_v^2 \rangle.$$

Изложенные методы решения задач статистической динамики для нелинейных систем оправдывают себя в тех случаях, когда отклонения случайных величин вокруг своих математических ожиданий невелики. Для приближенного определения вероятностных характеристик интегралов дифференциальных уравнений, содержащих существенно нелинейные функции, используется метод статистической линеаризации.



### Метод статистической линеаризации

Метод статистической линеаризации основан на замене нелинейных функций такими линейными функциями, которые в известном смысле статистически равноценны данным нелинейным функциям. При этом используется некоторый критерий наилучшего приближения этих функций. Для реализации критерия необходимо иметь сведения о распределении выходного процесса. Поскольку до решения задачи эти сведения отсутствуют, то приходится вводить некоторые вероятностные гипотезы.



Такой гипотезой может служить, например, гипотеза о нормальности выходного процесса.

Заменяя нелинейные функции соответствующим образом выбранными линейными функциями, можно получить для выходного процесса линейное уравнение. Однако коэффициенты этого уравнения будут зависеть от неизвестных параметров распределения. После того, как линейризованная задача решена, можно получить уравнения для определения указанных параметров.

Поясним идею метода статистической линейризации на простом примере. Пусть уравнение нелинейной системы имеет вид:

$$L_0 u + \mu \varphi(u) = q(t),$$

где  $\varphi(u)$  - детерминистическая функция  $u$ .

Входной процесс  $q(t)$  является стационарным, центрированным и имеет симметричные распределения, функция  $\varphi(u)$  является нечетной, т.е.  $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ . В этом случае выходной процесс  $u(t)$  также является стационарным и центрированным.

Заменяем функцию  $\varphi(u)$  некоторой линейной функцией:

$$\varphi(u) \approx k \cdot u, \quad (1)$$

где  $k$  - неслучайная постоянная, которую необходимо выбрать так, чтобы указанное приближение было в некотором смысле наилучшим. Критерий для выбора не является единственным.

Можно потребовать, чтобы дисперсии обеих частей соотношения (1) были равны:

$$\langle \varphi^2(u) \rangle = k^2 \langle u^2 \rangle.$$

Тогда:

$$k = \sqrt{\frac{\langle \varphi^2(u) \rangle}{\langle u^2 \rangle}}. \quad (2)$$

В качестве другого критерия для выбора наилучшего приближения можно принять критерий минимума среднего квадратического отклонения двух функций:

$$\langle [\varphi(u) - k \cdot u]^2 \rangle = \min .$$

Отсюда для  $k$  можно получить выражение:

$$k = \frac{\langle \varphi(u)u \rangle}{\langle u^2 \rangle} . \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) дают различные значения постоянной  $k$ . Рекомендуют вычислять среднее арифметическое двух значений. Существенно, что постоянная  $k$  зависит от параметров распределения выходного процесса, которые в свою очередь являются неизвестными. Если входной процесс – нормальный и если нелинейность достаточно мала, то можно предположить, что выходной процесс  $u(t)$  мало отличается от нормального. Тогда для одномерной плотности вероятности можно взять приближенно выражение:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}} ,$$

где  $\sigma_u^2$  - неизвестная дисперсия процесса  $u(t)$ .

Тогда выражения в формулах (2) и (3) определяются:

$$\langle \varphi^2(u) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(u) f(u) du ;$$

$$\langle \varphi(u)u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)u f(u) du .$$

Таким образом, коэффициент  $k$  в уравнении линеаризованной системы

$$L_0 u + \mu k u = q(t) \quad (4)$$

зависит от неизвестной дисперсии  $\sigma_u^2$ . Рассматривая дисперсию как заданный параметр или заданную функцию методами статистической динамики линейных систем, определяется корреляционная функция или спектральная плотность на выходе линейной системы (4). На заключительном этапе

вычислений составляется и решается уравнение относительно дисперсии выходного процесса.

Рассмотрим стационарное случайное воздействие на стационарную нелинейную систему. К уравнению (4) применим известную формулу, связывающую спектральные плотности на входе и выходе из системы:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|L_0(i\omega) + \mu k(\sigma_u)|^2}.$$

Выразим неизвестную величину  $\sigma_u^2$  через спектральную плотность.

Получим соотношение:

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{|L_0(i\omega) + \mu k(\sigma_u)|^2}. \quad (5)$$

Интеграл, стоящий в правой части, можно определить либо аналитически (тогда получим трансцендентное или алгебраическое уравнение относительно  $\sigma_u^2$ ), либо методом последовательных приближений, либо графически.

Применим метод статистической линеаризации к уравнению Дуффинга

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \mu u^3 = q(t).$$

Пусть внешнее воздействие  $q(t)$  - «белый шум». В этом случае

$$\varphi(u) = u^3.$$

Принимая, что выходной процесс распределен нормально, найдем, что:

$$\langle \varphi^2(u) \rangle = \langle u^6 \rangle = 15\sigma_u^6$$

$$\langle \varphi(u)u \rangle = \langle u^4 \rangle = 3\sigma_u^4$$

Таким образом,

$$k = \alpha\sigma_u^2.$$

Подставляя значения коэффициента  $k$  и оператора в формулу (5), приведем ее к виду:

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\omega) d\omega}{|\omega_0^2 + \mu\alpha\sigma_u^2 + 2i\varepsilon\omega - \omega^2|^2}.$$

В результате вычислений получим:

$$\sigma_u^2 = \frac{\pi S_q}{2\varepsilon(\omega_0^2 + \mu\alpha\sigma_u^2)}. \quad (6)$$

Единственный положительный действительный корень данного уравнения дает искомое значение дисперсии выходного процесса.

Если нелинейность достаточно мала, т.е. если

$$\mu\alpha\sigma_u^2 \ll \omega_0^2,$$

то можно применить приближенную формулу:

$$\sigma_u^2 \approx \frac{\pi S_q}{2\omega_0^2\varepsilon} \left( 1 - \frac{\mu\pi\alpha S_q}{2\omega_0^4\varepsilon} \right). \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) можно использовать для приближенного вычисления дисперсии и в том случае, когда демпфирование в системе достаточно мало ( $\varepsilon \ll \omega_0$ ), а спектральная плотность входного процесса  $S_q(\omega)$  изменяется достаточно медленно. В этом случае система является фильтром для воздействий, частота которых близка к  $\omega_0$ . Дисперсия выходного процесса определяется при подстановке в указанные формулы значения спектральной плотности  $S_q = S_q(\omega_0)$ , соответствующее частоте  $\omega_0$ .

Метод статистической линеаризации можно обобщить на более широкий класс нелинейных систем и внешних воздействий.

Рассмотрим системы типа:

$$L_0 u + \mu\varphi(u, \dot{u}) = q;$$

где  $q(t)$  - стационарный случайный процесс (не обязательно центрированный). Функция  $\varphi(u, \dot{u})$  должна быть однозначной.

В рассматриваемых входных и выходных процессах будем выделять флуктуационные составляющие  $\tilde{q}$  и  $\tilde{u}$ .

$$q = \langle q \rangle + \tilde{q},$$

$$u = \langle u \rangle + \tilde{u}.$$

Функцию  $\varphi(u, \dot{u})$  будем линеаризовать в окрестности ее математического ожидания:

$$\varphi(u, \dot{u}) = \langle \varphi(u, \dot{u}) \rangle + k\tilde{u} + k_1\tilde{\dot{u}}.$$

Для математического ожидания выходного процесса имеем уравнение:

$$L_0 \langle u \rangle + \mu \langle \varphi(u, \dot{u}) \rangle = \langle q \rangle .$$

Флуктуационная часть удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое после линеаризации имеет вид:

$$L_0 \tilde{u} + \mu k \tilde{u} + \mu k_1 \dot{\tilde{u}} = \tilde{q} .$$

Неслучайные постоянные  $k$  и  $k_1$  можно определить разными способами.

Применим критерий минимума среднего квадратического отклонения.

$$\langle [\varphi(u, \dot{u}) - \langle \varphi(u, \dot{u}) \rangle - k \tilde{u} - k_1 \dot{\tilde{u}}]^2 \rangle = \min .$$

Раскрывая выражение, стоящее в левой части, и дифференцируя его по параметрам  $k$  и  $k_1$ , приходим к формулам:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\langle \varphi(u, \dot{u}) \cdot \tilde{u} \rangle}{\langle \tilde{u}^2 \rangle} ; \\ k_1 &= \frac{\langle \varphi(u, \dot{u}) \cdot \dot{\tilde{u}} \rangle}{\langle \dot{\tilde{u}}^2 \rangle} . \end{aligned} \quad (8)$$

Применение этих формул требует задания совместной плотности вероятности для процесса  $u(t)$  и его первой производной. Обычно используется гипотеза нормальности, т.е. полагается, что

$$f(u, \dot{u}) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_{\dot{u}}} \exp\left[-\frac{(u-a)^2}{2\sigma_u^2}\right] \exp\left[-\frac{\dot{u}^2}{2\sigma_{\dot{u}}^2}\right] .$$

Здесь  $\sigma_u^2$  и  $\sigma_{\dot{u}}^2$  - дисперсии процесса  $u(t)$  и его производной соответственно, а  $a$  - математическое ожидание процесса  $u(t)$ .

После решения линеаризованной задачи неизвестные параметры распределения легко вычисляются.

Как уже говорилось, метод статистической линеаризации широко применяется как к системам с малой нелинейностью, так и к системам существенно нелинейным.

Рассмотрим нелинейную функцию:

$$\varphi(u, \dot{u}) = C \operatorname{sign} u + C_1 \operatorname{sign} \dot{u} .$$

Первый член может быть интерпретирован как взятая с обратным знаком сила упругости с большой начальной жесткостью, второй член соответствует силе сухого трения. Представим:

$$\varphi(u, \dot{u}) \approx ku + k_1 \dot{u}.$$

Предполагая, что выходной процесс является нормальным с математическим ожиданием, равным нулю, легко получим:

$$k = \frac{\alpha C}{\sigma_u}, \quad k = \frac{\alpha C_1}{\sigma_{\dot{u}}}.$$

Коэффициент  $\alpha = 1$ , если линейризацию проводить из условия равенства дисперсий.

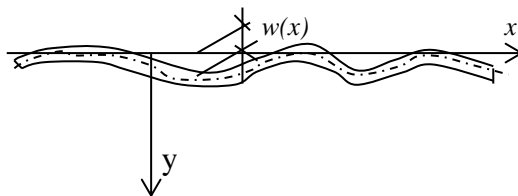
Если пользоваться формулами (8), получим:

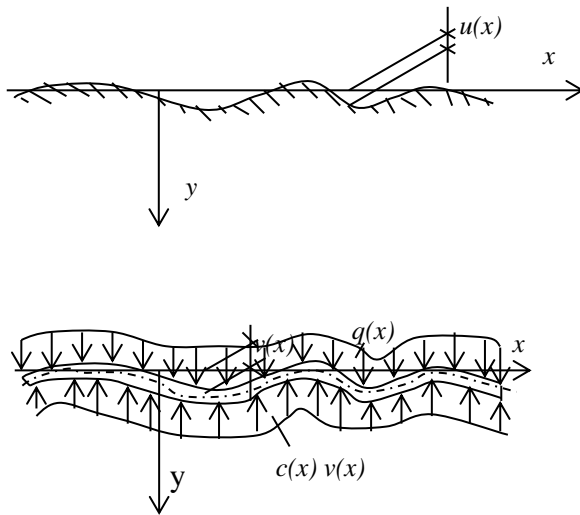
$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Такая линейризация неаналитического выражения приводит к удовлетворительным результатам при определении дисперсии. Это объясняется тем, что при случайных колебаниях неаналитический характер нелинейности проявляется в меньшей степени, чем при гармонических колебаниях.

### Пример расчета нелинейной системы

Рассмотрим деформацию бесконечно длинного упругого стержня, лежащего на сплошном упругом основании. Введем допущение, что реакция основания пропорциональна прогибу в данной точке, а отнимание балки от основания отсутствует. Расчетная схема представлена на рисунках.





Введем обозначения.

$EJ$  - изгибная жесткость балки;

$c$  – коэффициент жесткости основания, равный усилию, которое требуется для погружения отрезка балки единичной длины на единицу глубины;

$w(x)$  - функция искривлений оси балки; выбирается таким образом, чтобы ее среднее значение на достаточно большой длине было равно нулю;

$u(x)$  - функция неровностей основания;

$q(x)$  - интенсивность внешних сил, действующих на балку (собственный вес, давление слоев грунта и т.п.);

$v(x)$  - полный прогиб стержня.

Для отыскания полного прогиба  $V(x)$  стержня имеем уравнение:

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} + cv = q + cu + EJ \frac{d^4 w}{dx^4}. \quad (1)$$

Допустим, функции  $w(x), u(x), q(x), c(x)$  являются стационарными случайными функциями координаты  $x$ . Среднее значение нагрузки и коэффициента жесткости обозначим соответственно через  $q_0$  и  $c_0$ . Среднее значение функции  $u(x)$  примем равным нулю. При этих допущениях уравнение (1) вместе с условиями ограниченности решения на бесконечности описывает стохастически краевую задачу относительно функции  $v(x)$ .

Сформулированная задача является линейной по отношению к выходам  $q(x)$ ,  $u(x)$ ,  $w(x)$ . По отношению к входу  $c(x)$  задача является нелинейной.

С точки зрения приложений наибольший интерес представляет случайная изменчивость коэффициента отпора.

Применим для решения указанной стохастически нелинейной задачи метод малого параметра.

Допустим, что неоднородности статистически малы в том смысле, что вероятность больших отклонений от средних значений достаточно мала. Тогда функции, входящие в уравнение (1), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \mu q_1(x); \\ c &= c_0 + \mu c_1(x); \\ u &= \mu u_1(x); \\ w &= \mu w_1(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра  $\mu$ :

$$v = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 \dots \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим рекуррентную последовательность линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^4 v_0}{dx^4} + c_0 v_0 &= q_0 \\ EJ \frac{d^4 v_1}{dx^4} + c_0 v_1 &= q_1 - c_1 v_0 + c_0 u_1 + EJ \frac{d^4 w}{dx^4} \\ EJ \frac{d^4 v_2}{dx^4} + c_0 v_2 &= -c_1 v_1 + c_1 u_1 \end{aligned} \tag{4}$$

.....

и т.д.

Решение первого уравнения, ограниченное на бесконечности, имеет вид:

$$v_0 = \frac{q_0}{c_0}. \tag{5}$$



(Перемещение балки в однородных условиях.)

Рассмотрим второе уравнение системы (4). Вводя обозначение для функции неоднородности:

$$r = q_1 - c_1 v_0 + c_0 u_1 + EJ \frac{d^4 w}{dx^4}, \quad (6)$$

перепишем это уравнение в виде:

$$EJ \frac{d^4 v_1}{dx^4} + c_0 v_1 = r. \quad (7)$$

В правой части этого уравнения стоит стационарная случайная функция  $x$  с математическим ожиданием, равным нулю. Для решения этого уравнения применим метод спектральных представлений.

Представим правую часть уравнения (7) в виде стохастического интеграла Фурье:

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ikx} dk,$$

где  $k$  – волновое число,  $R(k)$  - обобщенная случайная функция - спектр функции  $r(x)$ .

Для искомой функции введем аналогичное представление:

$$v_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(k) e^{ikx} dk.$$

Связь между спектрами  $V_1(k)$  и  $R(k)$  дается формулой:

$$V_1(k) = \frac{R(k)}{k^4 EJ + c_0}.$$

Отсюда приходим к соотношению, связывающему спектральную плотность  $S_{v_1}(k)$  функции  $V_1(x)$  со спектральной плотностью  $S_r(k)$ , соответствующей функции неоднородности (6):

$$S_{v_1}(k) = \frac{S_r(k)}{(k^4 EJ + c_0)^2}. \quad (8)$$

Формула (8) является частным случаем формулы:

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|L(i\omega)|^2}.$$

Роль импеданса системы играет выражение:

$$L(ik) = k^4 EJ + c_0.$$

Если неоднородность основания достаточно мала, то полученного приближения достаточно для приближенного описания деформаций балки и основания.

Из формулы (3) видно, что математическое ожидание прогиба  $v(x)$  отличается от  $v_0$  членами, имеющими порядок  $\mu^2$  и выше. Поэтому флуктуационная часть функции  $v(X)$  будет:

$$\tilde{v}(x) = v(x) - \langle v \rangle = \mu v_1(x) + \dots$$

Следовательно, с точностью до множителя  $\mu^2$  спектральная плотность функции  $v(x)$  совпадает со спектральной плотностью (8). Соответствующая корреляционная функция вычисляется по формуле:

$$K_{v_1}(\varepsilon) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_r(k) e^{ik\varepsilon} dk}{(k^4 EJ + c_0)}. \quad (9)$$

Используя формулу (8), можно сделать несколько общих заключений о влиянии различных факторов на прогибы балки и возникающие в ней изгибающие моменты. Характер влияния неоднородностей зависит от соотношения между волновыми числами и параметром

$$k_0 = \left( \frac{c_0}{EJ} \right)^{1/4}, \quad (10)$$

которое называется собственным волновым числом. Собственное волновое число характеризует соотношение между жесткостью основания и жесткостью балки. Его механический смысл виден из следующих соображений.

Найдем выражение для прогиба балки, лежащей на основании с детерминистическим коэффициентом жесткости  $c_0$  под действием сосредоточенной силы, приложенной в начале координат.

Этот прогиб определяется как решение уравнения:

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} + c_0 v = \delta(x),$$

удовлетворяющее условию затухания на бесконечности. После несложных вычислений получаем:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{8k_0^3 EJ}} e^{-\frac{k_0|x|}{\sqrt{2}}} \left( \cos \frac{k_0 x}{\sqrt{2}} + \sin \frac{k_0|x|}{\sqrt{2}} \right).$$

Таким образом, с точностью до множителя  $\sqrt{2}$  собственное волновое число (10) совпадает с множителем при  $x$  в выражениях, играющих роль аргумента у тригонометрических функций. Величина, обратная  $k_0$ , имеет порядок характерной длины волны у осциллирующего (хотя и очень быстро затухающего) прогиба.

С учетом формулы (10) выражение для спектральной плотности прогиба принимает вид:

$$S_{v_1}(k) = \frac{S_r(k)}{c_0^2 \left( 1 + \frac{k^4}{k_0^4} \right)^2}. \quad (11)$$

Для расчета на прочность необходимо знать спектральную плотность изгибающего момента  $m(x)$ , возникающего в сечениях балки. Замечая, что

$$m_1 = EJ \frac{d^2 v_1}{dx^2}$$

и используя правило дифференцирования случайных функций, заданных при помощи спектрального представления Фурье, получим:

$$S_{m_1}(k) = \frac{S_r(k)}{k_0^4 \left( \frac{k^2}{k_0^2} + \frac{k_0^2}{k^2} \right)^2}. \quad (12)$$

Предположим, что функции  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $q_1(x)$ ,  $c_1(x)$  стохастически независимы. Тогда с учетом формулы (6) спектральная плотность  $S_r(k)$  может быть представлена в виде:

$$S_r(k) = S_{q_1}(k) + \frac{q_0^2}{c_0^2} S_{c_1}(k) + c_0^2 S_{u_1}(k) + c_0^2 \left( \frac{k}{k_0} \right)^8 S_{w_1}(k). \quad (13)$$

При этом каждый тип неоднородностей может быть изучен отдельно.

Из формул (11) и (13) видно, что неоднородности, обусловленные неравномерностью нагрузки, неравномерностью жесткости основания и

неровностью основания, вносят существенный вклад в неоднородность прогиба только при малых волновых числах, т.е. при достаточно больших длинах волн. В то же время компоненты, которым соответствуют достаточно большие волновые числа ( $k \gg k_0$ ), не оказывают заметного влияния.

Иной характер имеет влияние начальных искривлений балки. Здесь невелико влияние компонент с малыми волновыми числами ( $k \ll k_0$ ) и достаточно велико влияние компонент с большими волновыми числами.

Влияние неоднородностей на распределение изгибающих моментов балки носит еще более своеобразный характер. Видно, что выражение, стоящее в скобках в формуле (12), имеет точный минимум при  $k = k_0$ . Таким образом, отношение спектральных плотностей  $S_{m_i}(k)$  и  $S_r(k)$  становится максимальным при  $k = k_0$ . Это означает, что система балка - упругое основание обладает избирательной способностью по отношению к неоднородностям, волновые числа которых близки к собственному волновому числу  $k_0$ .

### **Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)**

Суть метода заключается в моделировании системы с учетом реальных условий и случайного характера входного процесса.

Пусть нелинейная система описывается уравнениями вида

$$Lu = q,$$

т.е. задана математическая модель системы.

Заданы вероятностные характеристики процесса  $q(t)$ . Параметры системы неслучайны, но они выбраны случайным образом.

Ход решения задачи заключается в том, что для каждого конкретного значения внешнего воздействия  $q_j$ , которое выбирается из совокупности возможных значений, интегрируется уравнение:  $Lu = q$ . И получается реализация выходного процесса  $u_j(t)$ .

Решив  $n$  раз дифференциальное уравнение, получим  $n$  реализаций выходного процесса. Далее проводится статистическая обработка полученных реализаций, определяются математические ожидания, дисперсии, корреляционные функции.

$$m_u^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j(t);$$

$$D_u^*(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (u_j - m_u^*)^2;$$

$$K_u^*(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n u_j(t_1)u_j(t_2) - m_u^*(t_1)m_u^*(t_2) \frac{n}{n-1}.$$

При этом статистические оценки указанных числовых характеристик должны быть состоятельными, несмещенными, эффективными.

Точность оценок математического ожидания и дисперсии может быть охарактеризована их среднеквадратическими отклонениями:

$$S_{m_u^*} = \frac{\sigma_u^*(t)}{\sqrt{n}};$$

$$S_{D_u^*} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} D_u^*(t).$$

Кроме того, в математической статистике существуют так называемые доверительные интервалы и доверительные вероятности.

$$\beta_1 = P\left[|m_u^*(t) - m_u(t)| < \varepsilon_1\right]$$

$$\beta_2 = P\left[|D_u^*(t) - D_u(t)| < \varepsilon_2\right].$$

Если предположить, что статистические оценки имеют нормальный закон распределения, то можно записать:

$$\beta_1 = \Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{S_{m_u^*} \sqrt{2}}\right); \quad \beta_2 = \Phi\left(\frac{\varepsilon_2}{S_{D_u^*} \sqrt{2}}\right).$$

Если подставим в эти формулы выражения для среднего квадратического отклонения через дисперсии, получим:

$$\beta_1 = \Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2D_u^*}} \sqrt{n}\right) = \Phi(v_1 \sqrt{n});$$

$$\beta_1 = \Phi\left(\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2D_u^*}} \sqrt{\frac{n-1}{2}}\right) = \Phi\left(v_2 \sqrt{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Т.е. при заданной точности  $v_i$  доверительная вероятность  $\beta_i$  зависит от числа проведенных опытов.

$\beta_1/v_1$	0,2	0,15	0,10	0,05	0,01
0,6	18	31	70	281	7000
0,7	27	47	108	431	10800
0,8	41	73	164	651	16400
0,9	68	121	272	10090	27200

$\beta_2/v_2$	0,2	0,15	0,10	0,05	0,01
0,6	37	63	141	563	14000
0,7	55	95	217	863	21600
0,8	83	147	239	1300	32800
0,9	137	243	545	21800	54400

В принципе методы статистической обработки и оценки точности достаточно хорошо разработаны.

Но значительным недостатком метода является необходимость проведения колоссального числа опытов, если нужно получить достоверные результаты. Так, чтобы оценить асимметрию закона распределения, опытов нужно проводить в 6 раз больше, чем для математического ожидания при той же достоверности. Чтобы оценить эксцесс – в 24 раза.

Для воспроизведения и ввода входных возмущений применяется физическое или математическое моделирование случайных функций. С этой целью создано большое число разнообразных физических датчиков случайных функций, а также программ для получения на ЭВМ так называемых псевдослучайных чисел, на основе которых синтезируются реализации случайных функций.

Метод допускает использование не только математических моделей систем, но также и полунатурных моделей. В принципе метод может быть реализован непосредственно на самой системе, если только технически возможен ввод различных случайных возмущений в систему и изменение ее параметров.

### Метод эквивалентных возмущений

Метод эквивалентных возмущений предназначен для приближенного определения вероятностных характеристик выходных процессов нелинейных систем по заданным моментным характеристикам для входных случайных параметров.

Пусть уравнение системы записывается в виде:

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2, \dots, u_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_m). \quad (1)$$

Здесь  $Q_r$  - случайные параметры, не зависящие от времени  $t$  и выходных процессов  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Не нарушая общности, можно допустить, что

$$\langle Q_r \rangle = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Предположим, что для параметров  $Q_r$  существуют и известны центральные моменты:

$$\langle Q_{r_1} Q_{r_2} \dots Q_{r_k} \rangle = \mu_{r_1 r_2 \dots r_k} \quad (k = 1, 2, \dots, q) \quad (2)$$

$$(r_1, r_2, \dots, r_k = 1, 2, \dots, m).$$

Далее будем рассматривать лишь один выходной процесс, обозначив его  $u(t)$ . Задача состоит в отыскании математического ожидания  $m_u$  величины  $u(t)$ .

Решения уравнения, описывающие поведение системы, являются некоторыми функциями (вообще говоря, нелинейными) времени  $t$  и случайных величин  $Q_r$ :

$$u = \varphi(t, Q_1, Q_2, \dots, Q_m).$$

Далее предположим, что функция  $\varphi$  может быть разложена в ряд Маклорена по величинам  $Q_r$ . Ограничиваясь членами  $q$ -й степени и опуская остаточный член разложения, получим:

$$u = \varphi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left[ \frac{\partial^k \varphi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0 Q_{r_1} Q_{r_2} \dots Q_{r_k}. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } \varphi_0 = \varphi(t, 0, 0, \dots, 0). \quad (4)$$

Индекс  $0$  у частных производных означает, что они вычисляются в точке  $(t, 0, 0, \dots, 0)$ .

Переходя в равенстве (3) от случайных величин к их математическим ожиданиям, получим:

$$v_1 = \langle u \rangle = \varphi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left[ \frac{\partial^k \varphi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0 \mu_{r_1} \mu_{r_2} \dots \mu_{r_k}. \quad (5)$$

Если проводить дальнейшие вычисления по этой формуле, то возникнут большие трудности, связанные с необходимостью определения частных производных

$$\left[ \frac{\partial^k \varphi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0.$$

Метод эквивалентных возмущений позволяет избежать этих трудностей.

Сущность метода состоит в следующем. Подставим в выражение для  $u(t)$  частные неслучайные значения  $\xi_{r_k s}$  параметров  $Q_r$  и проведем разложение функции  $u = \varphi$  по этим параметрам. Тогда аналогично (3) получим:

$$u_s = \varphi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left[ \frac{\partial^k \varphi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0 \xi_{r_1 s} \xi_{r_2 s} \dots \xi_{r_k s}. \quad (6)$$

Величины  $\xi_{r_k s}$  называются эквивалентными возмущениями. Выберем  $N$  разных комбинаций эквивалентных возмущений  $\xi_{r_k s}$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ):



$$\begin{aligned} & \xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{m1}; \\ & \xi_{12}, \xi_{22}, \dots, \xi_{m2}; \\ & \dots\dots\dots \\ & \xi_{1N}, \xi_{2N}, \dots, \xi_{mN}. \end{aligned}$$

Подставим их в равенство (3). Получим  $N$  равенств вида (6). Умножив обе части этих равенств на некоторые, пока что неопределенные коэффициенты  $\alpha_s$  ( $s=1, \dots, N$ ) и суммируя полученные равенства почленно, найдем:

$$s = \sum_{s=1}^N \alpha_s \cdot u_s = \varphi_0 \sum_{s=1}^N \alpha_s + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left[ \frac{\partial^k \varphi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0 \sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{r_1 s} \dots \xi_{r_k s}. \quad (7)$$

Сопоставляя равенства (5) и (7), приходим к выводу, что сумма  $s$  будет  $\approx$  равна математическому ожиданию  $\langle u \rangle$  выходного процесса системы, если величины  $\alpha_s$  и  $\xi_{r_k s}$  удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s = 1; \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{r_1 s} \xi_{r_2 s} \dots \xi_{r_k s} = \mu_{r_1 r_2 \dots r_k}. \quad (k=1, 2, \dots, q; r_1, r_2, \dots, r_k = 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

Выбирая в качестве величин  $\alpha_s$  и  $\xi_{r_k s}$  какое-либо действительное решение системы уравнений (8) и (9), получим

$$\langle u \rangle = \sum_{s=1}^N \alpha_s \cdot u_s. \quad (10)$$

При этом величина  $u_s$  вычисляется путем решения исходной системы уравнений при подстановке в эту систему соответствующих эквивалентных возмущений  $\xi_{r_k s}$  вместо случайных параметров  $Q_r$ . Всего придется выполнять  $N$  решений системы (1), каждый раз подставляя новые значения  $\xi_{r_k s}$  параметров  $Q_r$ . С помощью такого приема можно избежать вычисления производных  $\left[ \frac{\partial^k \varphi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0$ , существенно снизить трудоемкость вычислений и повысить их точность.

Система уравнений (8), (9) при надлежащем выборе величин  $\xi_{r,s}$  имеет действительное решение при  $N = C_{m+q}^q$  (11), где  $q$  – степень полинома  $\varphi$ ,  $m$  – число случайных параметров  $Q_i$ . Однако при этом число  $N$  будет очень большим. Поэтому для определения математического ожидания выходного процесса по формуле (10) потребуется большое число решений системы (1). При практических вычислениях целесообразно в каждом конкретном случае в зависимости от числа учитываемых случайных величин  $m$  и степени  $q$  аппроксимирующего полинома выбрать такую совокупность эквивалентных возмущений, чтобы по возможности большее число коэффициентов  $\alpha_s$  в формуле (10) обратить в нуль. При этом будет существенно уменьшено и число необходимых решений системы (1).

Для определения центральных моментов высших порядков достаточно найти соответствующие начальные моменты, поскольку между ними и центральными моментами существуют простые связи. Поэтому ограничимся рассмотрением метода определения начальных моментов выходного процесса. Обозначим начальный момент порядка  $p$  величины  $u$  через  $v_p$ :

$$v_p = \langle u^p \rangle. \quad (12)$$

Обозначим далее

$$U^p = \varphi^p(t, Q_1, \dots, Q_m) = \psi(t, Q_1, Q_2, \dots, Q_m). \quad (13)$$

Относительно функции  $\psi$  полностью остаются в силе все рассуждения, которые были проведены для функции  $\varphi$ . Поэтому, разлагая функцию  $\psi$  в ряд Маклорена по  $Q_r$  и переходя к математическим ожиданиям, получим выражение, аналогичное выражению (5), с той разницей, что в нем вместо функции  $\varphi$  будет фигурировать  $\psi$ :

$$v_p = \langle u^p \rangle = \psi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left[ \frac{\partial^k \psi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_0 \mu_{r_1} \mu_{r_2} \dots \mu_{r_k}. \quad (14)$$

Подставляя в равенство (13) вместо параметров  $Q_r$  ранее выбранные величины  $\xi_{r_k s}$  и разлагая функцию  $\psi$  в ряд Маклорена по этим величинам, получим:

$$u_s^p = \psi_0 + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left[ \frac{\partial^k \psi}{\partial Q_{r_1} \partial Q_{r_2} \dots \partial Q_{r_k}} \right]_{Q=0} \xi_{r_1 s} \xi_{r_2 s} \dots \xi_{r_k s}. \quad (15)$$

Умножив полученные равенства на  $\alpha_s$ , суммируя по  $s$  и принимая во внимание уравнения (8) и (9), запишем:

$$v_p = \langle u^p \rangle = \sum_{s=1}^N \alpha_s u_s^p. \quad (16)$$

Следовательно, для определения момента  $v_p$  достаточно вычислить решение степени ранее найденных решений  $u_s$  и результат подставить в формулу (16).

При сравнительно небольших числах  $m$  и  $q$ , как это следует из формулы (11), метод эквивалентных возмущений оказывается достаточно простым и экономичным с точки зрения объема вычислительной работы. Прямая попытка применения метода при большом (порядка десятков и сотен) чисел случайных параметров, влияющих на динамику системы, приводит к столь сложным вычислениям, что оказывается более целесообразным использование метода статистического моделирования. Объем вычислений при реализации метода резко возрастает также и при уточнении гипотезы о степени полинома  $q$ , аппроксимирующего зависимость исследуемого выходного процесса системы от случайных параметров  $Q_r$ .

Рассмотрим применение метода эквивалентных возмущений для случая, когда в разложении (3) достаточно учесть лишь величины второго порядка относительно случайных параметров  $Q_r$ . Особенно простое решение задачи можно получить, если предварительно привести параметры  $Q_r$  к канонической системе, т.е. добиться их некоррелированности. Тогда:

$$\langle V_{r_1}, V_{r_2} \rangle = 0 \text{ при } r_1 \neq r_2; \quad \langle V_r, V_r \rangle = \sigma_r^2; \quad \langle V_r \rangle = 0.$$

Уравнения (8) и (9) для  $q=2$  принимают вид:

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s = 1; \quad (17)$$

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{rs} = 0; \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{r_1 s} \xi_{r_2 s} = 0; \quad (r_1 \neq r_2, r_1, r_2 = 1, 2, \dots, m) \quad (19)$$

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{rs}^2 = \sigma_r^2. \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (20)$$

Число разложений уравнений определяется в общем случае по формуле (11):

$$N = C_{m+2}^q = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \quad (21)$$

Это число быстро возрастает с ростом  $m$ . Однако специальным выбором эквивалентных возмущений  $\xi_{r_1 s}$  и  $\xi_{r_2 s}$  можно добиться обращения в нуль многих коэффициентов  $\alpha_s$  и тем самым существенно сократить число необходимых решений уравнений, описывающих поведение системы.

Выберем, например, величины  $\xi_{rs}$  в соответствии с таблицей.

$s$	$r$						
	1	2	3	.....	$m-2$	$m-1$	$m$
1	$\xi_1$	0	0	.....	0	0	0
2	0	$\xi_2$	0	.....	0	0	0
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$m-1$	0	0	0	.....	0	$\xi_{m-1}$	0
$m$	0	0	0	.....	0	0	$\xi_m$
$m+1$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	.....	$\xi_{m-2}$	$\xi_{m-1}$	$\xi_m$
$m+2$	$-\xi_1$	$-\xi_2$	$-\xi_3$	.....	$-\xi_{m-2}$	$-\xi_{m-1}$	$-\xi_m$

В данном случае  $N = m + 2$ , что при больших величинах  $m$  существенно меньше числа решений системы, определяемого по формуле (21).

В данном случае уравнения (17) и (18) приводятся к виду:

$$\sum_{s=1}^{m+2} \alpha_s = 1; \quad (22)$$

$$\alpha_r + \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} = 0. \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (23)$$

Суммируя все  $m$  уравнений (23) и принимая во внимание (22), найдем:

$$\sum_{s=1}^{m+2} \alpha_s + (m-1)\alpha_{m+1} - (m+1)\alpha_{m+2} = 0.$$

Отсюда:

$$(m+1)\alpha_{m+2} = (m-1)\alpha_{m+1} + 1. \quad (24)$$

На основании данных таблицы уравнения (19) и (20) приводятся к виду:

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} = 0; \quad (25)$$

$$(\alpha_r + \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2})\xi_r^2 = \sigma_r^2. \quad (26)$$

Из системы уравнений (24) и (25) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{m+1} &= -\frac{1}{2m}; \\ \alpha_{m+2} &= \frac{1}{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Тогда на основании выражения (23) получаем:

$$\alpha_r = \frac{1}{m}. \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (28)$$

Из равенств (25), (26) и (28) находим искомые эквивалентные возмущения:

$$\xi_r = \sigma_r \sqrt{m}.$$

Обозначим через  $u_s$  решения системы уравнений, описывающей поведение системы, получающиеся при подстановке вместо случайных параметров  $Q_r$  неслучайных величин  $\xi_r$ , согласно таблице.

Тогда на основании формул (10), (16), (27), (28) можно записать:

$$\langle u \rangle = \sum_{s=1}^{m+2} \alpha_s u_s = \frac{1}{m} \left( \sum_{s=1}^m u_s + \frac{u_{m+2} - u_{m+1}}{2} \right);$$

$$\langle \tilde{u}^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - (\langle u \rangle)^2 = \frac{1}{m} \left( \sum_{s=1}^m u_s^2 + \frac{u_{m+2}^2 - u_{m+1}^2}{2} \right) - (\langle u \rangle)^2.$$

## Интерполяционный метод

Пусть поведение системы описывается системой уравнений:

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2, \dots, u_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_m); \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где  $u_k(t)$  - выходные процессы системы;  $Q_j$  - случайные параметры.

В общем случае задача формулируется следующим образом. Заданы вероятностные характеристики случайных параметров  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  в виде их моментов или законов распределения.

Выбрана система функционалов  $\Phi_i$  от выходных процессов:

$$\Phi_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Кроме того, заданы некоторые функции

$$\chi_k = \chi_k(\Phi_i). \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Требуется по заданной системе (1) и заданным вероятностным характеристикам случайных параметров  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  определить математические ожидания:

$$a_k = \langle \chi_k(\Phi_i) \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

В частном случае величины  $a_k$  могут представлять собой математические ожидания и дисперсии выходных процессов нелинейной системы и т.д.

Расчетные формулы интерполяционного метода можно в общем случае представить в виде:

$$\langle \chi(\Phi) \rangle = \sum_{k=1}^N \rho_k \chi[\Phi(t, u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk})], \quad (5)$$

где  $\rho_k$  - некоторые постоянные числа,  $u_{ik}$  - конкретное значение случайной величины  $u_i$ .

Когда варианты значений случайных величин выбраны одними и теми же для интерполяционного метода и для метода эквивалентных возмущений, а числа  $\rho_k = \alpha_k$ , то метод эквивалентных возмущений совпадает с интерполяционным тождественно.

Однако за счет оптимального выбора узлов интерполирования при одном и том же числе вариантов решений системы уравнений (1) интерполяционный метод дает более высокую точность, чем метод эквивалентных возмущений. Узел интерполирования, то конкретное значение случайной величины  $Q_j$ , которое используется при решении задачи.

В книгах «Анализ нелинейных систем управления» В.И. Чернецкого и «Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления» под ред. Б.Г. Доступова помещены таблицы оптимальных чисел (числа Кристоффеля) и оптимальных вариантов узлов интерполирования (узлов Чебышева) для случайных величин, имеющих равномерный, нормальный или экспоненциальный закон распределения.

При практических расчетах необходимо преобразовывать исходные случайные величины к той или иной стандартной форме в зависимости от заданных законов распределения.

Если случайная величина  $Q_j$  имеет равномерный закон распределения в промежутке  $[a_j, b_j]$ , то узлы типа Чебышева рассчитываются по формуле:

$$Q_{jk_j} = \frac{b_j - a_j}{2} \lambda_{kq_j} + \frac{b_j + a_j}{2}. \quad (6)$$

где  $\lambda_{kq_j}$  - стандартные узлы Чебышева для равномерного закона распределения в промежутке  $[-1, 1]$ .

Если случайная величина  $Q_j$  имеет нормальный закон распределения с параметрами  $a_j$  и  $\sigma_j^2$ , то узлы Чебышева рассчитываются по формуле:

$$Q_{jk_j} = a_j + \sigma_j \lambda_{kq_j}. \quad (7)$$

Стандартное распределение случайной величины  $\lambda$  имеет параметры  $\langle Q \rangle = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

Если случайная величина  $Q_j$  имеет экспоненциальный закон распределения вероятности с математическим ожиданием, равным  $\frac{1}{\mu_j}$ , то узлы Чебышева определяются по формуле:

$$Q_{jk_j} = \mu_j \lambda_{kq_j}. \quad (8)$$

Стандартное распределение имеет параметр  $\mu = 1$ .

После приведения случайных величин к стандартному виду при условии их независимости расчетную формулу интерполяционного метода можно записать в виде:

$$\langle \chi \rangle \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} \chi(t, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) \prod_{j=1}^m \rho_{k_j}. \quad (9)$$

Суммирование осуществляется по всем индексам

$$(k_1 = 1, 2, \dots, q_1), (k_2 = 1, 2, \dots, q_2), \dots, (k_m = 1, 2, \dots, q_m).$$

$q_1$  - число различных значений случайной величины  $Q_1$ , используемых при расчете;

$q_2$  - число различных значений случайной величины  $Q_2$ , используемых при расчете.

$Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}$  - различные варианты значений, полученные путем приведения исходных случайных величин к стандартному виду.

$\rho_{k_j}$  - число Кристоффеля для стандартной случайной величины  $\lambda_j$ .

Формулу (9) можно конкретизировать, если рассмотреть определенные формы задания характеристической функции  $\chi$ . Например, при расчете математических ожиданий выходных процессов формула (9) имеет вид:

$$\langle u_i(t) \rangle \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} u_i(t, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) \prod_{j=1}^m \rho_{k_j}. \quad (10)$$

Корреляционная функция рассчитывается по формуле:

$$K_{u_i}(t_1, t_2) \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} [u_i(t_1, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) - \langle u_i \rangle] \times \\ \times [u_i(t_2, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) - \langle u_i \rangle] \cdot \prod_{j=1}^m \rho_{k_j}. \quad (11)$$

Дисперсия определяется по формуле:

$$\langle \tilde{u}_i^2(t) \rangle \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} [u_i(t, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) - \langle u_i \rangle]^2 \cdot \prod_{j=1}^m \rho_{k_j}. \quad (12)$$

Во всех этих формулах:



$$(k_1 = 1, 2, \dots, q_1), (k_2 = 1, 2, \dots, q_2), \dots, (k_m = 1, 2, \dots, q_m).$$

Интегральный закон распределения рассчитывается по формуле:

$$F(t, u_i) = P[u_i(t) \ll u_i] \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{u_i(t, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) - u_i}{|u_i(t, Q_{1k_1}, Q_{2k_2}, \dots, Q_{mk_m}) - u_i|} \right] \cdot \prod_{j=1}^m \rho_{k_j}. \quad (13)$$

Общее число вариантов интегрирования системы уравнений равно:

$$N = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m. \quad (14)$$

Из этой формулы видно, что если общее число  $m$  случайной величины  $Q_i$  велико и величины  $q_1, q_2, \dots, q_m$  выбраны достаточно большими, то необходимо выполнить большое количество  $N$  численных интегрирований системы (1).

Однако, если величины  $q_1, q_2, \dots, q_m$  выбирать рационально, то можно добиться требуемой точности определения исходных вероятностных характеристик при приемлемых затратах машинного времени.

Для иллюстрации приведем формулы интерполяционного метода для расчета математических ожиданий и дисперсий выходных процессов для конкретных случаев при нормальном распределении исходных случайных величин.

Пусть  $m = 1$ ,  $q = 2$ . В этом случае в правые части системы входит всего лишь одна случайная величина с параметрами  $a$  и  $\sigma$ , а для расчета приближенных значений выбираются два узла ( $q=2$ ).

По соответствующим таблицам получаем:

$$\rho_{11} = 0,5; \rho_{12} = 0,5; \lambda_{11} = 1; \lambda_{12} = -1.$$

По формуле приведения (7) имеем:

$$Q_{11} = a + \sigma,$$

$$Q_{12} = a - \sigma.$$

Из формулы (10) следует, что в этом случае математические ожидания выходных процессов:

$$\langle u_i(t, Q) \rangle = u_i(t, a + \sigma) \cdot 0,5 + u_i(t, a - \sigma) \cdot 0,5.$$

Дисперсия рассчитывается по формуле:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_i^2(t) \rangle &\approx [u_i(t, a + \sigma) \cdot 0,5 - u_i(t, a - \sigma) \cdot 0,5]^2 \cdot 0,5 + \\ &+ [u_i(t, a - \sigma) \cdot 0,5 - u_i(t, a + \sigma) \cdot 0,5]^2 \cdot 0,5 = \\ &= 0,25 \cdot [u_i(t, a + \sigma) - u_i(t, a - \sigma)]^2 \end{aligned}$$

и т.д.

## Надежность

ЛА – сложная система, предназначенная для выполнения различных функций. *Совокупность свойств, характеризующих полезные функции системы, называются ее качеством.*

Качество системы должно сохраняться в течение всего времени, установленного для эксплуатации системы. В понятие эксплуатации включается не только полезное функционирование системы, но и вся совокупность операций над нею, начиная от изготовления и кончая демонтажем или сносом.

***Определение надежности.***

***Надежностью называется способность системы сохранять свое качество в процессе эксплуатации.***

Можно дать несколько другое определение надежности. ***Надежностью называется свойство объекта выполнять заданные функции, сохраняя во времени значения установленных эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования.***

Введем еще некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения материала.

***Объект*** – предмет определенного целевого назначения, рассматриваемый в период проектирования, эксплуатации, исследований и испытаний на надежность. Объектами могут быть системы и элементы.

***Система*** – совокупность элементов, объединенных общим функциональным назначением. При анализе надежности системы учитывается надежность элементов и их взаимосвязь.

***Элемент*** – изделие, которое с точки зрения надежности рассматривается как единое целое и характеризуется определенным показателем надежности.

**Показатель надежности** - это количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта. Показатель надежности количественно характеризует, в какой степени конкретному элементу присущи определенные свойства, обуславливающие его надежность.

**Работоспособность** – состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения заданных параметров в пределах, установленных нормативно-технической документацией.

**Отказ** – это событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта.

**Повреждение** – событие, заключающееся в нарушении исправности объекта или его составных частей вследствие влияния внешних воздействий, превышающих уровни, установленные в нормативно-технической документации на объект.

Повреждение может быть существенным, являясь причиной нарушения работоспособности, и несущественным, при котором работоспособность объекта сохраняется.

В процессе эксплуатации качество системы изменяется. Обычно оно уменьшается с течением времени, но может быть и наоборот, например при доработках системы. Таким образом, надежность является функцией времени.

**Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его эксплуатации может включать безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость в отдельности или определенное сочетание этих свойств, как для объекта, так и для его частей.**

**Безотказность** – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторого времени или некоторой наработки. Свойством безотказности объект обладает как в период его использования, так и в периоды хранения и транспортирования.

Нередко надежность изделия отождествляется с его безотказностью. Для изделий одноразовых и неремонтируемых или для отдельных периодов работы изделий безотказность и надежность тождественны (например, для стартовавшего одноразового неремонтируемого ЛА). Для того же ЛА, находящегося на хранении, безотказность не тождественна надежности, а является лишь одним из свойств надежности, наряду с долговечностью, ремонтпригодностью и сохраняемостью.

Существует ряд признаков классификации отказов.

1. По причинам образования отказов.

*Конструкционный отказ* – отказ, возникающий в результате нарушения установленных правил и норм конструирования.

*Технологический отказ* – отказ, возникший в результате нарушения установленного технологического процесса изготовления или ремонта объекта.

*Эксплуатационный отказ* – отказ, возникший в результате нарушения установленных правил и условий эксплуатации.

2. По виду отказов.

Потеря устойчивости, усталостное разрушение, потеря статической прочности, хрупкое разрушение, нарушение вибропрочности и т.д.

3. По связи отказов между собой.

*Независимый отказ* – отказ элемента объекта, не обусловленный повреждением или отказами других элементов объекта.

*Зависимый отказ* – отказ элемента объекта, обусловленный повреждением или отказом другого элемента объекта.

4. По характеру отказов.

*Внезапный отказ* – отказ, характеризующийся скачкообразным изменением одного или нескольких заданных параметров объекта.

*Постепенный отказ* характеризуется постепенным изменением одного или нескольких заданных параметров объекта.

5. По времени возникновения.

*Приработочные, в период нормальной работы.*

В ряде случаев при классификации отказов применяются термины *систематический отказ, полный отказ, частичный отказ.*

Под *систематическим отказом* понимают многократно повторяющийся отказ, обусловленный дефектами конструкции объекта, нарушением процесса его изготовления, качеством используемых материалов и т.п.

При *полном отказе* наблюдается полная потеря работоспособности изделия.

*Частичный отказ* – отказ, после возникновения которого изделие может быть использовано по назначению.

*Долговечность* – свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

*Предельное состояние* – состояние объекта, при котором дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из-за неустранимого нарушения требований безопасности или неустранимого ухода заданных параметров за установленные пределы.

Неремонтируемый объект достигает предельного состояния при возникновении отказа или при достижении заранее установленного предельно допустимого значения срока службы или суммарной наработки.

Для ремонтируемых объектов переход в предельное состояние определяется наступлением момента, когда дальнейшая эксплуатация невозможна или нецелесообразна по одной или нескольким из следующих причин: становится невозможным поддержание безопасности, безотказности или эффективности эксплуатации объекта на допустимом уровне.

*Ремонтпригодность* – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения его отказов, повреждений и устранению их последствий путем проведения ремонтов и технического обслуживания.

$$K = \frac{\text{время наработки изделия за какое-то время}}{\sum \text{времени наработки и времени ремонтов и осмотров за это же время}} -$$

коэффициент технического обслуживания.

*Сохраняемость* – свойство объекта непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение, и после хранения и транспортирования. Сохраняемость объекта характеризует его способность противостоять отрицательному влиянию условий хранения и транспортирования объекта на его безотказность и долговечность.

Для количественной оценки надежности применяют различные методы и теории расчета надежности.

### 1. Математические (формальные) методы.

При использовании математических методов расчета надежности принимают, что изменение надежности подчиняется некоторым статистическим закономерностям, которые определяются экспериментально.

При этом нельзя выяснить причины отказов и определить возможности их устранения. Существует два направления математических методов: одно рассматривает надежность как временную категорию (надежность как качество, развернутое во времени), другое – как вероятность случайного события.

### 2. Надежность как вероятностная прочность.

Показателем надежности в этом методе расчета является вероятность превышения несущей способности конструкции над действующими нагрузками. И несущая способность конструкции, и действующие нагрузки рассматриваются как случайные величины.

### 3. Общая теория надежности.

Согласно этому методу, вводится некоторое пространство качества системы  $V$ , область допустимых состояний системы  $\Omega_0$  и траектория  $v(t)$  изменения качества системы во времени. Выход траектории  $v(t)$  из области допустимых состояний трактуется как отказ системы.

Характеристиками надежности конструкции по этому методу является вероятность невыброса случайного процесса за заданный уровень.

## Количественные характеристики надежности

### 1. Вероятность безотказной работы элемента.

Под вероятностью безотказной работы понимается вероятность того, что элемент будет работоспособным в течение заданного интервала времени  $t$  в заданных условиях эксплуатации. Другими словами, вероятность безотказной работы – это вероятность того, что за заданный интервал времени не произойдет отказа.

Длительность времени безотказной работы элемента  $T$  – случайная величина.

Законом распределения или интегральной функцией распределения случайной величины  $T$  называется неубывающая функция  $Q(t)$ , выражающая вероятность неравенства  $T < t$ .

$Q(t) = P(T < t)$  - интегральная функция распределения моментов времени отказа элементов или функция вероятности отказов.

Если случайная величина  $T$  характеризует время безотказной работы элемента, то безотказность в зависимости от требуемого интервала времени работы представляет интегральную функцию распределения интервала времени безотказной работы элемента:

$$H(t) = P(T > t).$$

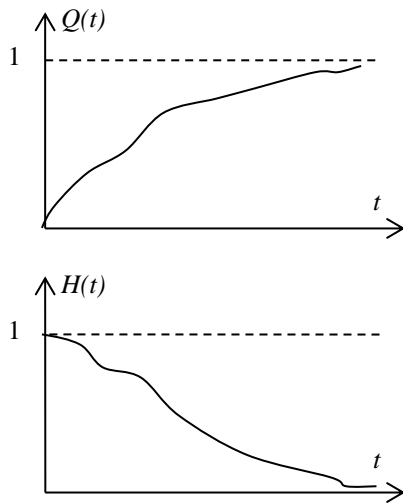
Функция  $Q(t)$  - функция ненадежности,  $H(t)$  - функция надежности.

Исправная работа и отказ являются событиями противоположными, поэтому:

$$H(t) + Q(t) = 1;$$

$$H(t) = 1 - Q(t).$$





Форма кривой  $H(t)$  зависит от вида отказа. Однако в любом случае функция надежности должна обладать следующими свойствами:

1.  $H(0) = 1$ , т.е. полагают, что в начальный момент времени элемент находится в исправном состоянии.

2.  $H(t)$  - положительная невозрастающая функция времени: т.е. время безотказной работы и время отказа – величины существенно положительные.

3.  $H(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. при возрастании времени работы элемента вероятность его безотказной работы уменьшается и в пределе оказывается равной нулю. Таким образом, определение вероятности безотказной работы заключается в том, чтобы установить закон распределения случайной величины  $T$  и затем определить, какая доля возможных значений удовлетворяет условию надежности  $T > t$ .

Обозначим  $H^*(t)$  – статистическая оценка вероятности безотказной работы в течение заданного интервала времени  $t$ ,  $N_0$  - число поставленных на испытание элементов,  $n(t)$  – число элементов, вышедших из строя за время  $t$ .

Тогда

$$H(t)^* = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}.$$

При достаточно большом  $N_0$  выполняется равенство:

$$H(t) \approx H^*(t).$$

Статистическую оценку вероятности отказов  $Q^*(t)$  можно определить по формуле:

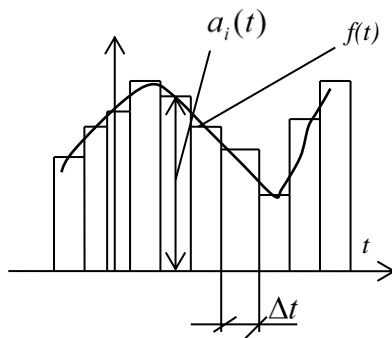
$$Q(t)^* = \frac{n(t)}{N_0}.$$

Если вероятность отказа отнести к соответствующему интервалу времени, то получится новая количественная характеристика надежности – частота отказов в единицу времени:

$$a(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t},$$

где  $n(t)$  – число элементов, вышедших из строя в течение интервала времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Чтобы приближенно определить  $a(t)$  из опыта, необходимо испытать большое количество  $N_0$  однородных элементов и зарегистрировать время работы каждого из них до момента отказа. Полученные данные обрабатываются методами математической статистики, строится гистограмма частот отказов. При  $\Delta t \rightarrow 0$  получим функцию плотности вероятности отказов.



Функция ненадежности связана с функцией плотности вероятности отказов:

$$Q(t) = \int_0^t f(t) dt.$$

Величина этого интеграла графически определяется площадью подынтегральной кривой на участке  $(0, t)$ .

Функция надежности определяется следующим образом:

$$H(t) = 1 - Q(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt = \int_t^{\infty} f(t) dt .$$

**2. Средняя наработка на отказ или среднее время безотказной работы.**

Определяется следующим образом:

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} t f(t) dt .$$

Величина  $\langle T \rangle$  может быть выражена непосредственно через вероятность безотказной работы  $H(t)$ . Продифференцируем равенство:

$$H(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt .$$

Получим:

$$\frac{dH(t)}{dt} = -f(t) \text{ или } f(t) = -\frac{dH(t)}{dt} = -H'(t) .$$

$$\text{Тогда } \langle T \rangle = \int_0^{\infty} t f(t) dt = -\int_0^{\infty} t H'(t) dt .$$

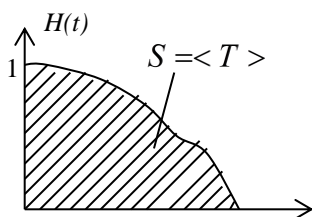
После интегрирования по частям получим:

$$\langle T \rangle = -tH(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} H(t) dt .$$

Очевидно, что  $tH(t) \Big|_0^{\infty} = 0$ , т.к. при верхнем пределе  $H(t)$  быстрее стремится к нулю, чем  $t \rightarrow \infty$ , а при  $t = 0$   $H(t) = 1$ . Окончательно получим:

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} H(t) dt .$$

Геометрически это означает, что среднее время безотказной работы равно площади, ограниченной кривой надежности и координатными осями.



### 3. Интенсивность отказов $\lambda(t)$ .

Под интенсивностью отказов понимается вероятность отказа неремонтируемой системы или элемента в единицу времени после данного момента времени при условии, что отказ до этого момента не возник. Интенсивность отказов можно выразить также через отношение числа отказавших элементов за определенный интервал времени к числу исправных элементов к началу рассматриваемого промежутка времени.

$$\lambda(t) \approx \frac{n(t)}{N(t) \Delta t}.$$

Здесь  $n(t)$  – число элементов, отказавших за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$ ;  $N(t)$  – число элементов из  $N_0$ , оставшихся исправными к моменту времени  $t$ .

Из анализа формулы видно, что интенсивность отказов есть среднее число отказов в единицу времени, приходящиеся на один исправно работающий элемент. Нетрудно убедиться, что:

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{N(t) \Delta t} \approx \frac{f(t)}{H(t)}.$$

Понятие интенсивности отказов можно ввести и по-другому. Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  – условная плотность возникновения отказа невосстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не возник.

Пусть элемент проработал безотказно до момента  $t$ . Определим вероятность того, что он не откажет на участке  $(t, t_1)$ . Обозначим эту вероятность  $H(t, t_1)$ . Пусть  $A$  – случайное событие – безотказная работа элемента на отрезке  $(0, t)$ ,  $B$  – случайная событие – безотказная работа на отрезке  $(t, t_1)$ . Тогда

$$H(t, t_1) = P(B/A) = P(A \cap B) / P(A).$$

Но поскольку  $P(A \cap B) = H(t_1)$  есть вероятность случайного события – безотказной работы на отрезке  $(0, t_1)$ , то

$$H(t, t_1) = \frac{H(t_1)}{H(t)}.$$

Вероятность отказа на отрезке  $(t, t_1)$ :

$$Q(t, t_1) = 1 - H(t, t_1) = \frac{H(t) - H(t_1)}{H(t)}.$$

Положим  $t_1 = t + \Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда:

$$Q(t, t_1 + \Delta t) = \frac{H(t) - H(t + \Delta t)}{H(t)} = -\frac{H(t + \Delta t) - H(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{H(t)} = -\frac{H'(t)}{H(t)} \Delta t = \lambda(t) \Delta t.$$

$$\lambda(t) = -\frac{H'(t)}{H(t)} = \frac{f(t)}{H(t)}.$$

Используя эту формулу функцию надежности, можно выразить через интенсивность отказов:

$$\frac{dH(t)}{dt} + \lambda(t) \cdot H(t) = 0.$$

$$\frac{dH(t)}{H(t)} + \lambda(t) \cdot dt = 0.$$

Откуда:

$$\ln H(t) + \int \lambda(t) dt = C.$$

Если  $t = 0$   $H(t) = 1$ , то  $C = 0$ .

Тогда

$$\ln H(t) = -\int \lambda(t) dt;$$

или

$$H(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right).$$

Вероятность безотказной работы на отрезке  $(t_1, t_2)$  выражается зависимостью:

$$H(t, t_1) = \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt\right).$$

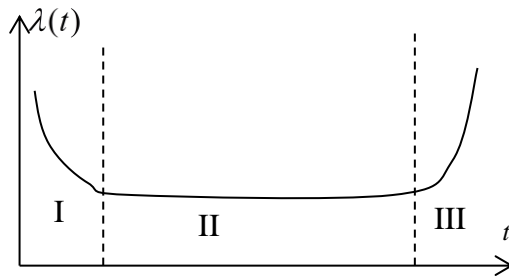
Это соотношение является основополагающим в математической теории надежности. Его иногда называют основной формулой надежности.

Интенсивность отказов определяется при этом экспериментально, но сделать это очень трудно.

А определяется экспериментальная величина  $\lambda^*(t)$  по формуле:

$$\lambda^*(t) = \frac{n(t)}{N(t)\Delta t}.$$

Обычно  $\lambda(t)$  изменяется во времени следующим образом.



Период I – период приработки

Период II – период нормальной работы.

Период III – период старения или износа.

Для второго периода многих изделий принимают  $\lambda(t) = const$ . Тогда:

$$H(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) = \exp(-\lambda t).$$

Данная формула называется экспоненциальным законом надежности, получившим наибольшее распространение благодаря своей простоте.

Согласно этому закону:

$$H(t_1, t_2) = \exp(-\lambda(t_2 - t_1)) = \frac{H(t_2)}{H(t_1)};$$

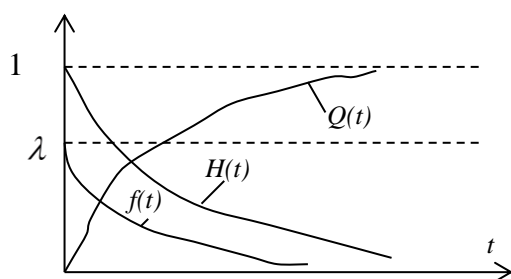
$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t};$$

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t);$$

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда:

$$H(t) = \exp\left(-\frac{t}{\langle T \rangle}\right).$$



При использовании функции надежности можно сказать, что надежность системы характеризуется вероятностью безотказной работы в течение 5 час, равной 0,99. При использовании средней наработки до отказа можно сказать, что надежность системы характеризуется средней наработкой до отказа, равной 100 ч. При использовании интенсивности отказов можно сказать, что надежность системы характеризуется интенсивностью отказов, равной 0,01 1/час. В двух последних случаях вообще отсутствует какое-либо явное упоминание о вероятности безотказной работы. Оно может быть найдено, если указана функция надежности или подразумевается, что она экспоненциальная.

### Надежность как вероятностная прочность

При расчете надежности элементов конструкций как вероятностной прочности следует знать несущую способность элемента и действующие на него нагрузки.

В самом общем случае под несущей способностью элемента конструкции понимается случайный процесс

$R(t) = \sigma_{дон}(t) \cdot S$ , где  $\sigma_{дон}(t)$  — допустимое напряжение в конструкции,  $S$  — функция геометрических параметров (случайная величина).

В зависимости от действующей нагрузки допустимым напряжением может быть: предел прочности  $\sigma_b(t)$  при растяжении, критическое напряжение  $\sigma_{кр.м}(t)$  или  $\sigma_{кр.0}(t)$  при местной или общей устойчивости, предел выносливости  $\sigma_{-1}(t)$  при циклических нагрузках и т.д. Это в том случае, когда под отказом конструкции понимается физическое разрушение.

Но можно под отказом условно понимать превышение ранее заданного напряжения, не приводящего к разрушению, например, предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пл}}(t)$  или условного предела текучести  $\sigma_{0.2}(t)$ . В этом случае отказы называют параметрическими.

Под внешней нагрузкой, действующей на элемент, понимают эксплуатационную нагрузку, которую рассматривают как вероятностную категорию, изменяющуюся в широких пределах. Под внешней нагрузкой подразумевается растягивающая, сжимающая или перерезывающая сила, изгибающие или крутящие моменты, внутреннее давление в баках, продольные или поперечные перегрузки и т.д., а также любые их комбинации.

Внешние нагрузки, действующие на элемент, в общем случае представляют собой случайные процессы, параметры которых на этапе проектирования могут быть рассчитаны теоретически или определены приближенно по данным испытаний предыдущих изделий и теоретических расчетов по разрабатываемому изделию.

При расчете надежности подразумевается, что элемент обладает определенной несущей способностью по отношению к нагружению. Под надежностью в данном случае понимают вероятность безотказной работы, т.е.

$$H(t) = P(R(t) > N(t)).$$

Существует три метода определения надежности в данном случае.

1. Определение надежности по законам распределения несущей способности  $R(t)$  и эксплуатационной нагрузки  $N(t)$ .

2. Метод введения композиционной случайной величины

$$Z(t) = R(t) - N(t).$$

3. Метод введения вероятностного коэффициента безопасности:

$$\xi(t) = \frac{R(t)}{N(t)}.$$

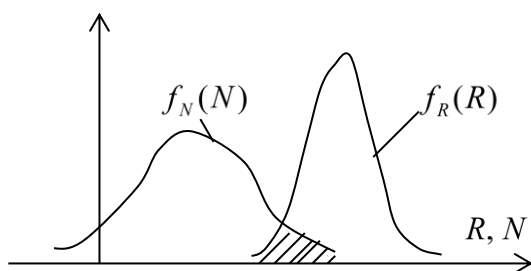


В каждом из трех случаев рассматриваются случайные процессы. Но если рассматривать в каждый данный расчетный момент времени, то можно оперировать с распределением случайных величин  $R, N, Z, \xi$ .

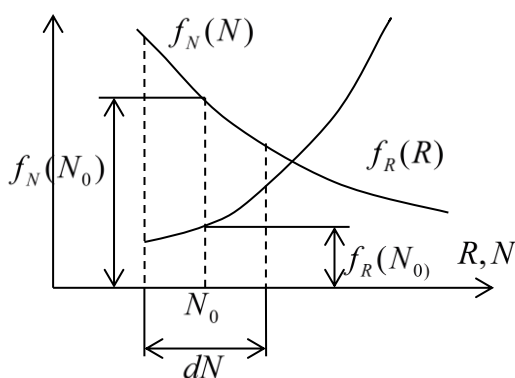
**Рассмотрим первый случай.**

$$H = P(R > N).$$

Даны законы распределения или функции плотности вероятности несущей способности  $R$  и эксплуатационные нагрузки  $N$ . Вероятность отказа характеризуется заштрихованной площадью.



Рассмотрим вероятность события, что несущая способность элемента будет превосходить значение эксплуатационной нагрузки  $N_0$   $P(R > N_0)$ , а эксплуатационная нагрузка примет значение  $N$ .



Вероятность того, что эксплуатационная нагрузка примет значение в интервале  $(N_0 - \frac{dN}{2} < N < N_0 + \frac{dN}{2})$ , равна:

$$P(N_0 - \frac{dN}{2} < N < N_0 + \frac{dN}{2}) = f_N(N_0) dN.$$

С другой стороны:

$$P(R > N_0) = \int_{N_0}^{\infty} f_R(R) dR.$$

Тогда вероятность совместного события, заключающегося в том, что эксплуатационная нагрузка примет значение  $N_0$ , а несущая способность будет больше этого значения, равна:

$$f_N(N_0)dN \cdot \int_{N_0}^{\infty} f_R(R)dR.$$

И тогда:

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{\infty} f_N(N) \cdot \left[ \int_N^{\infty} f_R(R)dR \right] dN = \int_0^{\infty} f_N(N) \cdot \left[ 1 - \int_{-\infty}^N f_R(R)dR \right] dN = \\ &= \int_0^{\infty} f_N(N) \cdot [1 - F_R(N)] dN. \end{aligned}$$

Аналогично можно вывести формулу:

$$H = \int_0^{\infty} f_R(R)F_N(R)dR.$$

Для определения надежности пользоваться как одной, так и другой формулой. Ненадежность элемента определяется в этом случае по одному из двух соотношений:

$$Q = \int_0^{\infty} f_N(N) \cdot F_R(N)dN;$$

$$Q = \int_0^{\infty} f_R(R) \cdot [1 - F_N(R)]dR.$$

**Рассмотрим пример.**

Несущая способность элемента имеет нормальный закон распределения.  $m_R = 100kH$ ,  $\sigma_R = 10kH$ .

Эксплуатационная нагрузка распределена по экспоненциальному закону  $f_N(N) = \lambda e^{-\lambda N}$  с математическим ожиданием  $m_N = 50kH$ . Определим вероятность безотказной работы. Воспользуемся для решения задачи формулой:

$$H = \int_0^{\infty} f_R(R)F_N(R)dR.$$

В данном случае:

$$F_N(R) = 1 - e^{-\lambda R}.$$

Получим:

$$H = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left[-\frac{(R-m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right] (1 - e^{-\lambda R}) dR = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(R-m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right] dR - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_R^2}(R^2 - 2m_R R + m_R^2 + 2\lambda R \sigma_R^2)\right] dR.$$

Для определения первого слагаемого введем новую переменную интегрирования:

$$t = \frac{R - m_R}{\sqrt{2}\sigma_R}; \quad R = \sqrt{2}\sigma_R t + m_R; \quad dR = \sqrt{2}\sigma_R \cdot dt.$$

Для определения второго слагаемого введем новую переменную:

$$z = \frac{R - m_R + \lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R}; \quad R = \sqrt{2}\sigma_R z + m_R - \lambda\sigma_R^2; \quad dR = \sqrt{2}\sigma_R dz.$$

Тогда получим:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m_R}{\sqrt{2}\sigma_R}}^{\infty} \exp(-t^2) dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2m_R - \lambda\sigma_R^2)\right] \int_{\frac{m_R - \lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R}}^{\infty} \exp(-z^2) dz.$$

Но как мы знаем:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \Phi(x) \text{ - интеграл вероятности.}$$

Используя его свойства  $\Phi(-\infty) = 1$ ,  $-\Phi(x) = \Phi(-x)$ , получим:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{m_R}{\sqrt{2}\sigma_R}\right) - \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2m_R - \lambda\sigma_R^2)\right] \left(1 + \Phi\left(\frac{m_R - \lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R}\right)\right) \right\}.$$

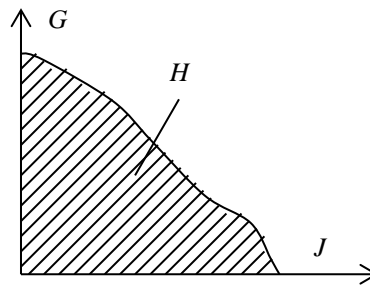
Подставляя сюда значения  $m_R$ ,  $\sigma_R$  и  $\lambda = \frac{1}{m_N}$ , получим значение  $H$ .

В данном случае:

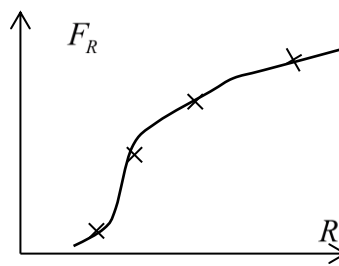
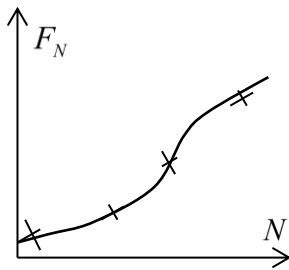
$$H = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{2} \cdot 10}\right) - \exp\left[-\frac{1}{2 \cdot 50} \left(2 \cdot 100 - \frac{1}{50} 10^2\right)\right] \left(1 + \Phi\left(\frac{100 - \frac{1}{50} 10^2}{\sqrt{2} \cdot 10}\right)\right) \right\} = 0.86$$

Если законы распределения случайных величин  $R$  и  $N$  неизвестны (теоретические), то расчет надежности можно осуществить по результатам экспериментальных исследований, используя следующую зависимость:

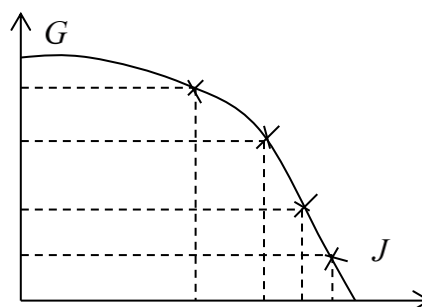
$$H = \int_0^1 G dJ. \text{ Здесь: } G = 1 - F_R(N); dJ = f_N(N) \cdot dN; J = F_N(N).$$



Величины  $G$  и  $J$  определяются из экспериментальных данных о функциях распределения несущей способности и эксплуатационной нагрузки.



№	$N$	$F_R$	$G=1-F_R$	$J=F_N$
1				
2				
3				
4				



***Рассмотрим второй случай.***

В этом случае также известны законы распределения несущей способности и эксплуатационной нагрузки. Введем композиционную случайную величину:

$$Z = R - N .$$

Допустим, что случайные величины  $R$  и  $N$  некоррелированы. Тогда:

$$H = P(R > N) = P(Z > 0) = \int_0^{\infty} f_z(z) dz ;$$

$$Q = \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz .$$

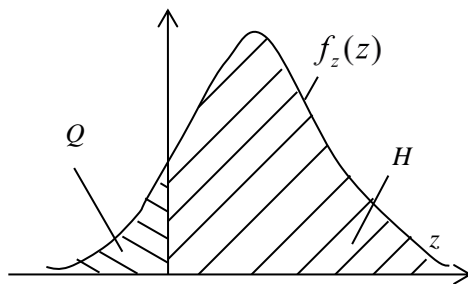
Для решения задачи необходимо определить функцию плотности вероятности  $f_z(z)$  по известным  $f_R(R)$  и  $f_N(N)$ . Формула композиции законов распределения:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(Z + N) \cdot f_N(N) dN = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(R) f_N(R - Z) dR .$$

Тогда:

$$H = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(Z + N) f_N(N) dN ;$$

$$Q = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} f_R(Z + N) f_N(N) dN .$$



Часто задачу решают приближенно. Полагают, что композиционная случайная величина распределена по нормальному закону. Для этого закона распределения достаточно знать математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение:

$$m_Z = m_R - m_N ;$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_N^2} .$$

Далее уже все просто.

**Рассмотрим третий случай.**

В этом случае рассматривают вероятностный коэффициент безопасности:

$$\xi = \frac{R}{N},$$

и функция надежности в этом случае определяется как

$$H = P(\xi \geq 1).$$

Традиционные методы расчета на прочность подразумевают, что  $f = \frac{m_R}{m_N}$ , т.е. рассматривается детерминистическая величина.

Пусть известны  $m_R$ ,  $\sigma_R$ ,  $m_N$ ,  $\sigma_N$ . Случайные величины  $R$  и  $N$  распределены по нормальному закону.

Составим таблицу, в которой приведено соотношение между коэффициентами безопасности и надежностью для элемента.

№ п/п	$m_R$	$m_N$	$\sigma_R$	$\sigma_N$	$f$	$H$
1	50	20	2	2,5	2,5	$\approx 1$
2	50	10	5	5	5	$\approx 1$
3	50	40	2	2,5	1,25	0,99909

Анализ таблицы показывает, что возможны случаи, когда надежность элементов  $\approx const$ , а коэффициенты безопасности отличаются в значительной степени, что делает расчет по коэффициентам безопасности менее достоверным и с большими ошибками.

Поэтому вводят вероятностный коэффициент безопасности  $\xi = \frac{R}{N}$  и надежность определяют как

$$H = \int_1^{\infty} f(\xi) d\xi.$$

Трудность заключается в определении функции плотности вероятностей коэффициента  $\xi$ .

Определим нижнюю оценку надежности при известных математическом ожидании и дисперсии.

Используем для решения задачи неравенство Чебышева, которое лежит в основе закона больших чисел.

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

Здесь  $X$  – случайная величина;  $m_x$  и  $D_x$  ее числовые характеристики;  $\varepsilon$  – произв. положит. число. В нашем случае неравенство Чебышева запишем в виде:

$$P(|\xi - km_\xi| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\langle (\xi - km_\xi)^2 \rangle}{\varepsilon^2}.$$

Здесь  $k$  – произвольное положительное число, подлежащее определению.

Обозначим  $V_x = \frac{\sigma_x}{m_x}$  – коэффициент вариации.

Определим:

$$\begin{aligned} \langle (\xi - km_\xi)^2 \rangle &= \langle \xi^2 - 2k\xi m_\xi + k^2 m_\xi^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle - 2km_\xi \langle \xi \rangle + k^2 m_\xi^2 = \\ &= \sigma_\xi^2 + m_\xi^2 - 2km_\xi^2 + k^2 m_\xi^2 = m_\xi^2 [V_\xi^2 + (1-k)^2]. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$P(km_\xi - \varepsilon \leq \xi \leq km_\xi + \varepsilon) \geq 1 - \frac{m_\xi^2 [V_\xi^2 + (1-k)^2]}{\varepsilon^2}.$$

Т.к. величина  $k$  – произвольная, положим:

$$km_\xi - \varepsilon = 1.$$

Тогда

$$\varepsilon = km_\xi - 1.$$

Получим соотношение:

$$P(1 \leq \xi \leq 2km_\xi - 1) \geq 1 - \frac{m_\xi^2 [V_\xi^2 + (1-k)^2]}{(km_\xi - 1)^2} = 1 - W.$$

Нижняя граница  $H = P(\xi > 1)$  определяется при  $k_{\min} = k^*$ .

Для определения  $k^*$  решим уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial k} = 0.$$

$$\frac{\partial W}{\partial k} = -\frac{2m_\xi^3 V_\xi^2}{(km_\xi - 1)^3} - \frac{2m_\xi(1-k)}{(km_\xi - 1)^2} - \frac{2m_\xi^2(1-k)^2}{(km_\xi - 1)^3} = 0.$$

Отсюда:

$$k^* = \frac{m_\xi(V_\xi^2 + 1) - 1}{m_\xi - 1}.$$

Зная  $k^*$ , определим нижнюю границу надежности:

$$H \geq 1 - \left[ \frac{m_\xi^2 V_\xi^2}{m_\xi^2 V_\xi^2 - (m_\xi - 1)^2} \right];$$

$$m_\xi = f \geq \frac{1}{1 - V_\xi \sqrt{\frac{H}{1-H}}} - \text{выражение для коэффициента безопасности.}$$

Мы получили точные формулы для нижней оценки надежности и коэффициента безопасности при известных  $m_\xi$ ,  $\sigma_\xi$ ,  $V_\xi$ . Но обычно эти числовые характеристики неизвестны.

Их определяют либо методом Монте - Карло, либо другими численными методами.

Определим приближенные значения  $m_\xi$ ,  $G_\xi$ ,  $V_\xi$  по известным  $m_R$ ,  $\sigma_R$ ,  $m_N$ ,  $\sigma_N$ .

В нашем случае:  $\xi = \frac{R}{N} = \varphi(R, N)$ . Поэтому:

$$\begin{aligned} \xi &\approx \varphi(m_R, m_N) + \frac{\partial \varphi(m_R, m_N)}{\partial m_R} (R - m_R) + \frac{\partial \varphi(m_R, m_N)}{\partial m_N} (N - m_N) + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(m_R, m_N)}{\partial^2 m_R} (R - m_R)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(m_R, m_N)}{\partial^2 m_N} (N - m_N)^2. \end{aligned}$$

Выполнив вычисления, получим:

$$m_\xi \approx \frac{m_R}{m_N} + \frac{m_R}{m_N^3} \sigma_N^2;$$

$$\sigma_\xi^2 = \left( \frac{1}{m_N} \right)^2 \sigma_R^2 + \left( \frac{m_R}{m_N^2} \right)^2 \sigma_N^2 = \frac{m_N^2 \sigma_R^2 + m_R^2 \sigma_N^2}{m_N^2};$$



$$V_{\xi} = \frac{\sigma_{\xi}}{m_{\xi}} = \frac{\sqrt{V_R^2 + V_N^2}}{1 + V_N^2}.$$

Тогда:

$$k^* = \frac{f(V_R^2 + V_N^2)}{(1 + V_N^2)[f(1 + V_N^2) - 1]}.$$

В этом случае:

$$H \geq 1 - \frac{f^2(V_R^2 + V_N^2)}{f^2(V_R^2 + V_N^2) + [f(1 + V_N^2) - 1]^2};$$

или

$$m_{\xi} = f \geq \frac{1}{(1 + V_N^2) - \sqrt{V_R^2 + V_N^2} \sqrt{\frac{H}{1 - H}}}.$$

Мы получили приближенные выражения для нижней оценки надежности  $H$  и коэффициента безопасности  $f$ .

### Общая теория надежности

Рассмотрим поведение системы при внешних воздействиях. Поведение системы описывается уравнением

$$Lu = q.$$

$q$  – элемент из пространства входных параметров  $Q$ ,  $u$  – элемент из пространства выходных параметров  $U$ .

Пространство  $U$  выбирается таким образом, чтобы при помощи его элементов  $u \in U$  можно было понятно охарактеризовать любое состояние системы. Эволюция состояний оценивается функциями  $u(t)$ , их геометрическим образом служат траектории в пространстве состояний  $U$ .

Введем пространство  $V$  для описания качества системы. Пусть каждому качеству системы соответствует элемент  $v \in V$ , при этом время  $t$  играет роль параметра. Каждой траектории  $u(t)$  в пространстве  $U$  соответствует некая траектория  $v(t)$  в пространстве качества  $V$ . Связь между элементами этих пространств и траекториями в них дается операторным соотношением:

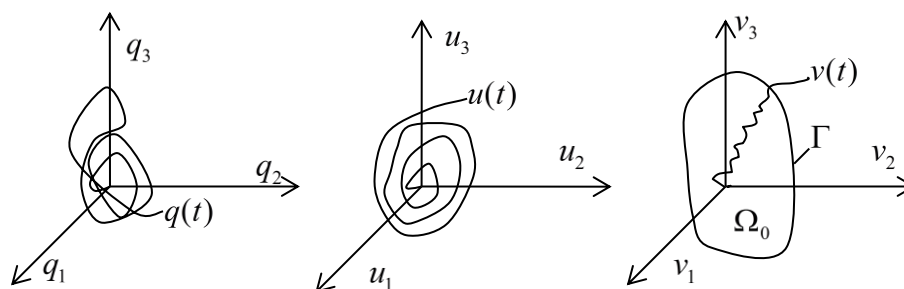
$$V = Mu.$$

Оператор  $M$  может быть в частности тождественным оператором.

Множество состояний системы, допустимых с точки зрения качества, образует в пространстве качества  $V$  область допустимых состояний  $\Omega_0$ . Граница области  $\Omega_0$  соответствует предельным состояниям. Эта граница называется предельной поверхностью и обозначается через  $\Gamma$ .

Если  $V \in \Omega_0$ , то это означает, что параметры качества системы сохраняются в установленных допусках. Пересечение траекторий  $v(t)$  предельной поверхности  $\Gamma$  в направлении внешней нормали соответствует отказу системы.

На рисунках представлены траектории  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $q(t)$  для случая, когда пространства  $Q$ ,  $U$ ,  $V$  являлись эвклидовыми трехмерными пространствами.



Пусть внешнее воздействие  $q(t)$  и оператор системы  $L$  являются стохастическими. Тогда траектории  $v(t)$  в пространстве качества  $V$  будут также стохастическими. Отказ интерпретируется как случайное пересечение траекторией  $v(t)$  предельной поверхности  $\Gamma$ , или как случайный выброс элемента из области допустимых состояний. Вероятность безотказной работы – функция надежности определяется как вероятность пребывания элемента  $v(t)$  в допустимой области  $\Omega_0$  на отрезке времени  $[0, t]$ :

$$H(t) = P\{v(\tau) \in \Omega_0; \tau \in [0, t]\}.$$

Таким образом, формулируется общая схема оценки надежности с учетом физических, технических и эксплуатационных аспектов.

Эта схема складывается из четырех этапов.

1. Схематизация системы и внешних воздействий на нее, выбор пространств  $Q$  и  $U$ . Определение оператора  $L$ .

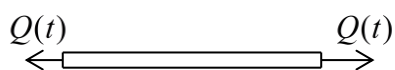
2. Определение стохастического поведения системы при случайных воздействиях, т.е. решение уравнения  $Lu = q$ . Это задача статистической динамики.

3. Выбор пространства качества  $V$  и области допустимых состояний  $\Omega_0$ . Выбор осуществляется на основании технико-экономических соображений с учетом технологических, эксплуатационных и других требований.

4. Определение функции надежности  $H(t)$ .

Таким образом, функция надежности  $H(t)$  определяется как результат учета ряда факторов: внешней среды, свойств системы, технологических, эксплуатационных и других требований.

Выбор пространства качества  $V$  и области допустимых состояний  $\Omega_0$  поясним на следующем примере. Рассмотрим нагружение стержня осевой силой  $Q(t)$ . Если сила  $Q$  действует квазистатически, то внутренняя осевая сила  $N \equiv Q$  может быть принята за параметр состояния системы. Пусть условие безотказной работы имеет вид:  $-R < N(t) < R$ , где  $R$  – некоторое предельное значение осевой силы.



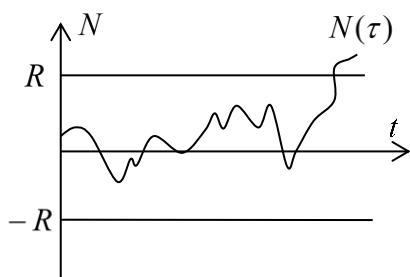
Тогда  $N(t)$  можно принять за параметр качества системы. Пространство  $V$  будет при этом одномерным евклидовым пространством, т.е. прямой  $-\infty < N < \infty$ , а область допустимых состояний – отрезком этой прямой. Функция надежности определяется по формуле:

$$H(t) = P[-R < N(\tau) < R; 0 \leq \tau \leq t].$$

Или по другому:

$$H(t) = P\left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} |N(\tau)| < R\right],$$

где  $\sup |N(\tau)|$  – точная верхняя грань значений функции  $N(\tau)$  на отрезке  $[0, t]$ .



Если область допустимых значений несимметрична относительно начала координат, например:

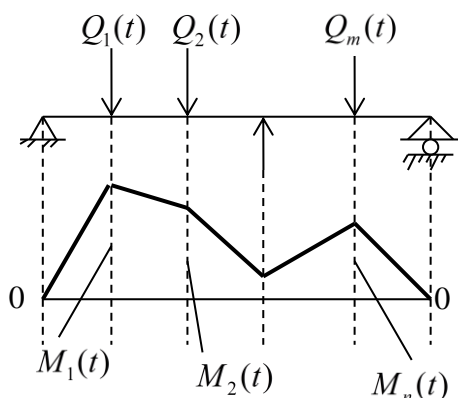
$$-\frac{\pi^2 EI}{4l^2} < N(t) < R \quad (\text{нижнюю границу образует критическое значение}$$

сжимающей силы для консоли), то функция надежности определяется по формуле:

$$H(t) = P \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} N(\tau) < R; \quad \inf_{0 \leq \tau \leq t} N(\tau) > -\frac{\pi^2 EI}{4l^2} \right].$$

Здесь  $\inf N(\tau)$  – точная нижняя грань значений функции  $N(t)$  на отрезке  $[0, t]$ .

Рассмотрим еще один пример формулирования задачи надежности. Пусть балка нагружена  $m$  сосредоточенными силами  $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_m(t)$ . Балка является статически определимой, а силы прикладываются к балке квазистатически.



Будем считать состояние балки допустимым, если максимальное по модулю значение момента  $M(x, t)$  не превышает предельного значения  $M_*$ . Для расчета балки на прочность достаточно знать значения момента  $M(x, t)$  в конечном числе сечений. Обозначим эти значения через  $M_1(t), \dots, M_n(t)$ . Связь

между моментами и внешними силами осуществляется при помощи линейного преобразования:

$$M_j(t) = \sum_{k=1}^m n_{jk} Q_k(t) \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Это линейное преобразование можно рассматривать как реализацию операторных соотношений  $Lu = q$ ,  $V = MU$ . Функция надежности будет иметь вид:

$$H(t) = P[-M_* < M_j(\tau) < M_*; \quad j = 1,2,\dots,n; \quad 0 \leq \tau \leq t].$$

Другие эквивалентные записи функции надежности:

$$H(t) = P\left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \max_j |M_j(\tau)| < M_*\right]; \quad (1)$$

$$H(t) = P\left[\max_j \sup_{0 \leq \tau \leq t} |M_j(T)| < M_*\right]. \quad (2)$$

При реализации вычислений по первой формуле выбирается максимальное по модулю значение среди моментов  $M_1(\tau), \dots, M_n(\tau)$  в каждый момент времени. Функция надежности определяется как вероятность случайного события, состоящего в том, что верхняя грань максимального момента не превышает предельного значения  $M_*$ . При вычислении по второй формуле для каждого из сечений определяются верхние грани моментов при  $0 \leq \tau \leq t$ , затем из найденных значений выбирается наибольшее, которое сравнивается с предельным значением. Обе формулы эквивалентны.

Можно обобщить определение функции надежности на случай, когда необходимо делать различия по степени опасности отказов, по размеру связанного с ним ущерба. В этом случае необходимо рассматривать экономический аспект надежности и долговечности.

Приведем формулу для определения математического ожидания суммы ущерба от отказов:

$$\langle c(t) \rangle = \int_0^t d\tau \int_v c(v, \tau) f(v, \tau) dv.$$

Здесь:  $c(v, \tau)$  - платежная функция, равная ущербу в единицу времени при условии, что система находится в данной точке пространства  $V$ ;  $f(v, \tau)dv$  - вероятность обнаружить систему в момент времени  $\tau$  в элементарном объеме  $dv$ .

Наряду с математическим ожиданием ущерба от отказов в экономические расчеты должны войти начальная стоимость системы, сумма эксплуатационных расходов, математическое ожидание прибыли за время эксплуатации системы в допустимой области и т.п.

Область допустимых значений может быть стохастической. Если стохастические свойства системы могут быть охарактеризованы конечным числом случайных параметров, то задача определения функции надежности решается в два этапа. На первом этапе рассматривается система с фиксированными параметрами, для которых строится функция надежности. Эта функция представляет собой вероятность пребывания системы в допустимой области при условии, что параметры системы фиксированы. Такая функция называется условной функцией надежности. На втором этапе применяется формула полной вероятности и вычисляется функция надежности для наугад выбранной системы, принадлежащей данному ансамблю.

Обозначим параметры системы через  $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$  и будем считать, что задана совместная плотность вероятности компонент вектора  $r = (r_1, r_2, \dots, r_\alpha)$ . Обозначим ее  $f_r$ . Рассмотрим один из элементов ансамбля с фиксированным вектором  $r$ . Реакция этого элемента  $u(t|r)$  на случайное внешнее воздействие  $q(t)$  определяется как решение уравнения:

$$Lu(t|r) = q(t).$$

Далее перейдем к параметрам качества системы:

$$v(t|r) = M(r)u(t|r).$$

Оператор  $M$  при этом также зависит от компонент вектора  $r$ .

Определим условную функцию надежности как вероятность пребывания выбранного элемента ансамбля в соответствующей ему допустимой области:

$$H_0(t|r) = P[v(\tau|r) \in \Omega_0(r); 0 \leq \tau \leq t].$$

Функция надежности для ансамбля в целом определяется по формуле полной вероятности:

$$H(t) = \int \dots \int H_0(t|r) f_r(r) dr.$$

Интегрирование проводится по всей области изменения параметров системы  $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$ .

Пусть внешнее воздействие  $q(t)$  зависит от случайного вектора  $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_\beta)$ , параметры системы от вектора  $r = (r_1, r_2, \dots, r_\alpha)$ . Векторы  $r$  и  $s$  в общем случае зависимы. Обозначим совместную плотность вероятности через  $f(r, s)$ . Выбрав один из экземпляров системы, определим его реакцию на одну из реализаций внешнего воздействия.

$$Lu(t|r, s) = g(t|s).$$

Перейдем к параметрам качества:  $v(t|r, s) = Mu(t|r, s)$ . Условная функция надежности в этом случае:

$$H_0(t|r, s) = P[v(\tau|r, s) \in \Omega_0(r); 0 \leq \tau \leq t].$$

Безусловная функция надежности определяется по очевидной зависимости:

$$H(t) = \int \dots \int H_0(t|r, s) f(r, s) dr ds.$$

Интегрирование проводится по всей области изменения параметров системы  $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$  и по всем возможным значениям параметров  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_\beta$ .

### **Выбросы случайного процесса за заданный уровень**

Для высоконадежных систем выброс за пределы допустимой области является достаточно редким событием. Вероятность выброса можно с

достаточной точностью оценить, выражая ее через математическое ожидание числа выбросов на отрезке  $[0, t]$ .

Пусть  $v(t)$  - непрерывный, дифференцируемый процесс с заданной совместной плотностью вероятности  $f(v, \dot{v}, t)$  процесса  $v(t)$  и его производной  $\dot{v}(t)$ . Из области возможных значений  $v(t)$  возьмем некоторое детерминистическое постоянное значение  $v_*$  и определим математическое ожидание числа пересечений процессом  $v(t)$  уровня  $v_*$ . При этом различают два типа пересечения. Если  $\dot{v}(t) > 0$ , пересечение положительное, если  $\dot{v}(t) < 0$ , пересечение отрицательное.

Обозначим:  $v_+(v_*, t)$  - математическое ожидание числа положительных пересечений уровня  $v_*$  в единицу времени;  $v_-(v_*, t)$  - математическое ожидание числа отрицательных пересечений;  $N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t)$  - математическое ожидание положительных пересечений уровня  $v_*$  за время  $0 \leq \tau \leq t$ ;  $N_-(v_*, 0 \leq \tau \leq t)$  - математическое ожидание отрицательных пересечений уровня  $v_*$  за время  $0 \leq \tau \leq t$ .

Для положительных пересечений имеем:

$$N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t v_+(v_*, \tau) d\tau.$$

Аналогично для отрицательных пересечений:

$$N_-(v_*, 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t v_-(v_*, \tau) d\tau.$$

Если процесс  $v(t)$  стационарный, то  $v_+(v_*) = v_-(v_*)$ .

Рассмотрим достаточно малый отрезок времени  $\Delta t$ . Обозначим  $P_1(v_*, \Delta t)$  - вероятность того, что за отрезок  $\Delta t$  произойдет одно положительное пересечение уровня  $v_*$ ;  $P_2(v_*, \Delta t)$  - вероятность того, что за отрезок  $\Delta t$  произойдет два положительных пересечения и т.д.

Математическое ожидание числа положительных пересечений за отрезок времени  $\Delta t$  определяется:



$$N_+(v_+, t \leq \tau \leq t + \Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(v_+, \Delta t).$$

Пусть при достаточно малых  $\Delta t$  имеем:

$$P_1(v_+, \Delta t) = o(\Delta t); \quad (1)$$

$$P_k(v_+, \Delta t) = o(\Delta t). \quad (k \geq 2)$$

$o(\Delta t)$  - величина порядка  $\Delta t$ ;  $o(\Delta t)$  - величина более высокого порядка малости.

Математическое ожидание числа положительных пересечений за единицу времени находится согласно предельному соотношению:

$$v_+(v_+, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_+(v_+, t \leq \tau \leq t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

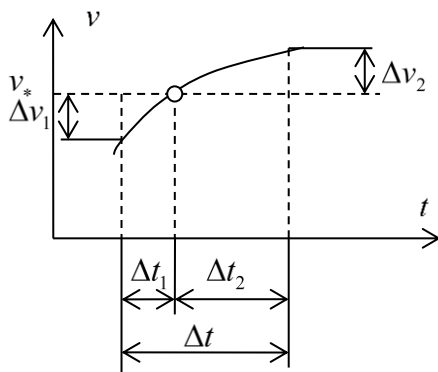
Учитывая (1), можно записать:

$$v_+(v_+, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(v_+, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вероятности случайного события, состоящего в том, что за малый промежуток времени  $\Delta t$  произойдет одно положительное пересечение уровня  $v_*$ .

Пусть точка пересечения разбивает интервал  $\Delta t$  на два интервала,  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$ . Вычислим вероятность случайного события:

$$P_1(v_+, \Delta t) = P \left[ \begin{array}{l} v_* - \Delta v_1 \leq v(\tau) \leq v_* + \Delta v_2 \\ \dot{v} > 0 \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t \end{array} \right]$$



Нетрудно найти, что

$$P_1(v_*, \Delta t) = \int_0^{\infty} d\dot{v} \int_{v^* - \Delta v_1}^{v^* + \Delta v_2} f(v, \dot{v}, t) dv + o(\Delta t).$$

Далее замечая, что  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ ;  $\Delta v_1 + \Delta v_2 = \dot{v}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ ;

получим:

$$P_1(v_*, \Delta t) = \Delta t \int_0^{\infty} f(v_*, \dot{v}, t) \dot{v} d\dot{v} + o(\Delta t).$$

Подставим найденные значения в формулу (2), производим предельный переход, получим:

$$v_+(v_*, \Delta t) = \int_0^{\infty} f(v_*, \dot{v}, t) \dot{v} d\dot{v}. \quad (3)$$

Математическое ожидание числа положительных пересечений за время  $0 \leq \tau \leq t$  определяется согласно формуле:

$$N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} f(v_*, \dot{v}, \tau) \dot{v} d\dot{v}.$$

Для стационарного случайного процесса:

$$N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t) = v_+(v_*) \cdot t.$$

Аналогично выводятся формулы для числа отрицательных пересечений:

$$v_-(v_*, \Delta t) = \int_{-\infty}^0 f(v_*, \dot{v}, t) |\dot{v}| d\dot{v}.$$

В качестве примера вычислим математическое ожидание числа пересечений  $v_+(v_*)$  для стационарного гауссовского процесса. Для такого процесса:

$$f(v, \dot{v}) = f_1(v) \cdot f_2(\dot{v}), \quad (4)$$

где

$$f_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{(v-a)^2}{2\sigma_v^2}\right); \quad f_2(\dot{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{v}}} \exp\left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2}\right).$$

$a$  – математическое ожидание процесса  $v(t)$ ,  $\sigma_v^2$  – его дисперсия;  $\sigma_{\dot{v}}^2$  – дисперсия процесса  $\dot{v}(t)$ .

Если задана спектральная плотность процесса  $S_v(\omega)$ , то указанные дисперсии выражаются через нее следующим образом:

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) d\omega; \quad \sigma_{\dot{v}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) \omega^2 d\omega.$$

Далее подставляя (4) в формулу (3), получим:

$$v_+(v_*) = f_1(v_*) \int_0^{\infty} f_2(\dot{v}) \dot{v} d\dot{v}.$$

Но поскольку:

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2}\right) \dot{v} d\dot{v} = \sigma_{\dot{v}}^2,$$

поэтому:

$$v_+(v_*) = \frac{\sigma_{\dot{v}}}{2\pi\sigma_v} \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right].$$

Введем обозначение:

$$\omega_e = \frac{\sigma_{\dot{v}}}{\sigma_v} = \left[ \frac{\int_0^{\infty} S_v(\omega) \omega^2 d\omega}{\int_0^{\infty} S_v(\omega) d\omega} \right]^{1/2}.$$

Параметр  $\omega_e$ , имеющий размерность  $1/c$ , называется эффективной частотой процесса  $v(t)$ . С учетом этого обозначения имеем:

$$v_+(v_*) = \frac{\omega_e}{2\pi} \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right].$$

Математическое ожидание числа положительных пересечений уровня  $v_* = a$  составляет:

$$v_+(v_*) = \frac{\omega_e}{2\pi}.$$

Для стационарного гауссовского процесса эффективная частота является характерной частотой положительных пересечений среднего уровня процесса.

Рассмотрим другой пример. Пусть процесс является гауссовским, однако не является стационарным. Другим примером может служить задача о

пересечении стационарным гауссовским процессом нестационарного (детерминистического или случайного гауссовского) уровня.

Пусть совместная плотность вероятности для процесса и его производной имеет вид:

$$f(v, \dot{v}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_{\dot{v}}\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left[ \frac{(v - \langle v \rangle)^2}{\sigma_v^2} - \frac{2\rho(v - \langle v \rangle)(\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle)}{\sigma_v\sigma_{\dot{v}}} + \frac{(\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle)^2}{\sigma_{\dot{v}}^2} \right] \right\}.$$

Здесь  $\rho(t)$  - коэффициент корреляции между процессом и его производной в совпадающие моменты времени.

$$\rho(t) = \frac{\langle \tilde{v}(t)\tilde{\dot{v}}(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{v}^2(t) \rangle \langle \tilde{\dot{v}}^2(t) \rangle}};$$

$$\sigma_v^2(t) = K(t, t);$$

$$\sigma_{\dot{v}}^2(t) = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t};$$

$$\langle \tilde{v}(t)\tilde{\dot{v}}(t) \rangle = \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t}.$$

Приведем окончательную формулу для математического ожидания числа пересечений  $v_+(0, t)$  уровня  $v_* = 0$  (переход к другим уровням осуществляется простым преобразованием исходного процесса).

$$v_+(0, t) = \frac{\sigma_{\dot{v}}}{2\pi\sigma_v} \exp\left(-\frac{\langle v \rangle^2}{2\sigma_v^2}\right) \times (\sqrt{1-\rho^2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho)}(1-\rho^2)\left(\frac{\langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} - \frac{\rho\langle v \rangle}{\sigma_v}\right)^2\right] + \\ + \sqrt{2\pi}\left(\frac{\langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} - \frac{\rho\langle v \rangle}{\sigma_v}\right) \cdot \left\{ 1 - \Phi_1\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\langle \dot{v} \rangle}{\sigma_{\dot{v}}} - \frac{\rho\langle v \rangle}{\sigma_v}\right)\right] \right\}). \quad (5)$$

Здесь  $\Phi_1(u)$  - функция Лапласа,

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Пусть  $v(t)$  - стационарный гауссовский процесс,  $v_*(t)$  - нестационарный гауссовский процесс. Если уровень  $v_*(t)$  является достаточно медленно меняющейся функцией времени, то вспомогательный процесс  $v_1 = v - v_*$  будет

близок к стационарному процессу. Положим, что для этого процесса  $\rho \approx 0$ .

Формула (3) принимает вид:

$$v_+(0, t) \approx \frac{\sigma_{\dot{v}_1}}{2\pi\sigma_{v_1}} \exp\left(-\frac{\langle v_1 \rangle^2}{2\sigma_{v_1}^2}\right) \left\{ \exp\left(\frac{\langle \dot{v}_1 \rangle^2}{2\sigma_{\dot{v}_1}^2}\right) + \sqrt{2\pi} \frac{\langle \dot{v}_1 \rangle}{\sigma_{\dot{v}_1}} \left[ 1 - \Phi_1\left(-\frac{\langle \dot{v}_1 \rangle}{\sigma_{\dot{v}_1}}\right) \right] \right\}.$$

$$\text{При этом } \sigma_{v_1}^2 = \sigma_v^2 + \sigma_{v_*}^2, \quad \sigma_{\dot{v}_1}^2 = \sigma_{\dot{v}}^2 + \sigma_{\dot{v}_*}^2.$$

Рассмотрим еще один пример: пересечение центрированным нестационарным процессом  $v(t)$  постоянного уровня  $v_*$ . Вводя вспомогательный процесс  $v_1 = v - v_*$  и полагая в формуле (5)  $\langle v_1 \rangle = 0$ ,  $\langle v_1 \rangle = -v_*$ , придем к выражению:

$$v_+(v_*, t) = \frac{\sigma_{\dot{v}_1}}{2\pi\sigma_{v_1}} \left\{ \sqrt{1-\rho^2} \exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) + \sqrt{2\pi} \frac{\rho v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) \times \left[ 1 - \Phi_1\left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{v_*}{\sigma_v}\right) \right] \right\}.$$

Приближенная формула для этого случая имеет вид:

$$v_+(v_*, t) = \frac{\sigma_{\dot{v}_1}}{2\pi\sigma_{v_1}} \left\{ \sqrt{1-\rho^2} \exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) + \sqrt{2\pi} \frac{\rho v_*}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{v_*^2}{2\sigma_v^2}\right) \right\}.$$

### Приближенные оценки для функции надежности

Определение функции надежности в простейшей постановке сводится к определению вероятности случайного события, состоящего в том, что за заданный промежуток времени  $0 \leq \tau \leq t$  не произойдет ни одного положительного пересечения процессов  $v(t)$  уровня  $v_*$ :

$$H(t) = P\left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} v(t) < v_*\right].$$

Полагая, что  $H(0) = 1$ , определим вероятность того, что за время  $0 \leq \tau \leq t$  произойдет хотя бы один отказ. Эта вероятность определяется как:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(v_*; 0 \leq \tau \leq t), \quad \text{где } Q_k(v_*; 0 \leq \tau \leq t) - \text{вероятность случайного}$$

события, состоящего в том, что за время  $0 \leq \tau \leq t$  произойдет ровно  $k$  положительных пересечений уровня  $v_*$ . С другой стороны:

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot Q_k(v_*, 0 \leq \tau \leq t).$$

Составляя разность этих двух выражений, получим:

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) - Q(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot Q_k(v_*; 0 \leq \tau \leq t).$$

Поскольку в правой части этого соотношения стоит неотрицательная величина, то приходим к соотношению:

$$Q(t) \leq N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t).$$

Таким образом, математическое ожидание числа положительных пересечений на отрезке времени  $[0, t]$  дает для вероятности отказа  $Q(t)$  оценку сверху.

Для высоконадежных систем выходы за пределы дополнительной области являются весьма редкими событиями.

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) \ll 1.$$

Поэтому:

$$Q(t) \approx N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t).$$

Отсюда получаем для функции надежности приближенную формулу:

$$H(t) = 1 - \int_0^t v_+(v_*, \tau) d\tau; \quad (1)$$

где  $v_+(v_*, \tau)$  - математическое ожидание числа положительных пересечений уровня  $v_*$  в единицу времени.

Введем в рассмотрение приближенную функцию распределения абсолютных максимумов процесса  $v(\tau)$  на отрезке  $[0, t]$ . Обозначим возможные значения абсолютных максимумов через  $v_*$ . Функция распределения для  $v_*$ :

$$F(v_* | 0 \leq \tau \leq t) = P\left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} v(\tau) < v_*\right).$$

совпадает с функцией надежности. Отсюда, для достаточно больших  $v_* \gg v_0$ :

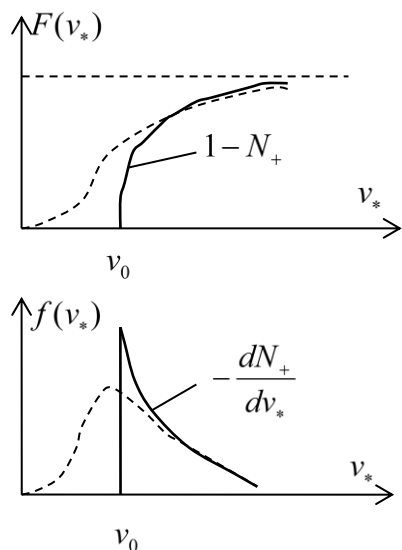
$$F(v_* | 0 \leq \tau \leq t) \approx 1 - N_+(v_*, 0 \leq \tau \leq t).$$

Здесь  $v_0(t)$  - корень уравнения:

$$N_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t) = 1.$$

Распространяя эту формулу на все значения  $v_* > v_0$  и полагая, что  $F(v_*|0 \leq \tau \leq t) \approx 0$  при  $v_* < v_0$ , получим:

$$f(v_*|0 \leq \tau \leq t) \approx \begin{cases} -\frac{dN_+(v_*; 0 \leq \tau \leq t)}{dv_*}, & \text{если } v_* > v_0(t) \\ 0, & \text{если } v_* \leq v_0(t) \end{cases} \quad (2)$$



В качестве примера рассмотрим стационарный гауссовский процесс, для которого математическое ожидание числа положительных пересечений уровня  $v_*$  в единицу времени дается формулой:

$$v_+(v_*) = \frac{\omega_e}{2\pi} \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right].$$

Подстановка в формулу (2) дает:

$$f(v_*|0 \leq \tau \leq t) \approx \begin{cases} \frac{\omega_e t}{2\pi} \cdot \frac{v_* - \langle v \rangle}{\sigma_v^2} \cdot \exp\left[-\frac{(v_* - a)^2}{2\sigma_v^2}\right], & \text{если } v_* > v_0(t) \\ 0, & \text{если } v_* \leq v_0(t) \end{cases}$$

Для корня  $v_0(t)$  получаем выражение:

$$v_0(t) = \langle v \rangle + \sigma_v \sqrt{2 \ln \frac{\omega_e t}{2\pi}}.$$

Формула (1) дает оценку снизу для функции надежности, которая будет достаточно близкой к точному значению, если система является

высоконадежной, а процесс  $v(t)$  будет достаточно сильно перемешанным. Примером сильно перемешанного случайного процесса является эргодический стационарный гауссовский процесс.

Другой приближенный подход к задаче об определении вероятности редких выбросов основан на использовании распределения Пуассона. Допустим, что в течение времени  $0 \leq \tau \leq t$  регистрируется наступление некоторых событий. Пусть  $k$  - число событий за время наблюдения,  $a$  - математическое ожидание этого числа. Полагая, что распределение событий следует закону Пуассона, получим, что вероятность наступления  $k$  событий за время наблюдения  $0 \leq \tau \leq t$  составляет:

$$P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Явления, которые описываются при помощи такой схемы, называются пуассоновскими потоками событий.

Пусть положительное пересечение процессом  $v(t)$  уровня  $v_*$  есть событие в пуассоновском потоке. Тогда функция надежности  $H(t)$  определяется как вероятность того, что за время  $0 \leq \tau \leq t$  не произойдет ни одного события. Таким образом, функция надежности определяется по формуле пуассоновского распределения при  $k = 0$ . При этом:

$$a = N_+(v_*; \tau) d\tau.$$

Приближенная формула для функции надежности приобретает вид:

$$H(t) \approx \exp\left(-\int_0^t v_+(v_*; \tau) d\tau\right).$$

Сравнивая полученную формулу с формулой математической теории надежности, получаем:

$$\lambda(t) = v_+(v_*; t).$$

То есть интенсивность отказов  $\lambda$  отождествляется с математическим ожиданием числа положительных пересечений уровня  $v_*$  в единицу времени. Если процесс  $v(t)$  стационарный, то  $v_+(v_*) = const$ . Отсюда приходим к экспоненциальному закону надежности:



$$H(t) \approx \exp[-v_+(v_*)t].$$

Математические модели отказов, основанные на допущениях об ординарности потока отказов и на редком их появлении, называются моделями пуассоновского типа.

Установим двусторонние приближения, внутри которых лежат точные значения функции надежности. Обозначим через  $N(t)$  число выбросов процесса  $v(t)$  за уровень  $v_*$  на отрезке  $[0, t]$ , через  $\langle N^\alpha(t) \rangle$  - моменты случайной функции  $N(t)$ . Эти моменты выражаются через вероятности  $Q_k(t)$  следующим образом:

$$\langle N^\alpha(t) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha Q_k(t). \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Используя соотношение (3) при  $\alpha = 1, 2$ , приходим к следующему результату: если поток пересечений предельной поверхности ординарный, а значение функции надежности  $H(t)$  при  $t=0$  равно единице, то при  $t > 0$  функция надежности удовлетворяет неравенствам:

$$1 - \langle N(t) \rangle \leq H(t) \leq 1 - \frac{3}{2} \langle N(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle N^2(t) \rangle.$$

Нижняя оценка совпадает с (1). Для применения верхней оценки следует знать, помимо математического ожидания  $\langle N(t) \rangle$ , средний квадрат числа положительных пересечений  $\langle N^2(t) \rangle$ , который вычисляется по формуле:

$$\langle N^2(t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \int_0^t \dot{v}_1 \dot{v}_2 f(v_*, v_*, \dot{v}_1, \dot{v}_2; \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\dot{v}_1 d\dot{v}_2.$$

Все эти результаты получены при условии, что  $H(0) = 1$ . Если это условие не выполняется, то предложенными оценками пользоваться нельзя. Однако формулу (1) можно в этом случае представить в виде:

$$H(t) = H(0) \cdot \left( 1 - \int_0^t v_+(v_*, \tau) d\tau \right).$$

## Кумулятивные модели отказов

подавляющее большинство отказов сооружений и машин связано с постепенным накоплением повреждений: пластических деформаций, усталостных повреждений, износа и т.п. Математическим отражением этого факта являются кумулятивные модели отказов, которые описывают квазимонотонное ухудшение параметров качества системы, происходящее в процессе ее эксплуатации и взаимодействия с окружающей средой.

Пусть допустимая область  $\Omega_0$  является выпуклым телом в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $V$ . Пусть точка  $v=0$  принадлежит области  $\Omega_0$ . Тогда условие  $v \in \Omega_0$  может быть представлено в виде:

$$\|v\| < 1,$$

где  $\|v\|$  - надлежащим образом выбранная норма в пространстве  $V$ , для построения которой можно применить следующий способ.

Пусть луч, проведенный из точки  $v=0$  через точку  $v \neq 0$ , пересекает поверхность  $\Gamma$  в точке  $v_\Gamma$ . Тогда:

$$\|v\| = \frac{|v|}{|v_\Gamma|},$$

где  $|v|$  - длина вектора  $v$ .

Для допустимой области в виде симметричного прямоугольного параллелепипеда  $|v_j| < v_{j*}$  ( $j = 1, \dots, n$ ):

$$\|v\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{|v_1|}{v_{1*}}, \dots, \frac{|v_n|}{v_{n*}} \right\}.$$

Для симметричного эллипсоида с центром в начале координат и с полуосями  $v_{j*}$  аналогично получаем:

$$\|v\| = \left[ \left( \frac{v_1}{v_{1*}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{v_n}{v_{n*}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Случайный процесс  $v(t)$  называется кумулятивным на отрезке времени  $T$ , если для любых  $t_1, t_2 \in T$  выполняется условие:

$$\|v(t_2)\| \geq \|v(t_1)\| \quad (t_2 > t_1). \quad (1)$$

Примером кумулятивного процесса может служить любой процесс накопления повреждений, происходящий без естественного или искусственного (ремонт, восстановление) залечивания. Например, в соответствии с линейной гипотезой накопления усталостных повреждений мера повреждения определяется соотношением:

$$v = \sum_j \frac{n(\sigma_j)}{N(\sigma_j)}.$$

Эта мера для неповрежденного элемента равна нулю, и единице – для разрушенного элемента.

Основное свойство кумулятивных моделей устанавливается условием (1). Согласно этому условию вектор качества квазимоноotonно приближается к границе допустимой области, так что вероятность его невыхода из допустимой области на любом отрезке  $[t_1, t_2]$  совпадает с вероятностью нахождения его в этой области в момент  $t_2$ . Отсюда функция надежности:

$$H(t) = P\{v(\tau) \in \Omega_0; \tau \in [t_0, t]\} = P\{v(t) \in \Omega_0\}.$$

Поэтому определение характеристик надежности и долговечности для многих типов кумулятивных моделей оказывается много проще.