ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

А.Н. ПЕРВЫШИН, А.Н. ДРУЖИН

ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБРАБОТКА ИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

САМАРА
Издательство СГАУ
2010

УДК СГАУ : 389(075)
ББК 30.10
П 266

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Д.Я. Н о с ы р е в,
д-р техн. наук, доц. В.Е. Н и г о д ю к

Первышин А.Н.

П 266 **Измерения физических величин и обработка их результатов**: учеб. пособие / А.Н. Первышин, А.Н. Дружин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010. – 64 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0740-4

В пособии приведены основные метрологические понятия и термины, рассмотрены средства и методы измерений, выполняемых при разработке, производстве и контроле качества машиностроительной продукции, а также в научных исследованиях.

Описаны способы обработки и анализа экспериментальных данных, формы их представления.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей. Может быть использовано при выполнении лабораторных работ и домашних заданий, подготовке к экзаменам и зачётам, в курсовом и дипломном проектировании и научно-исследовательской работе студентов.

УДК СГАУ : 389(075)
ББК 30.10

ISBN 978-5-7883-0740-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

X, x – измеряемая величина; выходной сигнал (показание) СИ;
x_1 – входной сигнал СИ;
a – единица измерения; коэффициент в выражении (2.5); число делений;
v – численное значение измеряемой величины в принятых единицах измерения;
Y – результат косвенного измерения;
N, n – число измерений;
m – число измеряемых величин при совокупных измерениях; число суммируемых погрешностей;
s – число совокупных измерений;
S – чувствительность прибора (1.7); оценка среднего квадратического отклонения отдельного измерения (1.18);
C – поправка;
c – цена деления шкалы прибора; коэффициент в (2.14);
$x_Д$ – действительное значение измеряемой величины; математическое ожидание;
$\tilde{X}$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины;
Δx – доверительный интервал результата измерений;
Δ – абсолютная погрешность измерения; разница значений;
$\Delta_{доп}$ – допустимое значение погрешности при проведении измерения;
δ – относительная (приведенная) погрешность;
t – время; коэффициент (квантиль) Стьюдента;
τ – постоянная времени СИ;
f – функциональная зависимость;
$S_{\tilde{X}}$ – оценка среднего квадратического отклонения результата измерения;
P – частота события; доверительная вероятность;
$\varphi(x)$ – плотность вероятности в выражении (1.12);
U_P – квантиль нормального распределения;
Θ – интеграл доверительной вероятности (функция Лапласа);
$\Psi(N)$ – критерий Шовена;
l – отношение величины, наиболее отличающейся от остальных составляющих, к величине ближайшей к ней составляющей;
k – коэффициент, определяемый доверительной вероятностью;
σ – среднее квадратическое отклонение результата измерений;
σ^2 – дисперсия среднего квадратического отклонения результата измерений (1.13);
χ – некоторая случайная величина в выражении (2.1);
z – аппроксимирующая функция;
A,B,C,D,E – коэффициенты полинома (2.10).

ВВЕДЕНИЕ

Подготовка инженеров по машиностроительным специальностям предполагает обязательное знание метрологических основ проведения измерительного эксперимента, методов обработки и представления его результатов. Настоящее издание подготовлено в развитие учебного пособия «Теплотехнические измерения в двигателях летательных аппаратов» (В.Г. Заботин, А.Н. Первышин), выпущенного в КуАИ в 1990 году, и знакомит читателей с современной методологией технических измерений, выполняемых при разработке, производстве, испытаниях и контроле качества продукции машиностроения.

В первом разделе пособия излагаются основные метрологические понятия, приводятся классификации измерений и погрешностей, рассматриваются методы оценки точности измерения физических величин, метрологические характеристики средств измерений, элементы математической теории погрешностей.

Второй раздел посвящён методам обработки результатов прямых и косвенных измерений, приводятся способы аппроксимации экспериментальных данных, на конкретных примерах рассматриваются методы статистического анализа эксперимента, даются сведения о формах представления результатов, графическом построении зависимостей в различных шкалах.

Рекомендуемая литература может быть использована студентами для более подробного изучения материала при подготовке к экзаменам, выполнении лабораторных, курсовых, дипломных и научно-исследовательских работ.

1 ЭЛЕМЕНТЫ МЕТРОЛОГИИ

1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Метрология является наукой об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности. Основные метрологические понятия и термины установлены стандартом [1] и необходимы для обеспечения единого понимания и толкования вопросов, возникающих при проведении измерительного эксперимента. При этом требуемая информация должна содержать, как правило, количественные данные о физических свойствах изучаемых явлений, процессов (в том числе технологических) и материальных объектов (материалов, изделий, деталей и т.д.), что обеспечивается измерением физических величин, наилучшим образом описывающих данные свойства.

Измерением называют совокупность операций по применению специального технического средства (средства измерений) для нахождения значения физической величины. Измерение состоит в экспериментальном определении соотношения между измеряемой физической величиной и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения.

Математически это определение можно записать следующим образом:

$$X = a\upsilon, \tag{1.1}$$

где X – измеряемая величина;

a – единица измерения (физическая величина фиксированного размера, которой условно присвоено единичное значение);

υ – численное значение измеряемой величины в принятых единицах измерения.

Выражение (1.1) называется *основным уравнением измерения*. Как следует из этого уравнения, для проведения измерения необходимо выбрать единицу измерения (*a*) и иметь какое-то вещественное её воплощение, называемое *мерой*.

Мера должна обеспечивать воспроизведение и (или) хранение физической величины заданного размера, значение которого известно с необходимой точностью.

Средство измерений (СИ) – техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу физической величины, размер которой принимают неизменной (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени. СИ, предназначенное для получения значения измеряемой величины в установленном диапазоне, называется *измерительным прибором*.

Стандартизованное СИ – средство измерений, изготовленное и применяемое в соответствии с требованиями стандарта.

Нестандартизованное СИ – средство измерений, стандартизация требований к которому признана нецелесообразной. Нестандартизованные СИ чаще всего самостоятельно разрабатывается испытателем для проведения измерений при выполнении исследовательских работ.

Физическая величина (ФВ) – это свойство физического объекта, общее в качественном отношении для многих физических объектов, но отличающееся количественным значением для каждого из них. ФВ могут быть одноимёнными (однородными) и неодноимёнными (неоднородными).

Значение ФВ – количественная оценка ФВ в виде некоторого числа принятых для неё единиц измерения.

Истинное значение – числовое значение ФВ, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую ФВ. Оно может быть получено только в результате бесконечного числа измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений.

Действительное значение – значение ФВ, полученное экспериментальным путем и настолько приближенное к истинному значению, что может быть использовано вместо него.

Погрешность измерения – это отклонение результата измерений от истинного (действительного) значения измеряемой величины.

Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины и характеризует точность измерения.

Относительная погрешность – отношение абсолютной погрешности к истинному значению ФВ.

Точность измерений – это количественная мера степени приближения измеренного значения ФВ к действительному значению (или близость к нулю погрешности измерения).

Шкала ФВ – это упорядоченная совокупность значений ФВ, которая служит основой для её измерения (например – шкала температур, состоящая из ряда реперных точек, значения которых общеприняты и служат основой для измерений температуры).

1.2 ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Международной системой единиц СИ определено семь *основных* единиц измерений (мер) ФВ:

– длина – метр (*м*);

– масса – килограмм (*кг*);

– время – секунда (*с*);

– сила электрического тока – ампер (*А*);

– температура – кельвин (*К*);

– сила света – кандела (*Кд*);

– количество вещества – моль (*моль*).

Производные единицы образуются из основных на основании определений ФВ или законов, устанавливающих связь между ними (например – $1Н=1кг\times1м/1с^2$).

Предусмотрены *кратные* и *дольные* единицы, образуемые умножением исходных единиц измерения на 10 в соответствующей степени и обозначаемые добавлением к размерности исходных ФВ соответствующих приставок (например – $1км = 10^3м$, $1мм = 10^{-3}$ $м$).

Международными соглашениями определены меры основных ФВ. Например, мерой длины является метр – длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения атома криптона 86. Это естественный эталон, который может быть многократно воспроизведен. На базе подобных эталонов производят менее точные, но более удобные для измерения образцовые и рабочие меры (например, линейка – мера длины, гиря – мера массы и т.д.).

Исторически сложилось так, что при измерениях и представлении их результатов до сих пор применяют технические единицы измерения, используемые до принятия международных стандартов. Например – давление измеряют в *атмосферах* или *миллиметрах ртутного столба*, диаметр резьбы в *дюймах*, температуру в *градусах Цельсия*, скорость в *км/час* и т.д. Современные стандарты не рекомендуют применять технические единицы измерений, при необходимости лучше использовать кратные и дольные единицы международной системы СИ.

1.3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗМЕРЕНИЙ

Конечными *целями* измерения являются:

- оценка действительного значения измеряемой ФВ;
- отыскание параметров эмпирических формул, устанавливающих зависимость между несколькими измеряемыми ФВ;
- исследование эмпирических формул, корреляционных зависимостей.

Основные *задачи* измерения состоят в:

- определении численного значения измеряемой величины υ в выражении (1.1);
- оценке допущенных при измерении погрешностей.

Достоверность измерения ФВ зависит от многих факторов: точности измерительных средств, условий окружающей среды, применяемого метода измерения и способа оценки погрешности, квалификации исследователя и других. Современная практика измерений предполагает обязательную количественную статистическую обработку и анализ результатов измерений.

Такой подход позволяет:

- сократить объем измерений путем замены многочисленных исходных данных несколькими величинами, которые

могут достаточно надежно отражать полученную информацию;
- оценить достоверность измерений, получить количественные характеристики надежности данных, решить вопросы, связанные с определением необходимого или оптимального объёма измерений;
- выявить объективные закономерности при сравнении различных групп результатов измерений, отделить измеряемую величину от влияния внешних неконтролируемых факторов.

Следует заметить, что методы статистического анализа результатов наблюдений не обеспечивают в полной мере правильность и точность полученных данных, так как экспериментальные результаты могут содержать погрешности, не выявляемые и не устраняемые методами статистического анализа.

Методические вопросы получения достоверных экспериментальных данных рассматриваются метрологией, а способы и пути устранения систематических погрешностей являются специфическими для каждого конкретного измерения. Эти вопросы решаются исследователем при выборе методики проведения эксперимента и способа обработки результатов.

1.4 КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения классифицируются по нескольким признакам.

В зависимости от ***конечной цели измерений и способа обработки*** экспериментальных данных, для нахождения результата измерения разделяются на прямые, косвенные, совместные и совокупные. На рис. 1.1 показана классификация измерений по данному признаку.

Прямое – измерение, при котором значение искомой величины находят путём непосредственного сравнения с мерами, либо с помощью СИ, градуированного в соответствующих единицах. Например – измерение длины штангенциркулем, массы гирями, температуры термометром и т.д.

Прямые измерения являются основным видом технических измерений из-за простоты и удобства обработки результатов. Однако в ряде случаев прямые измерения затруднительны или просто невозможны.

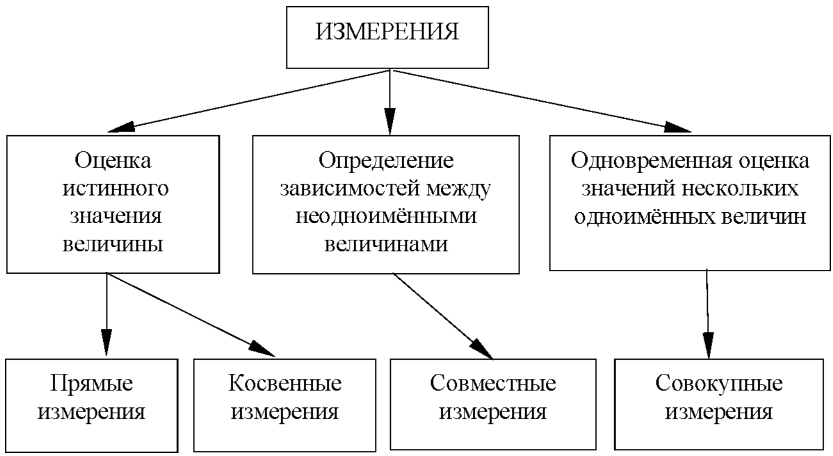

Рис. 1.1. Классификация измерений

Косвенное – измерение, при котором требуемое значение ФВ находят на основании результатов нескольких прямых измерений других величин, функционально связанных с искомой величиной известной зависимостью. При косвенном измерении значение измеряемой величины получают решив уравнение:

$$Y=f(X_1, X_2,..,. X_N),$$

где X_1, X_2 ,...,. X_N – значения величин, полученных в результате проведения N прямых измерений;

Y – результат косвенного измерения.

Примером определения искомой величины путем косвенного измерения может служить определение плотности вещества, из которого изготовлен цилиндр. Измерив радиус r, высоту h и массу m цилиндра прямыми измерениями, можно определить плотность вещества ρ, произведя вычисления по известной формуле: $\rho=m/(\pi r^2h)$, – косвенное измерение.

Совместные – одновременно проводимые измерения двух или нескольких неодноимённых (неоднородных) ФВ для определения зависимости между ними. Например – измерение освещенности в комнате в зависимости от расхода электроэнергии на освещение.

Порядок обработки результатов совместных измерений и форма представления их результатов зависят от физической модели объекта измерений и задач эксперимента. Единые требования для различных видов измерений в этом случае не установлены. При оформлении результатов совместных измерений указывается порядок обработки результатов или даётся ссылка на общепринятую методику обработки, если таковая существует.

Совокупные – проводимые одновременно измерения нескольких одноимённых (однородных) ФВ, при которых искомые значения величин определяют путём решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях. Например – определение массы отдельных гирь набора по известному значению массы одной из гирь и по результатам измерений (сравнений) масс различных сочетаний гирь.

При совокупных измерениях требуемые величины $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ находятся путем решения системы из s $(s \geq m)$ уравнений, в которые входят результаты измерения некоторых других величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$f_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m; X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где m – число измеряемых величин;

n – число измерений величины X;

s – число совокупных измерений.

Порядок обработки результатов таких измерений зависит от числа проведенных совокупных измерений s.

Если $s=m$, то по результатам измерений составляется система уравнений, в которой число уравнений равно числу измеряемых величин. Решением полученной системы уравнений каждая измеряемая величина косвенно выражается через результаты совокупных измерений. Дальнейшая обработка проводится по правилам обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях (подраздел 2.2 настоящего пособия). Если число различных совокупных измерений больше числа измеряемых величин ($s>m$), то обработку результатов измерений обычно проводят с помощью метода наименьших квадратов (подраздел 2.3 настоящего пособия).

По характеру поведения ФВ измерения разделяют на:

– *статические* – измерения ФВ, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную в течение времени измерения (например – измерение массы детали);
– *динамические* – измерения переменных во времени ФВ (например – измерение тяги двигателя при запуске).

По количеству получаемой информации различают***:***

– *однократное* – измерение, выполненное один раз (например – определение конкретного момента времени по часам);
– *многократное* – измерение одной и той же ФВ последовательно несколько раз с последующим осреднением полученных значений (например – определение средней скорости ветра в течение часа).

По отношению к абсолютным единицам измерения различают:

– *абсолютное* измерение – определение ФВ прямым измерением основных величин и использованием физических констант (например – определение длины окружности L измерением её радиуса r с использованием известного соотношения $L=2\pi r$);
– *относительное* измерение – установление соотношения между измеряемой ФВ и однородной ей, применяемой в качестве единицы (например – измерение радиационной активности источника по отношению к активности радионуклида, принятой в качестве меры радиационной активности).

1.5 СРЕДСТВА И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Непосредственное сравнение измеряемых величин с мерами в большинстве практических случаев невозможно [4], поэтому измерения проводятся с помощью СИ, служащих для сравнения измеряемых величин с единицей измерения и выработки сигнала в форме, доступной для восприятия наблюдателем. Например – измерение силы тока с помощью амперметра.

В средстве измерений, основанном на ряде измерительных преобразований, измеряемая величина преобразуется в параметры, более удобные для обработки, дальнейшего преобразования и хранения. Во многих СИ, применяемых в технике, неэлектрические измеряемые величины (например – давление, температура, скорость и другие) сначала преобразуются в электрические сигналы, которые затем усиливаются, считываются и регистрируются.

Преобразователь, к которому подведена измеряемая величина, называется *первичным преобразователем* (*датчиком*). Например – термопара является датчиком температуры, выходным сигналом которого является термоэлектродвижущая сила (термоЭДС). Существуют датчики температуры, использующие другие принципы измерения – известные зависимости от температуры электрического сопротивления (термометр сопротивления), длины столба жидкости (жидкостный термометр) и другие.

Измерительные установки, системы и комплексы (стенды) – это совокупность средств измерений, объединённых по функциональному признаку и расположенных в одном месте. Например – комплекс средств измерений экспериментального стенда, предназначенного для определения параметров двигателя, таких как расход топлива, мощность, вибрация, давление и температура масла и т.д. Их основным преимуществом является возможность одновременной регистрации нескольких ФВ, характеризующих объект испытаний, и имитация эксплуатационных условий окружающей среды.

Различают несколько ***методов измерений***.

Метод измерений, по которому значение измеряемой величины определяется непосредственно по показаниям средства измерений, называется методом *непосредственной оценки*. Например – измерение напряжения электрического тока вольтметром.

Широко распространены также *дифференциальный* метод, когда определяется разность измеряемой и известной величин (например – определение давления пьезометром), и метод *замещения (сравнения)*, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой (например – измерение напряжения постоянного тока на компенсаторе сравнением с известной ЭДС нормального элемента).

Частным случаем дифференциального метода является *нулевой* метод измерения, когда результирующее воздействие измеряемой величины и меры на СИ доводят до нуля (например – измерение электрического сопротивления мостом с полным его уравновешиванием).

Точность результата измерения, проводимого по нулевому методу, является наиболее высокой, поскольку она определяется в основном точностью применяемой меры и чувствительностью СИ. Например – при взвешивании на равноплечных весах измеряемая масса полностью компенсируется массой мерительных гирь, а весы служат лишь для установления факта равновесия. Точность взвешивания при этом определяется классом точности гирь и чувствительностью весов.

Реже применяется метод *совпадений*, который основан на использовании совпадения меток шкал или периодических сигналов (например – измерения длины штангенциркулем, частоты вращения стробоскопом).

Различают также *контактный* и *бесконтактный методы* измерений. В первом случае чувствительный элемент прибора непосредственно соприкасается с объектом измерений (например – контроль размера детали проходным или непроходным калибрами), а во втором – чувствительный элемент не касается объекта и может быть расположен на значительном удалении от объекта (например – измерение расстояния до самолёта радиолокатором).

1.6 ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Как бы точно не было проведено измерение, оно всегда содержит некоторую погрешность (ошибку) измерения, которая характеризует отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Еще раз заметим, что истинное значение физической величины неизвестно, его применяют только в теоретических исследованиях. На практике оно заменяется действительным значением измеряемой величины, которое, как отмечалось выше, настолько приближено к истинному значению, что может быть использовано вместо него.

Точность результата измерения, являющаяся основной характеристикой качества измерения, определяется близостью к нулю величины погрешности.

Различают абсолютную и относительную погрешности измерения.

Абсолютной погрешностью измерения Δ называют разность между показанием средства измерений x и действительным значением измеряемой величины $x_Д$:

$$\Delta = x - x_Д . \qquad (1.2)$$

Несмотря на то, что абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины, её размер недостаточно говорит о реальной точности измерения. Например – если при измерении тяги двигателя была допущена абсолютная погрешность в $1Н$, то для двигателя тягой $10^5Н$ результат следует признать вполне удовлетворительным (относительная погрешность 0,01%). Если же испытывался двигатель тягой $10Н$, то при той же абсолютной погрешности точность измерения нельзя признать высокой (относительная погрешность 10%).

Относительная погрешность измерения – отношение абсолютной погрешности к результату измерений или к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_Д} . \qquad (1.3)$$

Обычно относительную погрешность δ выражают в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_Д} \times 100\%.$$

Величина погрешности, получающаяся в процессе измерения, в общем случае зависит от измеряемой величины x. Для получения этой зависимости одну и ту же физическую величину одновременно измеряют испытываемым и более точным СИ во всем диапазоне шкалы испытываемого СИ. Эта операция называется *градуировкой* средства измерения.

Пример связи $\Delta = f(x)$ показан на рис. 1.2. Если она получена при нормальных для СИ условиях эксплуатации, то характеризует *основную погрешность измерения.*

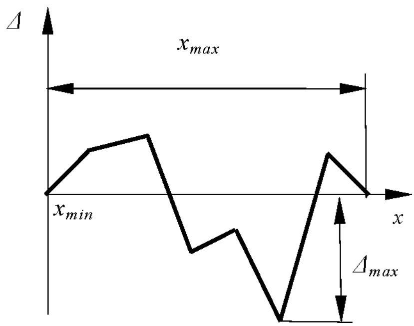

Рис. 1.2. Пример зависимости абсолютной погрешности от показаний прибора:
$(x_{max}-x_{min})$ – диапазон измерений прибора;
Δ_{max} – максимальная абсолютная погрешность.

Нормальными условиями окружающей среды для эксплуатации СИ являются:

– температура t=20°C;

– давление P=101.32472 *КПа* (760 *мм.рт.ст*);

– относительная влажность воздуха 58%.

Приведенная погрешность СИ – это отношение абсолютной погрешности к нормированному значению, за которое принимают значение, равное верхнему пределу измерений (или диапазону измерений, или длине шкалы СИ и т.п.), выраженное, как правило, в процентах.

Зная связь $\Delta=f(x)$ в графическом (рис. 1.2) или табличном видах, нетрудно восстановить действительное (более точное) значение измеренной величины $x_Д$, введя соответствующую *поправку*:

$$x_Д = x_i + C_i, \tag{1.4}$$

где x_i – показание СИ; C_i – поправка.

Таблицы поправок приводятся в паспортах лишь наиболее точных СИ. В остальных случаях пользуются приведенной погрешностью δ, равной отношению максимальной абсолютной погрешности измерений в диапазоне измерений данного СИ к этому диапазону:

$$\delta = \left| \frac{\Delta_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} \right| \times 100\% \,. \tag{1.5}$$

Эта величина совпадает с *классом точности* средства измерения, который является важной характеристикой СИ и выражается пределами допускаемых основной и дополнительной погрешностей. Например – если для измерения давления используется манометр 1-го класса точности с диапазоном измерения от 0 до 1*МПа,* то в соответствии с (1.5) максимальная абсолютная погрешность будет равна:

$$\Delta_{\max} = \left| \frac{1\% \times 1 МПа}{100\%} \right| = 0{,}01\ \text{МПа} \,.$$

Поскольку СИ данного класса не снабжены таблицей поправок, то при измерении давления в 0,5*МПа,* можно лишь считать, что относительная погрешность измерения не будет превышать δ=(0,01/0,5)×100% =2%, её и считают предельной. При измерении давления в 0,2*МПа* предельная погрешность, определённая аналогичным образом, составит 5%. Отсюда следует известное в измерительной практике правило: при измерениях необходимо стремиться к тому, чтобы измеряемая величина лежала в последних 2/3 шкалы прибора. Если же измерение проводится в первой трети шкалы, то относительная погрешность существенно возрастает.

Рассмотренная выше максимальная абсолютная погрешность является погрешностью СИ и называется, как отмечалось выше, основной. Это значит, что при проведении измерений в условиях, соответствующих паспорту СИ, погрешность измерения определяется, в основном, погрешностью самого СИ.

Дополнительная погрешность – погрешность, обусловленная отклонением условий эксплуатации от нормальных на величину, превышающую значение, определённое в паспорте средства измерения.

На практике часто приходится проводить измерения в условиях, отличающихся от нормальных, и даже в жестких условиях эксплуатации.

Воздействие дестабилизирующих факторов окружающей среды (высокие температуры, вибрации, перегрузки, агрессивные газы и другие) вызывает дополнительную погрешность измерений, которая в таких случаях часто является определяющей.

Для уменьшения дополнительной погрешности градуировку СИ необходимо проводить в условиях, по возможности близких к эксплуатационным, непосредственно до и сразу после испытаний.

1.7 МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В зависимости от назначения и точности средства измерений принято разделять на три группы:

- рабочие СИ;
- образцовые СИ;
- эталоны.

Рабочие СИ используются для повседневных измерений, они не предназначены для передачи размера единицы измерений другим СИ и подразделяются на технические и лабораторные. Последние имеют более высокую точность.

Образцовые СИ служат для поверки и градуировки рабочих средств измерений. Точность образцовых СИ существенно (в 4-5 раз) выше рабочих.

Эталоны служат для воспроизведения и (или) хранения единиц измерения с наивысшей (метрологической) точностью, достижимой при современном уровне развития науки и техники.

В практической деятельности обычно используются рабочие и образцовые СИ (последние часто применяют в научных исследованиях, требующих высокой точности измерений).

Для того чтобы правильно подобрать средство измерения, необходимо знать его основные метрологические характеристики: чувствительность, цену деления шкалы, точность и постоянную времени.

Чувствительность. Обычно СИ измеряемую величину (какой-либо входной сигнал, например – давление) преобразует в выходной сигнал, удобный для наблюдения или анализа. Чаще всего этот выходной сигнал представляет собой перемещение указателя СИ.

Связь выходного сигнала x с входным сигналом x_1 называют *статической характеристикой* СИ:

$$x=f(x_1). \quad (1.6)$$

Чувствительность прибора S определяется отношением изменения выходного сигнала к вызвавшей это изменение измеряемой величине:

$$S = dx / dx_1 = f(x_1). \quad (1.7)$$

При выборе СИ необходимо учитывать, что чем больше величина S, тем круче проходит его статическая характеристика. Это значит, что чем чувствительнее СИ, тем меньшие изменения измеряемой величины он способен фиксировать. Необходимо учитывать, что с увеличением чувствительности СИ, как правило, растёт его стоимость и появляется необходимость изоляции от помех, что усложняет измерение.

В зависимости от вида функции $S=f(x_1)$ чувствительность может быть либо постоянной величиной ($x \sim x_1$ – линейная статическая характеристика), либо величиной, зависящей от x_1. В первом случае СИ имеет *линейную* шкалу, во втором – *нелинейную*. Нелинейность шкалы нежелательна из-за трудностей считывания и дальнейшей обработки результатов.

Наряду с чувствительностью СИ при некоторых видах измерений (например, нулевым методом) важное значение имеет *порог чувствительности*, под которым понимается минимальное изменение измеряемой величины, которое может быть отмечено данным СИ. Чем больше чувствительность, тем меньше этот порог. Порог чувствительности зависит, прежде всего, от величины трения, которое препятствует отклонению подвижной системы СИ, и от конкретных условий наблюдения (возможности различать малые отклонения, стабильности показаний и т.д.).

Цена деления шкалы. Как правило, шкала СИ градуируется непосредственно в единицах измеряемой величины x (на термометре – в градусах, на амперметре – в амперах и т.д.). В этом случае цена деления шкалы (c) определяется разностью значений ФВ, соответствующих двум соседним отметкам шкалы.

Если a – число делений на шкале СИ до указателя, положение которого соответствует некоторой измеряемой величине x, то для равномерной шкалы цена деления определяется выражением:

$$c = x / \alpha\ . \tag{1.8}$$

Если шкала СИ градуирована в единицах, пропорциональных линейному перемещению, то цена деления СИ есть величина, обратная чувствительности.

Точность. Основная погрешность определяется классом точности применяемого СИ (см. подраздел 1.6).

При отклонении условий измерений от нормальных возникающая дополнительная погрешность может существенно исказить результаты измерений даже при использовании СИ высокого класса точности. Целесообразность применения точных СИ следует предварительно тщательно оценить, сопоставляя основную и ожидаемую дополнительную погрешности, так как зачастую повышенная точность измерений оказывается экономически и технически нецелесообразной.

Постоянная времени является динамической характеристикой СИ. Если сигнал на входе в СИ мгновенно изменяется на некоторую величину, то выходной сигнал может достигать этой величины лишь через некоторое время. Например, если горячий спай термопары быстро опустить в кипящую воду с постоянной температурой T, то по мере прогрева спая и подводящих проводов будет меняться термоЭДС термопары E, достигая максимального значения после установления равновесия (рис. 1.3).

Из практики известно, что связь выходного сигнала СИ с временем t часто выражается экспоненциальной зависимостью:

$$x / x_{\max} = 1 - e^{-t/\tau}\ .$$

Продифференцировав последнее выражение, получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{\max}}{\tau} e^{-t/\tau}\ .$$

Приняв t =0, найдем соотношение:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \frac{x_{\max}}{\tau}. \qquad (1.9)$$

Величина τ, входящая в приведенные выше выражения, называется *постоянной времени* и характеризует инерционность СИ.

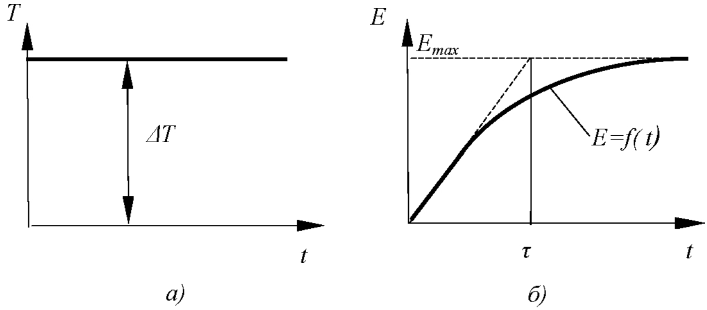

Рис. 1.3 – Зависимости входного (*а*) и выходного (б) сигналов термопары от времени *t:*
а) входной сигнал – температура (Т);б) выходной сигнал – термоЭДС (Е)

Физический смысл постоянной времени τ ясен из формулы (1.9). Если провести касательную к кривой $x=f(t)$ в начальной точке (на рис. 1.3 б эта кривая конкретизирована зависимостью $E=f(t)$), то она достигнет максимальной величины через некоторое время, равное τ – постоянной времени СИ.

Чем меньше постоянная времени τ, тем средство измерения менее инерционно. Малоинерционные СИ применяют для изучения быстропеременных процессов (процессов, имеющих высокую частоту), например – измерения давления в камере сгорания при запуске ракетного двигателя, работающего в импульсном режиме.

1.8 КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

На точность и достоверность результатов измерений влияют различные внешние (со стороны окружающей среды) и внутренние (присущие самому методу измерений) факторы.

Существуют несколько признаков, по которым классифицируются погрешности измерений. Так, различают объективные, субъективные, статические, динамические и другие погрешности. При математической оценке погрешности измерения делят на систематические, случайные и промахи.

Систематические погрешности вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Например – при взвешивании тела в воздухе на пружинных весах всегда будет присутствовать систематическая погрешность, связанная с выталкивающей силой воздуха. Вычислив её согласно закону Архимеда и внеся соответствующую поправку, можно избавиться от этой систематической погрешности при обработке результатов. Учтённые заранее, систематические погрешности на точность измерения не влияют.

Различают следующие *составляющие* систематической погрешности:

- инструментальная (из-за погрешности самого СИ);
- установочная (например – негоризонтальность весов);
- методическая, обусловленная несовершенством выбранного метода измерений (например – измерение температуры газового потока термопарой с открытым спаем);
- теоретическая, возникающая из-за применения неточных или ошибочных формул, предположений;
- неисключённая, обусловленная погрешностями вычисления поправок или отсутствием поправки вследствие её малости.

Последнюю составляющую систематической погрешности не удаётся исключить введением поправок, так как зачастую неизвестны все причины, вызывающие такую погрешность.

Так, причинами появления неисключённой систематической погрешности могут быть: смещение или колебания стрелки или шкалы СИ, неправильное положение наблюдателя по отношению к СИ, неверная настройка или временный сбой в его работе, неучтённое воздействие окружающей среды и другие.

Поскольку расчётным путём определить эту составляющую систематической погрешности практически невозможно, то при постановке эксперимента её следует сводить к величине, не превышающей погрешность средства измерений, либо предусмотреть в методике определение границ (интервала) её появления (см. подраздел 1.9).

Наиболее простой путь уменьшения неисключённых систематических погрешностей – проведение, если это возможно, измерения одной и той же величины различными методами.

Случайные погрешности возникают по причинам, действие которых неодинаково в каждом опыте и в принципе не может быть учтено заранее (например, изменение температуры окружающей среды в процессе измерения размеров детали). Это означает, что для одного и того же значения измеряемой физической величины погрешности измерений, выполненных многократно одним и тем же СИ, могут не совпадать, но, как показывает практика, группируются вокруг некоторого значения (рис. 1.4).

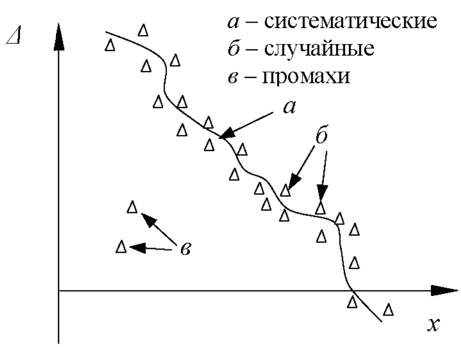

Рис. 1.4. Виды погрешностей

Кривая, проведенная через среднее значение погрешности для каждого значения физической величины, графически отображает закон изменения систематической погрешности.

Отклонения от этой кривой представляют собой случайные погрешности отдельных измерений. Величина случайных погрешностей различна даже при измерениях, выполняемых одним СИ одинаковым образом. Если систематическую погрешность обычно удаётся учесть поправкой, то случайная погрешность может иметь различную величину в одном и том же опыте. Чем больше разброс случайных погрешностей, тем менее точным является СИ.

Для оценки неизбежных случайных погрешностей и разработки мероприятий по уменьшению их влияния на результат эксперимента используется математический аппарат теории вероятности, элементы которого рассматриваются в подразделе 1.9.

Иногда в результате нарушения основных условий измерения или небрежности экспериментатора возникают грубые ошибки (например – в результате неверной записи: вместо 10,5 K в протоколе испытаний записано 105 K). Такие ошибки называют ***промахами***.

Математическая теория вероятности позволяет отличить промахи от закономерных случайных ошибок. Для этого используются специальные критерии, рассмотренные ниже.

1.9 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.9.1 Закон нормального распределения погрешностей

Пусть одним и тем же методом проведено N измерений одной и той же величины, например – длины стержня обыкновенной линейкой.

Получены результаты измерений: X_1, X_2, X_3, ... X_N. Причем пусть все эти измерения различаются по условиям их проведения (разные наблюдатели, разная температура окружающей среды, разная цена деления линейки и т.д.), а, следовательно, и по результатам. Возникает вопрос о том, какое из этих значений ближе всего к действительной длине стержня.

Многочисленные эксперименты показали, что в большинстве случаев результаты измерений группируются вокруг среднего арифметического значения:

$$\tilde{X} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_i \,, \qquad (1.10)$$

которое при $N \to \infty$ и отсутствии систематической погрешности стремится к действительному значению измеряемой величины. Выражение (1.10) позволяет решить первую задачу измерения, т.е. найти численное значение измеряемой величины.

Для решения второй задачи измерения, т.е. оценки допущенной погрешности, нанесем полученные результаты на числовую ось и разобьем ее на равные участки $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. (здесь x_i, x_{i+1} – границы участков, а не отдельные результаты измерений X_i).

За характеристику каждого участка возьмем среднее значение его границ:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Теперь определим количество измерений n_i, попадающих в каждый выделенный участок.

Рассмотрим эти действия на конкретном примере.

Пусть проведено 100 различных измерений длины стержня, результаты которых приведены в табл. 1 (предположим, что истинная длина стержня 100 *мм*, размер участков Δx=0,5 *мм* выбран произвольно):

Таблица 1. **Результаты измерений длины стержня**

$x_i \div x_{i+1}$, *мм*	98÷98,5	98,5÷99	99÷99,5	99,5÷100
$\tilde{x}_i$, *мм*	98,25	98,75	99,25	99,75
n_i	1	2	13	30
$P_i \approx n_i / N$	0,01	0,02	0,13	0,30
$\varphi(x_i) = \frac{n_i / N}{\Delta x}$	0,02	0,04	0,26	0,60
$x_i \div x_{i+1}$, *мм*	100÷100,5	100,5÷101	101÷101,5	101,5÷102
$\tilde{x}_i$, *мм*	100,25	100,75	101,25	101,75
n_i	37	14	3	0
$P_i \approx n_i / N$	0,37	0,14	0,03	0
$\varphi(x_i) = \frac{n_i / N}{\Delta x}$	0,74	0,28	0,06	0

В данной таблице приведены также некоторые результаты обработки эксперимента, которые понадобятся в дальнейшем.

Величина $P_i \approx n_i / N$, равная отношению попавших в заданный интервал измерений к их общему числу, называется *частотой события* в данном интервале.

Нетрудно видеть, что существует определённая связь между частотой события и расположением выделенного участка на числовой оси $\tilde{x}_i$ (рис. 1.5 а). Связь между частотой события и расположением интервала представлена гистограммой (рис. 1.5 б). Опыт показывает, что чем ближе расположен участок к среднему арифметическому, тем больше частота события.

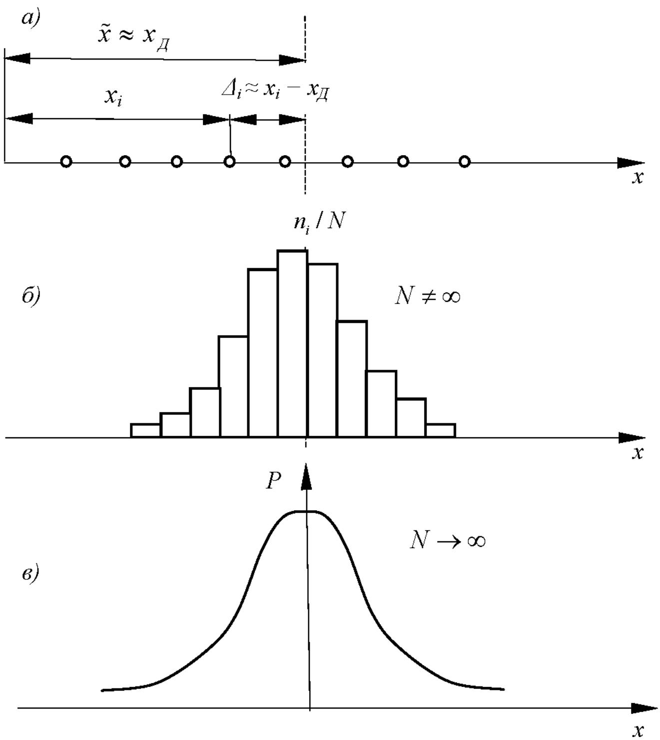

Рис. 1.5. Распределение случайных погрешностей на числовой оси

При увеличении числа измерений гистограмма, оставаясь неизменной качественно, количественно будет несколько меняться. При стремлении числа измерений к бесконечности в каждом интервале частота событий стремится к некоторой величине, которая называется *вероятностью события* (в нашем случае вероятностью появления значения измеренной величины в данном интервале):

$$\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}=P_i\,. \tag{1.11}$$

Гистограмма в этом случае превращается в плавную кривую, независящую от числа измерений (рис. 1.5 *в*).

Практика измерений показывает, что гистограмма будет иметь подобный вид и при измерении других физических величин. Основное неудобство использования величины P_i заключается в том, что частота события, а, следовательно, и вероятность, зависят от произвольно выбранного интервала Δx. Действительно, стоит выбрать Δx, например, в два раза больше, то соответственно увеличится вероятность P_i (это нетрудно видеть из табл. 1).

Более универсальный параметр, характеризующий распределение случайных погрешностей, удаётся получить, если вероятность (или частоту) появления погрешности отнести к единичному интервалу. Этот комплекс, определяемый соотношением:

$$\varphi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_i}{\Delta x}=\frac{dP}{dx}\,, \tag{1.12}$$

называют *плотностью вероятности*.

Плотность вероятности зависит лишь от величины x. В табл. 1 приведены приближенные значения $\varphi(x)$.

Вид этой зависимости, которая называется законом распределения случайных погрешностей, может быть определён из вполне естественных предположений о том, что:

– погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений;

– при большом числе измерений погрешности одинаковой величины, но разного знака, встречаются одинаково часто;

– чем больше погрешность, тем меньше частота ее появления.

Эти предположения (иногда их называют постулатами Гаусса), проверенные многочисленными экспериментами, приводят к *закону нормального распределения погрешностей* (или закону Гаусса).

Математически закон Гаусса выражается следующим уравнением:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x - x_Д)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.13)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение (рассеяние) результата наблюдения (характеризует форму кривой закона нормального распределения);

σ^2 – дисперсия среднего квадратического отклонения (характеризует величину случайных погрешностей).

Отметим ряд важных обстоятельств, связанных с практическим применением закона Гаусса при обработке результатов измерений.

Во-первых, понятие среднего арифметического значения (соотношение (1.10)) имеет чёткий смысл и содержание только для закона нормального распределения результатов наблюдений. Если распределение описывается другими законами и имеет несимметричную форму, то использование среднего арифметического значения может привести к ошибочным заключениям. В этом случае следует провести преобразование исходных чисел (например – находя логарифмы, возводя в степень, извлекая корни и т.д.) с таким расчетом, чтобы их распределение стало симметричным, близким к нормальному или использовать такие величины, как медиана и мода.

Медиана – это такое значение случайной величины, при котором одна половина значений x меньше её, а другая – больше (медиана делит площадь гистограммы на рис. 1.5 б пополам).

Мода – это наиболее часто появляющееся значение x. Если данные представлены в виде гистограммы или сгруппированы по интервалам, то в качестве моды обычно выбирается среднее значение интервала с наиболее часто встречающимся значением x.

Во-вторых, при вычислении среднего арифметического значения целесообразно получать результат с числом значащих цифр, на одну большим, чем в исходных данных. Это позволит избежать дополнительных вычислительных погрешностей. При последующей статистической обработке данных необходимое число значащих цифр должно быть уточнено и обосновано.

Существуют и другие законы распределения случайных погрешностей, однако в большинстве случаев, когда погрешности измерений не слишком велики, закон Гаусса находится в хорошем согласовании с экспериментом. Это связано с тем, что обычно суммарная погрешность является результатом совместного действия ряда причин, каждая из которых вносит малую долю в общую погрешность. В этом случае, по какому бы закону ни были распределены погрешности, вызываемые каждой из причин, результат их суммарного действия приведет к гауссовому (нормальному) распределению погрешностей. Это положение строго доказывается в математике и является следствием центральной предельной теоремы Ляпунова.

1.9.2 Вероятностные характеристики погрешностей

Рассмотрим пример практического использования закона нормального распределения погрешностей.

Пусть по результатам многократных измерений одной и той же физической величины в одних и тех же условиях найдено расстояние по числовой оси до действительного значения измеряемой величины $x_Д$ (например – по формуле (1.10)) и дисперсия σ^2 или её оценка (см. формулу (1.18)). Следовательно, по соотношению (1.13) можно рассчитать плотность вероятности $\varphi(x)$ для данного измерения на любом расстоянии от действительного значения $x_Д$ (рис. 1.6).

Выделим на числовой оси бесконечно малый отрезок dx. Вероятность попадания измерения в этот отрезок соответствует величине участка площади под кривой нормального распределения, что следует из формулы (1.12):

$$dP = \varphi(x)\,dx. \tag{1.14}$$

Таким образом, величина площади, заштрихованной на рис. 1.6, равна вероятности появления результата измерения на отрезке [*x; x*+*dx*].

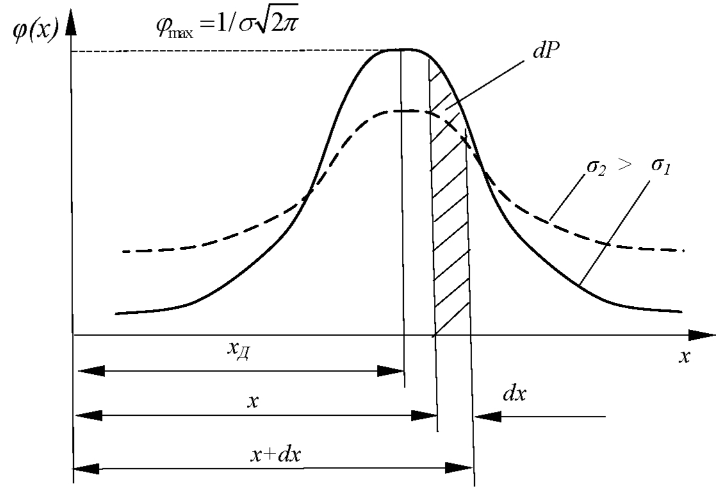

Рис. 1.6. Закон нормального распределения случайных погрешностей

Возвращаясь к примеру, приведенному в табл. 1, оценим вероятность появления значения измеренной величины в интервале, например, от 100 до 100,5 *мм*:

$$\Delta P_i = \varphi(x_i)\Delta x = 0,74 \times 0,5 = 0,37\,.$$

Аналогично можно найти вероятность появления значения измеренной величины и в других интервалах. Сложив их, получим общую площадь под кривой, т.е. вероятность появления результата измерения в диапазоне от – ∞ до + ∞.

Нетрудно определить, что величина этой вероятности равна единице:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1\,. \tag{1.15}$$

Действительно, в интервал от $-\infty$ до $+\infty$, очевидно, должны попасть все значения измеренной величины. Следовательно, частота этого события, или вероятность $P_i \approx n_i / N = 1$, так как $n_i = N$.

Анализ формулы (1.13) показывает, что плотность вероятности достигает максимума при $x=x_Д$, поэтому величину $x_Д$ также называют *математическим ожиданием:*

Максимум плотности вероятности:

$$\varphi(x)_{\max} = \varphi(x_Д) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad (1.16)$$

с ростом σ уменьшается.

Так как площадь под кривой для любого значения σ в диапазоне $[-\infty; +\infty]$ равна 1, то увеличение σ приводит к «растягиванию» кривой вдоль оси *x*, т.е. чем больше рассеяние (или среднее квадратическое отклонение случайной величины), тем менее точным является измерение.

Итак, чтобы указать величину случайной погрешности измерения, необходимо найти вероятность нахождения результата эксперимента в диапазоне $[x_Д-\Delta x,\ x_Д+\Delta x]$.

Эта вероятность называется *доверительной вероятностью*, а интервал значений измеряемой величины $[x_Д-\Delta x,\ x_Д+\Delta x]$ носит название *доверительного интервала*.

Смысл этого понятия состоит в следующем: доверительный интервал – это такой диапазон, в который с заданной вероятностью должно попасть среднее арифметическое значение измеряемой величины при бесконечном увеличении объёма выборки. Ширина этого интервала для результата измерения определяется степенью разброса значений, измеряемого средним квадратическим отклонением, и степенью значимости допустимого выхода за эти пределы, которую задаёт исследователь.

Чем меньше допустимая вероятность погрешности, выходящей за пределы доверительного интервала, тем больше сам интервал.

Таким образом, оценка случайной погрешности требует задания двух величин – доверительной вероятности и доверительного интервала.

Для нахождения доверительной вероятности воспользуемся законом нормального распределения и соотношением (1.14):

$$P\left(x-\Delta x, x+\Delta x\right)=\int_{x_Д-\Delta x}^{x_Д+\Delta x}\varphi\left(x\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_Д-\Delta x}^{x_Д+\Delta x}e^{\frac{-\left(x-x_Д\right)^2}{2\sigma^2}}dx\cdot$$

Этот интеграл обычно преобразуют с помощью подстановки:

$$U_p=\frac{x-x_Д}{\sigma},\quad \text{или}\quad dU_p=\frac{dx}{\sigma}.$$

Тогда доверительная вероятность:

$$P\left(x-\Delta x, x+\Delta x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-\Delta x}{\sigma}}^{\frac{+\Delta x}{\sigma}}e^{-U_p^2/2}\sigma dU_p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-\Delta x}{\sigma}}^{\frac{+\Delta x}{\sigma}}e^{-U_p^2/2}\times dU_p,$$

где пределы интегрирования получены подстановкой:

$$\pm U_p=\frac{x-x_Д}{\sigma}=\frac{x_Д\pm\Delta x-x_Д}{\sigma}=\pm\frac{\Delta x}{\sigma}.$$

Найденный интеграл зависит лишь от величины $U_p=\Delta x/\sigma$, называемой *квантилем нормального распределения*.

Интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-U_p}^{+U_p}e^{-U_p^2/2}dU_p=\Theta\left(U_p\right) \tag{1.17}$$

называют *интегралом вероятности*, или функцией Лапласа. Он представляется в виде таблиц, так как не выражается аналитически.

Приведем некоторые распространенные значения интеграла вероятности (доверительной вероятности) для доверительного интервала, выраженного в долях среднего квадратического отклонения, которые полезно запомнить:

$$\Delta x=\sigma,\quad U_p=1,\quad \Theta\left(1\right)=0{,}68;$$
$$\Delta x=2\sigma,\quad U_p=2,\quad \Theta\left(2\right)=0{,}95;$$
$$\Delta x=3\sigma,\quad U_p=3,\quad \Theta\left(3\right)=0{,}997.$$

Это означает, что для $U_p = 3$ из, например, 1000 измерений 997 уложатся в интервал $\left[x_Д - 3\sigma; x_Д + 3\sigma\right]$ и лишь в трех случаях можно ожидать больших случайных погрешностей.

Таким образом, с высокой достоверностью можно сказать, что погрешность измерения величины X не превышает 3σ.

Перед испытаниями исследователем принимается решение об уровне надежности измерений, мерой которой является доверительная вероятность P.

Чем более ответственным является испытание, тем больше назначается доверительная вероятность. Если при этом доверительный интервал, т.е. погрешность измерений, получается слишком большим, то принимают меры по увеличению точности измерений увеличением числа измерений, применением более точных СИ и т.п.

Рассмотренные выше особенности определения погрешностей справедливы, строго говоря, лишь при бесконечно большом числе измерений. Но на практике по техническим или экономическим причинам часто приходится иметь дело с весьма ограниченным их числом. Кроме того, до проведения измерений значение среднего квадратического отклонения σ обычно неизвестно.

В этом случае величина среднего квадратического отклонения отдельного измерения может быть определена лишь приближенно.

Величину S, определяемую соотношением:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\left(X_i - \tilde{X}\right)^2}{N-1}}, \tag{1.18}$$

называют оценкой среднего квадратического отклонения отдельного измерения. Величина S является мерой неопределённости возможной случайной погрешности измерения физической величины.

Очевидно, что при $N \to \infty$ величина $S \to \sigma$ и среднее арифметическое $\tilde{X} \to x_Д$. Из-за ограничения числа измерений $(N < \infty)$ средне-арифметическое значение $\tilde{X}$ при N измерениях всегда определяется с некоторой погрешностью.

Поэтому оценка среднего квадратического отклонения результата измерений:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \tilde{X})^2}{N(N-1)}} \tag{1.19}$$

всегда меньше по величине, чем S, поскольку она характеризует неопределённость среднего арифметического значения. С увеличением числа измерений, когда случайная погрешность является определяющей, среднее квадратическое отклонение среднего арифметического значения уменьшается, что часто используют для повышения точности измерений.

В практической работе важно строго разграничивать области применения среднего квадратического отклонения (погрешности) отдельного измерения S и среднего арифметического значения результата измерений $S_{\bar{x}}$. Последнее применяется тогда, когда необходимо оценить погрешность величины, которая получена в результате *всех* проведенных измерений. Если же необходимо охарактеризовать точность применяемого способа измерений, следует указать погрешность его отдельного измерения S. Зная её, можно выбрать нужное число измерений, чтобы, пользуясь формулой (1.19), получить допустимую случайную погрешность окончательного результата измерений.

При ограниченном числе измерений (N<20) связь между доверительной вероятностью и доверительным интервалом определяется не только средним квадратическим отклонением, что следует из выражения (1.17), но и зависит от числа измерений, т.к. сама величина S (см. зависимость (1.18)) имеет погрешность, зависящую от N.

Соответствующую связь получил Стьюдент, пользуясь аппаратом теории вероятностей, в виде:

$$t(P,N) = \frac{\Delta x}{S_x} = \frac{\Delta x}{S}\sqrt{N}\,. \tag{1.20}$$

Величина $t(P,N)$, называемая *квантилем (коэффициентом) Стьюдента*, приводится в соответствующих таблицах [5] для пяти уровней надежности (доверительной вероятности): P = 0,9; 0,95; 0,98; 0,99; 0,999.

Это выражение позволяет при заданном уровне надежности P для N измерений оценить доверительный интервал Δx, рассчитав предварительно по (1.18) среднее квадратическое отклонение. Возможно решение и обратной задачи.

В заключение раздела рассмотрим некоторые особенности выявления **промахов**, которые, как отмечалось, являются результатом грубой ошибки экспериментатора или нарушения основных условий измерения. Промах нарушает закономерные отклонения случайной величины от математического ожидания $x_д$, следовательно, вероятность его появления ничтожно мала. Признаком промаха является резкое отличие результата измерения по величине от остальных данных.

На практике обычно отбраковывают все результаты, погрешность которых превышает 3σ. Однако при большом числе измерений вероятность появления погрешностей, превышающих 3σ, достаточно велика.

Существуют различные способы, связывающие вероятность появления промаха с числом измерений.

Одним из распространённых является способ с использованием критерия Шовена. Для этого вычисляют отклонение «подозреваемого» результата X^* от наиболее вероятного (среднего арифметического) среднего квадратического отклонения (обычно в долях) и сравнивают полученную величину с критерием Шовена.

Если:

$$\left|\frac{X^* - X}{S}\right| > \psi(N),$$

где $\psi(N)$ – критерий Шовена, вычисленный для ряда значений N, то результат считается промахом.

Это значит, что вероятность появления такого результата очень мала при данном числе измерений и его следует отбросить, а само измерение повторить, если это возможно.

Некоторые другие способы исключения промахов и соответствующие справочные материалы приведены в [2,3,5].

2 ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1.1 Порядок обработки результатов

Рассмотрим порядок обработки результатов прямых измерений величины X, выполненных N раз в одинаковых условиях.

В общем случае при статистической обработке результатов измерений следует выполнить последовательно следующие операции [5,6]:

1) Исключить из результатов измерений промахи и известные систематические погрешности введением поправок.

2) Найти среднее арифметическое значение измерений:

$$\tilde{X} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_i \,.$$

3) Найти абсолютные погрешности измерений $\Delta_i = X_i - \tilde{X}$. Проверить, выполняется ли закон нормального распределения погрешностей, пользуясь упрощенной проверкой: величина $\sum_{1}^{N} \Delta_i$ должна быть близка к нулю.

Если распределение описывается другими законами и имеет несимметричную форму, то следует провести преобразование измеренных значений так, чтобы их распределение стало симметричным и близким к закону нормального распределения (например – используя логарифмы, извлекая корни, возводя в степень и т.д.).

4) Определить среднее квадратическое отклонение отдельного измерения:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{N} \Delta_i^2}{N - 1}} \,.$$

5) В соответствии с заданной предварительно надежностью (для большинства технических измерений рекомендуется доверительная

вероятность P=0,95) по квантилю нормального распределения (при N>20) или по квантилю Стьюдента (при N<20), приведенным в соответствующих таблицах [5], найти доверительный интервал.

Например, при N<20 доверительный интервал равен:

$$\Delta x = t(P, N)\frac{S}{\sqrt{N}}$$

для нормального распределения $\Delta x = U_p S$.

Указанный порядок обработки экспериментальных данных имеет общий характер и не учитывает некоторые особенности определения доверительных интервалов неисключённой систематической погрешности измерения и суммарной погрешности результата измерений, а также условия возможности выполнения однократных измерений и обработки результатов неравноточных измерений. Эти вопросы рассматриваются ниже.

2.1.2 Доверительный интервал неисключённой систематической погрешности результата измерения

В подразделе 1.8 отмечалось, что в экспериментальной практике встречаются случаи, когда определить величину систематической погрешности и исключить её из результата измерения с помощью поправок в принципе невозможно, такие систематические погрешности называются неисключёнными.

При постановке эксперимента их следует свести к величине, не превышающей погрешностей средств измерений, или предусмотреть в методике измерения определение границ (интервала) неисключённых составляющих. Приведём основные рекомендации для определения этих границ, используемые на практике.

При суммировании неисключённых систематических погрешностей они рассматриваются как случайные величины с равномерным распределением, если нет других данных о виде распределения.

Доверительный интервал неисключенной систематической погрешности результата измерения (функция Лапласа) Θ согласно [5] вычисляется путем построения композиции неисключённых систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками, по формуле:

$$\Theta = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Theta_j^2}\ ,$$

где Θ_j – граница j-ой неисключенной систематической погрешности;

k – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью;

m – число суммируемых погрешностей.

При доверительной вероятности P=0,95 коэффициент k принимают равным 1,1. Для доверительной вероятности P=0,99 величина коэффициента k зависит от числа суммируемых неисключенных систематических погрешностей и соотношения их величин.

Если число суммируемых неисключенных систематических погрешностей более четырех (m>4), то коэффициент k принимают равным 1,4.

Если число суммируемых погрешностей равно или менее четырех ($m \le 4$), то для определения величины коэффициента k рекомендуется использовать приводимый в [5] график зависимости:

$$k = f(m, l),$$

где m – число суммируемых погрешностей;

l – отношение величины, наиболее отличающейся от всех остальных составляющих, к величине, ближайшей к ней составляющей.

Согласно графику максимальная величина коэффициента k составляет 1,4 при m=3 или 4; 1,3 при m=2 в случае равенства двух составляющих, и уменьшается до 1…1,1 при l>8. Таким образом, при наличии составляющей, превышающей остальные по величине не менее чем в 8 раз, величину коэффициента k принимают равной единице.

Доверительную вероятность для вычисления границ (интервала) неисключенной систематической погрешности принимают той же, что и при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

2.1.3 Определение доверительного интервала погрешности результата измерения

Способ определения доверительного интервала погрешности результата измерения зависит от соотношения величины доверительного интервала неисключенной систематической погрешности Θ и оценки среднего квадратического отклонения результата измерения $S\left(\tilde{X}\right)$. Рекомендации [5] сводятся к следующему.

Если $\Theta/S\left(\tilde{X}\right) \leq 0{,}8$, то неисключённую систематическую погрешность не учитывают, т.е. в этом случае суммарная погрешность результата измерения определяется случайной погрешностью: $\Delta = \Delta x$.

Если $\Theta/S\left(\tilde{X}\right) > 8$, то суммарная погрешность результата измерения целиком определяется неисключёнными систематическими погрешностями, т.е. случайные погрешности вообще не учитываются. Такое положение часто имеет место при технических измерениях.

Если отношение $\Theta/S\left(\tilde{X}\right)$ лежит в диапазоне от 0,8 до 8, то при определении суммарной погрешности учитывают оба типа погрешностей. В этом случае расчет суммарной погрешности проводят в соответствии с п. 2.1.2 настоящего пособия.

В последнем случае допускается возможность определения доверительного интервала погрешности результата измерений по следующей эмпирической формуле, хорошо согласующейся с практикой:

$$\Delta = \frac{\Delta x + \Theta}{S\left(\tilde{X}\right) + \sqrt{\sum_{j=1}^{m} 1/3\left(\Theta_i^2\right)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\Theta_i^2\right)}{3} + S^2\left(\tilde{X}\right)}.$$

2.1.4 Определение условий достаточности однократных измерений

Иногда для определения физической величины достаточно провести её измерение всего один раз, что сокращает продолжительность, трудоёмкость и стоимость работ.

Однако однократные измерения являются достаточными для определения измеряемой величины с определенной погрешностью только в случае выполнения измерений по типовой методике, при разработке и метрологической аттестации которой были определены не только погрешности средства измерения, но и характеристики распределения самой измеряемой величины.

Проверка достаточности однократных измерений (например, для принятой доверительной вероятности P=0,95) при разработке методики выполнения измерений проводится в следующем порядке [6]:

1) Исходя из задачи измерений, устанавливается допустимое значение погрешности результата измерения $\Delta x_{доп}$.

2) Путем теоретического анализа характеристик измеряемой величины (или экспериментально) определяются среднее квадратическое отклонение результата наблюдения σ_x или его оценка S_x. Так как при однократных измерениях число наблюдений N=1, то согласно (1.18):

$$\sigma\left(\tilde{X}\right)=\sigma_x, \quad \text{или} \quad S\left(\tilde{X}\right)=S_x,$$

где $\tilde{X}$ – измеренное значение физической величины.

3) Определяется доверительный интервал случайной погрешности результата измерения при нормальной функции распределения:

$$\Delta x_j = 2\sigma_x \ , \qquad \text{или} \qquad \Delta x = 2S_x .$$

4) Определяется доверительный интервал неисключённой систематической погрешности результата измерения по формуле (см. подраздел 2.1.2):

$$\Theta = 1{,}1\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Theta_j} \ ,$$

где Θ_j – интервал j-й неисключённой систематической погрешности средств измерений, метода, а также погрешностей, вызванных другими источниками (всего m погрешностей).

Коэффициент k, зависящий от принятой доверительной вероятности P=0,95, в данном случае равен 1,1.

5) Определяется доверительный интервал погрешности результата измерения:

$$\Delta x = 1{,}1\sqrt{\Delta x_j^2+\Theta^2} \ .$$

6) Если $\Delta x \le \Delta x_{доп}$, то измерения с однократными наблюдениями возможны.

2.1.5 Проверка равноточности измерений и обработка результатов неравноточных измерений

Для уменьшения систематической погрешности в некоторых случаях используется способ разделения результатов измерения на серии, которые были получены для разных условий эксперимента (например, применением различных средств измерений для определения одной и той же физической величины).

В этом случае при обработке результатов измерения возникают две задачи: проверка равноточности этих серий и – в случае отрицательного вывода – обработка полученных неравноточных результатов.

Первая задача возникает тогда, когда априори неизвестны средние квадратические отклонения каждого результата, и они оцениваются по результатам измерений.

Для определения доверительных интервалов среднего квадратического отклонения результата измерения σ_x или дисперсии σ_x^2 следует воспользоваться тем, что некоторая случайная величина:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}, \tag{2.1}$$

где n – число измерений;

σ_x^2 – дисперсия измеряемой величины;

S_x^2 – оценка дисперсии,

имеет x_u – квадрат распределение с (n—1) степенями свободы.

В этом случае с вероятностью P выполняются следующие неравенства:

$$\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\frac{P}{2}}} \cdot S_x^2 \le \sigma_x^2 \le \frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1+\frac{P}{2}}} \cdot S_x^2,$$

где $\chi^2_{m,\beta}$ – процентная точка распределения типа x_u – квадрат.

Серии измерений считаются равноточными, если доверительные интервалы дисперсий в различных сериях измерений перекрываются.

Пример. Пусть в двух сериях измерений n_1=10 и n_2=12 получены следующие оценки дисперсии: S_1^2=0,26 и S_2^2=0,7.

Определим с вероятностью P=0,9 доверительные интервалы для дисперсии в каждой из серий.

Из таблицы процентных точек x_u – квадрат распределения имеем:

$$x^2 10-1, \quad 1+(0,9/2)=3,33,$$
$$x^2 10-1, \quad 1-(0,9/2)=16,92,$$
$$x^2 12-1, \quad 1+(0,9/2)=4,57,$$
$$x^2 12-1, \quad 1-(0,9/2)=19,68.$$

Тогда:

$$S_{1H}^2=(10-1)/16,92\cdot 0,26=0,14,$$
$$S_{1B}^2=(10-1)/3,33\cdot 0,26=0,84,$$
$$S_{1H}^2=(12-1)/19,68\cdot 0,7=0,39,$$
$$S_{1B}^2=(12-1)/4,57\cdot 0,7=1,68.$$

Как видим, доверительные интервалы перекрываются, поэтому с вероятностью P=0,9 можно считать, что эти серии измерений являются равноточными.

В случае неравноточных измерений оценка измеряемой величины определяется следующим образом:

$$\tilde{X}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(\tilde{X}_j/S_j^2\right)}{\sum_{j=1}^{N}1/S_j^2},$$

где $\tilde{X}_j$ и S_j – оценки измеряемой величины и среднего квадратического отклонения в каждой из N серий измерений.

Оценка среднего квадратического результата измеряемой величины определяется по формуле:

$$S=\sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}\left(1/S_j^2\right)}}.$$

Определение доверительных интервалов случайной, систематической неисключённой и суммарной погрешностей результата измерений проводится так же, как для равноточных измерений (п. 2.1.1).

2.2 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть косвенное измерение Y связано с m прямыми измерениями известной зависимостью:

$$Y = f\left(x_1, x_2 ..., x_m\right),$$

причем каждое из них приведено n раз.

Очевидно, что m погрешностей, например, первого измерения $\Delta x_{11}, \Delta x_{21} ..., \Delta x_{m1}$, вызовут определенную погрешность косвенного измерения ΔY_1. Обычно величины Δx_{ij} весьма малы, а прямые измерения x_i можно считать независимыми. Тогда связь прямых и косвенных погрешностей в первом измерении определяется известным выражением полного дифференциала функции нескольких переменных:

$$dY_1 = \frac{\partial Y}{\partial x_1} dx_{11} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} dx_{21} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_m} dx_{m1}.$$

Аналогичные выражения можно записать и для остальных n измерений:

$$dY_2 = \frac{\partial Y}{\partial x_1} dx_{12} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} dx_{22} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_m} dx_{m2};$$

$$dY_n = \frac{\partial Y}{\partial x_n} dx_{1n} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} dx_{2n} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_m} dx_{mn}.$$

Возведем эти выражения в квадрат, пренебрегая смешанными членами типа $dx_{ij} dx_{kl}$, и разделим их на $\left(n-1\right)$. Тогда в левой части уравнения получим квадрат среднего квадратического отклонения косвенного измерения, а в правой части, после простых преобразований, – соответствующие параметры прямых измерений:

$$S_Y^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2 S_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2 S_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_m}\right)^2 S_{x_m}^2 . \qquad (2.2)$$

Аналогичную связь можно получить и между другими параметрами точности прямых и косвенных измерений. Найдем, например, погрешность среднеарифметического значения, рассматривая его как косвенное, а $X_1, X_2, \ldots, X_N$ как прямые с одинаковым средним квадратичным отклонением S. Их связь определяется выражением (1.10):

$$\tilde{X} = \frac{X_1}{N} + \frac{X_2}{N} + \ldots + \frac{X_N}{N} .$$

Но $\dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial X_1} = \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial X_2} = \ldots = \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial X_N} = \dfrac{1}{N}$ и в соответствии с (2.2) получим:

$$S_{\bar{x}} = S / \sqrt{N} .$$

Выше это выражение приводилось без вывода.

Часто встречается случай, когда косвенное измерение представляет собой произведение или частное прямых измерений.

Например, при определении плотности вещества цилиндра:

$$\rho = 4m / \pi d^2 h . \qquad (2.3)$$

Найдем соответствующие производные:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 h}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8}{\pi d^3 h}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4m}{\pi d^2 h^2} .$$

Подставим их в (2.2) и разделим на (2.3):

$$\delta^2 \rho = \left(\frac{S_\rho}{\rho}\right)^2 = \delta^2 m + \left(2\delta d\right)^2 + \delta^2 h , \qquad (2.4)$$

где δm, δd, δh – относительные погрешности прямого измерения массы, диаметра и высоты цилиндра, соответственно.

Таким образом, в случае, если косвенное измерение представляет собой произведение или частное (или их комбинацию) прямых измерений, то при обработке результатов следует складывать квадраты не средних квадратических отклонений S^2, а относительных погрешностей δ^2, причем коэффициент перед относительной погрешностью равен показателю степени соответствующего прямого измерения (см. формулы (2.3 и 2.4)).

Более подробно порядок обработки результатов косвенных измерений рассмотрен в [6].

2.3 МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Завершив измерительный эксперимент, исследователь обычно имеет результаты в виде распечатки, протокола или таблицы с цифровыми данными, погрешности которых затем определяются по методикам, приведенным выше.

Дальнейшая обработка результатов эксперимента заключается в отыскании функциональной зависимости, связывающей измеряемые величины. Если измерения проводились в производственных целях, такие зависимости используются при анализе качества продукции для выработки соответствующих корректирующих действий; при выполнении научно-исследовательских работ связь между физическими величинами может быть необходима для дальнейшего теоретического исследования явления или процесса.

Если изобразить полученные экспериментальные точки в определенном масштабе (рис. 2.1), то задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо отыскать такую функцию $z = f(x)$, чтобы все экспериментальные точки оказались как можно ближе к кривой, графически отображающей эту функцию.

Задача существенно упрощается, если вид искомой зависимости известен априори.

Например – пусть из теоретических соображений связь $z = f(x)$, изображенная на рис. 2.1, будет прямо пропорциональной (рис. 2.2):

$$z = ax. \tag{2.5}$$

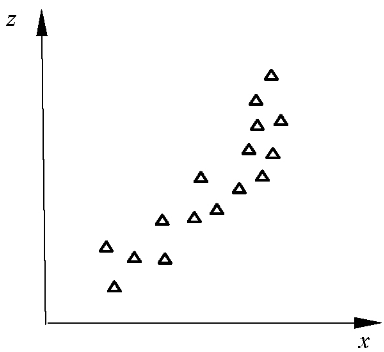

Рис. 2.1. Экспериментальные данные

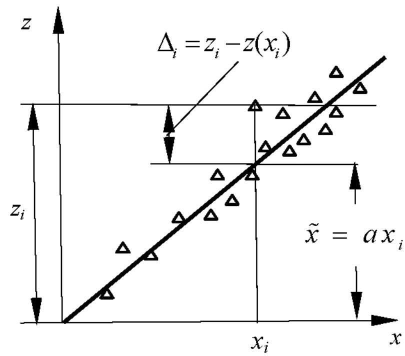

Рис. 2.2. Аппроксимация экспериментальных данных

Тогда решение задачи сводится к подбору значения коэффициента a в выражении (2.5), чтобы все величины типа:

$$\Delta_i = z_i - z\left(x_i\right), \tag{2.6}$$

были минимальными (рис. 2.2).

Здесь z_i, x_i – значения, полученные в результате эксперимента;

$z\left(x_i\right)$ – величина, полученная подстановкой x_i в формулу (2.5).

Если вид зависимости между исследуемыми величинами заранее неизвестен, то можно подобрать его, представляя результаты эксперимента в различных функциональных шкалах. В значительной степени решение этого вопроса зависит от интуиции исследователя, однако и здесь существуют некоторые выработанные практикой приемы (см. подраздел 2.4).

И, наконец, если не удалось подобрать достаточно простую функциональную зависимость между величинами, то результаты эксперимента всегда можно аппроксимировать полиномом (многочленом) более или менее высокой степени, коэффициенты которого могут быть найдены различными методами.

Наиболее полно задача аппроксимации экспериментальных данных решается методом *наименьших квадратов*.

Отклонения экспериментальных точек от аппроксимирующей функции $z = f(x)$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому величина суммы отклонений Δ_i, вообще говоря, не характеризует отклонения всех точек. Однако, если суммировать квадраты отклонений, то полученная величина определяет, насколько близки экспериментальные точки к кривой $z = f(x)$. Следовательно, для нахождения соответствующих коэффициентов искомой зависимости $z = f(x)$ нужно потребовать, чтобы сумма квадратов отклонений Δ_i была минимальной, т.е.:

$$\Sigma\left[z_i - z(x_i)\right]^2 = \min \tag{2.7}$$

Это и есть основное условие метода наименьших квадратов.

Рассмотрим применение этого метода на примере простейшей зависимости (2.5). В этом случае условие (2.7) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma\left(z_i - ax_i\right)^2 = 0,$$

или после дифференцирования:

$$\Sigma 2\left(z_i - ax_i\right)x_i = 0, \quad \text{откуда:} \quad a = \frac{\Sigma z_i x_i}{x_i^2}. \tag{2.8}$$

Поскольку число измерений конечно, то и коэффициент a определяется с некоторой погрешностью. Найдем её, представив $a = f(z_i)$ как результат косвенного измерения по ряду прямых z_i.

Используя (2.2), получим:

$$S_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial z_1}\right)^2 S_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z_2}\right)^2 S_{z_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial a}{\partial z_n}\right)^2 S_{z_n}^2.$$

Часто в практике встречается случай, когда

$$S_{z_1} = S_{z_2} = \ldots = S_{z_n} = S_z.$$

Такие измерения называются *равноточными*.

В этом случае среднее квадратическое отклонение S_a можно записать в виде:

$$S_a^2 = S_z^2 \Sigma \left(\frac{\partial a}{\partial z_1} \right)^2 .$$

Продифференцировав (2.8), и подставив результат в последнее выражение, получим:

$$S_a = \frac{S_z}{\sqrt{\Sigma x_i^2}} . \qquad (2.9)$$

Таким образом, чем больше число измерений, тем меньше погрешность аппроксимации. Аналогичным образом из условия (2.7) можно получить соответствующие формулы и для других функций.

Известно, что любая зависимость может достаточно точно аппроксимироваться многочленом соответствующего порядка.

Следует иметь в виду, что при обработке экспериментальных данных нет смысла чрезмерно повышать точность аппроксимации. Разумный предел, очевидно, соответствует ошибке эксперимента. На практике обычно ограничиваются многочленом четвертой степени:

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 . \qquad (2.10)$$

Используя условие (2.7) метода наименьших квадратов, получим:

$$\Sigma[\;]^2 = \min ,$$

где $[\;] = \left[z_i - A - Bx_i - Cx_i^2 - Dx_i^3 - Ex_i^4 \right]$.

Продифференцируем это выражение по коэффициентам:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} \Sigma [\;]^2 = 2 \Sigma [\;] = 0 ; \\ \frac{\partial}{\partial B} \Sigma [\;]^2 = 2 \Sigma [\;] x_i = 0 ; \\ \frac{\partial}{\partial C} \Sigma [\;]^2 = 2 \Sigma [\;] x_i^2 = 0 ; \\ \frac{\partial}{\partial D} \Sigma [\;]^2 = 2 \Sigma [\;] x_i^3 = 0 ; \\ \frac{\partial}{\partial E} \Sigma [\;]^2 = 2 \Sigma [\;] x_i^4 = 0 . \end{cases} \qquad (2.11)$$

Число уравнений данной системы соответствует числу искомых коэффициентов A, B, C, D, E.

Для решения приведём систему к каноническому виду:

$$\begin{cases} nA + B\Sigma x_i + C\Sigma x_i^2 + D\Sigma x_i^3 + E\Sigma x_i^4 = \Sigma z_i; \\ A\Sigma x_i + B\Sigma x_i^2 + C\Sigma x_i^3 + D\Sigma x_i^4 + E\Sigma x_i^5 = \Sigma z_i x_i; \\ A\Sigma x_i^2 + B\Sigma x_i^3 + C\Sigma x_i^4 + D\Sigma x_i^5 + E\Sigma x_i^6 = \Sigma z_i x_i^2; \\ A\Sigma x_i^3 + B\Sigma x_i^4 + C\Sigma x_i^5 + D\Sigma x_i^6 + E\Sigma x_i^7 = \Sigma z_i x_i^3; \\ A\Sigma x_i^4 + B\Sigma x_i^5 + C\Sigma x_i^6 + D\Sigma x_i^7 + E\Sigma x_i^8 = \Sigma z_i x_i^4. \end{cases}$$

Откуда:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma z_i & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \\ \Sigma z_i x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 \\ \Sigma z_i x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 \\ \Sigma z_i x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 & \Sigma x_i^7 \\ \Sigma z_i x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 & \Sigma x_i^7 & \Sigma x_i^8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 & \Sigma x_i^7 \\ \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 & \Sigma x_i^7 & \Sigma x_i^8 \end{vmatrix}}.$$

Аналогично находятся и остальные коэффициенты многочлена (2.10).

Из последней формулы видно, что нахождение коэффициентов полиномов сравнительно больших степеней сопровождается весьма громоздкими вычислениями, поэтому они обычно выполняются на компьютере.

2.4 СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Получив методом наименьших квадратов соотношение, аппроксимирующее с достаточной точностью данные эксперимента, можно оценить их разброс относительно найденной кривой по формуле (1.18):

$$S_z' = \sqrt{\frac{\Sigma\left[z - z\left(x_i\right)\right]^2}{n-1}}. \qquad (2.12)$$

Поскольку величина z получена в результате определённого количества измерений, она имеет некоторую погрешность S_z, методы определения которой рассматривались ранее.

Сопоставление погрешностей S_z' и S_z имеет принципиальное значение при анализе результатов эксперимента.

Если $S_z' < S_z$, то аппроксимирующая формула подобрана правильно, причём верно подобран не только сам вид формулы, а не её коэффициенты (они определены с минимальной погрешностью). Если этот вид получен теоретически, то результаты эксперимента подтверждают справедливость теории.

При $S_z' >> S_z$ экспериментальные данные не соответствуют теоретическим соображениям. Если эксперимент проведен корректно, и его результаты не искажены систематической погрешностью, то отклонение опытных данных от теории говорит о неверности теории или о новом явлении.

2.4.1 Анализ погрешностей эксперимента

Рассмотрим анализ погрешностей измерений на примере экспериментального определения удельных параметров жидкостного ракетного двигателя.

На рис. 2.3 представлена схема экспериментальной установки [7] для определения основной характеристики жидкостного ракетного двигателя – зависимости удельного импульса тяги от давления в камере.

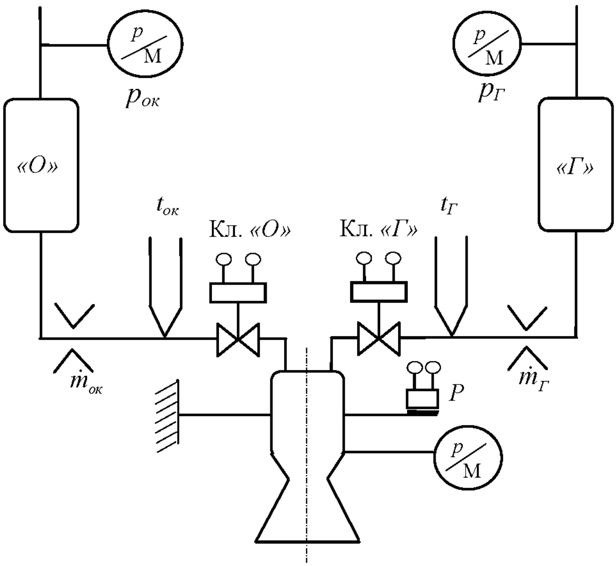

Рис. 2.3. Схема установки для определения параметров двигателя

Представим эту зависимость в общем виде:

$$I_y = f\left(p_k\right),$$

где $I_y = P / \dot{m}$ – удельный импульс тяги;

P – тяга;

$\dot{m}$ – секундный расход топлива;

$p_к$ – давление в камере.

Жидкие компоненты топлива (окислитель «*О*» и горючее «*Г*») поступают из баков под давлением после открытия электромагнитных клапанов (Кл. «*О*» и Кл. «*Г*»).

Расходы компонентов топлива определяются с помощью однотипных расходомерных устройств, использующих предварительно проградуированные диафрагмы (расходомерные шайбы) для местного ускорения потока компонента и создания за счет этого перепада давлений до и после диафрагмы.

Схематично такое устройство изображено на рис. 2.4. Стрелкой показано направление движения потока топлива.

Связь между массовым расходом компонента $\dot{m}$ в единицу времени и измеренным с помощью манометров перепадом давлений на диафрагме $\Delta=p_1—p_2$ устанавливается формулой, известной из гидравлики:

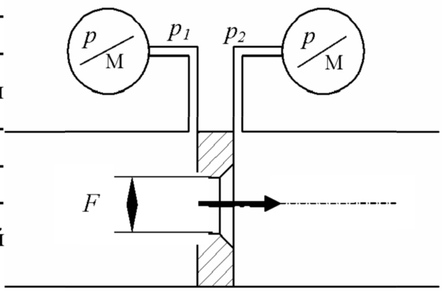

Рис. 2.4. Схема расходомера

$$\dot{m} = \mu F \sqrt{2\rho\Delta p}\,, \qquad (2.13)$$

где μ – коэффициент расхода;

F – площадь отверстия в диафрагме;

ρ – плотность данного компонента топлива.

Объединяя постоянные величины, формулу (2.13) можно представить в виде:

$$\dot{m} = c\sqrt{\rho\Delta p}\,, \qquad (2.14)$$

где коэффициент c имеет определённое значение для каждого конкретного расходомерного устройства, определяемое градуировкой с относительной погрешностью порядка 0,5%, т.е. δ_c =0.005.

В соответствии с (2.2) можно найти погрешности определения массовых расходов окислителя и горючего $\dot{m}_{ок}$ и $\dot{m}_Г$:

$$S_m^2 = \left(\frac{\partial\dot{m}}{\partial c}\right)^2 S_c^2 + \left(\frac{\partial\dot{m}}{\partial\rho}\right)^2 S_\rho^2 + \left(\frac{\partial\dot{m}}{\partial(\Delta p)}\right)^2 S_{\Delta p}^2\,.$$

Отсюда абсолютные средние квадратические отклонения после дифференцирования (2.10) равны:

$$S_m^2 = \rho\Delta p S_c^2 + \frac{1}{4}c^2\frac{\Delta p}{\rho}S_\rho^2 + \frac{1}{4}c^2\frac{\Delta\rho}{p}S_{\Delta p}^2\,.$$

Относительные погрешности равны:

$$\delta\dot{m} = S_m / \dot{m} = \sqrt{\delta_c^2 + \left(0,5\delta_\rho\right) + \left(0,5\delta_{\Delta p}\right)^2} \qquad (2.15)$$

где δ_c =0,005 (отмечено выше) – погрешность коэффициента c;

δ_ρ – погрешность определения плотности компонента;

$\delta_{\Delta p}$ – погрешность определения перепада давлений Δp.

Определим δ_ρ и $\delta_{\Delta p}$. Плотность жидких компонентов топлива на рассматриваемой установке непосредственно не измеряется, однако известно, что она является функцией температуры: $\rho = at + b$, откуда:

$$\delta_\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{S_t}{\rho}. \qquad (2.16)$$

Погрешность измерения $\Delta p = p_1 — p_2$ в соответствии с (1.22) определяется выражением:

$$S_{\Delta p}^2 = \left[\frac{\partial(\Delta p)}{\partial p_1}\right]^2 S_{p_1}^2 + \left[\frac{\partial(\Delta p)}{\partial p_2}\right]^2 S_{p_2}^2 = S_{p_1}^2 + S_{p_2}^2 \approx 2S_p^2,$$

или:
$$\delta_{\Delta p} = \frac{S_{\Delta p}}{\Delta p} = \sqrt{2}\frac{S_p}{\Delta p}, \qquad (2.17)$$

где S_t и S_p – средние квадратические отклонения измерения температуры и давления соответственно.

Из (2.16) и (2.17) следует, что величины δ_ρ и $\delta_{\Delta p}$ зависят от измеряемых значений величин ρ и Δp. Иногда, если разброс не слишком велик, оцениваются предельные относительные погрешности δ_ρ и $\delta_{\Delta p}$, для чего используются в соответствующих формулах минимальные значения ρ и Δp, встречающиеся в опытах.

Обычно обеспечивают приближенное равенство $\delta_{\dot{m}_г} \approx \delta_{\dot{m}_{ок}}$, тогда погрешность определения суммарного расхода топлива будет равна:

$$S_{\dot{m}}^2 = S_{\dot{m}_г}^2 + S_{\dot{m}_{ок}}^2.$$

Откуда: $\delta_{\dot m}^2=\dfrac{S_{\dot m}^2}{\dot m^2}=\dfrac{S_{\dot m_{г}}^2}{\dot m_{г}^2}+\dfrac{S_{\dot m_{ок}}^2}{\dot m_{ок}^2}=\left(\dfrac{\dot m_{г}}{\dot m}\right)^2\delta_{\dot m_{г}}^2+\left(\dfrac{\dot m_{ок}}{\dot m}\right)^2\delta_{\dot m_{ок}}^2$.

Несколько завышая погрешность (что вполне допустимо, т.к. идет в запас точности измерений), можно принять:

$$\delta_{\dot m}^2\approx\delta_{\dot m_{г}}^2\approx\delta_{\dot m_{ок}}^2 \text{ и } \delta_{\dot m}\approx\delta_{\dot m_{г}}\approx\delta_{\dot m_{ок}} . \qquad (2.18)$$

Давление в камере сгорания двигателя $p_к$ измеряется манометром, а тяга P – консольно закрепленной балкой с тензометрическим приёмником.

Сигналы с последнего усиливаются тензостанцией и записываются на осциллограмму (рис. 2.5), на которой регистрируются отметки времени через определенные равные промежутки.

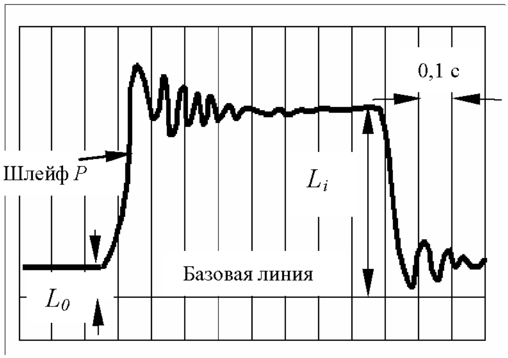

Рис. 2.5. Осциллограмма тяги

Методы определения относительных погрешностей δ_ρ и δ_p изложены в подразделах 1.6 и 2.1 данного пособия.

Таким образом, погрешность косвенного измерения удельного импульса тяги двигателя, используя соотношения (2.2, 2.15 и 2.18), будет определяться выражением:

$$\delta_{Iy}=\sqrt{\delta_p^2+\delta_{\dot m}^2}=\sqrt{\delta_p^2+\delta_c^2+\left(0,5\delta_\rho\right)^2+\left(0,5\delta_{\Delta p}\right)^2} . \qquad (2.19)$$

С помощью этого соотношения можно сформулировать требования к экспериментальной установке, определить ее конструктивные параметры и режим работы для получения заданной точности либо найти точность определения параметров на имеющейся конкретной установке.

2.4.2 Сопоставление экспериментальных зависимостей с теоретическими результатами

Сравним полученные в п.2.4.1 экспериментальные результаты с теоретическими представлениями.

При установлении экспериментальной зависимости $I_y = f(p_k)$ координаты каждой точки находятся с погрешностями δ_{Iy} и $\delta_{p_к}$. После получения достаточного количества точек I_y в необходимом диапазоне изменения $p_к$ появляется задача определения вида зависимости $I_y = f(p_k)$ по этим точкам.

Для рассматриваемой характеристики из теории двигателей известно, что

$$I_y = A - B / p_k \,. \tag{2.20}$$

Тогда задача сводится к отысканию коэффициентов A и B нелинейного уравнения (2.20). Допустим, что коэффициенты A и B тем или иным образом подобраны, тогда для каждого $p_к$ имеется расчётное значение функции $I_{y,i} = A - B / p_{к,i}$. Сопоставляя эти расчётные значения всякий раз с экспериментальными значениями, получим отклонение расчетной зависимости от экспериментальных точек:

$$\Delta_i = I_{y,i} - \left(A - B / p_{к,i}\right). \tag{2.21}$$

Используя метод наименьших квадратов, дающий наименьшее среднее квадратическое отклонение, коэффициенты A и B находятся из условия:

$$\Sigma\Delta_i^2 = \min \,,$$

которое, очевидно, выполняется при:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial A}\Sigma\Delta_i^2 = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial B}\Sigma\Delta_i^2 = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Дифференцированием (2.21) и решением системы (2.22) получим значения искомых коэффициентов:

$$A = \frac{\sum I_{y,i} \sum 1/p_{k,i}^2 - \sum 1/p_k \sum I_{y,i}/p_{k,i}}{n\sum 1/p_{k,i}^2 - \left(\sum 1/p_{k,i}\right)^2}; \quad B = \frac{nA - \sum I_{y,i}}{\sum 1/p_{k,i}},$$

где n – число измерений.

Найденные коэффициенты A и B дают минимальный среднеквадратический разброс экспериментальных точек относительно аппроксимирующей зависимости (2.20):

$$\delta'_{Iy} = \sqrt{\frac{\sum \left(\Delta_i / I_{y,i}\right)^2}{n-1}}.$$

Если $\delta'_{Iy} < \delta_{Iy}$ (последняя вычисляется по формуле (2.19) для каждого измерения), то полученная зависимость достаточно точно описывает поле экспериментальных точек, что подтверждает правомерность используемой теории.

При $\delta'_{Iy} > \delta_{Iy}$ отклонение экспериментальных данных от существующей теории не может быть объяснено только погрешностью проведения эксперимента. В этом случае, очевидно, имеются физические причины, влияющие на рабочий процесс двигателя и неучтенные уравнением (2.20). Такими факторами могут быть, например, отрыв потока от стенок камеры двигателя, неполное сгорание топлива из-за неравномерности соотношения компонентов и другие.

2.5 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

2.5.1 Формы представления результатов

Любое измерение считается законченным, когда результаты наблюдений не только статистически обработаны, но и материал представлен надлежащим образом.

Принятые на практике формы представления результатов измерений показаны на рис. 2.6.

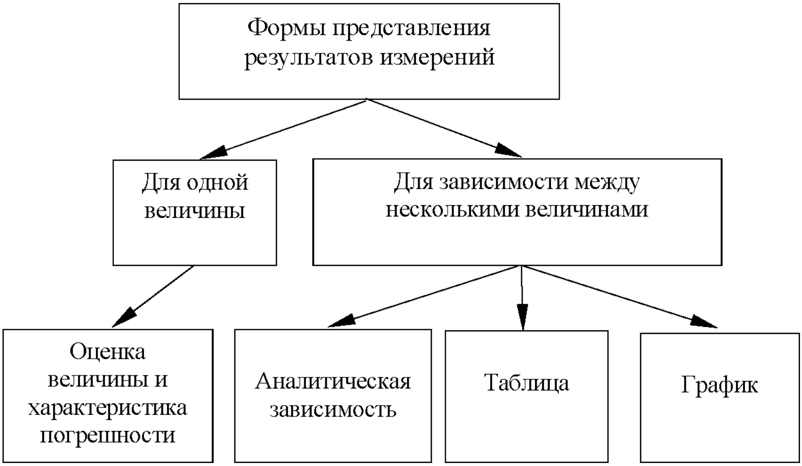

Рис. 2.6. Формы представления результатов измерений

В зависимости от измеряемой физической величины результат измерений представляется именованным или неименованным числом. Совместно с результатом измерений должны быть приведены характеристики его погрешностей или их статистические оценки.

Нормативными документами [8] определены следующие группы характеристик погрешностей измерений:

– нормы характеристик погрешностей измерений (нормы погрешностей измерений), задаваемые в качестве требуемых или допускаемых;

– приписанные характеристики погрешностей измерений – приписываемые совокупности измерений, выполняемых по определенной (стандартизованной или аттестованной) методике;

– статистические оценки характеристик погрешностей измерений (статистические оценки погрешностей измерений) – отражающие близость отдельного экспериментально полученного результата измерения к истинному значению измеряемой величины.

При массовых технических измерениях, выполняемых в процессах разработки, испытаний, контроля и эксплуатации образцов в машиностроении применяются, в основном, нормы характеристик погрешностей измерений, а также приписанные характеристики погрешностей измерений.

При измерениях, выполняемых при проведении научных исследований и метрологических работ (определение физических констант, свойств образцов, аттестация средств измерений и т.п.), обычно применяются статистические оценки погрешности измерений.

Основные формы записи результата измерений:

$\tilde{X}$, σ – оценка результата и характеристика, или статистическая оценка среднего квадратического отклонения результата измерений;

$\tilde{X}$; Δ_l; Δ_h; P – оценка результата и характеристика, или статистическая оценка нижней и верхней границ интервала, в котором измеряемая величина находится с вероятностью P;

$\tilde{X} \pm \Delta$; P – то же, в случае симметричного доверительного интервала.

Если результат измерений или определенная группа результатов измерений получены по стандартной или аттестованной методике выполнения измерений, то вместо характеристик погрешности измерений их допускается сопровождать ссылкой на документ (аттестат), удостоверяющий характеристики погрешностей, получаемых при использовании данной методики, и условия применимости этой методики.

Если результат измерений получен по методике, когда характеристики погрешности измерений оценивались в процессе самих измерений или непосредственно перед ними, то он должен сопровождаться статистическими оценками характеристик погрешности измерений.

Совместно с результатом измерений, при необходимости, приводятся дополнительные данные и условия проведения измерений.

Наименования разряда числовых значений результатов измерений должны быть такими же, как наименования разряда числовых значений среднего квадратического отклонения абсолютной погрешности измерений или значений интервалов, в которых находится абсолютная погрешность измерения (или статистических оценок этих характеристик погрешности).

Представление результатов эксперимента в аналитическом виде используется для теоретического анализа исследуемого явления или процесса.

Результаты эксперимента, оформленные в виде таблиц, обычно используются при необходимости дальнейшего их анализа, поскольку такое представление удобно для компьютерной обработки цифровых данных.

Наиболее наглядным является представление результатов в графическом виде.

2.5.2 Представление экспериментальных результатов в графическом виде

Важную роль при анализе результатов эксперимента и особенно при подборе аппроксимирующих формул играет выбор масштаба шкал для графика. На практике используются как равномерные, так и неравномерные (функциональные) шкалы или сетки.

Равномерной называется шкала, на всем протяжении которой расстояния между двумя соседними делениями, соответствующими изменению переменной на одну и ту же величину, равны.

При графическом изображении функции в прямоугольных координатах масштабы равномерных шкал по осям координат обычно принимаются равными. Если вследствие значительной разницы в пределах изменения переменных или ограниченности размеров чертежа такой возможности нет, то масштабы по осям выбираются так, чтобы график получился компактным, а построенные на нем линии – не очень крутыми или пологими. В противном случае точность отсчета значительно уменьшается.

Заметим, что применение различных масштабов даже равномерных шкал искажает вид кривой. Это особенно важно при подборе аппроксимирующих формул.

Например, на рис. 2.7 а изображена окружность $x^2+ y^2=1$ при одинаковом масштабе шкал, а на рисунке 2.7 б та же окружность, но при увеличении цены деления по оси ординат в два раза.

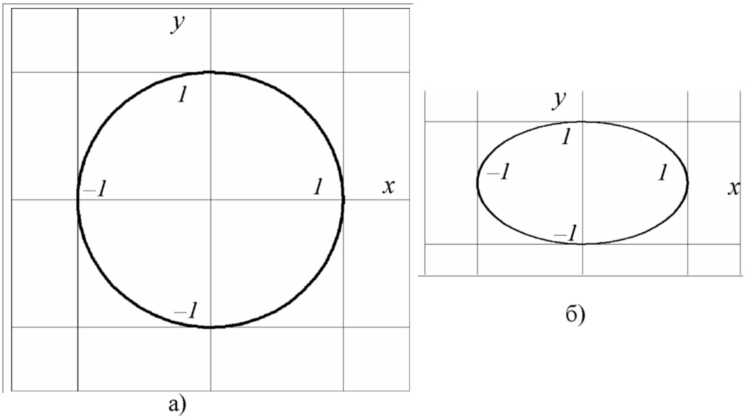

Рис. 2.7. Изображение окружности $x^2 + y^2 = 1$
в равномерном (а) и неравномерном (б) масштабах

При подборе аппроксимирующих формул часто используются *неравномерные* шкалы, на всем протяжении которых расстояния между двумя делениями, соответствующими изменению переменной на одну и ту же величину, не равны, а изменяются по определенному математическому закону.

Примерами наиболее часто применяемых неравномерных шкал являются: логарифмическая шкала, шкалы квадратов или кубов чисел, шкала корней квадратных из чисел, шкала обратных чисел. Неравномерная шкала может быть построена для любой функции одной независимой переменной.

Построение графиков с применением неравномерных шкал представляет собой замену переменных в заданной функции.

Если построить, например, функцию $y=2x^2$ в прямоугольных координатах с равномерными шкалами по осям, то получится парабола (рисунок 2.8 а).

Прологарифмировав эту функцию, получим:

$$\lg y = 2\lg x + \lg 2 = 2\lg x + 0{,}3\,.$$

Если теперь по оси ординат отложить $lg\ y$, а по оси абсцисс $lg\ x$ (обе шкалы равномерные), то получится прямая линия (рис. 2.8 б).

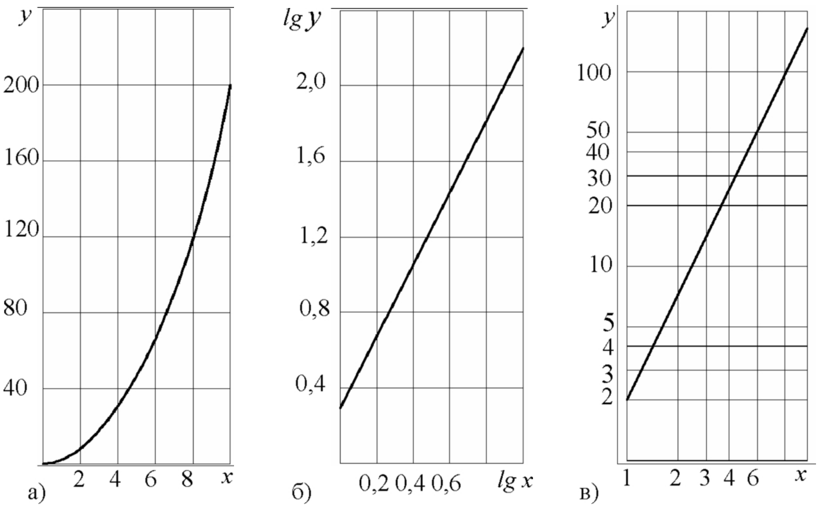

Рис. 2.8. Графики уравнения $y=2x^2$ в различных шкалах:
а) в равномерных шкалах; б) в логарифмических шкалах;
в) в логарифмических шкалах с заменой переменных

Таким образом, путем замены переменных x и y на lgx и lgy удается параболу превратить в прямую. Однако такое построение довольно сложно, так как требует вычисления логарифмов переменных x и y для всех точек. Упростить эту операцию возможно заменой на осях координат числовых значений $lg\,x$ и $lg\,y$ на значения переменных x и y, отставив само построение неизменным (рис. 2.8 в).

Например, вместо $lgx=1$ запишем $x=10^1=10$, а вместо $lgy=2$ запишем $y-10^2=100$ и т.д. Таким способом получается логарифмическая шкала, в которой парабола выглядит прямой.

Аналогичную замену можно провести и для других случаев.

Например, если можно ожидать, что результаты эксперимента описываются экспонентой вида:

$$y = ne^{mx},$$

то следует представить опытные данные с помощью полулогарифмической шкалы. Действительно, если прологарифмировать последнее выражение, то получим:

$$\lg y = \left(m \lg e\right) x + \lg n,$$

или, введя обозначения $m\lg e = A$ и $\lg n = B$:

$$\lg y = Ax + B.$$

Таким образом, если по оси абсцисс использовать равномерную шкалу, а по оси ординат – логарифмическую, то экспериментальные данные в рассматриваемом примере должны лечь па прямую. Найдя методом наименьших квадратов коэффициенты A и B, нетрудно определить величины n и m.

Применяя различные неравномерные (функциональные) шкалы при построении графиков по опытным данным, в некоторых случаях оказывается возможным «выпрямить» кривые, которые были получены при представлении этих данных на графиках с равномерными шкалами. В этом случае определение вида искомой формулы не представляет затруднений, она представляет собой уравнение прямой, но с учетом замены переменных. Если спрямления кривых получить не удалось, то используется метод подбора различных видов формул на основании характера кривых, полученных при построении опытных данных с применением по осям координат разных шкал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. РМГ 29-99 Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения.

2. Зайдель, А.Н. Ошибки измерений физических величин [Текст] / А.Н. Зайдель. – Л.: Наука, 1974. -108 с.

3. Долинский, Е.Ф. Обработка результатов измерений [Текст] / Е.Ф. Долинский. – М.: Изд-во стандартов, 1973. -192 с.

4. Преображенский, В.П. Теплотехнические измерения и приборы [Текст] / В.П. Преображенский. – М.: Энергия, 1978. – 703 с.

5. ГОСТ 8.207-76 Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.

6. СТО СГАУ 02068410–009–2007 Обработка и оформление результатов измерений.

7. Испытания жидкостных ракетных двигателей [Текст]/ [А.Е. Жуковский, и др.] – М.: Машиностроение, 1981. – 199 с.

8. МИ 1317-2004 Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.

Учебное издание

Первышин Александр Николаевич
Дружин Алексей Николаевич

ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
И ОБРАБОТКА ИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Учебное пособие

Редактор И.И. Спиридонова
Компьютерная довёрстка И.И. Спиридонова

Подписано в печать 18.02.2010 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4,0.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-8/2010.

Самарский государственный аэрокосмический университет
443086 г. Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета
443086 г. Самара, Московское шоссе, 34.