

Министерство образования Российской Федерации
Самарский Государственный Аэрокосмический Университет
имени академика С.П. Королева

В.В. Дмитриев

Формирование динамических
свойств упругих конструкций

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	
2. Блок-схема формирования динамических свойств упругих конструкций.....	
3. Уравнения колебаний упругой балки. Уравнения форм и частот.....	
4. Определение собственных форм и частот упругих колебаний балки методом начальных параметров	
4.1. Изгибные колебания	
4.2. Продольные и крутильные колебания	
4.3. Изгибно-продольные и изгибно-крутильные колебания	
4.4. Вычисление приведенных масс	
5. Расчет параметров упругих колебаний балки	
6. Алгоритм расчета оптимального закона распределения жесткости в случае изгибных колебаний балки	
7. Алгоритм расчета оптимального закона распределения жесткости в случае крутильных или продольных колебаний балки.....	
8. Формирование законов распределений жесткости балки в случае изгибно-продольных или изгибно-крутильных колебаний	
9. Приложения	
Приложение А	
Формулы для вычисления жесткости, погонной массы и моментов инерции в сечениях балки	
Приложение Б	
Уравнения движения упругой балки в случае приложения распределенной системы внешних сил и моментов	
Приложение С	
Задание коэффициента демпфирования	
Список литературы	

1 Введение

На современном этапе развития техники, характеризующимся стремлением к созданию наиболее экономичной, и наименее материалоемкой продукции, достаточно часто возникают проблемы, связанные с колебаниями упругой конструкции. Недостаточная проработанность вопросов по параметрам упругих колебаний конструкции на стадии проектирования приводит к тому, что в период отработки и сдачи в эксплуатацию возникает необходимость дополнительных изменений в конструкции, приводящих к увеличению времени разработки или, к изменению основных характеристик продукции, снижающих её потребительские свойства.

В тоже время, развитие вычислительной техники позволяет проводить моделирование многих достаточно сложных механических процессов с целью выявления основных динамических свойств, удовлетворяющих или не удовлетворяющих заданным требованиям по тем или иным параметрам. При анализе упругих конструкций наиболее часто возникают проблемы, связанные с резонансными явлениями, уровнем ускорений или амплитуд колебаний на отдельных элементах конструкции или необходимостью ограничений упругих перемещений при данной системе внешних сил.

В этой связи актуальными задачами являются задачи анализа колебаний упругих конструкций и задачи синтеза параметров этих конструкций, соответствующих наиболее ранним этапам проектирования. Вопрос создания требуемых динамических свойств, в принципе, сводится к выбору или формированию распределений жесткости и массы по упругой конструкции, при которых данная упругая система имеет требуемые собственные частоты или формы колебаний отдельного тона (моды колебаний) или ряда тонов. Ниже рассматриваются задачи расчета параметров упругих колебаний прямолинейных балок и формирования требуемых собственных частот и форм такого класса балок с неоднородным распределением жёсткости и массы, а также балок, продольная ось которых не прямолинейна. Данное пособие предназначено для выполнения расчетных работ по курсу «Динамика упругого тела», может быть использовано при дипломном проектировании и при решении прикладных инженерных задач, связанных с динамикой упругих конструкций.

2 Блок-схема формирования динамических свойств

При проектировании конструкции с требуемыми динамическими свойствами требуется выполнить ряд последовательных операций. На рисунке 1 представлена укрупненная блок-схема, отражающая основные операции и этапы такого процесса.

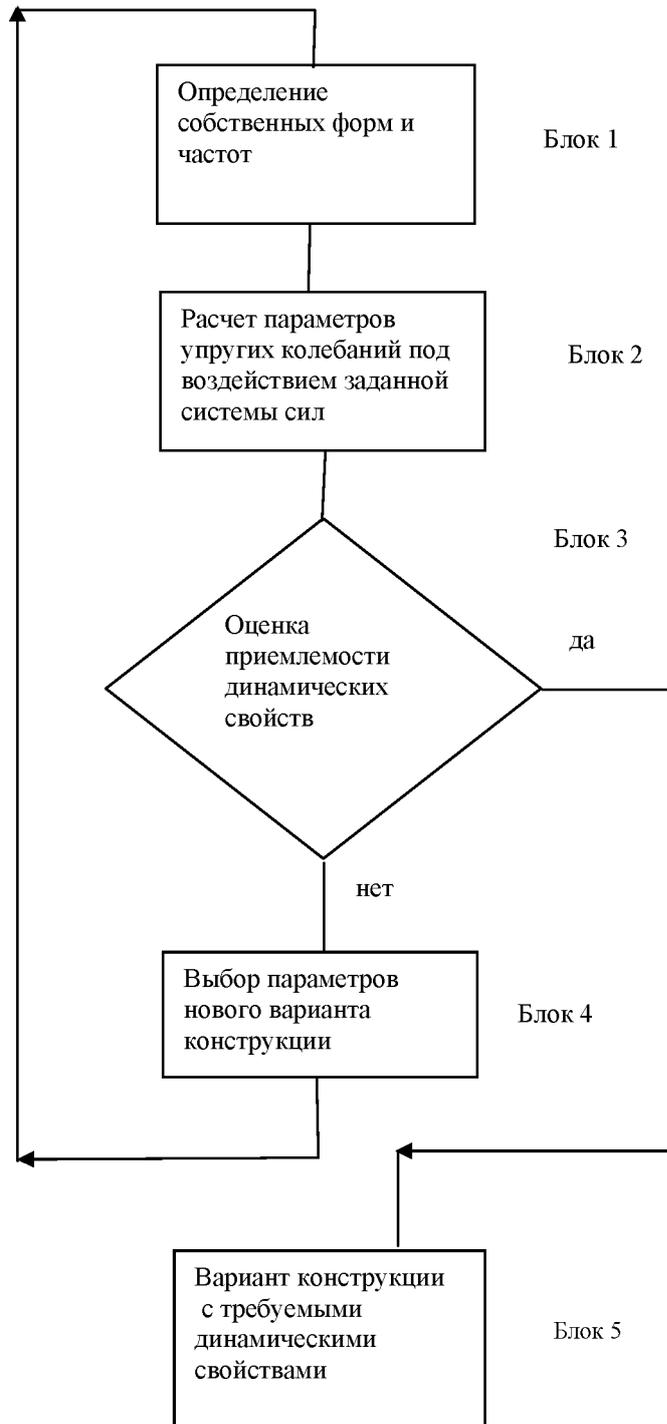


Рисунок 1- Блок-схема процесса формирования требуемых динамических свойств конструкции.

Необходимо отметить, что этапу анализа динамических свойств упругой конструкции практически всегда предшествует появление некоторого предварительного варианта этой конструкции, полученного в результате предыдущих этапов проектирования. В данном варианте конструкции нашли отражение все основные решения по выбору конструктивно-компоновочных параметров, определяющих первоначальное распределение жесткостных и массовых характеристик. В частности, если в качестве расчетной модели принята балка, то это будут: длина балки, площадь поперечных сечений, материал, распределение масс в силовой части конструкции, граничные условия и система внешних нагрузок в виде распределений пассивных масс, сил и моментов.

Рассмотрим содержание работ по отдельным блокам процесса формирования динамических свойств.

В блоке 1, с использованием, определенных для первоначального варианта распределенных масс и жесткостей, решается задача по определению собственных частот ω_i и собственных форм $f_i(x)$ для изгибных, $u(x)$ для продольных и $\varphi(x)$ для крутильных колебаний балки, характеризующих распределение амплитуд упругих колебаний по длине балки.

Кроме этого в процессе решения данной задачи находятся:

$$f_i'(x) = \frac{df_i(x)}{dx} \quad \text{– производная формы изгибных колебаний;}$$

$$M_i(x) = EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \quad \text{– функция, характеризующая распределение изгибающего момента;}$$

$$Q_i(x) = \frac{dM_i(x)}{dx} \quad \text{– функция, характеризующая распределение перерезывающей силы;}$$

$$M_{кри}(x) = GJ_p(x) \frac{df_i(x)}{dx} \quad \text{– функция, характеризующая распределение крутящего момента;}$$

$$N_i(x) = EF(x) \frac{df_i(x)}{dx} \quad \text{– функция, характеризующая распределение продольной силы.}$$

Здесь

$x \in [0, l]$, l – длина балки;

E – модуль упругости материала силовой части конструкции на растяжение (сжатие);

- G - модуль упругости материала на кручение ;
- $J(x)$ - момент инерции сечения конструкции балки относительно поперечной оси, проходящей через нейтральную ось сечения;
- $J_p(x)$ - полярный момент инерции сечения балки относительно продольной оси;
- $F(x)$ - площадь поперечного сечения балки.

Данные константы и функции используются при анализе работы конструкции и оценке ее динамических свойств.

Количество определяемых собственных частот ω_i , где i -номер тона (или моды) колебаний, и соответствующих им собственных форм колебаний зависит от рассматриваемого диапазона частот в конкретном исследовании. Для балок это обычно находится в пределах первых пяти тонов.

В случае если первоначальный вариант конструкции балки представлен только геометрическими характеристиками и материалом силовой части конструкции необходимо вычислить соответствующие этому варианту распределения:

- $m(x)$ - погонной массы, $кг/м$;
- $j_p(x)$ - погонного полярного момента инерции массы относительно продольной оси, $кгм^2$;
- $EJ(x)$ - изгибной жесткости, $Нм^2$;
- $EF(x)$ - продольной жесткости, $Н$;
- $GJ_p(x)$ - крутильной жесткости, $Нм^2$.

Примечания:

1. Формулы для вычисления массовых и жесткостных характеристик различного типа сечений балок приведены в Приложении А.
2. Методика определения собственных частот и форм упругих колебаний балки приведена в разделе 4.

В блоке 2, с учетом известных собственных частот и форм колебаний, составляется система дифференциальных уравнений движения упругой балки для выбранного количества тонов i и заданного распределения внешних сил P_k и моментов M_t , которая, например для изгибных колебаний, записывается в следующем виде (см. приложение Б) и [1]:

$$M_{npi}(\ddot{q} + n\dot{q} + \omega^2 q) = \sum P_k f(x) + \sum M_t f'(x) \quad (2.1)$$

где

- k - число внешних сил;
- t - число внешних моментов;
- ω_i – собственная частота i -го тона колебаний балки;
- q_i - обобщенная координата, характеризующая колебания балки с $f_i(x)$ формой;

M_{npi} - приведенная масса для i -го тона колебаний

$$M_{npi} = \int_0^l m(x) f_i^2(x) dx;$$

n_i - коэффициент демпфирования, характеризующий рассеяние механической энергии колебаний;

$f_i(x_p)$ - значение формы i -го тона колебаний в месте приложения k -ой силы;

$f_i'(x)$ - значение производной от формы i -го тона колебаний в месте приложения t -го момента.

После составления системы уравнений находится её решение. В зависимости от характера приложения внешних сил и моментов и законов изменения их во времени возможны разные методы определения параметров колебаний упругой конструкции. В частности, универсальным методом является метод численного интегрирования (см. раздел 6) по каждой внешней силе и каждому внешнему моменту с последующим суммированием всех составляющих. В некоторых частных случаях приложения нагрузок (см. раздел 6) возможно нахождение аналитических решений, которые при наличии нескольких внешних сил, действующих одновременно также должны суммироваться.

При действии внешних сил, изменяющихся по гармоническому закону, для оценки резонансных амплитуд и фаз колебаний существуют конечные формулы (см. также раздел 6). Необходимо отметить, что в случае резонансных режимов движения упругой конструкции все особенности поведения конструкции обусловлены степенью близости частот вынуждающей силы и собственных частот упругой конструкции, а также уровнем рассеяния энергии упругих колебаний. Для упругих конструкций на стадии первоначальных проектных работ, в расчетах и при формировании основных параметров конструкции в большинстве случаев применяется гипотеза вязкого трения, когда учет демпфирования осуществляется в виде приведенном в системе (2.1). Применение такого подхода для систем с малым демпфированием приводит к вполне оправданным результатам. Более подробно о методах учета рассеяния энергии упругих колебаний и способах задания коэффициента демпфирования приведено в Приложении С.

В блоке 3 проводится анализ полученных результатов, сравнение их с требуемыми или допустимыми. При положительных результатах анализа выход в блок 5.

В случае неудовлетворительных результатов выявление путей, определяющих достижение требуемых характеристик и переход к поиску нового варианта конструкции.

Переход к работам по блоку 4 означает, что первоначальный вариант конструкции балки должен быть подвергнут определённым, но в минимальной степени необходимым изменениям, позволяющим получить требуемый результат.

В большинстве случаев требования предъявляются к собственным частотам, т.е. необходимости их смещения в области низких или более высоких частот или к ограничениям линейных или угловых перемещений в отдельных сечениях балки. Поиск требуемого варианта конструкции балки, как системы с распределёнными параметрами, возможен путём изменения распределения погонной массы или, наоборот, только жесткости, или некоторого компромисса между этими распределениями и, в принципе, не имеет однозначного решения. Однако, требование минимальности изменений по отношению к первоначальному варианту конструкции приводит к более обусловленным вариантам и поэтому поиск варианта, удовлетворяющего всем ограничениям, может осуществляться с использованием методов оптимизации характеристик упругих тел, получивших в настоящее время определённое развитие [4], [5], [6]. Ниже в разделах 6,7,8 приводится методика и алгоритмы выбора оптимальных распределённых параметров упругой балки с требуемой собственной частотой и требуемыми формами колебаний. Эти алгоритмы позволяют проводить расчёты по целенаправленному формированию параметров конструкции балки. В качестве проектного параметра используется жёсткость. После выбора варианта распределения жёсткости по длине балки и соответствующего уточнения распределения массы цикл работ повторяется с блока 1.

3. Уравнения колебаний упругих балок. Уравнения форм и частот

Расчетная модель в виде упругой балки принимается для упругих тел, имеющих один размер (длину) значительно больший, чем поперечные размеры. При анализе колебаний балок используется ряд гипотез и допущений:

- продольная ось балки прямолинейная;
- должно быть достаточное удлинение балки (отношение длины балки к поперечному размеру $l/d > 5$);
- упругие перемещения малы;
- поперечные сечения в процессе колебаний остаются плоскими;
- перемещения геометрических центров тяжести поперечных сечений при изгибных колебаниях балки происходят перпендикулярно продольной оси балки;
- изгибные, продольные и крутильные колебания балки не связаны между собой и удовлетворяют принципу суперпозиции малых колебаний – упругие перемещения являются суммой главных гармонических колебаний.

Изгибные колебания

Уравнение изгибных колебаний балки, полученное из условия равновесия упругих внутренних усилий и сил инерции в сечении балки с координатой x имеет вид [1], [2]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

В качестве решения этого уравнения может служить функция

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) f_i(x) \quad (3.2)$$

где

$f_i(x)$ - функция, зависящая только от x , называется формой колебаний и характеризует распределение амплитуд колебаний по длине балки ;

$q_i(\tau)$ - обобщённая координата, зависящая только от времени и характеризующая колебания некоторой точки конструкции, называемой точкой приведения, в которой значение $f_i(x)$

принято равным 1.

При свободных колебаниях балки $q_i(\tau) = \sin \omega_i t$, а решение (3.2) может быть представлено в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \sin \omega_i t .$$

После подстановки (3.2) в (3.1) получим следующее уравнение форм и частот изгибных колебаний балки

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] - \omega_i^2 m(x) f_i(x) = 0 \quad (3.3)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Отсюда видно, что каждой собственной частоте ω_i соответствует конкретная функция $f_i(x)$, зависящая от распределений изгибной жёсткости $EJ(x)$ и погонной массы $m(x)$, и кроме того $f_i(x)$ должна удовлетворять условиям закрепления балки. В таблице 1 приведены наиболее часто встречающиеся расчетные случаи и соответствующие условиям закрепления балки граничные условия.

Примечание к таблице 1. Аналитические выражения граничных условий при $x=l$ для соответствующих условий закрепления записываются аналогично.

В случае неоднородного распределения $m(x)$ и $EJ(X)$ для нахождения собственных частот и форм колебаний балки применяются численные методы, в частности может быть применен метод начальных параметров в матричной форме [9]. В разделе 4 приведены расчетные формулы и алгоритм этого метода.

Продольные колебания

Продольные колебания балки происходят вследствие упругих растяжений и сжатий балки вдоль ее продольной оси, при этом сечения балки получают поступательные перемещения. Уравнение продольных колебаний балки, как результат равенства сил инерции в сечении с координатой x и приращения упругой продольной силы в этом же сечении имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right] - m(x) \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.3) также как и в случае изгибных колебаний балки может быть представлено в виде бесконечной суммы произведений двух функций:

$$S(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) u_i(x) , \quad (3.4)$$

где

$u_i(x)$ - форма i -го тона колебаний,

$q_i(t)$ - обобщенная координата, определяющая перемещение сечения балки, принятого за точку приведения [$u_i(x)=1$].

В случае свободных колебаний $q_i(t)$ может быть представлена в виде $q_i(\tau) = \sin \omega_i t$ а решение (3.4) запишется в виде

$$S(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \sin \omega_i t ,$$

и после подстановки в (3.3) получаем уравнения форм и частот в виде:

$$\frac{d}{dx} \left[EF(x) \frac{d u_i(x)}{dx} \right] + \omega_i^2 m(x) u_i(x) = 0, \quad (3.6)$$

$$i=1,2,3,\dots,\infty$$

Решение (3.6) при заданном распределении масс $m(x)$ и продольной жесткости $EF(x)$ должно удовлетворять соответствующим граничным условиям [см. таблицу 2].

Крутильные колебания

При крутильных колебаниях балки происходит поворот сечений относительно продольной оси балки, при этом на отдельных участках балки поворот происходит в одном направлении, например по часовой стрелке, а на других участках балки в противоположном. Угол поворота сечения относительно продольной оси балки также зависит от двух координат x и t . Условие равновесия инерционных сил в некотором сечении и приращения упругого крутящего момента в этом же сечении приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p(x) \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} \right] - j(x) \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.7)$$

Решение этого уравнения также может быть представлено в виде ряда:

$$\Phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \varphi_i(x), \quad (3.8)$$

где

$\varphi_i(x)$ - форма i -го тона колебаний, характеризующая распределение амплитуд и направление углов поворота сечений балки,
 $q_i(t)$ - обобщенная координата, характеризующая угловые колебания сечения в точке приведения.

Уравнение (3.8) для случая свободных колебаний записывается в виде:

$$\Phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \sin \omega_i t.$$

После подстановки (3.8) в (3.7) имеем уравнение форм и частот

$$\frac{d}{dx} \left[GJ_p(x) \frac{d \varphi_i(x)}{dx} \right] + \omega_i^2 m(x) \varphi_i(x) = 0, \quad (3.9)$$

$$i = 1,2,3,\dots,\infty,$$

Решение (3.9) должно удовлетворять соответствующим условиям

закрепления на концах балки см. Таблицу 2.

Анализ уравнений (3.3), (3.7) а также аналитических выражений для условий закрепления на концах балки показывают, что они по форме полностью идентичны, поэтому методика определения собственных форм и частот для этих видов колебаний одинакова и приведена в следующем разделе 4.

4. Определение собственных форм и частот колебаний балки методом начальных параметров

4.1. Изгибные колебания

Для поиска решения форм и частот (3.2) методом начальных параметров в матричной форме преобразуем его к виду

$$f^{iv}(x) - k^4 f(x) = 0, \quad (4.1)$$

где
 $f^{iv}(x)$ – четвертая производная по x от функции $f(x)$,
 $k^4 = \frac{\omega^2 m}{EJ}$ в предположении что на участке от 0 до x $m(x) = \text{const}$ и $EJ(x) = \text{const}$.

Примечания:

1. Здесь индекс i опущен т.к. рассматривается решение в окрестности некоторого конкретного собственного тона.
2. Предполагается известными и не равными нулю $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$.

Решение уравнения (4.1) ищется с использованием методов операционного исчисления. Для этого запишем изображение этого уравнения 4.1 в виде [2]

$$p^4 \left[Y(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \frac{f''(0)}{p^2} - \frac{f'''(0)}{p^3} \right] - k^4 Y(p) = 0, \quad (4.2)$$

где

p - параметр преобразования по Карсону;

$Y(p)$ - изображение функции $f(x)$.

Из (4.2) имеем

$$\left[Y(p) - f(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4} - \frac{f'(0)}{p} - \frac{f''(0)}{p^2} - \frac{f'''(0)}{p^3} \right] - k^4 Y(p) = 0,$$

$$Y(p) = f(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4} + f'(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4} + f''(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4} + f'''(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4},$$

откуда, с учетом того что

$$\frac{p^4}{p^4 - k^4} \text{ есть изображение функции } S(kx) = \frac{1}{2}(ch\ kx + \cos\ kx),$$

$$\frac{k^2 p^3}{p^4 - k^4} \text{ есть изображение функции } T(kx) = \frac{1}{2}(sh\ kx + \sin\ kx),$$

$$\frac{k^3 p^2}{p^4 - k^4} \text{ есть изображение функции } U(kx) = \frac{1}{2}(ch\ kx - \cos\ kx),$$

$$\frac{k^4 p}{p^4 - k^4} \text{ есть изображение функции } V(kx) = \frac{1}{2}(sh\ kx - \sin\ kx),$$

то решение уравнения (4.1) через функции Крылова $S(kx)$, $T(kx)$, $U(kx)$, $V(kx)$ можно записать в виде

$$f(x) = f(0)S(kx) + \frac{f'(0)}{k}T(kx) + \frac{f''(0)}{k^2}U(kx) + \frac{f'''(0)}{k^3}V(kx),$$

где

$$k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EJ}{m}}.$$

Производные функций Крылова до 3-ей производной приведены в таблице 3.

Таблица 3

Функции	Первая производная	Вторая производная	Третья производная
$S(kx)$	$kV(kx)$	$k^2 U(kx)$	$k^3 T(kx)$
$T(kx)$	$kS(kx)$	$k^2 V(kx)$	$k^3 U(kx)$
$U(kx)$	$kT(kx)$	$k^2 S(kx)$	$k^3 V(kx)$
$V(kx)$	$kU(kx)$	$k^2 T(kx)$	$k^3 S(kx)$

можно получить зависимости, связывающие значения $f(x)$, $f'(x)$, $M(x)$, $Q(x)$

с начальными условиями при $x=0$. С учетом того, что

$$M(x) = EJ(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx},$$

а $M(0) = EJ(0) f''(0)$ и $f''(0) = \frac{M(0)}{EJ(0)}$ и $f'''(0) = \frac{Q(0)}{EJ(0)}$ эти зависимости

будут иметь вид:

$$f(x) = f(0)S(kx) + f'(0) \frac{1}{k} T(kx) + \frac{M(0)}{EJ} \frac{1}{k^2} U(kx) + \frac{Q(0)}{EJ} \frac{1}{k^3} V(kx),$$

$$f'(x) = f(0)kV(kx) + f'(0) S(kx) + \frac{M(0)}{EJ} \frac{1}{k} T(kx) + \frac{Q(0)}{EJ} \frac{1}{k^2} U(kx),$$

$$M(x) = EJ f(0)k^2U(kx) + EJ f'(0)kV(kx) + M(0) S(kx) + \frac{Q(0)}{k} T(kx),$$

$$Q(x) = EJ f(0)k^3T(kx) + EJ f'(0)k^2U(kx) + M(0)kV(kx) + Q(0) S(kx).$$

В матричной форме эту систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(kx) & \frac{1}{k} T(kx) & \frac{1}{k^2 EJ} U(kx) & \frac{1}{k^3 EJ} V(kx) \\ kV(kx) & S(kx) & \frac{1}{k EJ} T(kx) & \frac{1}{k^3 EJ} V(kx) \\ EJk^2 U(kx) & EJkV(kx) & S(kx) & \frac{1}{k} T(kx) \\ EJk^3 T(kx) & EJk^2 U(kx) & kV(kx) & S(kx) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

или

$$\eta(x) = A \eta(0) \quad (4.4)$$

Таким образом получено общее выражение, связывающее начальные параметры $f(0)$, $f'(0)$, $M(0)$, $Q(0)$ с соответствующими параметрами характеризующими форму $f(x)$, производную от формы $f'(x)$, момент $M(x)$ и

перерезывающую силу $Q(x)$ в сечении балки на расстоянии x от начала координат. При $x=l$ имеем

$$\eta(l) = A(l) \eta(0),$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} S(kl) & \frac{1}{k} T(kl) & \frac{1}{k^2 EJ} U(kl) & \frac{1}{k^3 EJ} V(kl) \\ kV(kl) & S(kl) & \frac{1}{k EJ} T(kl) & \frac{1}{k^2 EJ} U(kl) \\ EJk^2 U(kl) & EJkV(kl) & S(kl) & \frac{1}{k} T(kl) \\ EJk^3 T(kl) & EJk^2 U(kl) & kV(kl) & S(kl) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Матрицу (4.5) можно вычислить с использованием стандартных функций (процедур) для вычисления функций Крылова или следующих разложений функций $ch(kx)$, $sh(kx)$, $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ в ряд Тейлора:

$$sh(kx) = 1 + \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} + \frac{(kx)^7}{7!} + \dots + \frac{(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$ch(kx) = 1 + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^4}{4!} + \frac{(kx)^6}{6!} + \dots + \frac{(kx)^{2n}}{n!} + \dots,$$

$$\sin(kx) = kx - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \frac{(kx)^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos(kx) = 1 - \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^4}{4!} - \frac{(kx)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{(kx)^{2n}}{2n!} + \dots.$$

С учетом этого имеется возможность осуществлять перенос начальных условий, через некоторый конечный участок длиной l , на котором масса $m(x)$ и жесткость $EJ(x)$ имеют постоянное значение. Данный прием позволяет перейти к рассмотрению балки, состоящей из нескольких участков, на каждом из которых жесткость и масса также имеют свои постоянные значения. Для примера рассмотрим представленную на рисунке 4.1 консольную балку, состоящую из трех участков.

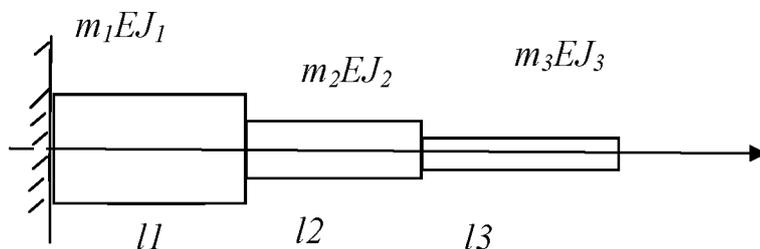


Рисунок 4.1 - Консольная балка, состоящая из трех участков с однородными массовыми и жесткостными характеристиками на каждом участке

Процесс переноса начальных условий состоит в том, что при некотором заданном значении ω определяем $k = \frac{m\omega^2}{EJ}$ для каждого участка

$$k_1 = \frac{m_1\omega^2}{EJ_1}, \quad k_2 = \frac{m_2\omega^2}{EJ_2}, \quad k_3 = \frac{m_3\omega^2}{EJ_3}, \quad \text{и } k_1 l_1, k_2 l_2, k_3 l_3$$

и вычислим матрицы A_1, A_2, A_3 для каждого участка.

Представив, что $\eta(0)$ вектор начальных условий в точке $x=0$, получим $\eta(l_1) = A_1 \eta(0)$, теперь $\eta(l_1)$ -есть вектор начальных условий для участка 2, тогда $\eta(l_2) = A_2 \eta(l_1)$, и для третьего участка $\eta(l_3) = A_3 \eta(l_2)$. Подставив в последнее выражение $\eta(l_2)$ а потом $\eta(l_1)$ имеем

$$\eta(l_3) = A_3 A_2 A_1 \eta(0).$$

т.е. матрица переноса начальных условий получается путем последовательного перемножения матриц A каждого участка. Обобщение на n -е количество участков балки будет выглядеть так

$$\eta(l_n) = \prod_{j=1}^n A_j \eta(0) = \bar{A} \eta(0) \quad (4.6)$$

Таким образом, представив эпюры массы и жесткости балки с неоднородным распределением этих характеристик в виде достаточно малых участков, на которых погонную массу и жесткость можно считать постоянными, получим связь между начальными параметрами

$f(0), f'(0), M(0), Q(0)$ на левом конце балки с соответствующими параметрами на правом конце балки. Помимо этого, необходимо учитывать, что ряд параметров, в зависимости от условий закрепления на концах балки может иметь нулевые значения. В частности, для рассматриваемой консольной балки при $x=0$ имеем

$$f(0)=0 \text{ и } f'(0)=0, \text{ а на правом конце } M(l) \text{ и } Q(l)=0.$$

В этом случае

$$\begin{pmatrix} f(l_3) \\ f'(l_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{41} & \bar{a}_{42} & \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

и имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_{33} \cdot M(0) + \bar{a}_{34} \cdot Q(0) = 0, \\ \bar{a}_{43} \cdot M(0) + \bar{a}_{44} \cdot Q(0) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Решение системы (4.8) существует только, тогда когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

Для нахождения корней характеристического уравнения можно применить метод прогонки по оси частот. В этом случае первоначальное значение ω_0 выбирается таким образом, чтобы ω_0 было заведомо меньше первого собственного значения

Далее с каким-то шагом по оси частот $\Delta\omega$ проводятся вычисления матриц при $\omega_0 + \Delta\omega$, $\omega_0 + \Delta\omega + \Delta\omega$, и т.д. и анализ условия (4.9). На рисунке 4.2 приведен график характерного изменения величины определителя в таком процессе.

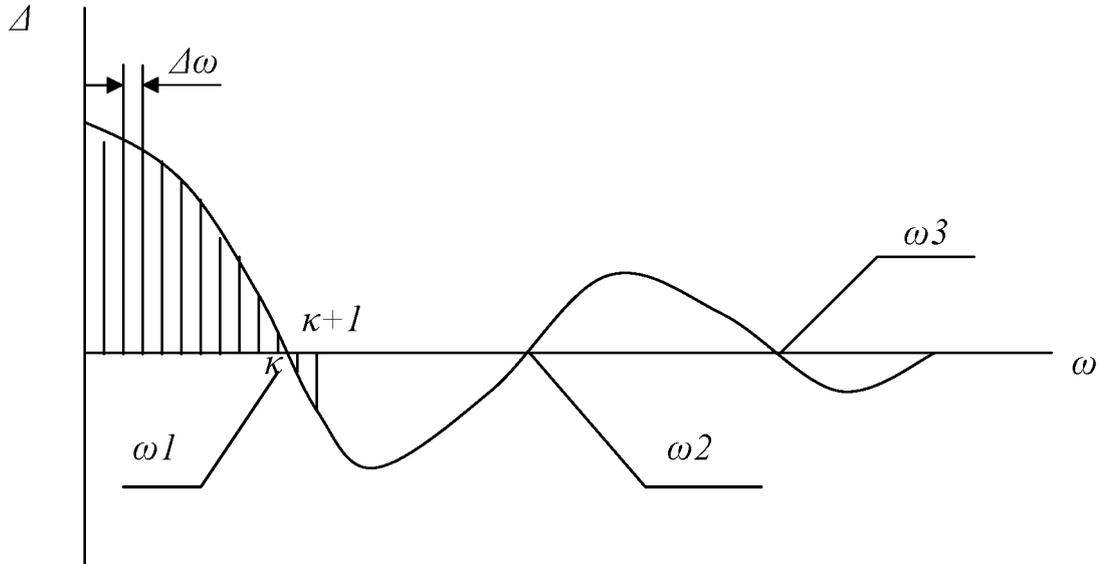


Рисунок 4.2 Поиск корней определителя

Как только на каком-то шаге $k+1$ произошло изменение знака определителя Δ , то это свидетельствует о том, что значение (ω_1) первой собственной частоты находится на интервале $[\omega_k, \omega_{k+1}]$. Для нахождения ω_1 можно использовать метод деления отрезка пополам.

Выбираем новое значение частоты $c_0 = \frac{\omega_k + \omega_{k+1}}{2}$ находим $\Delta(c_0)$. В случае, если $\Delta(c_0) = 0$, то $c_0 = \omega_1$, если же $\Delta(c_0) \neq 0$, то выбираем отрезок $\omega_k + c_0$ или $\omega_{k+1} - c_0$ на концах которого определитель имеет противоположные значения и процедуру деления отрезка пополам повторяется, если на каком-то j -ом шаге окажется $\Delta(c_j) = 0$, то $c_j = \omega_1$, или процедура поиска корня продолжается пока $\frac{|c_{j+1} - c_j|}{c_{j+1}} \leq \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления

корня. На практике обычно принимают $\varepsilon = 0,001 \div 0,01$.

После нахождения ω_1 процесс движения по оси частот ω продолжается до нахождения необходимого количества корней. После определения собственных частот ω_i находятся соответствующие распределения $f(x)$, $f'(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, как результат определения векторов $\eta(x)$ при соответствующем значении ω_i

$$\eta_i(l_n) = A_n(\omega_i) \eta_i(l_{n-1}),$$

где

$A_n(\omega_i)$ – матрица переноса для n -го участка балки, вычисленная при $\omega = \omega_i$.

Для задания начальных условий $M(0), Q(0)$ следует использовать одно из первых двух уравнений из (4.7). В частности, если принять $f(l)=1$ то из первого уравнения (4.7) можно выразить $M(0)$, а затем используя любое из соотношений (4.8) найти $Q(0)$.

4.2. Продольные и изгибные колебания балки

Процедура определения собственных частот и соответствующих им форм для этих видов колебаний остается такой же, как и для изгибных колебаний, с учетом того, что матрица переноса A будет иметь следующий вид

$$A = \begin{vmatrix} \cos(ax) & \frac{1}{aEF} \sin(ax) \\ -EF a \sin(ax) & \cos(ax) \end{vmatrix}$$

для продольных колебаний и

$$A = \begin{vmatrix} \cos(cx) & \frac{1}{cGJ_p} \sin(cx) \\ -GJ_p c \sin(cx) & \cos(cx) \end{vmatrix}$$

для крутильных колебаний.

Соответственно вектора

$$\eta(x) = \begin{vmatrix} u(x) \\ P(x) \end{vmatrix} \quad \text{-для продольных колебаний}$$

$$\eta(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ M(x) \end{vmatrix} \quad \text{-для крутильных колебаний,}$$

где

$u(x)$ - форма продольных колебаний,

$\varphi(x)$ - форма крутильных колебаний,

$P(x)$ - функция, характеризующая распределение

продольной силы,
 $M(x)$ - функция, характеризующая распределение
крутящего момента.

$$a^2 = \frac{\omega^2 m(x)}{EF}, \quad \text{и} \quad c^2 = \frac{\omega^2 j(x)}{GJ_p}.$$

4.3 Изгибно-продольные и изгибно-крутильные колебания балок.

Сложные формы колебаний балок возникают в случае, когда отдельные участки балки сопрягаются между собой под некоторым углом. В зависимости от того, в какой плоскости происходит изгиб, возникают изгибно-продольные или изгибно-крутильные формы колебаний. В частности, на рисунке 4.3 приведен пример конструкции балки, у которой в случае перемещений точек конструкции при колебаниях в плоскости XOZ возникают изгибно-продольные формы колебаний, а случае перемещения точек конструкции из плоскости XOZ возникают изгибно-крутильные формы колебаний.

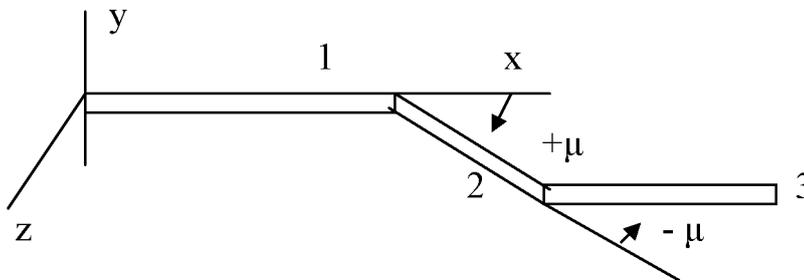


Рисунок 4.3 Пример конструкции балки, приводящей к появлению сложных форм колебаний.

Для определения собственных форм и частот такого типа конструкций также может быть использован метод начальных параметров, с учетом того, что вектор краевых условий имеет следующий вид:

$u(x)$		$\varphi(x)$	
$f(x)$	для изгибно-продольных форм колебаний	$f(x)$	для изгибно-крутильных форм колебаний
$f'(x)$		$f'(x)$	
$M(x)$	4.10	$M(x)$	4.11
$Q(x)$		$Q(x)$	
$N(x)$		$M_k(x)$	

В данных векторах в соответствии с принятыми обозначениями

$u(x)$ - продольная составляющая формы колебаний,

$f(x)$ - изгибная составляющая формы колебаний,

$f'(x)$ - производная от изгибной составляющей формы колебаний,

$\varphi(x)$ - угол поворота сечения при крутильных колебаниях,

$M(x)$ – функция, характеризующая распределение изгибающего момента в сечениях балки

$Q(x)$ - функция, характеризующая распределение перерезывающей силы в сечениях балки,

$N(x)$ – функция, характеризующая распределение продольной силы в сечениях балки,

$M_k(x)$ – функция, характеризующая распределение крутящего момента в сечениях балки.

С учетом этого, процесс переноса начальных условий через участок балки, испытывающий изгибно-продольные колебания, может быть представлен в виде соотношения

$\eta(x)=R\eta(0)$ где x - длина участка, а матрица R имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix}
 \cos(ax) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(ax)/EFa \\
 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\
 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\
 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\
 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\
 -EFa \sin(ax) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(ax)
 \end{vmatrix} \quad 4.12$$

Здесь a_{11}, \dots, a_{44} - компоненты матрицы R равные соответственно:

$$a_{11}=S(kx); \quad a_{12}=T(kx)/k; \quad a_{13}=U(kx)/k^2EJ; \quad a_{14}=V(kx)/k^3EJ;$$

$$a_{21}=kV(kx); \quad a_{22}=S(kx); \quad a_{23}=T(kx)/kEJ; \quad a_{24}=U(kx)/k^2EJ;$$

$$a_{31}=EJk^2U(kx); \quad a_{32}=EJkV(kx); \quad a_{33}=S(kx); \quad a_{34}=T(kx)/k;$$

$$a_{41}=EJk^3T(kx); \quad a_{42}=EJk^2U(kx); \quad a_{43}=EJkV(kx); \quad a_{44}=S(kx),$$

где

$$k = \left[\omega^2 m / EJ \right]^{1/4}, \quad a = \left[\omega^2 m / EF \right]^{1/2},$$

$$\text{а функции Крылова } S(kx)=\frac{1}{2}[\text{ch}(kx)+\cos(kx)]; \quad T(kx)=\frac{1}{2}[\text{sh}(kx)+\sin(kx)];$$

$$U(kx)=\frac{1}{2}[\text{ch}(kx)-\cos(kx)]; \quad V(kx)=\frac{1}{2}[\text{sh}(kx)-\sin(kx)].$$

Здесь также как и ранее

m - погонная масса;

EJ - жесткость на изгиб;

EF -жесткость на растяжение (сжатие).

В случае изгибно-крутильных колебаний процесс переноса начальных условий через участок балки с постоянными параметрами также может быть представлен в виде

$\eta(x) = K\eta(0)$, где вектор $\eta(x)$ по составу параметров соответствует 4.10, а матрица K имеет вид:

$\cos(cx)$	0	0	0	0	$\sin(cx)/GJ_p$
0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	0
0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0
0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0
0	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0
$-GJ_p \cdot c \cdot \sin(cx)$	0	0	0	0	$\sin(cx)$

Здесь также $a_{11} \dots, a_{44}$ соответствуют 4.12, а коэффициент

$c = [\omega^2 j / GJ_p]^{1/2}$, где j - полярный момент инерции массы в сечении балки относительно продольной оси; GJ_p - жесткость балки на кручение.

В отличие от балок, у которых продольная ось прямолинейна, для рассматриваемого класса балок, в точках поворота продольной оси происходит преобразование ряда кинематических и силовых параметров. В частности, при изгибно- продольных колебаниях в момент перехода с участка 1 на участок 2 (см. рисунок 4.3) происходит преобразование продольных перемещений в поперечные и соответственно поперечных в продольные. Схема таких преобразований для линейных составляющих формы колебаний представлена на рисунке 4.4.

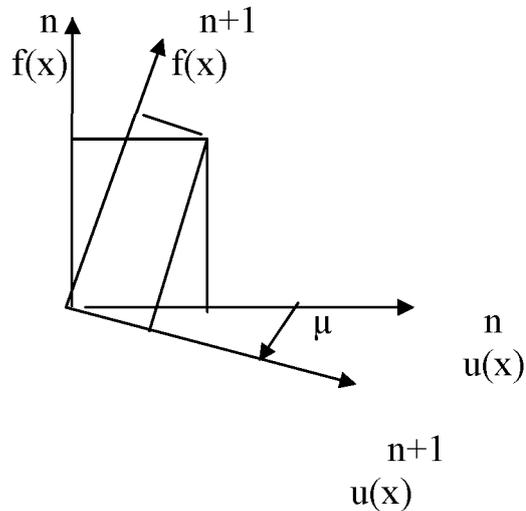


Рисунок 4.4 Схема преобразования поперечной $f(x)$ и продольной $u(x)$ составляющих формы колебаний при повороте продольной оси балки на угол μ на стыке n -го и $n+1$ -го участка балки.

В соответствие с этой схемой связь между линейными компонентами вектора 4.11 до и после поворота оси выражается следующими соотношениями

$${}^{n+1} f(x) = {}^n f(x) \cos(\mu) + {}^n u(x) \sin(\mu)$$

$${}^{n+1} u(x) = {}^n f(x) \{-\sin(\mu)\} + {}^n u(x) \cos(\mu).$$

Кроме кинематических параметров при переходе через точку поворота продольной оси происходит соответствующая трансформация перерезывающей и продольной сил, которая также определяется аналогичными уравнениями

$${}^{n+1} Q(x) = {}^n Q(x) \cos(\mu) + {}^n N(x) \sin(\mu)$$

$${}^{n+1} N(x) = {}^n Q(x) \{-\sin(\mu)\} + {}^n N(x) \cos(\mu)$$

С учетом этого при изгибно-продольных колебаниях балки, переход с n-го участка балки на n+1-й через сечение, в котором произошел поворот продольной оси балки на угол μ , в векторно-матричной форме может быть представлен в следующем виде

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} u(x^{\circ}) \\ f(x^{\circ}) \\ f'(x^{\circ}) \\ M(x^{\circ}) \\ Q(x^{\circ}) \\ N(x^{\circ}) \end{array} \right\}^{n+1} = \begin{array}{cccccc} \cos \mu & -\sin \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \mu & \cos \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\mu) & \sin(\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\mu) & \cos(\mu) \end{array} \cdot \left. \begin{array}{c} u(x) \\ u(x) \\ f'(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ N(x) \end{array} \right\}^n
 \end{array}$$

Здесь координата x соответствует концу участка n , а координата x° соответствует началу участка $n+1$.

Это можно представить в виде

$$\eta(x^{\circ}) = \text{Pr}(\mu) \eta(x), \quad (4.13)$$

где матрица $\text{Pr}(\mu)$ обеспечивает трансформацию вектора начальных параметров при повороте продольной оси балки на угол μ в случае изгибно-продольных колебаний.

Для изгибно-крутильных колебаний при повороте продольной оси на угол (μ) происходит трансформация углов поворота сечений и соответствующих моментов сил, которая определяется следующими соотношениями:

$$\varphi(x^{\circ}) = \varphi(x) \cos(\mu) - f'(x) \sin(\mu)$$

$$f'(x^{\circ}) = \varphi(x) \sin(\mu) + f'(x) \cos(\mu)$$

для параметров, характеризующих углы поворота сечений

и

$$M(x^{\circ}) = M(x) \cos(\mu) + M_k(x) \sin(\mu)$$

$$M_k(x^0) = -M(x) \sin(\mu) + M_k(x) \cos(\mu)$$

для параметров, характеризующих изгибающий и крутящий момент.

Процедура переноса вектора начальных параметров через точку поворота оси на угол μ в векторно-матричной форме в этом случае представляется в виде:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \varphi(x^0) \\ \hline f(x^0) \\ \hline f'(x^0) \\ \hline M(x^0) \\ \hline Q(x^0) \\ \hline M_k(x^0) \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \cos(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline \sin(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline -\sin(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline \cos(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline -\sin(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \cos(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \cos(\mu) \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \sin(\mu) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \sin(\mu) \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \varphi(x) \\ \hline f(x) \\ \hline f'(\beta) \\ \hline M(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline M_k(x) \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Аналогично 4.13 запишем это в виде

$$\eta_k(x^0) = P_k(\mu) \eta_k(x)$$

Здесь $P_k(\mu)$ -матрица перехода в случае изгибно-крутильных колебаний,

$\eta_k(x)$ - вектор начальных параметров при изгибно-крутильных колебаниях, соответствующих концу участка, предшествующего точке поворота продольной оси балки,

$\eta_k(x^0)$ - вектор начальных параметров после перехода через точку поворота,

n - номер участка балки.

С учетом изложенного, например, для балки, представленной на рисунке 4.3, формула переноса начальных параметров от $x = 0$ до конца балки при двух поворотах продольной оси для случая изгибно-продольных колебаний будет иметь следующий вид:

$\eta(L) = R \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ \Pi(-\mu) & R & \Pi(\mu) \end{matrix} R \eta(0)$, где L - общая длина балки.

Обобщение такого подхода на n участков балки и m точек поворота продольной оси может быть представлено как

$$\eta(L) = A \eta(0)$$

где матрица A представляет собой результат последовательного перемножения $n + m$ матриц перехода.

Примечание. Формирование матриц поворота Π должно производиться с учетом принятого положительного направления отсчета угла поворота продольной оси.

Также как и для прямолинейных балок условия для нахождения собственных частот ищутся с учетом граничных условий на концах балки. Например, для консольной балки, в случае изгибно-продольных колебаний, с учетом того, что на левом конце равны нулю перемещения и угол поворота сечения, а на правом конце перерезывающая сила, изгибающий момент и продольная сила равны нулю имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} u(L) &= A_{14} M(0) + A_{15} Q(0) + A_{16} N(0) \\ f(L) &= A_{24} M(0) + A_{25} Q(0) + A_{26} N(0) \\ f'(L) &= A_{34} M(0) + A_{35} Q(0) + A_{36} N(0) \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} 0 &= A_{44} M(0) + A_{45} Q(0) + A_{46} N(0) \\ 0 &= A_{54} M(0) + A_{55} Q(0) + A_{56} N(0) \\ 0 &= A_{64} M(0) + A_{65} Q(0) + A_{66} N(0) \end{aligned}$$

Для существования решения системы необходимо равенство нулю определителя минора третьего порядка, составленного из коэффициентов матрицы A второй группы уравнений 4.14

$$\begin{vmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.15}$$

Это условие удовлетворяется при некоторых дискретных значениях параметра ω , входящего в выражения для \mathbf{k} , \mathbf{a} и \mathbf{c} в коэффициентах, входящих в матрицы. Данным значениям соответствуют собственные частоты упругой системы. Нахождение собственных частот осуществляется путем последовательного задания значений ω , аналогично методу приведенному в разделе 4.1

Задавая конкретным значением частоты ω с последующим вычислением всех матриц переноса по участкам балки, на которых распределение погонной массы $m(x)$ и жесткости $EJ(x), EF(x)$ или $GJ_k(x)$ имеет постоянное значение, с вычислением коэффициентов общей матрицы A и нахождением определителя минора 4.15, необходимо, последовательно двигаясь по оси частот ω , контролировать знак определителя Δ . В случае, когда на следующем шаге изменения частоты произошло изменение знака определителя, нахождение собственной частоты производится методом деления отрезка пополам до того момента, когда при двух последующих вычислениях определителя разность между значениями частоты ω на этих шагах вычислений будет удовлетворять заданному требованию по точности определения собственной частоты (см. раздел 4.1).

После нахождения первого значения собственной частоты, продолжая движение по оси частот, аналогичным образом находится необходимое количество следующих собственных частот. При известных собственных частотах построение распределений форм колебаний $f(x), u(x), \varphi(x)$, и функций, характеризующих распределение перерезывающих и продольных сил, изгибающих и крутящих моментов осуществляется путем последовательного переноса через достаточно малые участки балки вектора начальных параметров $\eta(0)$ при значениях частоты равных найденным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и так далее.

Для формирования вектора $\eta(0)$, кроме имеющихся краевых условий, следует использовать свойство собственных форм колебаний - собственные формы определяются с точностью до постоянного множителя. С учетом этого, можно принять значение $f(x)$ в любом сечении балки равным некоторой константе. В частности, для консольного закрепления балки принимаем $f(L) = a$ или $f(L) = 1$. Из второго уравнения системы 4.14 выразим $N(0)$ в виде

$$N(0) = [1 - A_{24} M(0) - A_{25} Q(0)] / A_{26}.$$

Далее подставляя $N(0)$ в любые два уравнения из уравнений второй группы системы 4.14 находятся $M(0)$ и $Q(0)$.

В случае, когда при $x = L$ конец балки закреплен, в качестве дополнительного условия для формирования вектора $\eta(0)$, с учетом возможности нормировки формы можно один из параметров $M(0)$ или $Q(0)$ выбрать в виде произвольной константы. Например, $M(0) = EJ(0) f''(0)$ принять $M(0) = EJ(0)$ или $Q(0) = EJ(0) f'''(0)$ принять $Q(0) = EJ(0)$, а для нахождения остальных начальных параметров использовать конкретные условия закрепления на концах балки в виде аналогичным системе 4.14. В частности, для случая заделки при $x = 0$ и при $x = L$ и изгибно-крутильных колебаниях балки имеем $\varphi(0) = 0, f(0) = 0, f'(0) = 0, \varphi(L) = 0, f(L) = 0, f'(L) = 0$, и из уравнения $\eta(L) = A\eta(0)$ находим остальные параметры вектора $\eta(0)$.

4.4. Вычисление приведенных масс

Аналитическое выражение для определения приведенной массы в соответствии с Приложением Б имеет вид

$$M_{\text{пр}i} = \int_0^l m(x) f_i^2(x) dx,$$

При определении $M_{\text{пр}i}$ для уравнений (2.1) следует руководствоваться тем, что погрешность нахождения приведенных масс по каждому тону колебаний прямо пропорционально входит в погрешность решения этих уравнений. В случае, когда невозможно аналитическое нахождение приведенной массы, а это практически всегда следует при неоднородном распределении жесткости и массы, процесс интегрирования заменяется нахождением суммы

$$M_{\text{пр}i} = \sum_k m(x_k) f_i^2(x_k),$$

где

$m(x_k)$ - погонная масса на некотором интервале длины балки, где $m(x)$ может быть принята постоянной,

$f_i(x_k)$ - среднее значение формы на этом же интервале,

$$f(x_k) = \frac{f_k^{\text{нач}} + f_k^{\text{кон}}}{2},$$

$f_k^{\text{нач}}$ - значение формы в начале,

$f_k^{\text{кон}}$ - значение формы в конце интервала Δx_k ,

k - количество интервалов на которые можно разделить общую длину балки.

Очевидно, что чем меньше длина интервала, тем меньше погрешность определения упругих перемещений при колебаниях конструкции. Кроме

того, чем для более высшего тона колебаний определяется приведенная масса, тем на более короткие интервалы должны разбиваться эпюры масс и форм.

В этой связи целесообразно еще на стадии подготовки исходных данных по участкам переноса начальных условий, по методу изложенному в предыдущем разделе, выбрать Δx таким, что бы погрешность в вычислении $M_{прi}$ была приемлема. Малое количество участков приводит к значительной погрешности в вычислении $M_{прi}$, а большое количество к большому объему вычислений. Можно рекомендовать выбор $\Delta x = (0.01 \div 0.05)l$, однако в случае сложных эпюр $m(x)$ и учета большого числа тонов колебаний могут потребоваться специальные исследования по обоснованию выбора Δx_k .

При определении приведенных масс для сложных изгибно-продольных и изгибно-крутильных форм колебаний необходимо учитывать, что инерционные силы возникают от перемещения масс по двум компонентам. Например, при изгибно-продольных колебаниях с некоторой собственной частотой масса, находящаяся в некотором сечении перемещается по двум взаимно перпендикулярным направлениям: $f(x)$ - поперечная, по отношению к продольной оси балки, составляющая и $u(x)$ - продольная составляющая. В этом случае формула для определения приведенной массы имеет вид

$$M_{пр} = \sum_k m(x_k) [f^2(x_k) + u^2(x_k)]$$

где $f(x)$, $u(x)$ также средние значения на k -ом участке длины балки.

Для изгибно-крутильных колебаний приведенная масса определяется по формуле

$M_{пр} = \sum [m(x_k)f(x_k) + j(x_k)\varphi(x_k)]$, здесь $j(x)$ погонный момент инерции массы относительно продольной оси на k -ом участке балки, а $\varphi(x)$ среднее значение формы крутильных колебаний на этом участке.

5. Расчет параметров упругих колебаний.

Линейные поперечные или продольные упругие перемещения балки в точке приведения, при действии соответствующих сил по данным направлениям, могут быть получены в результате решения уравнения вида

$$Mnp_i (\dot{q}_i + n_i q_i + \omega_i^2 q_i) = P f_i(x) \quad (5.1)$$

где Mnp_i - приведенная масса i - го тона колебаний балки,

ω_i - круговая собственная частота i - го тона колебаний балки,

$f_i(x)$ - форма колебаний балки (для изгибных или продольных)

с собственной частотой ω_i ,

q_i - обобщенная координата, характеризующая упругие перемещения балки в точке приведения (в точке, где $f_i(x)$ - принята равной 1),

x_p - точка приложения силы P ,

n_i - коэффициент демпфирования упругих колебаний.

В случае приложения к балке в некотором сечении момента сил, приводящего к появлению изгибных колебаний, уравнение для определения упругих поперечных перемещений записывается в виде

$$Mnp_i (\dot{q}_i + n_i q_i + \omega_i^2 q_i) = M f_i'(x_m) \quad (5.2)$$

Здесь M - момент внешних сил,

$f_i'(x_m)$ производная от формы изгибных колебаний в точке приложения момента внешних сил.

Упругое перемещение в любой точке длины балки, отличной от точки приведения, определяется по формуле

$$Y(x,t) = \sum q_i f_i(x_i) \quad \text{для поперечных перемещений и}$$

$$X(x,t) = \sum q_i u_i(x_i) \quad \text{для продольных перемещений.}$$

Углы поворота сечения в точке приведения при крутильных колебаниях балки определяются по формуле

$$J_{np_i} (q_i + n_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i) = M_k \varphi_i(x_m) . \quad (5.3)$$

В этой формуле

q_i - обобщенная координата, характеризующая угол поворота сечения балки,

$\varphi_i(x_m)$ - форма i -го тона крутильных колебаний в сечении, где приложен момент внешних сил,

J_{np_i} - приведенный момент инерции i -го тона крутильных колебаний.

Определение углового перемещения в любом сечении балки производится путем умножения обобщенной координаты q на форму в этом сечении.

Таким образом, для определения упругих перемещений необходимо решить уравнения (5.1), (5.2), (5.3) при заданных законах изменения внешних сил и моментов.

Для конструкций, имеющих относительно малый уровень диссипативных сил, и работающих в условиях нестационарных переходных процессов, упругие перемещения следует определять по формуле [8] :

$$q(t) = \frac{1}{\omega M_{np}} \int P(\eta) f(x) \sin \omega(t-\eta) d\eta \quad (5.4)$$

или, при численном интегрировании, в виде следующей суммы

$$q(t) = \frac{1}{\omega M_{np}} \sum P(\eta) \Delta \eta \sin \omega(t-\eta) \quad (5.5)$$

где η_j – текущее время, относящееся к времени действия нагрузки $P(t)$ (см. Рисунок 5.1) на интервале от 0 до T,

j - число элементарных интервалов времени $\Delta \eta$, на которые разбивается интервал времени действия нагрузки и, в пределах которых действие силы заменяется действием от импульса силы.

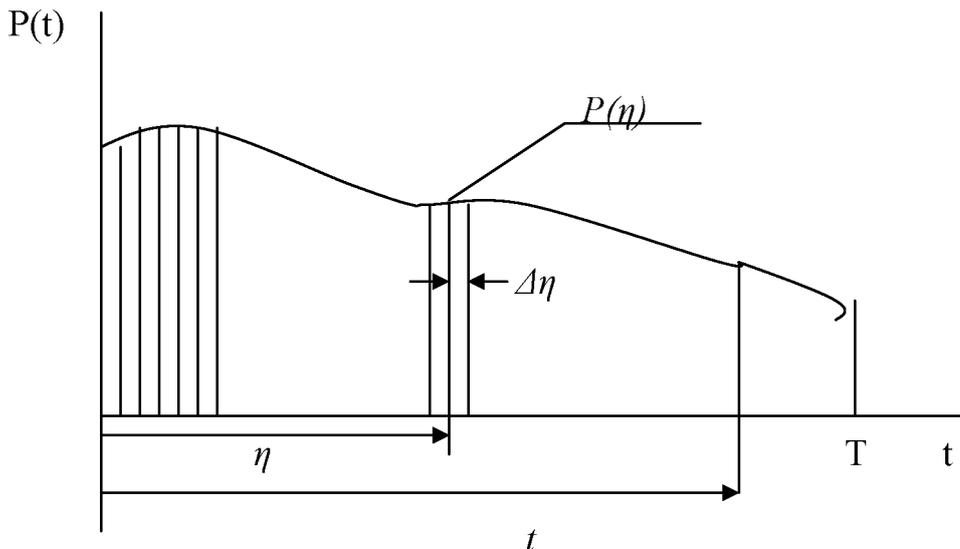


Рисунок 5.1 Схема разделения интервала времени действия нагрузки на элементарные интервалы.

После окончания действия внешней нагрузки, при $t > T$ упругие перемещения точки приведения представляют собой свободные колебания, определяемые решением уравнений (5.4), (5.5) при начальных условиях, соответствующих моменту времени T ,

$$q(t) = q(T) \cos \omega t + \frac{q'(T)}{\omega} \sin \omega t$$

Аналитическое определение перемещений по уравнению возможно в некоторых случаях для достаточно простых законов изменения нагрузки во времени [8] :

- мгновенное приложение постоянной силы,
 - при действии нагрузки возрастающей по линейному закону,
- однако упругие перемещения в большинстве случаев переходных процессов при произвольном изменении нагрузки во времени могут быть получены с использованием формулы (5.5) .

Для установившихся процессов наибольший интерес представляет решение уравнений типа (5.1) при периодически изменяющейся внешней нагрузке. В этом случае, если представить

$$P(t) = P^o \sin pt, \quad \text{где}$$

P^o - амплитуда внешней вынуждающей силы,
 p - частота вынуждающей силы, то общий вид решения уравнения при условии, что коэффициент демпфирования для случая вязкого сопротивления можно представить $n = 2\beta = \Delta\omega/\pi$, имеет вид

$$q(t) = \frac{P^0}{M_{np} \omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{p^2}{\omega^2}}} \sin\left(pt - \arctg \frac{4\beta^2}{\omega^2 - p^2}\right).$$

В этом выражении $\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{p^2}{\omega^2}}}$ представляет

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{p^2}{\omega^2}}}$$

собой коэффициент усиления для амплитуды вынужденных колебаний по отношению $q = P^0 / M_{np} \omega^2$ - статического перемещения в сечении x от действия силы P^0 , а угол $\arctg 4\beta^2 / (\omega^2 - p^2)$ есть угол фазового запаздывания упругих перемещений по отношению к вынуждающей силе.

6. Алгоритм формирования оптимального распределения жесткости в случае изгибных колебаний.

При проектировании упругих конструкций с учетом требований к динамическим характеристикам (получение заданных амплитуд и частот упругих колебаний) наиболее часто возникает задача разработки конструкции с заданной собственной частотой. Практически это означает, что заданная или требуемая частота колебаний должна находиться ниже или выше частоты, анализируемого первоначального варианта конструкции. В случае, если речь идет об уменьшении частоты, то целесообразным требованием является требование минимального изменения конструкции по отношению к первоначальному варианту, обеспечивающего переход к варианту конструкции с требуемой частотой. В случае, когда необходимо увеличить частоту, то помимо этого соображения, актуальным является требование минимизации дополнительной массы, которую необходимо израсходовать на увеличение жесткости конструкции. Данные обстоятельства приводят к задачам поиска некоторого оптимального варианта упругой конструкции [2] - [6].

Для балочных конструкций, учитывая наличие первоначального варианта и то, что в большинстве случаев балки несут на себе значительные пассивные массы по сравнению с массой силовой части конструкции, образующей жесткость, при решении задач оптимизации конструкции как показывает опыт, целесообразно в качестве проектного параметра выбрать жесткость.

Здесь необходимо отметить, что более общей является задача поиска варианта обеспечивающего увеличение частоты с условием минимального приращения массы силовой части конструкции, однако выбор жесткости в качестве проектного параметра в случае необходимости нахождения наиболее критичных элементов и сечений конструкции, а также более простой постановке задачи не противоречит такой постановке. Кроме того, реализация нового закона распределения жесткости по длине балки возможна даже при сохранении существующего распределения погонной массы $m_0(x)$ за счет применения материалов с более высоким модулем упругости или за счет увеличения момента инерции сечения, путем изменения геометрических характеристик сечения, если это относится к изгибным или крутильным формам колебаний. В этом случае необходимо чтобы функционал

$$I = \int_0^l |\Delta B(x)| dx \rightarrow \min \quad (6.1)$$

при $B(x) \in B^*$,

где $\Delta B(x) = B(x) - B(x_0)$,

$B(x)$ – варьируемая эпюра жесткости,

$B(x_0)$ – эпюра жесткости первоначального варианта конструкции,

B^* – множество допустимых эпюр жесткости конструкции.

Рассмотрим задачу в случае изгибных колебаний балки. Требуется найти такое распределение $EJ(x) = B(x)$, которое обеспечивает минимум функционала (6.1) при фиксированном значении собственной частоты i -го тона

$$\omega_i = \text{const} \quad (6.2)$$

В такой постановке задача является вариационной задачей на условный экстремум. Последнее условие с помощью соотношения Релея запишем в виде:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l B(x) \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] dx}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx} \quad (6.3)$$

Здесь $f(x)$ – собственная форма, рассматриваемого i -го тона колебаний.

Расширенный функционал для задачи на условный экстремум запишется в следующем виде [6], [7]:

$$J_1 = \int_0^l \{ |B(x) - B(x_0)| - \lambda F(x) \} \rightarrow \min \quad (6.4)$$

$B(x) \in B^*$

где

$\lambda = \text{const}$ множитель Лагранжа, а функция $F(x)$ – правая часть соотношения (6.3).

Необходимым условием экстремума функционала (6.4) является равенство нулю первой вариации функционала $\delta J_1 = 0$.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) f(x) &= 0 \\ B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \delta \frac{d f(x)}{dx} \Big|_0^l &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] \delta f(x) \Big|_0^l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

и условие оптимальности в виде

$$1 - \frac{\lambda \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]^2}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx} = 0 \quad (6.6)$$

В системе (6.5) первое уравнение представляет собой уравнение собственных форм и частот, а следующие два - граничные условия.

Получить решение системы (6.5),(6.6) в замкнутой форме не возможно, однако после некоторых преобразований можно построить итеративный процесс по подбору решения, удовлетворяющего условию (6.6).

С учетом того, что собственные формы в результате решения системы (6.5) определяются с точностью до произвольного постоянного множителя, путем соответствующего нормирования $f(x)$ можно получить, что

$$\int_0^l m(x) f^2(x) dx = 1.$$

В этом случае (6.6) принимает вид

$$\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]^2 = |f''(x)|^2 = \frac{1}{\chi} = const \quad (6.7)$$

что означает, что оптимальной конструкцией балки является конструкция, у которой на участках изгиба удельная потенциальная энергия изгиба будет постоянной и равной максимально возможной при данной собственной форме.

Умножим правую и левую части (6.7) на $B^2(x)$, извлечем корень и запишем в виде

$$B(x) = h B(x) |f''(x)|,$$

где

h - некоторая константа.

Правая часть этого выражения есть изгибающий момент, из этого следует, что оптимальная эпюра жесткости должна быть пропорциональна изгибающему моменту при условии, что кривизна формы будет постоянной. С учетом этого можно получить следующую рекуррентную формулу для назначения новой жесткости, при которой выполняется условие оптимальности (6.7)

$$B(x)^{k+1} = h B(x)^k |f''(x)|, \quad (6.8)$$

где k - номер приближения,
 h -константа или множитель, обеспечивающий пропорциональное увеличение эпюры жесткости на каждом шаге итерации ($h \geq 1$).

С использованием (6.8) строится следующий алгоритм формирования оптимальной эпюры жесткости при которой собственная частота будет равна заданной.

1. Производится расчет спектра форм и частот первоначального варианта конструкции балки с использованием $m_0(x)$ и $B_0(x)$:
2. Для тона колебаний, частоту которого необходимо увеличить строится распределение по длине балки удельной потенциальной энергии f'^2 .
 Это распределение может быть получено путем деления функции $M(x)$, полученной в результате решения задачи определения собственных форм и частот (см. раздел 4), на эпюру жесткости и возведения во вторую степень.
3. Находится $f'^2(x)_{max}$, путем последовательного перебора и определения максимального значения.
4. Производится нормировка эпюры $f'^2_{max} = 1$.
5. По рекуррентной формуле (6.8) строится эпюра жесткости для следующего шага $k+1$ с учетом соотношений (6.9).

$$\left. \begin{aligned} B(x)^{k+1} &= B(x)^k, \text{ если } h |f''(x)|^2 < 1 \\ B^{k+1}(x) &= h B^k(x) |f''(x)|^2, \text{ если } h |f''(x)|^2 > 1. \end{aligned} \right\} (6.9)$$

Так формируется эпюра жесткости при отсутствии ограничений на область изменения жесткости сверху. В случае существования ограничения на область изменения жесткости сверху $B(x)_{max}$ соотношения (6.9) дополняется следующим соотношением:

$$B^{k+1}(x) = B(x)_{max}, \text{ если } h B^k(x) \left| \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right| > B(x)_{max}.$$

где
 h -шаг вариации эпюры жесткости следует принимать в пределах $1,05 \div 1,1$.

6. Производятся расчеты спектра собственных форм и частот $k+1$ варианта.
7. Строится распределение $f''^2(x)$ и производится проверка условия оптимальности эюры (на участке где новые жесткости превышают первоначальный вариант и находятся внутри области допустимых изменений жесткости). Если условие оптимальности $f''^2(x) = 1$ на этом участке не выполняется, то расчет повторяется с п. 5 при новом h меньшем, чем принятое на данном шаге итерации.
8. Полученное значение частоты сравнивается с требуемым и если $\omega < \omega_{\text{треб}}$, то производится расчет с новым значением $h > 1,05$ начиная с п.3.
9. Вычисления повторяются до тех пор, пока не выполнится условие $\omega \geq \omega_{\text{треб}}$.

Для иллюстрации на рис.6.1 (а,б) приведены процессы последовательной оптимизации эюры жесткости для балки со свободными концами в случае отсутствия ограничения на область изменения жесткости сверху (а) и в случае, когда на область изменения жесткости наложено ограничение сверху $B(x)_{\text{max}}$ (б).

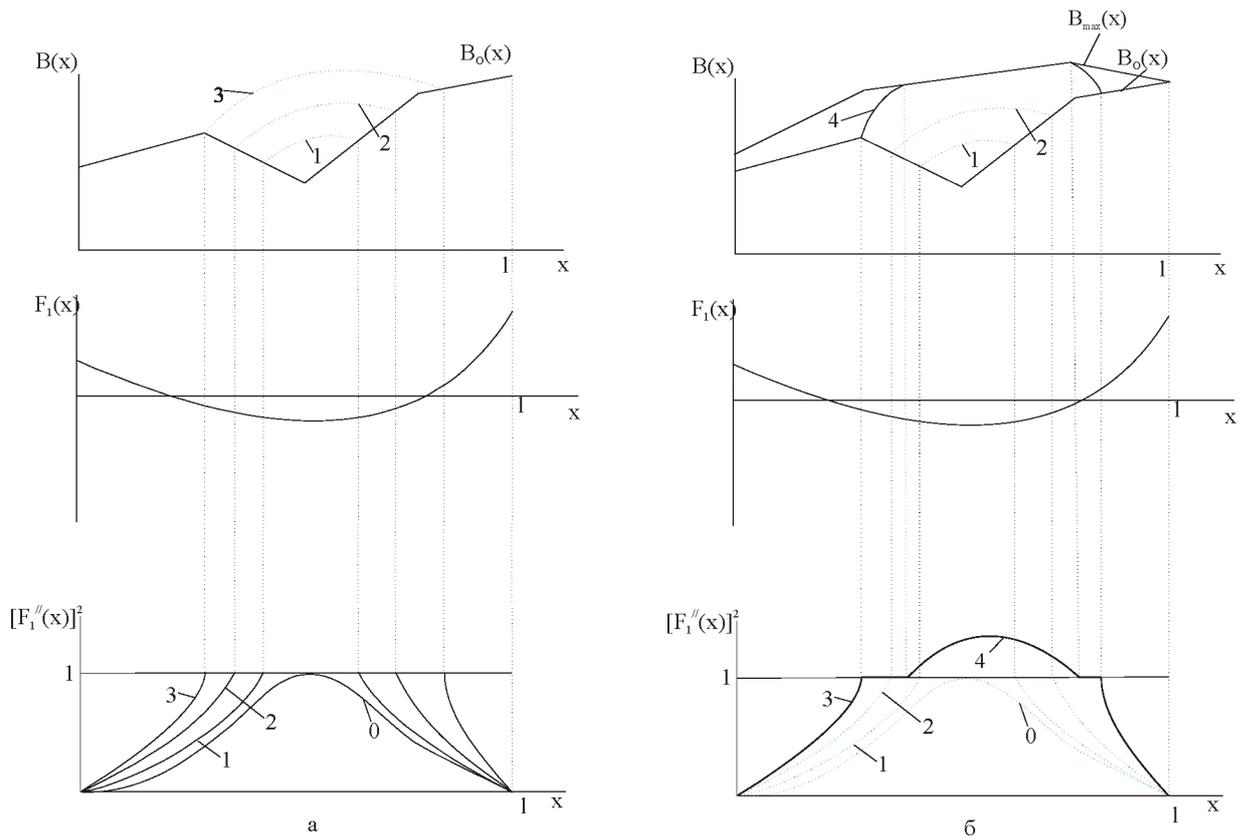


Рисунок 6.1- Процессы оптимизации эпюр жесткости для 1-го тона колебаний балки со свободными концами без ограничения сверху на область варьирования жесткостью (а) и с ограничением сверху (б) 0-первоначальный вариант, 1,2,3, – последовательные шаги оптимизации.

В случае постановки задачи о поиске варианта конструкции с заданным уровнем амплитуд колебаний можно использовать этот же алгоритм с учетом того, что на каждом шаге оптимизации необходимо оценивать уровень амплитуд, т.е. решать систему (2.1). В этом случае выход из алгоритма поиска осуществляется по выполнению требований к величинам упругих перемещений.

В случае, когда для формирования динамических свойств требуется понижение частоты по сравнению с первоначальным вариантом конструкции, данный алгоритм, в с точки зрения поиска минимального изменения конструкции [анализ распределения $f''(x)$], указывает области (в районе максимальных значений $[f''(x)]^2$, где уменьшение жесткости определяет градиент снижения частоты.

7. Алгоритм формирования оптимального закона распределения жесткости в случае крутильных и продольных колебаний балки

Анализ проведенных в разделах 3.2, 3.3 уравнений движения при продольных и крутильных формах упругих колебаний балки показывает, что они по виду полностью совпадают, поэтому выводы, относительно формирования оптимальных распределений параметров балки также полностью совпадают, однако всегда надо иметь в виду, что при продольных колебаниях используется погонная масса $m(x)$, а при крутильных колебаниях распределение полярного момента инерции массы относительно продольной оси $J(x)$ и соответственно продольная жесткость $EF(x)$ и крутильная жесткость $GJ_p(x)$.

Аналогичная, как и для изгибных форм колебаний, постановка задачи о поиске оптимального распределения жесткости для рассматриваемых форм колебаний, приводит к тому, что критерием оптимальности является

$$\left[\frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^2 = \text{const}, \quad (7.1)$$

а формулой для назначения новой жесткости

$$B^{k+1}(x) = hB^k(x) \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|$$

где

$\varphi(x)$ – форма крутильных (продольных) колебаний,
 $B(x)$ – жесткость крутильная (продольная)

Во всех остальных моментах алгоритм поиска оптимального варианта конструкции полностью соответствует случаю изгибных колебаний.

8. Формирование законов распределений жесткости балки в случае изгибно-продольных и изгибно-крутильных колебаний.

При упругих изгибно-продольных или изгибно-крутильных формах колебаний, характерных для балок продольная ось которых не прямолинейна, вопрос формирования требуемых динамических свойств с помощью соответствующих распределений жесткостных характеристик должен решаться в результате анализа распределений удельной потенциальной энергии упругих деформаций по каждой составляющей $[f''(x)]^2$ и $[u'(x)]^2$ для изгибно-продольных или $[f''(x)]^2$ и $[\varphi'(x)]^2$ для изгибно-крутильных форм колебаний. Анализ распределений $[f''(x)]^2, [u'(x)]^2$ и $[\varphi'(x)]^2$ должен выявить участки конструкции, изменение жесткости на которых в наибольшей мере влияет на процесс формирования требуемых динамических свойств конструкции, как для

первоначального варианта конструкции балки так и для вариантов, отвечающих поставленным требованиям к динамическим характеристикам по изгибной, продольной или крутильной жесткости.

Окончательное решение по выбору того или иного варианта доработки конструкции должно быть принято по выявлению ведущего фактора, определяющим образом влияющего на решение поставленной задачи, или как результат компромисса между возможными доработками по всем эпюрам жесткости с учетом приращения массы на реализацию требуемой жесткости.

Список литературы

1. Абгарян К.А., Раппопорт И.М. Динамика ракет. М. : Машиностроение, 1969, 378с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965, 559с.
3. Болтянский В.Т. Математические методы оптимального управления. М. Наука, 1968, 308с.
4. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев. Наукова думка, 1975, 275с.
5. Данилин А.И., Дмитриев В.В. Инженерный алгоритм проектирования балочных конструкций с заданными частотными характеристиками//Изв. вузов. Сер. "Авиационная техника" 1987. №2 С. 39-43.
6. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982, 432 с.
7. Титов Б.А., Вьюжанин В.А., Дмитриев В.В. Формирование динамических свойств упругих космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1995, 303с.
8. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций, Ленинград, Судпромгиз, 1963, 404с.
9. Вибрации в технике: Справочник. Том 6. Защита от вибрации и ударов. М.: Машиностроение, 1981, 456с.

Формулы для вычисления жесткости, погонной массы и моментов инерции в сечениях балки

Конструктивно-компоновочная схема любого варианта балки, для которого необходимо определить параметры упругих колебаний, должна содержать данные по основным геометрическим характеристикам (длина балки, конфигурация и размеры поперечных сечений по всей длине балки), условия закрепления на концах балки, характеристики материала (плотность, модуль упругости (см. таблицу 1А)), из которого изготовлена силовая часть конструкции, а также данные по расположению масс, не участвующих в создании жесткостных характеристик балки. Для примера рассмотрим вариант конструктивно-компоновочной схемы консольной балки, приведенной на рисунке 1А, состоящей из двух участков с различными конфигурациями поперечных сечений и несущей нагрузку в виде распределенной $m1$ и сосредоточенной $M2$ масс.

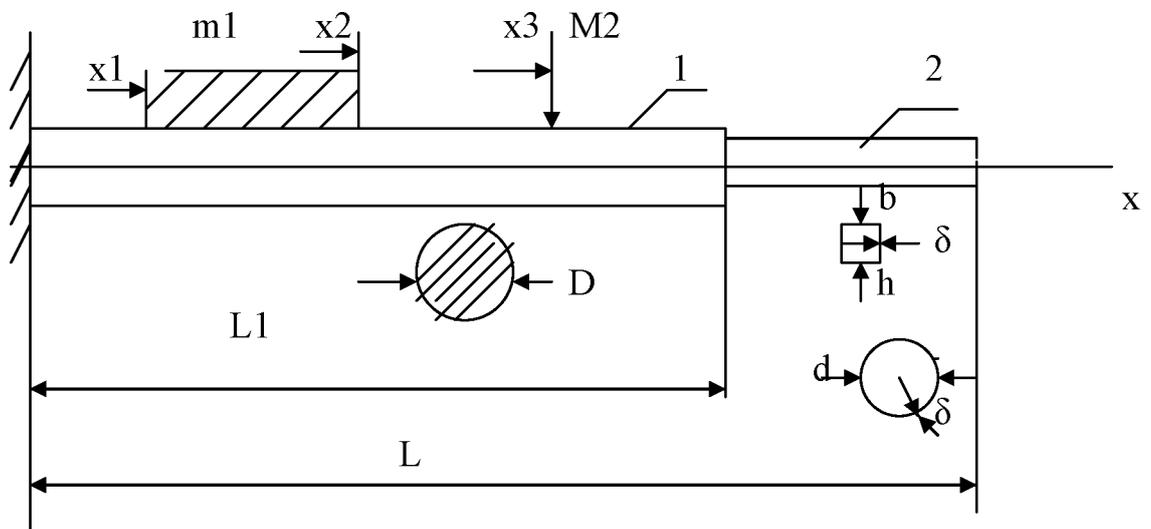


Рисунок 1А. Пример конструктивно-компоновочной схемы балки.

Участок 1 - сечение представляет собой круг диаметром D . Участок 2 - сечение круговое кольцо диаметром d , толщиной δ или прямоугольник с высотой h , шириной b и толщиной δ .

1. Вычисление распределенной массы $m(x)$.

1.1. Находим $m(x)$ силовой части участка 1 балки

$$m(x) = \rho \frac{\pi D^2}{4}, \text{ где } \rho - \text{плотность материала конструкции балки.}$$

В таблице 1А приведены характеристики металлов, наиболее часто используемых при создании конструкции летательных аппаратов.

На интервале $x_1 \div x_2$

$$m(x) = m(x) + m_l(x).$$

Сосредоточенную массу M_2 распределяем на некоторый достаточно малый участок балки Δl равный, например, шагу переноса граничных условий из метода начальных параметров (см. раздел 4)

$$m(x)_{\Delta l} = m_l(x) + \frac{M_2}{\Delta l}.$$

1.2. Находим $m(x)$ силовой части участка 2 балки

$$m(x) = \pi d \delta \rho \text{ для случая, когда в сечении кольцо,}$$

$$\text{и } m(x) = 4h \delta \rho \text{ для случая, когда в сечении полый квадрат.}$$

1.3 Строится $m(x)$ по всей длине балки

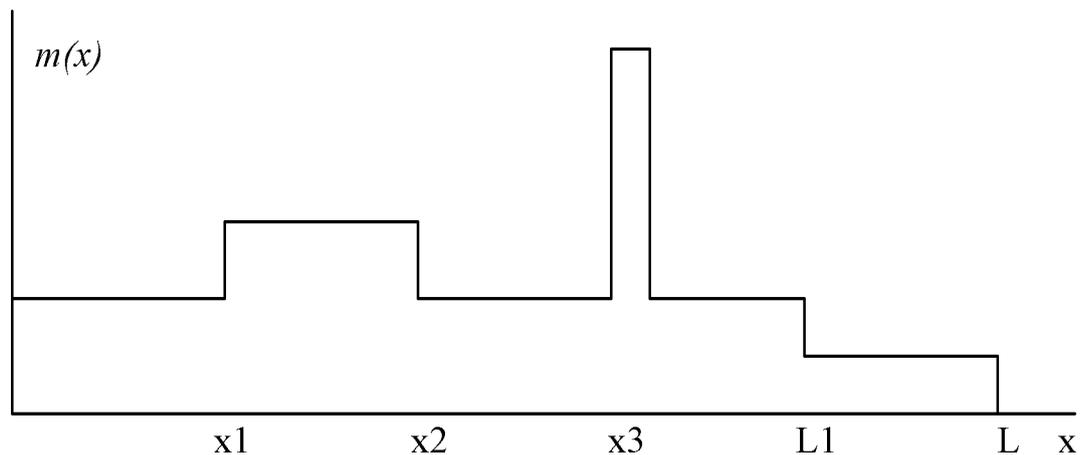


Рисунок 2А Эюра распределенной (погонной) массы.

2. Вычисление погонного полярного момента инерции массы относительно продольной оси $j_p(x)$.

Полярным моментом инерции в некотором сечении x будет сумма произведений масс точек тела или элементарных объемов масс, расположенных в данном сечении, на квадрат расстояния от центра тяжести каждой массы до продольной оси балки

$$j_p(x) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 ,$$

где n - количество элементарных объемов масс,

расположенных в данном сечении,

r_i - расстояние от центра тяжести i -ой массы до продольной оси.

Для некоторых сечений (круг, кольцо) имеются конечные формулы, связывающие момент инерции с основными геометрическими параметрами сечения и распределенной, погонной массой. Для сечений сложной геометрической формы момент инерции следует определять путем численного интегрирования по всей площади поперечного сечения балки с разделением на ряд элементарных объектов как по площади, так и по расположению масс.

2.1. На 1-ом участке полярный момент инерции силовой части конструкции (сплошного кругового сечения) равен

$$j_p(x) = \frac{m_1(x) D^2}{4} ,$$

2.2. На интервале x_1-x_2 к $j_{p1}(x)$ добавляется момент инерции от пассивной массы $M_1(x)$

$$j(x) = j_{p1}(x) + j_p(m_1)$$

$j_p(m_1)$ - должен определяться с учетом конфигурации расположения масс в данном сечении относительно продольной оси.

2.3. Аналогичный подход должен быть применен и в сечении x_3

$$j_p(m_3) = j_{p3}(m) + M_2 r^2$$

2.4. На 2-ом участке, если сечение представляет полый квадрат со стороной h или прямоугольник со сторонами h и b и толщиной δ момент инерции определяется путем численного суммирования моментов инерции элементарных объемов масс, расположенных в сечении, а в случае кольцевого сечения по формуле

$$j_{p2}(m) = m_2(x) \frac{d^2}{4} .$$

Далее строится эпюра распределения полярного момента инерции по всей длине балки аналогично эпюре распределения масс.

3. Вычисление изгибной жесткости $EJ(x)$.

Изгибная жесткость балки в каждом сечении определяется как произведение модуля упругости материала на растяжение E на геометрический момент инерции сечений J_{zz} относительно поперечной оси ($z-z$), лежащей в плоскости сечения и проходящей через продольную ось балки (см. рисунок 3А).

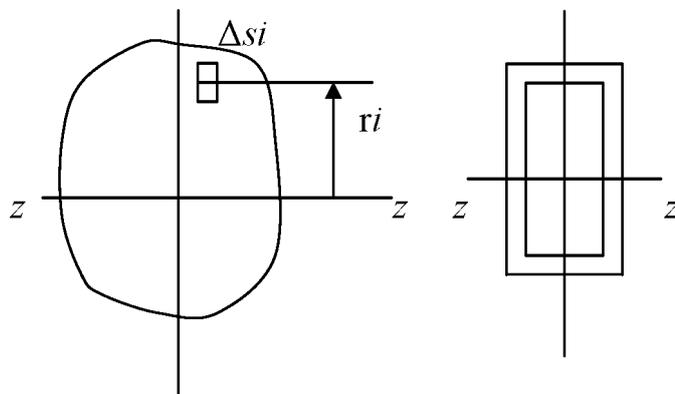


Рисунок 3А. Примеры сечений с различной конфигурацией.

Для рассматриваемого на рисунке 1А примера на участке 1, где в сечении сплошной круг

$$J(x) = \frac{\pi D^4}{64}$$

и поскольку по всей длине участка 1 диаметр одинаковый то

$$EJ(x) = \frac{E D^4}{64} \pi.$$

На участке 2, если сечение представляет собой кольцо толщиной δ , то момент инерции сечения

$$J(x) = \frac{\pi d^3 \delta}{8}$$

и соответственно $EJ(x) = E \frac{\pi d^3 \delta}{8}$.

Для сечений произвольной формы момент инерции сечения определяется путем суммирования произведений площадей элементарных площадок, на которые можно разбить всю площадь поперечного сечения, на квадрат расстояния от центра площади каждой элементарной площадки до оси, относительно которой определяется момент инерции

$$J(x) = \Delta s \cdot r^2 \quad (\text{см. рисунок 3А}).$$

Аналогичным образом определяются жесткости на всех участках балки. В таблице 2А, для некоторых наиболее часто встречающихся конфигураций сечений, приводятся формулы для вычисления моментов инерции в зависимости от геометрических параметров сечения

4. Вычисление крутильной жесткости $GJ_p(x)$.

Модуль жесткости на кручение равен

$$G = \frac{E}{1 + \mu},$$

где μ - коэффициент Пуассона равный 0,3.

С учетом приведенных в таблице 2А формул для полярного момента инерции сечения для круга и кольца крутильная жесткость для балки на рисунке 1А будет:

на первом участке $G J_p(x) = G \pi D^4 / 32$ и

на втором участке $G J_p(x) = G \pi D \delta^3 / 4$, если сечение будет в виде кольца толщиной δ .

5. Вычисление продольной жесткости EF :

на первом участке $EF(x) = E \frac{\pi D^2}{4}$,

на втором участке $EF(x) = E \pi D \delta$.

Таблица 1А . Характеристики основных конструкционных материалов.

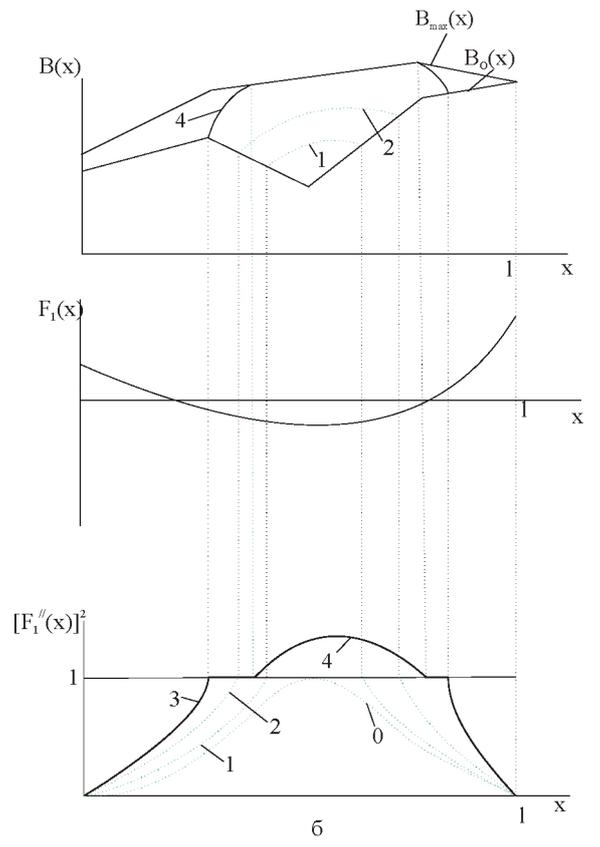
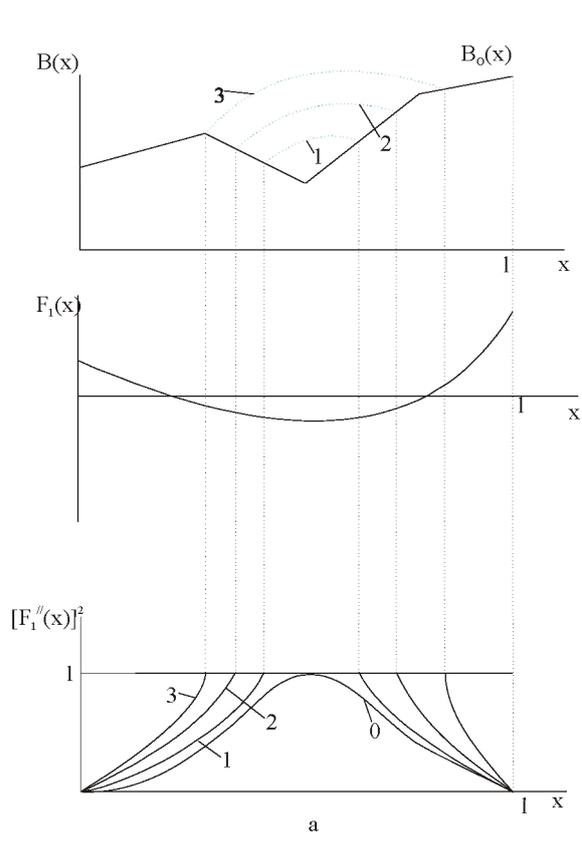
Материал	Плотность ρ , кг /м ³	Модуль упругости E , Н / м ²
Сталь	7900	2.1 10
Чугун	7400	1.3 10
Бериллий	2000	1.3 10
Алюминий	2700	0.7 10
Титан	4500	1.2 10

Таблица 2А Формулы для вычисления моментов инерции сечений.

Форма поперечного сечения	Площадь сечения F, м ²	Момент инерции относительно оси z	Момент инерции относительно оси y	Полярный момент инерции сечения	Примечание
	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$0,141a^4$	
	$b h$	$\frac{dh^3}{12}$	$\frac{dh^3}{12}$	$\beta * h b^3$	для $\frac{h}{b} = 1,2 \beta = 0,166$ $\frac{h}{b} = 1,25 \beta = 0,172$ $\frac{h}{b} = 1,5 \beta = 0,196$ $\frac{h}{b} = 2 \beta = 0,230$ $\frac{h}{b} = 3 \beta = 0,263$ $\frac{h}{b} = 5 \beta = 0,292$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	
	$\pi D \delta$	$\frac{\pi D^3 \delta}{8}$	$\frac{\pi D^3 \delta}{8}$	$\frac{\pi D^3 \delta}{4}$	

Продолжение таблицы 2А

Форма поперечного сечения	Площадь сечения F , m^2	Момент инерции относительно оси z	Момент инерции относительно оси y	Полярный момент инерции сечения	Примечание
	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{64}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{64}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{64}$	
	$2\delta(b+h)$	$\frac{\delta h^3}{6} \left(3\frac{b}{h}+1\right)$	$\frac{\delta h^3}{6} \left(3\frac{b}{h}+1\right)$	J_p определяется численным интегрированием путем разбиения площади сечения на ряд элементарных площадок	
	$bh - b_1h_1$	$\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$	$\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$		



Приложение Б

Уравнения движения упругой балки в случае приложения распределенной системы внешних сил и моментов.

В общем случае на балку как на элемент силовой конструкции может действовать переменная по времени внешняя нагрузка в виде системы непрерывно распределённых сил и моментов [1]. Рассмотрим, как наиболее сложный, случай изгибных колебаний балки. На рис.1 представлен элемент балки, который совершает малые поперечные колебания относительно положения равновесия в плоскости XOY .

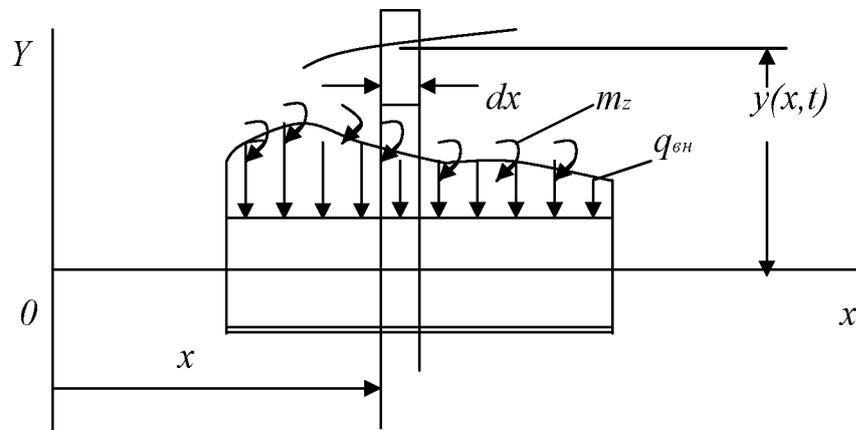


Рис.1Б. Упругие перемещения балки под действием внешней нагрузки.

Пренебрегая силами инерции, возникающими от поворота сечений балки, что вполне допустимо при малых амплитудах колебаний, можно записать условия равновесия некоторого выделенного элементарного отрезка балки длиной dx нагруженного распределенными внешними силами и моментами.

$$1) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = q_{вн} + q_{ин} \quad 2) \frac{\partial M(x)}{\partial x} = Q(x) - m_z$$

$$3) EJ(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M(x) \quad ,$$

где

$q_{вн}$ - внешняя распределённая (погонная) нагрузка, действующая на балку параллельно оси OY в плоскости XOY ;
 m_z - распределённый момент от внешних сил и моментов;
 $Q(x)$ - перерезывающая сила, возникающая в сечениях балки;
 $M(x)$ - изгибающий момент;
 $EJ(x)$ - изгибная жёсткость;
 $q_{ин}$ - инерционные силы, которые обеспечивают равновесие выделенного элемента в силу принципа Даламбера.

$$q_{ин} = -m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Внешние сосредоточенные силы в распределённой нагрузке учитываются следующим образом. Если представить (см. рисунок 2Б)

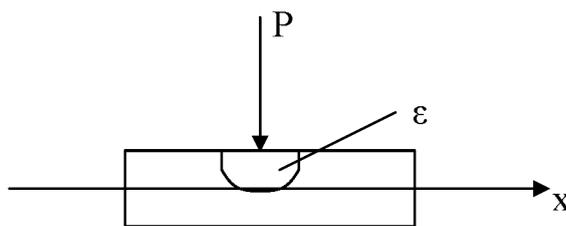


Рисунок 2Б. Действие внешней сосредоточенной силы P .

что внешняя сила P приложена к балке в некоторой достаточно малой области ϵ длины балки, то при $\epsilon \rightarrow 0$
 $q_{вн} = P \cdot \delta(x_p)$, где δ – дельта функция, а x_p – координата приложения силы.

Аналогичный подход к сосредоточенному моменту приводит к записи распределённого внешнего момента в виде

$$m_z = M_{вн} \delta(x_{мвн})$$

Из первого уравнения (1.1Б) имеем

$$m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = q_{вн}$$

а из второго и третьего уравнения этой же системы можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right] - Q(x) = -m_z \quad (3.Б)$$

При известных собственных формах функцию $y(x,t)$ можно записать в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t) f_i(x)$$

Подставив этот ряд в (2.Б) и (3.Б) получим

$$m(x) \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} - \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = P^k \delta(x_p)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} S_i(t) - Q(x) \right] = -M_{вн}^t \delta(x_{Мвв})$$

где $k=1,2,3,\dots,K$

$t=1,2,3,\dots,T$ K, T -число внешних сил и моментов.

Умножим первое уравнение (4.Б) на $f_j(x)$, а второе на

$-\left(\frac{df_j(x)}{dx}\right)$ и проинтегрируем по переменной x в пределах от 0

до l

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \int_0^l f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx = P^k \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx S_i(t) +$$

$$+ \int_0^l \left[Q(x) \frac{df_j(x)}{dx} \right] dx = -M_{вн}^t \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{Мвв}) dx$$

Сложив эти уравнения имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \int_0^l f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx = \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx S_i(t) + \\
& + \int_0^l \left[f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx(x) + Q(x) \frac{df_j(x)}{dx} \right] dx = \\
& = P^k \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx - M_{\text{вн}}^t \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{\text{Мвн}}) dx
\end{aligned}$$

Далее, если иметь в виду, что функция $f_j(x)$ удовлетворяет уравнению форм и частот

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 f_j(x) m(x) = 0$$

соответствующим граничным условиям, для различных типов закрепления, то, если провести интегрирование уравнения (6.Б) в пределах от 0 до x получим

$$\frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 \int_0^x f_j(x) m(x) dx$$

для балки с незакрепленным левым концом, или

$$\frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] - Q(0) = \omega^2 \int_0^x f_j(x) m(x) dx$$

(7.Б)

для случая, когда при $x=0$ имеется заделка или шарнир.

Это следует из

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] dx = \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^l = \\
& = -Q(0) + \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right]
\end{aligned}$$

Для общности будем рассматривать только последнее уравнение.

Умножим правую и левую части этого уравнения на $\frac{df_j(x)}{dx}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до L

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx = - \int_0^l Q(x) \frac{d f_i(x)}{dx} dx =$$

$$= \omega_i^2 \int_0^l \frac{d(x)}{dx} \int_0^x f(x) m(x) dx dx$$

(8.Б)

Теперь, если иметь в виду, что

$$\frac{d}{dx} \left[f_j(x) \int_0^x m(x) f_i(x) dx \right] = \frac{df_j(x)}{dx} \int_0^x m(x) f_i(x) dx + f_j(x) f_i(x) m(x)$$

и проинтегрировать это выражение в пределах от 0 до l, то получим

$$\left[f_j(x) \int_0^x m(x) f_i(x) dx \right] \Big|_0^l = \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \int_0^x m(x) f_i(x) dx dx +$$

$$+ \int_0^l f_j(x) f_i(x) m(x) dx$$

Из последнего имеем

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \int_0^x m(x) f_i(x) dx dx = f_j(x) \int_0^x m(x) f_i(x) dx \Big|_0^l -$$

$$- \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx$$

После подстановки этого выражения в правую часть (7.Б) получим

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] dx - Q(0) f_j(x) \Big|_0^l =$$

$$= -\omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx + \omega_i^2 \left[\int_0^l m(x) f_i(x) dx \right] f_j(x) \Big|_0^l = 0$$

С учетом (7.Б) и того, что $\frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] f_j(x) \Big|_0^l = 0$

при любых сочетаниях граничных условий уравнение (8.Б) заменим в виде

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] dx - Q(0) f_j(x) \Big|_0^l =$$

$$= -\omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx + \omega_i^2 Q(0) f_j(x) \Big|_0^l = 0$$

после сокращения имеем

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] dx = -\omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx$$

Теперь если во второй член уравнения (5.Б) подставить левую часть последнего равенства, то (5.Б) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) m(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx S(t) +$$

$$\int_0^l \left[f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{df_j(x)}{dx} Q(x) \right] dx = P^k \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx +$$

$$M_{ен}^t \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{Мвв}) dx$$

Если учесть, что

$$\int_0^l \left[f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{df_j(x)}{dx} Q(x) \right] dx = Q f_j(x) \Big|_0^l = 0$$

при любых сочетаниях граничных условий, то (10.Б) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) m(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx S(t) +$$

$$= P^k \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx + M_{вн}^t \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{Мвн}) dx$$

которое с учетом свойства ортогональности собственных форм

$$\int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx = 0 \text{ при } i \neq j$$

и что $\int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx = f_j(x_p)$

а что $\int_0^l \frac{d}{dx} f_j(x) \delta(x_{Мвн}) dx = \frac{d f_j(x_{Мвн})}{dx}$

преобразуется к виду

$$M_{npj} [\ddot{S}_j(t) + \omega_j^2 S_j(t)] = P^k f(x_p^k) + M^t \frac{d f_j(x_{Мвн}^T)}{dx}$$

где $M_{npj} = \int_0^l m(x) f_j^2(x) dx$ - приведенная масса балки при

колебаниях с собственной частотой ω_j и формой $f_j(x)$.

При выводе уравнения (11.Б) не учитывалось влияние рассеивания энергии колебаний, сопровождающее любой реальный процесс. Учет демпфирования колебаний производится путем введения в уравнение колебаний типа (12.Б) дополнительного члена, который бы обуславливал затухание собственных колебаний и ограничивал амплитуду колебаний при вынужденном характере движения. О способе и условиях задания коэффициента демпфирования при проведении исследований, связанных с анализом механических колебаний упругих конструкций приведены материалы в Приложении С данного методического пособия.

Задание коэффициента демпфирования.

При проведении исследований, связанных с анализом колебаний упругих конструкций, коэффициент демпфирования в уравнениях колебаний вводится с целью получения результатов адекватным реальным процессам, так как практически все колебательные процессы в природе с течением времени затухают. Затухание колебаний происходит в результате работы сил трения :

- при взаимодействии колеблющегося объекта с окружающей средой,
- на поверхностях контакта при относительных перемещениях элементов конструкции и внутри элементов конструкции в зонах деформации этих элементов во время колебаний.

Физические процессы, в результате которых происходит рассеяние энергии упругих колебаний, зависит от конкретной реализации колеблющейся конструкции, от параметров процесса колебаний и от внешних условий.

Задание конкретного значения коэффициента демпфирования зависит от целей исследования и должно учитывать особенности работы упругой конструкции в рассматриваемых диапазонах амплитуд и частот колебаний. Например, для определения нагрузок на конструкцию при больших амплитудах колебаний или для определения границ устойчивости движения при малых амплитудах колебаний могут быть приняты разные модели учета демпфирования.

Здесь следует отметить, что степень рассеяния энергии колебаний в значительной мере определяется работой реальной конструкции при колебаниях. В тоже время при получении предварительных оценок работы конструкции и проведении проектных исследований многие параметры конструкции бывают еще не сформированы. В таких случаях следует использовать имеющиеся данные по демпфированию колебаний подобных конструкций при работе в аналогичных условиях или принять модель, обеспечивающую минимальное демпфирование, априори предполагая некоторый худший результат по длительности затухания колебаний или по величине амплитуды установившихся колебаний. Кроме того, следует иметь ввиду, что при практическом моделировании колебаний упругих систем целесообразно применение наиболее простых моделей демпфирования, так как силы демпфирования часто имеют малые значения по сравнению с упругими силами или силами инерции.

В настоящее время, при анализе колебаний упругих конструкций используются две модели демпфирования. В первой модели силы

демпфирования принимаются пропорциональными скорости упругого перемещения - вязкое демпфирование, а во второй модели силы демпфирования пропорциональны перемещению - конструкционное демпфирование.

Модель вязкого демпфирования дает хороший результат при рассмотрении неустановившихся динамических режимов, в тоже время установлено, что для большей части конструкций, а также для материалов из которых выполнена конструкция, уровень энергии рассеиваемой за один цикл колебаний не зависит от темпа деформирования конструкции при колебаниях (т. е. от частоты колебаний), но зависит от амплитуды. В этой связи, необходимо отметить, что использование модели конструкционного демпфирования более целесообразно при исследовании установившихся динамических режимов.

Длительность колебательного процесса во времени зависит от соотношения между работой демпфирующих сил за период колебаний и величиной потенциальной энергии упругих колебаний и, чем больше эта величина, тем меньше длительность процесса колебаний.

Если рассматривать колебательный процесс в координатах q и F , где $F = kq$ упругая восстанавливающая сила, то при наличии демпфирующих сил имеется нарушение однозначности в нарастании и спаде упругой силы в процессе одного периода колебаний. Это выражается в появлении петли гистерезиса, площадь которой позволяет оценить уровень энергии, рассеиваемой за один цикл колебаний [9].

Отношение рассеянной энергии к максимальной потенциальной или к максимальной кинетической энергии, возникающей в процессе данного цикла колебаний, называют коэффициентом поглощения

$$\psi = \frac{\Delta W}{W_{\max}}$$

В случае, когда в течении одного периода движение мало отличается от гармонического и перемещение можно представить в виде

$$q(t) = \bar{q} \cos \omega t,$$

где \bar{q} средняя амплитуда за данный цикл колебаний, и силу трения принять в виде $n\dot{q}$, что соответствует гипотезе вязкого демпфирования, то работа сил трения за цикл будет

$$\Delta W = \int nqdt = n q^2 \omega^2 \int \sin^2 \omega t = \pi n q^2 \omega.$$

На рисунке 1. С это изображается площадью петли гистерезиса.

F

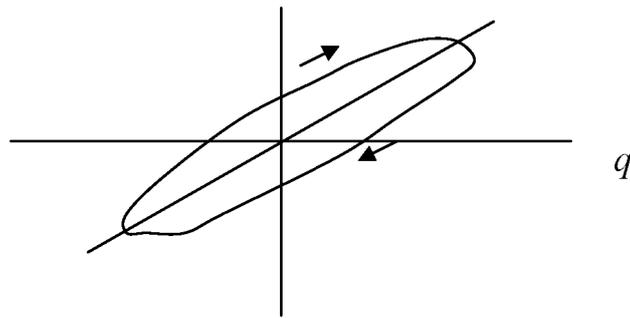


Рисунок 1 С. Петля гистерезиса в случае вязкого трения.

Максимальная потенциальная энергия упругой деформации при колебаниях равна

$$W = \bar{q}^2 k / 2$$

отсюда коэффициент поглощения $\varphi = 2\pi \frac{b}{k} \omega$. Как видно, при вязком демпфировании коэффициент поглощения не зависит от амплитуды и прямо пропорционален частоте колебаний.

Вид петли гистерезиса для конструкционного трения приведен на рисунке 2.С.

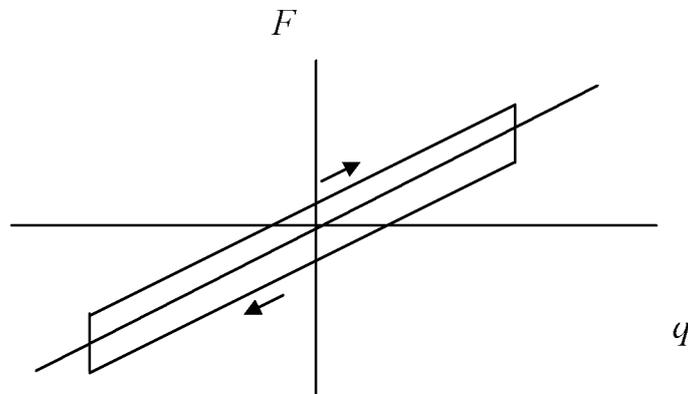


Рисунок 2 С. Петля гистерезиса в случае конструкционного демпфирования, обусловленного сухим трением.

В случае, если уравнения движения упругого тела имеют вид

$$M_{\text{при}}(q + 2b\dot{q} + \omega^2 q) = 0, \quad 1.С$$

то решение этого уравнения для случая свободных колебаний с демпфированием в общем случае имеет вид

$$q_i(t) = e^{-\frac{b_i}{m_{\text{пп}}} t} \left(q_{0i} \cos \omega_{di} t + \frac{\dot{q}_{0i}}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t \right),$$

где

q_{0i} - начальное отклонение обобщенной координаты от невозмущенного положения,

\dot{q}_{0i} - значение скорости изменения обобщенной координаты в начальный момент времени,

ω_{di} - собственная круговая частота демпфированной системы.

В данном случае амплитуда колебаний уменьшается от цикла к циклу по экспоненциальному закону

$$q_{\text{max}} = e^{-\frac{b_i}{m_{\text{пп}}} t} \quad \text{см. рисунок 3С.}$$

Связь между собственными частотами демпфированной и не демпфированной систем определяется выражением

$$\omega_{di}^2 = \omega^2 - 2b^2$$

Как правило, упругие конструкции, если они не содержат специальных демпфирующих устройств, имеют достаточно низкий коэффициент демпфирования лежащий в диапазоне $0 \div 0,1$. При таком уровне демпфирования, как видно из анализа последнего соотношения, собственные частоты демпфированной и не демпфированной систем практически совпадают, поэтому при анализе динамики упругих систем обычно используют значение собственной частоты полученное без учета демпфирования.

$$q \quad \left| \quad q_{\text{max}} = e^{-\frac{b_i}{m_{\text{пп}}} t}$$

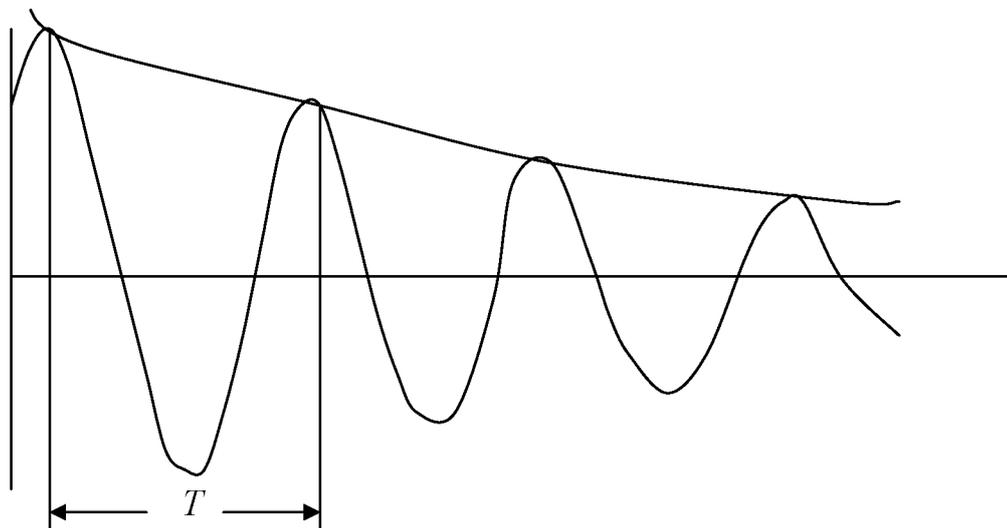


Рисунок 3С. Свободные колебания упругой системы по некоторой обобщенной координате q

Для учета экспериментальных данных по демпфированию упругих колебаний используются записи переходных процессов аналогичных, приведенному на рисунке 2.С, по которым определяется логарифмический декремент колебаний по формуле

$$\Delta = \ln \frac{q_{нк}}{q_{кк}},$$

где $q_{ок}$ и $q_{кк}$ -- начальная и конечная амплитуда на T_k -- м периоде колебаний. При известном логарифмическом декременте колебаний второй член уравнения (1.С) записывается в виде

$$2b = \frac{\Delta \omega_i}{\pi} \quad (\text{см. также уравнение 2.1}).$$

Использование модели конструкционного демпфирования приводит к записи уравнения движения в комплексной форме

$$M_{\pi i} [\ddot{q}_i + kq(1+iG)] = P f(x_p)$$

где сила конструкционного демпфирования пропорциональная упругому перемещению может быть представлена в следующем виде

$$F = i G k q$$

Здесь i -- мнимая единица ,

G -- коэффициент конструкционного демпфирования, а k – приведенная жесткость равная $Mnp \cdot \omega^2$.

В связи с тем, что при установившихся колебаниях на собственной частоте рассматриваемой упругой системы силы вязкого и конструкционного демпфирования должны быть равны , то связь между коэффициентами вязкого и конструкционного демпфирования будет выглядеть следующим образом

$$2b\omega Mnp = GMnp\omega^2$$

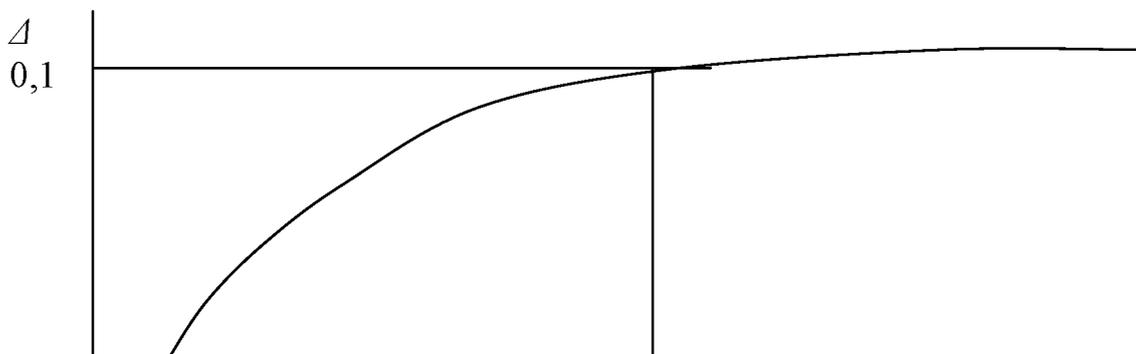
$$\text{или } \Delta\omega Mnp/\pi = GMnp\omega^2/\omega \text{ откуда } G = \Delta/\pi$$

Таким образом, в зависимости от задач, стоящих в каждом конкретном исследовании, следует выбирать соответствующую модель демпфирования . Однако необходимо еще раз отметить, что в связи с тем что в большинстве реальных конструкций уровень , проявляемых при колебаниях демпфирующих сил мал , то для первоначальных этапов формирования конструкции упругой системы и исследования динамических свойств, в силу необходимости учета феномена затухания колебаний , следует рекомендовать более простую модель учета демпфирования в виде

$$F = b \dot{q}$$

с последующим возможным уточнением модели демпфирования по результатам анализа работы конструкции при колебаниях и результатов экспериментальных исследований.

Зависимость логарифмического декремента колебаний от амплитуды колебаний для многих конструкционных материалов и образцов конструкций имеет вид, представленный на рисунке 6 С. [9].



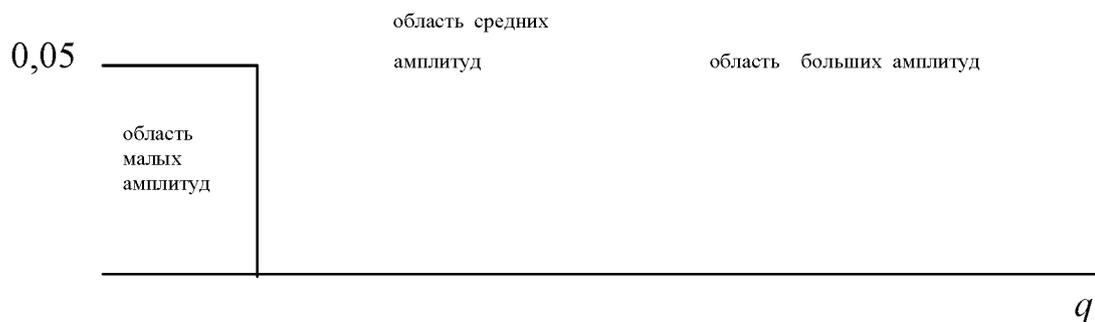
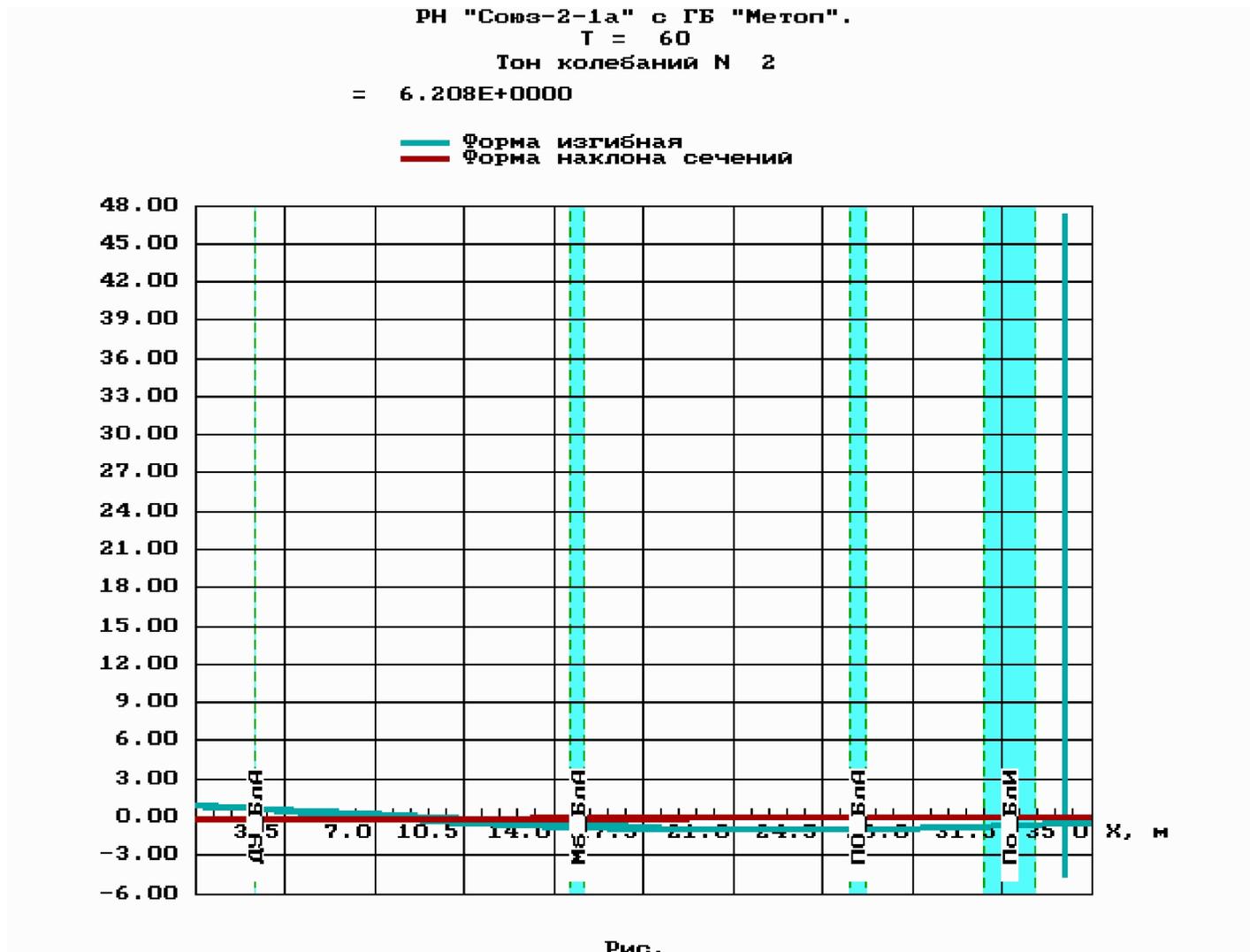


Рисунок 6.С. Зависимость логарифмического декремента колебаний упругой конструкции от амплитуды колебаний.

На рисунке 6. С возможные значения амплитуд колебаний разбиты на три области - малые, средние и большие амплитуды. Для каждой области существует свой какой-то средний уровень величин логарифмического декремента колебаний. В зависимости от того, в каком диапазоне амплитуд предполагается работа исследуемой конструкции, выбираются соответствующие значения декремента. В частности, для первоначальной оценки уровня амплитуд колебаний, рекомендуется принимать декремент близким к минимальным значениям из диапазона $0,01 - 0,05$.

№1



Приведённая масса = 5.798E6 кг.

№2

РН "Совз-2-1а" с ГБ "Метоп".
T = 60
Тон колебаний N 4
= 6.378E+0000

— Форма изгибная
— Форма наклона сечений

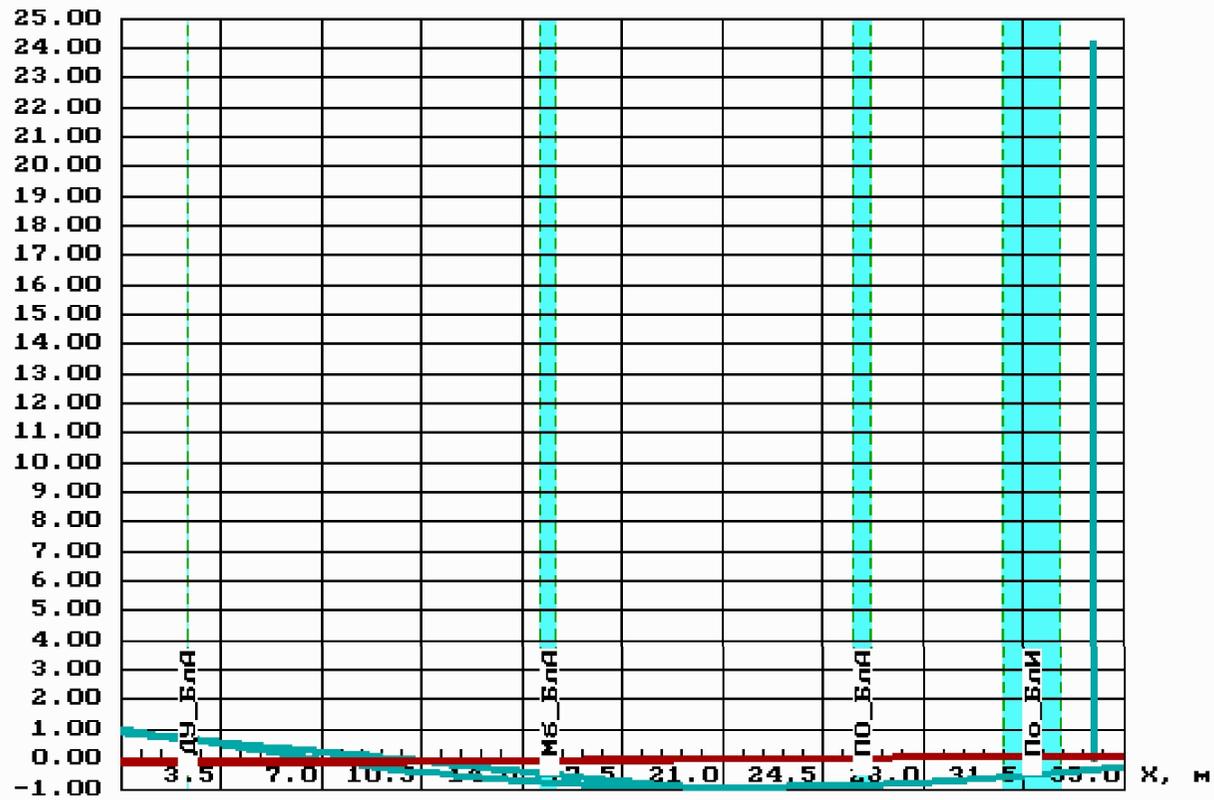
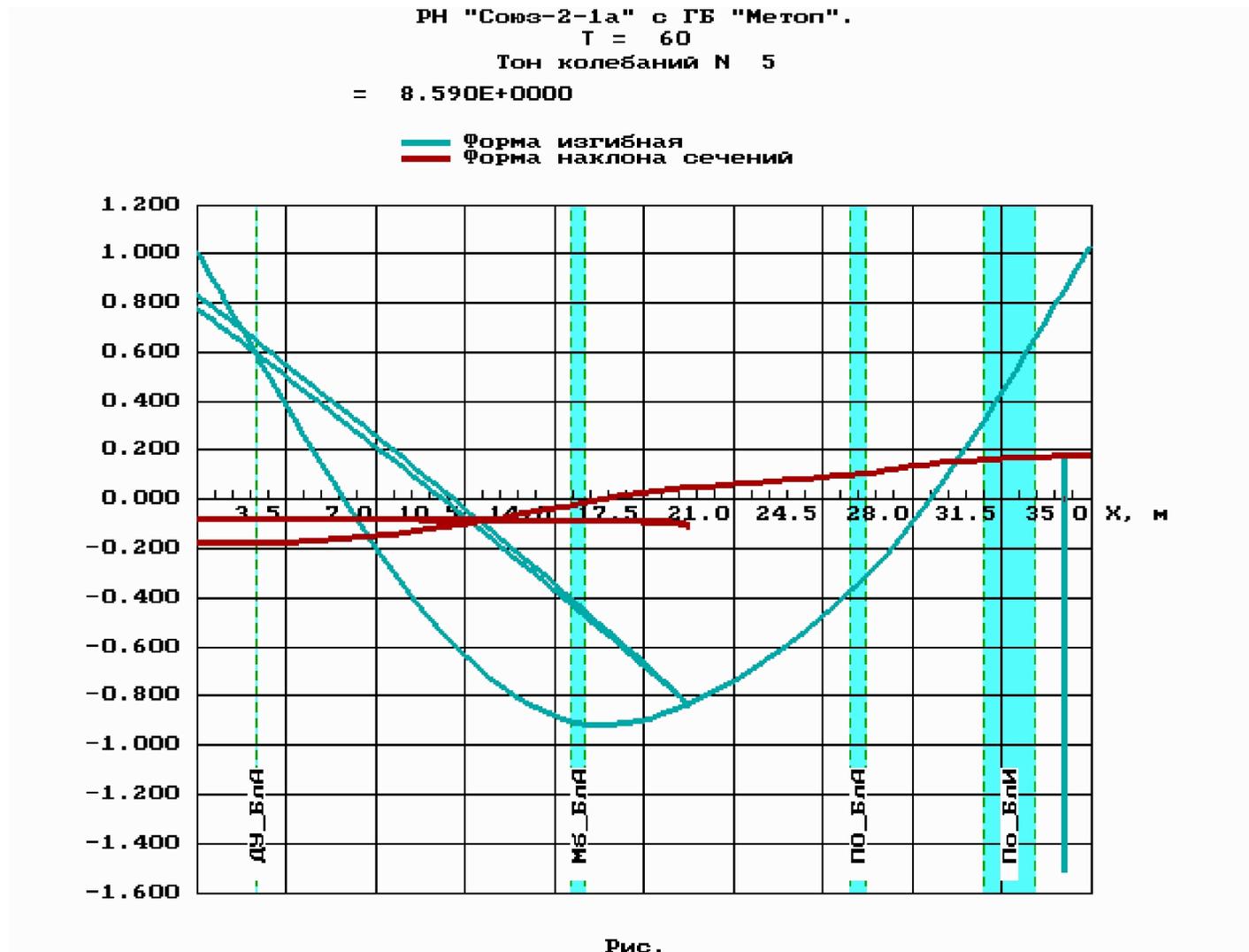


Рис.

Приведённая масса = 1.559E6 кг.

№3



Приведённая масса = 8.734E4 кг.

№4

РН "Союз-2-1а" с ГБ "Метоп".
T = 60
Тон колебаний N 6
= 1.340E+0001

— Форма изгибная
— Форма наклона сечений

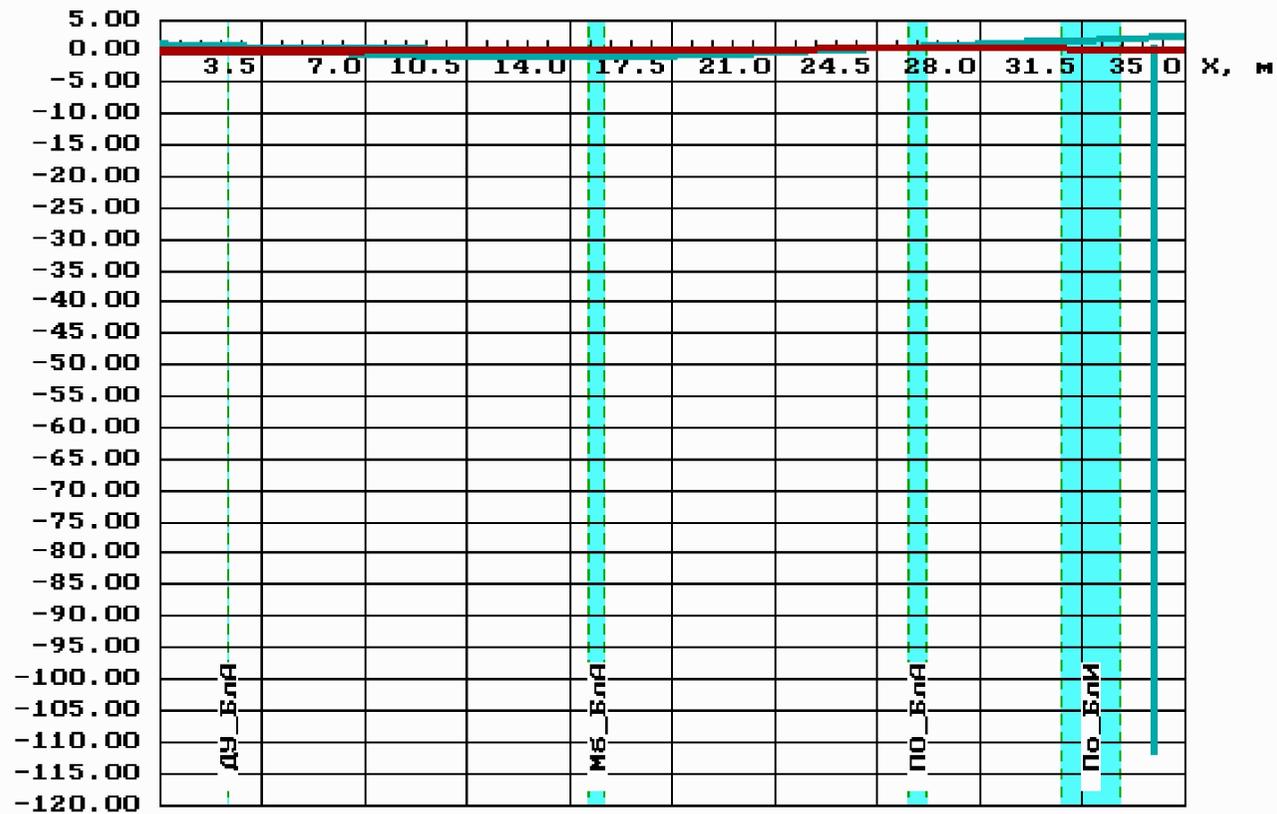
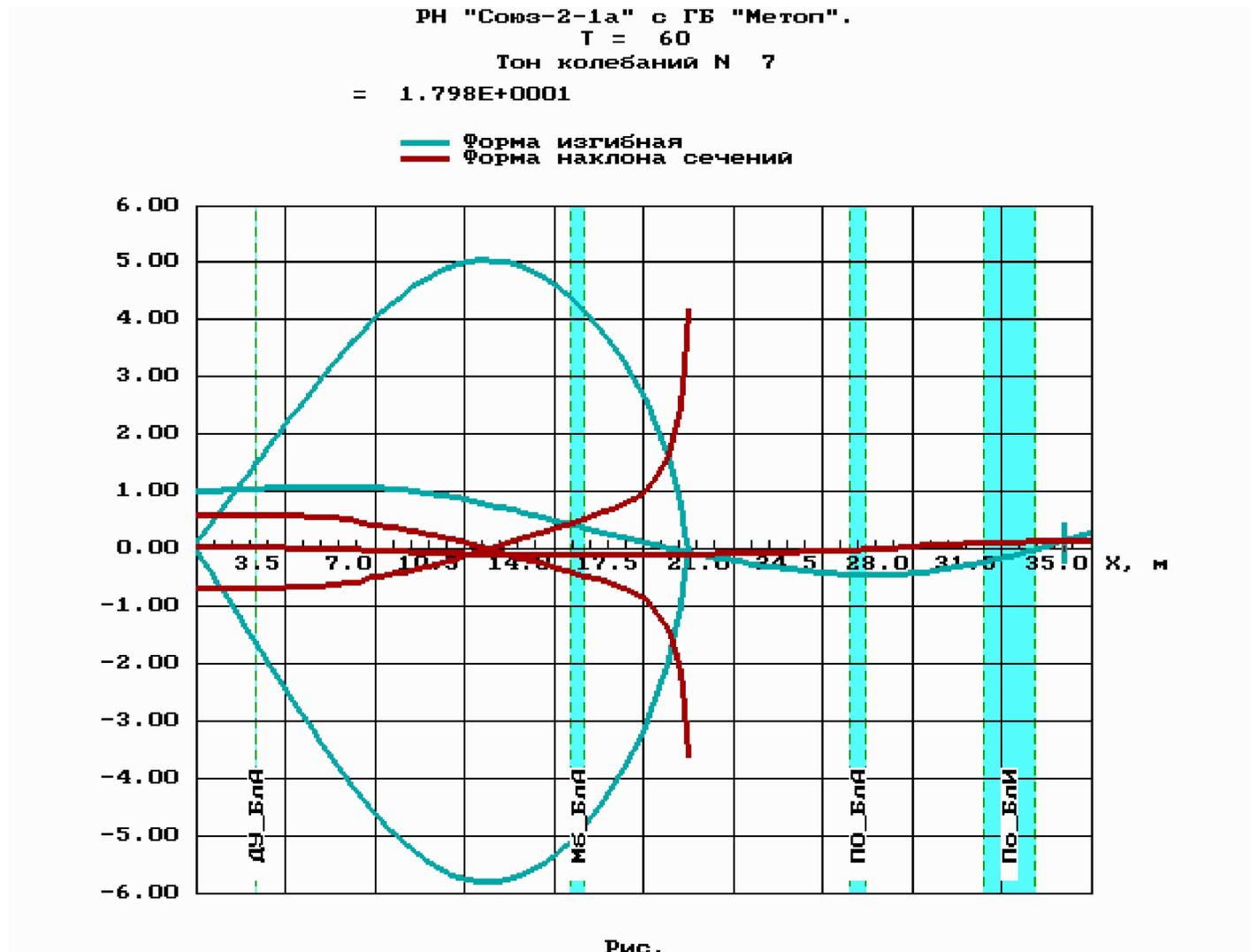


Рис.

Приведённая масса = 3.198E7 кг.

№5



Приведённая масса = 1.591E6 кг.

№6

РН "Совз-2-1а" с ГБ "Метоп".
T = 60
Тон колебаний N 8
= 2.208E+0001

— Форма изгибная
— Форма наклона сечений

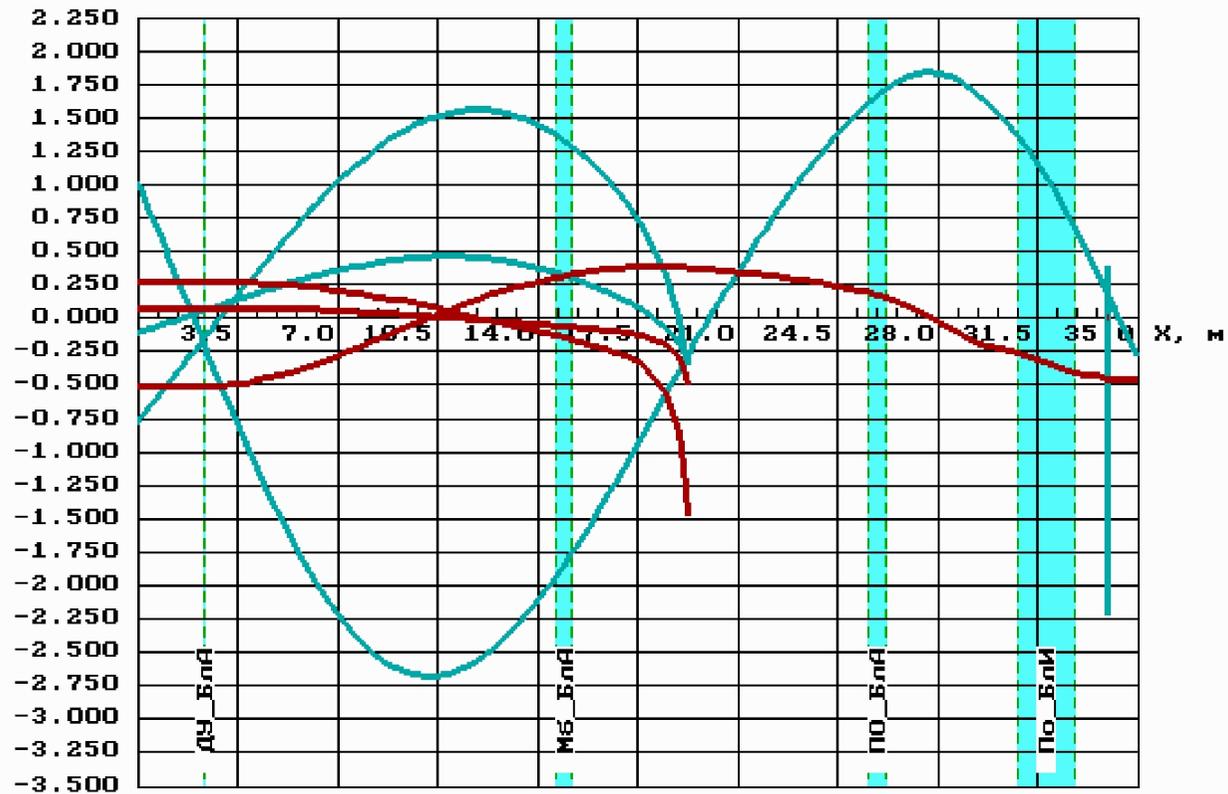


Рис.

Приведённая масса = 3.831E5 кг.

Примечание: Формы нормированы таким образом, что $f(x)$ на нижнем срезе блока «А» равна 1.

Пульсационное возмущение
Серия "с"

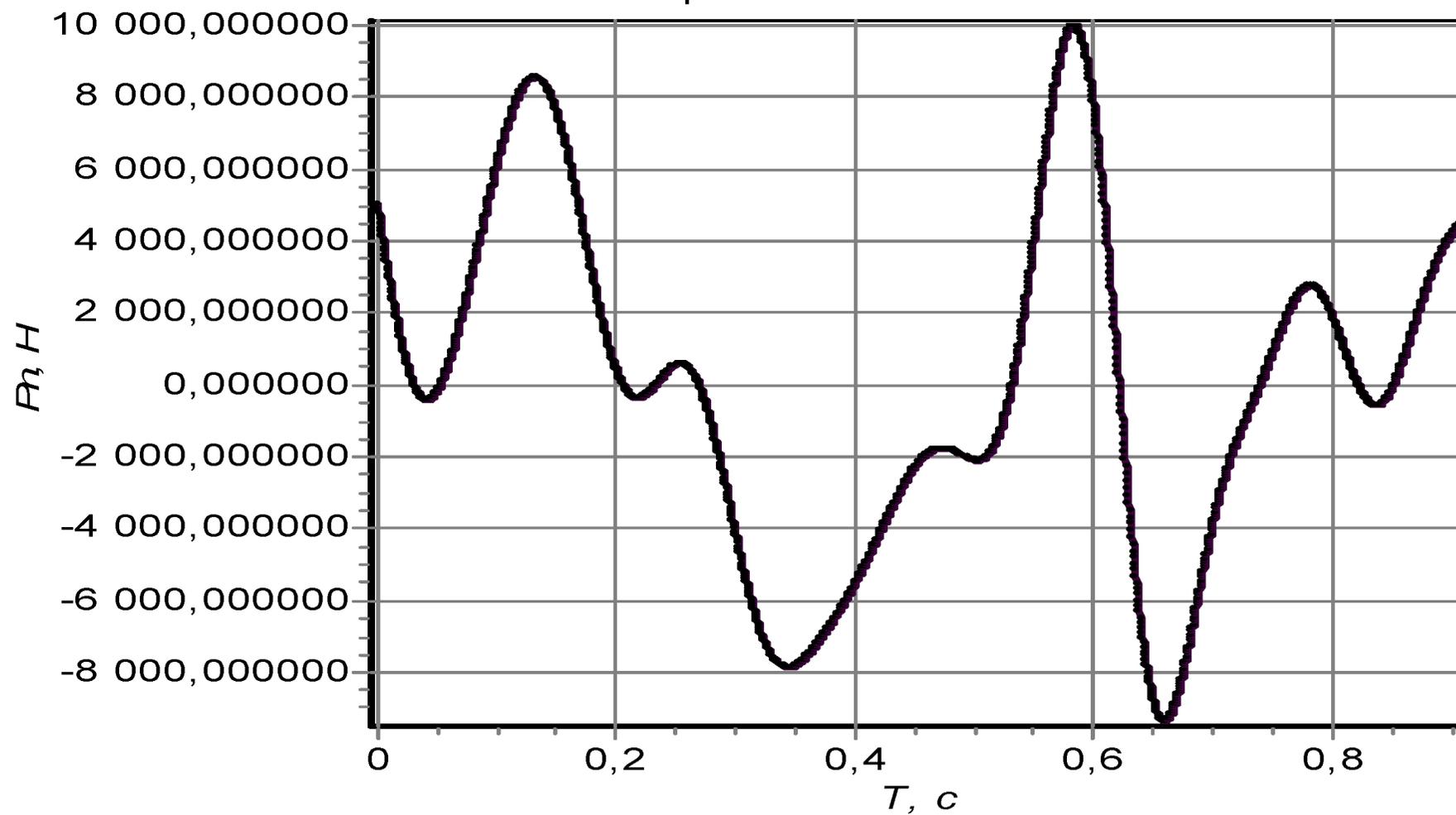


Рисунок №

Пульсационное возмущение
Серия "d"

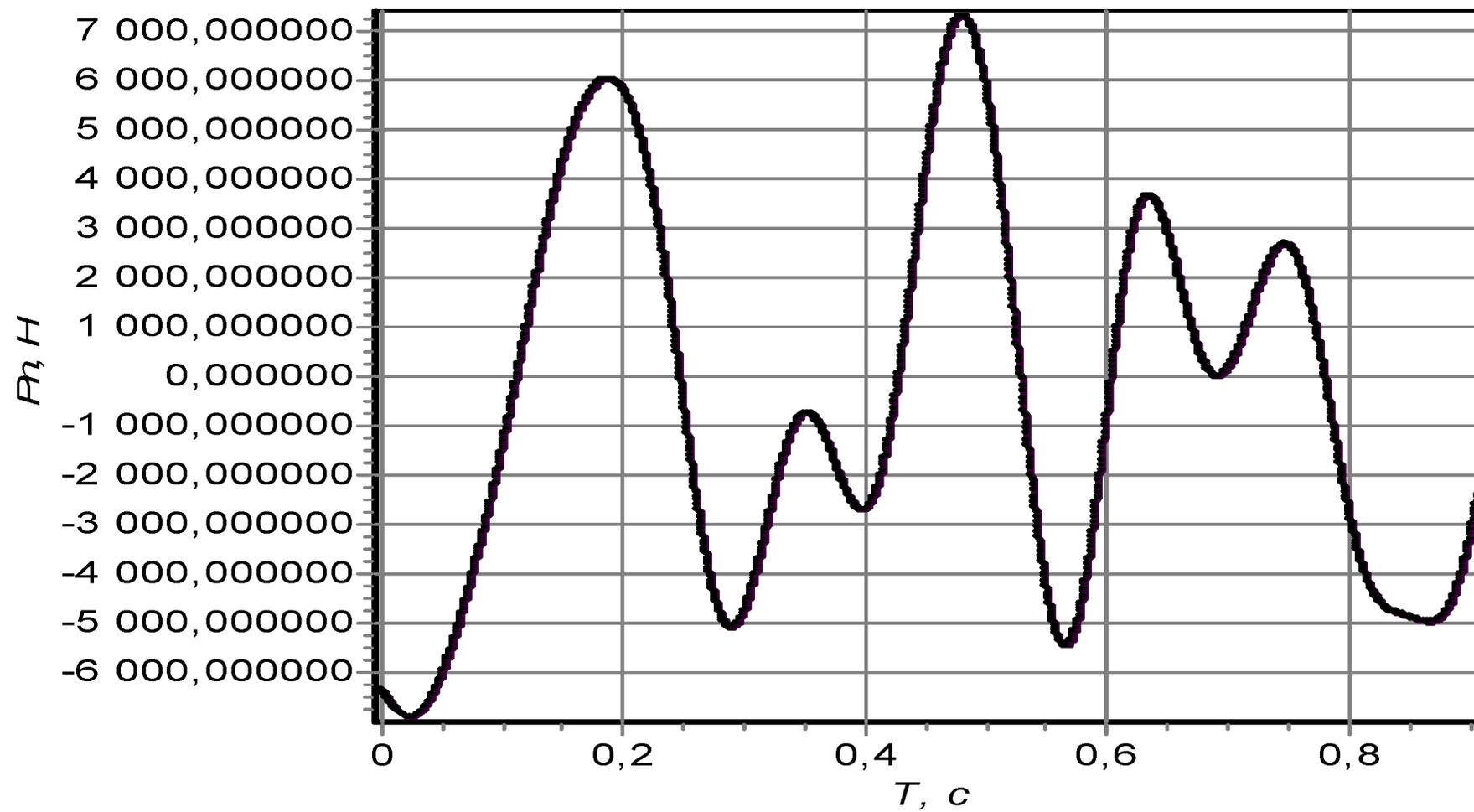


Рисунок №

Пульсационное возмущение
Серия "f"

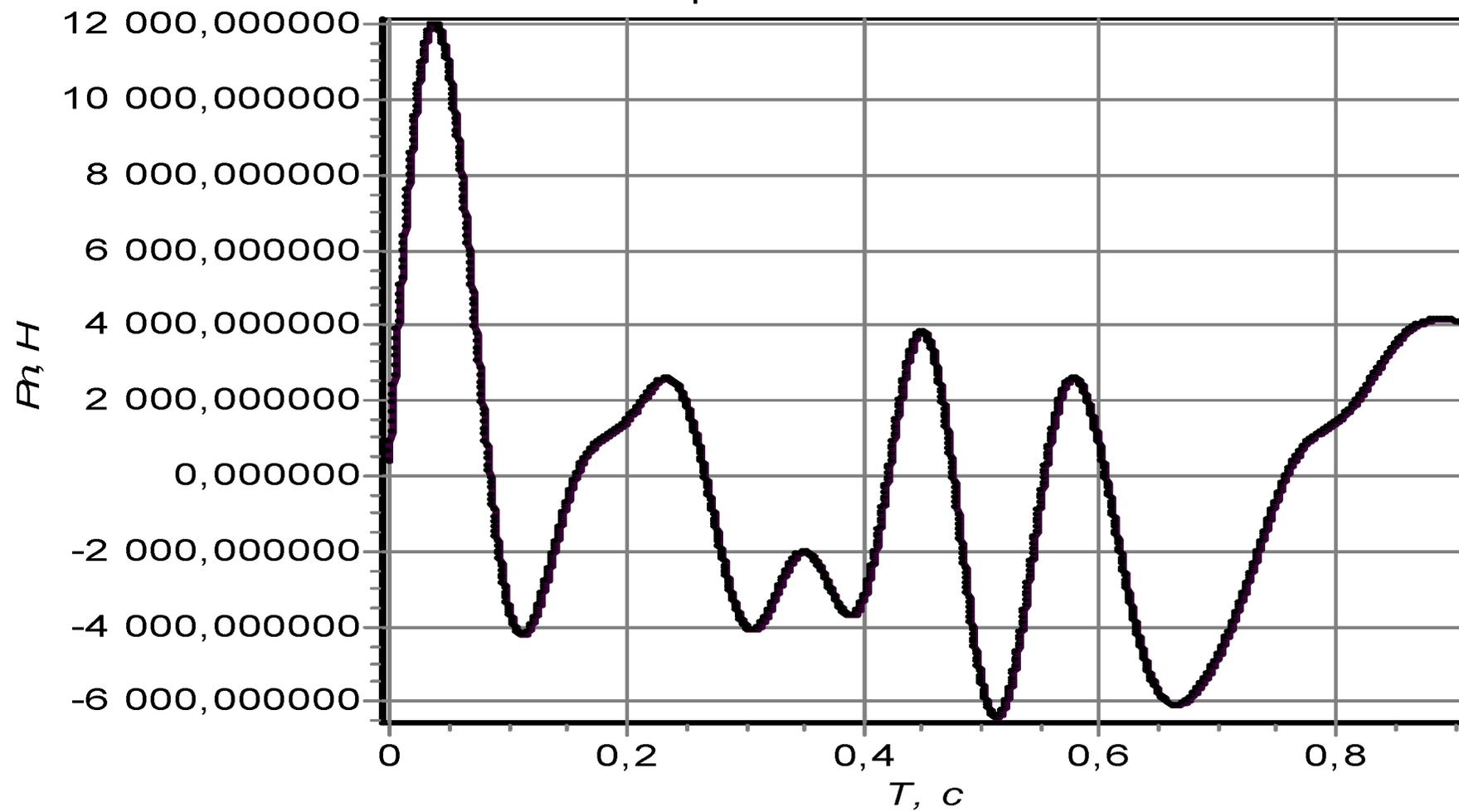


Рисунок №

Пульсационное возмущение
Серия "L"

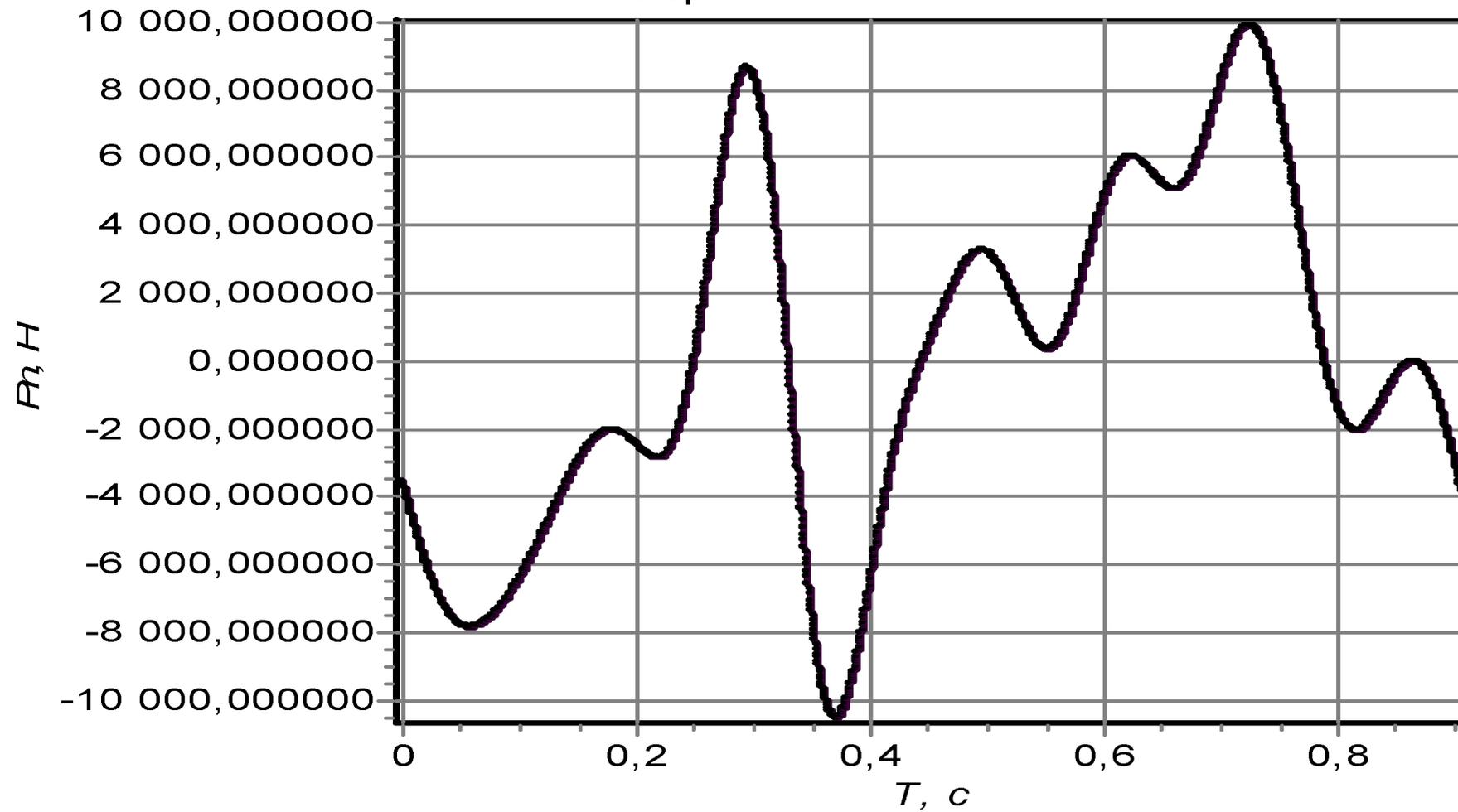


Рисунок №

Пульсационное возмущение
Серия "n"

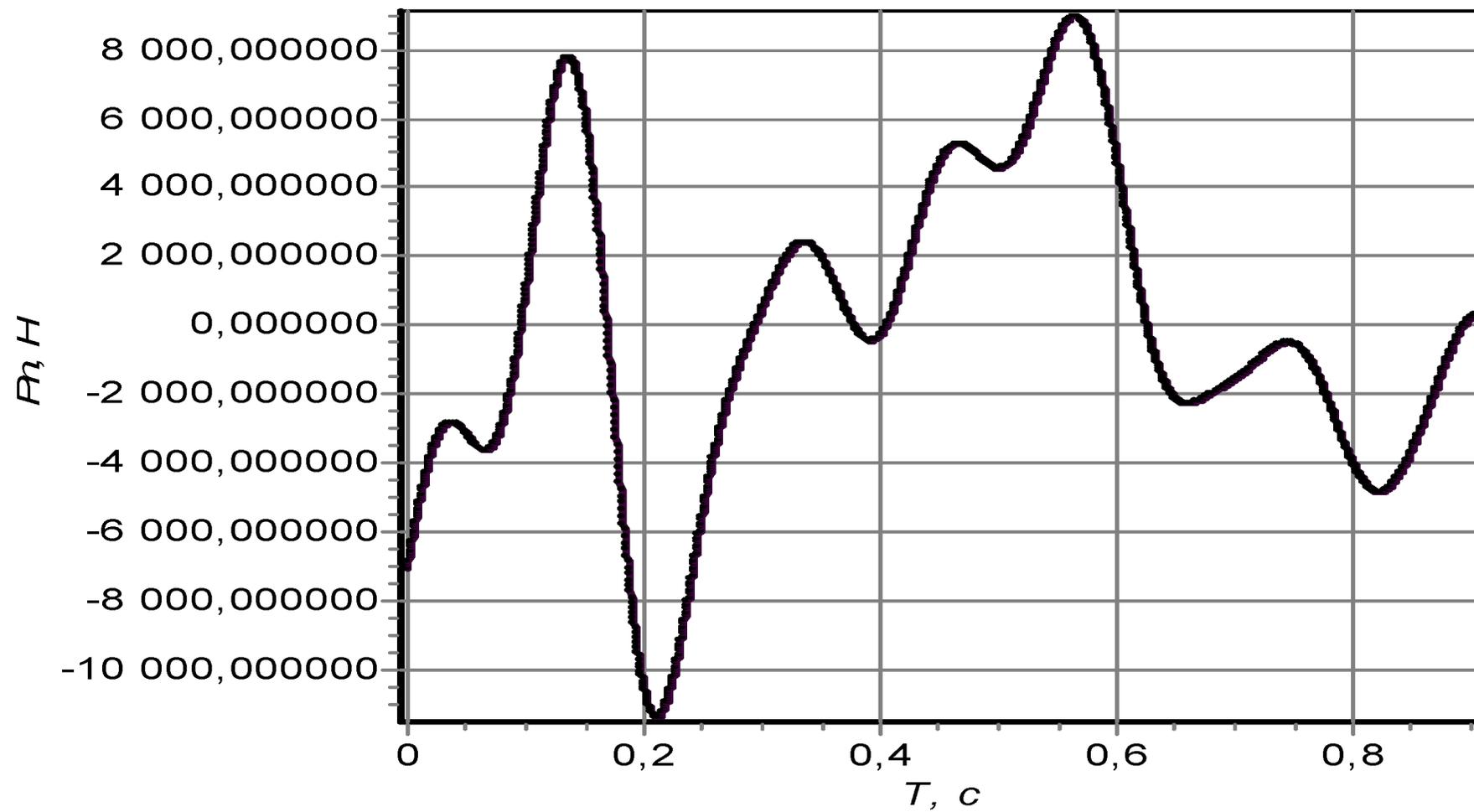


Рисунок №

При прохождении РН трансзвуковой зоны возможно воздействие на неё пульсаций давления, главный вектор которого, именуемый далее пульсационной силой, действует в поперечном направлении в любой меридиональной плоскости. Временная диаграмма модуля пульсационной силы $P_n(t)$, где t – относительное время, отсчитываемое от начала возникновения пульсаций, определена экспериментально в разработанном ЦНИИМаш отчёте 03/112-1.

Несколько экспериментальных серий $P_n(t)$ – с, d, f, L и n – показаны на рисунках ... Абсцисса x_p точки приложения пульсационной силы $P_n(t)$ в течение времени её действия изменяется в диапазоне $x_{p_{\min}} \leq x_p \leq x_{p_{\max}}$.

Возмущение, создаваемое пульсационной силой, учитывается путем дополнения правых частей уравнений возмущённого движения в канале тангажа (рыскания) возмущающими ускорениями согласно следующим формулам

$$\ddot{y} + \dots = \dots + k_{ny}(x_p, t) \cdot P_n(t);$$

$$\ddot{\beta} + \dots = \dots + k_{n\beta}(x_p, t) \cdot P_n(t);$$

$$\ddot{q}_i + \dots = \dots + k_{ni}(x_p, t) \cdot P_n(t).$$

Значения коэффициентов возмущающих ускорений $k_{ny}(x_p, t)$, $k_{n\beta}(x_p, t)$ и $k_{ni}(x_p, t)$ для серий с, f, L и n приведены в таблице 26, а для серии d – в таблице 27. Закон изменения $x_p(t)$ не определён, поэтому для инженерных оценок допускается принимать значения коэффициентов, равные максимальным на интервале изменения x_p .

Таблица 26 – Коэффициенты возмущающих ускорений от пульсаций давления, соответствующие экспериментальным сериям с, f, L и n.

Параметр	№ тона	T, c					
		47			48		
		$x_p = x_{p_{\min}}$	$x_p = x_{p_{cp}}$	$x_p = x_{p_{\max}}$	$x_p = x_{p_{\min}}$	$x_p = x_{p_{cp}}$	$x_p = x_{p_{\max}}$
$k_{ny}, 1/\kappa\Gamma$		4.33E-06	4.33E-06	4.33E-06	4.36E-06	4.36E-06	4.36E-06
$k_{nq}, 1/\kappa\Gamma \cdot M$		1.13E-06	1.15E-06	1.17E-06	1.13E-06	1.16E-06	1.18E-06
$k_{ni}, 1/\kappa\Gamma$	1	-3.00E-08	-2.51E-08	-2.02E-08	-2.97E-08	-2.47E-08	-1.97E-08
	2	-3.27E-08	-1.20E-08	8.75E-09	-3.04E-08	-9.33E-09	1.17E-08
	3	2.45E-05	2.56E-05	2.68E-05	2.45E-05	2.57E-05	2.69E-05
	4	9.11E-08	9.39E-08	9.68E-08	9.07E-08	9.35E-08	9.63E-08
	5	5.46E-07	5.83E-07	6.20E-07	5.61E-07	5.99E-07	6.38E-07
	6	-9.52E-06	-1.03E-05	-1.10E-05	-9.85E-06	-1.06E-05	-1.14E-05
	7	-1.74E-05	-1.90E-05	-2.05E-05	-1.73E-05	-1.88E-05	-2.04E-05
	8	-3.30E-07	-3.67E-07	-4.05E-07	-3.29E-07	-3.66E-07	-4.04E-07

Таблица 27 – Коэффициенты возмущающих ускорений от пульсаций давления, соответствующие экспериментальной серии d.

Параметр	№ тона	T, c					
		47			48		
		$x_p = x_{p_{\min}}$	$x_p = x_{p_{cp}}$	$x_p = x_{p_{\max}}$	$x_p = x_{p_{\min}}$	$x_p = x_{p_{cp}}$	$x_p = x_{p_{\max}}$
$k_{ny}, 1/\kappa\Gamma$		4.33E-06	4.33E-06	4.33E-06	4.36E-06	4.36E-06	4.36E-06
$k_{nq}, 1/\kappa\Gamma\cdot M$		1.14E-06	1.17E-06	1.19E-06	1.15E-06	1.17E-06	1.19E-06
$k_{ni}, 1/\kappa\Gamma$	1	-2.71E-08	-2.21E-08	-1.72E-08	-2.67E-08	-2.17E-08	-1.67E-08
	2	-2.03E-08	4.58E-10	2.12E-08	-1.78E-08	3.31E-09	2.44E-08
	3	2.52E-05	2.64E-05	2.75E-05	2.52E-05	2.64E-05	2.76E-05
	4	9.28E-08	9.56E-08	9.85E-08	9.23E-08	9.51E-08	9.79E-08
	5	5.68E-07	6.05E-07	6.43E-07	5.84E-07	6.22E-07	6.61E-07
	6	-9.96E-06	-1.07E-05	-1.14E-05	-1.03E-05	-1.11E-05	-1.18E-05
	7	-1.84E-05	-1.99E-05	-2.15E-05	-1.82E-05	-1.98E-05	-2.13E-05
	8	-3.52E-07	-3.90E-07	-4.27E-07	-3.51E-07	-3.88E-07	-4.26E-07

12 Динамические характеристики РН, определяемые упругостью конструкции и подвижностью жидкого наполнения баков

Система уравнений возмущенного движения упругой РН с учетом упругости конструкции и подвижности жидкости в баках приведена в "Исходных данных на разработку системы управления РН 14А14" 353П-14А14-18970-1112.

Номинальные значения ДХ, определяемые упругостью конструкции, приведены в таблицах 13 .. 16.

Относительно знаков для коэффициентов уравнений движения в канале рысканья следует придерживаться замечания, сделанного в разделе 13 "Исходных данных на разработку системы управления РН 14А14" 353П-14А14-18970-1112.

Величину логарифмического декремента колебаний упругого корпуса при анализе устойчивости движения следует принимать равной 0,06.

Разбросы значений ω_1^2 на I-й ступени полёта РН составляют $\pm 8\%$ от их номинальных значений. Разброс значений форм и производных форм составляет $\pm 10\%$, а разброс остальных характеристик, определяемых упругостью конструкции, составляет $\pm 15\%$ от их номинальных значений. Закон распределения в пределах разброса равномерный.

Коэффициенты уравнений движения, характеризующие влияние подвижности жидкого топлива, приведены в таблицах 17 .. 24. Индексы баков соответствуют:

1 - бак окислителя ЦБ;

- 2 - бак горючего ЦБ;
- 3 - бак окислителя ББ;
- 4 - бак горючего ББ;
- 5 - бак окислителя блока "И";
- 6 - бак горючего блока "И".

Коэффициенты R_{ik} и N_{ki} , характеризующие взаимодействие на I ступени полёта изгибных колебаний корпуса РН в плоскости тангажа и колебаний жидкости в баках, приведены в таблице 25. В отличие от стандартной динамической модели учитывается взаимодействие колебаний жидкости не с первым тоном колебаний корпуса, а с третьим, действительно изгибным (см. примечание к таблице 13).

Таблица 13 – Динамические характеристики РН, обусловленные упругостью конструкции, при колебаниях в плоскости тангажа на I ступени полёта

Параметр	№ тона	T, с							
		0.0	12.0	20.0	40.0	46.0	48.0	50.0	57.0
$\omega_i^2, \text{с}^{-2}$	1	19.1	27.9	29.4	34.0	35.3	35.8	36.3	37.9
	2	20.3	29.5	31.1	35.9	37.3	37.8	38.3	40.0
	3	61.3	64.3	66.0	69.5	71.1	71.4	71.8	72.7
	4	89.1	129.8	136.9	158.2	164.6	166.8	168.9	176.4
	5	145.3	160.1	176.8	230.3	252.3	260.3	268.9	302.9
	6	307.0	332.0	358.4	422.2	445.8	451.8	457.7	472.4
	7	410.2	443.6	469.9	557.9	608.0	622.3	637.7	682.9
	8	852.6	1112.4	1204.7	1205.2	1205.2	1205.2	1205.2	1205.3
$\mu_i, \text{с}^{-2}$	1	1.375	1.485	1.584	1.924	2.044	2.087	2.132	2.304
	2	1.372	1.482	1.580	1.918	2.037	2.080	2.125	2.295
	3	1.336	1.444	1.535	1.854	1.967	2.009	2.051	2.216
	4	1.335	1.431	1.501	1.761	1.857	1.892	1.928	2.070
	5	0.473	0.511	0.538	0.652	0.698	0.717	0.736	0.822
	6	4.154	4.804	6.205	-2.183E1	-6.139	-4.649	-3.586	-1.469
	7	1.753	2.005	2.303	3.397	3.830	3.994	4.170	4.911
	8	1.827	2.954	4.807	3.043	3.089	3.164	3.247	3.644
$\nu_i, \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	1	-7.00E-2	-7.72E-2	-8.20E-2	-9.92E-2	-0.106	-0.108	-0.110	-0.119
	2	-7.00E-2	-7.73E-2	-8.21E-2	-9.92E-2	-0.105	-0.108	-0.110	-0.119
	3	-7.85E-2	-8.34E-2	-8.74E-2	-0.103	-0.109	-0.111	-0.113	-0.121
	4	-8.47E-2	-9.50E-2	-9.82E-2	-0.112	-0.118	-0.120	-0.122	-0.130
	5	-3.22E-2	-3.43E-2	-3.61E-2	-4.57E-2	-5.01E-2	-5.19E-2	-5.40E-2	-6.34E-2
	6	-0.335	-0.378	-0.482	1.707	0.487	0.372	0.291	0.130
	7	-0.147	-0.164	-0.185	-0.268	-0.302	-0.316	-0.330	-0.392
	8	-0.187	-0.323	-0.329	-0.259	-0.261	-0.266	-0.272	-0.304

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	Т, с							
		60.0	70.0	76.0	80.0	100.0	107.0	117.4	t_{kl}
$\omega_i^2, \text{с}^{-2}$	1	38.5	44.9	48.6	51.1	65.6	71.2	70.9	57.8
	2	40.7	47.2	51.0	53.6	68.4	74.6	73.9	61.0
	3	73.3	76.5	77.8	79.2	88.8	93.8	98.7	96.7
	4	179.5	209.3	227.1	239.0	309.9	339.6	332.1	269.0
	5	321.6	391.5	441.7	481.4	573.5	593.6	624.1	626.0
	6	481.4	516.9	530.7	551.4	951.6	1205.2	1205.3	1205.3
	7	714.3	842.9	902.9	967.3	1205.3	1279.1	1818.0	1838.5
	8	1205.3	1205.3	1205.3	1205.3	1392.7	1637.5	2280.0	2283.6
$\mu_i, \text{с}^{-2}$	1	2.383	2.604	2.758	2.869	3.388	3.606	3.438	3.249
	2	2.375	2.595	2.748	2.859	3.378	3.595	3.434	3.243
	3	2.292	2.516	2.673	2.786	3.325	3.551	3.417	3.228
	4	2.137	2.303	2.422	2.516	3.014	3.270	3.445	3.305
	5	0.866	1.027	1.258	0.866	2.257	2.709	3.231	3.116
	6	-0.882	0.216	0.696	0.980	2.378	-1.545E1	2.559	2.561
	7	5.300	6.718	8.050	9.374	-4.508	5.179	1.673	1.882
	8	3.825	4.605	5.311	6.128	-6.808E1	-5.809	-0.628	0.786
$\nu_i, \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	1	-0.124	-0.137	-0.147	-0.154	-0.195	-0.215	-0.224	-0.211
	2	-0.124	-0.137	-0.147	-0.154	-0.195	-0.215	-0.224	-0.211
	3	-0.126	-0.139	-0.148	-0.155	-0.195	-0.216	-0.228	-0.218
	4	-0.134	-0.145	-0.153	-0.160	-0.202	-0.228	-0.269	-0.256
	5	-6.89E-2	-9.45E-2	-0.160	0.141	-0.143	-0.184	-0.263	-0.258
	6	8.56E-2	2.75E-3	-3.42E-2	-5.89E-2	-0.233	2.108	-0.196	-0.204
	7	-0.425	-0.552	-0.674	-0.799	0.486	-0.601	-7.97E-2	-0.116
	8	-0.318	-0.383	-0.446	-0.521	6.776	0.659	0.305	7.22E-2

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	Т, с							
		0.0	12.0	20.0	40.0	46.0	48.0	50.0	57.0
$k_i \delta_{g_y}, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	2.58E-3	5.36E-3	5.78E-3	8.04E-3	8.81E-3	9.12E-3	9.44E-3	1.08E-2
	2	1.17E-2	2.04E-2	2.23E-2	3.02E-2	3.31E-2	3.42E-2	3.53E-2	3.99E-2
	3	0.519	0.546	0.564	0.629	0.662	0.672	0.683	0.719
	4	6.41E-3	2.18E-3	2.10E-3	1.93E-3	1.97E-3	1.97E-3	1.98E-3	1.98E-3
	5	1.48E-2	1.75E-2	2.03E-2	2.95E-2	3.37E-2	3.48E-2	3.60E-2	3.80E-2
	6	0.105	9.47E-2	5.69E-2	3.78E-3	2.84E-2	4.16E-2	5.74E-2	0.131
	7	0.467	0.613	0.750	1.011	1.079	1.083	1.082	1.014
	8	3.51E-2	6.48E-3	1.47E-5	2.48E-4	3.16E-4	3.30E-4	3.44E-4	3.70E-4
$k_i \delta_{g_\theta}, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	5.81E-3	1.15E-2	1.22E-2	1.66E-2	1.81E-2	1.87E-2	1.94E-2	2.21E-2
	2	2.63E-2	4.36E-2	4.66E-2	6.20E-2	6.77E-2	6.99E-2	7.21E-2	8.10E-2
	3	1.042	1.064	1.078	1.187	1.246	1.264	1.284	1.351
	4	1.22E-2	3.80E-3	3.53E-3	3.10E-3	3.13E-3	3.13E-3	3.13E-3	3.12E-3
	5	1.93E-2	1.94E-2	1.84E-2	1.29E-2	8.46E-3	6.87E-3	5.04E-3	-1.78E-3
	6	0.532	0.499	0.357	-4.67E-2	-0.101	-0.108	-0.110	-7.38E-2
	7	0.986	1.317	1.683	2.592	2.871	2.917	2.953	2.902
	8	9.70E-2	3.42E-2	1.71E-4	7.49E-4	7.90E-4	8.10E-4	8.31E-4	9.00E-4
$k_i \delta_{g_\beta}, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	0.0	6.50E-4	2.09E-3	1.24E-2	1.70E-2	1.84E-2	1.83E-2	1.72E-2
	2	0.0	2.46E-3	8.01E-3	4.62E-2	6.36E-2	6.85E-2	6.81E-2	6.31E-2
	3	0.0	6.04E-2	0.186	0.889	1.175	1.245	1.218	1.056
	4	0.0	2.20E-4	6.23E-4	2.37E-3	3.01E-3	3.14E-3	3.03E-3	2.48E-3
	5	0.0	-1.05E-4	-9.94E-4	-1.63E-2	-2.74E-2	-3.04E-2	-3.14E-2	-3.39E-2
	6	0.0	2.63E-2	5.68E-2	-3.11E-2	-8.33E-2	-9.25E-2	-8.96E-2	-4.41E-2
	7	0.0	7.23E-2	0.279	1.835	2.556	2.711	2.645	2.132
	8	0.0	1.97E-3	2.84E-5	5.46E-4	7.21E-4	7.72E-4	7.62E-4	6.78E-4

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	T, с							
		60.0	70.0	76.0	80.0	100.0	107.0	117.4	t_{kl}
$k_i \delta_{g_y}, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	1.14E-2	2.06E-2	3.14E-2	4.13E-2	0.220	0.391	0.165	3.24E-2
	2	4.19E-2	6.21E-2	7.89E-2	9.15E-2	0.153	0.156	0.260	0.136
	3	0.739	0.794	0.818	0.843	0.918	0.951	1.557	1.809
	4	2.01E-3	1.96E-3	1.99E-3	2.07E-3	2.87E-3	3.52E-3	4.32E-3	4.23E-3
	5	3.86E-2	3.25E-2	9.71E-3	3.51E-3	0.603	0.780	1.099	1.096
	6	0.173	0.326	0.445	0.529	0.323	1.60E-5	3.45E-4	3.44E-4
	7	0.983	0.844	0.680	0.552	2.85E-4	0.155	1.222	1.329
	8	3.95E-4	5.03E-4	5.38E-4	6.11E-4	1.14E-2	0.586	2.02E-2	4.15E-2
$k_i \delta_{g_0}, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	2.32E-2	4.14E-2	6.28E-2	8.22E-2	0.437	0.779	0.285	0.0
	2	8.50E-2	0.124	0.157	0.181	0.302	0.308	0.447	0.0
	3	1.388	1.488	1.535	1.583	1.756	1.832	2.598	0.0
	4	3.16E-3	3.00E-3	3.01E-3	3.11E-3	4.38E-3	5.47E-3	6.06E-3	0.0
	5	-6.95E-3	-2.81E-2	-2.70E-2	2.31E-2	0.803	1.084	1.396	0.0
	6	-3.89E-2	9.90E-2	0.198	0.218	-0.250	1.35E-4	4.34E-4	0.0
	7	2.874	2.666	2.294	1.988	-2.27E-4	-0.351	2.160	0.0
	8	9.36E-4	1.16E-3	1.28E-3	1.52E-3	-0.136	-0.527	0.102	0.0
$k_i \delta_{g_8}, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	1.71E-2	1.91E-2	2.38E-2	2.75E-2	3.49E-2	3.21E-2	5.51E-3	1.30E-3
	2	6.27E-2	5.74E-2	5.94E-2	6.06E-2	2.41E-2	1.27E-2	8.63E-3	5.47E-3
	3	1.029	0.690	0.584	0.532	0.141	7.57E-2	5.02E-2	6.97E-2
	4	2.38E-3	1.42E-3	1.17E-3	1.07E-3	3.57E-4	2.30E-4	1.18E-4	1.42E-4
	5	-3.76E-2	-3.45E-2	-2.07E-2	1.26E-2	6.93E-2	4.70E-2	2.76E-2	3.28E-2
	6	-1.66E-2	4.68E-2	6.34E-2	4.42E-2	-3.88E-2	7.96E-6	8.93E-6	1.05E-5
	7	1.995	1.147	0.802	0.610	-1.72E-5	-2.26E-2	4.64E-2	5.83E-2
	8	6.64E-4	5.09E-4	4.55E-4	4.74E-4	-9.51E-3	-2.13E-2	2.26E-3	4.02E-3

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	T, с							
		0.0	12.0	20.0	40.0	46.0	48.0	50.0	57.0
$f_i(x_{мбА})$	1	-0.662	-0.725	-0.745	-0.785	-0.789	-0.791	-0.792	-0.796
	2	-0.668	-0.732	-0.752	-0.792	-0.797	-0.798	-0.799	-0.803
	3	-0.857	-0.880	-0.897	-0.919	-0.921	-0.920	-0.920	-0.914
	4	-0.952	-1.091	-1.121	-1.170	-1.174	-1.174	-1.173	-1.167
	5	7.35E-2	8.61E-2	0.109	0.191	0.222	0.237	0.255	0.348
	6	1.614	1.754	2.383	-1.252E1	-4.438	-3.681	-3.149	-2.120
	7	-0.639	-0.568	-0.470	-0.258	-0.207	-0.192	-0.177	-0.127
	8	-0.978	-1.205	1.811	-0.213	-0.24	-0.247	-0.252	-0.263
$f_i(x_{ноА})$	1	-1.111	-0.954	-0.964	-0.951	-0.947	-0.945	-0.942	-0.929
	2	-1.075	-0.913	-0.922	-0.906	-0.902	-0.900	-0.897	-0.883
	3	-0.219	-0.243	-0.265	-0.303	-0.313	-0.316	-0.318	-0.326
	4	0.121	0.423	0.436	0.510	0.514	0.520	0.524	0.551
	5	-0.127	-0.146	-0.168	-0.241	-0.274	-0.288	-0.305	-0.394
	6	4.48E-2	-0.208	-0.696	8.251	3.335	2.860	2.523	1.853
	7	0.938	0.876	0.796	0.623	0.564	0.550	0.536	0.503
	8	1.779	3.147	-5.024	0.454	0.494	0.508	0.521	0.565
$f_i(x_{ноИ})$	1	-1.083	-0.727	-0.725	-0.662	-0.652	-0.646	-0.640	-0.613
	2	-1.008	-0.643	-0.638	-0.571	-0.561	-0.555	-0.549	-0.521
	3	0.686	0.666	0.644	0.600	0.584	0.579	0.573	0.555
	4	1.221	1.606	1.628	1.702	1.704	1.706	1.707	1.711
	5	0.161	0.138	0.112	4.35E-2	1.77E-2	7.79E-3	-3.16E-3	-5.49E-2
	6	0.139	4.89E-2	-0.126	3.489	1.568	1.378	1.245	0.970
	7	0.382	0.413	0.411	0.404	0.405	0.406	0.407	0.416
	8	1.984	5.563	-1.899E1	-1.046	-0.720	-0.658	-0.600	-0.478

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	T, с							
		60.0	70.0	76.0	80.0	100.0	107.0	117.4	t_{kl}
$f_i(x_{мбА})$	1	-0.796	-0.800	-0.799	-0.793	-0.720	-0.669	-0.548	-0.518
	2	-0.803	-0.807	-0.805	-0.799	-0.726	-0.675	-0.553	-0.522
	3	-0.911	-0.896	-0.881	-0.868	-0.768	-0.711	-0.593	-0.583
	4	-1.162	-1.166	-1.154	-1.140	-1.016	-0.945	-0.810	-0.781
	5	0.411	0.811	2.538	-7.699	-1.039	-0.924	-0.780	-0.774
	6	-1.854	-1.367	-1.133	-0.938	-0.228	-1.861	-0.502	-0.500
	7	-0.107	-6.65E-2	-3.08E-2	-8.55E-3	-0.596	-0.157	-0.114	-0.113
	8	-0.267	-0.279	-0.272	-0.260	-0.993	-0.202	0.687	0.447
$f_i(x_{ноА})$	1	-0.924	-0.836	-0.780	-0.748	-0.578	-0.522	-0.541	-0.676
	2	-0.878	-0.791	-0.737	-0.705	-0.539	-0.481	-0.508	-0.638
	3	-0.329	-0.332	-0.330	-0.328	-0.298	-0.278	-0.286	-0.306
	4	0.555	0.647	0.705	0.726	0.773	0.756	0.593	0.434
	5	-0.458	-0.882	-2.708	8.203	1.158	1.042	0.889	0.882
	6	1.678	1.339	1.149	0.969	0.255	2.968	0.831	0.830
	7	0.485	0.439	0.435	0.435	0.711	0.208	0.184	0.187
	8	0.576	0.614	0.636	0.645	-0.916	6.98E-2	-1.337	-0.870
$f_i(x_{ноИ})$	1	-0.606	-0.443	-0.346	-0.295	-6.76E-2	-1.97E-2	-0.171	-0.444
	2	-0.514	-0.354	-0.260	-0.211	6.65E-3	5.79E-2	-0.108	-0.370
	3	0.546	0.524	0.513	0.504	0.459	0.438	0.315	0.271
	4	1.706	1.731	1.723	1.702	1.494	1.376	1.213	1.176
	5	-9.00E-2	-0.321	-1.261	4.393	0.792	0.745	0.678	0.676
	6	0.904	0.797	0.712	0.633	0.375	-3.129	1.20E-2	2.56E-2
	7	0.424	0.481	0.533	0.603	-0.495	0.774	-0.506	-0.478
	8	-0.401	-0.123	-3.62E-2	7.87E-2	-5.171	-0.642	-0.711	-0.553

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	Т, с							
		0.0	12.0	20.0	40.0	46.0	48.0	50.0	57.0
$f'_i(x_{мбА}),$ $м^{-1}$	1	-7.09E-2	-6.09E-2	-6.09E-2	-5.90E-2	-5.87E-2	-5.85E-2	-5.84E-2	-5.75E-2
	2	-6.89E-2	-5.85E-2	-5.84E-2	-5.64E-2	-5.61E-2	-5.59E-2	-5.57E-2	-5.49E-2
	3	-1.54E-2	-1.59E-2	-1.66E-2	-1.81E-2	-1.87E-2	-1.89E-2	-1.91E-2	-1.97E-2
	4	1.05E-2	4.05E-2	4.33E-2	5.21E-2	5.27E-2	5.32E-2	5.35E-2	5.55E-2
	5	-5.04E-2	-5.32E-2	-5.72E-2	-7.20E-2	-7.85E-2	-8.14E-2	-8.48E-2	-0.103
	6	-0.197	-0.239	-0.356	2.079	0.750	0.623	0.534	0.356
	7	0.107	9.37E-2	7.47E-2	2.86E-2	1.28E-2	8.10E-3	3.33E-3	-1.23E-2
	8	0.259	0.374	0.506	0.212	0.179	0.173	0.168	0.156
$f'_i(x_{ноА}),$ $м^{-1}$	1	-1.60E-2	1.08E-2	1.24E-2	1.90E-2	1.99E-2	2.04E-2	2.09E-2	2.28E-2
	2	-1.10E-2	1.66E-2	1.83E-2	2.52E-2	2.62E-2	2.66E-2	2.71E-2	2.91E-2
	3	0.109	0.110	0.109	0.108	0.107	0.107	0.106	0.105
	4	0.150	0.184	0.188	0.197	0.198	0.198	0.198	0.198
	5	1.67E-2	1.46E-2	1.18E-2	3.65E-3	5.57E-4	-7.79E-4	-2.28E-3	-1.00E-2
	6	-5.57E-2	-6.61E-2	-0.103	0.799	0.317	0.271	0.239	0.177
	7	6.31E-2	6.43E-2	6.16E-2	5.74E-2	5.81E-2	5.84E-2	5.89E-2	6.09E-2
	8	0.320	0.936	-3.309	-0.180	-0.124	-0.112	-0.102	-7.94E-2
$f'_i(x_{ноII}),$ $м^{-1}$	1	1.81E-2	5.44E-2	5.68E-2	6.59E-2	6.72E-2	6.78E-2	6.84E-2	7.08E-2
	2	2.53E-2	6.24E-2	6.49E-2	7.43E-2	7.56E-2	7.62E-2	7.68E-2	7.92E-2
	3	0.173	0.174	0.174	0.173	0.172	0.172	0.171	0.169
	4	0.195	0.189	0.188	0.180	0.179	0.177	0.176	0.169
	5	6.76E-2	6.79E-2	6.88E-2	7.69E-2	8.18E-2	8.42E-2	8.71E-2	0.104
	6	6.36E-2	0.119	0.239	-2.037	-0.783	-0.663	-0.578	-0.412
	7	-0.215	-0.192	-0.168	-0.120	-0.105	-0.102	-9.84E-2	-8.97E-2
	8	-0.295	-0.431	6.67E-2	-0.199	-0.188	-0.188	-0.188	-0.191

Продолжение таблицы 13

Параметр	№ тона	Т, с							
		60.0	70.0	76.0	80.0	100.0	107.0	117.4	t_{kl}
$f'_i(x_{мбА}),$ $м^{-1}$	1	-5.73E-2	-5.24E-2	-4.94E-2	-4.78E-2	-4.07E-2	-3.92E-2	-4.40E-2	-5.21E-2
	2	-5.46E-2	-4.97E-2	-4.68E-2	-4.53E-2	-3.84E-2	-3.68E-2	-4.21E-2	-4.99E-2
	3	-2.01E-2	-2.09E-2	-2.13E-2	-2.16E-2	-2.33E-2	-2.42E-2	-2.86E-2	-3.00E-2
	4	5.56E-2	6.48E-2	7.03E-2	7.20E-2	7.37E-2	7.00E-2	4.66E-2	2.95E-2
	5	-0.115	-0.196	-0.536	1.472	0.158	0.133	0.101	9.89E-2
	6	0.310	0.224	0.179	0.141	-3.75E-2	1.520	0.166	0.162
	7	-2.09E-2	-5.36E-2	-7.63E-2	-0.103	0.294	-0.198	0.220	0.211
	8	0.146	0.103	8.53E-2	5.89E-2	1.644	0.250	0.406	0.313
$f'_i(x_{ноА}),$ $м^{-1}$	1	2.32E-2	3.37E-2	3.97E-2	4.25E-2	5.18E-2	5.13E-2	3.34E-2	1.39E-2
	2	2.95E-2	3.98E-2	4.56E-2	4.82E-2	5.69E-2	5.67E-2	3.77E-2	1.89E-2
	3	0.104	0.102	9.98E-2	9.83E-2	8.85E-2	8.33E-2	6.74E-2	6.39E-2
	4	0.197	0.200	0.200	0.198	0.178	0.167	0.147	0.141
	5	-1.52E-2	-5.05E-2	-0.202	0.709	0.129	0.122	0.112	0.112
	6	0.161	0.136	0.120	0.106	7.27E-2	-0.592	1.16E-2	1.42E-2
	7	6.31E-2	7.73E-2	8.80E-2	0.103	-8.29E-2	0.165	-0.120	-0.113
	8	-6.55E-2	-1.51E-2	1.36E-3	2.27E-2	-1.069	-0.141	-0.382	-0.278
$f'_i(x_{ноII}),$ $м^{-1}$	1	7.13E-2	8.44E-2	9.17E-2	9.50E-2	0.104	0.103	7.88E-2	5.42E-2
	2	7.97E-2	9.24E-2	9.94E-2	0.102	0.111	0.109	8.43E-2	6.10E-2
	3	0.168	0.165	0.163	0.161	0.147	0.139	0.119	0.115
	4	0.166	0.143	0.124	0.112	5.11E-2	3.06E-2	4.81E-2	9.14E-2
	5	0.117	0.205	0.598	-1.751	-0.231	-0.205	-0.172	-0.171
	6	-0.368	-0.283	-0.239	-0.198	-4.43E-2	-1.002	-0.235	-0.234
	7	-8.52E-2	-7.34E-2	-7.08E-2	-6.89E-2	-0.232	-2.79E-2	-5.00E-2	-5.07E-2
	8	-0.189	-0.183	-0.183	-0.178	6.14E-2	-2.97E-2	0.634	0.424

Примечание: 1-й, 2-й и 4-й тона обусловлены подвижностью жидкости в баках головного блока.

Таблица 14 – Динамические характеристики РН, обусловленные упругостью конструкции, при колебаниях в канале крена на I ступени полёта

Параметр	№ тона	T, с										
		0.0	20.0	40.0	57.0	60.0	76.0	80.0	100.0	107.0	117.4	t_{kl}
$\omega_i^2, \text{с}^{-2}$	1	19.0	29.3	33.8	37.7	38.4	48.6	51.2	66.4	72.8	71.2	57.7
	2	20.0	30.8	35.6	39.7	40.4	51.2	53.9	69.9	76.7	75.2	60.9
	3	88.6	136.4	157.7	175.8	179.0	226.4	238.3	309.2	338.9	331.3	268.2
	4	351.0	455.3	602.1	768.5	803.3	924.0	942.0	1005.1	1031.5	1085.1	1088.6
	5	967.7	988.7	995.0	1016.6	1027.3	1178.1	1202.9	1203.6	1203.7	1204	1204.1
$L_i, \text{с}^{-2}$	1	-1.95E-2	2.14E-2	0.113	0.228	0.255	0.473	0.544	1.022	1.284	1.327	0.896
	2	-2.03E-2	2.32E-2	0.121	0.242	0.27	0.501	0.576	1.081	1.358	1.404	0.948
	3	5.92E-2	0.438	1.023	1.714	1.872	3.318	3.752	6.502	7.883	7.392	4.794
	4	6.18	7.712	1.07E+1	1.54E+1	1.68E+1	2.90E+1	3.41E+1	4.99E+1	5.11E+1	4.51E+1	3.76E+1
	5	3.548	3.132	4.242	8.425	9.983	1.92E+1	2.46E+1	6.43E+1	6.88E+1	5.61E+1	4.64E+1
$k_{i\delta\varphi_{\psi}}, \text{с}^{-2}$	1	6.99E-5	9.39E-5	1.39E-4	2.11E-4	2.31E-4	3.72E-4	4.32E-4	1.02E-3	1.53E-3	3.09E-3	3.04E-3
	2	1.43E-4	1.90E-4	2.82E-4	4.32E-4	4.72E-4	7.64E-4	8.92E-4	2.20E-3	3.43E-3	7.94E-3	8.09E-3
	3	0.09E-9	0.11E-9	0.17E-9	0.29E-9	0.32E-9	0.59E-9	0.72E-9	2.20E-9	3.73E-9	8.61E-9	7.89E-9
	4	0.178	0.224	0.265	0.267	0.246	6.87E-2	4.52E-2	2.97E-2	4.45E-2	0.107	0.111
	5	8.08E-2	6.06E-2	6.44E-2	0.115	0.141	0.315	4.27E-3	9.82E-5	1.42E-4	6.33E-4	6.94E-4
$k_{i\delta\varphi_{\theta}}, \text{с}^{-2}$	1	5.31E-4	7.00E-4	1.03E-3	1.55E-3	1.68E-3	2.70E-3	3.13E-3	7.32E-3	1.09E-2	1.83E-2	0.0
	2	1.09E-3	1.42E-3	2.09E-3	3.17E-3	3.46E-3	5.57E-3	6.48E-3	1.58E-2	2.45E-2	4.71E-2	0.0
	3	0.81E-9	1.06E-9	1.67E-9	2.73E-9	3.02E-9	5.55E-9	6.68E-9	1.94E-8	3.17E-8	5.66E-8	0.0
	4	1.503	1.799	2.127	2.25	2.141	0.841	0.622	0.469	0.629	1.038	0.0
	5	0.223	0.101	0.107	0.364	0.520	1.871	3.10E-2	1.57E-3	2.20E-3	6.60E-3	0.0
$k_{i\delta\varphi_{\epsilon}}, \text{с}^{-2}$	1	0.0	1.65E-4	1.05E-3	1.64E-3	1.70E-3	1.40E-3	1.43E-3	8.00E-4	6.15E-4	4.83E-4	5.62E-4
	2	0.0	3.33E-4	2.14E-3	3.36E-3	3.48E-3	2.88E-3	2.97E-3	1.73E-3	1.38E-3	1.24E-3	1.50E-3
	3	0.0	0.24E-9	1.65E-9	2.83E-9	2.98E-9	2.83E-9	3.03E-9	2.12E-9	1.80E-9	1.52E-9	1.60E-9
	4	0.0	0.506	2.650	2.960	2.667	0.510	0.327	5.58E-2	3.85E-2	2.98E-2	3.62E-2
	5	0.0	5.17E-2	0.241	0.651	0.837	1.363	1.91E-2	1.97E-4	1.39E-4	1.92E-4	2.47E-4

Продолжение таблицы 14

Параметр	№ тона	T, с										
		0.0	20.0	40.0	57.0	60.0	76.0	80.0	100.0	107.0	117.4	t_{kl}
$\varphi_i(x_{мбА})$	1	0.686	0.556	0.553	0.575	0.582	0.567	0.575	0.643	0.687	0.805	0.847
	2	0.668	0.530	0.527	0.551	0.559	0.543	0.551	0.623	0.669	0.794	0.838
	3	-0.789	-1.758	-1.741	-1.516	-1.453	-1.505	-1.440	-0.955	-0.678	4.45E-3	0.235
	4	-0.190	-0.152	-0.291	-0.792	-1.045	-4.368	-5.754	-7.492	-6.000	-3.547	-3.428
	5	4.373	5.234	5.22	3.841	3.378	1.224	4.35E-2	-7.696	-7.214	-4.369	-4.208
$\varphi_i(x_{ноА})$	1	0.565	0.387	0.385	0.417	0.428	0.409	0.419	0.513	0.573	0.734	0.792
	2	0.539	0.351	0.349	0.384	0.395	0.376	0.387	0.486	0.550	0.719	0.780
	3	-1.465	-2.777	-2.737	-2.42	-2.332	-2.386	-2.294	-1.626	-1.249	-0.335	-2.94E-2
	4	-0.397	-0.355	-0.532	-1.172	-1.495	-5.782	-7.575	-9.883	-7.979	-4.832	-4.679
	5	5.465	6.596	6.584	4.811	4.218	1.454	-4.19E-2	-9.958	-9.403	-5.834	-5.630
$\varphi_i(x_{ноII})$	1	0.408	0.172	0.174	0.220	0.235	0.213	0.228	0.355	0.435	0.648	0.724
	2	0.373	0.124	0.127	0.176	0.192	0.169	0.185	0.320	0.404	0.629	0.708
	3	-2.315	-4.033	-3.95	-3.507	-3.386	-3.424	-3.298	-2.400	-1.905	-0.728	-0.339
	4	-0.422	-0.384	-0.593	-1.354	-1.736	-6.896	-9.072	-1.20E+1	-9.756	-5.993	-5.809
	5	6.591	7.990	7.984	5.860	5.156	1.859	0.115	-1.17E+1	-1.12E+1	-7.082	-6.845

Примечание: Первые 3 тона обусловлены подвижностью жидкости в баках головного блока.

Таблица 15 – Динамические характеристики РН, обусловленные упругостью конструкции, при колебаниях в плоскости тангажа на II ступени полёта

Параметр	№ тона	T, с						
		$t_{нII}$	160.0	200.0	240.0	260.0	286.9	$t_{кII}$
$\omega_i^2, \text{с}^{-2}$	1	18.9	23.0	27.0	33.0	36.8	12.6	8.4
	2	20.4	24.8	29.2	35.7	39.9	13.6	9.1
	3	87.5	106.2	124.8	152.2	169.9	58.2	38.7
	4	136.8	152.5	176.8	216.5	245.2	289.8	290.0
	5	719.0	740.4	770.6	865.1	1013.7	1205.3	1205.3
	6	1205.4	1205.4	1205.4	1205.4	1205.5	1907.7	1915.9
$\mu_i, \text{с}^{-2}$	1	0.789	0.960	1.167	1.448	1.614	1.660	8.11E-2
	2	0.790	0.960	1.166	1.443	1.605	1.628	7.94E-2
	3	0.923	1.135	1.388	1.742	1.960	1.548	7.12E-2
	4	1.026	1.242	1.522	1.936	2.214	2.611	0.129
	5	1.610	1.926	2.342	3.036	3.667	5.107	0.253
	6	1.824	2.171	2.629	3.336	3.869	6.100	0.302
$\nu_i, \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	1	-6.21E-2	-7.87E-2	-0.104	-0.152	-0.197	-0.284	-1.38E-2
	2	-6.22E-2	-7.87E-2	-0.103	-0.151	-0.195	-0.273	-1.32E-2
	3	-8.83E-2	-0.112	-0.144	-0.210	-0.274	-0.247	-1.05E-2
	4	-0.108	-0.131	-0.169	-0.248	-0.331	-0.593	-2.94E-2
	5	-0.223	-0.259	-0.320	-0.467	-0.654	-1.406	-6.98E-2
	6	-0.265	-0.305	-0.373	-0.527	-0.700	-1.730	-8.61E-2
$k_i \delta_g, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	1	5.55E-3	5.50E-3	5.23E-3	5.17E-3	5.38E-3	5.41E-3	5.25E-3
	2	4.58E-2	4.76E-2	4.76E-2	4.93E-2	5.27E-2	5.60E-2	5.44E-2
	3	3.49E-2	5.51E-2	6.42E-2	7.31E-2	7.59E-2	1.22E-2	1.02E-2
	4	5.479	5.990	6.563	7.170	7.309	7.419	7.436
	5	3.570	3.338	3.544	4.843	6.358	1.12E-3	1.10E-3
	6	1.00E-3	7.83E-4	7.22E-4	1.29E-3	5.44E-3	5.941	5.825

Продолжение таблицы 15

Параметр	№ тона	Т, с						
		$t_{нII}$	160.0	200.0	240.0	260.0	286.9	$t_{кII}$
$f_i(x_{мбА})$	1	-0.131	-0.165	-0.195	-0.208	-0.195	-5.83E-2	-5.06E-2
	2	-0.128	-0.161	-0.189	-0.200	-0.184	-3.65E-2	-2.79E-2
	3	-0.192	-0.231	-0.262	-0.284	-0.280	6.90E-2	0.116
	4	-0.259	-0.290	-0.328	-0.368	-0.385	-0.369	-0.368
	5	-0.453	-0.507	-0.579	-0.694	-0.813	-1.241	-1.244
	6	-0.388	-0.464	-0.561	-0.703	-0.829	-1.434	-1.441
$f_i(x_{ноА})$	1	-0.807	-0.851	-0.900	-0.928	-0.913	-0.804	-0.805
	2	-0.790	-0.830	-0.875	-0.897	-0.879	-0.762	-0.762
	3	-0.400	-0.408	-0.443	-0.486	-0.507	-0.421	-0.406
	4	-0.247	-0.283	-0.330	-0.400	-0.449	-0.513	-0.513
	5	0.449	0.452	0.392	0.224	8.19E-2	-0.589	-0.595
	6	0.548	0.648	0.679	0.496	0.224	-0.350	-0.356
$f_i(x_{ноII})$	1	-1.108	-1.150	-1.206	-1.237	-1.221	-1.190	-1.204
	2	-1.075	-1.112	-1.163	-1.185	-1.164	-1.135	-1.150
	3	-0.227	-0.204	-0.229	-0.262	-0.283	-0.567	-0.610
	4	8.85E-2	5.23E-2	8.61E-3	-4.73E-2	-8.34E-2	-0.138	-0.138
	5	0.420	0.446	0.425	0.341	0.281	0.194	0.193
	6	0.201	0.295	0.344	0.325	0.283	0.256	0.257
$f'_i(x_{мбА}),$ $м^{-1}$	1	-6.82E-2	-6.96E-2	-7.12E-2	-7.22E-2	-7.17E-2	-6.89E-2	-6.91E-2
	2	-6.74E-2	-6.87E-2	-7.01E-2	-7.09E-2	-7.02E-2	-6.72E-2	-6.74E-2
	3	-4.78E-2	-4.69E-2	-4.73E-2	-4.83E-2	-4.92E-2	-5.24E-2	-5.26E-2
	4	-3.83E-2	-3.88E-2	-3.95E-2	-4.11E-2	-4.29E-2	-4.70E-2	-4.71E-2
	5	2.84E-2	2.64E-2	2.37E-2	1.91E-2	1.69E-2	-1.59E-2	-1.62E-2
	6	5.63E-2	5.48E-2	5.37E-2	4.49E-2	3.09E-2	1.73E-2	1.71E-2
$f'_i(x_{ноА}),$ $м^{-1}$	1	-5.49E-2	-5.55E-2	-5.71E-2	-5.83E-2	-5.83E-2	-6.54E-2	-6.68E-2
	2	-5.31E-2	-5.33E-2	-5.48E-2	-5.57E-2	-5.56E-2	-6.34E-2	-6.49E-2
	3	4.79E-3	8.51E-3	8.40E-3	6.91E-3	4.83E-3	-3.58E-2	-4.14E-2
	4	3.03E-2	2.96E-2	2.85E-2	2.66E-2	2.47E-2	1.91E-2	1.90E-2
	5	7.59E-2	8.36E-2	8.65E-2	8.56E-2	8.77E-2	0.106	0.106
	6	4.93E-2	6.95E-2	8.33E-2	8.92E-2	9.11E-2	0.128	0.129
$f'_i(x_{ноII}),$ $м^{-1}$	1	-4.48E-2	-4.41E-2	-4.48E-2	-4.46E-2	-4.40E-2	-6.13E-2	-6.41E-2
	2	-4.19E-2	-4.08E-2	-4.11E-2	-4.05E-2	-3.98E-2	-5.89E-2	-6.19E-2
	3	4.59E-2	5.22E-2	5.55E-2	6.02E-2	6.23E-2	-1.37E-2	-2.63E-2
	4	7.19E-2	7.25E-2	7.48E-2	8.10E-2	8.70E-2	9.53E-2	9.52E-2
	5	-8.52E-2	-8.64E-2	-7.72E-2	-5.02E-2	-2.71E-2	0.126	0.128
	6	-0.147	-0.171	-0.179	-0.137	-7.11E-2	5.02E-2	5.15E-2

Примечание: Первые 3 тона обусловлены подвижностью жидкости в баках головного блока.

Таблица 16 – Динамические характеристики РН, обусловленные упругостью конструкции, при колебаниях в плоскости тангажа на III ступени полёта

Параметр	№ тона	Т, с								
		0.0*	40.0*	0.0	40.0	80.0	120.0	160.0	200.0	$t_{кIII}$
$\omega_i^2, \text{с}^{-2}$	1	16.3	19.3	16.4	19.3	22.1	25.8	31.1	39.0	22.8
	2	17.9	21.2	18.2	21.6	24.8	29.1	35.2	44.7	26.8
	3	75.8	89.5	75.9	89.7	102.7	119.8	144.0	180.6	105.6
	4	1205.3	1205.3	1252.1	1252.1	1252.1	1252.1	1252.1	1252.2	1252.2
	5	2157.0	2167.2	3016.3	3152.6	3314.4	3498.7	3734.4	4010.3	4674
	6	2522.8	2523.7	18001.2	19232.1	20747.6	22885.5	26165.4	31014.4	38849.9
$\mu_i, \text{с}^{-2}$	1	-6.71E+1	-1.05E+1	7.259	1.34E+1	1.48E+2	-1.39E+1	-5.314	-1.983	0.584
	2	3.47E+1	-2.13E+1	5.991	9.446	2.39E+1	-3.40E+1	-7.938	-2.885	0.193
	3	2.914	3.544	2.780	3.314	4.064	5.143	6.830	1.04E+1	1.84E+1
	4	2.074	2.341	2.189	2.486	2.850	3.272	3.733	4.199	4.215
	5	2.411	2.796	2.463	2.842	3.329	3.929	4.646	5.485	5.695
	6	2.337	2.690	3.12	3.648	4.368	5.338	6.669	8.801	1.10E+1
$\nu_i, \text{M}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	1	2.85E+1	4.687	-2.696	-5.135	-6.02E+1	6.332	3.057	2.014	1.555
	2	-1.38E+1	8.890	-2.086	-3.379	-9.035	1.42E+1	4.075	2.386	1.786
	3	-0.601	-0.751	-0.541	-0.657	-0.834	-1.119	-1.655	-3.093	-8.984
	4	-0.251	-0.284	-0.257	-0.290	-0.332	-0.386	-0.453	-0.542	-0.588
	5	-0.391	-0.461	-0.389	-0.448	-0.530	-0.644	-0.808	-1.075	-1.462
	6	-0.361	-0.420	-0.707	-0.808	-0.962	-1.199	-1.597	-2.452	-4.602
$k_{i\delta_g}, \text{M} \cdot \text{с}^{-2}$	1	2.75E-7	6.57E-6	1.75E-5	5.36E-6	-5.98E-8	9.27E-6	5.78E-5	2.50E-4	1.32E-3
	2	2.50E-6	2.78E-5	5.04E-4	2.43E-4	3.87E-5	4.88E-5	8.29E-4	5.27E-3	4.33E-2
	3	1.43E-4	1.18E-4	3.57E-4	3.17E-4	2.77E-4	2.33E-4	1.86E-4	1.16E-4	6.54E-5
	4	1.75E-5	1.66E-5	1.91E-5	1.81E-5	1.77E-5	1.83E-5	2.10E-5	2.90E-5	7.50E-5
	5	1.67E-2	1.37E-2	0.197	0.194	0.196	0.204	0.232	0.299	0.763
	6	1.60E-3	1.38E-3	0.200	0.211	0.227	0.250	0.292	0.335	0.538

Продолжение таблицы 16

Параметр	№ тона	Т, с								
		0.0*	40.0*	0.0	40.0	80.0	120.0	160.0	200.0	$t_{кIII}$
$f_i(x_{ноII})$	1	4.05E+1	6.524	-3.061	-5.678	-6.33E+1	6.170	2.644	1.489	0.892
	2	-1.95E+1	1.22E+1	-2.352	-3.707	-9.413	1.37E+1	3.456	1.711	0.965
	3	-0.717	-0.871	-0.554	-0.65	-0.768	-0.915	-1.111	-1.552	-2.416
	4	-0.202	-0.216	-0.203	-0.218	-0.220	-0.200	-0.138	-2.05E-2	0.226
	5	-0.387	-0.445	-0.33	-0.368	-0.400	-0.416	-0.393	-0.312	-2.94E-2
	6	-0.337	-0.382	-0.511	-0.584	-0.665	-0.755	-0.84	-0.955	-0.865
$f_i'(x_{ноII}),$ M^{-1}	1	7.969	1.114	-0.818	-1.346	-1.30E+1	1.043	0.332	9.90E-2	-2.16E-2
	2	-4.124	2.267	-0.675	-0.949	-2.099	2.551	0.496	0.144	-7.01E-3
	3	-0.345	-0.376	-0.312	-0.331	-0.355	-0.385	-0.424	-0.513	-0.688
	4	-0.223	-0.226	-0.222	-0.226	-0.227	-0.225	-0.215	-0.194	-0.150
	5	-0.249	-0.262	-0.224	-0.232	-0.239	-0.244	-0.243	-0.232	-0.188
	6	-0.233	-0.244	-0.113	-0.132	-0.150	-0.172	-0.199	-0.232	-0.254
Примечания										
1) Первые 3 тона обусловлены подвижностью жидкости в баках головного блока.										
2) Символом "*" отмечено состояние РН при неотделённом ГО.										

Таблица 17 – Динамические характеристики бака №1 РН на I ступени полёта

T, с	$u_{1,}$ $м^{-1}$	$r_{1,}$ $с^{-2}$	t_1	T_1	$P_{1,}$ $с^{-2}$	$U_{1,}$ $м$	$\varepsilon_{1,}$ $с^{-1}$	$k_{1,}$ $с^{-1}$
0.0	1.379	13.5	-14.117	-1.09E-3	1.04E-3	9.28E-3	0.05	-
12.0	1.370	19.6	-13.394	-1.11E-3	1.62E-3	1.02E-2	0.05	-
20.0	1.364	20.6	-12.867	-1.11E-3	1.78E-3	1.10E-2	0.05	-
40.0	1.350	23.5	-11.450	-1.10E-3	2.26E-3	1.30E-2	0.05	-
46.0	1.345	24.4	-10.982	-1.10E-3	2.44E-3	1.38E-2	0.05	-
48.0	1.344	24.7	-10.820	-1.09E-3	2.49E-3	1.40E-2	0.05	-
50.0	1.342	25.0	-10.653	-1.09E-3	2.56E-3	1.43E-2	0.05	-
57.0	1.337	26.0	-10.036	-1.07E-3	2.77E-3	1.54E-2	-	0.20
60.0	1.335	26.4	-9.750	-1.06E-3	2.87E-3	1.59E-2	-	0.21
70.0	1.328	30.7	-8.772	-1.02E-3	3.58E-3	1.76E-2	-	0.41
76.0	1.324	33.2	-8.129	-9.87E-4	4.03E-3	1.88E-2	-	0.54
80.0	1.321	34.9	-7.650	-9.59E-4	4.37E-3	1.98E-2	-	0.85
100.0	1.307	44.7	-4.878	-7.36E-4	6.75E-3	2.54E-2	-	0.87
107.0	1.302	48.9	-3.654	-6.01E-4	8.04E-3	2.80E-2	-	0.89
117.4	1.295	47.5	-1.503	-2.89E-4	9.13E-3	3.28E-2	-	0.91
t_{kl}	1.295	38.5	-1.372	-2.66E-4	7.47E-3	3.31E-2	-	0.91

Таблица 18 – Динамические характеристики бака №2 РН на I ступени полёта

T, с	$u_{2,}$ $м^{-1}$	$r_{2,}$ $с^{-2}$	t_2	T_2	$P_{2,}$ $с^{-2}$	$U_{2,}$ $м$	$\varepsilon_{2,}$ $с^{-1}$
0.0	1.792	17.6	0.669	9.82E-6	2.58E-4	2.29E-3	0.05
12.0	1.788	25.6	1.402	2.12E-5	3.87E-4	2.44E-3	0.05
20.0	1.786	26.9	1.956	3.02E-5	4.16E-4	2.57E-3	0.05
40.0	1.779	31.0	3.533	5.75E-5	5.04E-4	2.91E-3	0.05
46.0	1.777	32.2	4.003	6.65E-5	5.35E-4	3.03E-3	0.05
48.0	1.777	32.6	4.169	6.97E-5	5.46E-4	3.08E-3	0.05
50.0	1.776	33.0	4.341	7.30E-5	5.56E-4	3.12E-3	0.05
57.0	1.774	34.5	4.989	8.57E-5	5.93E-4	3.29E-3	0.05
60.0	1.773	35.1	5.298	9.20E-5	6.10E-4	3.37E-3	0.05
70.0	1.711	39.6	6.076	1.14E-4	7.43E-4	3.66E-3	0.11
76.0	1.676	42.0	6.593	1.29E-4	8.24E-4	3.85E-3	0.14
80.0	1.653	43.5	6.993	1.42E-4	8.83E-4	4.00E-3	0.18
100.0	0.657	22.4	3.815	2.22E-4	1.31E-3	4.91E-3	0.33
107.0 ₋₀	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
107.0 ₊₀	1.789	67.0	13.758	3.14E-4	1.53E-3	5.34E-3	0.05
117.4	1.789	65.5	16.762	4.36E-4	1.70E-3	6.12E-3	0.05
t_{kl}	1.789	53.1	16.949	4.44E-4	1.39E-3	6.17E-3	0.05

Таблица 19 – Динамические характеристики бака №3 РН на I ступени полёта

$T, \text{с}$	$u_{3,} \text{ м}^{-1}$	$r_{3,} \text{ с}^{-2}$	t_3	T_3	$P_{3,} \text{ с}^{-2}$	$U_{3,} \text{ м}$	A_3	B_3	$\varepsilon_{3,} \text{ с}^{-1}$	$k_{3,} \text{ с}^{-1}$
0.0	3.731	36.6	-5.857	-2.38E-5	1.49E-4	1.32E-3	8.01E-4	6.447	0.05	-
12.0	2.846	39.2	0.492	6.28E-6	5.02E-4	3.28E-3	2.12E-3	5.220	0.05	-
20.0	2.457	37.0	3.370	7.62E-5	8.36E-4	5.16E-3	3.50E-3	4.682	0.05	-
40.0	2.083	36.3	7.185	3.36E-4	1.70E-3	9.80E-3	7.24E-3	4.208	0.20	-
46.0	1.508	30.0	5.652	4.34E-4	2.30E-3	1.19E-2	9.20E-3	3.020	0.22	-
48.0	1.381	27.1	5.321	4.60E-4	2.34E-3	1.24E-2	9.40E-3	2.780	0.27	-
50.0	1.274	23.7	5.046	4.84E-4	2.26E-3	1.27E-2	9.00E-3	2.570	0.32	-
57.0 ₋₀	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-
57.0 ₊₀	1.901	37.0	9.450	7.02E-4	2.74E-3	1.53E-2	1.22E-2	3.974	0.15	-
60.0	1.815	36.0	9.402	7.80E-4	2.98E-3	1.65E-2	1.33E-2	3.807	0.24	-
70.0	0.988	22.8	5.712	1.04E-3	4.16E-3	2.06E-2	1,83E-2	3.730	0.32	-
76.0 ₋₀	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	0.0
76.0 ₊₀	1.701	42.6	11.734	1.40E-3	5.06E-3	2.38E-2	2.13E-2	3.683	-	0.67
80.0	1.669	44.0	12.182	1.57E-3	5.68E-3	2.56E-2	2.38E-2	3.634	-	1.66
100.0	1.495	51.2	14.570	3.06E-3	1.07E-2	4.04E-2	4.73E-2	3.351	-	1.76
107.0	1.212	45.6	12.758	3.78E-3	1.35E-2	4.70E-2	6.23E-2	2.724	-	1.78
117.4	0.430	16.8	5.146	2.72E-3	8.88E-3	3.00E-2	5.15E-2	0.970	-	1.81
t_{kl}	0.426	12.6	5.131	2.04E-3	5.02E-3	2.24E-2	3.90E-2	0.960	-	1.81

Таблица 20 – Динамические характеристики бака №4 РН на I ступени полёта

$T,$ с	$u_{4,}$ $м^{-1}$	$r_{4,}$ $с^{-2}$	t_4	T_4	$P_{4,}$ $с^{-2}$	$U_{4,}$ $м$	A_4	B_4	$\varepsilon_{4,}$ $с^{-1}$
0.0	1.577	15.4	13.949	1.79E-3	1.98E-3	1.76E-2	1.46E-2	3.730	0.05
12.0	1.552	22.2	14.172	2.02E-3	3.16E-3	1.99E-2	1.68E-2	3.698	0.05
20.0	1.536	23.2	14.374	2.20E-3	3.54E-3	2.18E-2	1.86E-2	3.677	0.05
40.0	1.481	25.9	14.755	2.68E-3	4.70E-3	2.70E-2	2.39E-2	3.583	0.05
46.0	1.458	26.5	14.808	2.84E-3	5.10E-3	2.88E-2	2.58E-2	3.563	0.05
48.0	1.451	26.7	14.833	2.90E-3	5.24E-3	2.94E-2	2.69E-2	3.544	0.05
50.0	1.443	26.9	14.863	2.96E-3	5.38E-3	3.00E-2	2.77E-2	3.485	0.05
57.0	1.404	27.3	14.847	3.20E-3	5.88E-3	3.26E-2	3.03E-2	3.417	0.05
60.0	1.377	27.3	14.733	3.30E-3	6.12E-3	3.38E-2	3.18E-2	3.354	0.05
70.0	1.280	29.5	14.270	3.72E-3	7.70E-3	3.80E-2	3.75E-2	3.116	0.05
76.0	1.217	30.5	13.930	4.00E-3	8.74E-3	4.08E-2	4.13E-2	2.973	0.05
80.0	1.164	30.8	13.609	4.24E-3	9.58E-3	4.32E-2	4.51E-2	2.847	0.05
100.0	0.787	26.9	10.366	5.88E-3	1.53E-2	5.74E-2	7.36E-2	1.930	0.05
107.0	0.504	18.9	6.998	6.64E-3	1.79E-2	6.24E-2	9.03E-2	1.236	0.08
117.4	0.420	15.5	6.425	2.16E-3	5.18E-3	1.86E-2	3.48E-2	1.033	0.26
t_{kl}	0.420	12.5	6.455	1.58E-3	3.06E-3	1.36E-2	2.58E-2	1.033	0.26

Таблица 21– Динамические характеристики бака №1 РН на II ступени полёта

$T,$ с	$u_{1,}$ m^{-1}	$r_{1,}$ c^{-2}	t_1	T_1	$P_{1,}$ c^{-2}	$U_{1,}$ m	$\varepsilon_{1,}$ c^{-1}
$t_{нII}$	1.294	12.5	2.027	5.67E-4	3.51E-3	3.94E-2	0.05
160.0	1.245	14.7	4.328	1.46E-3	4.93E-3	4.92E-2	0.05
200.0	1.267	17.5	7.262	2.13E-3	5.14E-3	4.65E-2	0.05
240.0	1.403	23.6	12.481	2.63E-3	4.98E-3	3.73E-2	0.05
260.0	1.493	28.1	16.449	2.87E-3	4.90E-3	3.10E-2	0.05
286.9	0.553	5.7	7.865	1.63E-3	1.19E-3	1.03E-2	0.22
$t_{кII}$	0.539	3.6	7.672	1.33E-3	6.23E-4	8.35E-3	0.23

Таблица 22– Динамические характеристики бака №2 РН на II ступени полёта

$T,$ с	$u_{2,}$ m^{-1}	$r_{2,}$ c^{-2}	t_2	T_2	$P_{2,}$ c^{-2}	$U_{2,}$ m	$\varepsilon_{2,}$ c^{-1}
$t_{нII}$	1.789	17.3	21.660	8.15E-4	6.52E-4	7.32E-3	0.05
160.0	1.786	21.0	25.301	1.02E-3	8.45E-4	8.45E-3	0.05
200.0	1.783	24.7	29.772	1.34E-3	1.11E-3	1.00E-2	0.05
240.0	1.779	30.0	35.241	1.93E-3	1.64E-3	1.23E-2	0.05
260.0	1.712	32.3	37.212	2.52E-3	2.19E-3	1.38E-2	0.05
286.9	0.552	4.4	13.690	2.59E-3	8.32E-4	9.39E-3	0.22
$t_{кII}$	0.540	2.8	13.406	2.38E-3	4.89E-4	8.58E-3	0.23

Таблица 23 – Динамические характеристики бака №5 РН
на III ступени полёта

$T,$ с	$u_{5,}$ $м^{-1}$	$r_{5,}$ $с^{-2}$	t_5	T_5	$P_{5,}$ $с^{-2}$	$U_{5,}$ м	$\varepsilon_{5,}$ $с^{-1}$
0.0*	1.584	13.2	4.374	9.29E-3	2.81E-2	4.63E-2	0.006
40.0*	1.397	13.8	4.792	1.89E-2	5.45E-2	8.29E-2	0.006
0.0	1.584	13.2	3.798	1.05E-2	3.65E-2	4.88E-2	0.006
40.0	1.397	13.8	4.230	2.17E-2	7.09E-2	8.79E-2	0.006
80.0	1.374	15.5	4.862	2.76E-2	8.81E-2	0.105	0.006
120.0	1.348	17.7	5.530	3.39E-2	0.109	0.123	0.006
160.0	1.211	19.2	5.796	4.35E-2	0.144	0.147	0.007
200.0	0.995	19.7	5.648	4.74E-2	0.166	0.141	0.011
$t_{кIII}$	0.810	9.4	5.764	1.30E-2	2.12E-2	2.57E-2	0.067

Таблица 24 – Динамические характеристики бака №6 РН
на III ступени полёта

$T,$ с	$u_{6,}$ $м^{-1}$	$r_{6,}$ $с^{-2}$	t_6	T_6	$P_{6,}$ $с^{-2}$	$U_{6,}$ м	$\varepsilon_{6,}$ $с^{-1}$
0.0*	2.102	17.4	-0.805	-3.34E-4	7.24E-3	1.20E-2	0.036
40.0*	1.522	15.0	0.404	7.13E-4	2.64E-2	4.03E-2	0.036
0.0	2.102	17.4	-1.570	-8.48E-4	9.41E-3	1.27E-2	0.036
40.0	1.522	15.0	-0.207	-4.75E-4	3.44E-2	4.27E-2	0.036
80.0	1.326	15.0	0.293	1.12E-3	5.72E-2	6.84E-2	0.037
120.0	1.125	14.8	0.663	3.51E-3	7.86E-2	8.87E-2	0.041
160.0	0.846	13.4	0.925	7.29E-3	0.106	0.108	0.052
200.0	0.776	15.4	1.441	1.41E-2	0.151	0.129	0.08
$t_{кIII}$	0.778	9.0	2.501	3.88E-3	1.40E-2	1.70E-2	0.228

Примечание: Символом "*" отмечено состояние РН при неотделённом ГО.

Таблица 25 – Коэффициенты взаимодействия колебаний жидкости в баках РН с изгибными колебаниями корпуса РН в плоскости тангажа по 3-му тону на I ступени полёта

T, с	R_{3k}, M				N_{k3}, M^{-1}			
	K=1	k=2	k=3	k=4	k=1	k=2	k=3	k=4
0.0	-1.19E-2	-5.58E-3	-1.81E-3	2.22E-2	-0.584	-1.446	-1.697	0.6585
12.0	-1.45E-2	-5.71E-3	-2.99E-3	2.53E-2	-0.670	-1.445	-0.895	0.6775
20.0	-1.64E-2	-5.80E-3	-3.16E-3	2.74E-2	-0.732	-1.443	-0.539	0.6895
40.0	-2.10E-2	-5.82E-3	-1.62E-3	3.31E-2	-0.849	-1.388	-0.13475	0.707
46.0	-2.27E-2	-5.87E-3	-1.40E-3	3.52E-2	-0.877	-1.365	-0.0702	0.708
48.0	-2.32E-2	-5.88E-3	-1.27E-3	3.60E-2	-0.885	-1.356	-0.0564	0.7075
50.0	-2.37E-2	-5.88E-3	-1.11E-3	3.68E-2	-0.893	-1.346	-0.04465	0.708
57.0 ₋₀	-2.54E-2	-5.85E-3	0.0	3.93E-2	-0.915	-1.306	0.0	0.701
57.0 ₊₀	-2.54E-2	-5.85E-3	1.31E-3	3.93E-2	-0.915	-1.306	6.75E-2	0.701
60.0	-2.63E-2	-5.86E-3	1.83E-3	4.07E-2	-0.923	-1.286	8.44E-2	0.692
70.0	-2.88E-2	-5.84E-3	3.53E-3	4.52E-2	-0.940	-1.181	0.0735	0.659
76.0 ₋₀	-2.98E-2	-5.70E-3	0.0	4.75E-2	-0.941	-1.114	0.0	0.6345
76.0 ₊₀	-2.98E-2	-5.70E-3	7.92E-3	4.75E-2	-0.941	-1.114	0.255	0.6345
80.0	-3.07E-2	-5.63E-3	9.53E-3	4.98E-2	-0.939	-1.065	0.2835	0.6135
100.0	-3.27E-2	-5.01E-3	2.23E-2	6.15E-2	-0.878	-0.348	0.4305	0.439
107.0 ₋₀	-3.25E-2	0.0	2.68E-2	6.53E-2	-0.830	0.0	0.3785	0.289
107.0 ₊₀	-3.25E-2	-3.54E-3	2.68E-2	6.53E-2	-0.830	-0.649	0.3785	0.289
117.4	-4.93E-2	-3.41E-3	2.80E-2	2.96E-2	-0.743	-0.379	0.1535	0.256
t_{kl}	-5.87E-2	-3.74E-3	2.48E-2	2.57E-2	-0.745	-0.351	0.153	0.257

Таблица 1

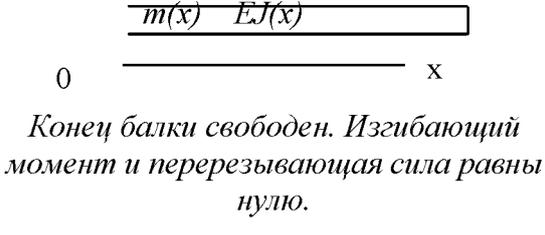
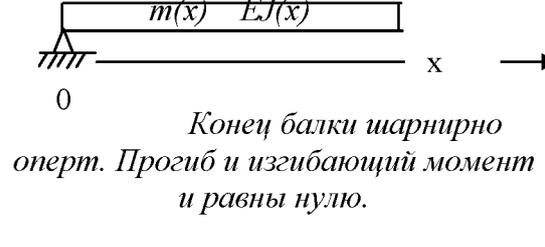
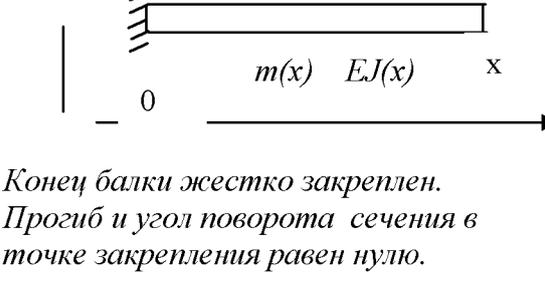
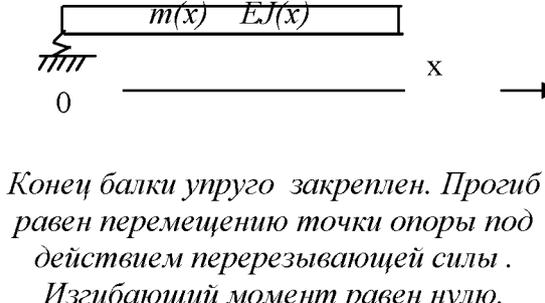
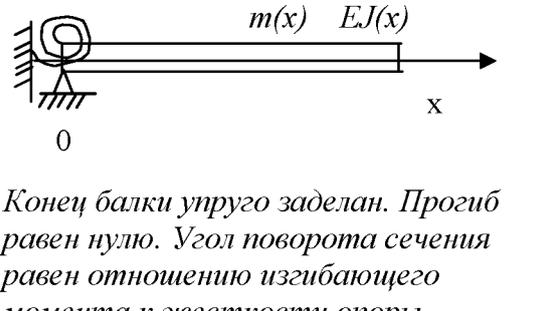
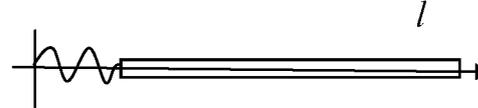
Расчётная схема	Аналитическое выражение граничных условий при $x=0$
 <p>Конец балки свободен. Изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю.</p>	$M = EJ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \text{ или } f''_i(0) = 0$ $Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(0)}{dx^2} \right] = 0$ <p style="text-align: center;">или $f'''_i(0) = 0$</p>
 <p>Конец балки шарнирно оперт. Прогиб и изгибающий момент и равны нулю.</p>	$f_i(0) = 0$ $f''_i(0) = 0$
 <p>Конец балки жестко закреплен. Прогиб и угол поворота сечения в точке закрепления равен нулю.</p>	$f_i(0) = 0$ $f'_i(0) = 0$
 <p>Конец балки упруго закреплен. Прогиб равен перемещению точки опоры под действием перерезывающей силы. Изгибающий момент равен нулю.</p>	$f_i(0) = \frac{Q(0)}{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right],$ $f''_i(0) = 0,$ <p style="text-align: center;">где a- коэффициент линейной жесткости опоры</p>
 <p>Конец балки упруго заделан. Прогиб равен нулю. Угол поворота сечения равен отношению изгибающего момента к жесткости опоры</p>	$f_i(0) = 0,$ $f'_i(0) = \frac{M(0)}{k_\varphi} = \frac{1}{k_\varphi} \left[EJ(0) \frac{d^2 f_i(0)}{dx^2} \right],$ <p style="text-align: center;">где k_φ- коэффициент угловой жесткости опоры в заделке</p>

Таблица 2- Аналитические выражения для условий закрепления

Расчетная схема и условия закрепления	Продольные колебания	Крутильные колебания
<p>$m(x), EF(x), J(x), GF(x)$</p>  <p>0 x</p> <p>Концы балки свободны</p>	$\frac{du(0)}{dx} = 0,$ $\frac{du(l)}{dx} = 0,$	$\frac{d\varphi(0)}{dx} = 0,$ $\frac{d\varphi(l)}{dx} = 0,$
<p>$m(x), EF(x), J(x), GF(x)$</p>  <p>0 x</p> <p>Один конец балки закреплен, другой - свободен</p>	$u(0) = 0,$ $\frac{du(l)}{dx} = 0,$	$\varphi(0) = 0,$ $\frac{d\varphi(l)}{dx} = 0,$
<p>$m(x), EF(x), J(x), GF(x)$</p>  <p>0 x l</p> <p>На одном конце балки сосредоточенная упругость</p>	$u(0) = \frac{P(0)}{K_x}$ $\frac{du(l)}{dx} = 0$ <p>где K_x- коэффициент продольной жесткости в заделке</p>	$\varphi(0) = \frac{M_k(0)}{K_l},$ $\frac{d\varphi(l)}{dx} = 0,$ <p>где K_l- коэффициент крутильной жесткости в заделке</p>