

**СГАУ: 5 (У)**

Самарский государственный аэрокосмический университет

466

имени академика С.П.Королева

А.А.Авраменко, В.В.Архипов,  
В.С.Асланов, И.А.Тимбай

**ДИНАМИКА ТОЧКИ  
И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

**Самара 2001**

**Министерство образования Российской Федерации**

**Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П.Королева**

**А.А.Авраменко, В.В.Архипов, В.С.Асланов, И.А.Тимбай**

**ДИНАМИКА ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМЫ**

**Учебное пособие для курсового проектирования**



**Самара 2001**

УДК 534.1

**Динамика точки и механической системы : Учебное пособие для курсового проектирования / Авраменко А.А., Архипов В.В., Асланов В.С., Тимбай И.А.; Под ред. проф. В.С.Асланова. - Самар. гос. аэрокосм. ун - т, Самара, 2001 - 84 с.**

ISBN 5-7883-0139-4

Приводятся краткие сведения по теории и практические рекомендации по выполнению основных разделов типовой курсовой работы по теоретической механике: динамика материальной точки, общие теоремы динамики механической системы, уравнения Лагранжа II рода, метод кинетостатики, поиск и исследования положений равновесия, малые колебания систем с двумя степенями свободы. Даны примеры выполнения всех разделов курсовой работы и требования к содержанию пояснительной записки.

Пособие предназначено для студентов второго курса механических специальностей.

Работа выполнена на кафедре теоретической механики.

Ил. 20. Табл. 4.

Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П.Королева.

Рецензенты: В.П.Червинский, А.В.Суслин.

ISBN 5-7883-0139-4

© А.А.Авраменко,  
В.В.Архипов,  
В.С.Асланов,  
И.А.Тимбай

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2001

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	4
1. ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ . . . . .	5
1.1. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки . . . . .	5
1.2. Пример исследования относительного движения . . . . .	10
2. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К АНАЛИЗУ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	17
2.1. Общие замечания . . . . .	17
2.2. Теорема о движении центра масс . . . . .	19
2.3. Теорема об изменении кинетического момента . . . . .	20
2.4. Теорема об изменении кинетической энергии . . . . .	25
2.5. Примеры использования общих теорем динамики . . . . .	29
3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ . . . . .	36
3.1. Связи и виртуальные перемещения . . . . .	36
3.2. Общее уравнение динамики . . . . .	38
3.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода . . . . .	41
3.4. Пример составления уравнений движения системы с двумя степенями . . . . .	44
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В ОПОРАХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА . . . . .	51
4.1. Метод кинестатики . . . . .	51
4.2. Определение реакций в опорах вращающегося тела . . . . .	55
5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	65
5.1. Условия равновесия механических систем . . . . .	65
5.2. Устойчивость равновесия . . . . .	66
5.3. Пример определения положений равновесия и исследования их устойчивости . . . . .	70
6. ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	73
6.1. Дифференциальные уравнения малых колебаний . . . . .	73
6.2. Определение частот и форм собственных колебаний . . . . .	75
6.3. Пример определения частот и форм колебаний . . . . .	79
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	84

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение теоретической механики как одной из фундаментальных физико-математических дисциплин играет важную роль в подготовке специалистов по механико-математическим и инженерным механическим направлениям. Оно позволяет будущим специалистам не только получить глубокие знания о природе, но и вырабатывает у них необходимые навыки для решения сложных научных и технических задач, для которых требуется построение математических моделей разнообразных механических систем, развивает способности к научным обобщениям и выводам.

Для закрепления навыков самостоятельного решения задач механики во втором семестре изучения теоретической механики студенты СГАУ выполняют курсовую работу, в которой необходимо провести комплексный анализ движения системы с двумя степенями свободы, пользуясь различными методами теоретической механики.

Теоретическая механика, как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с самими материальными объектами, а их математическими моделями. Такими моделями являются материальные точки, системы материальных точек, твердые тела и деформируемая сплошная среда. В курсовой работе рассматриваются простейшие системы, которые состоят из твердых тел, совершающих простейшие движения, и перемещающейся по телу материальной точки.

# 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Первый этап курсовой работы посвящен исследованию относительного движения материальной точки. На этом этапе необходимо:

найти закон относительного движения материальной точки по заданному закону переносного движения и известным силам, действующим на точку;

определить реакции связей, наложенных на движущуюся точку;

построить графики изменения координат, скоростей и реакций связей, действующих на движущуюся точку, на заданном интервале времени;

в зависимости от конкретного варианта механической системы решить другие задачи, например, провести синтез (выбор) параметров механической системы для обеспечения заданных свойств системы, выполнить сравнительный анализ параметров движения материальной точки при действии сил трения и их отсутствии.

## 1.1. Дифференциальные уравнения относительного движения

Движение материальной точки в подвижной системе отсчета описывается дифференциальным уравнением относительного движения

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \quad (1.1)$$

где  $\bar{F}$  - главный вектор активных сил, приложенных к рассматриваемой точке,

$\bar{R}$  - главный вектор реакций связей.

$\bar{\Phi}_e = -m\bar{w}_e$  - переносная сила инерции,

$\bar{\Phi}_c = -m\bar{w}_c$  - кориолисова сила инерции.

Уравнение (1.1) отличается от основного уравнения динамики тем, что к действующим на точку активным силам и реакциям связей добавляются переносная и кориолисова силы инерции, связанные с движением точки. Следовательно, относительное движение зависит не только от действующих на точку сил, но и от движения подвижной системы отсчета.

Переносная и кориолисова силы инерции равны произведению массы точки на соответствующее ускорение и направлены противоположно ускорению [2, 3, 9]:

$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{w}_e = -m[\overline{w}_o + \overline{\omega}_e \times (\overline{\omega}_e \times \overline{r}) + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{r}],$$

$$\overline{\Phi}_c = -m\overline{w}_c = -2m\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r.$$

где  $\overline{w}_o$  - ускорение точки, принятой за полюс, например, начала подвижной системы координат,

$\overline{\omega}_e, \overline{\varepsilon}_e$  - угловая скорость и угловое ускорение подвижной системы координат,

$\overline{r}$  - радиус-вектор точки в подвижной системе координат,

$\overline{V}_r$  - относительная скорость.

Рассмотрим способы определения сил инерции в некоторых частных случаях переносного движения.

1. Если **переносное движение** представляет собой **вращение вокруг неподвижной оси**, то сила инерции в переносном движении  $\overline{\Phi}_e$  равна сумме центробежной и вращательной сил инерции

$$\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_e^u + \overline{\Phi}_e^{sp},$$

где  $\overline{\Phi}_e^u = -m\overline{w}_e^u$  - центробежная сила инерции ( $\overline{w}_e^u$  - переносное центростремительное ускорение),

$\overline{\Phi}_e^{sp} = -m\overline{w}_e^{sp}$  - вращательная сила инерции ( $\overline{w}_e^{sp}$  - переносное вращательное ускорение).

По модулю составляющие силы инерции равны соответственно

$$\Phi_e^u = mh\omega_e^2, \quad \Phi_e^{sp} = mh\varepsilon_e,$$

где  $h$  - расстояние от материальной точки до оси вращения.

$\omega_e$  и  $\varepsilon_e$  - угловая скорость и угловое ускорение подвижной системы координат.

При равномерном переносном вращении вокруг неподвижной оси

$$\varepsilon_e = 0, \quad \Phi_e^{sp} = 0, \quad \text{и} \quad \Phi_e = \overline{\Phi}_e^u.$$

2. Если **переносное движение** представляет собой **поступательное движение**, то сила инерции Кориолиса  $\Phi_c$  равна нулю, так как равна нулю угловая скорость подвижной системы  $\omega_e = 0$ . При поступательном движении ускорения всех точек подвижной системы отсчета равны

между собой, поэтому переносная сила инерции  $\overline{\Phi}_e$  не будет зависеть от положения точки в подвижной системе отсчета и для ее определения достаточно вычислить ускорение любой точки движущегося тела.

В общем случае, когда поступательное переносное движение является неравномерным и криволинейным, переносная сила инерции  $\overline{\Phi}_e$  представляет собой сумму касательной и нормальной сил инерции

$$\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_{e\tau} + \overline{\Phi}_{en},$$

где  $\overline{\Phi}_{e\tau} = -m\overline{w}_{e\tau}$  - касательная сила инерции,

$\overline{\Phi}_{en} = -m\overline{w}_{en}$  - нормальная сила инерции,

$\overline{w}_{e\tau}$  - переносное касательное ускорение ( $w_{e\tau} = \dot{V}_e$ ),

$\overline{w}_{en}$  - переносное нормальное ускорение ( $w_{en} = \frac{V_e^2}{\rho}$ ),

$V_e$  - скорость поступательного движения тела,

$\rho$  - радиус кривизны его траектории.

Если переносное движение прямолинейное и равномерное (подвижная система отсчета является инерциальной), то переносное ускорение и переносная сила инерции равны нулю

$$\overline{w}_e = 0, \quad \overline{\Phi}_e = 0.$$

Более подробные сведения можно получить в одном из учебников по теоретической механики (например [2], глава VI; [9], глава V).

Рекомендуется следующая последовательность выполнения данного этапа курсовой работы:

1. Изобразить на рисунке схему механической системы. Определить какое движение материальной точки является относительным, какое - переносным.

2. Выбрать и изобразить неподвижную и подвижную системы отсчета. Рекомендуется пользоваться следующими типами подвижных систем:

- если относительное движение прямолинейное, то выбирается прямоугольная система координат, одна из осей которой направлена по вектору относительной скорости точки;

- если относительное движение происходит по окружности, то целесообразно использовать естественную систему координат;

- если траектория относительного движения точки заранее неизвестна, то применяется, как правило, прямоугольная система координат, направление осей которой определяется удобством проектирования сил.

3. Для того, чтобы не ошибиться в проектировании сил, зависящих от положения точки или ее скорости, материальную точку следует изобразить в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

4. Определить активные силы  $\vec{F}$  и реакции связей  $\vec{R}$ , действующие на материальную точку. Изобразить данные силы на рисунке. Для активных сил записать векторные формулы, определяющие их величины и направления. Реакции связей, если их направление произвольно, разложить на составляющие.

5. Определить ускорение материальной точки в переносном движении  $\vec{w}_e$ , ускорение Кориолиса  $\vec{w}_c$ , найти силу инерции в переносном движении  $\vec{\Phi}_e$ , кориолисову силу инерции  $\vec{\Phi}_c$  и изобразить их на рисунке.

6. Записать векторное уравнение относительного движения материальной точки (1.1) и спроектировать на оси выбранной подвижной системы координат.

7. Найти общее аналитическое решение дифференциального уравнения относительного движения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения. Рекомендуется полученные точные решения сравнить с результатом численного интегрирования на ЭВМ. В случае, если решения дифференциальных уравнений аналитически получить невозможно, провести численное интегрирование только на ЭВМ.

8. На основании полученных решений вычислить величины, указанные в задании.

9. Проанализировать полученный результат, например, определить характер движения материальной точки (апериодический или колебательный), сопоставить результаты моделирования движения с физической картиной явления и т. д.

10. Провести качественный анализ полученных результатов, а также решить задачу синтеза (выбора) параметров механической системы, например, подобрать жесткость пружин, обеспечивающих колебательное движение материальной точки.

Следует иметь в виду, что если в какой-то момент времени действие сил на материальную точку изменяется или прекращается, то для описания последующего движения точки надо составить новые дифференциальные уравнения ее движения. Начальными условиями нового движения точки будут ее положение и скорость в конце предшествующего движения. Так, например, при исследовании движения материальной точки при наличии силы кулонова трения необходимо учесть, что, во-первых, сила трения всегда направлена против движения и, во-вторых, существует так называемая "зона застоя", при попадании в которую материальная точка прекратит движение.

Примеры решения задач на составление и интегрирование дифференциальных уравнений относительного движения материальной точки приведены в /7, задание Д.4/. Пример исследования движения с учетом трения дан в /1, задача 8.35/.

В расчетно-пояснительной записке к курсовой работе необходимо привести рисунок схемы механической системы с выбранными системами координат и действующими на материальную точку силами. Вывод дифференциальных уравнений относительного движения материальной точки, их решения, результаты анализа, синтеза, должны быть сопровождаемы соответствующими пояснениями. Полученные результаты необходимо оформить в виде таблиц и графиков. В случае, если результаты решения дифференциальных уравнений получены путем численного интегрирования на ЭВМ, то необходимо провести их сравнение с аналитическими решениями в трех контрольных точках - в начальный момент времени, промежуточный и конечный.

## 1.2. Пример исследования относительного движения

Рассмотрим механическую систему, состоящую из однородной трубки  $CD$ , образующей с осью вращения прямой угол, и шарика  $M$ , прикрепленного к концу горизонтальной пружины (рис. 1.1).

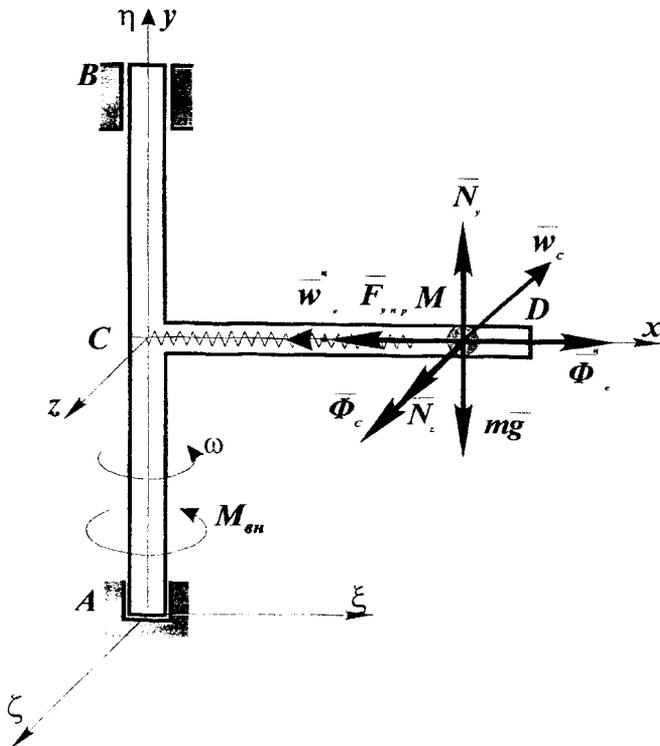


Рис. 1.1. Схема механической системы и действующие на шарик силы

В положении равновесия шарик находится в трубке на расстоянии  $a = 0.1$  м от вертикальной оси. Коэффициент жесткости пружины  $c = 3$  Н/м. Длина трубки  $L = 0.25$  м. Масса шарика  $m = 0.01$  кг. Под действием внешнего момента трубка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10$  рад/с. Пренебрегая трением и массой пружины, определить на интервале времени  $\theta - t_1$  ( $t_1 = 2$  с):

- закон относительного движения материальной точки;
- реакции связей, действующих на движущуюся точку.

По результатам расчетов построить графики изменения координат, скоростей и реакций связей, действующих на движущуюся точку, на заданном интервале времени.

Свяжем подвижную систему отсчета  $S_{хуz}$  с вращающейся трубкой, выбрав начало координат на оси вращения. Ось  $S_x$  проведем вдоль трубки, ось  $S_y$  - вдоль оси вращения, ось  $S_z$  так, чтобы она дополняла систему координат до правой (рис. 1.1).

Вращение трубки вместе с системой координат  $S_{хуz}$  вокруг оси  $A\eta (S_y)$  является переносным движением для шарика. Относительным движением шарика является его движение вдоль трубки.

Дифференциальное уравнение относительного движения для рассматриваемого случая равномерного вращения трубки, имеет вид

$$m\bar{w}_r = \bar{G} + \bar{F}_{упр} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^u + \bar{\Phi}_c, \quad (1.2)$$

где  $m$  - масса материальной точки;

$\bar{w}_r$  - ускорение точки в подвижной системе отсчета;

$\bar{G} = m\bar{g}$  - сила тяжести шарика;

$\bar{F}_{упр}$  - сила упругости пружины, модуль которой пропорционален величине деформации,  $F_{упр} = c\Delta = -(x - a)$ ;

$\bar{N}$  - нормальная реакция стенки трубки ( на рис. 1.1 изображены ее составляющие  $\bar{N}_y$  и  $\bar{N}_z$ );

$\bar{\Phi}_e^u$  и  $\bar{\Phi}_c$  - переносная центробежная и кориолисова силы инерции.

Силы инерции  $\bar{\Phi}_e^u$  и  $\bar{\Phi}_c$  направлены противоположно переносному центростремительному  $\bar{w}_e^u$  и кориолисову ускорению  $\bar{w}_c$ , соответственно. Направление ускорения  $\bar{w}_c$  можно определить по правилу векторного произведения или известному правилу Жуковского [2, 3, 9], предполагая, что относительная скорость  $V_r = \dot{x}$  шарика положительна. В этом случае кориолисова сила инерции  $\bar{\Phi}_c$  направлена параллельно оси  $S_z$  подвижной системы координат.

Модули сил инерции определяются по формулам

$$\Phi_e^u = m w_e^u = m \omega^2 x,$$

$$\Phi_c = mw_c = 2m\omega V_r = 2m\omega|\dot{x}| \quad .$$

Спроектируем векторное уравнение относительного движения шарика (1.2) на оси подвижной системы координат  $Cxyz$  :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -c(x-a) + m\omega^2 x, \\ m\ddot{y} = N_y - mg = 0, \\ m\ddot{z} = N_z + 2m\omega\dot{x} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Движение шарика  $M$  вдоль оси  $Cx$  описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = -a/m, \quad (1.4)$$

где  $k^2 = c/m - \omega^2$ .

Общее решение полученного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (1.4) будем искать в виде

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x_1$  - общее решение соответствующего однородного уравнения,

$x_2$  - частное решение неоднородного уравнения (1.4).

Однородное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1.5)$$

которому соответствует следующее характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + k^2 = 0.$$

Так как в рассматриваемом случае величина  $k^2 = c/m - \omega^2 = 200 \text{ рад}^2 / \text{с}^2$  - есть величина положительная и, следовательно, корни характеристического уравнения - чисто мнимые числа:  $\alpha_{1,2} = \pm ki$ , то общим решением однородного дифференциального уравнения (1.5) будет являться функция

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - постоянные интегрирования.

Частное решение уравнения (1.4) находим в форме

$$x_2 = B.$$

Учитывая, что  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $\ddot{x}_2 = 0$ , подставляя искомое решение в дифференциальное уравнение (1.4), получим

$$x_2 = B = -a/mk^2.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения относительного движения шарика (1.4) принимает вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + C a/mk^2. \quad (1.6)$$

Скорость этого движения равна

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (1.7)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим, используя начальные условия  $t=0, x_0 = a, \dot{x}_0 = 0$ .

Запишем уравнения (1.6) и (1.7) для  $t = 0$ :

$$x_0 = a = C_1 + ca/mk^2,$$

$$\dot{x}_0 = 0 = C_2 k,$$

откуда получаем, что

$$C_1 = -\omega^2 a/k^2, \quad C_2 = 0.$$

Окончательно решение дифференциального уравнения относительного движения шарика принимает вид

$$x = ca/mk^2 - (\omega^2 a/k^2) \cos kt,$$

а скорость относительного движения шарика равна

$$\dot{x} = (\omega^2 a/k) \sin kt. \quad (1.8)$$

Итак, шарик  $M$  совершает гармоническое колебательное движение с круговой частотой  $k = \sqrt{c/m - \omega^2} = 14.14$  рад/с и амплитудой  $A = \omega^2 a/k^2 = 0.05$  м около положения относительного равновесия  $x_{-p} = -a/mk^2 = 0.15$  м. Период колебаний шарика  $M$  равен  $T = 2\pi/k = 0.4443$  с.

Составляющие реакции стенки трубки  $N_y$  и  $N_z$  определим из второго и третьего уравнения системы (1.3)

$$N_y = mg,$$

$$N_z = -2m\omega\dot{x}.$$

Модуль полной нормальной реакции стенки трубки равен

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}^2},$$

где скорость относительного движения шарика  $\dot{x}$  определяется выражением (1.8).

Давление шарика  $M$  на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции  $N$  и направлено в противоположную сторону.

Результаты численного расчета зависимостей перемещения  $x$ , скорости  $\dot{x}$ , а также реакции стенки трубки  $N$  и реакции пружины  $F_{\text{упр}}$  от времени приведены в табл. 1.1 и на рис. 1.2 - 1.5.

Таблица 1.1.

Зависимость перемещения  $x$  и скорости  $\dot{x}$  шарика, нормальной реакции  $N$  и реакции пружины  $F_{\text{упр}}$  от времени

$t$ , сек	$x$ , м	$\dot{x}$ , м/с	$N$ , Н	$F_{\text{упр}}$ , Н
0	0,1000	0,0000	0,0981	0,0000
0,1	0,1422	0,6985	0,1707	0,1266
0,2	0,1976	0,2178	0,1073	0,2927
0,3	0,1726	-0,6305	0,1598	0,2179
0,4	0,1095	-0,4145	0,1284	0,0285
0,5	0,1147	0,5012	0,1403	0,0442
0,6	0,1795	0,5708	0,1505	0,2385
0,7	0,1945	-0,3232	0,1175	0,2834
0,8	0,1344	-0,6716	0,1663	0,1031
0,9	0,1007	0,1137	0,1007	0,0020
1	0,1502	0,7071	0,1721	0,1507
1,1	0,1994	0,1068	0,1004	0,2983
1,2	0,1652	-0,6738	0,1667	0,1955
1,3	0,1053	-0,3169	0,1168	0,0159
1,4	0,1209	0,5749	0,1511	0,0627
1,5	0,1856	0,4963	0,1396	0,2569
1,6	0,1902	-0,4202	0,1292	0,2706
1,7	0,1269	-0,6273	0,1593	0,0808
1,8	0,1026	0,2245	0,1079	0,0078
1,9	0,1583	0,6973	0,1705	0,1749
2	0,2000	-0,0070	0,0981	0,3000

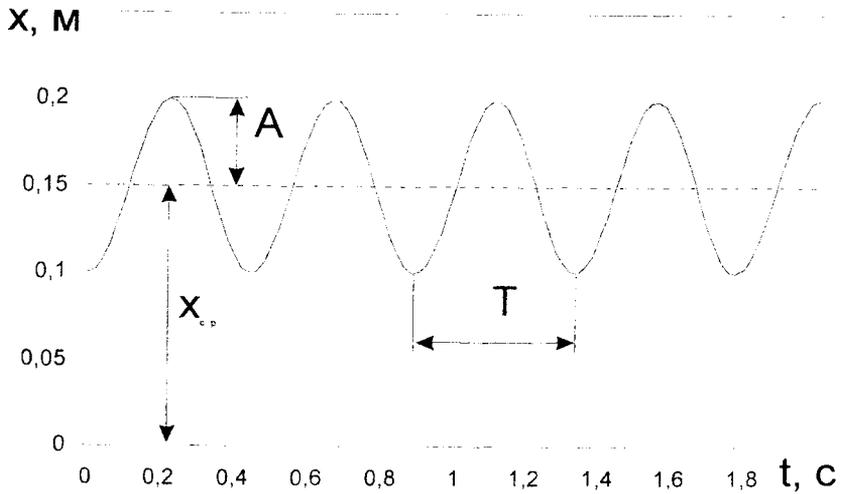


Рис. 1.2.  
Зависимость перемещения шарика  $x$  от времени  $t$

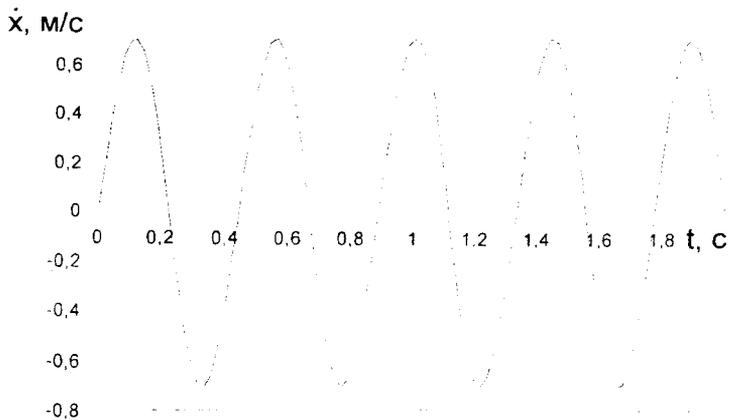


Рис. 1.3.  
Зависимость скорости шарика  $\dot{x}$  от времени  $t$

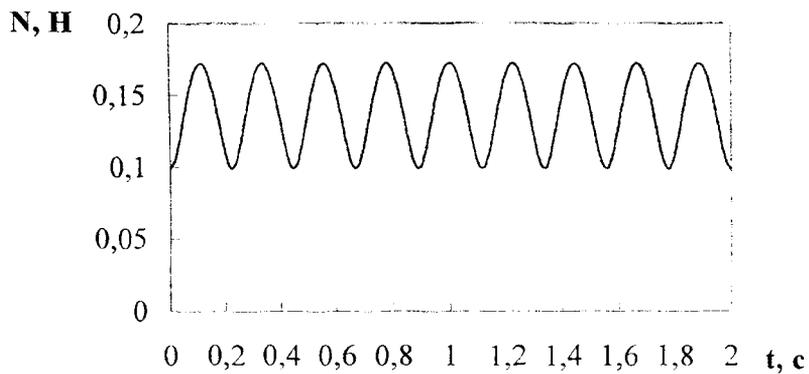


Рис. 1.4. Зависимость реакции стенки трубки от времени

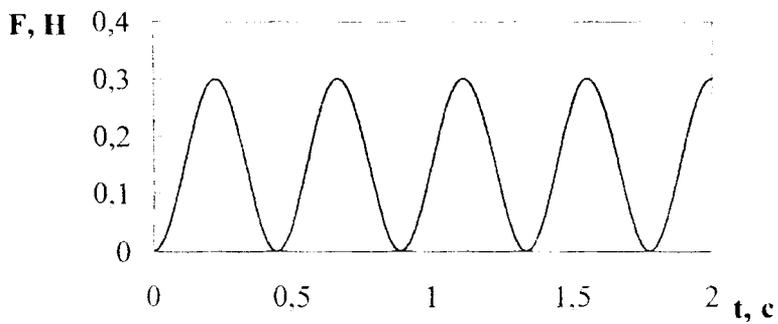


Рис. 1.5. Зависимость силы упругости от времени

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К АНАЛИЗУ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 2.1. Общие замечания

Механической системой называется такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек. Получаемые для системы материальных точек теоремы и соотношения можно распространить и на системы, состоящие из одного или нескольких взаимосвязанных твердых тел.

Пусть механическая система состоит из  $n$  точек с массами  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), положение которых относительно неподвижного центра  $O$  определяется радиусами - векторами  $\vec{r}_k$ . Данные точки имеют скорости  $\vec{V}_k$  и ускорения  $\vec{W}_k$  относительно неподвижной системы отсчета. На них действуют внешние  $\vec{F}_k^e$  и внутренние  $\vec{F}_k^i$  силы ( рис. 2.1 ).

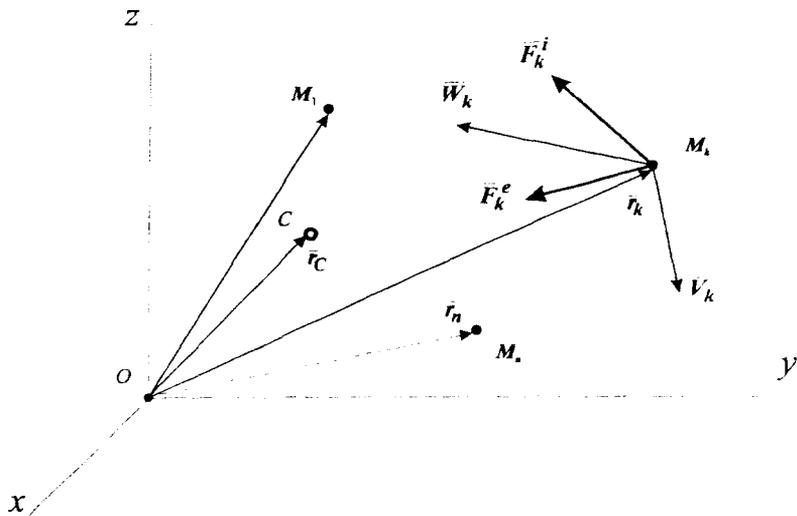


Рис. 2.1. Механическая система и ее центр масс

Ограничения, накладываемые на движение точек и тел механической системы, называются связями. Исходя из принципа освобожденности от связей, движение каждой точки системы можно рассматривать

как движение свободной точки, если заменить действие связей реакциями этих связей. Тогда для каждой точки согласно основному уравнению динамики материальной точки имеем

$$m_k \overline{W}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i,$$

где во внешние и внутренние силы включены и реакции соответствующих связей.

Общие теоремы динамики механической системы: *теоремы о движении центра масс механической системы и об изменении количества движения, теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии*, - являются следствием основного уравнения динамики. Данные теоремы рассматривают не движение отдельных точек и тел, входящих в механическую систему, а некоторые интегральные характеристики, такие как движение центра масс механической системы, ее количество движения, кинетический момент и кинетическую энергию. В результате из рассмотрения исключаются неизвестные внутренние силы, а в ряде случаев и реакции связей, что существенно упрощает решения задачи.

## 2.2. Теорема о движении центра масс механической системы

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в этой системе. Радиус-вектор  $\overline{r}_C(x_C, y_C, z_C)$ , задающий положение центра масс, определяется следующим образом (рис. 2.1):

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \overline{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k};$$

или в проекциях на оси прямоугольной системы координат

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad (2.1)$$

где  $\overline{r}_k(x_k, y_k, z_k)$  - радиусы-векторы, определяющие положения отдельных точек и центров масс тел данной системы.

При решении задач следует иметь в виду, что для изменяемой механической системы положение центра масс не связано с какой-либо конкретной точкой тела, входящего в систему.

**Теорема о движении центра масс** формулируется следующим образом: *центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе всей системы, под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил, приложенных к данной системе*

$$M\overline{W}_c = \overline{R}^e \quad (2.2)$$

где  $M$  - масса системы,

$\overline{W}_c$  - ускорение центра масс,

$\overline{R}^e = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k^e$  - главный вектор внешних сил, включающий в себя и

реакции внешних связей.

Теоремой о движении центра масс механической системы следует пользоваться для решения задач механики, в которых требуется:

- по силам, приложенным к механической системе (чаще всего к твердому телу), определить закон движения центра масс;
- по заданному закону движения тел, входящих в механическую систему, найти реакции внешних связей;
- по заданному взаимному движению тел, входящих в механическую систему, определить закон движения этих тел относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

С помощью этой теоремы можно составить одно из уравнений движения механической системы с несколькими степенями свободы.

При решении задач часто используются следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

**Следствие 1.** *Если главный вектор внешних сил, приложенных к механической системе, равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

**Следствие 2.** *Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то центр масс системы или не изменяет своего положения относительно данной оси, или движется относительно нее равномерно.*

### 2.3. Теорема об изменении кинетического момента

Кинетический момент механической системы  $\bar{K}_O$  относительно неподвижного центра  $O$  является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применяется не сам вектор  $\bar{K}_O$ , а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например,  $K_z$  - кинетический момент системы относительно неподвижной оси  $Oz$ .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой  $m_k$ , имеющей скорость  $\vec{V}_k$ , кинетический момент относительно некоторой оси  $Oz$  определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z (m_k \bar{V}_k) = \vec{r}_k \times (m_k \bar{V}_k).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения  $m_k \bar{V}_k$  рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений (рис.2.2)

$$m_k \bar{V}_k = m_k \bar{V}_{kr} + m_k \bar{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z (m_k \bar{V}_k) = m_z (m_k \bar{V}_{kr}) + m_z (m_k \bar{V}_{ke}). \quad (2.3)$$

Но  $V_{ke} = \omega h_e$ , где  $h_e$  - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z (m_k \bar{V}_{ke}) = m_k \omega h_e \cdot h_e = m_k h_e^2 \omega.$$

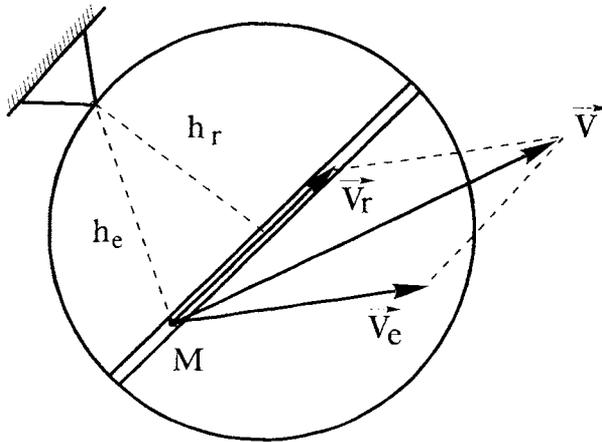


Рис. 2.2. Определение кинетического момента точки, совершающей сложное движение

Вторую составляющую вектора кинетического момента  $m_z (m_k \vec{V}_{kr})$  можно определить так же, как и момент силы относительно оси. Как и для момента силы, величина  $m_z (m_k \vec{V}_{kr})$  равна нулю, если вектор относительной скорости лежит в одной плоскости с осью переносного вращения.

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижного центра можно определить как сумму двух составляющих: первая из них характеризует поступательную часть движения тела вместе с его центром масс, вторая - движение системы вокруг центра масс:

$$\vec{K}_O = \vec{m}_O (M \vec{V}_C) + \vec{K}_{rC}.$$

Если тело совершает поступательное движение, то вторая составляющая равна нулю

$$\vec{K}_{rC} = 0.$$

Наиболее просто вычисляется кинетический момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси

$$K_z = I_z \omega,$$

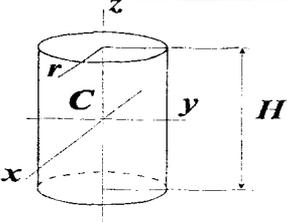
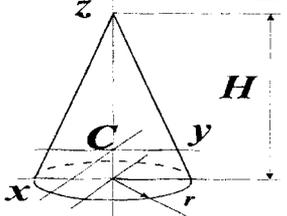
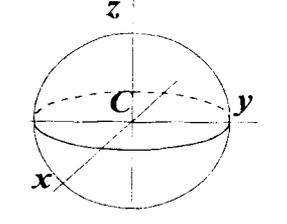
где  $I_z$  - момент инерции тела относительно оси вращения.

Основные формулы для вычисления моментов инерции простейших тел относительно главных центральных осей приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

**Моменты инерции некоторых однородных тел относительно центральных осей**

		$I_x$	$I_y$	$I_z$
Однородный стержень		$\frac{ml^2}{3}$	0	$\frac{ml^2}{3}$
Тонкое кольцо		$\frac{mr^2}{2}$	$\frac{mr^2}{2}$	$mr^2$
Однородный диск		$\frac{mr^2}{4}$	$\frac{mr^2}{4}$	$\frac{mr^2}{2}$
Прямоугольная пластина		$\frac{ma^2}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$
Треугольная пластина		$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$

Круглый цилиндр		$m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)$	$\frac{mr^2}{4}$
Конус		$\frac{3m}{20} \left( \frac{H^2}{4} + r^2 \right)$	$\frac{3mr^2}{10}$
Шар		$\frac{2}{5}mR^2$	

Если ось вращения  $\xi$  не проходит через центр масс тела, то момент инерции тела относительно этой оси может быть определен по теореме Штейнера

$$I_{\xi} = I_{\xi_1} + md^2,$$

где  $m$  - масса тела,

$d$  - расстояние между осью  $\xi$  и осью  $\xi_1$ , параллельной ей, но проходящей через центр масс тела.

Если ось вращения  $\xi$  образует с главными осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  некоторые углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , то момент инерции относительно оси вращения можно выразить через моменты относительно главных осей по формуле

$$I_{\xi} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

*Теорема об изменении кинетического момента механической системы* при ее движении вокруг неподвижного центра формулируется следующим образом: *полная производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра  $O$  по величине и направлению равна главному моменту внешних сил, приложенных к механической системе, определенному относительно того же центра*

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e,$$

где  $\bar{M}_O^e = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$  - главный момент всех внешних сил относительно центра  $O$ .

При решении задач, в которых рассматриваются тела, вращающиеся вокруг неподвижной оси, используют теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^n m_k(\bar{F}_k^e). \quad (2.4)$$

Как и для теоремы о движении центра масс, теорема об изменении кинетического момента имеет следствия.

*Следствие 1. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается неизменным.*

*Следствие 2. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается неизменным.*

Теорема об изменении кинетического момента применяется для решения задач, в которых рассматривается движение механической системы, состоящей из центрального тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и одного или нескольких тел, движение которых связано с центральным. Связь может осуществляться при помощи нитей, тела могут перемещаться по поверхности центрального тела или в его каналах за счет внутренних сил. С помощью данной теоремы можно определить зависимость закона вращения центрального тела от положения или движения остальных тел.

## 2.4. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии механической энергии связывает между собой кинетическую энергию, являющуюся интегральной мерой движения системы, и работу приложенных к телам системы сил.

Кинетическая энергия материальной точки определяется по известной формуле

$$T = \frac{MV^2}{2}.$$

Следует обратить внимание на то, что в этой формуле имеется в виду скорость точки в неподвижной системе отсчета, поэтому в том случае, когда точка совершает сложное движение, надо учитывать обе составляющие скорости:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \quad V^2 = V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\vec{V}_r, \vec{V}_e).$$

Кинетическая энергия механической системы определяется как сумма кинетических энергий всех точек и тел, входящих в рассматриваемую систему. По определению кинетическая энергия есть величина неотрицательная.

При вычислении кинетической энергии механической системы и твердого тела часто оказывается полезной *теорема Кенига: кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии, которой обладает материальная точка с массой, равной массе всей системы, и скоростью, равной скорости центра масс системы, и кинетической энергии, которую имеет система в своем движении вокруг центра масс:*

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + T_{rc}.$$

Способы вычисления кинетической энергии твердого тела зависят от вида движения.

1. Поступательное движение тела

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

где  $V$  - скорость поступательного движения.

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{I_Z \omega^2}{2},$$

где  $I_z$  - момент инерции тела относительно оси вращения;  
 $\omega$  - угловая скорость вращения.

3. Плоскопараллельное движение тела: кинетическая энергия определяется по теореме Кенига как сумма кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_z^{(c)}\omega^2}{2},$$

где  $V_c$  - скорость центра масс тела;

$I_z^{(c)}$  - момент инерции тела относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс тела;

$\omega$  - угловая скорость тела.

4. Сферическое движение тела в каждый данный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси вращения, поэтому

$$T = \frac{I_\Omega \omega^2}{2},$$

где  $I_\Omega$  - момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения,

$\omega$  - мгновенная угловая скорость вращения.

5. Движение свободного твердого тела складывается из поступательного движения вместе с центром масс и сферического движения вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс. Его кинетическая энергия по теореме Кенига равна

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_\Omega^{(c)}\omega^2}{2},$$

где  $V_c$  - скорость центра масс тела;

$I_\Omega^{(c)}$  - момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс тела;

$\omega$  - мгновенная угловая скорость тела.

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки приложения силы есть скалярная величина, равная

$$A = \vec{F} \vec{S} = F S \cos \alpha,$$

где  $\vec{F}$  - вектор силы;

$\vec{S}$  - вектор перемещения точки приложения силы;

$\alpha$  - угол между направлением силы и перемещения.

Для вычисления работы сил и моментов сил в наиболее распространенных случаях можно использовать следующие формулы.

1. Работа силы тяжести

$$A = \pm mgH_C,$$

где  $H_C$  - вертикальное перемещение центра тяжести тела.

Работа силы тяжести положительна, если центр тяжести опускается вниз, отрицательна, если он поднимается, и равна нулю, если в начальном и конечном положениях центр тяжести оказывается в одной и той же горизонтальной плоскости.

2. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу, определяется моментом  $M_z$  этих сил относительно оси вращения

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  - начальное и конечное значения угла поворота;

Если  $M_z = const$ , то

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1).$$

3. Работа силы упругости

$$A = \frac{C}{2} (\Delta_2^2 - \Delta_1^2),$$

где  $C$  - коэффициент жесткости пружины;

$\Delta_1$  и  $\Delta_2$  - начальная и конечная деформации пружины.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы может быть записана в двух формах: интегральной и дифференциальной.

**Интегральная форма:** *изменение кинетической энергии на некотором перемещении системы равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к рассматриваемой системе на этом перемещении:*

$$T_2 - T_1 = A^e + A^i,$$

где  $T_1, T_2$  - кинетическая энергия системы в начальном и в конечном положениях;

$A^e, A^i$  - работа внешних и внутренних сил, приложенных к данной системе, на рассматриваемом перемещении.

**Дифференциальная форма:** *элементарное изменение кинетической энергии системы  $dT$  при ее бесконечно малом перемещении*

равно сумме элементарных работ всех внешних ( $\delta A^e$ ) и внутренних ( $\delta A^i$ ) сил, приложенных к данной системе:

$$dT = \delta A^e + \delta A^i.$$

Если полученное выражение отнести к элементарному промежутку времени, в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, можно получить вторую формулировку для дифференциальной формы теоремы: *производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних ( $N^e$ ) и внутренних ( $N^i$ ) сил*, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i.$$

Дифференциальными формами теоремы об изменении кинетической энергии можно воспользоваться для составления дифференциальных уравнений движения, но это делается достаточно редко, потому что есть более удобные приемы. Для систем, силы в которых остаются постоянными или зависят только от перемещений, интегральную форму теоремы часто используют, чтобы найти зависимость скорости от перемещения.

Механическая система называется консервативной, если для нее имеет место интеграл энергии

$$E = T + \Pi = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.7)$$

Механическая система будет консервативной, если действующие на нее силы потенциальны, например сила тяжести, силы упругости. В консервативных механических системах с помощью интеграла энергии можно проводить проверку правильности составления дифференциальных уравнений движения. Если система консервативна, а условие (2.7) не выполняется, значит, при составлении уравнений движения допущена ошибка.

Интегралом энергии можно воспользоваться для проверки правильности составления уравнений и другим способом, без вычисления производной. Для этого следует после проведения численного интегрирования уравнений движения вычислить значение полной механической энергии для двух различных моментов времени, например, начального и конечного. Если разница значений окажется сопоставимой с погрешностями вычислений, это будет свидетельствовать о правильности используемых уравнений.

## 2.5. Примеры использования общих теорем динамики

**2.5.1.** Теоремой о движении центра масс можно воспользоваться для определения динамических реакций в механической системе. Рассмотрим систему, которая состоит из однородного стержня  $OA$  и кольца  $M$ . Стержень длины  $L$  и массы  $m_1$  вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  (рис.2.3). Кольцо массы  $m$  может без трения скользить по стержню. К нему прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой равен  $C$ . Положение кольца на стержне определяется координатой  $x_1 = OM$ . Определим проекции реакции опоры  $O$  на оси неподвижной декартовой системы координат  $Oxy$ .

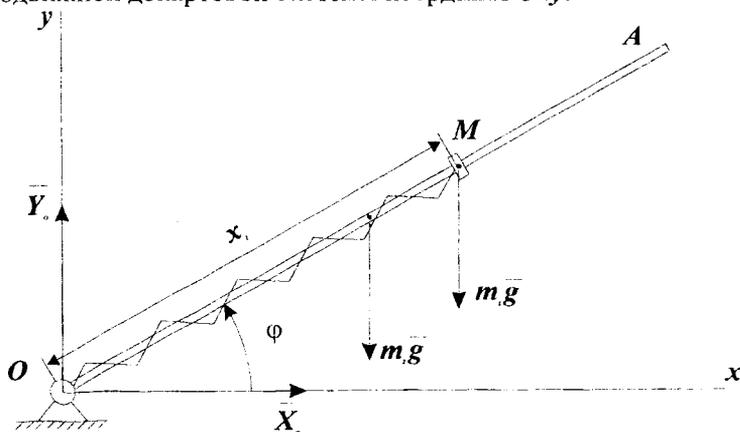


Рис.2.3. Механическая система и внешние силы

Запишем уравнение теоремы о движении центра масс ( 2.2 ) для рассматриваемой механической системы в векторном виде:

$$(m_1+m)\vec{W}_C = \vec{X}_O + \vec{Y}_O + m_1\vec{g} + m\vec{g}. \quad (2.9)$$

Силы взаимодействия кольца со стержнем и пружиной есть внутренние силы системы, поэтому в уравнении они в явном виде не присутствуют. Проектируя уравнение ( 2.9 ) на оси системы координат  $Oxy$ , получаем

$$\begin{aligned} (m_1+m)\ddot{x}_C &= X_O, \\ (m_1+m)\ddot{y}_C &= Y_O - (m_1+m)g. \end{aligned} \quad (2.10)$$

По формулам ( 2.1 ) находим координаты центра масс системы

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{0.5m_1 L \cos \varphi + m x_1 \cos \varphi}{m_1 + m}, \\ y_c &= \frac{0.5m_1 L \sin \varphi + m x_1 \sin \varphi}{m_1 + m}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

затем, дифференцируя (2.11), запишем

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \frac{-0.5m_1 L \dot{\varphi} \sin \varphi + m \dot{x}_1 \cos \varphi - m x_1 \dot{\varphi} \sin \varphi}{m_1 + m}, \\ \dot{y}_c &= \frac{0.5m_1 L \dot{\varphi} \cos \varphi + m \dot{x}_1 \sin \varphi + m x_1 \dot{\varphi} \cos \varphi}{m_1 + m}, \end{aligned}$$

и, наконец, вычисляя вторые производные, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c &= \frac{-0.5m_1 L \ddot{\varphi} \sin \varphi - 0.5m_1 L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + m \ddot{x}_1 \cos \varphi -}{m_1 + m} \\ &\quad - \frac{2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + m x_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi + m x_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi}{m_1 + m} \\ \ddot{y}_c &= \frac{0.5m_1 L \ddot{\varphi} \cos \varphi - 0.5m_1 L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m \ddot{x}_1 \sin \varphi +}{m_1 + m} \\ &\quad + \frac{2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + m x_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi - m x_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{m_1 + m} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в уравнения (2.10), получаем проекции реакции в опоре  $O$  на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} X_0 &= -\left(\frac{m_1 L}{2} + m x_1\right) (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \dot{\varphi} \sin \varphi + \\ &\quad + m \ddot{x}_1 \cos \varphi - 2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi ; \\ Y_0 &= (m_1 + m)g + \left(\frac{m_1 L}{2} + m x_1\right) (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - \\ &\quad + m \ddot{x}_1 \sin \varphi + 2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi . \end{aligned}$$

Если в полученные уравнения подставить значения обобщенных координат и ускорений для какого-либо момента времени, можно найти величины искомых проекций. Эти значения могут

быть взяты из первого раздела курсовой работы, в котором рассматривается движение с постоянной угловой скоростью ( $\dot{\varphi} = \theta$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_1, \varphi = \omega_1 t + \varphi_0$ ), или из третьего, в котором будут получены численные значения всех этих величин при интегрировании дифференциальных уравнений движения системы с двумя степенями свободы. Если динамические реакции в опорах будут определяться еще и методом кинестатики (раздел 4), то надо будет сравнить результаты, полученные двумя разными способами.

**2.5.2.** Рассмотрим применение теоремы об изменении кинетического момента для определения внешнего момента, обеспечивающего равномерное движение ведущего звена механической системы. Механическая система (рис.2.4) состоит из однородной трубки  $CD$  длиной  $L$ , массы  $m_1$ , образующей с осью вращения прямой угол, и шарика массы  $m$ .

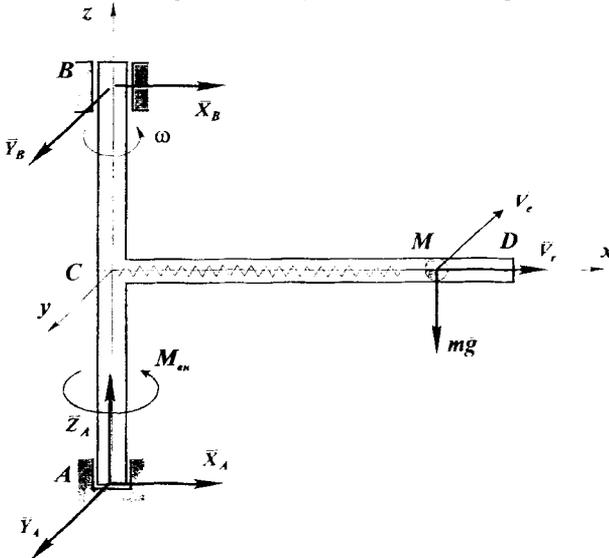


Рис.2.4. Определение кинетического момента

В момент времени  $t=0$  под действием внешнего момента  $M_{ep}$  трубка начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Необходимо определить, каким должен быть этот мо-

мент, чтобы сохранялась постоянная угловая скорость вращения трубки  $CD$ . При решении пренебречь трением, массой стержня  $AB$  и пружины.

Применим теорему об изменении кинетического момента (2.4), выбрав за ось  $z$  ось вращения  $AB$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e).$$

Определим кинетический момент рассматриваемой системы относительно оси  $Az$ . Трубка (однородный прямолинейный стержень) совершает вращение вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, имеет кинетический момент

$$K_{тр} = J_z \omega,$$

где  $J_z = \frac{m_1 L^2}{3}$  - осевой момент инерции трубки,

$\omega$  - угловая скорость вращения.

Шарик  $M$  совершает сложное движение - относительное вдоль трубки с скоростью  $V_r = \dot{x}$  и переносное вместе с трубкой. Переносная скорость  $\bar{V}_e$  перпендикулярна трубке и по модулю равна  $V_e = x \omega$ . При определении переносной скорости за начало отсчета координаты  $x$  принята точка  $C$  трубки, лежащая на оси вращения. Кинетический момент шарика относительно оси  $z$  равен  $K_u = m_2 x^2 \omega$ , т.к. вектор  $m_2 \bar{V}_r$  пересекает ось  $z$  и его момент относительно этой оси равен нулю.

Кинетический момент всей системы равен

$$K_z = \left[ \frac{m_1 L^2}{3} + m_2 x^2 \right] \omega. \quad (2.13)$$

Определим главный момент внешних сил относительно оси  $z$ . Силы тяжести трубки  $m_1 g$  и шарика  $m_2 g$  параллельны оси вращения и момента относительно этой оси не создают. Реакции опор  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  пересекают ось вращения и момент этих сил относительно оси  $z$  также равен нулю. Силы динамического взаимодействия между шариком и трубкой, включая упругую силу пружины  $F_{уп}$ , есть силы внутренние. Поэтому

$$M_z^e = M_{ep}, \quad (2.14)$$

где  $M_{\sigma p}$  - внешний момент, обеспечивающий равномерное вращение трубки.

Подставляя ( 2.13 ) и ( 2.14 ) в уравнение теоремы об изменении кинетического момента системы ( 2.4 ), получаем

$$\left[ \frac{m_1 L^2}{3} + m_2 x^2 \right] \frac{d\omega}{dt} + 2m_2 x \dot{x} \omega = M_{\sigma p},$$

откуда следует, что искомый внешний момент, обеспечивающий равномерное вращение трубки, должен быть равен

$$M_{\sigma p} = 2m_2 x \dot{x} \omega .$$

Если в полученное соотношение подставить численные значения координаты  $x$  и относительной скорости  $\dot{x}$ , которые были получены в первом разделе курсовой работы, можно найти значение вращающего момента для любого момента времени и построить график изменения  $M_{\sigma p}$  на исследуемом интервале времени.

**2.5.3.** Рассмотрим пример использования теоремы об изменении кинетической энергии. Механическая система состоит из двух шаров  $A$  и  $B$ , связанных с шарниром  $O$  и ползуном  $C$  невесомыми стержнями ( рис.2.5 ).

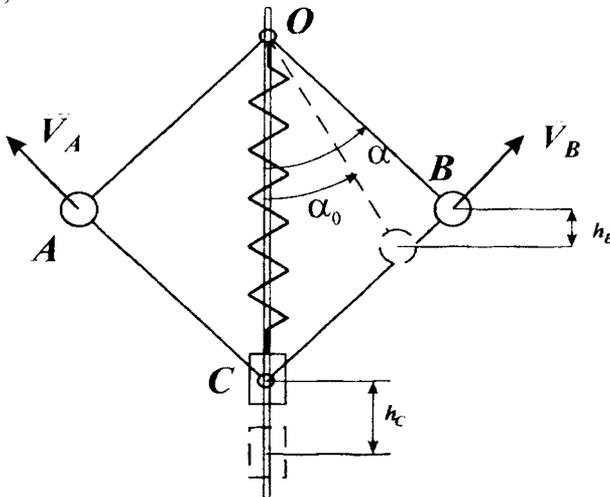


Рис. 2.5. Положение и скорости тел системы

Массы шаров и ползуна одинаковы и равны  $m = 0.2 \text{ кг}$ . Стержни имеют одинаковую длину  $l = 0.3 \text{ м}$ . Между шарниром и ползуном установлена пружина жесткостью  $c = 100 \text{ Н/м}$ , длина которой в недеформированном состоянии равна  $l$ . Требуется определить зависимость скоростей движения шаров от угла отклонения стержней от вертикали  $\alpha$  и найти максимальное отклонение, если в начальный момент времени система покоилась, а угол  $\alpha$  составлял  $\pi/6$ .

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий трех тел, которые по условию могут рассматриваться как материальные точки:

$$T = \frac{mV_A^2}{2} + \frac{mV_B^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2}. \quad (2.15)$$

Скорости шаров пропорциональны угловой скорости вращения стержней  $OA$  и  $OB$ :

$$V_A = V_B = V = l\dot{\alpha}.$$

Скорость ползуна нетрудно определить, если учесть, что  $OC = 2l \cos \alpha$ .

Тогда

$$V_C = \left| \frac{d(OC)}{dt} \right| = 2l \sin \alpha \dot{\alpha} = 2V \sin \alpha.$$

Подставляя выражения для скоростей в (2.15), получим зависимость кинетической энергии системы от скоростей шаров  $V$  и угла отклонения стержней  $\alpha$ :

$$T = mV^2(1 + 2\sin^2 \alpha). \quad (2.16)$$

Определим работу, которую совершат все силы, приложенные к системе при ее перемещении из начального положения в конечное. Работа сил тяжести определяется вертикальными перемещениями центров тяжести тел (см. рис. 2.5.):

$$\begin{aligned} A_{\text{тяж}} &= A(m_A \bar{g}) + A(m_B \bar{g}) + A(m_C \bar{g}) = \\ &= -mgh_A - mgh_B - mgh_C = -4mgl(\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для вычисления работы силы упругости воспользуемся формулой (2.5):

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{2} (\Delta_1^2 - \Delta_2^2) = \frac{C}{2} [(l - 2l \cos \alpha_0)^2 - (l - 2l \cos \alpha)^2] = \\ &= 2Cl^2 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)(\cos \alpha + \cos \alpha_0 - 1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставляя выражения ( 2.16 ), ( 2.17 ) и ( 2.18 ) в уравнение теоремы об изменении кинетической энергии ( 2.6 ), получаем зависимость скорости движения шаров от угла  $\alpha$

$$\begin{aligned} mV^2(1+2\sin^2\alpha) &= -4mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + \\ &+ 2Cl^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\alpha_0 - 1) = \\ &= (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) [2Cl^2(\cos\alpha + \cos\alpha_0 - 1) - 4mgl] \end{aligned}$$

или в явном виде

$$V = \sqrt{\frac{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) [2Cl^2(\cos\alpha + \cos\alpha_0 - 1) - 4mgl]}{m(1+2\sin^2\alpha)}}. \quad (2.19)$$

Если в уравнении 2.19 скорость  $V$  приравнять нулю, можно найти два предельных значения угла  $\alpha$ , между которыми будет происходить движение системы при заданным начальных условиях:

$$1. \cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 = 0 \text{ или } \alpha_1 = \alpha_0 = \frac{\pi}{6} = 0.5236 \text{ рад} = 30^\circ$$

$$2. 2Cl^2(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_0 - 1) = 4mgl \text{ или}$$

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2mg}{Cl}$$

$$\text{или } \alpha_2 = 1.3028 \text{ рад} = 75.64^\circ$$

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ К АНАЛИЗУ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основу аналитической механики составляют общие принципы, из которых аналитическим путем могут быть получены основные дифференциальные уравнения движения или условия равновесия механической системы.

В данном разделе курсовой работы требуется:

- составить дифференциальные уравнения движения системы (желательно несколькими способами);
- найти решения дифференциальных уравнений движения (в большинстве случаев численными методами);
- построить графики изменения координат и скоростей на заданном интервале времени;
- произвести анализ движения системы, варьируя начальные условия и параметры системы;
- решить другие задачи, которые могут быть поставлены преподавателем индивидуально.

#### 3.1. Связи и виртуальные перемещения

Пусть имеется система, состоящая из  $N$  материальных точек  $P_k (k = 1, N)$ . Если на положения и скорости точек наложены ограничения геометрического или кинематического характера (механические связи), то такая система называется несвободной. Для свободных систем связи отсутствуют.

Если скорости точек  $\dot{\vec{r}}_k$  не входят в уравнения связей, то такие связи называются конечными или геометрическими. Ограничения, накладываемые на движение системы такой связью, могут быть описаны уравнением

$$f(\vec{r}_k, t) = 0, \quad (3.1)$$

где  $\vec{r}_k$  - радиусы-векторы точек  $P_k (k = 1, N)$ ,

$t$  - время.

Связь, описываемая уравнением

$$f(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) = 0, \quad (3.2)$$

называется кинематической. Если она путем интегрирования не может быть приведена к виду (3.1), то ее называют неголономной или дифференциальной.

Связь называется стационарной, если время явно не входит в уравнение связи

$$f(\bar{\mathbf{r}}_k, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_k) = 0, \quad (3.3)$$

и нестационарной, если параметр  $t$  присутствует, например (3.1).

Система называется склерономной, если на нее наложены только стационарные связи. В противном случае система называется реономной.

Связи, которые записываются в виде равенства (например (3.1)), называются удерживающими, а в виде неравенства - неудерживающими:

$$f(\bar{\mathbf{r}}_k, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_k, t) \geq 0.$$

Пусть на материальную систему наложены  $d$  конечных связей

$$f_\alpha(\bar{\mathbf{r}}_k, t) = 0, (\alpha = 1, d) \quad (3.4)$$

и  $g$  линейных дифференциальных связей

$$\sum_{k=1}^N \bar{l}_{\beta k} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_k + D_\beta = 0, (\beta = 1, g), \quad (3.5)$$

где  $\bar{l}_{\beta k}, D_\beta$  - вектор и скаляр, представляющие собой заданные функции от  $t$  и  $\bar{\mathbf{r}}_k$ .

Продифференцируем уравнения конечных связей (3.4):

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{r}}_k} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, (\alpha = 1, d). \quad (3.6)$$

Систему векторов  $\bar{\mathbf{v}}_k = \dot{\bar{\mathbf{r}}}_k$  будем называть возможными скоростями для некоторого времени  $t$  и для некоторого возможного в этот момент положения системы, если векторы  $\bar{\mathbf{v}}_k$  удовлетворяют  $d+g$  линейным уравнениям (3.5) и (3.6).

Для каждого возможного положения системы в момент времени  $t$  существует бесчисленное множество систем возможных скоростей.

Систему бесконечно малых перемещений  $d\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{v}}_k dt$  будем называть возможными перемещениями.

Умножив уравнения (3.5) и (3.6) на  $dt$ , получим уравнения, определяющие возможные перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \bar{r}_k} d\bar{r}_k + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, (\alpha = 1, d), \\ \sum_{k=1}^N \bar{l}_{\beta k} d\bar{r}_k + D_{\beta} dt = 0, (\beta = 1, g). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Возьмем две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени и для одного и того же положения системы:

$$d\bar{r}_k = \bar{v}_k dt \text{ и } d\bar{r}'_k = \bar{v}'_k dt.$$

Как  $d\bar{r}_k$ , так и  $d\bar{r}'_k$  удовлетворяют системе (3.7), а их разности

$$\delta\bar{r}_k = d\bar{r}'_k - d\bar{r}_k \quad (3.8)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \bar{r}_k} \delta\bar{r}_k = 0, (\alpha = 1, d), \\ \sum_{k=1}^N \bar{l}_{\beta k} \delta\bar{r}_k = 0, (\beta = 1, g). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Векторы  $\delta\bar{r}_k$ , удовлетворяющие соотношениям (3.9), называются виртуальными перемещениями. Сравнивая выражения (3.7) и (3.9), можно заключить, что виртуальные перемещения совпадают с возможными перемещениями при “замороженных” связях.

Можно еще сказать, что виртуальные перемещения представляют собой перемещения точек системы из одного возможного положения системы в момент времени  $t$  в другое бесконечно близкое, возможное для того же самого момента времени  $t$  положение системы.

При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными.

### 3.2. Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m_k \bar{w}_k) \delta\bar{r}_k = 0, \quad (3.10)$$

где  $\bar{F}_k$  - активные силы, приложенные к системе;

$m_k$  - масса  $k$ -й точки;

$\bar{w}_k$  - ускорение  $k$ -й точки;

$\delta\bar{r}_k$  - виртуальное перемещение  $k$ -й точки.

Уравнение (3.10) показывает, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю при условии, что на систему наложены идеальные и удерживающие связи.

Важным свойством общего уравнения динамики является то, что оно не содержит реакций идеальных связей. Иногда это уравнение можно использовать для исследования движения механических систем и в тех случаях, когда не все связи являются идеальными, например, когда имеются связи с трением. Для этого следует к активным силам добавить те составляющие реакций, которые обусловлены наличием сил трения.

Вычисление суммы работ сил инерции на виртуальных перемещениях твердого тела проводится по следующим формулам.

1) при поступательном движении тела

$$\delta A^u = \bar{\Phi}^u \delta \bar{r}_c,$$

где  $\bar{\Phi}^u = -M \bar{w}_c$  - главный вектор сил инерции тела ( $M$  - масса тела,  $\bar{w}_c$  - ускорение центра масс),  
 $\delta \bar{r}_c$  - виртуальное перемещение центра масс тела;

2) при вращении тела вокруг неподвижной оси

$$\delta A^u = M_z^u \delta \varphi,$$

где  $M_z^u = -I_z \varepsilon$  - главный момент сил инерции тела относительно оси вращения ( $I_z$  - момент инерции тела относительно оси вращения,  $\varepsilon$  - угловое ускорение тела),  
 $\delta \varphi$  - виртуальное угловое перемещение тела;

3) при плоскопараллельном движении

$$\delta A = \bar{\Phi}^u \delta \bar{r}_c + M_c^u \delta \varphi,$$

где  $M_c^u$  - главный момент сил инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $C$  тела.

Частным случаем общего уравнения динамики является принцип виртуальных перемещений (общее уравнение статики). Действительно, в том случае, когда механическая система находится в покое, все силы инерции равны нулю, и из общего уравнения динамики вытекает принцип виртуальных перемещений: для того чтобы механическая система, на которую наложены идеальные связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных

сил, приложенных к этой системе, на любом из ее виртуальных перемещений была равна нулю:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.11)$$

Рассмотрим процедуру использования уравнения (3.10) для составления дифференциальных уравнений движения систем с двумя степенями свободы:

1. Изобразить механическую систему в произвольный момент времени.

2. Показать на рисунке активные силы и моменты, а также силы и моменты, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения).

3. Определить главные векторы и главные моменты сил инерции.

4. Выбрать обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы системы.

5. Дать виртуальное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом виртуальные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю.

6. Вычислить сумму элементарных работ всех сил и моментов (см. пп. 2 и 3) на соответствующих виртуальных перемещениях и приравнять эту сумму нулю.

7. Повторить пп. 4 - 6 для каждого независимого движения системы.

При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и большим числом степеней свободы в связи с громоздкостью выкладок можно использовать следующие рекомендации:

1. Сделать предположение о направлении ускорений точек системы.

2. Направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений.

3. Определить знаки элементарных работ сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями виртуальных перемещений точек системы.

**4. Если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.**

### 3.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Уравнения Лагранжа 2-го рода являются одним из наиболее удобных приемов составления уравнений движения механических систем. Они имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1,2,\dots,s; \quad (3.12)$$

где  $T$  - кинетическая энергия механической системы,

$q_j, \dot{q}_j, Q_j$  - обобщенные координаты, скорости и силы соответственно,

$s$  - число степеней свободы механической системы.

Уравнения (3.12) образуют систему  $s$  уравнений второго порядка относительно  $s$  функций  $q_j(t)$ . Порядок системы (3.12) равен  $2s$ . Форма уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_s$ . От выбора обобщенных координат зависит только вид функций  $T$  и  $Q_j$ . В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа 2-го рода обладают свойством инвариантности.

Уравнения движения с помощью уравнений Лагранжа составляются следующим образом:

1. Определяется число степеней свободы механической системы.

2. Выбираются обобщенные координаты, однозначно и наиболее удобным образом определяющие положение всех тел в системе. Для голономных систем число обобщенных координат равно числу степеней свободы.

3. Кинетическая энергия системы выражается через обобщенные координаты  $q_j$  и производные от них по времени - обобщенные скорости  $\dot{q}_j$ .

4. Находятся обобщенные силы  $Q_j$ , соответствующие выбранным обобщенным координатам  $q_j$ .

5. Вычисляются производные от кинетической энергии согласно уравнениям (3.12) и составляются уравнения движения.

При определении кинетической энергии необходимо учитывать следующее:

а) для вычисления кинетической энергии тел, входящих в систему, в соответствующие расчетные формулы подставляются абсолютные ско-

рости (линейные и угловые), которые будут складываться из переносных и относительных;

б) если все обобщенные координаты независимы друг от друга, то для определения отдельных скоростей можно сначала определить те скорости, которые будут иметь точки и тела при отличии от нуля только одной из обобщенных координат (частные скорости), а затем сложить их

$$\bar{v}_k = \sum_{j=1}^s \bar{v}_{kj},$$

где  $\bar{v}_k$  - вектор скорости  $k$ -й точки,

$\bar{v}_{kj}$  - скорость, которую будет иметь  $k$ -я точка, если будет отличаться от нуля только одна обобщенная скорость  $\dot{q}_j$ .

Аналогичное соотношение можно записать для угловых скоростей:

$$\bar{\omega}_k = \sum_{j=1}^s \bar{\omega}_{kj},$$

или, если движение происходит в одной плоскости:

$$\omega_k = \sum_{j=1}^s \omega_{kj},$$

Для определения обобщенных сил используют три способа.

1. Используется в тех случаях, когда известны аналитические зависимости проекций всех активных сил на оси неподвижной системы координат от обобщенных координат. Тогда

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

2. При определении обобщенных сил пользуются тем, что обобщенные координаты и их вариации являются независимыми. Поэтому при определении возможной работы можно рассмотреть такое возможное перемещение системы, при котором будет изменяться только одна обобщенная координата  $q_j$ . Тогда  $\delta q_i = 0$  для всех  $i$ , кроме  $i = j$ , и из выражения (3.4) получаем

$$\delta A_j = Q_j \delta q_j,$$

откуда

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}.$$

Повторяя рассмотренную процедуру для всех обобщенных координат  $j = 1 \dots s$ , получают все обобщенные силы.

3. Позволяет определять обобщенные силы в консервативных механических системах. В них следует вычислить потенциальную энергию  $\Pi$ , которая зависит только от обобщенных координат, а затем найти все обобщенные силы по следующей формуле:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

В заключение заметим, что в уравнениях Лагранжа 2-го рода не содержатся реакции идеальных связей. Если же нужно найти реакции связей, то надо после интегрирования уравнений Лагранжа подставить функции  $q_j(t)$  в выражение

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{r}}_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t),$$

где  $\bar{\mathbf{r}}_k$  - радиус-векторы точек системы относительно начала инерциальной системы координат.

Тогда равнодействующие  $\bar{\mathbf{R}}_k$  реакций связей, приложенных к точкам системы, найдутся из соотношений

$$\bar{\mathbf{R}}_k = m\ddot{\bar{\mathbf{r}}}_k - \bar{\mathbf{F}}_k.$$

### 3.4. Пример составления уравнений движения системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из стержня  $CD$  длиной  $l_1$  и массой  $m_{ст}$ , трубки  $KN$  длиной  $2l$  и массой  $m_{тр}$ , шарика  $M$  массой  $m_{ш}$ , прикрепленного к пружине жесткостью  $c$  (рис.3.1). Трубка имеет возможность вращаться вокруг горизонтальной оси  $AB$ . В начальный момент система находилась в покое, шарик имел координату  $y_0$  (при этом пружина была не деформирована).

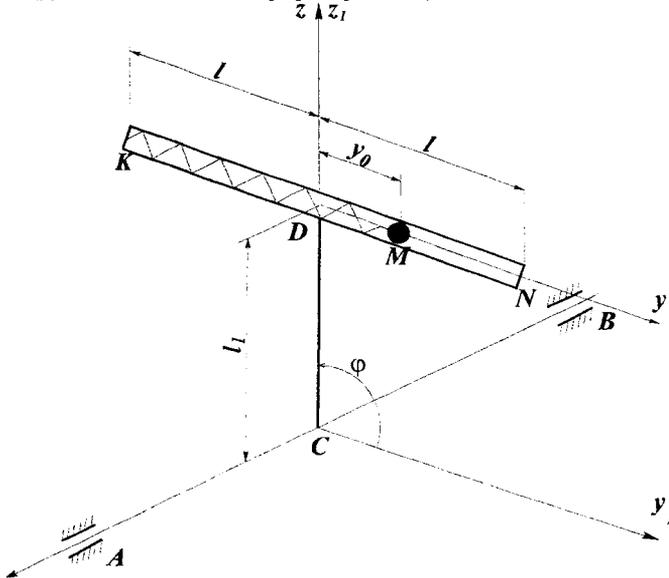


Рис. 3.1. Схема механической системы

Требуется:

- составить дифференциальные уравнения движения системы (двумя методами);
- проинтегрировать полученные уравнения;
- построить графики изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Дифференциальные уравнения движения системы можно составить с помощью общего уравнения динамики или уравнений Лагранжа 2-го рода. Полученные уравнения следует сравнить с уравнениями движения, полученными в других разделах работы.

При составлении уравнений движения с помощью общего уравнения динамики учитываются активные силы и силы инерции (рис.3.2):

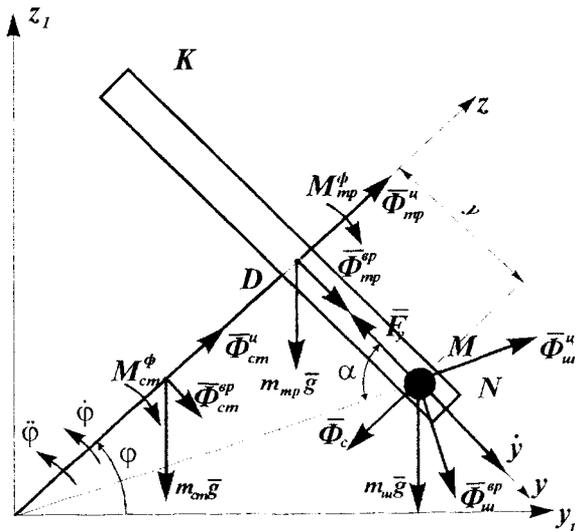


Рис. 3.2. Активные силы и силы инерции

$\bar{\Phi}_{ct}^u$  - центробежная сила инерции стержня;

$\bar{\Phi}_{ct}^{ep}$  - вращательная сила инерции стержня ;

$M_{ct}^\phi$  - момент сил инерции стержня;

$\bar{\Phi}_{tr}^u$  - центробежная сила инерции трубки ;

$\bar{\Phi}_{tr}^{ep}$  - вращательная сила инерции трубки;

$M_{tr}^\phi$  - момент сил инерции трубки;

$\bar{\Phi}_{ш}^u$  - переносная центробежная сила инерции шарика;  $\bar{\Phi}_{ш}^{ep}$  - переносная вращательная сила инерции шарика;

$\bar{\Phi}_{ш}$  - сила инерции шарика в относительном движении;

$\bar{\Phi}_c$  - кориолисова сила инерции шарика.

Силы инерции трубки и стержня приложены в центрах масс этих тел.

Найдем величины сил и моментов инерции:

$$\Phi_{cm}^u = \frac{1}{2} m_{cm} l_1 \dot{\varphi}^2, \quad \Phi_{cm}^{ep} = \frac{1}{2} m_{cm} l_1 \ddot{\varphi}, \quad M_{cm}^\phi = \frac{1}{12} m_{cm} l_1^2 \ddot{\varphi},$$

$$\Phi_{mp}^u = m_{mp} l_1^2 \dot{\varphi}^2, \quad \Phi_{mp}^{ep} = m_{mp} l_1 \ddot{\varphi},$$

$$M_{mp}^\phi = \left( \frac{m_{mp} 4l^2}{12} \right) \ddot{\varphi} = \frac{1}{3} m_{mp} l^2 \ddot{\varphi},$$

$$\Phi_{ш}^u = m_{ш} \sqrt{l_1^2 + y^2} \dot{\varphi}^2, \quad \Phi_{ш}^{ep} = m_{ш} \sqrt{l_1^2 + y^2} \ddot{\varphi},$$

$$\Phi_{ш} = m_{ш} \ddot{y}, \quad \Phi_c = 2m_{ш} \ddot{y}.$$

В качестве обобщенных координат выбираем угол поворота стержня  $\varphi$  и координату  $y$ , определяющую положение шарика в трубке.

Выведем первое дифференциальное уравнение движения системы. Для этого фиксируем координату  $y$ , даем системе виртуальное перемещение  $\delta\varphi$ , находим элементарную работу, которую могут совершить все активные силы и силы инерции, и приравниваем ее нулю:

$$\begin{aligned} \delta A = & \Phi_{cm}^{ep} \frac{l_1}{2} \delta\varphi + M_{cm}^\phi \delta\varphi + m_{cm} g \frac{l_1}{2} \cos \varphi \delta\varphi + m_{mp} g l_1 \cos \varphi \delta\varphi + \\ & + \Phi_{mp}^{ep} l_1 \delta\varphi + M_{mp}^\phi \delta\varphi + m_{ш} g (l_1 \cos \varphi + y \sin \varphi) \delta\varphi + \Phi_{ш}^{ep} \sqrt{l_1^2 + y^2} \delta\varphi - \\ & - \Phi_{ш} l_1 \delta\varphi + \Phi_c y \delta\varphi = 0. \end{aligned}$$

Подставим в это уравнение величины сил и моментов инерции и разделим все слагаемые на общий множитель  $\delta\varphi$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{m_{cm} l_1^2}{3} + \frac{m_{mp}}{3} (l^2 + 3l_1^2) + m_{ш} (l_1^2 + y^2) \right) \ddot{\varphi} + 2m_{ш} \ddot{y} y - m_{ш} \ddot{y} l_1 = \\ & = \left( -m_{cm} g \frac{l_1}{2} - m_{mp} g l_1 - m_{ш} g l_1 \right) \cos \varphi - m_{ш} g y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Получим второе дифференциальное уравнение движения системы. Для этого фиксируем координату  $\varphi$ , даем виртуальное перемещение  $\delta y$ , находим элементарную работу, приравниваем ее нулю:

$$\delta A = -\Phi_{ш} \delta y - c(y - y_0) \delta y + m_{ш} g \cos \varphi \delta y + \Phi_{ш}^{ep} \sin \alpha \delta y + \Phi_{ш}^u \cos \alpha \delta y = 0$$

Значение угла  $\alpha$  зависит от положения шарика в трубке (рис. 3.2)

$$\sin \alpha = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + y^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{l_1^2 + y^2}}.$$

С учетом этих соотношений получим

$$m_u \ddot{y} - m_u \ddot{\phi} l_1 - m_u \dot{\phi}^2 y = m_u g \cos \varphi - c(y - y_0)$$

или

$$\ddot{y} - \ddot{\phi} l_1 - \dot{\phi}^2 y = g \cos \varphi - c(y - y_0) / m_u. \quad (3.14)$$

Уравнения ( 3.13 ) и ( 3.14 ) представляют собой систему дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой механической системы.

Составим уравнения движения с помощью уравнений Лагранжа 2-рода. В выбранных обобщенных координатах  $\varphi$  и  $y$  они принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y, \quad (3.16)$$

где  $T$  - кинетическая энергия системы;

$Q_\varphi, Q_y$  - обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам  $\varphi$  и  $y$ .

Найдем кинетическую энергию системы. Она состоит из кинетических энергий всех тел, входящих в систему: стержня  $T_{cm}$ , трубки  $T_{mp}$  и шарика  $T_u$

$$T = T_{cm} + T_{mp} + T_u, \quad (3.17)$$

где

$$T_{cm} = \frac{1}{2} J_{cm} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m_{cm} \frac{l_1^2}{3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_{cm} l_1^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3.18)$$

$$T_{mp} = \frac{1}{2} J_{mp} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_{mp} (2l)^2}{12} + m_{mp} l_1^2 \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_{mp} (l^2 + 3l_1^2) \dot{\varphi}^2, \quad (3.19)$$

$$T_u = \frac{1}{2} m_u v_u^2.$$

Абсолютная скорость шарика  $\bar{v}_u$  равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей ( рис.3.3 ),

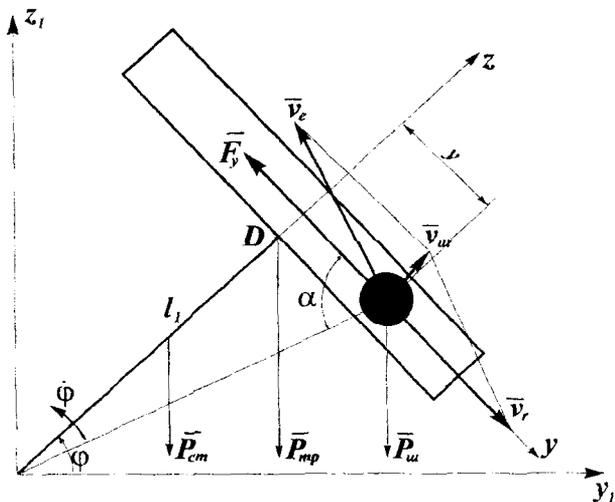


Рис. 3.3. Активные силы в системе

ее величина определяется по формуле

$$v_{uu}^2 = v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\bar{v}_r \wedge \bar{v}_e) = v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \sin \alpha. \quad (3.20)$$

$\bar{v}_r, \bar{v}_e$  - относительная и переносная скорости шарика :

$$v_r^2 = \dot{y}^2, \quad v_e^2 = \dot{\varphi}^2 (l_1^2 + y^2), \quad (3.21)$$

Подставив выражения (3.21) и значение  $\sin \alpha$  в уравнение (3.20), получим

$$v_{uu}^2 = \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2 (l_1^2 + y^2) - 2\dot{y}\dot{\varphi}l_1. \quad (3.22)$$

Тогда для кинетической энергии системы получим

$$T = \frac{1}{6} m_{cm} l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} m_{mp} (l^2 + 3l_1^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_u (\dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2 (l_1^2 + y^2) - 2\dot{y}\dot{\varphi}l_1). \quad (3.23)$$

Найдем все производные левой части уравнений (3.15) и (3.16):

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{3} m_{cm} l_1^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3} m_{mp} (l^2 + 3l_1^2) \dot{\varphi} + m_u \dot{\varphi} (l_1^2 + y^2) - m_u y \dot{l}_1, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{3} m_{cm} l_1^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{3} m_{mp} (l^2 + 3l_1^2) \ddot{\varphi} + m_u (l_1^2 + y^2) \ddot{\varphi} + \\
 &\quad + 2m_u \dot{\varphi} y \dot{y} - m_u l_1 \ddot{y}, \\
 \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m_u \dot{y} - m_u \dot{\varphi} l_1, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m_u \ddot{y} - m_u \ddot{\varphi} l_1, \\
 \frac{\partial T}{\partial y} &= m_u \dot{\varphi}^2 y.
 \end{aligned} \right\} (3.24)$$

Обобщенные силы можно определить двумя способами.

1. Фиксируем координату  $y$ , даем виртуальное перемещение  $\delta\varphi$ , находим элементарную работу

$$\delta A_\varphi = - \left( m_{cm} g \frac{l_1}{2} \cos \varphi + m_{mp} g l_1 \cos \varphi + m_u g (l_1 \cos \varphi + y \sin \varphi) \right) \delta\varphi.$$

Тогда для обобщенной силы получим

$$Q_\varphi = - \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = - \left( \frac{1}{2} m_{cm} + m_{mp} + m_u \right) g l_1 \cos \varphi - m_u g y \sin \varphi. \quad (3.25)$$

Фиксируем координату  $\varphi$ , даем виртуальное перемещение  $\delta y$ , находим элементарную работу

$$\delta A_y = (-F_{yup} + m_u g \cos \varphi) \delta y,$$

где  $F_{yup} = c(y - y_0)$  - сила упругости пружины.

Тогда

$$Q_y = \frac{\delta A_y}{\delta y} = -c(y - y_0) + m_u g \cos \varphi. \quad (3.26)$$

2. Вычислим потенциальную энергию системы  $\Pi$ :

$$\Pi = \Pi_{cm} + \Pi_{mp} + \Pi_u + \Pi_{yup}.$$

Здесь  $\Pi_{cm}$ ,  $\Pi_{mp}$ ,  $\Pi_u$ ,  $\Pi_{yup}$  - потенциальная энергия сил тяжести стержня, трубки, шарика, а также силы упругости пружины, которые определяются формулами

$$\begin{aligned}\Pi_{cm} &= m_{cm}g \frac{l_1}{2} \sin \varphi, \\ \Pi_{mp} &= m_{mp}gl_1 \sin \varphi, \\ \Pi_u &= m_u g(l_1 \sin \varphi - y \cos \varphi), \\ \Pi_{yup} &= \frac{c}{2}(y - y_0)^2.\end{aligned}$$

Тогда потенциальная энергия системы примет вид

$$\Pi = m_{cm}g \frac{l_1}{2} \sin \varphi + m_{mp}gl_1 \sin \varphi + m_u gl_1 \sin \varphi - m_u gy \cos \varphi + \frac{c}{2}(y - y_0)^2.$$

Найдем обобщенные силы:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -m_{cm}g \frac{l_1}{2} \cos \varphi - m_{mp}gl_1 \cos \varphi - m_u g(l_1 \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -c(y - y_0) + m_u g \cos \varphi.$$

Подставив производные ( 3.24 ) и обобщенные силы  $Q_\varphi$  и  $Q_y$  в уравнения ( 3.15 ) и ( 3.16 ), получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\begin{aligned}&\left( \frac{1}{3} m_{cm} l_1^2 + \frac{1}{3} m_{mp} (l^2 + 3l_1^2) + m_u (l_1^2 + y^2) \right) \ddot{\varphi} + 2m_u \dot{\varphi} \dot{y} - m_u \ddot{y} l_1 = \\ &= - \left( m_{cm} \frac{l_1}{2} + m_{mp} l_1 + m_u l_1 \right) g \cos \varphi - m_u g y \sin \varphi,\end{aligned}$$

$$m_u \ddot{y} - m_u \ddot{\varphi} l_1 - m_u \dot{\varphi}^2 y = m_u g \cos \varphi - c(y - y_0).$$

Эти дифференциальные уравнения совпадают с уравнениями движения ( 3.13 ) и ( 3.14 ), полученными с помощью общего уравнения динамики.

## 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В ОПОРАХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Данный раздел выполняется только в таких вариантах курсовой работы, в которых основное тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью. В этом разделе необходимо:

- определить величины и направления реакций, возникающих в опорах вращающегося тела, относительно неподвижной и подвижной (связанной с телом) систем координат;
- построить графики изменения реакций, действующих в опорах, на заданном интервале времени.

Для решения поставленной задачи рекомендуется использовать метод кинестатики ( принцип Даламбера ). Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно при расчетах на прочность вращающихся тел.

### 4.1. Метод кинестатики

Для каждой точки  $M_k$  механической системы справедливо основное уравнение динамики

$$m_k \bar{w}_k = \bar{F}_k + \bar{R}_k, \quad k=1,2,\dots,N, \quad (4.1)$$

где  $\bar{F}_k, \bar{R}_k$  - равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к  $k$ -й точке,

$m_k$  - масса материальной точки,

$\bar{w}_k$  - её ускорение,

$N$  - число точек системы.

Основному уравнению динамики ( 4.1 ) можно придать вид уравнения статики:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,N \quad (4.2)$$

где вектор  $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{w}_k$  - называется силой инерции.

Умножая векторно каждое из уравнений ( 4.2 ) на радиус-вектор  $\bar{r}_k$ , проведенный из произвольно выбранного полюса  $O$  к точке  $M_k$ , получим

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3)$$

Просуммировав все  $N$  уравнений (4.2) и (4.3), записанных для каждой точки механической системы, получим векторные уравнения кинестатики

$$\begin{aligned}\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} &= 0, \\ \bar{M}_O + \bar{M}_O^R + \bar{M}_O^\Phi &= 0,\end{aligned}\quad (4.4)$$

т.е. в каждый момент времени сумма главных векторов активных сил  $\bar{F}$ , реакций связей  $\bar{R}$  и сил инерции  $\bar{\Phi}$  движущейся механической системы равна нулю, а также равна нулю сумма главных моментов активных сил  $\bar{M}_O$ , реакций связей  $\bar{M}_O^R$  и сил инерции  $\bar{M}_O^\Phi$  движущейся механической системы относительно любого полюса  $O$ .

Двум векторным уравнениям (4.4) соответствует шесть уравнений в проекциях на оси декартовых координат (в случае плоской системы действующих сил - три уравнения) :

$$\begin{aligned}F_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0, \\ M_x + M_x^R + M_x^\Phi &= 0, \\ M_y + M_y^R + M_y^\Phi &= 0, \\ M_z + M_z^R + M_z^\Phi &= 0.\end{aligned}\quad (4.5)$$

За оси координат можно выбрать любую систему декартовых осей, как неподвижных, так и перемещающихся произвольным образом в пространстве, например, связанных с основным вращающимся телом.

Применение метода кинестатики требует умения вычисления сил инерции. К каждой точке твердого тела, движущегося с ускорением, прикладывается сила инерции. Как известно из статики, любую систему сил можно привести к одной силе, равной главному вектору, и одной паре сил, равной главному моменту всех сил системы относительно произвольного центра.

Главный вектор сил инерции точек движущегося твердого тела определяется по формуле

$$\bar{\Phi} = -M\bar{w}_C.$$

Здесь  $M$  - масса всего тела,  
 $\bar{w}_C$  - ускорение центра масс тела.

Следует обратить внимание на то, что если силы инерции точек можно привести к равнодействующей силе  $\vec{\Phi}^*$ , то эта сила равна и параллельна главному вектору  $\vec{\Phi}$ , но линия действия равнодействующей может не проходить через центр масс.

Главный момент сил инерции точек тела относительно произвольного полюса в случае, когда положение равнодействующей силы известно, определяется как момент равнодействующей силы:

$$\vec{M}_O^{\Phi} = \vec{M}_O(\vec{\Phi}^*).$$

Если положение линии действия равнодействующей сил инерции неочевидно и с помощью указанной формулы нельзя определить главный момент сил инерции, то в случае непрерывного распределения масс надо найти силы инерции для выделенного элемента и затем распространить суммирование по всему твердому телу, вычислив определенный интеграл в соответствующих пределах.

Сила инерции материальной точки, совершающей сложное движение, определяется как геометрическая сумма относительной, переносной и кориолисовой сил инерции:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_r + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c,$$

$$\vec{\Phi}_r = -m\vec{w}_r, \quad \vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e, \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c,$$

где  $m$  - масса материальной точки,

$\vec{w}_r$  - ускорение точки в относительном движении,

$\vec{w}_e$  - ускорение точки в переносном движении,

$\vec{w}_c$  - кориолисово ускорение.

Для более подробного изучения теории рекомендуется воспользоваться конспектом лекций или одним из курсов теоретической механики [ 2, гл. XVI; 6, гл. XVI ].

Помимо вычисления реакций опор в некоторых вариантах курсовой работы можно, используя метод кинестатики, составить дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки, определить реакции связей, действующих на движущуюся точку, а также закон изменения внешнего момента, обеспечивающего постоянную угловую скорость основного тела, и провести их сравнение с уравнениями, полученными ранее в других разделах курсовой работы. С этой целью необходимо уравнения кинестатики записать двумя способами. В первом случае рассматривать механическую систему, включающую материальную точку, при этом учитывать в уравнениях кинестатики

относительную  $\overline{\Phi}_r$ , переносную  $\overline{\Phi}_e$  и кориолисову  $\overline{\Phi}_c$  силы инерции, приложенные к точке. Во втором случае рассматривать механическую систему без материальной точки, действие которой на систему следует заменить реакциями связей. Путем сравнения полученных в первом и втором способе систем уравнений кинетостатики определить указанные выше величины.

Рекомендуется следующая последовательность решения поставленной задачи первым способом:

1. Изобразить на рисунке схему механической системы.
2. Выбрать неподвижную и подвижную системы отсчета.
3. Материальную точку изобразить в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.
4. Ввести реакции опор, определить активные силы и силы инерции, действующие на все элементы механической системы. Изобразить данные силы на рисунке.
5. Составить первую систему уравнений кинетостатики вида ( 4.5 ) в проекциях на любую выбранную систему координат.

Для составления уравнений кинетостатики вторым способом необходимо:

1. Изобразить на новом рисунке схему механической системы.
2. Выбрать неподвижную и подвижную системы отсчета.
3. Материальную точку изобразить в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.
4. Ввести реакции опор, удалить материальную точку, заменив ее действие на механическую систему реакциями связи. Изобразить на рисунке данные силы, а также активные силы и силы инерции, действующие на остальные элементы механической системы.
5. Составить вторую систему уравнений кинетостатики вида (4.5) в проекциях на оси той же, что и в первом случае, системы координат.

Решая совместно первую и вторую системы уравнений кинестатики, можно определить:

- дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки, а также закон изменения внешнего момента, обеспечивающего постоянную угловую скорость основного тела, и провести их сравнение с уравнениями, полученными ранее в других разделах курсовой работы.
- величины и направления реакций, возникающих в опорах вращающегося тела, относительно выбранной системы координат, а также пересчитать относительно другой системы координат, учитывая существующую связь между ними.

Примеры применения метода кинестатики к определению реакций внешних связей механической системы приведены в [4, задание Д.16].

В расчетно-пояснительной записке к курсовой работе необходимо привести рисунки схем механической системы с выбранными системами координат и действующими силами. Вывод систем уравнений кинестатики, их решения, результаты анализа должны быть сопровождаемы соответствующими пояснениями. Полученные результаты оформляются в виде таблиц и графиков.

#### 4.2. Определение реакций в опорах вращающегося тела

Воспользуемся методом кинестатики для определения реакций в опорах вращающегося тела.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из однородной трубки  $CD$ , образующей с осью вращения прямой угол, и шарика  $M$ , прикрепленного к концу горизонтальной пружины (рис.4.1).

На схеме механической системы кроме неподвижной  $O_1\xi\eta\zeta$  и подвижной  $Oxyz$  систем координат определим подвижную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , связанную с вращающимся стержнем  $AB$ . Ее оси параллельны осям системы координат  $Oxyz$ , а их начало совпадает с точкой  $O_1$ .

Введем реакции опор и обозначим их составляющие в подвижной системе координат для опоры - подпятника  $A$  через  $X_A, Y_A, Z_A$ , для опоры-подшипника  $B$  -  $X_B, Z_B$ .

С целью определения дифференциального уравнения относительного движения шарика, реакций связей, действующих на движущуюся точку, а также закона изменения внешнего момента, обеспечивающего постоянную угловую скорость трубки, уравнения кинестатики составим двумя способами.

1. Рассматривается материальная система, состоящая из трубки и шарика (рис. 4.1).

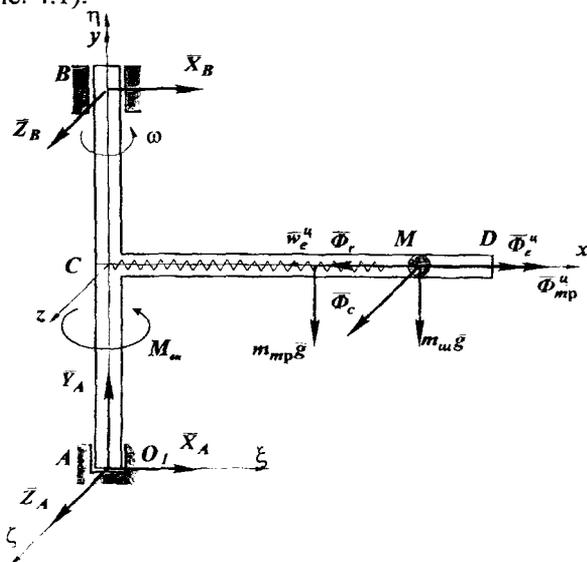


Рис. 4.1

Уравнения кинестатики в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} &= 0, \\ \bar{M}_{O_1} + \bar{M}_{O_1}^R + \bar{M}_{O_1}^\Phi &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\bar{F}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{\Phi}$  - главные векторы активных сил, реакций связей и сил инерции;

$\bar{M}_{O_1}$ ,  $\bar{M}_{O_1}^R$ ,  $\bar{M}_{O_1}^\Phi$  - главные моменты активных сил, реакций связей и сил инерции относительно точки  $O_1$ .

Так как в рассматриваемом случае трубка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ , то главный вектор сил инерции точек трубки определяется по формуле

$$\overline{\Phi}_{emp} = \overline{\Phi}_{emr}^u = -m_{mp} \overline{w}_{emp}^u,$$

где  $m_{mp}$  - масса трубки,

$\overline{w}_{emp}^u$  - центростремительное ускорение центра масс трубки.

Сила  $\overline{\Phi}_{emp}^u$  направлена вдоль оси трубки, ее модуль

$$\Phi_{emp}^u = m_{mp} \omega^2 L / 2, \quad (4.7)$$

где  $L$  - длина трубки.

Сила инерции шарика как материальной точки, совершающей сложное движение, равна геометрической сумме относительной, переносной и кориолисовой сил инерции:

$$\overline{\Phi}_r = -m \overline{w}_r,$$

$$\overline{\Phi}_{emr} = \overline{\Phi}_{emr}^u = -m \overline{w}_{emr}^u,$$

$$\overline{\Phi}_c = -m \overline{w}_c,$$

где  $m$  - масса материальной точки,

$\overline{w}_r$ ,  $\overline{w}_{emr}^u$  и  $\overline{w}_c$  - соответственно относительное ускорение точки,

ее переносное центростремительное и кориолисово ускорения.

Модули сил инерции равны

$$\Phi_r = m\ddot{x}, \quad \Phi_{emr}^u = m\omega^2 x, \quad \Phi_c = 2m\omega\dot{x} \quad (4.8)$$

Изобразим активные силы, реакции опор и силы инерции, действующие на механическую систему (рис. 4.1). Векторные уравнения кинестатики (4.4) в проекциях на оси подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  имеют вид

$$\sum X_{li} = X_A + X_B + \Phi_{emp}^u + \Phi_{emr}^u - \Phi_r = 0,$$

$$\sum Y_{li} = Y_A - m_{mp}g - mg = 0,$$

$$\sum Z_{li} = Z_A + Z_B + \Phi_c = 0,$$

$$\sum M_{ix_i} = Z_B AB + \Phi_c AC = 0, \quad (4.9)$$

$$\sum M_{iy_i} = M_{en} - \Phi_c x = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iz_i} = & -X_B AB + \Phi_r AC - \Phi_{emp}^u AC - \\ & - \Phi_{emr}^u AC - m_{mp}gL / 2 - mgx = 0 \end{aligned}$$

С учетом выражений для сил инерции (4.7) и (4.8) уравнения (4.9) принимают вид

$$\begin{aligned}
 X_A + X_B + m_{mp}\omega^2 L/2 + m\omega^2 x - m\ddot{x} &= 0, \\
 Y_A - m_{mp}g - mg &= 0, \\
 Z_A + Z_B + 2m\omega\dot{x} &= 0, \\
 Z_B AB + 2m\omega\dot{x}AC &= 0, \\
 M_{\text{отн}} - 2m\omega\dot{x}x &= 0, \\
 -X_B AB + m\ddot{x}AC - m_{mp}\omega^2 ACL/2 - \\
 -m\omega^2 xAC - m_{mp}gL/2 - mgx &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

2. Составим уравнения кинестатики вторым способом. Из состава механической системы удалим шарик и заменим его действие на трубку двумя силами:  $\vec{F}'_{\text{упр}}$  - реакцией на действие пружины и  $\vec{N}'$  - давлением шарика на стенку трубки ( на рис. 4.2 показаны составляющие этого вектора:  $\vec{N}'_y$  и  $\vec{N}'_z$ ).

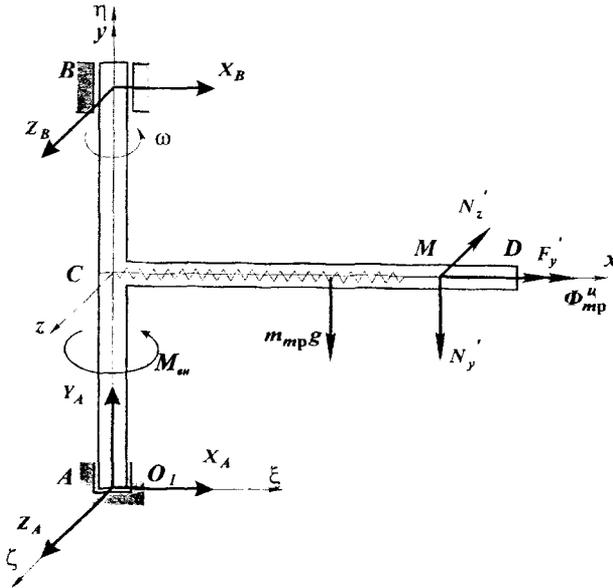


Рис.4.2. Силы, действующие на трубку

Изобразим активные силы, реакции опор, реакции связей и силы инерции, действующие на механическую систему в рассматриваемом случае ( рис. 4.2 ). При этом векторные уравнения кинестатики ( 4.6 ) в проекциях на оси подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum X_{li} &= X_A + X_B + \Phi_{emp}^u + F'_{ynp} = 0, \\ \sum Y_{li} &= Y_A - m_{mp}g - N'_y = 0, \\ \sum Z_{li} &= Z_A + Z_B - N'_z = 0, \\ \sum M_{ix_1} &= Z_B AB - N'_z AC = 0, \\ \sum M_{iy_1} &= M_{en} + N'_z x = 0, \\ \sum M_{iz_1} &= -X_B AB - \Phi_{emp}^u AC - m_{mp}gL / 2 - \\ &- F'_{ynp} AC - N'_y x = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если в эти уравнения подставить реакцию пружины  $F'_{ynp} = cx$  и выражение для силы инерции  $\Phi_{emp}^u$  ( 4.7 ), то получим

$$\begin{aligned} X_A + X_B + m_{mp} \omega^2 L / 2 + c(x - a) &= 0, \\ Y_A - m_{mp}g - N'_y &= 0, \\ Z_A + Z_B - N'_z &= 0, \\ Z_B AB - N'_z AC &= 0, \\ M_{en} + N'_z x &= 0, \\ -X_B AB - \frac{m_{mp} \omega^2 ACL}{2} - \frac{m_{mp}gL}{2} - c(x - a)AC - N'_y x &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из сравнения первых уравнений систем (4.10) и (4.12) можно получить дифференциальное уравнение относительного движения шарика

$$m\ddot{x} = -c(x - a) + m\omega^2 x.$$

Это уравнение должно совпадать с уравнением, полученным в первом разделе курсовой работы ( см. П.1.2).

Сравнивая вторые и третьи уравнения систем (4.10) и (4.12), можно определить величины составляющих силы давления шарика на стенку трубки:

$$N'_y = mg, \quad N'_z = -2m\omega x. \quad (4.13)$$

Эти силы должны совпадать с силами, полученными на основе уравнения относительного движения материальной точки ( см. п1.2).

Из пятого уравнения системы ( 4.10 ) можно определить закон изменения внешнего момента, обеспечивающего постоянную угловую скорость трубки:

$$M_{вн} = 2m\omega\dot{x}(x+a).$$

Определим реакции опор: подпятника *A* и подшипника *B*.

Реакцию  $X_B$  определим из шестого уравнения системы (4.12), учитывая выражение для  $N'_y$  из (4.13):

$$X_B = -\frac{m_{mp}\omega^2 ACL/2 + m_{mp}gL/2 + cxAC + mg(x+a)}{AB},$$

где  $x$  - перемещение шарика относительно трубки (определяется исходя из закона относительного движения шарика ).

Реакцию  $X_A$  определим из первого уравнения системы (4.12):

$$X_A = -X_B - \frac{m_{mp}\omega^2 L}{2} - cx.$$

Реакцию  $Z_B$  определим из четвертого уравнения системы (4.10):

$$Z_B = -2m\omega\dot{x}AC / AB,$$

где  $\dot{x}$  - скорость относительного движения шарика (определяется из закона относительного движения шарика).

Учитывая, что  $AB = 2AC$ , получим

$$Z_B = -m\omega\dot{x},$$

Реакцию  $Z_A$  определим из третьего уравнения системы (4.10):

$$Z_A = -Z_B - 2m\omega\dot{x} = m\omega\dot{x} - 2m\omega\dot{x} = -m\omega\dot{x} = Z_B.$$

Реакцию  $Y_A$  определим из второго уравнения системы (4.10):

$$Y_A = m_{mp}g + mg.$$

Модули реакций опор равны:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2}$$

Направления реакций опор в подвижной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  определяются следующим образом:

$$\cos(\bar{R}_A, O_1x_1) = X_A / R_A,$$

$$\cos(\bar{R}_A, O_1y_1) = Y_A / R_A,$$

$$\cos(\bar{R}_A, O_1z_1) = Z_A / R_A,$$

$$\cos(\bar{R}_B, O_1x_1) = X_B / R_B,$$

$$\cos(\bar{R}_B, O_1z_1) = Z_B / R_B.$$

Определим составляющие реакций опор в неподвижной системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$ .

Подвижная система координат  $O_1x_1y_1z_1$  вращается относительно неподвижной с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Закон изменения угла поворота  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , причем  $\varphi_0 = 0$ , так как в начальный момент времени ( $t = 0$ ) направления осей подвижной и неподвижной систем координат совпадают. Ориентация подвижной системы координат относительно неподвижной показана на рис. 4.3.

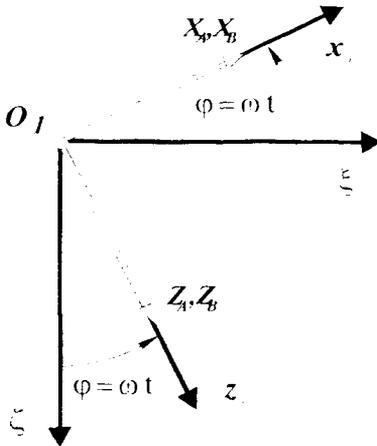


Рис. 4.3. Ориентация систем координат

Следовательно, составляющие реакций опор в неподвижной системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$  равны

$$A_{\xi} = X_A \cos \omega t + Z_A \sin \omega t,$$

$$A_{\eta} = Y_A,$$

$$A_{\zeta} = -X_A \sin \omega t + Z_A \cos \omega t,$$

$$B_{\xi} = X_B \cos \omega t + Z_B \sin \omega t,$$

$$B_{\zeta} = -X_B \sin \omega t + Z_B \cos \omega t.$$

Направления реакций опор в неподвижной системе координат  $O_1 \xi \eta \zeta$  определяются следующим образом:

$$\cos(\bar{R}_A, \bar{O}_1 \xi) = A_{\xi} / R_A, \quad \cos(\bar{R}_B, \bar{O}_1 \xi) = B_{\xi} / R_B,$$

$$\cos(\bar{R}_A, \bar{O}_1 \eta) = A_{\eta} / R_A, \quad \cos(\bar{R}_B, \bar{O}_1 \zeta) = B_{\zeta} / R_B$$

$$\cos(\bar{R}_A, \bar{O}_1 \zeta) = A_{\zeta} / R_A,$$

Результаты численного расчета зависимости реакций опор и их составляющих в подвижной  $O_1 x_1 y_1 z_1$  и неподвижной  $O_1 \xi \eta \zeta$  системах координат от времени приведены в табл. 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

Составляющие реакций опор в подвижной системе координат

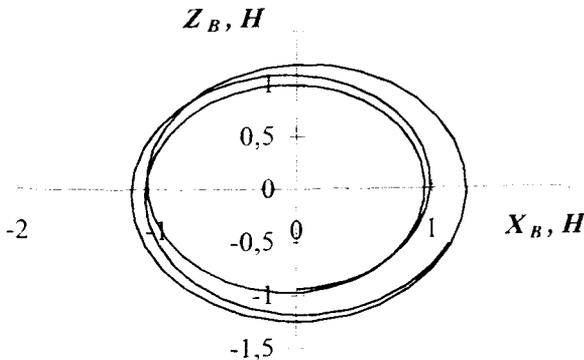
$t, c$	$Z_B = Z_A, H$	$X_B, H$	$X_A, H$	$R_A, H$	$R_B, H$
0	0,000	-0,945	0,320	0,670	0,945
0,2	-0,035	-1,004	0,334	0,678	1,005
0,4	-0,044	-1,138	0,367	0,695	1,138
0,6	-0,020	-1,245	0,393	0,708	1,245
0,8	0,019	-1,247	0,393	0,708	1,247
1	0,043	-1,141	0,367	0,695	1,142
1,2	0,035	-1,007	0,335	0,678	1,008
1,4	0,001	-0,945	0,320	0,670	0,945
1,6	-0,034	-1,002	0,334	0,678	1,002
1,8	-0,044	-1,134	0,366	0,694	1,135
2	-0,021	-1,244	0,392	0,708	1,244

Таблица 4.2

Составляющие реакций опор в неподвижной системе координат

$t, c$	$B_{\zeta}, H$	$A_{\zeta}, H$	$B_{\xi}, H$	$A_{\xi}, H$
0	0,000	0,000	-0,945	0,320
0,2	0,928	-0,290	0,386	-0,171
0,4	-0,832	0,306	0,777	-0,207
0,6	-0,367	0,091	-1,190	0,382
0,8	1,231	-0,391	0,200	-0,038
1	-0,657	0,163	0,934	-0,332
1,2	-0,510	0,210	-0,869	0,264
1,4	0,937	-0,317	-0,128	0,045
1,6	-0,256	0,129	0,969	-0,310
1,8	-0,881	0,246	-0,716	0,274
2	1,127	-0,366	-0,526	0,141

Реакция опоры  $Y_A$  является величиной постоянной и равной  $0,589 H$ . На рис. 4.4 изображен в неподвижной системе координат годограф реакции опоры  $B$ . На рис. 4.5 изображен годограф проекции реакции опоры  $A$  на плоскость  $O_1\xi\zeta$ .

Рис. 4.4. Годограф реакции опоры  $B$  в подвижной системе координат

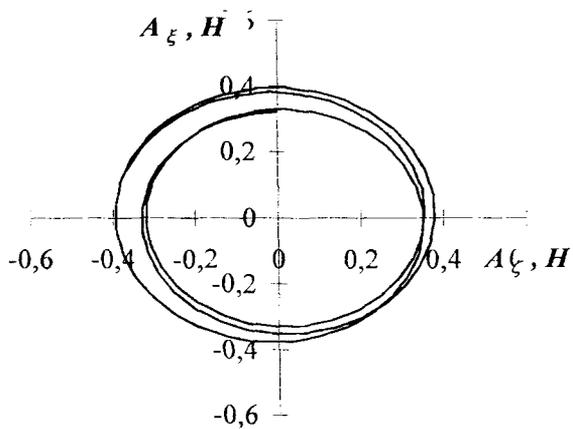


Рис. 4.5. Годограф реакции опоры  $A$  в неподвижной системе координат

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Важным случаем движения механических систем является их колебательное движение. Колебания - это повторяющиеся движения механической системы относительно некоторого ее положения, происходящие более или менее регулярно во времени. В курсовой работе рассматривается колебательное движение механической системы относительно положения равновесия (относительного или абсолютного).

Механическая система может совершать колебания в течение достаточно длительного промежутка времени только вблизи положения устойчивого равновесия. Поэтому перед тем, как составить уравнения колебательного движения, надо найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

### 5.1. Условия равновесия механических систем

Согласно принципу возможных перемещений (основному уравнению статики), для того чтобы механическая система, на которую наложены идеальные, стационарные, удерживающие и голономные связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе были равны нулю все обобщенные силы:

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5.1)$$

где  $Q_j$  - обобщенная сила, соответствующая  $j$ -й обобщенной координате;

$s$  - число обобщенных координат в механической системе.

Если для исследуемой системы были составлены дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, то для определения возможных положений равновесия достаточно приравнять обобщенные силы нулю и решить полученные уравнения относительно обобщенных координат.

Если механическая система находится в равновесии в потенциальном силовом поле, то из уравнений (5.1) получаем следующие условия равновесия:

$$\frac{\partial I}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (5.2)$$

Следовательно, в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремальное значение. Не всякое равновесие, определяемое вышеприведенными формулами, может быть реализовано практически. В зависимости от поведения системы при отклонении от положения равновесия говорят об устойчивости или неустойчивости данного положения.

## 5.2. Устойчивость равновесия

Определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце XIX века в работах русского ученого А. М. Ляпунова [4, 5]. Рассмотрим это определение.

Для упрощения выкладок условимся в дальнейшем обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_s$  отсчитывать от положения равновесия системы:

$$q_{j0} = 0, \text{ где } j = 1, 2, \dots, s.$$

Положение равновесия называется устойчивым, если для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  можно найти такое другое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что в том случае, когда начальные значения обобщенных координат и скоростей не будут превышать  $\delta$ :

$$|q_{j0}| < \delta; \dots; |\dot{q}_{j0}| < \delta,$$

значения обобщенных координат и скоростей при дальнейшем движении системы не превысят  $\varepsilon$ :

$$|q_j(t)| < \varepsilon; \dots; |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon.$$

Иными словами, положение равновесия системы  $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$  называется **устойчивым**, если всегда можно найти такие достаточно малые начальные значения  $|q_{j0}| < \delta; \dots; |\dot{q}_{j0}| < \delta$ , при которых движение системы  $q_j(t), \dot{q}_j(t)$  не будет выходить из любой заданной сколь угодно малой окрестности положения равновесия  $|q_j(t)| < \varepsilon; \dots; |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon$ .

Для системы с одной степенью свободы устойчивое движение системы можно наглядно изобразить в фазовой плоскости (рис. 5.1). Для устойчивого положения равновесия движение изображающей точки, начинающееся в области  $[-\delta, \delta]$ , не будет в дальнейшем выходить за пределы области  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

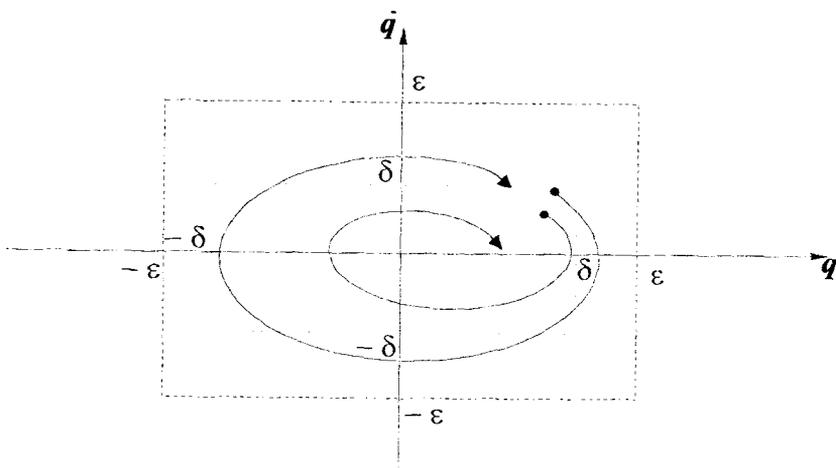


Рис. 5.1. Фазовые траектории устойчивой системы

Положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*, если с течением времени система будет приближаться к положению равновесия, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Определение условий устойчивости положения равновесия представляет собой достаточно сложную задачу [ 4 ], поэтому ограничимся простейшим случаем: исследованием устойчивости равновесия консервативных систем .

Достаточные условия устойчивости положений равновесия для таких систем определяются *теоремой Лагранжа - Дирихле*: *положение равновесия консервативной механической системы устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум .*

Потенциальная энергия механической системы определяется с точностью до постоянной. Выберем эту постоянную так, чтобы в положении равновесия потенциальная энергия равнялась нулю:

$$\Pi(0) = 0.$$

Тогда для системы с одной степенью свободы достаточным условием существования изолированного минимума наряду с необходимым условием (5.2) будет условие

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} > 0.$$

Так как в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум и  $\Pi(0) = 0$ , то в некоторой конечной окрестности этого положения

$$\Pi(q) > 0.$$

Функции, имеющие постоянный знак и равные нулю только при нулевых значениях всех своих аргументов, называются знакоопределенными. Следовательно, для того чтобы положение равновесия механической системы было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этого положения потенциальная энергия была положительно определенной функцией обобщенных координат.

Для линейных систем и для систем, которые можно свести к линейным при малых отклонениях от положения равновесия (линеаризовать), потенциальную энергию можно представить в виде квадратичной формы обобщенных координат [ 2, 3, 9 ]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j \quad (5.3)$$

где  $c_{ij}$  - обобщенные коэффициенты жесткости.

Обобщенные коэффициенты  $c_{ij}$  являются постоянными числами, которые могут быть определены непосредственно из разложения потенциальной энергии в ряд или по значениям вторых производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам в положении равновесия:

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (5.4)$$

Из формулы ( 5.4 ) следует, что обобщенные коэффициенты жесткости симметричны относительно индексов:

$$c_{ij} = c_{ji}$$

Для того чтобы выполнялись достаточные условия устойчивости положения равновесия, потенциальная энергия должна быть положи-

тельно определенной квадратичной формой своих обобщенных координат .

В математике существует *критерий Сильвестра*, дающий необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичных форм: *квадратичная форма ( 5.3 ) будет положительно определенной, если определитель, составленный из ее коэффициентов, и все его главные диагональные миноры будут положительными, т.е. если коэффициенты  $c_{ij}$  будут удовлетворять условиям*

$$D_1 = c_{11} > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

. . . . .

$$D_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdot & \cdot & c_{ss} \end{vmatrix} > 0,$$

В частности, для линейной системы с двумя степенями свободы потенциальная энергия и условия критерия Сильвестра будут иметь вид

$$П = \frac{1}{2} ( c_{11} q_1^2 + c_{12} q_1 q_2 + c_{21} q_2 q_1 + c_{22} q_2^2 ),$$

$$\Delta_1 = c_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} > 0.$$

Аналогичным образом можно провести исследование положений относительного равновесия, если вместо потенциальной энергии ввести в рассмотрение потенциальную энергию приведенной системы [ 4 ].

### 5.3. Пример определения положений равновесия и исследования их устойчивости

Рассмотрим механическую систему, состоящую из трубки АВ, которая стержнем  $OO_1$  соединена с горизонтальной осью вращения, и шарика, который перемещается по трубке без трения и связан с точкой А трубки пружиной ( рис. 5.2 ). Определим положения равновесия системы и оценим их устойчивость при следующих параметрах: длина трубки  $l_2 = 1 \text{ м}$ , длина стержня  $l_1 = 0.5 \text{ м}$ . длина недеформированной пружины  $l_0 = 0.6 \text{ м}$ , жесткость пружины  $c = 100 \text{ Н/м}$ . Масса трубки  $m_2 = 2 \text{ кг}$ , стержня -  $m_1 = 1 \text{ кг}$  и шарика -  $m_3 = 0.5 \text{ кг}$ . Расстояние ОА равно  $l_3 = 0.4 \text{ м}$ .

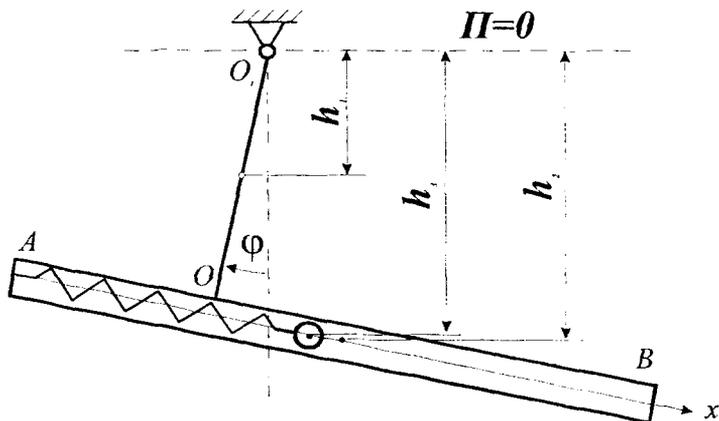


Рис. 5.2. Определение потенциальной энергии системы

Запишем выражение для потенциальной энергии рассматриваемой системы. Она складывается из потенциальной энергии трех тел, находящихся в однородном поле силы тяжести, и потенциальной энергии деформированной пружины.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести равна произведению веса тела на высоту его центра тяжести над плоскостью, в которой

потенциальная энергия считается равной нулю. Пусть потенциальная энергия равна нулю в плоскости, проходящей через ось вращения стержня  $OO_1$ , тогда для сил тяжести

$$\begin{aligned} \Pi_{тяж} &= \Pi_{AB} + \Pi_{OO_1} + \Pi_{ш} = m_2 g h_2 + m_1 g h_1 + m_3 g h_3 = \\ &= -m_2 g \left\{ l_1 \cos \varphi + \left( \frac{l_2}{2} - l_3 \right) \sin \varphi \right\} - m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \varphi - \\ &- m_3 g \left\{ l_1 \cos \varphi + (x - l_3) \sin \varphi \right\} \end{aligned}$$

Для силы упругости потенциальная энергия определяется величиной деформации  $\Delta = (x - l_0)$ :

$$\Pi_{уп} = \frac{c\Delta^2}{2} = \frac{c(x - l_0)^2}{2}.$$

Найдем возможные положения равновесия системы. Значения координат в положениях равновесия есть корни следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 g l_1 \sin \varphi - m_2 g \left( \frac{l_2}{2} - l_3 \right) \cos \varphi + m_1 g l_1 \sin \varphi + \\ + m_3 g l_1 \sin \varphi - m_3 g (x - l_3) \cos \varphi = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -m_3 g \sin \varphi + c(x - l_0) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Подобную систему уравнений можно составить для любой механической системы с двумя степенями свободы. В некоторых случаях можно получить точное решение системы. Для системы (5.5) такого решения не существует, поэтому корни надо искать с помощью численных методов.

Решая систему трансцендентных уравнений (5.5), получаем два возможных положения равновесия:

$$1) \varphi_1 = 0.1721 \text{ рад}, x_1 = 0.6084 \text{ м};$$

$$2) \varphi_2 = 3.3091 \text{ рад}, x_2 = 0.5918 \text{ м}.$$

Для оценки устойчивости полученных положений равновесия найдем все вторые производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам и по ним определим обобщенные коэффициенты жесткости:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} = -m_3 g \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = (m_1 + m_2 + m_3) g l_1 \cos \varphi + \left[ m_2 \left( \frac{l_2}{2} - l_3 \right) + m_3 (x - l_3) \right] g \sin \varphi.$$

Тогда для первого положения равновесия

$$c_{11} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right)_1 = 100,$$

$$c_{12} = c_{21} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} \right)_1 = -4.833,$$

$$c_{22} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_1 = 17.425.$$

Вспользуемся критерием Сильвестра:

$$\Delta_1 = c_{11} = 100 > 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 1719 > 0.$$

Для второго найденного положения равновесия:

$$c_{11} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right)_2 = -100,$$

$$c_{12} = c_{21} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} \right)_2 = 4.836,$$

$$c_{22} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_2 = -17.425.$$

$$\Delta_1 = c_{11} = -100 < 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = -1766 < 0.$$

Таким образом, первое положение равновесия устойчиво, второе - неустойчиво.

## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 6.1. Дифференциальные уравнения малых колебаний

Для составления дифференциальных уравнений колебательного движения и определения собственных частот механических систем удобно воспользоваться выражениями для кинетической и потенциальной энергии системы, записанными как функции обобщенных координат и скоростей.

Кинетическая энергия механической системы в общем случае является функцией обобщенных координат и скоростей. Если связи, наложенные на систему, являются стационарными, то кинетическая энергия может быть представлена в виде квадратичной формы обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где  $a_{ij}$  - обобщенные коэффициенты инерции.

Для линейных механических систем коэффициенты  $a_{ij}$  являются постоянными. Если  $a_{ij} \neq const$ , при исследовании малых колебаний они принимаются равными их значениям в положении равновесия. Обобщенные коэффициенты инерции симметричны относительно нижних индексов, т.е.  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Потенциальную энергию в окрестности положения равновесия можно представить в виде квадратичной формы обобщенных координат:

$$П = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j,$$

где  $c_{ij}$  - обобщенные коэффициенты жесткости.

Обобщенные коэффициенты  $c_{ij}$  являются постоянными числами, которые могут быть определены непосредственно из разложения потенциальной энергии в ряд или по значениям вторых производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам в положении равновесия:

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

Если квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергии подставить в уравнения Лагранжа II-го рода, то получим систему из  $s$  линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^s (c_{ji} \dot{q}_i + a_{ji} \ddot{q}_i) = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (6.1)$$

Для механической системы с двумя степенями свободы эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} c_{11} \dot{q}_1 + a_{11} \ddot{q}_1 + c_{12} \dot{q}_2 + a_{12} \ddot{q}_2 &= 0, \\ c_{21} \dot{q}_1 + a_{21} \ddot{q}_1 + c_{22} \dot{q}_2 + a_{22} \ddot{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Обобщенные координаты, в которых кинетическая и потенциальная энергия принимают канонический вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s a_{ii} \dot{q}_i^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s c_{ii} q_i^2,$$

называются нормальными координатами. В этих координатах система (6.1) распадается на  $s$  независимых дифференциальных уравнений:

$$c_{ii} \dot{q}_i + a_{ii} \ddot{q}_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, s.$$

Кроме потенциальных (консервативных) сил, которые связаны с потенциальной энергией системы, могут действовать неконсервативные силы. К таким силам относятся силы сопротивления, которые могут иметь различную природу и различным образом зависеть от обобщенных скоростей. В том случае, если они пропорциональны скоростям, уравнения движения системы остаются линейными. В них появляются только лишь дополнительные члены, пропорциональные обобщенным скоростям:

$$\sum_{i=1}^s (c_{ji} \dot{q}_i + b_{ji} \ddot{q}_i + a_{ji} \ddot{q}_i) = 0, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (6.3)$$

или для системы с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned} c_{11}q_1 + b_{11}\dot{q}_1 + a_{11}\ddot{q}_1 + c_{12}q_2 + b_{12}\dot{q}_2 + a_{12}\ddot{q}_2 &= 0, \\ c_{21}q_1 + b_{21}\dot{q}_1 + a_{21}\ddot{q}_1 + c_{22}q_2 + b_{22}\dot{q}_2 + a_{22}\ddot{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Если определены коэффициенты  $a_{ji}$ ,  $b_{ji}$  и  $c_{ji}$ , то по их значениям можно найти собственные частоты и формы колебаний механической системы и построить частотные характеристики.

## 6.2. Определение частот и форм собственных колебаний

Будем рассматривать колебательные движения механических систем относительно положения устойчивого равновесия, которые описываются системой линейных дифференциальных уравнений (6.1). Решение будем искать в виде

$$q_j = A_j \sin(\lambda t + \varepsilon), \quad (6.5)$$

где  $A_j$  - амплитуда  $j$ -й обобщенной координаты,

$\lambda$  - частота,

$\varepsilon$  - начальная фаза колебаний.

Подставляя решения (6.5) в систему дифференциальных уравнений и сокращая их на общий множитель  $\sin(\lambda t + \varepsilon)$ , получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд  $A_j$ :

$$\sum_{i=1}^s (c_{ji} - \lambda^2 a_{ji}) A_i = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (6.6)$$

Система линейных однородных уравнений (6.6) может иметь отличное от нуля решение только в том случае, если ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных амплитудах, будет равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} (c_{11} - \lambda^2 a_{11}) & (c_{12} - \lambda^2 a_{12}) & \dots & (c_{1s} - \lambda^2 a_{1s}) \\ (c_{21} - \lambda^2 a_{21}) & (c_{22} - \lambda^2 a_{22}) & \dots & (c_{2s} - \lambda^2 a_{2s}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (c_{s1} - \lambda^2 a_{s1}) & (c_{s2} - \lambda^2 a_{s2}) & \dots & (c_{ss} - \lambda^2 a_{ss}) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

Раскрывая данный определитель, получаем алгебраическое уравнение порядка  $s$  относительно квадрата неизвестной частоты колебаний

$\lambda^2$ . Это уравнение называется *характеристическим или частотным*.

Для колебательной механической системы все корни  $\lambda^2$  характеристического уравнения будут положительными. Этим свойством можно воспользоваться для проверки полученных значений коэффициентов  $a_{ji}$  и  $c_{ji}$ . Если хотя бы один из корней характеристического уравнения будет отрицательным, это значит, что коэффициенты определены неправильно.

Совокупность полученных значений  $\lambda_j, j=1, 2, \dots, s$  определяет набор частот, на которых возможно существование колебаний в консервативной механической системе. Такие частоты называются *собственными или главными* частотами. Если среди корней характеристического уравнения будут кратные, то решение уравнения будет иметь иной вид<sup>1</sup>.

Для механической системы с двумя степенями свободы характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$(c_{11} - \lambda^2 a_{11})(c_{22} - \lambda^2 a_{22}) - (c_{12} - \lambda^2 a_{12})(c_{21} - \lambda^2 a_{21}) = 0.$$

Учитывая, что коэффициенты характеристического уравнения не зависят от порядка индексов, полученное уравнение можно переписать в более простом виде:

$$(c_{11} - \lambda^2 a_{11})(c_{22} - \lambda^2 a_{22}) - (c_{12} - \lambda^2 a_{12})^2 = 0. \quad (6.8)$$

Решением его будет являться пара значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяющих две собственные частоты исследуемой механической системы. Принято считать первой собственной частотой меньшую.

Подставляя в уравнения (6.6) значения собственных частот, получаем систему из  $s$  уравнений относительно амплитуд колебаний, из которых независимыми будут только  $s - 1$ . Следовательно, решая эти уравнения, нельзя найти значения амплитуд, можно лишь выразить  $s - 1$  амплитуду через какую-либо одну, например  $A_1(\lambda_j^2)$ . Применяя для этого известные формулы алгебры, получаем

$$\frac{A_2(\lambda_j^2)}{A_1(\lambda_j^2)} = \frac{\Delta_2(\lambda_j^2)}{\Delta_1(\lambda_j^2)}, \quad \frac{A_s(\lambda_j^2)}{A_1(\lambda_j^2)} = \frac{\Delta_s(\lambda_j^2)}{\Delta_1(\lambda_j^2)}, \quad (6.9)$$

<sup>1</sup> Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. -М., Наука. 1966.

где  $\Delta_s(\lambda_j^2)$  - алгебраическое дополнение элемента  $(c_{sk} - \lambda_j^2 a_{sk})$  определителя системы уравнений ( 6.6 ). Из соотношений ( 6.9 ) видно, что при колебании с каждой из собственных частот  $\lambda_j$  отношения амплитуд отдельных обобщенных координат остаются постоянными. Они определяются свойствами только самой механической системы и не зависят от начальных условий. Эти отношения называются **формами колебаний**.

Для системы с двумя степенями свободы формы колебаний определяют отношение амплитуд изменения обобщенных координат в каждом из главных колебаний ( колебаний с одной из собственных частот ) :

$$\frac{A_2(\lambda_j^2)}{A_1(\lambda_j^2)} = \frac{\Delta_2(\lambda_j^2)}{\Delta_1(\lambda_j^2)} = - \frac{(c_{12} - \lambda_j^2 a_{12})}{(c_{12} - \lambda_j^2 a_{12})}.$$

Выражение ( 6.9 ) можно переписать в другом виде

$$\frac{A_1(\lambda_j^2)}{\Delta_1(\lambda_j^2)} = \frac{A_2(\lambda_j^2)}{\Delta_2(\lambda_j^2)} = \dots = \frac{A_s(\lambda_j^2)}{\Delta_s(\lambda_j^2)} = \text{const.}$$

Если ввести обозначение

$$\frac{A_1(\lambda_j^2)}{\Delta_1(\lambda_j^2)} = C_j,$$

получим

$$A_k(\lambda_j^2) = C_j \Delta_k(\lambda_j^2).$$

Каждому корню  $\lambda_j$  частотного уравнения можно поставить в соответствие систему частных решений дифференциального уравнения, которые будут описывать движение механической системы с одной из собственных частот - главное колебание с частотой  $\lambda_j$  :

$$\begin{aligned} q_1 &= C_j \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j), \\ q_2 &= C_j \Delta_2(\lambda_j^2) \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j), \\ &\dots \\ q_s &= C_j \Delta_s(\lambda_j^2) \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j). \end{aligned}$$

Общее решение рассматриваемой системы является суммой всех ее частных решений и имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \sum_{j=1}^s C_j \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j), \\ q_2 = \sum_{j=1}^s C_j \Delta_2(\lambda_j^2) \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j), \\ \dots \\ q_s = \sum_{j=1}^s C_j \Delta_s(\lambda_j^2) \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j) \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Решения ( 6.10 ) содержат  $2s$  постоянных интегрирования  $C_j$  и  $\varepsilon_j$ , которые определяются из начальных условий.

Если обобщенные координаты являются нормальными, то отдельно для каждой из них решение можно найти из соответствующего уравнения, причем изменения различных координат не зависят друг от друга и каждое главное колебание будет связано только с одной обобщенной координатой:

$$q_j = A_j \sin(\lambda_j t + \varepsilon_j),$$

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{c_{jj}}{a_{jj}}}.$$

### 6.3. Пример определения частот и форм колебаний

Рассмотрим малые колебания двойного физического маятника, состоящего из двух однородных стержней 1 и 2 одинаковой длины  $L$  и массы  $m$ , соединенных в точке  $A$  шарниром ( рис. 6.1 ). Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем.

1. Выберем обобщенные координаты. В данном случае за них удобно принять углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые стержни образуют с вертикалью. На рис. 6.1 показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

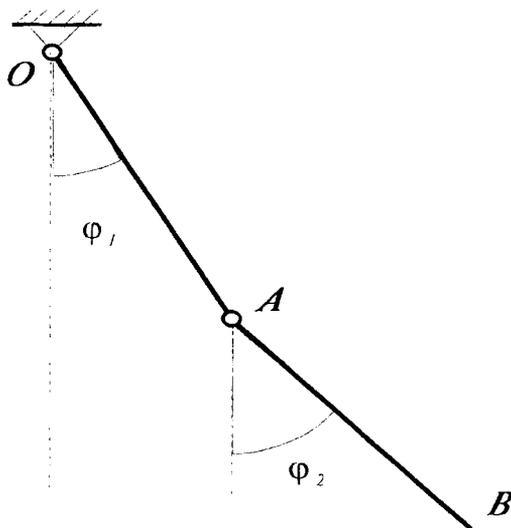


Рис. 6.1

2. Составим выражение для кинетической энергии системы как функцию обобщенных скоростей и координат. При выполнении данного раздела курсовой работы можно воспользоваться полученными ранее выражениями.

$$T = \frac{2mL^2 \dot{\varphi}_1^2}{3} + \frac{mL^2 \dot{\varphi}_2^2}{6} + \frac{mL^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

3. Составим выражение для потенциальной энергии системы как функцию обобщенных координат:

$$\Pi = \frac{mgL(1 - \cos \varphi_1)}{2} + mg \left[ L(1 - \cos \varphi_1) + L(1 - \cos \varphi_2) / 2 \right].$$

Пользуясь полученным выражением, из условия равенства нулю обобщенных сил можно найти все положения равновесия системы, если они не были найдены ранее:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{3mgL \sin \varphi_1}{2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = \frac{mgL \sin \varphi_2}{2} = 0.$$

Из этих условий следует, что в данной механической системе возможны четыре положения равновесия

$$1) \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0; \quad 2) \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi;$$

$$3) \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0; \quad 4) \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \pi.$$

При этом, как нетрудно убедиться, только для первого положения равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум, и только это положение равновесия будет устойчивым.

4. Определим обобщенные коэффициенты инерции  $a_{ij}$  и жесткости  $c_{ji}$ . Для определения обобщенных коэффициентов инерции приведем кинетическую энергию системы к квадратичной форме ее обобщенных скоростей. Для этого разложим выражение в ряд Тейлора и оставим члены только второго порядка малости:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2mL^2 \dot{\varphi}_1^2}{3} + \frac{mL^2 \dot{\varphi}_2^2}{6} + \frac{mL^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{4mL^2}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\varphi}_2^2 + 2 \frac{1}{2} \frac{mL^2}{2} \cos(0-0) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{4mL^2}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\varphi}_2^2 + 2 \frac{1}{2} \frac{mL^2}{2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Сравнивая две последние строки, получаем

$$a_{11} = \frac{4mL^2}{3}, a_{22} = \frac{mL^2}{3}, a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}mL^2.$$

Приведем потенциальную энергию системы в окрестности первого положения равновесия к квадратичной форме. Для этого разложим потенциальную энергию в ряд Тейлора по  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в точке  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Тогда, учитывая, что  $\Pi(0) = 0$ ,

$$\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2 + \dots,$$

получим с точностью до членов второго порядка малости

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{mgL\varphi_1^2}{4} + \frac{mg}{2} \left[ L\varphi_1^2 + L\varphi_2^2/2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{3mgL}{2} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \frac{mgL}{2} \varphi_2^2, \end{aligned}$$

или

$$c_{11} = 3mgL/2, c_{12} = c_{21} = 0, c_{22} = mgL/2.$$

Полученная квадратичная форма будет положительно определенной, так как выполняются условия критерия Сильвестра:

$$\Delta_1 = c_{11} = 3mgL/2 > 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11} c_{22} = 3(mgL)^2/4 > 0.$$

5. Пользуясь полученными значениями обобщенных коэффициентов инерции и жесткости, запишем дифференциальные уравнения малых колебаний системы в развернутом виде ( 6.2 ):

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + c_{11}\varphi_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + c_{12}\varphi_2 = \frac{4mL^2}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{3mgL}{2}\varphi_1 + \frac{mL^2}{2}\ddot{\varphi}_2 = 0,$$

$$a_{21}\ddot{\varphi}_1 + c_{21}\varphi_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{22}\varphi_2 = \frac{mL^2}{2}\ddot{\varphi}_1 + \frac{mL^2}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{mgL}{2}\varphi_2 = 0.$$

6. Составим характеристическое уравнение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda^2 a_{11} & c_{12} - \lambda^2 a_{12} \\ c_{21} - \lambda^2 a_{21} & c_{22} - \lambda^2 a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3mgL}{2} - \frac{4mL^2}{3} \lambda^2 & -\frac{mL^2}{2} \lambda^2 \\ -\frac{mL^2}{2} \lambda^2 & \frac{mgL}{2} - \frac{mL^2}{3} \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Или в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{3mgL}{2} - \frac{4mL^2}{3} \lambda^2 \right) \left( \frac{mgL}{2} - \frac{mL^2}{3} \lambda^2 \right) - \left( \frac{mL^2}{2} \lambda^2 \right)^2 \right] = \\ & = \frac{7m^2L^4}{36} \lambda^4 - \frac{7m^2gL^3}{6} \lambda^2 + \frac{3(mgL)^2}{4} = \\ & = \frac{7m^2L^4}{36} \left[ \lambda^4 - 6 \frac{g}{L} \lambda^2 + \frac{27}{7} \left( \frac{g}{L} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

7. Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1^2 = \left( 3 - \frac{6}{\sqrt{7}} \right) \frac{g}{L}, \lambda_2^2 = \left( 3 + \frac{6}{\sqrt{7}} \right) \frac{g}{L}.$$

Два полученных значения определяют две собственные частоты колебаний исследуемой механической системы:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{3 - \frac{6}{\sqrt{7}}} \sqrt{\left( \frac{g}{L} \right)} = 0.8569 \sqrt{\left( \frac{g}{L} \right)}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{3 + \frac{6}{\sqrt{7}}} \sqrt{\left( \frac{g}{L} \right)} = 2.295 \sqrt{\left( \frac{g}{L} \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, движение рассматриваемой системы при собственных колебаниях в общем случае будет происходить по следующему закону:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 &= C_1 k_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2 k_2 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

где  $k_j$  - коэффициенты формы, соответствующие каждой из собственных частот:

$$k_j = \frac{A_2(\lambda_j^2)}{A_1(\lambda_j^2)} = \frac{\Delta_2(\lambda_j^2)}{\Delta_1(\lambda_j^2)} = - \frac{(c_{11} - \lambda_j^2 a_{11})}{(c_{12} - \lambda_j^2 a_{12})}.$$

8. Определим коэффициенты форм колебаний :

$$k_1 = \frac{(c_{11} - \lambda_1^2 a_{11})}{(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})} = \frac{\frac{3mgL}{2} - (3 - \frac{6}{\sqrt{7}}) \frac{g}{L} \frac{4mL^2}{3}}{(3 - \frac{6}{\sqrt{7}}) \frac{g}{L} \frac{mL^2}{2}} = 1.4305,$$

$$k_2 = \frac{(c_{11} - \lambda_2^2 a_{11})}{(c_{12} - \lambda_2^2 a_{12})} = \frac{\frac{3mgL}{2} - (3 + \frac{6}{\sqrt{7}}) \frac{g}{L} \frac{4mL^2}{3}}{(3 + \frac{6}{\sqrt{7}}) \frac{g}{L} \frac{mL^2}{2}} = -2.0972.$$

С учетом полученных значений коэффициентов форм перепишем общее решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2 &= 1.4305 C_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) - 2.0972 C_2 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

9. Найдем значения постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  для следующих начальных условий:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \pi / 10, \dot{\varphi}_{10} = 0, \\ \varphi_{20} &= 0, \dot{\varphi}_{20} = 0. \end{aligned}$$

Для этого подставим начальные значения координат, скоростей и времени в уравнения движения и уравнения, определяющие зависимости скоростей от времени:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \pi / 10 = C_1 \sin(\varepsilon_1) + C_2 \sin(\varepsilon_2), \\ \varphi_{20} &= 0 = 1.4305 C_1 \sin(\varepsilon_1) - 2.0972 C_2 \sin(\varepsilon_2), \\ \dot{\varphi}_{10} &= 0 = C_1 \lambda_1 \cos(\varepsilon_1) + C_2 \lambda_2 \cos(\varepsilon_2), \\ \dot{\varphi}_{20} &= 0 = 1.4305 C_1 \lambda_1 \cos(\varepsilon_1) - 2.0972 C_2 \lambda_2 \cos(\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.1868 \text{ рад}, C_2 = 0.1274 \text{ рад}, \\ \varepsilon_1 &= \pi / 2, \varepsilon_2 = \pi / 2. \end{aligned}$$

С учетом полученных значений постоянных интегрирования запишем окончательный вид уравнений колебаний:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.1868 \cos(\lambda_1 t) + 0.1274 \cos(\lambda_2 t), \\ \varphi_2 &= 0.2672 \cos(\lambda_1 t) - 0.2672 \cos(\lambda_2 t). \end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельсон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. II. Динамика.- М.: Наука.- 1991.- 640 с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I и II.- М.: Наука.- 1985.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. I и II. М., Наука. - 1966.
4. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. II. М.: 1977.
5. Меркин Д.В. Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
6. Мещерский Н.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986. - 448 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике./ Под ред. А.А. Яблонского.- М.: Высш. шк.- 1985.-367 с.
8. СТП СГАУ 6.1.4. - 97. Общие требования к оформлению учебных текстовых документов: методические указания.
9. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика .- М.: Высш. шк.- 1971.- 488 с.

Учебное издание

*Авраменко Александр Алексеевич*  
*Архипов Валерий Викторович*  
*Асланов Владимир Степанович*  
*Тимбай Иван Александрович*

## ***ДИНАМИКА ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ***

Учебное пособие для курсового проектирования

Редактор Т. К. К р е т и н и н а  
Корректор Т. К. К р е т и н и н а

Лицензия ЛР № 020301 от 30.12.96г.

Подписано в печать 15.03.2001. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл.печ.л. 4,88. Усл.кр.-отт. 5,0. Уч.- изд. 5,25.  
Тираж 300 экз. Заказ 63. Арт. С – 13 / 2001.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени  
академика С.П.Королева.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета.  
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 151.