

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

В.С. Асланов, А.В. Дорошин

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

*Рекомендовано УМС по математике и механике УМО
по классическому университетскому образованию РФ в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям и специальностям «Математика»,
«Прикладная математика и информатика», «Механика»*

Самара
Издательство СГАУ
2008

УДК 531.01; 531.36

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. И.П. Завершинский,
д-р физ.-мат. наук, проф. В.И. Астафьев

Асланов В.С.

Динамика системы соосных тел: учебное пособие / В.С. Асланов, А.В. Дорошин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2008. – 78 с.

ISBN 978-5-7883-0578-3

Рассматриваются вопросы моделирования и исследования движения системы соосных твердых тел вокруг неподвижной точки. Задача исследования движения соосных тел представляет собой обобщение классической задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Прикладные аспекты исследований связаны с возможностью описания движения космических аппаратов с двойным вращением (спутников-гиростатов) вокруг центра масс.

Изучается свободное движение системы соосных тел и движение в плоском поле тяготения при наличии внутренних моментов между телами. Приводятся аналитические точные и приближенные асимптотические решения для параметров движения системы, в том числе при наличии малой динамической асимметрии. Исследуется устойчивость стационарных режимов движения и дается их кинематическая интерпретация. Материал пособия основывается на результатах, полученных авторами.

Пособие предназначено для студентов естественнонаучных направлений «Механика», «Механика. Прикладная математика» и может использоваться в учебных курсах по динамике систем твердых тел и прикладным задачам динамики твердого тела.

Выполнено на кафедре теоретической механики СГАУ при поддержке РФФИ (№№ 06-08-00325; 06-01-00355) и Программы Президента РФ по поддержке молодых ученых (МК-4707.2006.8).

ISBN 978-5-7883-0578-3

© В.С. Асланов, А.В. Дорошин, 2008
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Уравнения движения системы соосных тел	6
2. Движение свободной динамически симметричной системы соосных тел ...	12
2.1. Аналитические решения для параметров движения системы	12
2.2. Устойчивость стационарных вращений	15
3. Движение системы соосных тел с малой динамической асимметрией	19
3.1. Уравнения движения соосных тел при наличии асимметрии	19
3.2. Представление соосных тел одним моделирующим твердым телом ...	28
3.3. Асимптотические решения для параметров движения асимметричной системы	32
4. Движение свободной системы соосных тел при наличии внутреннего момента специального вида	48
4.1. Общая характеристика расположения полостей	49
4.2. Некоторые сведения из теории эллиптических функций	51
4.3. Получение аналитических решений	53
5. Движение тяжелой системы соосных тел	65
5.1. Получение решений в квадратурах	65
5.2. Зависимость собственного вращения от внутреннего момента	71
Заключение	74
Библиографический список	75
Глоссарий	77

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных проблем классической механики является проблема исследования движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Основополагающие результаты, полученные в рамках этой проблемы, представляют собой классические решения в случаях движения Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, а также в частных случаях интегрирования уравнений движения тяжелого твердого тела, например, Гесса-Аппельрота, Горячева-Чаплыгина, Бобылева-Стеклова [8]. Важные результаты получены при исследовании движения твердого тела в ньютоновском (центральном) поле сил, а также при движении тела в жидкости и движении тела с полостями, содержащими жидкость [1, 10, 12, 14].

Естественным обобщением классической задачи о движении твердого тела является переход к исследованию движения систем твердых тел, в том числе соосных тел. Система соосных тел, состоящая из тела-носителя и тел-роторов, вращающихся вокруг неподвижных осей в теле-носителе, рассматривается в работах Н.Е. Жуковского [10], Н.Н. Моисеева, В.В. Румянцева [14, 16, 17], Й. Виттенбурга [6], В.Н. Кошлякова [12], В.В. Стрыгина, В.А. Соболева [18, 19], А.И. Нейштадта, М.Л. Пивоварова [15] и других авторов. В работах [10] и [14] проводятся исследования, связанные с анализом твердых тел, содержащих полости с жидкостью, и показано, что в определенных случаях математические модели движения таких систем аналогичны математическим моделям движения «эквивалентного» твердого тела с присоединенными роторами. В [12] рассматриваются вопросы, связанные с анализом движения разнообразных гироскопических систем, в том числе гиростата. В [4, 9, 13, 15, 18, 19] изучаются вопросы моделирования и исследования разнообразных режимов движения, анализа устойчивости и бифуркационных процессов в динамике пространственного движения соосных космических аппаратов с двойным вращением. В частности, в работе [15] рассмотрено «опрокидывание» продольной оси аппарата при раскручивании тела-ротора, связанное с вероятностными эффектами переходов из одной области фазового пространства системы в другую с прохождением через сепаратрису. В работе [6] приводятся основные математические модели движения систем твердых тел, включая гиростаты, методы анализа их движения, а также аналитические решения для параметров движения свободного гиростата (аналог случая Эйлера).

В настоящем пособии рассматриваются вопросы, связанные с разноплановым исследованием динамики движения системы двух соосных тел, включая

свободное движение, движение при действии плоского поля тяготения, а также возмущенное движение системы при наличии малой динамической асимметрии.

Важно отметить, что исследование движения систем соосных тел имеет непосредственное практическое значение в задачах современной механики космического полета, в частности, при анализе углового движения вокруг центра масс соосных космических аппаратов (КА), называемых КА с двойным вращением, и спутников-гиростатов, использующих фундаментальное свойство гироскопов сохранять положение своей оси для стабилизации своего положения в пространстве [4, 9, 13, 15, 18]. Соосная схема позволяет осуществлять гироскопическую стабилизацию КА путем быстрой закрутки только тела-ротора, при этом тело-носитель может обладать очень малой (в идеале нулевой) угловой скоростью и являться основным отсеком для размещения в нем разного рода аппаратуры. Такую гироскопическую стабилизацию называют частичной закруткой, так как во вращение приводится только часть системы, а именно тело-ротор. Космические аппараты с двойным вращением представляют собой один из важных и весьма распространенных типов аппаратов, которые используются для выполнения разнообразных задач в рамках разноплановых и многоцелевых космических программ, в том числе для решения задач дистанционного зондирования земной поверхности и геоинформатики.

Материал пособия основывается на научных результатах, полученных авторами. Помимо традиционных учебно-методических и дидактических целей, настоящее пособие также направлено на возможную иллюстрацию процесса проведения научного поиска, получения новых научных результатов и формирование у студентов основ культуры креативного мышления.

Пособие предназначено для углубленного изучения вопросов динамики твердого тела и систем твердых тел в рамках подготовки кадров высшей квалификации по естественнонаучным направлениям «Механика», «Механика. Прикладная математика».

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Как было отмечено во введении, одной из важных проблем динамики твердого тела и систем твердых тел является исследование движения механической системы соосных тел вокруг неподвижной точки. Прикладными аспектами исследований являются анализ и синтез законов движения и конструктивных параметров КА с двойным вращением и спутников-гиростатов, представляющих собой один из важных и широко распространенных классов космических аппаратов.

Для дальнейшего исследования динамики соосных тел необходимо разработать математическую модель пространственного движения системы, включающую в себя динамические уравнения для основного соосного тела и уравнения относительного движения соосных роторов. Общее число динамических уравнений должно соответствовать числу степеней свободы системы. Далее будут рассматриваться соосные системы, образованные двумя твердыми телами, поэтому число степеней свободы равно четырем: три степени свободы углового движения основного соосного тела вокруг неподвижной точки и одна степень свободы, описывающая угловое положение соосного ротора относительно основного тела.

Разработку математической модели движения системы соосных тел можно осуществлять на основе известных методов построения уравнений движения, включая общие теоремы динамики, уравнения Лагранжа второго рода, уравнения Гамильтона и т.д.

В настоящем пособии математическая модель движения соосных тел строится на основе совместного использования теоремы об изменении кинетического момента системы и формализма Лагранжа. Так, динамические уравнения основного тела записываются с использованием теоремы об изменении кинетического момента, а уравнение относительного движения соосного ротора – с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Рассмотрим движение системы соосных тел вокруг неподвижной точки. Пусть начало инерциальной системы координат $OXYZ$ совпадает с центром масс системы соосных тел. Системы координат $Ox'y'z'$ и $Oxyz$ связаны с телами 1 и 2, соответственно, и вращаются относительно системы $OXYZ$. Оси Oz и Oz' связанных систем совпадают с общей осью вращения тел (рис. 1).

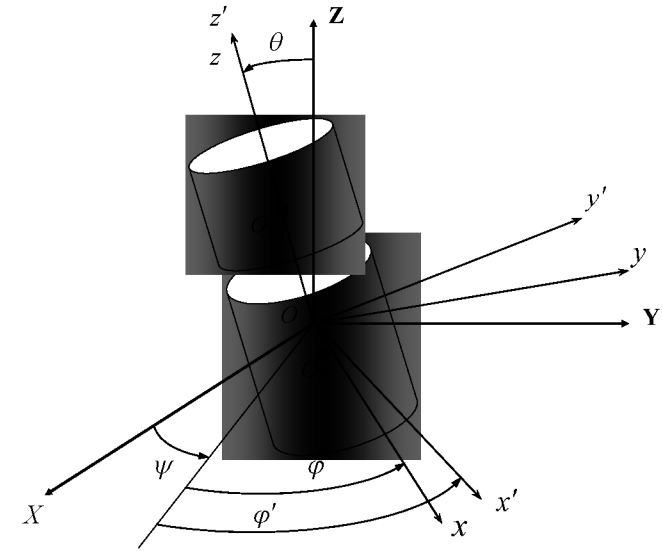


Рис. 1. Соосные тела и используемые системы координат

Положение соосных тел относительно системы $OXYZ$ будем характеризовать эйлеровыми углами: ψ – угол прецессии; θ – угол нутации; φ' , φ – углы собственных вращений тел 1 и 2.

Векторы угловых скоростей вращений тел 1 и 2 $\bar{\omega}' = (p', q', r')$ и $\bar{\omega} = (p, q, r)$ представлены в проекциях на оси своих связанных систем координат ($Ox'y'z'$ и $Oxyz$) и выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cdot \cos \varphi, & p' &= \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi' + \dot{\theta} \cdot \cos \varphi', \\ q &= \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi, & q' &= \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi' - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi', \\ r &= \dot{\psi} \cdot \cos \theta + \dot{\varphi}, & r' &= \dot{\psi} \cdot \cos \theta + \dot{\varphi}'. \end{aligned}$$

Введем угол и скорость относительного закручивания:

$$\delta = \varphi' - \varphi, \quad \sigma = \dot{\delta}.$$

Компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}' = (p', q', r')$, выраженные через компоненты p, q, r угловой скорости тела 2, имеют вид:

$$\begin{aligned} p' &= p \cos \delta + q \sin \delta, \\ q' &= q \cos \delta - p \sin \delta, \\ r' &= r + \sigma. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для получения уравнений движения системы соосных тел применим теорему об изменении кинетического момента [5], выбирая в качестве полюса O центр масс соосных тел:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e. \quad (1.2)$$

где \vec{M}_O^e – главный вектор моментов внешних сил относительно точки O .

Кинетический момент системы относительно центра масс равен векторной сумме кинетических моментов тел 1 и 2 относительно точки O :

$$\vec{K}_O = \vec{K}_1 + \vec{K}_2.$$

Вычисляя производную кинетического момента системы соосных тел как суммы кинетических моментов тел и используя при этом локальные производные в связанных системах $Ox'y'z'$ и $Oxyz$, уравнение (1.2) можно записать в системе координат $Oxyz$

[4, 9]:

$$[\delta] \cdot \left[\frac{d\vec{K}_1}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{K}_1 \right] + \left[\frac{d\vec{K}_2}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_2 \right] = \vec{M}_O^e, \quad (1.3)$$

где $\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}$ – угловые скорости вращения связанных систем координат относительно движущейся поступательно системы $OXYZ$; знак “ \sim ” обозначает локальную производную в соответствующей подвижной системе координат; $[\delta]$ – матрица перехода от системы координат $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$.

Пусть рассматриваемая система включает в себя тела, обладающие главны-

ми тензорами инерции, вычисленными в собственных связанных осях систем $Ox'y'z'$ и $Oxyz$. Главные моменты инерции тел 1 и 2, вычисленные в своих связанных системах координат $Ox'y'z'$ и $Oxyz$, обозначим как A_1, B_1, C_1 , и A_2, B_2, C_2 . Введенные моменты инерции не являются центральными, так как начала связанных с телами систем координат $Ox'y'z'$ и $Oxyz$ совпадают с центром масс системы двух тел. Для указанных моментов инерции можно записать:

$$A_i = m_i \cdot l_i^2 + \bar{A}_i, \quad B_i = m_i \cdot l_i^2 + \bar{B}_i, \quad C_i = \bar{C}_i, \quad (i=1,2),$$

где m_i , \bar{A}_i , \bar{B}_i , \bar{C}_i – масса и собственные главные центральные моменты инерции тела i ; l_i – расстояние между центром масс системы тел и центром масс тела i . Кинетические моменты тел в этом случае в проекциях на собственные системы координат будут иметь вид:

$$\vec{K}_1 = (A_1 p', B_1 q', C_1 r'), \quad \vec{K}_2 = (A_2 p, B_2 q, C_2 r).$$

С учетом последних выражений перепишем уравнение (1.3) в матричном виде:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} A_1 \dot{p}' \\ B_1 \dot{q}' \\ C_1 \dot{r}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 p' \\ B_1 q' \\ C_1 r' \end{bmatrix} \right) + \\ & + \begin{bmatrix} A_2 \dot{p} \\ B_2 \dot{q} \\ C_2 \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_2 p \\ B_2 q \\ C_2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $M_x = M_{1,x} + M_{2,x}$, $M_y = M_{1,y} + M_{2,y}$, $M_z = M_{1,z} + M_{2,z}$ – компоненты моментов внешних сил, представляющие собой суммы соответствующих проекций моментов, приложенных к телам 1 и 2, соответственно.

Если рассматриваемая система включает в себя динамически симметрич-

ные тела ($A_i = B_i$), то, принимая во внимание выражения (1.1) для компонент угловых скоростей тел, последнее матричное уравнение (1.4) легко сводится к следующей системе скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)\dot{p} - (A_1 + A_2 - C_2)qr + C_1q(r + \sigma) &= M_x, \\ (A_1 + A_2)\dot{q} - (C_2 - A_1 - A_2)pr - C_1p(r + \sigma) &= M_y, \\ C_1(\dot{r} + \dot{\sigma}) + C_2\dot{r} &= M_z. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для получения уравнения относительного движения тел можно воспользоваться уравнением Лагранжа второго рода, соответствующим углу относительного закручивания δ . Запишем выражения для кинетической энергии системы и обобщенной силы:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{K}_1 \cdot \vec{\omega}' + \frac{1}{2}\vec{K}_2 \cdot \vec{\omega} = \\ &= \frac{1}{2}\left[A_1 p'^2 + B_1 q'^2 + C_1 r'^2 + A_2 p^2 + B_2 q^2 + C_2 r^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[A_1 (p \cos \delta + q \sin \delta)^2 + B_1 (q \cos \delta - p \sin \delta)^2 + \right. \\ &\quad \left. + C_1 (r^2 + 2r\sigma + \sigma^2) + A_2 p^2 + B_2 q^2 + C_2 r^2\right], \end{aligned}$$

$$Q_\delta = M_{1,z} + M_\delta,$$

где M_δ – момент внутреннего взаимодействия тел вдоль оси вращения. Отметим, что величины p, q, r явно не зависят от угла относительного закручивания δ и скорости относительной закрутки ($\sigma = \dot{\delta}$). Далее, используя известную структуру уравнений Лагранжа, можно явно записать необходимое четвертое динамическое уравнение:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\partial T}{\partial \delta} = Q_\delta. \quad (1.6)$$

В случае динамически симметричных тел, как легко проверить, выражение для кинетической энергии вовсе не будет явно зависеть от угла относительного закручивания δ , поэтому уравнение относительного движения будет иметь вид:

$$C_1(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_{1,z} + M_\delta. \quad (1.6')$$

Добавим к динамическим уравнениям (1.4) и (1.6) кинематические уравнения для углов Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - \text{ctg} \theta \cdot (p \sin \varphi + q \cos \varphi), \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} \cdot (p \sin \varphi + q \cos \varphi), \quad \dot{\delta} = \sigma. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнения (1.4), (1.6) и (1.7) полностью описывают движение системы соосных тел с главными тензорами инерции.

В случае, когда имеет место динамическая симметрия тел, эти уравнения записываются в виде скалярных систем (1.5), (1.6') и (1.7). При этом в частном случае, когда нет относительного движения соосных тел ($\sigma \equiv 0$), из уравнений (1.5) следуют уравнения движения динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки с моментами инерции, соответствующими главным моментам инерции системы закрепленных соосных тел:

$$A\dot{p} - (A - C)qr = M_x; \quad A\dot{q} - (C - A)pr = M_y; \quad C\dot{r} = M_z;$$

где $A = A_1 + A_2$, $C = C_1 + C_2$.

2. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Одним из самых простых случаев движения системы соосных тел является движение системы, образованной динамически симметричными телами, вращающимися относительно общей оси симметрии.

Несмотря на простоту указанного случая, следует отметить его особую важность. Во-первых, уже в этом случае соосной системе становятся присущи такие черты движения, как зависимость собственного вращения от внутреннего момента, действующего между телами, а также возникновение новых (по отношению к классическим задачам твердого тела) режимов стационарных вращений. Во-вторых, решения для параметров движения динамически симметричной системы в дальнейшем можно использовать в качестве порождающих решений при построении асимптотических разложений параметров движения систем с асимметриями.

2.1. Аналитические решения для параметров движения системы

Пусть рассматриваемая система включает в себя динамически симметричные тела ($A_i = B_i$), моменты от внешних сил, действующих на механическую систему, отсутствуют ($M_x = M_y = M_z = 0$), а между соосными телами действует постоянный момент относительного закручивания: $M_s = M$.

В этом случае система уравнений (1.5) и (1.6) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([A_1 + A_2 - C_2]qr - C_1q[r + \sigma]) , \\ \dot{q} &= (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([C_2 - A_1 - A_2]pr + C_1p[r + \sigma]) , \\ \dot{r} &= \frac{-M}{C_2} , \quad \dot{\sigma} = \frac{M(C_1 + C_2)}{C_1C_2} . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из последних двух уравнений (2.1) и последнего уравнения системы (1.7) видно, что:

$$r = \frac{-M \cdot t}{C_2} + r_0, \quad \sigma = \frac{M(C_1 + C_2)}{C_1C_2} \cdot t + \sigma_0, \quad \delta = \frac{M(C_1 + C_2)}{2C_1C_2} \cdot t^2 + \sigma_0 \cdot t + \delta_0$$

Так как моменты внешних сил отсутствуют, то величина вектора кинетического момента является постоянной:

$$(A_1 + A_2)^2 \cdot (p^2 + q^2) + ([C_1 + C_2]r + C_1\sigma)^2 = K^2 .$$

Выберем поступательно движущуюся систему координат так, чтобы ось OZ совпадала с неизменным направлением вектора кинетического момента. Следуя [5], в этом случае можно получить простые аналитические решения для угловых скоростей и углов Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \frac{K}{A_1 + A_2} \sin \theta_0 \sin \varphi, & q &= \frac{K}{A_1 + A_2} \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ r &= \frac{-M \cdot t}{C_2} + r_0, & \sigma &= \frac{M(C_1 + C_2)}{C_1C_2} \cdot t + \sigma_0, \\ \theta &= \theta_0, & \varphi &= \frac{-M \cdot t^2}{2C_2} + \left(r_0 - \frac{K}{A_1 + A_2} \cdot \cos \theta_0 \right) \cdot t + \varphi_0, \\ \psi &= \frac{K}{A_1 + A_2} \cdot t + \psi_0, & \delta &= \frac{M(C_1 + C_2)}{2C_1C_2} \cdot t^2 + \sigma_0 \cdot t + \delta_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

♦ *Задание №1.* Показать справедливость (проверить) решения (2.2), используя подход, описанный в [5].

Зависимости (2.2) представляют собой решения для пространственного движения свободной системы соосных тел при постоянном моменте относительного закручивания. Из полученных результатов заметно сходство движения системы с движением динамически симметричного твердого тела в случае Эйлера, причем, если положить равным нулю момент внутреннего взаимодействия, то зависимости становятся идентичными.

Рассмотрим движение системы при условии, что величина кинетического момента равна нулю:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} = 0 .$$

Последнее выражение можно рассматривать как квадратное уравнение для скорости относительной закрутки σ .

$$C_1^2 \sigma^2 + 2(C_1 + C_2)C_1 r \sigma + (A_1 + A_2)^2 (p^2 + q^2) + (C_1 + C_2)^2 r^2 = 0 ,$$

причем дискриминант является неположительным:

$$D = -4C_1^2(A_1 + A_2)^2(p^2 + q^2) \leq 0.$$

Действительный корень возможен лишь при $D=0$, которому соответствуют следующие условия движения:

$$p = q = 0, \quad \sigma = -\frac{C_1 + C_2}{C_1}r,$$

что, с учетом (2.2), равносильно следующим ограничениям на начальные величины угловых скоростей:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & q_0 &= 0, \\ r &= r_0, & \sigma_0 &= -\frac{C_1 + C_2}{C_1}r_0. \end{aligned}$$

Как видно из решений (2.2) и последних соотношений, общая ось вращения тел неподвижна в пространстве ($\theta = \theta_0, \psi = \psi_0$). Единственно возможными движениями при нулевом по величине кинетическом моменте являются вращения тел 1 и 2 относительно общей оси в противоположных направлениях с соответствующими начальными угловыми скоростями.

2.2. Устойчивость стационарных вращений

Определим возможные стационарные режимы движения свободной системы [4, 9], приравняв для этого нулю производные угловых скоростей в уравнениях (2.1):

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([A_1 + A_2 - C_2]qr - C_1q[r + \sigma]) &= 0, \\ (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([C_2 - A_1 - A_2]pr + C_1p[r + \sigma]) &= 0, \\ \dot{r} &= 0, & \dot{\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Существуют два обобщенных стационарных режима:

$$\begin{aligned} 1) \quad p &= p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0, \quad \sigma = \frac{A_1 + A_2 - C_1 - C_2}{C_1} \cdot r_0, \\ 2) \quad p &= 0, \quad q = 0, \quad r = r_0, \quad \sigma = \sigma_0, \end{aligned}$$

где p_0, q_0, r_0, σ_0 – постоянные величины.

1) Проведем анализ устойчивости первого режима. Введем малые возмущения угловых скоростей $\Delta p, \Delta q, \Delta r, \Delta \sigma$ и запишем уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta p}{dt} &= (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([A_1 + A_2 - C_2]\Delta r - C_1[\Delta r + \Delta\sigma]) \cdot (q_0 + \Delta q), \\ \frac{d\Delta q}{dt} &= (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([C_2 - A_1 - A_2]\Delta r + C_1[\Delta r + \Delta\sigma]) \cdot (p_0 + \Delta p), \\ \frac{d\Delta r}{dt} &= 0, & \frac{d\Delta\sigma}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta p}{dt} &= \chi \cdot (q_0 + \Delta q), & \frac{d\Delta q}{dt} &= -\chi \cdot (p_0 + \Delta p), \\ \frac{d\Delta r}{dt} &= 0, & \frac{d\Delta\sigma}{dt} &= 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\chi = (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([A_1 + A_2 - C_2]\Delta r - C_1[\Delta r + \Delta\sigma])$.

Из последних двух уравнений системы (2.4) следует постоянство возмущений для продольных скоростей:

$$\Delta r = (\Delta r)_0, \quad \Delta \sigma = (\Delta \sigma)_0.$$

Первые два уравнения системы (3.4) запишем для новых переменных P и Q :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \chi Q, & \frac{dQ}{dt} &= -\chi P, \\ P &= p_0 + \Delta p, & Q &= q_0 + \Delta q. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Последняя система имеет очевидное решение:

$$P(t) = Q_0 \sin \chi t + P_0 \cos \chi t, \quad Q(t) = Q_0 \cos \chi t - P_0 \sin \chi t,$$

поэтому для исходных возмущений поперечных угловых скоростей будут справедливы следующие решения:

$$\begin{aligned} \Delta p &= (q_0 + (\Delta q)_0) \sin \chi t + (p_0 + (\Delta p)_0) \cos \chi t - p_0, \\ \Delta q &= (q_0 + (\Delta q)_0) \cos \chi t - (p_0 + (\Delta p)_0) \sin \chi t - q_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из решений (2.6) видно, что даже при отсутствии начальных возмущений $(\Delta p)_0 = (\Delta q)_0 = 0$ будет иметь место их колебательный характер с амплитудами, соизмеримыми с величинами самих стационарных скоростей p_0, q_0 . Последнее обстоятельство будет причиной невыполнения определения устойчивости по Ляпунову, поэтому первый стационарный режим является неустойчивым.

♦ *Задание №2.* Показать нарушение определения устойчивости по Ляпунову для рассмотренного выше первого стационарного режима.

2) Рассмотрим второй режим стационарных вращений системы. Введем в систему следующие малые возмущения:

$$p = \Delta p, \quad q = \Delta q, \quad r = r_0 + \Delta r, \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma,$$

тогда уравнения возмущенного движения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta p}{dt} &= (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([A_1 + A_2 - C_2](r_0 + \Delta r) - C_1[r_0 + \Delta r + \sigma_0 + \Delta \sigma]) \cdot \Delta q, \\ \frac{d\Delta q}{dt} &= (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([C_2 - A_1 - A_2](r_0 + \Delta r) + C_1[r_0 + \Delta r + \sigma_0 + \Delta \sigma]) \cdot \Delta p, \\ \frac{d\Delta r}{dt} &= 0, & \frac{d\Delta \sigma}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Последнюю систему возмущенного движения удобно исследовать на устойчивость с помощью функции Ляпунова, которая представляется в виде:

$$L = (\Delta p)^2 + (\Delta q)^2 + (\Delta r)^2 + (\Delta \sigma)^2.$$

Производная функции Ляпунова в силу возмущенных уравнений тождественно равна нулю:

$$\dot{L} = 2\chi \cdot \Delta p \cdot \Delta q - 2\chi \cdot \Delta q \cdot \Delta p \equiv 0,$$

где $\chi = (A_1 + A_2)^{-1} \cdot ([A_1 + A_2 - C_2](r_0 + \Delta r) - C_1[r_0 + \Delta r + \sigma_0 + \Delta \sigma])$.

Следовательно, второй режим стационарных вращений является устойчивым.

♦ *Задание №3.* Показать устойчивость второго стационарного режима прямым решением дифференциальных уравнений для возмущений.

Дадим кинематическую интерпретацию стационарных режимов. Наиболее интересна кинематическая интерпретация первого стационарного режима. Из величин угловых скоростей, определяющих первый режим, непосредственно следует:

$$(A_1 + A_2) \cdot r_0 - [(C_1 + C_2) \cdot r_0 + C_1 \cdot \sigma_0] = 0.$$

Имея в виду, что выражение в квадратных скобках представляет собой проекцию кинетического момента на продольную ось, условие возникновения первого стационарного режима можно записать:

$$K_z = (A_1 + A_2) \cdot r_0,$$

откуда получается следующая величина для кинетического момента:

$$K = (A_1 + A_2) \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}. \quad (2.7)$$

Вектор кинетического момента не меняет своего направления в подвижной системе координат $Oxyz$, так как имеет постоянные величины проекций на соответствующие оси:

$$K_x = (A_1 + A_2)p_0, \quad K_y = (A_1 + A_2)q_0, \quad K_z = (A_1 + A_2)r_0,$$

причем направляющие косинусы для него и вектора угловой скорости тела 2 одинаковы:

$$\begin{aligned} \frac{K_x}{K} &= \frac{(A_1 + A_2)p_0}{(A_1 + A_2) \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}} = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}} = \frac{\omega_x}{\omega}, \\ \frac{K_y}{K} &= \frac{(A_1 + A_2)q_0}{(A_1 + A_2) \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}} = \frac{q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}} = \frac{\omega_y}{\omega}, \\ \frac{K_z}{K} &= \frac{(A_1 + A_2)r_0}{(A_1 + A_2) \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}} = \frac{\omega_z}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из выражений (3.7) и (3.8) следует соотношение, определяющее кинематическую интерпретацию первого стационарного режима:

$$\vec{K} = (A_1 + A_2)\vec{\omega}.$$

Таким образом, для первого стационарного режима характерна сонаправленность векторов кинетического момента системы и угловой скорости тела 2.

Очевидно, что режим 2 представляет собой стационарные вращения вокруг главной продольной оси эллипсоидов инерции тел, совпадающей с осью симметрии системы.

3. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ С МАЛОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ АСИММЕТРИЕЙ

Проблема исследования движения системы соосных тел, как указывалось выше, имеет важные прикладные аспекты, связанные с анализом динамики движения соосных космических аппаратов. Так как для любого технического объекта характерны конструкционные погрешности и неточности изготовления, то весьма важной становится задача учета таких малых отклонений при исследовании движения системы. Как будет показано ниже, возмущения, связанные с асимметрией от относительных линейных и угловых смещений соосных тел, приводят к появлению нутационных колебаний и вынужденной прецессии продольной оси соосных тел.

Следует отметить, что в настоящем пункте будет рассмотрен весьма простой случай динамической асимметрии в системе, однако, несмотря на свою простоту, он достаточно хорошо иллюстрирует и общую методику построения уравнений движения соосной системы с асимметрией, и процедуру асимптотического исследования ее возмущенной динамики, в том числе для более сложных видов асимметрии.

3.1. Уравнения движения соосных тел при наличии асимметрии

Рассмотрим движение системы соосных тел при наличии малой асимметрии [4, 9], связанной со смещением d общей оси вращения от оси динамической симметрии тела 2 (рис. 2). При этом ось динамической симметрии тела 1 совпадает с осью вращения и параллельна оси динамической симметрии тела 2. В этом случае центр масс системы O будет принадлежать отрезку O_1O_2 , образованному центрами масс тел, и не будет изменять своего положения относительно тела 2.

Введем в рассмотрение следующие системы координат. $Oxyz$ – основная подвижная система координат, оси которой жестко связаны с телом 2, причем ось Ox лежит в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения, и совпадает с проекцией отрезка O_1O_2 на эту плоскость; ось Oy лежит в указанной плоскости. $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ – главная центральная система координат, связанная с телом 2, оси которой параллельны осям системы $Oxyz$. $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ – главная центральная система координат, связанная с телом 1. $Ox'y'z'$ – система коор-

динат с началом в центре масс O , оси которой параллельны осям системы. За угол относительной закрутки примем угол между экваториальными осями Ox и Ox' . Пусть m_1 и m_2 – массы тел 1 и 2, соответственно; l – расстояние между центрами масс тел O_1 и O_2 .

Проекция угловой скорости тела 2 в системах $Oxyz$ и $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ одинаковы: p, q, r , также одинаковы проекции p', q', r' угловой скорости тела 1 в системах $Ox'y'z'$ и $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$, так как соответствующие оси являются параллельным. Расстояния между центрами масс тел 1, 2 и центром масс системы в направлении оси вращения соответственно равны (рис. 2): $l_1 = lm_2/(m_1 + m_2)$, $l_2 = lm_1/(m_1 + m_2)$, а в направлении, перпендикулярном оси вращения: $d_1 = dm_2/(m_1 + m_2)$, $d_2 = dm_1/(m_1 + m_2)$.

Малое смещение d (рис. 2) приводит к следующему изменению моментов инерции тела 2 в системе $Oxyz$:

$$I_{xx} = \bar{A}_2 + m_2 l_2^2, \quad I_{yy} = \bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2, \quad I_{zz} = \bar{C}_2 + m_2 d_2^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = -m_2 \cdot (-l_2) \cdot d_2 = m_2 l_2 d_2,$$

где \bar{A}_2, \bar{C}_2 – экваториальный и продольный моменты инерции тела 2, вычисленные в центральной системе $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента в системе координат $Oxyz$ в виде (2.3). Для этого найдем проекции кинетических моментов тел 1 и 2 на оси систем $Ox'y'z'$ и $Oxyz$, соответственно. Кинетический момент тела 1 вычисляется как сумма кинетических моментов движения центра масс тела 1 – \vec{K}_1^e и кинетического момента тела 1 при его вращении относительно центра масс – \vec{K}_1^r :

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_1^e + \vec{K}_1^r.$$

В проекциях на оси системы координат $Ox'y'z'$ получим:

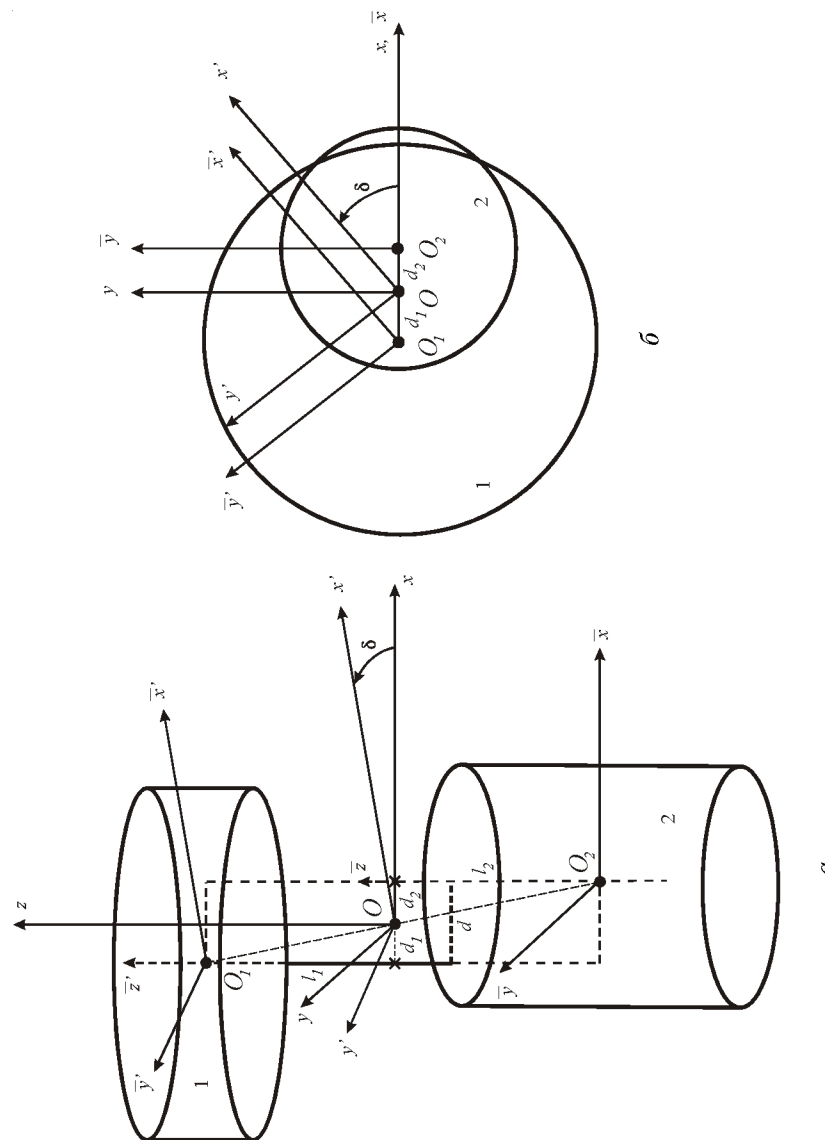


Рис. 2. Соосные тела при наличии малой асимметрии

$$\begin{aligned}\bar{K}_1 &= m_1[\delta]^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix} = \\ &= m_1[\delta]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} l_1^2 p + d_1 l_1 r \\ q(l_1^2 + d_1^2) \\ d_1^2 r + d_1 l_1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (3.1)$$

где \bar{A}_1, \bar{C}_1 – главные экваториальный и продольный центральные моменты

инерции тела 1, а $[\delta] = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матрица перехода от системы

координат $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$.

Кинетический момент тела 2 запишем в системе $Oxyz$:

$$\bar{K}_2 = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2) p + m_2 l_2 d_2 r \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2) q \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2) r + m_2 l_2 d_2 p \end{bmatrix},\quad (3.2)$$

где \mathbf{I} – тензор инерции тела 2.

С учетом (3.1) и (3.2) векторное уравнение (1.4) в системе координат $Oxyz$ примет вид:

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2) \dot{p} + m_2 l_2 d_2 \dot{r} \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2) \dot{q} \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2) \dot{r} + m_2 l_2 d_2 \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2) p + m_2 l_2 d_2 r \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2) q \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2) r + m_2 l_2 d_2 p \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}& + [\delta] \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_1[\delta]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} l_1^2 p + d_1 l_1 r \\ q(l_1^2 + d_1^2) \\ d_1^2 r + d_1 l_1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix} \right) + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times \left(m_1[\delta]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} l_1^2 p + d_1 l_1 r \\ q(l_1^2 + d_1^2) \\ d_1^2 r + d_1 l_1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix} \right) \right\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Используя выражения (1.1), уравнения (3.3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2) \dot{p} + qr(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) + C_1 q \sigma &= \\ &= M_x - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(pq + \dot{r}); \\ (A_1 + A_2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \dot{q} + pr(A_1 - C_1 + A_2 - C_2 - m_1 d_1^2 - m_2 d_2^2) - C_1 p \sigma &= \\ &= M_y - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(r^2 - p^2); \\ (C_1 + C_2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \dot{r} + C_1 \dot{\sigma} &= \\ &= M_z - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(\dot{p} - qr) - (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) pq;\end{aligned}\quad (3.4)$$

где

$$A_i = \bar{A}_i + m_i l_i^2, \quad C_i = \bar{C}_i \quad (i=1,2).$$

♦ *Задание №4.* Получить динамические уравнения движения для системы соосных тел с рассмотренным выше видом асимметрии, но с трехосным (три разных главных момента инерции) телом-носителем (тело 2).

Для построения необходимого четвертого динамического уравнения, описывающего относительное движение тела 1 по отношению к телу 2, воспользуемся формализмом Лагранжа.

Запишем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел системы, используя при этом известную теорему Кенига [5]:

$$T = T_1 + T_2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \bar{K}_2 \cdot \bar{\omega}, \quad T_1 = T_1^{ум} + T_1^{см} = \frac{1}{2} m_1 V_{O_1}^2 + \frac{1}{2} \bar{K}_1^r \cdot \bar{\omega}'.$$

Имеют место следующие вспомогательные выражения:

$$\bar{K}_2 \cdot \bar{\omega} = \begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2) p + m_2 l_2 d_2 r \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2) q \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2) r + m_2 l_2 d_2 p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \quad V_{O_1}^2 = \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \right)^2;$$

$$\bar{K}_1^r \cdot \bar{\omega}' = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 p' \\ \bar{A}_1 q' \\ \bar{C}_1 r' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \bar{A}_1 (p'^2 + q'^2) + \bar{C}_1 r'^2 = \bar{A}_1 (p^2 + q^2) + C_1 (r + \sigma)^2.$$

С учетом последних формул можно записать следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2) p + m_2 l_2 d_2 r \\ (\bar{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2) q \\ (\bar{C}_2 + m_2 d_2^2) r + m_2 l_2 d_2 p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \frac{1}{2} m_1 \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \right)^2 + \bar{A}_1 (p^2 + q^2) + C_1 (r + \sigma)^2. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следуют частные производные выражения для кинетической энергии по угловой скорости и углу относительного вращения:

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} = C_1 (r + \sigma); \quad \frac{\partial T}{\partial \delta} = 0; \quad Q_\delta = M_{1,z} + M_\delta.$$

Подставляя последние выражения в (1.6), получим следующее уравнение относительного вращения тел:

$$C_1 (\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_{1,z} + M_\delta. \quad (3.6)$$

Как видно из последнего выражения, уравнение относительного движения тел в рассматриваемом случае получается полностью аналогичным уравнению (2.6). Система (3.4) совместно с уравнением (3.6) представляют собой динамические уравнения движения соосных тел при наличии указанного рода асимметрии.

Следует, конечно, отметить, что рассматриваемый случай динамической асимметрии является частным, однако описанная методика построения динамических уравнений останется вполне применимой для записи уравнений в более общих случаях асимметрии, например, с учетом возможных угловых смещений осей тел от общей оси вращения, а также в случае трехосных и даже недиагональных тензоров инерции тел.

Для физической интерпретации уравнений (3.4) имеет смысл рассмотреть предельный случай, когда собственные центральные моменты инерции тел равны нулю: $\bar{A}_i = \bar{C}_i = 0$. В этом случае асимметричная система соосных тел вырождается в гантелеобразную систему двух точек O_1 и O_2 с массами m_1 и m_2 , соответственно (рис.3).

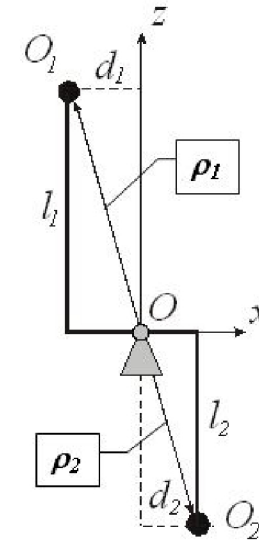


Рис. 3. Соосные тела при наличии асимметрии, вырожденные в гантелеобразную систему

Построим уравнения движения гантелеобразной системы на основе принципа Даламбера, записанного для моментов сил: $\vec{M}_\Phi + \vec{M}_F + \vec{M}_R = 0$, где слагаемые представляют собой моменты от сил инерции, активных сил и сил реакции, соответственно.

Будем исследовать вращательное движение вокруг сферического шарнира O . Тогда момент от сил реакции будет отсутствовать, а моменты внешних сил в осях $Oxyz$ останутся прежними:

$$\vec{M}_R = 0, \quad \vec{M}_F = (M_x, M_y, M_z)^T.$$

Определим момент сил инерции:

$$\vec{M}_\Phi = -\sum_{i=1}^2 \vec{\rho}_i \times m_i \vec{w}_i = -\sum_{i=1}^2 \vec{\rho}_i \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_i + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i).$$

Так как в системе $Oxyz$ для величин радиус-векторов, угловой скорости и ускорения точек можно записать следующие равенства:

$$\vec{\rho}_1 = \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\rho}_2 = \begin{bmatrix} d_2 \\ 0 \\ -l_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix},$$

то после вычисления векторных произведений для момента сил инерции системы двух точек получим:

$$\vec{M}_\Phi = \begin{bmatrix} -(m_1 d_1 l_1 + m_2 d_2 l_2)(\dot{r} + qp) + (m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2)(qr - \dot{p}) \\ -(m_1 d_1 l_1 + m_2 d_2 l_2)(r^2 - p^2) + (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)(pr - \dot{q}) - (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)(pr + \dot{q}) \\ -(m_1 d_1 l_1 + m_2 d_2 l_2)(\dot{p} - qr) - (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)(\dot{r} + qp) \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно принципу Даламбера, уравнения вращательного движения гантелеобразной системы точек запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} -(m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(pq + \dot{r}) - (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)(\dot{p} + qr) + M_x = 0; \\ -(m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(r^2 - p^2) + (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)(pr - \dot{q}) - \\ \quad - (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)(pr + \dot{q}) + M_y = 0; \\ -(m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(\dot{p} - qr) - (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)(\dot{r} + qp) + M_z = 0. \end{cases}$$

Последняя система уравнений движения гантелеобразной системы точек также следует непосредственно из уравнений (3.4), если принять равными нулю собственные центральные моменты инерции тел:

$$A_i = \bar{A}_i + m_i l_i^2 = m_i l_i^2, \quad C_i = \bar{C}_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, малые возмущения в уравнениях (3.4) можно интерпретировать как касательные и центробежные силы инерции при движении смещенных центров масс, аналогичном движению рассмотренной гантелеобразной системы.

3.2. Представление соосных тел одним моделирующим твердым телом

Для проверки справедливости построенных уравнений движения (3.4) целесообразно провести некоторые аналогии с так называемым «моделирующим твердым телом» [13]. В данном случае следует рассмотреть такую систему соосных тел, тела которой «временно закреплены» и не имеют относительного вращения, и тогда такую систему действительно можно рассмотреть как одно твердое тело со сложной асимметричной конфигурацией (рис. 4). Ранее [13] этот способ описания был применен к рассмотрению маховика, состоящего из нескольких динамически симметричных соосных тел.

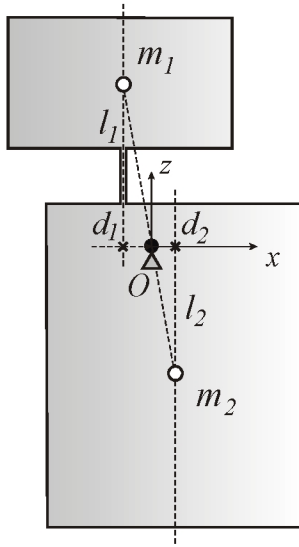


Рис. 4. Моделирующее твердое тело

Уравнения движения моделирующего твердого тела можно построить на основании теоремы об изменении кинетического момента тела по классической методике. Запишем эту теорему в системе $Oxyz$ (рис. 4):

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \vec{K} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}^e, \quad (3.3')$$

где $\vec{K} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$, $\vec{\omega} = [p, q, r]^T$ – кинетический момент и угловая скорость

моделирующего тела. Геометрические смещения, характеризуемые параметрами l_i, d_i ($i=1, 2$), приводят к следующим осевым и центробежным моментам инерции:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \bar{A}_1 + m_1 l_1^2 + \bar{A}_2 + m_2 l_2^2, & I_{yy} &= \bar{A}_1 + m_1 (l_1^2 + d_1^2) + \bar{A}_2 + m_2 (l_2^2 + d_2^2), \\ I_{zz} &= \bar{C}_1 + m_1 d_1^2 + \bar{C}_2 + m_2 d_2^2, & I_{xy} &= I_{yz} = 0, \\ I_{xz} &= -m_1 \cdot (-l_1) \cdot d_1 - m_2 \cdot (-l_2) \cdot d_2 = m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2. \end{aligned}$$

Тензор инерции моделирующего тела запишется следующим образом:

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & L \\ 0 & (A+D) & 0 \\ L & 0 & (C+D) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} A &= A_1 + A_2, & C &= C_1 + C_2, \\ A_i &= \bar{A}_i + m_i l_i^2, & C_i &= \bar{C}_i, \\ D &= m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2, & L &= m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2, \end{aligned}$$

а кинетический момент и векторное произведение из (2.3') примут вид:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_x = Ap + Lr \\ K_y = (A+D)q \\ K_z = Lp + (C+D)r \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} \times \vec{K} = \begin{bmatrix} (C-A)rq + Lpq \\ Apr + L(r^2 - p^2) - (C+D)rp \\ Dpq - Lrq \end{bmatrix}.$$

Векторное уравнение (3.3') можно записать:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)\dot{p} + qr(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) &= \\ &= M_x - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(pq + \dot{r}); \\ (A_1 + A_2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\dot{q} + pr(A_1 - C_1 + A_2 - C_2 - m_1 d_1^2 - m_2 d_2^2) &= \\ &= M_y - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(r^2 - p^2); \\ (C_1 + C_2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\dot{r} = M_z - (m_1 l_1 d_1 + m_2 l_2 d_2)(\dot{p} - qr) - (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)pq. \end{aligned} \quad (3.4')$$

Система (3.4') повторяет систему (3.4) при тождественном равенстве нулю угла и скорости относительной закрутки ($\delta \equiv \sigma \equiv 0$) и представляет собой динамические уравнения движения одного моделирующего твердого тела.

Если в алгоритме вывода уравнений (3.4') допустить возможность относительного вращения тел, т.е. снять ограничение на тождественное равенство нулю угла и скорости относительной закрутки, то в продольную компоненту кинетического момента K_z нужно добавить величину $C_1\sigma$. Это слагаемое определяет добавку в кинетический момент, обусловленную относительным вращением тела 1 вокруг своей главной продольной оси инерции:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_x = Ap + Lr \\ K_y = (A + D)q \\ K_z = Lp + (C + D)r + C_1\sigma \end{bmatrix}.$$

При этом изменится величина векторного произведения:

$$\vec{\omega} \times \vec{K} = \begin{bmatrix} (C - A)rq + Lpq + C_1q\sigma \\ Apr + L(r^2 - p^2) - (C + D)rp - C_1p\sigma \\ Dpq - Lrq \end{bmatrix},$$

а динамические уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)\dot{p} + qr(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) + C_1q\sigma &= \\ &= M_x - (m_1l_1d_1 + m_2l_2d_2)(pq + \dot{r}); \\ (A_1 + A_2 + m_1d_1^2 + m_2d_2^2)\dot{q} + pr(A_1 - C_1 + A_2 - C_2 - m_1d_1^2 - m_2d_2^2) - C_1p\sigma &= \\ &= M_y - (m_1l_1d_1 + m_2l_2d_2)(r^2 - p^2); \quad (3.4'') \\ (C_1 + C_2 + m_1d_1^2 + m_2d_2^2)\dot{r} + C_1\dot{\sigma} &= \\ &= M_z - (m_1l_1d_1 + m_2l_2d_2)(\dot{p} - qr) - (m_1d_1^2 + m_2d_2^2)pq. \end{aligned}$$

Система уравнений движения моделирующего твердого тела (3.4'') абсолютно идентична системе динамических уравнений (3.4), что дает наглядную механическую интерпретацию уравнений движения соосных тел.

Способ исследования движения соосных тел и вывода динамических уравнений, основанный на использовании одного моделирующего твердого тела,

не является универсальным, поскольку при описании других возможных случаев асимметрии моделирующее тело будет характеризоваться переменными моментами инерции, которые будут зависеть от относительного движения соосных тел. Относительное движение соосных тел зависит от их внутреннего взаимодействия и моментов внешних сил, которые могут быть разными для того и другого тела, поэтому должно быть описано из каких-либо дополнительных рассуждений, не связанных с «моделирующим телом». Таким образом, указанный способ в общем случае не обладает полнотой описания движения системы, однако ее представление одним моделирующим твердым телом можно использовать для наглядной физической интерпретации и проведения аналогий с движением твердого тела вокруг неподвижной точки.

- ◆ *Задание №5.* Провести проверку динамических уравнений, полученных в рамках задания 4 с помощью методики «моделирующего» тела.

3.3. Асимптотические решения для параметров движения асимметричной системы

Определим зависимости от времени для параметров движения асимметричной системы, используя асимптотические разложения по методу Пуанкаре [4, 9]. Введем в систему малый параметр, по степеням которого будем разлагать искомые решения в асимптотические ряды.

В качестве малого параметра ε выберем безразмерную величину, характеризующую смещение осей динамических симметрий тел от оси вращения:

$$\varepsilon = \frac{m_1 d_1 l_1 + m_2 d_2 l_2}{A_1 + A_2} = \frac{m_1 m_2 dl}{(m_1 + m_2)(A_1 + A_2)}. \quad (3.7)$$

Пусть моменты внешних сил и внутреннего взаимодействия отсутствуют. Тогда с точностью порядка ε динамические уравнения (3.4) и (3.6) можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{p} + aqr + bq\sigma &= -\varepsilon(pq + \dot{r}), \\ \dot{q} - apr - bp\sigma &= -\varepsilon(r^2 - p^2), \\ (C_1 + C_2)\dot{r} + C_1\dot{\sigma} &= -\varepsilon(A_1 + A_2)(\dot{p} - qr), \\ \dot{\sigma} &= -\dot{r}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $a = \frac{C_1 - A_1 + C_2 - A_2}{A_1 + A_2}$, $b = \frac{C_1}{A_1 + A_2}$ – безразмерные параметры.

Перейдем от экваториальных угловых скоростей к переменным типа «амплитуда-фаза» G и F с помощью следующей замены:

$$p = G(t)\sin F(t), \quad q = G(t)\cos F(t). \quad (3.9)$$

Динамические уравнения (3.8) с точностью порядка ε переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -\varepsilon r^2 \cos F, \\ \dot{F} &= -(ar + b\sigma) - \frac{\varepsilon[G^2 - r^2]\sin F}{G}, \\ \dot{r} &= \frac{\varepsilon(A_1 + A_2)}{C_2} G[r + (ar + b\sigma)] \cos F, \\ \dot{\sigma} &= -\dot{r}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решения порождающей системы уравнений ($\varepsilon=0$) имеют вид:

$$\bar{G} = \frac{K \sin \theta_0}{A_1 + A_2}, \quad \bar{F} = \omega \cdot t + \varphi_0, \quad \bar{r} = r_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma_0, \quad (3.11)$$

$$\omega = r_0 - \frac{K}{A_1 + A_2} \cdot \cos \theta_0 = r_0 - \frac{K_z}{A_1 + A_2} =$$

$$\text{где} \quad = r_0 - \frac{C_1 \sigma_0 + (C_1 + C_2)r_0}{A_1 + A_2} = -ar_0 - b\sigma_0,$$

причем решения (3.11) полностью соответствуют решениям (2.9).

Используя известный асимптотический метод Пуанкаре, будем искать решения возмущенной системы (3.10) в виде следующих разложений, ограничиваясь двумя членами асимптотического ряда:

$$\begin{aligned} G(t) &= \bar{G} + \varepsilon \cdot g(t), & F(t) &= \bar{F} + \varepsilon \cdot f(t), \\ \sigma(t) &= \bar{\sigma} + \varepsilon \cdot \Sigma(t), & r(t) &= \bar{r} + \varepsilon \cdot R(t), \\ \delta(t) &= \bar{\delta} + \varepsilon \cdot \Delta(t), & \dot{\Delta} &= \Sigma, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\bar{\delta} = \sigma_0 t + \delta_0$; $g(t), f(t), R(t), S(t), D(t)$ – подлежащие нахождению функции.

Подставляя выражения (3.12) в возмущенную систему (3.10) и приравнявая члены порядка ε , получим систему уравнений для неизвестных возмущений:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= -r_0^2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \\ \dot{f} &= -(aR + b\Sigma) - \frac{\bar{G}^2 - r_0^2}{\bar{G}} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \\ \dot{R} &= \frac{A_1 + A_2}{C_2} \bar{G}[r_0 - \omega] \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \\ \dot{\Sigma} &= -\frac{A_1 + A_2}{C_2} \bar{G}[r_0 - \omega] \cos(\omega \cdot t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Получим решение системы (3.13) при нулевых начальных значениях малых возмущений:

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{r_0^2}{\omega} [\sin(\omega \cdot t + \varphi_0) - \sin \varphi_0], \\ f(t) &= \gamma \cdot t + \beta [\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) - \cos \varphi_0], \\ R(t) &= \alpha (\sin(\omega \cdot t + \varphi_0) - \sin \varphi_0), \\ \Sigma(t) &= -\alpha (\sin(\omega \cdot t + \varphi_0) - \sin \varphi_0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\alpha = \frac{A_1 + A_2}{C_2 \omega} \overline{G} [r_0 - \omega]; \quad \beta = -\frac{1}{\omega} \left\{ \frac{A_1 + A_2}{C_2 \omega} \overline{G} [r_0 - \omega] (b - a) - \frac{\overline{G}^2 - r_0^2}{\overline{G}} \right\};$$

$$\gamma = \alpha \sin \varphi_0 (a - b).$$

Из выражений (3.14) и (3.12) следуют зависимости от времени для переменных «амплитуда-фаза», а также угловых скоростей r и σ системы соосных тел с малой асимметрией.

С точностью порядка ε зависимости для угловых скоростей можно записать в виде:

$$\begin{aligned} p(t) &= \overline{G} \sin \overline{F}(t) + \varepsilon P(t), \quad q(t) = \overline{G} \cos \overline{F}(t) + \varepsilon Q(t), \\ r(t) &= r_0 + \varepsilon R(t), \quad \sigma(t) = \sigma_0 + \varepsilon \Sigma(t), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$P(t) = g(t) \sin \overline{F}(t) + \overline{G} f(t) \cos \overline{F}(t), \quad Q(t) = g(t) \cos \overline{F}(t) - \overline{G} f(t) \sin \overline{F}(t).$$

- ♦ *Задача №6.* Возможно ли введение другого малого параметра? Что изменится в уравнениях и решениях? Проиллюстрировать ответ с помощью математических выкладок.

Перейдем к определению зависимостей для углов Эйлера, которые будем искать в виде следующих разложений по малому параметру ε :

$$\psi = \overline{\psi} + \varepsilon \Psi(t), \quad \theta = \overline{\theta} + \varepsilon \Theta(t), \quad \varphi = \overline{\varphi} + \varepsilon \Phi(t). \quad (3.16)$$

Порождающие решения $(\overline{\psi}, \overline{\theta}, \overline{\varphi})$ определяются зависимостями (2.2) с учетом того, что момент внутреннего взаимодействия тел равен нулю ($M=0$). Подставляя разложения (3.16) и полученные зависимости для угловых скоростей в уравнения Эйлера (1.7) и приравнявая члены порядка ε , получим кинематические уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -\frac{K \cos \overline{\theta}}{(A_1 + A_2) \sin \overline{\theta}} \cdot \Theta + \frac{1}{\sin \overline{\theta}} [P \sin \overline{\varphi} + Q \cos \overline{\varphi}], \\ \dot{\Theta} &= -\frac{K \sin \overline{\theta}}{A_1 + A_2} \cdot \Phi + P \cos \overline{\varphi} - Q \sin \overline{\varphi}, \\ \dot{\Phi} &= \frac{K}{(A_1 + A_2) \sin \overline{\theta}} \cdot \Theta - ctg \overline{\theta} \cdot [P \sin \overline{\varphi} + Q \cos \overline{\varphi}], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $P(t) = g(t) \sin \overline{F}$, $Q(t) = g(t) \cos \overline{F}$.

Отдельно проинтегрируем последние два уравнения неоднородной линейной системы уравнений (3.17). Воспользуемся формулой Коши, известной из курса обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y(t) = M(t) \cdot M^{-1}(t_0) \cdot y_0 + M(t) \cdot \int_{t_0}^t M^{-1}(s) \cdot f(s) ds, \quad (3.18)$$

где $y(t)$ – общее решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений $L(y) = f(t)$, L – линейный дифференциальный оператор, t_0 – начальное значение независимой переменной, y_0 – вектор начальных значений искомых функций, $M(t)$ – фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы, $f(t)$ – вектор возмущающих функций.

Запишем решения для малых возмущений углов нутации и собственного вращения при нулевых начальных значениях:

$$\begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \Phi(t) \end{bmatrix} = M(t) \cdot \int_0^t M^{-1}(s) \cdot \begin{bmatrix} f^\Theta(s) \\ f^\Phi(s) \end{bmatrix} ds, \quad (3.19)$$

где $f^\ominus = P \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi}$, $f^\oplus = -ctg\bar{\theta} \cdot [P \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi}]$ – известные возмущающие функции,

$$M(t) = \begin{bmatrix} -\sin \bar{\theta} \sin \left| \frac{K}{A_1 + A_2} t \right| & \sin \bar{\theta} \cos \left| \frac{K}{A_1 + A_2} t \right| \\ \cos \left| \frac{K}{A_1 + A_2} t \right| & \sin \left| \frac{K}{A_1 + A_2} t \right| \end{bmatrix} - \text{фундаментальная матрица}$$

решений соответствующей однородной системы.

Если в первое из уравнений (3.17) подставить зависимость от времени возмущения угла нутации, следующего из (3.19), то возмущение угла прецессии $\Psi(t)$ определится квадратурой от комбинаций тригонометрических функций:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sin \theta_0} \int_0^t \left(-\frac{K \cos \theta_0}{(A_1 + A_2)} \Theta(t) + P(t) \sin \bar{\varphi} + Q(t) \cos \bar{\varphi} \right) dt. \quad (3.20)$$

Развернутый вид зависимостей (3.19) и (3.20) в силу громоздкости не приводится.

Аналитические зависимости (3.15), (3.16), (3.19) и (3.20), представляющие собой решения для угловых скоростей и углов Эйлера, справедливы для небольших временных интервалов и тем точнее описывают движение асимметричной системы соосных тел, чем меньшие значения принимает малый параметр ε . Согласно теореме Пуанкаре, точность асимптотического решения имеет порядок наивысшей удерживаемой в разложении степени малого параметра $(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots)$. Причем имеет место следующий интервал времени, на котором следует рассматривать решения $t \in \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

На рис. 5-24 приведены результаты расчетов для численной иллюстрации аналитических решений (3.19), (3.20) и сравнения их с зависимостями, получаемыми численным интегрированием полных дифференциальных уравнений (3.4), (3.6) и (2.7), при начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах системы, взятых из табл. 1-5. На рис. 5-24 наряду с графиками зависимостей эйлеровых углов от времени приведены плоские и пространственные годографы единичного вектора продольной оси соосной системы, а в ряде случаев и фазовые траектории в пространстве угла и скорости нутации.

Плоские годографы представляют собой проекции орта общей оси враще-

ния тел на экваториальную плоскость, под которой в данном случае понимается плоскость, перпендикулярная вектору невозмущенного кинетического момента соосных тел, вокруг которого ось совершает прецессионное движение. На рисунках с пространственными годографами для большей наглядности изменен масштаб по координатной оси, перпендикулярной экваториальной плоскости и совпадающей с вектором невозмущенного кинетического момента.

Пространственные и плоские годографы орта продольной оси наглядно представляют прецессию соосных тел, характеризующую конусность движения, а фазовые траектории иллюстрируют почти периодичность нутационных колебаний.

- ◆ *Задание №7.* Получить систему дифференциальных уравнений для определения членов второго порядка в разложениях (3.12).

Данные для расчета 1)

Таблица 1

Начальные условия движения:	Инерционно-массовые параметры СА:
$p_0 = 0,3 \text{ рад/с}, q_0 = 0,2 \text{ рад/с},$	$A_1 = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_1 = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_1 = 15 \text{ кг},$
$r_0 = 1,1 \text{ рад/с}, \sigma_0 = 5 \text{ рад/с},$	$A_2 = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_2 = 1,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_2 = 30 \text{ кг},$
$\psi_0 = \delta_0 = 0 \text{ рад}.$	$l = 0,4 \text{ м}, d = 0,01 \text{ м}, \varepsilon = 0,01.$

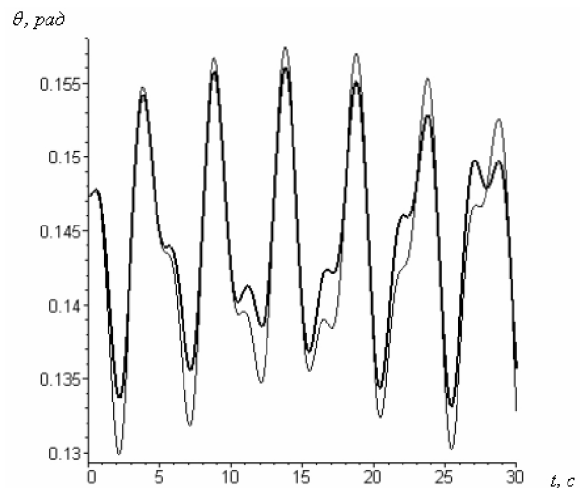


Рис. 5. Зависимость для угла нутации:

жирная линия – аналитический расчет, тонкая – численное интегрирование

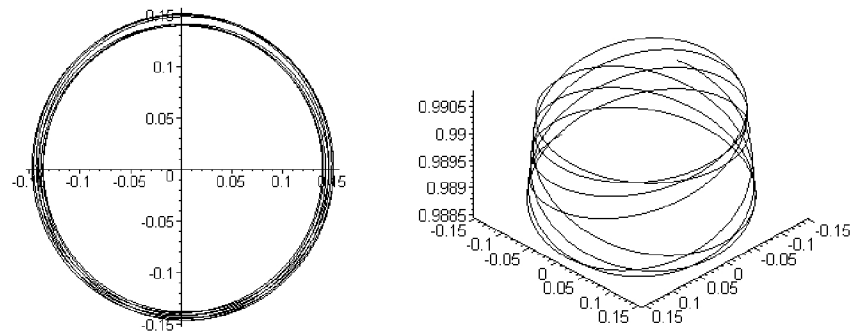


Рис. 6. Годограф единичного вектора оси вращения соосных тел в проекции на экваториальную плоскость и в пространстве

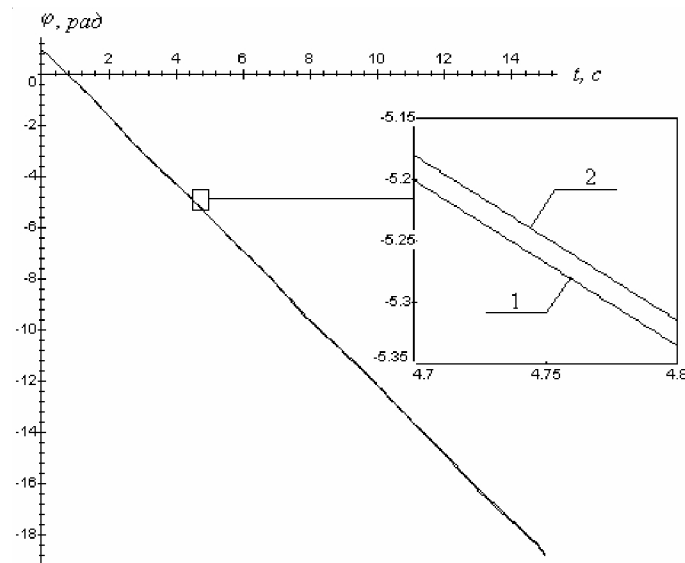


Рис. 7. Зависимость для угла собственного вращения:

1– численное интегрирование, 2– приближенная аналитическая зависимость

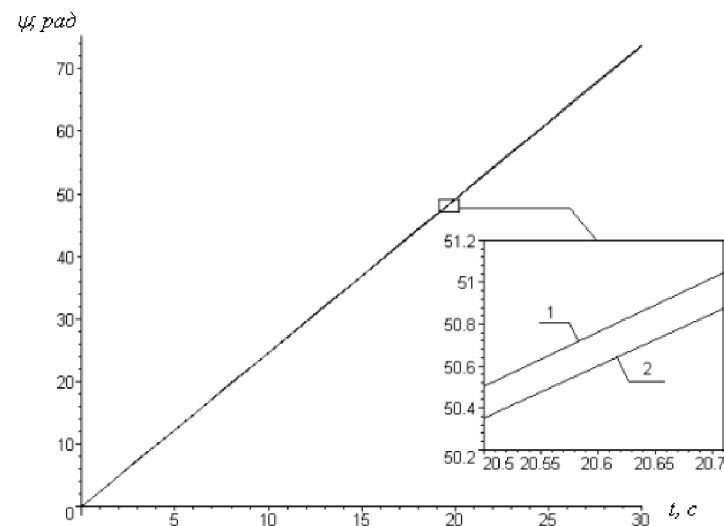


Рис. 8. Зависимость для угла прецессии:

1– численное интегрирование, 2– приближенная аналитическая зависимость

Данные для расчета 2)

Таблица 2

<u>Начальные условия движения:</u>	<u>Инерционно-массовые параметры СА:</u>
$p_0 = 0,3 \text{ рад/с}, q_0 = 0,2 \text{ рад/с},$	$A_1 = 2,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_1 = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_1 = 30 \text{ кг},$
$r_0 = 1,1 \text{ рад/с}, \sigma_0 = 25 \text{ рад/с},$	$A_2 = 2,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_2 = 1,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_2 = 35 \text{ кг},$
$\psi_0 = \delta_0 = 0 \text{ рад}.$	$l = 0,4 \text{ м}, d = 0,01 \text{ м}, \varepsilon = 0,01.$

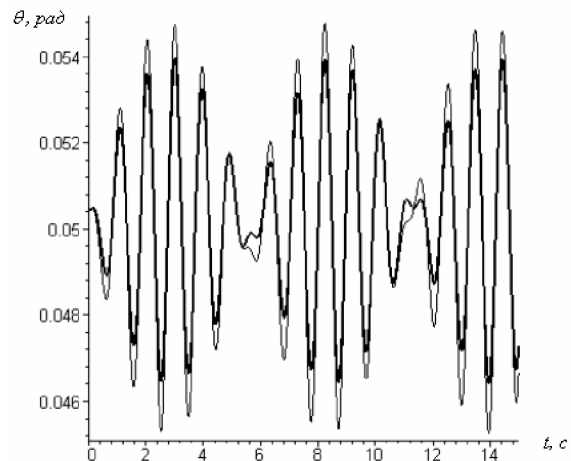


Рис. 9. Зависимость для угла нутации:

жирная линия – аналитический расчет, тонкая – численное интегрирование

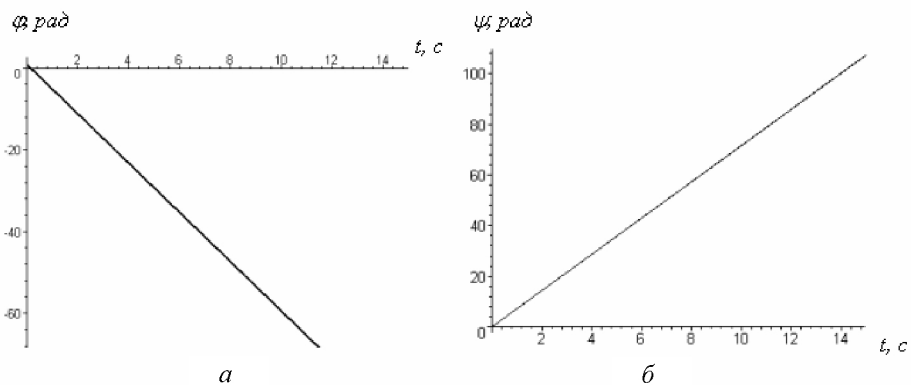


Рис. 10. Зависимости для углов собственного вращения (а) и прецессии (б)

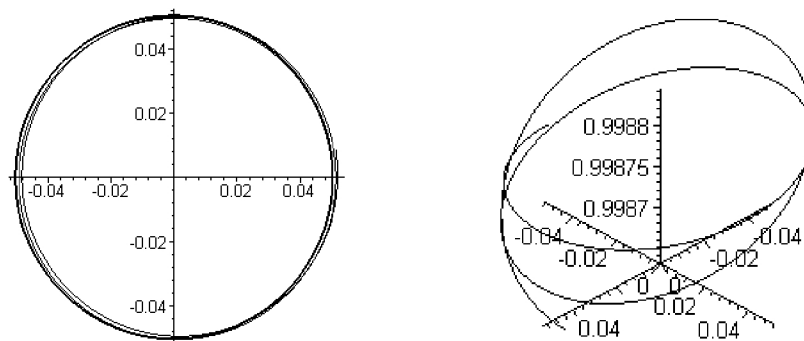


Рис. 11. Начальные витки годографа единичного вектора оси вращения соосных тел в проекции на экваториальную плоскость и в пространстве

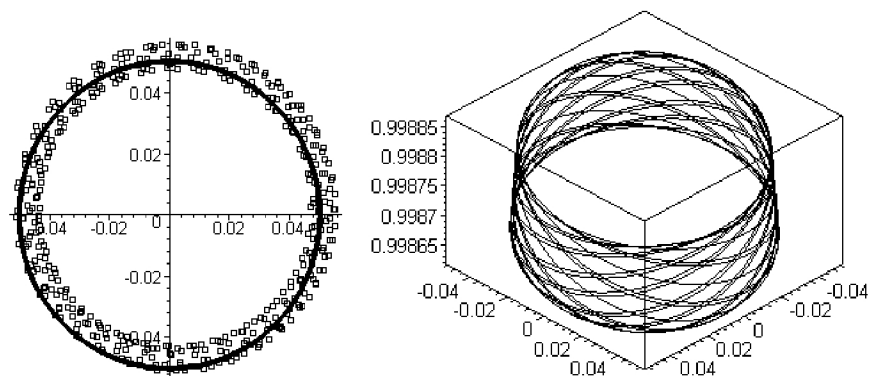


Рис. 12. Цикличность годографа единичного вектора оси вращения: жирная линия – невозмущенное, тонкая линия и точки – возмущенное движение

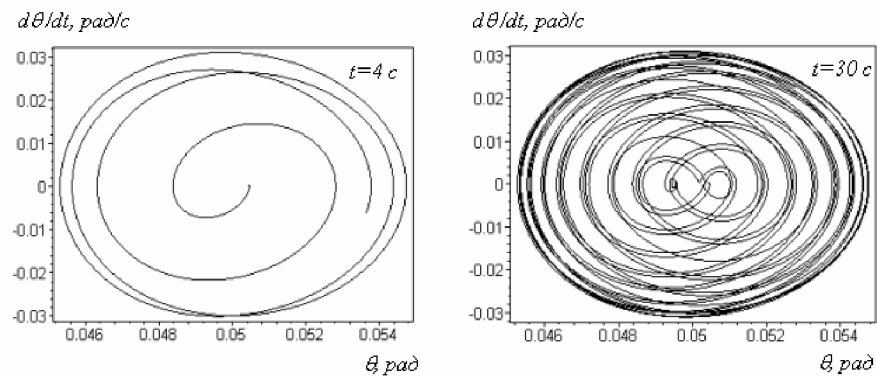


Рис. 13. Фазовая траектория в пространстве угла и скорости нутации

Данные для расчета 3)

Таблица 3

Начальные условия движения:	Инерционно-массовые параметры СА:
$p_0 = 0,3 \text{ рад/с}, q_0 = 0,2 \text{ рад/с},$	$A_1 = 2,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_1 = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_1 = 30 \text{ кг},$
$r_0 = 1,1 \text{ рад/с}, \sigma_0 = 5 \text{ рад/с},$	$A_2 = 2,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_2 = 1,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_2 = 35 \text{ кг},$
$\psi_0 = \delta_0 = 0 \text{ рад}.$	$l = 0,4 \text{ м}, d = 0,01 \text{ м}, \varepsilon = 0,01.$

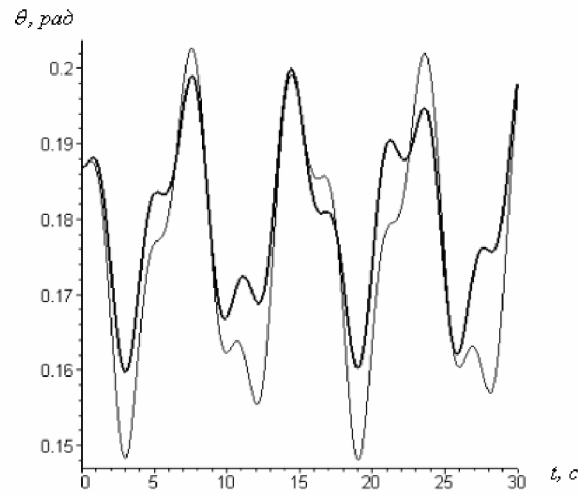


Рис. 14. Зависимость для угла нутации:

жирная линия – аналитический расчет, тонкая – численное интегрирование

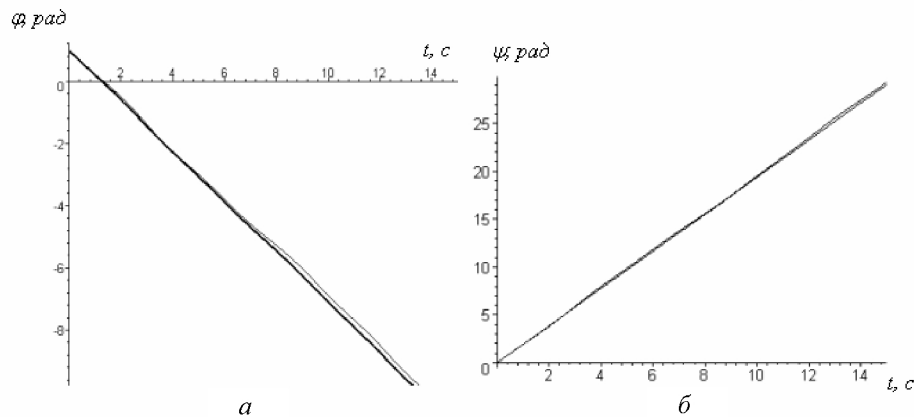


Рис. 15. Зависимости для углов собственного вращения (а) и прецессии (б):
жирная линия – аналитический расчет, тонкая – численное интегрирование

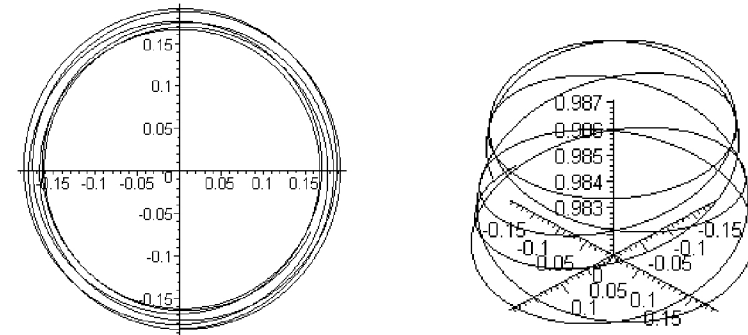


Рис. 16. Начальные витки годографа единичного вектора оси вращения соосных тел в проекции на экваториальную плоскость и в пространстве

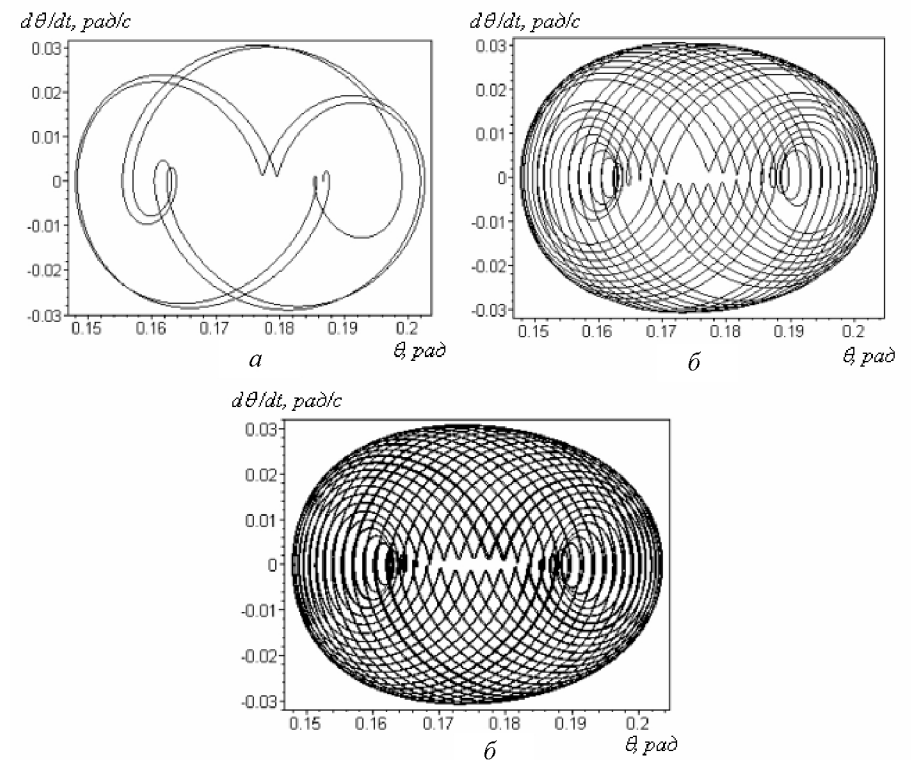


Рис. 17. Развитие во времени фазовой траектории в пространстве угла и скорости нутации:

а – для $t = 30 \text{ с}$, б – для $t = 150 \text{ с}$, в – для $t = 400 \text{ с}$

Данные для расчета 4)

Таблица 4

<u>Начальные условия движения:</u>	<u>Инерционно-массовые параметры СА:</u>
$p_0 = 0,3 \text{ рад/с}, q_0 = 0,2 \text{ рад/с},$	$A_1 = 2,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_1 = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_1 = 30 \text{ кг},$
$r_0 = -1,1 \text{ рад/с}, \sigma_0 = 5 \text{ рад/с},$	$A_2 = 2,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_2 = 1,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_2 = 35 \text{ кг},$
$\psi_0 = \delta_0 = 0 \text{ рад}.$	$l = 0,4 \text{ м}, d = 0,01 \text{ м}, \varepsilon = 0,01.$

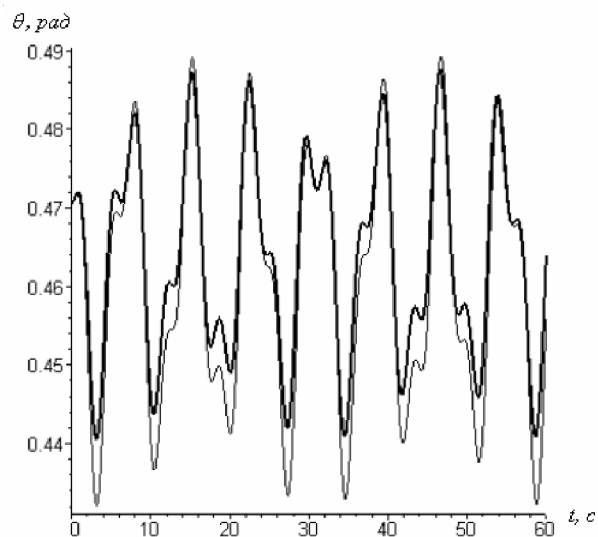


Рис. 18. Зависимость для угла нутации:

жирная линия – аналитический расчет, тонкая – численное интегрирование

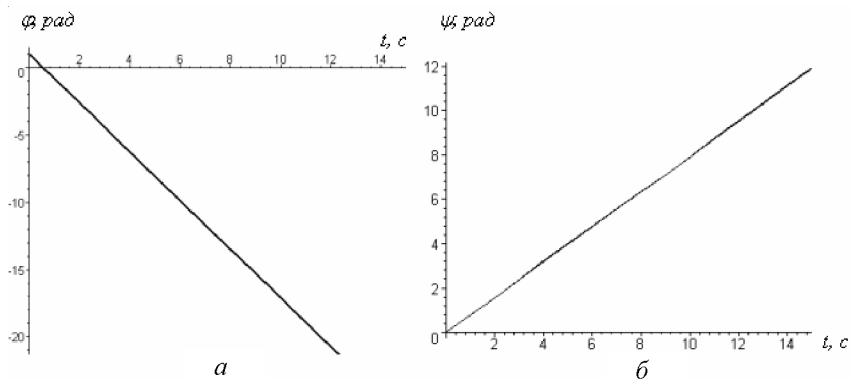


Рис. 19. Зависимости для углов собственного вращения (а) и прецессии (б)

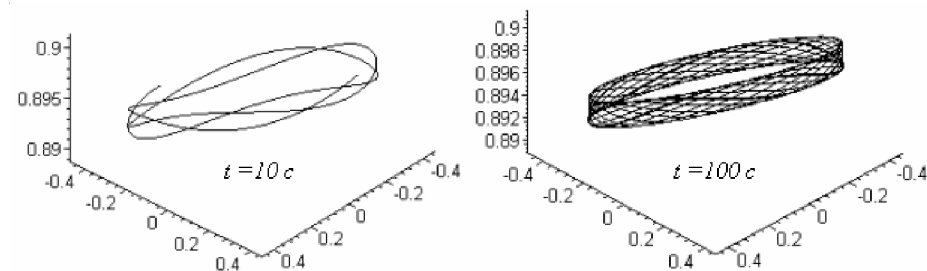


Рис. 20. Изменение со временем годографа единичного вектора оси вращения соосных тел

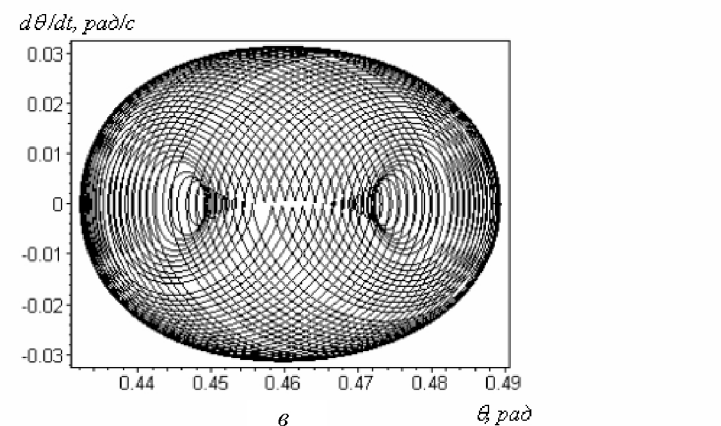
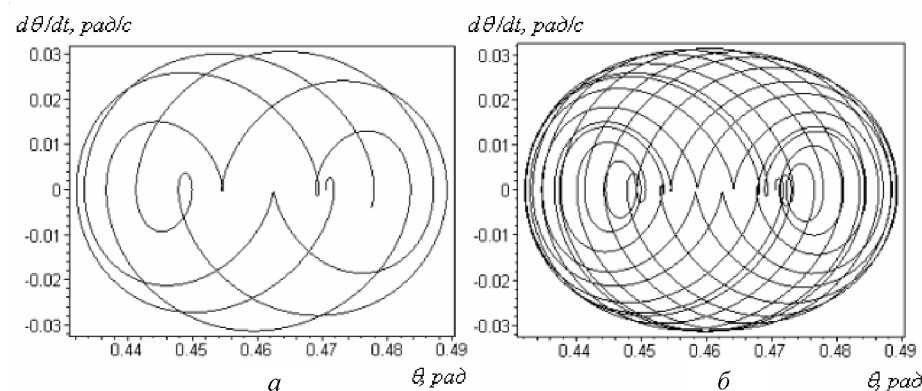


Рис. 21. Развитие во времени фазовой траектории в пространстве угла и скорости нутации: а – для $t = 30 \text{ с}$, б – для $t = 100 \text{ с}$, в – для $t = 300 \text{ с}$

Данные для расчета 5)

Таблица 5

Начальные условия движения:	Инерционно-массовые параметры СА:
$p_0 = 0,3 \text{ рад/с}, q_0 = 0,2 \text{ рад/с},$	$A_1 = 1,9 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_1 = 1,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_1 = 25 \text{ кг},$
$r_0 = 1,5 \text{ рад/с}, \sigma_0 = 10 \text{ рад/с},$	$A_2 = 2,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, C_2 = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, m_2 = 30 \text{ кг},$
$\psi_0 = \delta_0 = 0 \text{ рад}.$	$l = 0,4 \text{ м}, d = \{0,01 \text{ м}; 0,04 \text{ м}; 0,08 \text{ м}\}.$

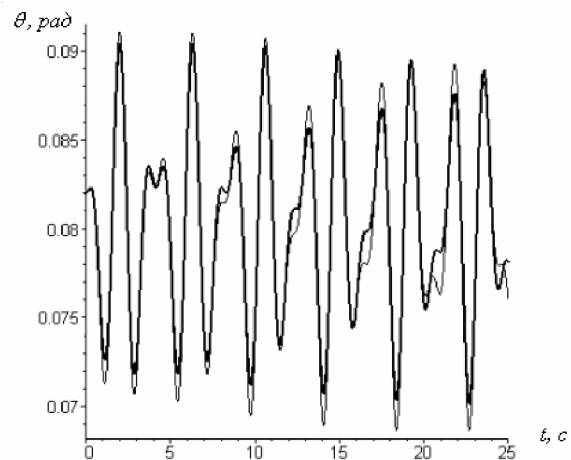


Рис. 22. Зависимость для угла нутации при $d = 0,01 \text{ м}$ и $e = 0,01$:
жирная линия – аналитический расчет, тонкая – численное интегрирование

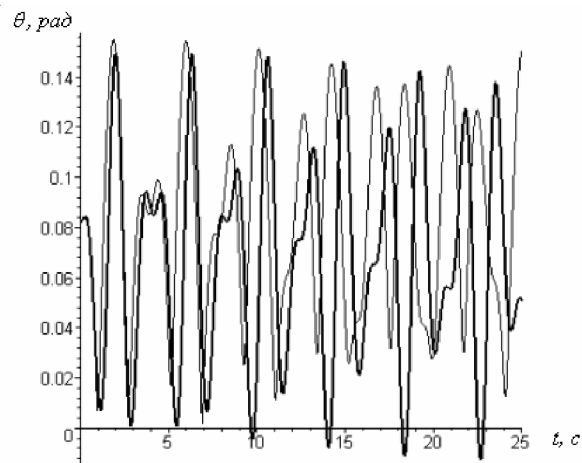


Рис. 23. Зависимость для угла нутации при $d = 0,04 \text{ м}$ и $e = 0,05$

Для иллюстрации сходимости решений в зависимости от величины малого параметра на рис. 22 и 23 представлены результаты расчетов для угла нутации, полученные при одинаковых начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах, кроме малого смещения d , для которого были выбраны значения $0,01 \text{ м}$ и $0,08 \text{ м}$ и при которых величины малого параметра e приняли значения $0,01$ и $0,1$, соответственно.

♦ **Задание №8.** Провести численное интегрирование уравнений для членов второго порядка (см. задание 7) и построить их графики.

4. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО МОМЕНТА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Настоящий пункт посвящен вопросам изучения уравновешенных и неуравновешенных режимов свободного движения гиростата, представляющего собой систему соосных тел с трехосным телом-носителем и динамически симметричным телом-ротором, вращающимся относительно одной из главных осей тела-носителя. Неуравновешенность гиростата в данном случае подразумевает непостоянство относительной угловой скорости ротора и является следствием действия внутренних моментов сил между носителем и ротором.

Такая постановка задачи обобщает классические результаты для случая Эйлера движения твердого тела. Уравновешенные режимы движения, при которых относительная скорость ротора поддерживается постоянной, рассмотрены ранее в работах Вольтерра, Вангерина и Виттенбурга [6], в которых аналитические зависимости доведены до процедур взятия эллиптических интегралов и представляют собой, по сути, параметризацию полодий как пространственных кривых (время – параметр параметризации).

В настоящем пособии осуществляется поиск [3] аналитических решений для параметров движения неуравновешенного гиростата при действии внутренних моментов специального вида, выражаемых в эллиптических функциях времени и также доставляющих динамическим уравнениям решения в эллиптических функциях Якоби.

Как будет показано далее, можно осуществлять «включение» и «выключение» специальных внутренних моментов, переводящих гиростат из уравновешенного режима в неуравновешенный режим движения: с решений Виттенбурга на решения авторов [3]. Такие переходы через серии уравновешенных и неуравновешенных режимов движения позволяют изменять параметры углового движения гиростата и даже осуществлять его пространственную переориентацию, что может быть полезно в рамках задач механики космического полета, связанных с переориентацией КА в пространстве.

Следует, вообще говоря, отметить, что для поддержания уравновешенного режима движения гиростата также необходимо приложение внутреннего момента сил со стороны носителя на ротор, однако при исследовании движения уравновешенных гиростатов этим обстоятельством обычно пренебрегают, считая его выполненным. При этом гиростат рассматривают как систему с тремя степенями свободы, принимая гиростатический момент роторов (суммарный

относительный кинетический момент роторов) как заданный постоянный параметр. Таким образом, анализ динамики относительного движения опускают из рассмотрения, назначая роторам постоянные относительные угловые скорости, которые, конечно же, должны поддерживаться за счет внутренних моментов, что оказывает влияние на движение тела-носителя.

4.1. Общая характеристика расположения полодий

Рассмотрим движение свободной системы соосных тел с трехосным телом-носителем и двухосным телом-ротором при действии между телами внутреннего момента [3], не обеспечивающего постоянства относительной скорости вращения ротора. Таковую систему соосных тел будем называть свободным неуравновешенным гиростатом. Пусть гиростат состоит из тела-носителя с трехосным эллипсоидом инерции ($I_2 = \text{diag}[A_2, B_2, C_2]$) и динамически симметричного ротора ($I_1 = \text{diag}[A_1, A_1, C_1]$), вращающегося относительно главной оси инерции гиростата Oz . Согласно (1.4) и (1.6) уравнения движения свободного гиростата примут вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr + C_r q\sigma &= 0, & B\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma &= 0, \\ C\dot{r} + C_r \dot{\sigma} + (B - A)pq &= 0, & C_r (\dot{r} + \dot{\sigma}) &= M_r, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $A = A_1 + A_2$, $B = A_1 + B_2$, $C = C_1 + C_2$, $C_r = C_1$.

Исследование уравновешенного свободного гиростата проведено в работе [6], в которой из обращения эллиптического интеграла первого рода следуют параметризованные зависимости для угловых скоростей тела-носителя. Можно предположить, что и в некоторых случаях движения неуравновешенного гиростата решения для параметров пространственной ориентации также запишутся в эллиптических функциях. Поставим задачу определения вида моментов внутреннего взаимодействия тела-носителя и ротора, доставляющих динамическим уравнениям движения аналитические решения в эллиптических функциях.

Будем полагать, что $A < B < C$, а также, что описание движения начинается с момента времени, когда компонента угловой скорости q проходит через ноль ($q_0 = 0$). Проведем исследование движения гиростата аналогично классическому случаю Эйлера движения твердого тела и его геометрической интерпретации Пуансо [5]. Как известно, имеется три случая расположения полодии

относительно эллипсоида инерции (рис. 24): 1) конус полодии (и сама полодия) содержит внутри ось Oz гиристора, соответствующую оси наибольшего момента инерции (рис. 24, в); 2) конус полодии содержит внутри ось Ox , соответствующую наименьшему моменту инерции (рис. 24, б); 3) конус полодии распадается на две плоскости (рис. 24, г), при этом сами полодии переходят в два эллипса, а мгновенная ось вращения асимптотически стремится к оси среднего момента инерции.

Условиями реализации случаев 1)-3) являются [5] следующие неравенства, соответственно:

$$D > B, \quad (4.2)$$

$$D < B, \quad (4.3)$$

$$D = B, \quad (4.4)$$

где $D = K^2 / (2T)$, K – величина кинетического момента, T – кинетическая энергия твердого тела. Указанным случаям соответствуют три вида решений для компонент угловых скоростей твердого тела в эллиптических функциях.

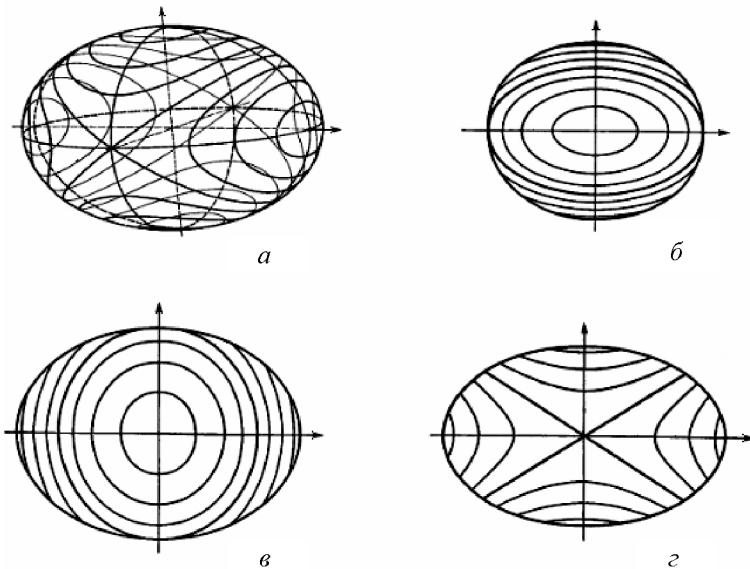


Рис. 24. Расположение полодий на эллипсоиде инерции твердого тела:
а – изометрическое изображение; б – со стороны оси наименьшего момента инерции; в – со стороны оси наибольшего момента инерции; г – со стороны оси среднего момента инерции

При исследовании движения гиристора следует учесть указанные различия в расположении полодий. Как будет видно из следующих ниже решений, случаи 1) – 3) для гиристора реализуются при условиях (4.2), (4.3) и (4.4), соответственно, с той лишь разницей, что

$$D = \frac{K^2}{\omega \cdot \mathbf{K}} = \frac{A^2 p_0^2 + (C r_0 + C_r \sigma_0)^2}{A p_0^2 + (C r_0 + C_r \sigma_0) r_0}. \quad (4.5)$$

Отметим, что в выражении скалярное произведение $\omega \cdot \mathbf{K}$ не является удвоенной кинетической энергией гиристора, как в случае для твердого тела, так как \mathbf{K} представляет собой кинетический момент системы двух тел, а ω – угловую скорость только тела-носителя.

4.2. Некоторые сведения из теории эллиптических функций

Для проведения дальнейших исследований и получения аналитических решений динамических уравнений (4.1) необходим краткий экскурс в теорию эллиптических функций [11].

Введение и использование эллиптических функций связано с вычислением и обращением определенного интеграла следующего вида:

$$I(y) = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (4.6)$$

Положим, что интеграл (4.6) вычислен и принимает значение, равное u :

$$I(y) = u.$$

При обращении интеграла (4.6) по известному его значению u стремятся определить верхний предел интегрирования y , который доставил интегралу указанное значение. Для этих целей вводится специальная функция, называемая *амплитудой*:

$$y = \text{am } u. \quad (4.7)$$

Эллиптические функции Якоби по определению вводятся с помощью вычисления от величины амплитуды тригонометрических функций \sin , \cos , а также нижеследующего квадратного корня:

$$\begin{aligned}
\stackrel{df}{\text{sn}} u &= \sin(\text{am } u), \\
\stackrel{df}{\text{cn}} u &= \cos(\text{am } u), \\
\stackrel{df}{\text{dn}} u &= \Delta(k, \text{am } u) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}, \\
(\text{cn } u &= \sqrt{1 - \text{sn}^2 u}, \quad \text{cn } 0 = 1, \quad \text{dn } 0 = 1).
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

Функции (4.8) называются, соответственно, эллиптическим синусом, эллиптическим косинусом и *дельта амплитудой*.

Отметим здесь, что эллиптические функции также зависят от величины параметра k .

Имеют место следующие формулы дифференцирования эллиптических функций:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \text{cn } u &= -\text{sn } u \text{ dn } u, \\
\frac{d}{du} \text{sn } u &= \text{cn } u \text{ dn } u, \\
\frac{d}{du} \text{dn } u &= -k^2 \text{sn } u \text{ cn } u.
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

Равенства (4.9) по своей структуре напоминают структуру динамических уравнений Эйлера движения свободного твердого тела. Это обстоятельство и позволяет предположить, что решение динамических уравнений (по крайней мере, в случае Эйлера) может быть найдено именно в эллиптических функциях Якоби. Таким образом, вполне оправдан математизированный путь нахождения решения динамических уравнений, когда их вид выбирается в виде комбинаций эллиптических функций, а некоторые неопределенные параметры определяются из удовлетворения решений исходным уравнениям. Такой подход к поиску решения будет продемонстрирован в следующем пункте.

4.3. Получение аналитических решений

Рассмотрим каждый из указанных в пункте 4.1 случаев 1)-3).

Пусть выполняется условие (4.2). Будем искать решения для компонент угловых скоростей в виде следующих зависимостей, определяемых эллиптическими функциями [3]:

$$\begin{aligned}
p(t) &= p_0 \text{cn}(\lambda t, k), \quad q(t) = b \text{sn}(\lambda t, k), \\
r(t) &= r_0 \text{dn}(\lambda t, k), \quad \sigma(t) = \sigma_0 \text{dn}(\lambda t, k),
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

где p_0, r_0, σ_0 – начальные значения скоростей, а параметры λ, k и b подлежат определению.

Покажем, что искомые параметры λ , модуль эллиптических функций k и амплитуда проекции угловой скорости на ось Oy b будут однозначно определяться из начальных условий движения. Для тождественного выполнения последнего уравнения системы (4.1) при выбранных решениях необходимо, чтобы момент внутреннего взаимодействия имел вид:

$$M_r = -C_r k^2 \lambda (r_0 + \sigma_0) \text{sn } \lambda t \text{ cn } \lambda t. \tag{4.11}$$

Подставляя выражения (4.10) в первые три уравнения (4.1), используя при этом формулы дифференцирования эллиптических функций (4.9), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
-Ap_0 \lambda + (C - B)br_0 + C_r b \sigma_0 &= 0 \\
Bb_0 \lambda + (A - C)p_0 r_0 - C_r p_0 \sigma_0 &= 0 \\
-Cr_0 k^2 \lambda + (B - A)bp_0 - C_r k^2 \lambda \sigma_0 &= 0
\end{aligned}
\tag{4.12}$$

- ♦ *Задание №9.* Используя формулы дифференцирования эллиптических функций (4.9), показать справедливость алгебраических уравнений (4.10) с помощью дифференцирования функций (4.10) и подстановкой их в уравнения (4.1).

Из системы (4.12) имеем следующие формулы для искомых параметров:

$$b^2 = \frac{((C-A)r_0 + C_r\sigma_0)p_0^2 A}{((C-B)r_0 + C_r\sigma_0)B} = \frac{(K_z(0) - Ar_0)Ap_0^2}{(K_z(0) - Br_0)B},$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{AB}((C-B)r_0 + C_r\sigma_0)((C-A)r_0 + C_r\sigma_0) = (K_z(0) - Br_0)(K_z(0) - Ar_0), \quad (4.13)$$

$$k^2 = \frac{p_0^2 A(B-A)}{((C-B)r_0 + C_r\sigma_0)(Cr_0 + C_r\sigma_0)} = \frac{p_0^2 A(B-A)}{(K_z(0) - Br_0)K_z(0)}.$$

где $K_z(0) = Cr_0 + C_r\sigma_0$ – начальная величина проекции кинетического момента на продольную ось Oz . Очевидно, что модуль k не должен превышать единицы, что соответствует условию с учетом выражения .

Примем для определенности, что $r_0 > 0$. Для того чтобы параметры b , λ и k были ненулевыми ограниченными действительными числами, необходимо, как это следует из (4.13), совместное выполнение следующих условий:

$$(K_z(0) - Br_0)(K_z(0) - Ar_0) > 0, \quad (4.14)$$

$$(K_z(0) - Br_0)K_z(0) > 0. \quad (4.15)$$

Так как $A < B < C$ и $r_0 > 0$, то совместное выполнение условий (4.14) и (4.15) обеспечивается выполнением одного из равносильных неравенств:

$$K_z(0) < 0, \quad K_z(0) > Br_0. \quad (4.16)$$

Условие можно также записать в виде:

$$K_z^2(0) - Br_0 K_z(0) > A(B-A)p_0^2,$$

которое сводится к следующим равносильным неравенствам:

$$K_z(0) < \alpha, \quad K_z(0) > \beta, \quad (4.17)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(Br_0 - \sqrt{d}), \quad \beta = \frac{1}{2}(Br_0 + \sqrt{d}), \quad d = B^2 r_0^2 + 4A(B-A)p_0^2 > 0. \quad (4.18)$$

Полученные неравенства (4.17) (или (4.2)) охватывают условия (4.16) и

поэтому являются определяющими. Знак параметра b зависит от знака λ и выбирается на основании первого соотношения из (4.12).

Проводя аналогичные рассуждения для случая, когда $r_0 < 0$, можно показать, что величины b , λ , k также будут действительными и $|k| < 1$, когда выполняется одно из равносильных неравенств, с тем лишь замечанием, что в этом случае величины α и β вычисляются следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2}(-B|r_0| - \sqrt{d}), \quad \beta = \frac{1}{2}(-B|r_0| + \sqrt{d}). \quad (4.19)$$

Итак, если начальные параметры движения удовлетворяют неравенствам (4.17), то будут справедливы решения (4.10) при действии внутреннего момента (4.11). Выполнение неравенств (4.17) можно обеспечить выбором начальной величины K_z путем задания начальной угловой скорости ротора σ_0 либо тела-носителя r_0 .

Отметим, что решения (4.10) можно рассматривать как параметризацию пространственной кривой, соответствующей полодии, откуда следует, что полодия содержит внутри ось Oz . Условие (4.2) существования решений (4.10) является условием движения с конусом полодий, содержащим ось наибольшего момента инерции.

Рассмотрим случай движения 2), соответствующий условию (4.3). При этом решения для угловых скоростей и обеспечивающий их внутренний момент ищутся в виде:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \operatorname{dn}(\lambda t, k), & q(t) &= b \operatorname{sn}(\lambda t, k), \\ r(t) &= r_0 \operatorname{cn}(\lambda t, k), & \sigma(t) &= \sigma_0 \operatorname{cn}(\lambda t, k), \\ M_r &= -C_r \lambda (r_0 + \sigma_0) \operatorname{sn} \lambda t \operatorname{dn} \lambda t. \end{aligned} \quad (4.20)$$

После подстановки выражений (4.20) в динамическую систему (4.1), запиши и решения алгебраической системы, аналогичной (4.12), можно определить следующие величины:

$$\begin{aligned}
b^2 &= \frac{(K_z(0) - Ar_0)K_z(0)}{B(B-A)}, \\
\lambda^2 &= \frac{p_0^2(B-A)(K_z(0) - Ar_0)}{BK_z(0)}, \\
k^2 &= \frac{(K_z(0) - Br_0)K_z(0)}{p_0^2 A(B-A)}.
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

В этом случае условие (4.3) обеспечивает $k^2 < 1$, однако не обеспечивает положительности правых частей (4.21) и, следовательно, действительных значений искомых параметров b, λ, k .

Аи аei æ?i i neo?a? 1) i i i i i eacacou, ?ci i ?e $r_0 > 0$ все искомые параметры ненулевые и действительные и $k^2 < 1$, когда выполняется одно из равносильных неравенств:

$$\alpha < K_z(0) < 0, \quad Br_0 < K_z(0) < \beta,$$

где величины α и β вычислены по формулам (4.18), а при $r_0 < 0$, когда выполняется одно из неравенств:

$$\alpha < K_z(0) < -B|r_0|, \quad 0 < K_z(0) < \beta,$$

где величины α и β вычислены по формулам (4.19).

В случае 3), когда выполняется условие (4.4), имеет место равенство $k = 1$. При этом эллиптические функции из (4.20) сводятся к гиперболическим:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{p_0}{\operatorname{ch} \lambda t}, \quad q = b \operatorname{th} \lambda t, \quad r = \frac{r_0}{\operatorname{ch} \lambda t}, \\
\sigma &= \frac{\sigma_0}{\operatorname{ch} \lambda t}, \quad M_r = -C_r \lambda (r_0 + \sigma_0) \frac{\operatorname{th} \lambda t}{\operatorname{ch} \lambda t}.
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

Подстановка (4.22) в уравнения (4.1) приводит к алгебраической системе, решение которой повторяет выражения (4.21) с той разницей, что $k=1$. Величины b и λ при этом являются действительными, когда выполняется одно из равносильных равенств:

$$K_z(0) = \alpha, \quad K_z(0) = \beta, \tag{4.23}$$

где величины α и β в случае $r_0 > 0$ вычисляются по формулам (4.18), а в случае $r_0 < 0$ – по формулам (4.19). Из решений (4.22) следует, что с течением времени компоненты угловой скорости $p, r \rightarrow 0$, а $q \rightarrow b \operatorname{sgn}(\lambda)$, что означает стремление мгновенной оси вращения к оси среднего момента инерции.

Полученные результаты хорошо иллюстрируются схемой интервалов (рис. 25), где представлен случай, когда $r_0 > 0$.

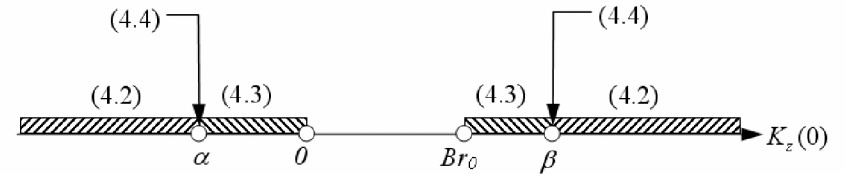


Рис. 25. Схема соответствия условий и интервалов величины $K_z(0)$

Приняв в виде свободной для изменения величину $K_z(0)$ (или величину $\sigma_0 = (K_z(0) - Cr_0)/C_r$) при фиксированных значениях p_0 и r_0 ($q_0=0$), можно разделить области реализации условий (4.2), (4.3) или (4.4). Внутри интервала $(0, Br_0)$ действительные решения отсутствуют. Отметим, что параметр $k=0$ при $K_z(0) \rightarrow \pm\infty$ и в точках $K_z(0) = Br_0, K_z(0) = 0$. При этом в точке $K_z(0) = Br_0$ проекция угловой скорости на связанную ось, соответствующую моменту инерции A , постоянна, причем параметры движения и внутренний момент остаются ограниченными в отличие от остальных указанных точек:

$$\begin{aligned}
b^2 &= r_0^2, \quad \lambda^2 = p_0^2 (B-A)^2 / B^2, \quad \sigma_0 = r_0 (B-C) / C_r, \\
p(t) &= p_0, \quad q(t) = b \sin \lambda t, \quad r(t) = r_0 \cos \lambda t, \quad \sigma(t) = \sigma_0 \cos \lambda t, \\
M_r &= p_0 r_0 (C - B - C_r) (B - A) \sin \lambda t / B.
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Зависимости (4.24), соответствуют равномерному вращению гиростата вокруг оси Ox при действии периодического внутреннего момента.

Перейдем к решению задачи Дарбу [12], т.е. к определению пространственного положения гиростата по известным угловым скоростям. Выберем в качестве неподвижной оси, от которой отчитывается угол нутации, неизменное направление, соответствующее постоянному вектору кинетического момента. Тогда углы Эйлера находятся следующим образом [5]:

$$\cos \theta = \frac{K_z}{K}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}, \quad \psi = \int K \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} dt, \quad (4.25)$$

где $K = \sqrt{A^2 p_0^2 + (Cr_0 + C_r \sigma_0)^2}$ – неизменная величина кинетического момента.

На основании (4.25) запишем решения для углов Эйлера для всех трех зависимостей угловых скоростей (4.10), (4.20) и (4.22); при этом в первых двух случаях угол прецессии вычисляется квадратурой от эллиптических функций, а для выражений (4.22) сводится к элементарным функциям. Зависимости углов Эйлера от времени для соотношений имеют вид:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{K} (Cr_0 + C_r \sigma_0) \operatorname{dn} \lambda t, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap_0 \operatorname{cn} \lambda t}{Bb \operatorname{sn} \lambda t}, \\ \psi &= \int K \frac{Ap_0^2 + (Bb^2 - Ap_0^2) \operatorname{sn}^2 \lambda t}{A^2 p_0^2 + (B^2 b^2 - A^2 p_0^2) \operatorname{sn}^2 \lambda t} dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для соотношений (4.20) имеют место следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{K} (Cr_0 + C_r \sigma_0) \operatorname{cn} \lambda t, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap_0 \operatorname{dn} \lambda t}{Bb \operatorname{sn} \lambda t}, \\ \psi &= \int K \frac{Ap_0^2 \operatorname{dn}^2 \lambda t + Bb^2 \operatorname{sn}^2 \lambda t}{A^2 p_0^2 \operatorname{dn}^2 \lambda t + B^2 b^2 \operatorname{sn}^2 \lambda t} dt. \end{aligned} \quad (4.27)$$

а для соотношений (4.22) аналогично можно записать:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{Cr_0 + C_r \sigma_0}{K \operatorname{ch} \lambda t}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap_0}{Bb \operatorname{sh} \lambda t}, \\ \psi &= \frac{(B-A) Ap_0^2}{\lambda B d} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{B^2 b^2 - A^2 p_0^2}{A^2 p_0^2}} \operatorname{th} \lambda t \right) + \frac{1}{2\lambda B} \ln \left| \frac{\operatorname{th} \lambda t + 1}{\operatorname{th} \lambda t - 1} \right| + \operatorname{const}, \quad (4.28) \\ d &= \sqrt{A^2 p_0^2 (B^2 b^2 - A^2 p_0^2)}. \end{aligned}$$

Решения (4.28) соответствуют асимптотическому приближению движения системы к вращению вокруг оси среднего момента инерции; при этом угол нутации стремится к $\pi/2$, а угол собственного вращения – к π .

Заметим, что в случае динамической симметрии ($A=B$) гиростат совершает равномерные вращения согласно зависимостям, следующим из решений (4.10), причем в этом случае указанный внутренний момент вырождается ($k=0$):

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \cos \lambda t, \quad q(t) = p_0 \sin \lambda t, \quad r(t) = r_0, \quad \sigma(t) = \sigma_0, \\ k &= 0, \quad \lambda = Cr_0 + C_r \sigma_0 - Ar_0, \quad M_r = 0, \end{aligned}$$

что также следует из решений Й. Виттенбурга [6] для динамически симметричной системы.

Полученные результаты могут быть использованы в прикладных задачах механики космического полета, в частности, в задаче изменения характеристик пространственного движения и переориентации спутников-гиростатов [3]. Возможен следующий алгоритм решения задачи. В случае, когда спутник-гиростат находится в уравновешенном режиме, выполняя свою целевую функцию, описание его движения проводится на основе решений Й. Виттенбурга [6]. При необходимости изменения характеристик движения или переориентации гиростат переводится в неуравновешенный режим, когда со стороны тела-носителя на ротор подается один из указанных выше внутренних моментов, которые обеспечивают переход к движению, описываемому одним из решений (4.10), (4.20) либо (4.22). При достижении требуемых характеристик спутник-гиростат переходит в режим уравновешенного движения. Требуемые характеристики пространственного движения могут достигаться посредством серии переходов через различные неуравновешенные режимы, формируемые тремя указанными видами внутренних моментов.

Для примера приведем (рис. 26) результаты численного интегрирования для угла нутации в серии переходов через уравновешенные и неуравновешенные

режимы движения гиростата. Расчет проводился для следующих инерционно-массовых параметров гиростата: $A=5$, $B=6$, $C=9$, $C_p=2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Начальные условия движения, соответствующие точкам перехода, приведены в табл. 6.

Таблица 6

Точка	p_0 , 1/c	q_0 , 1/c	r_0 , 1/c	σ_0 , 1/c	θ_0 , рад	φ_0 , рад	ψ_0 , рад	λ , 1/c	b , 1/c	k
L	3.5	0	1	1	0.989	1.571	0	1.092	3.473	0.984
M	1.307	-3.222	0.408	0.408	1.347	-3.468	36.591	-	-	-
N	-3.435	0	1.218	0.408	0.962	-7.854	62.866	0.983	-3.431	0.975
P	-3.435	0	1.218	0.408	0.962	-7.854	150.606	-	-	-
Q	-3.154	1.394	-1.113	-0.373	2.121	-7.366	174.352	-	-	-

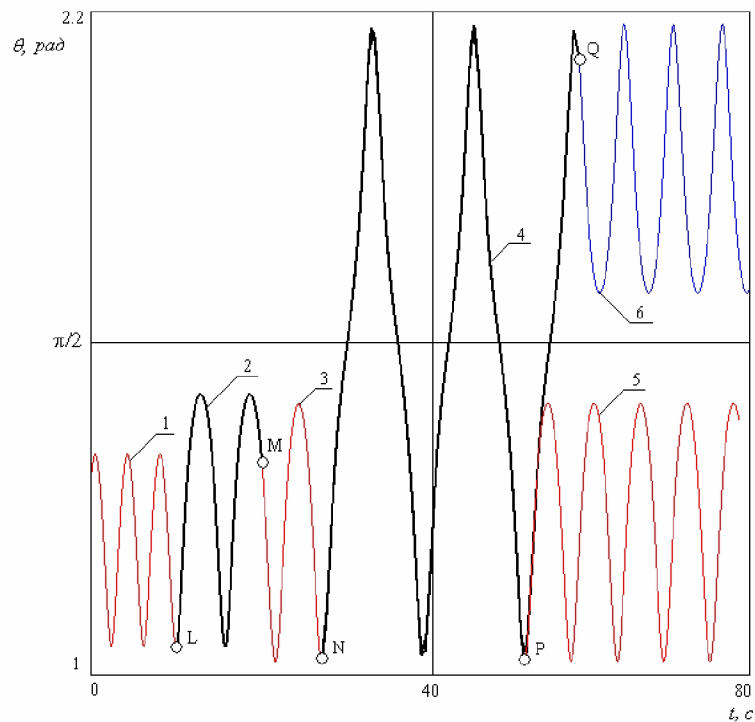


Рис. 26. Серии переходов через уравновешенные и неуравновешенные режимы движения

Режимы 1, 3, 5 и 6 (тонкие линии, рис. 26) представляют собой уравновешенные режимы, на которых справедливы решения Виттенбурга, а режимы 2 и 4 (полужирные линии) являются неуравновешенными, на которых справедливы решения (4.10) и (4.20), соответственно.

Конечные значения каждого предыдущего режима являются начальными значениями для следующего. Точки L-Q являются точками переходов между режимами. В точке L выполняется условие (4.2), т.е. режим 2 соответствует движению с конусом полодий, содержащим ось Oz , а в точке N справедливо условие (4.3), поэтому для режима 4 характерен конус полодий, содержащий ось Ox . Таким образом, посредством перехода 2-3-4 осуществляется изменение положения конуса полодий. Далее, при переходе с режима 4 на уравновешенный режим конус полодий возвращается в положение, при котором снова содержит ось Oz , однако в зависимости от момента времени, соответствующего точке перехода, можно обеспечить либо возвращение к параметрам 3 режима (точка P и режим 5), либо осуществить переориентацию гиростата (точка Q и режим 6). Выход на режим 6 соответствует переориентации продольной оси Oz гиростата в противоположную сторону по отношению к неподвижной оси OZ . Указанный пример показывает возможность использования полученных результатов для решения задач переориентации КА и изменения характеристик его пространственного движения за счет моментов внутреннего взаимодействия тел.

Приведем также графики изменения остальных параметров движения (рис. 27-32) в серии переходов через уравновешенные и неуравновешенные режимы 1-5 движения гиростата (начальные данные см. в табл. 6). Из рис.27 и 29 видно, что мгновенная ось вращения на режимах 1-3, 5 вращается вокруг оси наибольшего момента инерции (Oz), а на режиме 4 – вокруг оси наименьшего момента инерции (Ox), что соответствует переходам с одного вида полодий на другой.

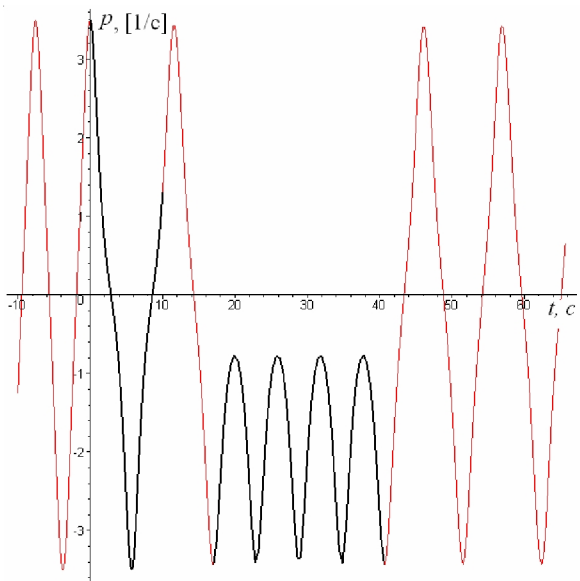


Рис. 27. Зависимость $p(t)$

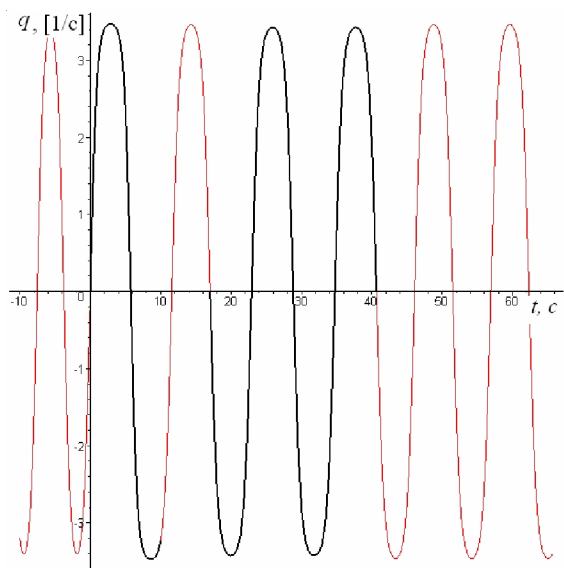


Рис. 28. Зависимость $q(t)$

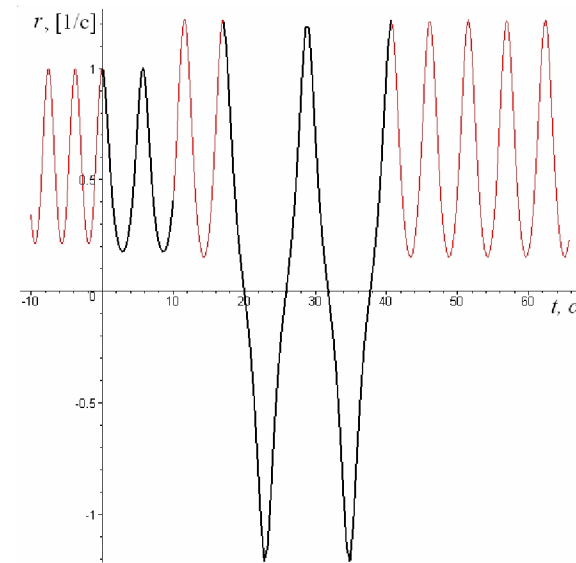


Рис. 29. Продольная угловая скорость тела-носителя $r(t)$

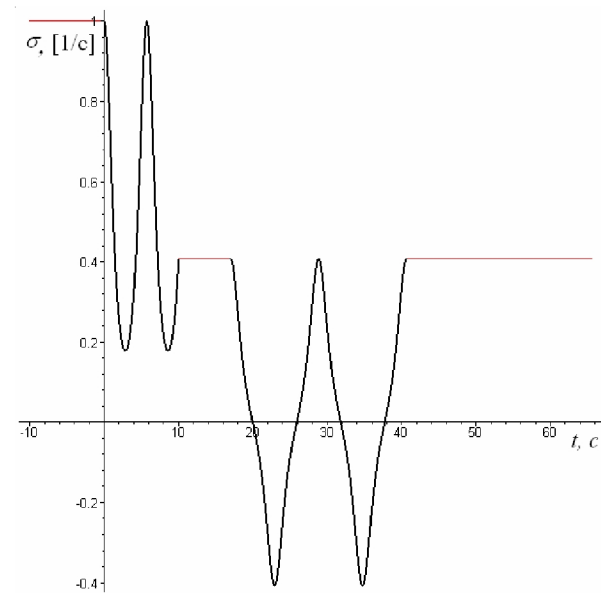


Рис. 30. Зависимость от времени относительной угловой скорости ротора $s(t)$, характеризующая состояние уравновешенности-неуравновешенности

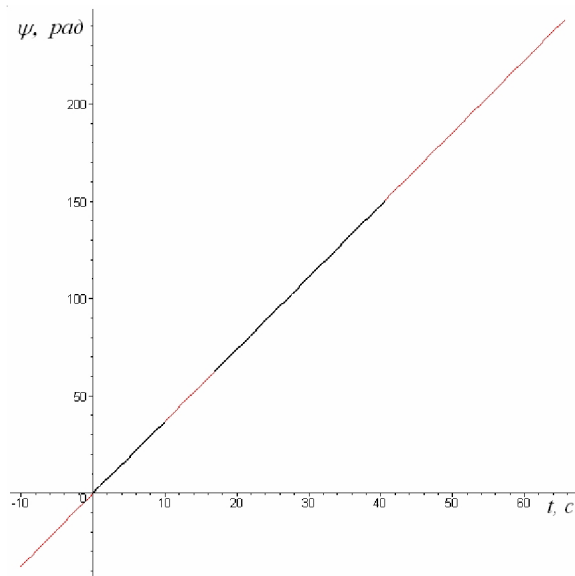


Рис.31. Угол прецессии

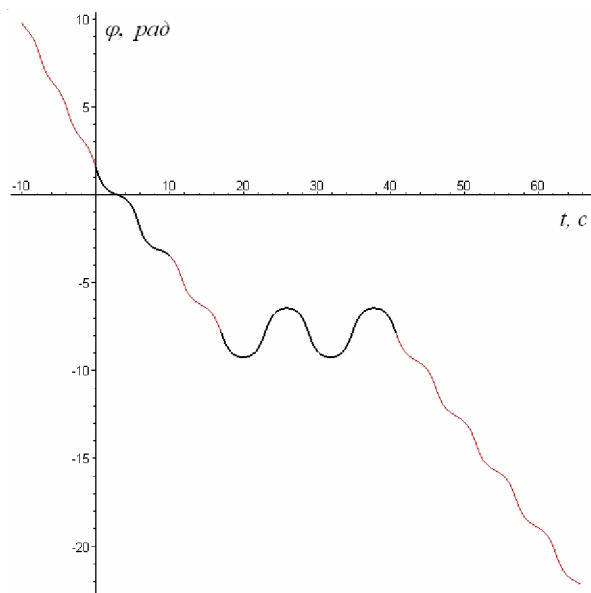


Рис. 32. Угол собственного вращения

5. ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

В настоящем параграфе рассматривается движение тяжелой динамически симметричной системы соосных тел вокруг неподвижной точки в плоском поле тяготения. Считается, что между телами действует произвольный внутренний момент сил.

Указанная постановка задачи обобщает классический случай Лагранжа движения тяжелого твердого тела [1, 2, 5, 8].

Выбирая вид внутреннего момента, можно обеспечивать реализацию различных видов движения по углу собственного вращения, в том числе режим «лунного» движения, когда тело-носитель обращено к вертикальной оси только одной своей стороной.

5.1. Получение решений в квадратурах

Рассмотрим движение тяжелой динамически симметричной системы соосных тел вокруг неподвижной точки [3].

Будем использовать следующие системы координат (рис. 33): $Ox'yz$ – подвижная система, жестко связанная с телом-носителем, с началом в неподвижной точке O ; $OXYZ$ – неподвижная в абсолютном пространстве система координат; ось OZ направлена в сторону, противоположную силе тяжести.

Момент силы тяжести в проекциях на подвижные оси равен

$$\mathbf{M} = (Pa\gamma_2, -Pa\gamma_1, 0), \quad (5.1)$$

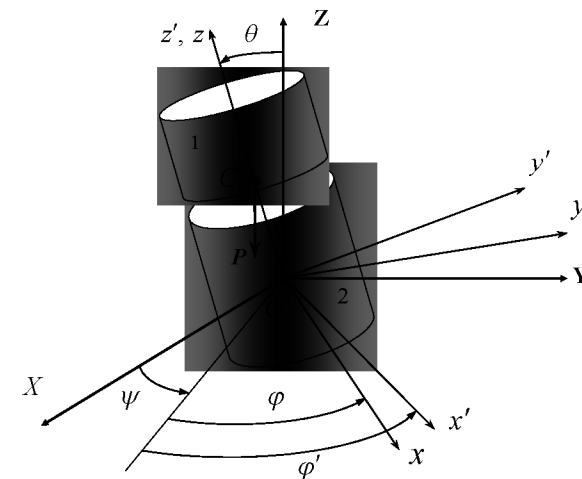


Рис. 33. Тяжелая система соосных тел (тяжелый гироскоп)

где P – вес гири, a – расстояние от центра тяжести C гири до неподвижной точки O , γ_i – направляющие косинусы единичного вектора вертикальной неподвижной оси OZ в подвижной системе $Oxyz$ ($i=1,2,3$). Ось вращения ротора совпадает с осью динамической симметрии Oz гири, и точка O принадлежит этой оси.

Динамические уравнения движения тяжелого симметричного гири в осях системы координат $Oxyz$, согласно (1.4), (1.6), запишутся в виде:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr + C_r q\sigma &= Pa\gamma_2 \\ A\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma &= -Pa\gamma_1 \\ C\dot{r} + C_r\dot{\sigma} &= 0, \quad C_r(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $A = A_1 + A_2$, $B = A_1 + B_2$, $C = C_n + C_r$, $C_n = C_2$, $C_r = C_1$.

Кинематические уравнения включают в себя уравнений Пуассона [5] и уравнение для угла вращения ротора относительно несущего тела:

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad \dot{\delta} = \sigma. \quad (5.3)$$

Запишем три первых интеграла [5] системы уравнений (5.2) и (5.3):

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (5.4)$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + C_r\sigma)\gamma_3 = K_z, \quad (5.5)$$

$$Cr + C_r\sigma = K_z. \quad (5.6)$$

Интегралы (5.5) и (5.6) определяют сохранение проекций кинетического момента на неподвижную вертикаль OZ и на ось динамической симметрии гири Oz .

Для поиска четвертого интеграла воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии [5]:

$$\frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2] - T_0 = -Pa\gamma_3 + \int_0^\delta M_r d\delta, \quad (5.7)$$

где T_0 – начальная величина кинетической энергии. Представим последние два уравнения системы (5.2) в виде:

$$C_n \dot{r} = -M_r, \quad C_r (\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r. \quad (5.8)$$

Умножая первое уравнение на r , а второе – на $(r + \sigma)$:

$$\frac{1}{2} C_n dr^2 = -M_r r dt, \quad \frac{1}{2} C_r d(r + \sigma)^2 = M_r (r + \sigma) dt$$

и складывая два последних соотношения, получим работу внутреннего момента:

$$\int_0^\delta M_r d\delta = \frac{1}{2} [C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2] + const \quad (d\delta = \sigma dt).$$

Сопоставляя эту формулу и выражение (5.7), запишем четвертый интеграл в виде

$$\frac{A}{2} (p^2 + q^2) + Pa\gamma_3 = const. \quad (5.9)$$

Первые интегралы (2.4)-(2.6) и (2.9) совпадают с аналогичными первыми интегралами движения тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [5, 8]. Очевидно, что динамически симметричный тяжелый уравновешенный гирь стат совершает движение, подобное движению тяжелого осесимметричного твердого тела.

Найдем общие решения уравнений движения тяжелого неуравновешенно динамически симметричного гири. Перейдем от направляющих косинусов к углам Эйлера [5, 3], записанным для тела-носителя:

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta,$$

и заменим уравнения Пуассона (2.3) на кинематические уравнения Эйлера:

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \quad (5.10)$$

Далее воспользуемся аналогией с задачей о движении тяжелого твердого тела [1, 5]. С помощью уравнений (5.10) интегралы (5.5) и (5.9) приведем к виду:

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta + R \cos \theta = G, \quad \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + 2g \cos \theta = H, \quad (5.11)$$

где $g = Pa/A$, $R = K_z/A$, $G = K_z/A$.

После замены переменных $u = \cos \theta$ вторая формула из (5.11) превращается в кубический многочлен относительно u , имеющий три вещественных корня u_1, u_2 , и u' ($-1 < u_1 \leq u_0 \leq u_2 < 1 < u' < \infty$, $u_0 = \cos \theta_0$):

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u) = (H - 2gu)(1 - u^2) - (G - Ru)^2 = 2g(u - u_1)(u - u_2)(u - u'). \quad (5.12)$$

Очевидно, что переменная u должна изменяться в пределах: $u_1 \leq u \leq u_2$.

Введем новую переменную ξ :

$$u = u_1 \cos^2 \xi + u_2 \sin^2 \xi, \quad (5.13)$$

$$\frac{du}{dt} = 2 \frac{d\xi}{dt} [u_2 - u_1] \cos \xi \sin \xi. \quad (5.14)$$

На основании (5.12) можно записать:

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm \beta \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \xi)} \quad \left(\beta = \sqrt{g(u' - u_1)/2}, \quad k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u' - u_1}, \quad 0 \leq k^2 < 1 \right). \quad (5.15)$$

Интегрирование (5.15) дает следующий результат:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \pm \int_0^t \beta dt, \quad (5.16)$$

где ξ_0 находится из уравнения: $\cos \theta_0 = u_1 \cos^2 \xi_0 + u_2 \sin^2 \xi_0$, а знак перед интегралом в правой части определяется начальными условиями движения. Например, если выбрать из множества корней $\{\xi_0\}$ значение, соответствующее острому положительному углу, то, как видно из (5.14), знак производной

$\left. \frac{d\xi}{dt} \right|_{t=0}$ должен совпадать со знаком производной $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}$, который в свою очередь определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} \right) = \operatorname{sgn}(-\dot{\theta}_0 \sin \theta_0) = \operatorname{sgn}(-(p_0 \cos \varphi_0 - q_0 \sin \varphi_0) \sin \theta_0).$$

Тогда, если величина $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}$ оказалась положительной, то перед величиной

β в дифференциальном выражении (5.15) и далее при интегрировании следует оставить знак «плюс» и наоборот.

С помощью амплитуды Якоби выражение (5.16) можно переписать в виде:

$$\xi = \operatorname{am}(\beta t + \alpha, k), \quad \alpha = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \operatorname{const},$$

тогда общее решение для угла нутации примет вид:

$$\cos \theta = (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1. \quad (5.17)$$

Квадратура для угла прецессии следует из первого соотношения (5.11) и решения (5.17) и приводится к комбинации неполных эллиптических интегралов третьего рода [2, 3]. Проведем интегрирование

$$\psi - \psi_0 = \int_0^t \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} dt = GI_1 - RI_2, \quad (5.18)$$

где

$$I_1 = \int_0^t \frac{dt}{\sin^2 \theta}, \quad I_2 = \int_0^t \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} dt.$$

Вычислим последние интегралы.

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \frac{dt}{1 + \cos \theta} + \int_0^t \frac{dt}{1 - \cos \theta} \right] = \frac{1}{2\beta} \left[\int_0^z \frac{dz}{1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 z + u_1} + \int_0^z \frac{dz}{1 - (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 z - u_1} \right] = \frac{1}{2\beta(u_2 - u_1)} \left[n_1 \int_0^z \frac{dz}{1 + n_1 \operatorname{sn}^2 z} - n_2 \int_0^z \frac{dz}{1 + n_2 \operatorname{sn}^2 z} \right],$$

где $z = \beta t + \alpha$, $n_1 = \frac{u_2 - u_1}{1 + u_1}$, $n_2 = -\frac{u_2 - u_1}{1 - u_1}$.

Решение (3.20) можно рассматривать как выражение для определения новой переменной, соответствующей амплитуде Якоби:

$$\xi = \operatorname{am}(z, n), \quad dz = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \xi}}.$$

Последняя замена переменных приводит интеграл I_1 к неполным эллиптическим интегралам третьего рода:

где $\bar{\Pi}(\xi, n, k) = \int_0^\xi \frac{d\xi}{(1+n \sin^2 \xi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}$ – неполный эллиптический интеграл

третьего рода.

Аналогично вычисляется интеграл:

$$I_2 = \int_0^t \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} dt = \frac{1}{\beta} \int_0^z \frac{(u_2 - u_1) sn^2 z + u_1}{1 - [(u_2 - u_1) sn^2 z + u_1]^2} dz = \frac{1}{2\beta(u_2 - u_1)} \left[\int_0^z \frac{dz}{1 - (u_2 - u_1) sn^2 z - u_1} - \int_0^z \frac{dz}{1 + (u_2 - u_1) sn^2 z + u_1} \right] = \frac{-1}{2\beta(u_2 - u_1)} [n_2 \Pi(\xi, n_2, k) + n_1 \Pi(\xi, n_1, k)].$$

Из кинематических уравнений Эйлера после взятия аналогичных квадратур следует зависимость для угла собственного вращения [3]:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int_0^t (r(t) - \dot{\psi} \cos \theta) dt = \int_0^t \left(r(t) - \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta \right) dt = \\ &= \int_0^t r(t) dt - GI_2 + R(I_1 - t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Таким образом, найдены аналитические зависимости в квадратурах для всех углов Эйлера в задаче о движении тяжелого неуровновешенного гиростата.

5.2. Зависимость собственного вращения от внутреннего момента

Из решения для угла собственного вращения тела-носителя (5.19) следует, что собственное вращение тела-носителя существенно зависит от продольной компоненты угловой скорости $r(t)$, которая определяется моментом внутреннего взаимодействия соосных тел $M_r(t)$.

Пусть, например, между телом-носителем и ротором действует постоянный момент: $M_r = M = const$. Из двух последних уравнений системы (5.2) следуют зависимости для угловых скоростей r , s и угла относительного вращения d :

$$r(t) = r_0 - Mt/C_n, \quad \sigma(t) = \frac{MC}{C_n C_r} t + \sigma_0, \quad \delta(t) = \frac{MC}{2C_n C_r} t^2 + \sigma_0 t + \delta_0.$$

Тогда при действии постоянного внутреннего момента решение (5.19) запишется в виде [3]:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \frac{1}{2\beta(u_2 - u_1)} [n_1 \Pi(\xi, n_1, k)(G + R) + \\ &+ n_2 \Pi(\xi, n_2, k)(G - R)] + (r_0 - R)t - \frac{Mt^2}{2C_n}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Аналогичным образом можно найти решения при действии иных внутренних моментов.

Выбор вида внутреннего момента позволяет реализовывать заданные случаи движения гиростата, например, «лунное» движение [3], при котором несущее тело всегда обращено одной стороной к неподвижной вертикальной оси OZ . Найдем вид внутреннего момента, обеспечивающего «лунное» движение, при котором $\dot{\varphi} = r - \dot{\psi} \cos \theta = 0$. Тогда на основании первого уравнения (5.8) указанный момент определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} M_r &= -C_n \dot{r} = -C_n \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \theta) = -C_n \frac{d}{dt} \left(\frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta \right) = \\ &= -\frac{2R \cos \theta - G \cos^2 \theta - G}{\sin^3 \theta} \dot{\theta} C_n. \end{aligned}$$

С учетом решения (5.17) получим [3]:

$$M_r = \frac{2((u_1 - u_2) \operatorname{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1)^2 (2R - G((u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1))}{(1 - ((u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1))^2} \times (u_2 - u_1) \beta \operatorname{cn}(\beta t + \alpha, k) \operatorname{dn}(\beta t + \alpha, k) \quad (5.21)$$

Как следует из решения (5.19), при таком внутреннем моменте угол собственного вращения будет линейной функцией времени:

$$\varphi(t) = (r_0 - s)t + \varphi_0 \left(s = \frac{G \cos \theta_0 - R \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \right). \quad (5.22)$$

Режим «лунного» движения реализуется при постоянстве угла собственного вращения ($\varphi = \text{const}$). Это возможно, как следует из (5.22), при $r_0 - s = 0$, что равносильно следующему условию, накладываемому на начальные параметры движения:

$$\theta_0 = \arctg \frac{p_0 \sin \varphi_0 + q_0 \cos \varphi_0}{r_0}. \quad (5.23)$$

Таким образом, «лунное» движение реализуется при действии внутреннего момента вида (5.21) и начальных параметрах, обеспечивающих условие (5.23). В практических задачах механики космического полета режим «лунного» движения может оказаться полезным в одних случаях и опасным в других. Применительно к задаче неуправляемого спуска КА в атмосфере [1], когда реализуется движение под действием восстанавливающего аэродинамического момента, аналогичное движению в случае Лагранжа, «лунный» режим является опасным. Это связано с тем, что КА всегда обращен к набегающему потоку одной стороной, что приводит к неравномерному обгару его теплозащитного покрытия, а следовательно, к развитию несимметричности КА, возникновению резонансных режимов движения либо к разрушению. Примером полезного использования лунного режима является движение заряженного (магнитного) спутника-гиростата в однородном магнитном поле, когда возникающая равномерная прецессия (так называемая прецессия Лармора [7]) позволяет сохранять одностороннюю направленность рабочих элементов спутника (антенн, панелей солнечных батарей и пр.).

При отсутствии момента внутреннего взаимодействия имеет место урав-

новешенный гиростат ($\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$), и его движение будет аналогично движению твердого тела в случае Лагранжа с эквивалентными инерционно-массовыми параметрами и угловыми скоростями.

Приведем сравнительные результаты (рис. 34), полученные численным интегрированием уравнений (5.2), (5.3) (показаны точками) и по аналитическим формулам (5.17), (5.18) и (5.20) (показаны сплошными линиями).

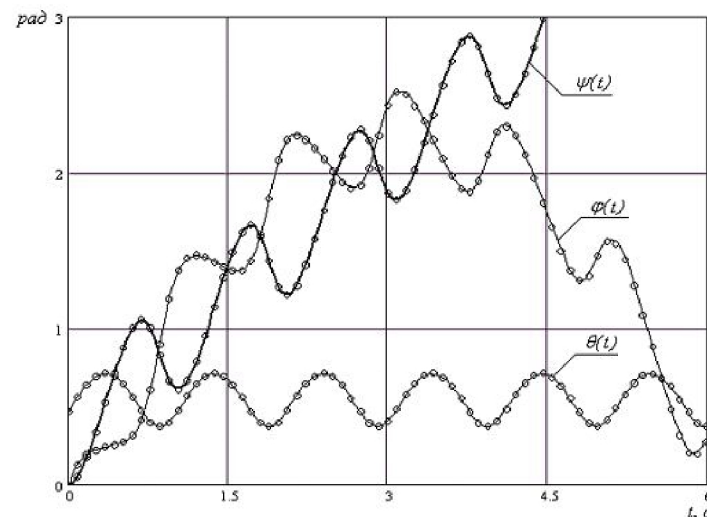


Рис. 34. Сравнительные результаты расчетов зависимостей углов Эйлера от времени

Расчеты проводились при следующих инерционно-массовых и начальных параметрах движения: $A=5$, $C_n=1,5$, $C_r=2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $P=100 \text{ Н}$; $l=0,2 \text{ м}$; $M=\text{const}=1 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $p_0=1$, $q_0=0$, $r_0=2$, $\sigma_0=6\pi \text{ рад/с}$; $\theta_0=0,47$, $\varphi_0 = \psi_0 = \delta_0 = 0 \text{ рад}$.

Очевидно, что движение с другими законами изменения угла собственного вращения можно реализовать выбором соответствующего внутреннего момента.

♦ *Задание №10.* Построить численно график зависимости внутреннего момента (5.21) от времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящем пособии вопросы динамики систем соосных твердых тел и неуравновешенных гироскопов иллюстрируют собой лишь некоторые стороны фундаментальной проблемы исследования динамики движения систем твердых тел. К прикладным аспектам указанной проблемы можно уверенно отнести моделирование и анализ движения ракетно-космических систем.

Современные тенденции развития ракетно-космической техники предполагают использование технических устройств, сочетающих в себе многостепенные исполняющие механизмы, двигательные установки и управляющие элементы. При моделировании движения подобных технических объектов они могут быть представлены с разной степенью детализации разнообразными системами твердых тел. Как было указано выше в материале пособия, одной из весьма распространенных в космической технике конструктивных схем является система соосных тел, образованная двумя твердыми телами, вращающимися относительно общей оси. Эта система находит применение в спутниках-гироскопах и космических аппаратах с двойным вращением, использующих гироскопический принцип стабилизации своего положения. Такие космические аппараты представляют собой один из важных и весьма распространенных типов аппаратов, которые используются для выполнения разнообразных задач в рамках разноплановых космических программ, в том числе для решения задач дистанционного зондирования земной поверхности и геоинформатики.

Материал пособия основывается на научных результатах, полученных авторами. Помимо традиционных учебно-методических и дидактических целей настоящее пособие также направлено на возможную иллюстрацию процесса проведения научного поиска, получения новых научных результатов и формирование у студентов основ культуры креативного мышления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Архангельский, Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела / *Ю.А. Архангельский* – М.: Наука, 1977.
2. *Асланов, В.С.* Пространственное движение тела при спуске в атмосфере / *В.С. Асланов*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. *Асланов, В.С.* О двух случаях движения неуравновешенного гироскопа / *В.С. Асланов, А.В. Дорошин* // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – №4. – С. 42-55.
4. *Асланов, В.С.* Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере / *В.С. Асланов, А.В. Дорошин* // Космические исследования. – 2002. – Т. 40. – № 2. – С. 193-200.
5. *Бухгольц, Н.Н.* Основы курса теоретической механики / *Н.Н. Бухгольц*. – М.: Наука, 1972. – Ч. II.
6. *Виттенбург, Й.* Динамика систем твердых тел / *Й. Виттенбург*. – М.: Мир, 1980.
7. *Голдстейн, Г.* Классическая механика / *Г. Голдстейн*. – М.: Наука, 1975.
8. *Голубев, В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / *В.В. Голубев*. – М.: Гостехиздат, 1944.
9. *Дорошин, А.В.* Стабилизация спускаемого аппарата с двойным вращением при наличии малой динамической асимметрии / *А.В. Дорошин* // Ракетно-космическая техника. Научно-технический сборник. Серия XII. Вып. 1. «Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем». – Самара: ВКБ РКК «Энергия», 2001. – С. 133-150.
10. *Жуковский, Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / *Н.Е. Жуковский* // Соч. Т. II. Вып. 1. М.: Л.: Госуд. научно-техн. издательство, 1931.
11. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / *Г. Корн, Т. Корн*. – М.: Наука, 1984.
12. *Кошляков, В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов / *В.Н. Кошляков*. – М.: Наука, 1985.
13. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников: сб. ст./под ред. *В.В. Белецкого*. – М.: Мир, 1975.
14. *Моисеев, Н.Н.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / *Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев*. – М.: Наука, 1965.
15. *Нейштадт, А.И.* Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением / *А.И. Нейштадт, М.Л. Пивоваров* // Прикладная математика и механика. – 2000. – Т.64. – Вып. 5.

16. Румянцев, В.В. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости / В.В. Румянцев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – №4.

17. Румянцев, В.В. Об устойчивости движений гиростатов / В.В. Румянцев // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. XXV. – Вып. 1.

18. Стрыгин, В.В. Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев // Космические исследования. – 1976. – Т. 14. – №3.

19. Стрыгин, В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. – М.: Наука, 1988.

ГЛОССАРИЙ

1. *Динамика* – раздел теоретической механики, посвященный изучению движения материальных тел под действием сил.

2. *Твердое тело* – механическая система материальных точек, расстояния между которыми неизменны.

3. *Соосные тела* – система твердых тел, которые могут вращаться вокруг общей оси относительно друг друга (тела «нанизаны» на общую ось вращения). Движение общей оси в пространстве не ограничивается.

4. *Полодия* – мысленная траектория апекса мгновенной угловой скорости тела на собственном эллипсоиде инерции. Апекс «прожигает» след в поверхности эллипсоида инерции.

5. *Стационарный режим вращения* – вращательное движение твердого тела с постоянными компонентами угловой скорости в проекциях на связанные с телом оси системы координат.

6. *Свободное движение* – движение при отсутствии внешних сил.

7. *Динамически симметричное тело* – твердое тело с главным диагональным тензором инерции и двумя равными друг другу диагональными элементами (главными моментами инерции).

8. *Гиростат* – система твердых тел, образованная из соосных тел: тела-носителя и тел-роторов, причем распределение масс системы не изменяется со временем при движении роторов. Обычно под гиростатом понимают систему двух соосных тел с телом-носителем, обладающим трехосным тензором инерции (не обязательно главным), и динамически симметричным телом-ротатором.

9. *Уравновешенность/неуравновешенность* гиростата означает постоянство/непостоянство относительной угловой скорости тела-ротатора по отношению к телу-носителю.

10. *Решение в квадратурах* – решение дифференциальных уравнений, приведенное к окончательному взятому интегралу (квадратуре).

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

Учебное издание

**Асланов Владимир Степанович,
Дорошин Антон Владимирович**

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Учебное пособие

Редактор Т.И. Кузнецова
Компьютерная верстка И.И. Спиридонова

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 4,9.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-10/2008.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

В.С. Асланов, А.В. Дорошин

**ДИНАМИКА СИСТЕМЫ
СООСНЫХ ТЕЛ**

Самара
Издательство СГАУ
2008