МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

А.В. ДЮЖЕВА, Ю.О. ЯКОВЛЕВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 38.03.05. Бизнес-информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2017

УДК 517.9(075)+330.4(075)
ББК 22.161я7+65в6я7
Д954

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Е.А. Б а р о в а ;
канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. А н д р е е в

Дюжева, Александра Владимировна
Д954 **Дифференциальные уравнения в задачах оптимального управления, вариационного исчисления и экономико-математического моделирования**: учеб. пособие / *А.В. Дюжева, Ю.О. Яковлева.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 96 с.

ISBN 978-5-7883-1198-2

Учебное пособие по дифференциальным уравнениям в задачах оптимального управления, вариационного исчисления и экономико-математического моделирования рассчитано на студентов, обучающихся по программе бакалавриата направления 38.03.05 Бизнес-информатика очной формы обучения. Оно призвано помочь студентам лучше усвоить содержание учебного плана по курсу «Теория оптимального управления», разобраться в методах построения и исследования математических моделей в теории управления и в исследовании операций. Данное учебное пособие соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по указанному направлению.

УДК 517.9(075)+330.4(075)
ББК 22.161я7+65в6я7

ISBN 978-5-7883-1198-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Теория оптимального управления» предполагает изучение студентами методологических основ, задач, моделей и методов теории оптимального управления; приобретение студентами знаний и навыков, необходимых для самостоятельной работы в области построения и исследования математических моделей в теории управления и исследовании операций.

Понятия и усвоенные закономерности, приобретенные навыки и умения, способности, сформированные в курсе «Теория оптимального управления», необходимы в последующих курсах экономических и управленческих дисциплин, а также для изучения математических методов в экономике.

Первые три главы носят справочный характер. Это обусловлено тем, что необходимые для последующего изучения теории оптимального управления разделы математики преподаются студентам в основном на 1—2-м курсах, а конкретные задачи оптимального управления решаются не раньше, чем на третьем курсе.

В последующих главах приведены основные понятия, теоремы вариационного исчисления и теории оптимального управления; рассмотрены основные методы решения задач оптимального управления.

В последней главе приведено достаточное количество заданий для самостоятельного изучения с разобранными примерами.

В списке литературы присутствует ряд относительно давних источников, однако это классическая литература, в ней заложены основы теории оптимального управления.

1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Объектами применения ТОУ являются управляемые системы, описываемые дифференциальными и конечно-разностными уравнениями соответственно для непрерывных или дискретных (многошаговых) процессов. Понятия и определения: система, модель, обратная связь, внешняя среда, замкнутая и разомкнутая системы, существенные или несущественные факторы, обусловленные целевой ориентацией при изучении объекта исследования, – это понятийный аппарат основ управления, в частности ТОУ.

Принимая во внимание, что учебное пособие кроме специальности «Математические методы в экономике» может использоваться при подготовке специалистов по менеджменту, прикладной информатике и другим дисциплинам, где курс математического моделирования экономики специально не читается, данная глава может рассматриваться как вводная, отражающая содержательную сущность и формализованное представление понятий и принципов формирования структур систем управления.

Наблюдение, анализ и моделирование являются средствами познания и прогнозирования процессов, явлений и ситуаций во всех сферах объективной действительности.

Говоря, например, о системах застройки города или района, кровообращения, управления предприятием, о системе уравнений, прежде всего имеют в виду некую совокупность. Но любая ли совокупность можете быть названа системой? Первое свойство систематизации, системного представления о рассматриваемом объекте – это наличие цели, для реализации которой предназначается данная совокупность предметов, явлений, логических представлений, формирующих объект. Цель функционирования системы редуцирует системные признаки, с помощью которых описываются и характеризуются элементы системы.

Для выделения системы требуется наличие:

а) цели, для реализации которой формируется система;

б) объекта исследования, состоящего из множества элементов, связанных в единое целое важными относительно цели системными признаками;

в) субъекта исследования («наблюдателя»), формирующего систему;

г) характеристик внешней среды по отношению к системе.

Наличие субъекта исследования и возможная неоднозначность, субъективность при выделении существенных системных признаков вызывают значительные трудности в процессе выделения системы и соответственно ее универсального определения. Поэтому необходим более подробный системный анализ.

Изложенный выше вербальный подход дает возможность определить систему как упорядоченное представление об объекте исследования относительно поставленной цели. Упорядоченность заключается в целенаправленном выделении системообразующих элементов, установлении их существенных признаков, характеристик взаимосвязей между собой и с внешней средой. Системный подход, формирование систем позволяют выделить главное, наиболее существенное в исследуемых объектах и явлениях; игнорирование второстепенного упрощает, упорядочивает в целом изучаемые процессы. Для анализа многих сложных ситуаций такой подход важен сам по себе, однако, как правило, построение системы служит предпосылкой для разработки или реализации модели конкретной ситуации.

Описанный подход предполагает ясность цели исследования и детерминированное к ней отношение всех элементов системы, взаимосвязь между ними и с внешней средой. Такие системы называют детерминированными. Это не означает, что все предпосылки, лежащие в основе их построения, на практике выполняются. Однако во многих случаях, и это характерно для экономики, цель исследования – изучение и анализ природы усредненных и устойчивых в среднем показателей. Это определяет детерминированный подход к построению системы.

Перейдем к рассмотрению сущности понятий модель и моделирование.

Модель – формализованное представление об объекте исследования относительно поставленной цели.

Модели можно различать по характеру моделируемых объектов, сферам приложения, глубине моделирования. В зависимости от средств моделирования выделяют материальное (предметное) и идеальное моделирование.

Материальное моделирование, основывающееся на материальной аналогии моделируемого объекта и модели, осуществляется путем воспроизведения основных геометрических, физических, других функциональных характеристик изучаемого объекта. Частным случаем материального моделирования является физическое моделирование, по отношению к которому, в свою очередь, частным случаем является аналоговое моделирование. Оно основано на аналогии явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. Пример аналогового моделирования – изучение механических колебаний с помощью электрической системы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями.

Идеальное моделирование отличается от материального принципиально. Оно основано на идеальной, или мыслимой, аналогии. В экономических исследованиях это основной вид моделирования. Идеальное моделирование, в свою очередь, разбивается на два подкласса: знаковое (формализованное) и интуитивное моделирование. При знаковом моделировании моделями служат схемы, графики, чертежи, формулы. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, осуществляемое средствами логико-математических построений.

Интуитивное моделирование (например, рисковых ситуаций) встречается в тех областях науки, где познавательный процесс находится на начальной стадии или имеют место очень сложные взаимосвязи. Такие исследования называют мысленными экспериментами. В экономике в основном применяется интуитивное моделирование; оно описывает практический опыт исполнителей и руководящих работников.

Введенные понятия не дают возможности разделить системы на управляемые и неуправляемые. В широком смысле под управлением понимается конкретная организация тех или иных процессов для достижения намеченных целей. Управляемая система призвана обеспечивать целенаправленное функционирование при изменяющихся внутренних или/и внешних условиях. Неуправляемой системе целенаправленное функционирование не свойственно.

Примеры управляемых систем: движение автомобиля, работа предприятия в соответствии с договорами, планами и стимулами. Примеры неуправляемых систем: движение ветра, работа светофора с точки зрения автомобилистов (переключается автоматически независимо от состояния потока машин). В системе, структура которой установлена ее целевой ориентацией (для решения каких задач создается система), управление сводится к поддержанию расчетных значений выходных параметров при отклонениях внешних условий и внутренних параметров от расчетных.

В экономической системе выбор и формирование как структуры, так и способа функционирования являются задачами управления, обеспечивающими динамику ее развития. Однако соотношение типов задач – формирование или реструктуризация производства и способа функционирования системы – различно на разных уровнях иерархии управления.

Любое управление предполагает наличие объекта управления (управляемой системы), субъекта управления (управляющей системы) и внешней среды.

Объект управления производит те или иные действия для реализации намеченных целей. Его сложность зависит от количества входящих в него элементов и природы взаимосвязей между ними. В процессе функционирования объект управления подвергается воздействию внешней среды, которая может способствовать или препятствовать достижению намеченных целей: благоприятная или неблагоприятная рыночная конъюнктура, сложившиеся цены, действия конкурентов и т.п.

Основное назначение управляющей системы – субъекта управления – поддерживать установленный и по каким-либо свойствам признанный нормальным режим работы объекта управления, а также обеспечивать нормальное функционирование отдельных элементов объекта управления в условиях воздействия внешней среды.

Объект управления во взаимодействии с управляющей системой – субъектом управления – образует замкнутую систему управления. Пусть T – вектор воздействия внешней среды на объект управления; X – вектор реакции на воздействие T. Связь, с помощью которой управляющая система – субъект управления – воздействует на объект управления, если эта связь имеется, называется обратной связью. Входным сигналом для обратной связи служит выходной сигнал системы X. Если этот сигнал не соответствует целям управления замкнутой системой, то управляющая система вырабатывает воздействие обратной связи ΔT, которое вместе сигналом T поступает на вход объекта управления ($T, X, \Delta T$ – векторы соответствующих размерностей).

В правильно работающей с точки зрения поставленной цели системе сигнал $T + \Delta T$ должен способствовать улучшению качества функционирования замкнутой системы управления.

Количественные оценки степени достижения цели в модели управления даются в виде значений функционала (целевой функции), а условия, в рамках которых функционирует система, – в виде ограничений модели. Цель оптимального управления – нахождение наилучшего относительно принятой целевой функции критерия оптимизации. Для конкретных ситуаций при выборе способа управления, хозяйствования или ведения деятельности он реализуется в виде экстремального значения функционала.

Обратная связь является средством гибкого управления, когда конкретное управляющее решение вырабатывается в зависимости от сложившейся ситуации.

При отсутствии обратной связи (упомянутый выше светофор) движение регулируется по заранее заданной программе независимо от фактических потоков автомобилей, т.е. состояния системы на выходе.

Итак, в структуре системы управления можно выделить:

- объект управления – непосредственное устройство, агрегат, организационную подсистему общей системы, в которой реализуется цель функционирования всей системы;
- субъект управления – управляющую систему, которая фиксирует параметры объекта управления и вырабатывает при необходимости управляющие воздействия на объект управления для приведения его функционирования к режиму, который в соответствии с целью управления принято считать нормальным. Если достижение такого режима в условиях имеющихся ресурсов системы невозможно, то в качестве нормального может быть принят режим, отклоняющийся от желаемого минимально;
- обратную связь – объект, подсистему, с помощью которой реализуется воздействие субъекта на объект управления.

Эти элементы, формирующие в совокупности замкнутую систему управления, находятся под воздействием внешней среды, которая может способствовать или препятствовать достижению целей системы.

Изложенное выше относится к характеристике систем управления практически любой природы – экономической, физической, производственно-технологической. Теоретические методы оптимального управления, которые будем изучать в следующих разделах, также не слишком связаны с природой системы или со спецификой объекта управления, скорее они ориентированы на определенную форму модели. С учетом этого рассмотрим наиболее существенные характеристики экономических систем как объектов управления.

Экономическая система охватывает параметры и характеристики производства, распределения, обмена и потребления материальных благ. Функционирование экономических систем, за исключением, может быть, простейших случаев, по своей сущности многокритериально. Это означает, что в процессе функционирования предприятия одновременно ставятся цели добиться максимально возможных прибыли и выпуска продукции в натуральном или стоимостном выражении, выдержать необходимые потребителю ее номенклатуру или ассортимент, уровень качества, снизить удельную себестоимость и т.д. Некоторые из этих показателей могут быть противоречивыми, например первый и последний. Стремление к максимальному валовому выпуску продукции (в стоимостном или натуральном выражении) одновременно ведет и к валовому росту себестоимости. Иначе быть не может, так как производство каждого дополнительного изделия сопряжено с дополнительными затратами, т.е. чем больше выпускается продукции, тем больше становится и суммарная себестоимость производства. Ограничение такой себестоимости – противоположное требование к росту выпуска продукции. Минимизировать себестоимость производства имеет смысл только тогда, когда точно установлен необходимый для реализации (например, по договорам) объем производства. Подобные противоречия могут иметь место и в отношении других частных критериальных показателей. В целом можно представить себе одну из двух альтернатив: либо все принимаемые в расчет частные критериальные показатели ведут себя качественно сходным образом, достигая одновременно своих экстремальных значений, либо не существует такого возможного плана производства, которому отвечали бы экстремальные значения одновременно всех частных критериальных показателей.

Первой альтернативе отвечает по существу однокритериальная ситуация, когда используется основной в содержательном отношении критерий, а остальные игнорируются, поскольку ничему не противоречат, не влияют на оптимизацию основного принятого в модели критерия.

Вторая альтернатива заключается в выработке разумного с практической точки зрения компромисса, когда для принятого плана производства не достигаются потенциально возможные оптимальные значения отдельных целевых критериев, но каждый из них для этого плана принимает в той или иной мере близкое к оптимальному значение.

Пользуясь современной терминологией, можно утверждать, что задачи управления экономикой плохо структурированы и не всегда модель может быть построена однозначным образом. Прежде всего, цели функционирования многих экономических и особенно социально-экономических систем не всегда возможно четко сформулировать.

Итеративный режим использования в экономике математических моделей – один из характерных приемов при решении плохо структурированных задач. Процесс сходимости показателей в таком режиме понимается как целенаправленный человеко-машинный диалог с возможными изменениями исходных данных и, если необходимо, отдельных элементов модели. Другими словами, происходит самообучение модели объекта с помощью имитации его функционирования.

Построение математических моделей управления производством на каждом уровне иерархии связано с использованием агрегированной (укрупненной) информации: чем выше уровень иерархии, тем больше степень агрегирования данных. И соответственно должны существовать относительно простые методы, алгоритмы дезагрегирования (разукрупнения) информации при переходе к более низким уровням управления.

Таким образом, рассмотрены некоторые общие положения, связанные с математическим моделированием экономических систем. Более подробное обсуждение этих вопросов не является задачей данного методического пособия.

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1 Понятие о дифференциальном уравнении

Объектами исследования теории оптимального управления являются управляемые системы, описываемые дифференциальными или разностными уравнениями.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами разработана для произвольного порядка, однако в курсе ТОУ уравнения более высокого порядка, чем второй, рассматриваются редко. Поэтому ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений порядка не выше второго.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в которое входит хотя бы одна производная искомой функции. Например,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t),\quad x=x(t),\quad \frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad u=u(x,t).$$

Дифференциальное уравнение может содержать и дифференциалы, но эта форма должна сводиться к указанной. Например,

$$tdx+xdt=0\Leftrightarrow tx'+x=0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомой является функция одной переменной. Если же искомой является функция нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Общая структура ДУ *n*-го порядка имеет вид

$$F\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}\right) = 0. \tag{2.1.1}$$

Если уравнение (2.1.1) можно разрешить относительно $x^{(n)}$, то получаем

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right). \tag{2.1.2}$$

Решением или интегралом ДУ называется функция $x = \varphi(t)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство для всех рассматриваемых значений t.

Решением ДУ может задаваться в неявном виде – $\Phi(t, x) = 0$. Процедура отыскания решения называется интегрированием ДУ.

2.2 Задача Коши для уравнения первого порядка

ДУ первого порядка имеет вид

$$F(t, x, x') = 0 \tag{2.2.1}$$

или

$$x' = f(t, x,). \tag{2.2.2}$$

Общим решением ДУ первого порядка называется его решение, содержащее одну произвольную постоянную

$$x = \varphi(t, C)$$

или

$$\Phi(t, x, C) = 0.$$

Геометрически общее решение представляет собой однопараметрическое семейство кривых линий, которые называются интегральными кривыми (рис. 2.2.1).

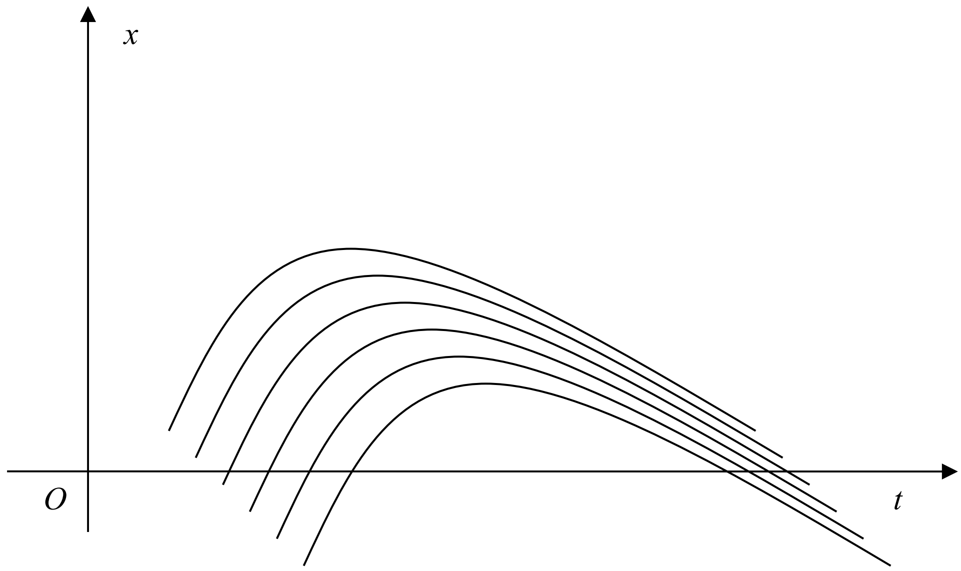

Рис. 2.2.1

Всякое решение, получаемое из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной, называется частным решением

$$x = \varphi\left(t, C_0\right) \text{ или } \Phi\left(t, x, C_0\right) = 0.$$

Задача Коши для ДУ первого порядка состоит в том, чтобы найти частное решение ДУ (2.2.1), (2.2.2), удовлетворяющее начальному условию

$$x\big|_{t=t_0} = x_0. \tag{2.2.3}$$

Геометрически условие (2.2.3) определяет точку $\left(t_0, x_0\right)$, через которую должна пройти искомая интегральная кривая.

2.3 Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$N(x)dx + M(y)dy = 0.$$

Решение уравнения основано на следующей теореме.

Теорема. Если функция $N(x)$ имеет первообразную $P(x)$, а функция $M(y)$ первообразную $Q(y)$, то общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид $Q(y)+P(x)=C$.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения

$$(x^2+1)\,dx+\frac{y}{y^2-1}\,dy=0.$$

Решение. Задано дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения, получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=C,\ C\in R.$$

2.4 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ первого порядка

$$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0. \tag{2.4.1}$$

Очевидно, что оно эквивалентно уравнению (2.2.2), в котором

$$f(t,x)=-\frac{M(t,x)}{N(t,x)}.$$

Уравнение (2.4.1) называется уравнением с разделяющимися переменными, если имеют место соотношения

$$M(t,x)=M_1(t)M_2(x),N(t,x)=N_1(t)N_2(x).$$

Тогда уравнение (2.4.1) может быть записано в виде

$$\left(\frac{M_1(t)}{N_1(t)}+\frac{N_2(x)}{M_2(x)}x'\right)dt=0.$$

Отсюда следует:

$$\int\left(\frac{M_1(t)}{N_1(t)}+\frac{N_2(x)}{M_2(x)}x'\right)dt=C$$

или

$$\int\frac{M_1(t)}{N_1(t)}dt+\int\frac{N_2(x)}{M_2(x)}dx=C. \qquad (2.4.2)$$

Формула (2.4.2) и есть общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $x(y^2-1)\,dx+y(x^2-1)\,dy=0$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные, для этого разделим обе части уравнения на произведение $(y^2-1)\cdot(x^2-1)\neq 0$.

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения, получим общий интеграл уравнения

$$\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|y^2-1\right|=\ln|C|$$

или

$$(y^2-1)\cdot(x^2-1)=C,\;\; C\neq 0.$$

Результат получен при условии, что $(y^2-1)\cdot(x^2-1)\neq 0$. Пусть теперь $(y^2-1)\cdot(x^2-1)=0$. Функции $y=\pm 1$, $x=\pm 1$ являются решениями данного уравнения. Очевидно, что эти решения получаются из общего при $C=0$, поэтому выражение $(y^2-1)\cdot(x^2-1)=C$ является общим интегралом данного уравнения при любом $C\in R$.

2.5 Линейное уравнение

Линейным уравнением первого порядка называется ДУ

$$x' + p(t)x = q(t). \tag{2.5.1}$$

Это ДУ решается с помощью подстановки $x(t) = u(t)v(t)$, причем одна из функций (например $v(t)$) подбирается так, чтобы относительно другой – $u(t)$ уравнение (2.5.1) максимально упростилось:

$$u'v + uv' + puv = q \Rightarrow u'v + u(v' + pv) = q.$$

Подберем $v(t)$ так, что $(v' + pv) = 0$. Тогда $u'v = q$. Находим $v(t)$:

$$\frac{dv}{v} = -pdt \Rightarrow \ln v = -\int pdt \Rightarrow v = e^{-\int pdt}.$$

Отсюда

$$u' = \frac{q}{v} \Rightarrow u' = qe^{\int pdt} \Rightarrow u = \int qe^{\int pdt}dt + C.$$

Таким образом, окончательно находим

$$x = \left(\int qe^{\int pdt}dt + C\right) e^{-\int pdt}. \tag{2.5.2}$$

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Решение. Уравнение

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$$

является неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого типа. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим общее решение однородного уравнения

$$y = C(1 + x^2).$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = c(x)(1 + x^2).$$

Для определения неизвестной функции $c(x)$ подставим функцию y в данное уравнение, получим тождество

$$c'(x)(1 + x^2) + c(x)2x - c(x)2x = 1 + x^2.$$

Тогда $c'(x) = 1, \quad c(x) = x + C$.

Итак, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (x + C)(1 + x^2).$$

2.6 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли первого порядка называется ДУ

$$x' + p(t)x = q(t)x^a \;. \qquad (2.6.1)$$

Как и линейное уравнение, это ДУ решается с помощью подстановки $x(t) = u(t)v(t)$, причем одна из функций (например $v(t)$) подбирается так, чтобы относительно другой – $u(t)$ уравнение (2.6.1) максимально упростилось.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2} y = 1 + x^2$.

Решение. Будем искать решение в виде $y = u(x) \cdot v(x)$. Подставим функцию в данное уравнение, получим верное функциональное тождество

$$u'v+uv'-\frac{2x}{1+x^2}uv=1+x^2.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые.

$$u'v+u\left(v'-\frac{2x}{1+x^2}v\right)=1+x^2. \qquad (*)$$

Будем считать, что функция $v(x)$ такова, что $v'-\frac{2x}{1+x^2}=0$.

$$dv-\frac{2x}{1+x^2}vdx=0\,|:v\neq 0,$$

$$\frac{dv}{v}-\frac{2x}{1+x^2}dx=0,$$

$$\ln|v|-\ln\left|1+x^2\right|=C.$$

Будем считать, что $v(x)>0$, $C=0$, получим $v=1+x^2$.

Тогда тождество (*) примет вид

$$u'(1+x^2)=1+x^2.$$

Отсюда $u'=1,\quad u=x+C$.

Таким образом, общее решение данного уравнения запишется следующим образом:

$$y=(x+C)(1+x^2).$$

2.7 Однородное уравнение первого порядка

Функция двух переменных $Q(t,x)$ называется однородной функцией порядка m, если $\forall t,x$ выполняется соотношение

$$Q(\lambda t,\lambda x)=\lambda^m Q(t,x). \qquad (2.7.1)$$

Число m называется показателем однородности.

Дифференциальное уравнение

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \qquad (2.7.2)$$

называется однородным уравнением первого порядка, если обе функции $M(t,x), N(t,x)$ являются однородными функциями с одним и тем же показателем однородности.

Очевидно, что в эквивалентном ему уравнении

$$x' = f(t,x)$$

функция $f(t,x)$ будет однородной функцией нулевого порядка.

Однородные уравнения решаются с помощью подстановки $z = \dfrac{x}{t}$. Действительно

$$\begin{gathered} M(t,x) = t^m M(1,z), N(t,x) = t^m N(1,z), \\ x = tz, \quad dx = zdt + tdz. \end{gathered}.$$

Уравнение (2.7.2) принимает вид

$$M(1,z)dt + N(1,z)(zdt + tdz) = 0$$

или

$$\left(M(1,z) + zN(1,z)\right)dt + N(1,z)tdz = 0,$$

откуда

$$\frac{dt}{t} + \frac{N(1,z)dz}{M(1,z) + zN(1,z)} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\int \frac{N(1,z)dz}{M(1,z) + zN(1,z)} + \ln|t| + \ln|C| = 0$$

или, окончательно,

$$\int \frac{N(1,z)\,dz}{M(1,z)+zN(1,z)}+\ln Ct=0. \qquad (2.7.3)$$

Здесь модуль опускается за счет произвольности константы интегрирования.

В окончательном решении (2.7.3) следует заменить z на $\frac{x}{t}$.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $y'=-\frac{x^2+y^2+xy}{x^2}$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка. Определим тип уравнения. Рассмотрим функцию $f(x,y)=-\frac{x^2+y^2+xy}{x^2}$.

Так как

$$f(kx,ky)=-\frac{k^2x^2+k^2y^2+k^2xy}{k^2x^2}=-\frac{k^2(x^2+y^2+xy)}{k^2x^2}=f(x,y),$$

то функция однородная нулевой степени. Следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем замену $z=\frac{y}{x}$. Тогда $y=zx$, $y'=z'x+z$ и уравнение примет вид

$$z'x+z=-\frac{x^2+(zx)^2+zx^2}{x^2} \Rightarrow z'x+z=-1-z^2-z,$$

$$\frac{dz}{dx}x+(z+1)^2=0,$$

$$\frac{dz}{(z+1)^2}+\frac{dx}{x}=0,$$

$$\int \frac{dz}{(z+1)^2} + \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$-\frac{1}{z+1} + \ln|x| = C.$$

Выполним обратную замену, получим $\dfrac{-x}{y+x} + \ln|x| = C -$ общий интеграл уравнения.

2.8 Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0. \qquad (2.8.1)$$

Предположим, что существует такая функция $u = u(t,x)$, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t,x), \frac{\partial u}{\partial x} = N(t,x). \qquad (2.8.2)$$

Тогда уравнение (2.8.1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0,$$

откуда

$$du = 0 \Rightarrow u(t,x) = C.$$

ДУ (2.8.1), для которого существует функция $u = u(t,x)$, удовлетворяющая условиям (2.8.2), называется уравнением в полных дифференциалах.

Пусть $M(t,x), N(t,x)$ – дифференцируемые функции. Для того чтобы выражение $M(t,x)dt + N(t,x)dx$ было полным дифференциалом некоторой функции $u = u(t,x)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}. \qquad (2.8.3)$$

Доказательство теоремы приводить не будем.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(x+y-1)dx+$ $+(x+y^3-2)dy=0$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка. Определим тип уравнения. Если предположить, что это уравнение в полных дифференциалах, то $P(x,y)=x+y-1$, $Q(x,y)=x+y^3-2$.

Для того, чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ по теореме об эквивалентности четырех предложений [2] необходимо, чтобы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ были непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D и $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ в этой области.

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение в полных дифференциалах, то есть левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $du=(x+y-1)dx+(x+y^3-2)dy$ и уравнение можно записать в виде $du=0 \Rightarrow u(x,y)=C$ – общее решение уравнения. Задача свелась к отысканию вида функции $u(x,y)$.

Мы получили, с одной стороны,

$$du=(x+y-1)dx+(x+y^3-2)dy,$$

с другой стороны – полный дифференциал функции двух переменных записывается в виде

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y^3 - 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1, \\ u(x, y) = \int \left(x + y^3 - 2\right) dy = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \left(xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x) \right)}{\partial x} = x + y - 1, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + C'(x) = x + y - 1, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'(x) = x - 1, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2} + C, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + \dfrac{(x-1)^2}{2} + C. \end{cases}$$

Подставив $u(x, y)$ в общий интеграл уравнения, получим

$$xy + \frac{y^4}{4} - 2y + \frac{(x-1)^2}{2} = C\,.$$

2.9 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка уравнения

Рассмотрим уравнение

$$F\left(t, x, x', x''\right) = 0, \tag{2.9.1}$$

или

$$x'' = f\left(t, x, x'\right). \qquad (2.9.2)$$

В таком общем виде для этих уравнений универсального алгоритма решения не существует. Понизить порядок уравнения (2.9.2) можно только в том случае, если его правая часть является неполной. Рассмотрим эти случаи подробно.

Пусть в уравнении (2.9.2) отсутствуют величины x, x' и оно имеет вид

$$x'' = f\left(t\right). \qquad (2.9.3)$$

Тогда его решение получается непосредственным интегрированием

$$x' = \int f(t)dt + C_1 \Rightarrow x = \int dt \int f\left(t\right)dt + C_1 t + C_2.$$

Пусть теперь в уравнении (2.9.2) отсутствует величина y и оно имеет вид

$$x'' = f\left(t, x'\right). \qquad (2.9.4)$$

Понижение порядка этого уравнения достигается с помощью подстановки $x' = z\left(t\right)$. Тогда $x'' = z'$ и уравнение (2.9.4) принимает вид $z' = f\left(t, z\right)$.

Решая его рассмотренными выше методами для уравнений первого порядка, получаем

$$z = \varphi\left(t, C_1\right),$$

откуда

$$x' = \varphi\left(t, C_1\right) \Rightarrow x = \int \varphi\left(t, C_1\right)dt + C_2 .$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

Решение: Дано дифференциальное уравнение третьего порядка, допускающее понижение порядка, так как уравнение не содержит искомой функции y и ее производных до второго порядка.

Следовательно, уравнение решается путем интегрирования:

$$y' = -\cos x + C_1,$$

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2 .$$

2.10 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим сначала уравнение второго порядка

$$x'' + p_1 x' + p_2 x = 0 . \qquad (2.10.1)$$

Здесь $p_1, p_2 \in R$ числовые коэффициенты.

Уравнение

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0 \qquad (2.10.2)$$

называется характеристическим уравнением для уравнения (2.10.1). Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$k_{1,2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - p_2} \qquad (2.10.3)$$

и при этом возникает три случая:

1. Пусть дискриминант квадратного уравнения строго положителен $\left(D = \frac{p_1^2}{4} - p_2 > 0 \right)$. Тогда уравнение (2.10.2) имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$, а уравнение (2.10.1) имеет два частных решения $x_1 = e^{k_1 t}, x_2 = e^{k_2 t}$.

Общим решением уравнения (2.10.1) является функция

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} . \qquad (2.10.4)$$

2. Пусть дискриминант квадратного уравнения равен нулю $\left(D = \frac{p_1^2}{4} - p_2 = 0 \right)$. Тогда уравнение (2.10.2) имеет один действитель-

ный корень $k_1 = k_2 = k = -\frac{p_1}{2}$, а уравнение (2.10.1) имеет одно частное решение $x_1 = e^{kt}$. Вторым частным решением в этом случае является функция $x_2 = xe^{kt}$.

В этом случае общим решением уравнения (2.10.1) является функция

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{kt}. \tag{2.10.5}$$

3. Пусть дискриминант квадратного уравнения строго отрицателен $\left(D = \frac{p_1^2}{4} - p_2 < 0\right)$. Тогда уравнение (2.10.2) не имеет действительных корней. Его решение можно представить в виде

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \alpha \pm i\beta.$$

Здесь обозначено $\alpha = -\frac{p_1}{2}, \beta = \sqrt{p_2 - \frac{p_1^2}{4}} \in R$, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Такие корни квадратного уравнения называют комплексными или комплексно-сопряженными.

В этом случае уравнение (2.10.1) имеет два частных решения

$$x_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t,\ x_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Таким образом, общим решением уравнения (2.10.1) является функция

$$x = e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t\right). \tag{2.10.6}$$

Пример. Найти общее решение уравнения
$y^{(V)} + 10y^{(IV)} - 3y''' = 0.$

Решение. Задано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами пятого порядка. Общее решение уравнения запишется в виде $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 + c_5y_5$, где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 – произвольные постоянные, функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

образуют фундаментальную систему данного уравнения. Чтобы ее найти, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^5 + 10k^4 - 3k^3 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \quad k_4 = -5 + \sqrt{28}, \quad k_5 = -5 - \sqrt{28}.$$

Тогда фундаментальная система данного дифференциального уравнения имеет вид: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$, $y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$, $y_4 = e^{(-5+\sqrt{28})x}$, $y_5 = e^{(-5-\sqrt{28})x}$.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{(-5+\sqrt{28})x} + c_5 \cdot e^{(-5-\sqrt{28})x}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y^{(\text{IV})} + 8y'' + 16y = 0.$$

Решение. Задано линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения запишется в виде $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$, где c_1, c_2, c_3, c_4– произвольные постоянные, функции y_1, y_2, y_3, y_4 образуют фундаментальную систему данного уравнения. Чтобы ее найти, запишем и решим характеристическое уравнение

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k^2 + 4)^2 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = 2i, \quad k_3 = k_4 = -2i.$$

Тогда фундаментальная система данного дифференциального уравнения имеет вид: $y_1 = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x$, $y_2 = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x$, $y_3 = x \cos 2x$, $y_4 = x \sin 2x$.

Итак, общее решение данного дифференциального уравнения запишется в виде:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x.$$

2.11 Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x'' + p_1 x' + p_2 x = f(t), p_i = \text{const}. \qquad (2.11.1)$$

Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t\right). \qquad (2.11.2)$$

Здесь $P_n(t), Q_m(t)$ – многочлены степеней n, m.

Общее решение уравнения (2.11.1) задается формулой

$$x = \bar{x} + x^*.$$

Здесь $\bar{x}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, x^* – некоторое частное решение линейного неоднородного уравнения. При этом общее решение $\bar{x}$ находится способом, описанным в парагр. 2.9.

Можно показать, что в этом случае частное решение уравнения (2.11.1) нужно искать в виде

$$x^*(t) = e^{\alpha t}\left(A_k(t)\cos\beta t + B_k(t)\sin\beta t\right)t^s, \qquad (2.11.3)$$

где $A_k(t), B_k(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, $k = \max\{n, m\}$, s – кратность корня $\alpha \pm i\beta$ среди корней характеристического уравнения (2.10.2).

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = (x^2 + 1)e^x$.

Решение. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y'' + y' = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\, k_2 = -1.$$

Получили, что корни характеристического уравнения действительные различные, поэтому $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-x}$ и общее решение однородного дифференциального уравнения запишется в виде $Y = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{-x}$.

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

Здесь $P_m\left(x\right) = x^2 + 1$, $m = 2$, $a = 1$. Следовательно, частное решение данного линейного неоднородного уравнения $\overline{y}$ запишется в виде $\overline{y} = x^s e^x (Ax^2 + Bx + C)$.

Сравним число $a = 1$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Делаем вывод: a не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$.

Подставим $\overline{y} = e^x (Ax^2 + Bx + C)$ в данное уравнение. Для этого найдем

$$\overline{y}' = e^x (Ax^2 + (B + 2A)x + B + C),$$

$$\overline{y}'' = e^x (Ax^2 + (B + 4A)x + 2B + 2A + C).$$

При подстановке получим равенство двух многочленов:

$$2Ax^2+(2B+6A)x+3B+2A+2C=x^2+1.$$

Из алгебры известно, что два многочлена равны, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. В нашем случае получаем систему:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A=1, \\ x & 2B+6A=0, \\ x^0 & 3B+2A+2C=1. \end{array}$$

Следовательно, $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{2}$, $C=\frac{9}{4}$. Тогда частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\overline{y}=e^x\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right).$$

Итак, функция $y=c_1\cdot 1+c_2\cdot e^{-x}+e^x\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)$ является общим решением данного линейного неоднородного уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+N_m(x)\sin\beta x),$$

где α , β – действительные постоянные, $M_n(x)$, $N_m(x)$ – многочлены возможно разных степеней.

В этом случае $\overline{y}$ ищется в виде: $\overline{y}=e^{\alpha x}x^s(P(x)\cos\beta x+ +Q(x)\sin\beta x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены одной и той же степени, наибольшей из степеней многочленов $M_n(x)$, $N_m(x)$, записанные с неопределенными коэффициентами, s – кратность корня $k=(\alpha+\beta i)$ характеристического уравнения $k^n+a_1k^{n-1}+...+a_{n-1}k+a_n=0$ для линейного однородного уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению.

Если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos\dfrac{x}{2}$.

Решение. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 2.$$

Корни характеристического уравнения действительные различные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения запишется в виде $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = 2e^x \cos\dfrac{x}{2}$.

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $M_n(x) = 2$, $N_m(x) = 0$, $n = 0$, $m = 0$.

Частное решение $\bar{y}$ данного линейного неоднородного дифференциального уравнения запишется в виде $\bar{y} = x^s e^x \left(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2} \right)$.

Сравним число $\alpha + \beta i = 1 + \frac{i}{2}$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Делаем вывод: $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$.

Подставим $\bar{y} = e^x \left(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2} \right)$ в данное уравнение. Для этого найдем

$$\bar{y}' = e^x \left(\left(A + \frac{B}{2} \right)\cos\frac{x}{2} + \left(B - \frac{A}{2} \right)\sin\frac{x}{2} \right),$$

$$\bar{y}'' = e^x \left(\left(\frac{3A}{4} + B \right)\cos\frac{x}{2} + (3B - A)\sin\frac{x}{2} \right).$$

При подстановке получим равенство

$$\cos\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B \right) + \sin\frac{x}{2}\left(2B + \frac{1}{2}A \right) = 2\cos\frac{x}{2}.$$

Очевидно, что равенство выполняется, если равны коэффициенты при $\sin x$ и при $\cos x$ соответственно. Получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B = 2, \\ 2B + \frac{1}{2}A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}B = 2, \\ A = -4B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 4, \\ A = -16. \end{cases}$$

Следовательно, $\bar{y} = e^x \left(-16\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} \right)$.

Итак, функция $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \left(4\sin\frac{x}{2} - 16\cos\frac{x}{2} \right)$ является общим решением данного линейного неоднородного уравнения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x x \sin x$.

Решение. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1 + i\ ,\ k_2 = 1 - i\ .$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения запишется в виде

$$Y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x\ .$$

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = e^x x \sin x$. Здесь

$$\alpha = 1\ ,\ \beta = 1\ ,\ M_n(x) = 0\ ,\ N_m(x) = x\ ,\ n = 0\ , m = 1.$$

Частное решение $\overline{y}$ данного линейного неоднородного дифференциального уравнения запишется в виде $\overline{y} = x^s e^x \big((Ax + B)\cos x +$ $+(Cx + D)\sin x\big)$.

Сравним число $\alpha + \beta i = 1 + i$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Делаем вывод: $\alpha + \beta i$ единожды является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 1$.

Подставим $\bar{y} = xe^x\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big)$ в данное уравнение. Для этого найдем:

$$\bar{y}' = e^x(((A+C)x^2 + (2A+B+D)x + B)\cos x +$$
$$+((C-A)x^2 + (D+C-B)x + D)\sin x),$$
$$\bar{y}'' = e^x(((2Cx^2 + (4A+2D+4C)x + 2B + 2A + 2D)\cos x +$$
$$+((-2Ax^2 + (4C-4A-2B)x - 2B + 2C + 2D)\sin x).$$

При подстановке получим равенство

$$(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = x\sin x.$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получим систему относительно неизвестных постоянных *A, B, C, D.*

$$\begin{cases} 4Cx + 2A + 2D = 0, \\ -4Ax - 2B + 2C = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4A = 1, \\ -2B + 2C = 0, \\ 4C = 0, \\ 2A + 2D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4}, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение $\bar{y}$ имеет вид

$$\bar{y} = \left(xe^x \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x \right).$$

Итак, общим решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения является функция

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + xe^x\left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right).$$

Решим задачу Коши для уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x x\sin x$ с начальными условиями: $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Найдем y'.

$$y' = c_1(e^x \cos x - e^x \sin x) + c_2(e^x \sin x + e^x \cos x) + e^x\left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right) +$$

$$+ xe^x\left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right) + xe^x\left(-\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right).$$

Подставим начальные условия в выражения для y и y', получим

$$\begin{cases} e^{\frac{\pi}{2}} = c_2 e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{8} e^{\frac{\pi}{2}}, \\ \frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{2}} = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} e^{\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_2 - \frac{\pi}{8}, \\ 1 = 4c_1 + 4c_2 - 1 - \pi. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 + \frac{\pi}{8}, \\ c_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right) e^x \cos x + \left(1 + \frac{\pi}{8}\right) e^x \sin x + xe^x\left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right).$$

3. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ЭКОНОМИКЕ И ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1 Задача освоения производственных мощностей

Пусть $n = \text{const}$ – производственная мощность, $x(t)$ – фактическое производство, основанное на этой мощности в момент времени t. При этом очевидно, что $x(t) \le n$. Дадим аргументу t приращение Δt, тогда фактическое производство $x(t)$ получит прирост производства Δx. Предположим, что прирост производства пропорционален недоиспользованной мощности

$$\Delta x = \gamma\left(n - x(t)\right)\Delta t. \tag{3.1.1}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка для освоения производственной мощности:

$$T\frac{dx}{dt} + x = n, T = \frac{1}{\gamma}. \tag{3.1.2}$$

Начальным условие для этого уравнения является соотношение

$$x(0) = x_0, (x_0 < n). \tag{3.1.3}$$

Общим решением уравнения (3.1.2) является функция

$$x(t) = n + Ce^{-\frac{t}{T}}. \tag{3.1.4}$$

Константа C находится из начального условия

$$C = x_0 - n.$$

Таким образом, закон освоения производственных мощностей имеет вид

$$x(t) = n + (x_0 - n)e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (3.1.5)$$

Он показывает, что процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = n. \qquad (3.1.6)$$

В частном случае, при $x_0 = 0$ решение (3.1.5) принимает вид (рис. 3.1.1):

$$x(t) = n\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (3.1.7)$$

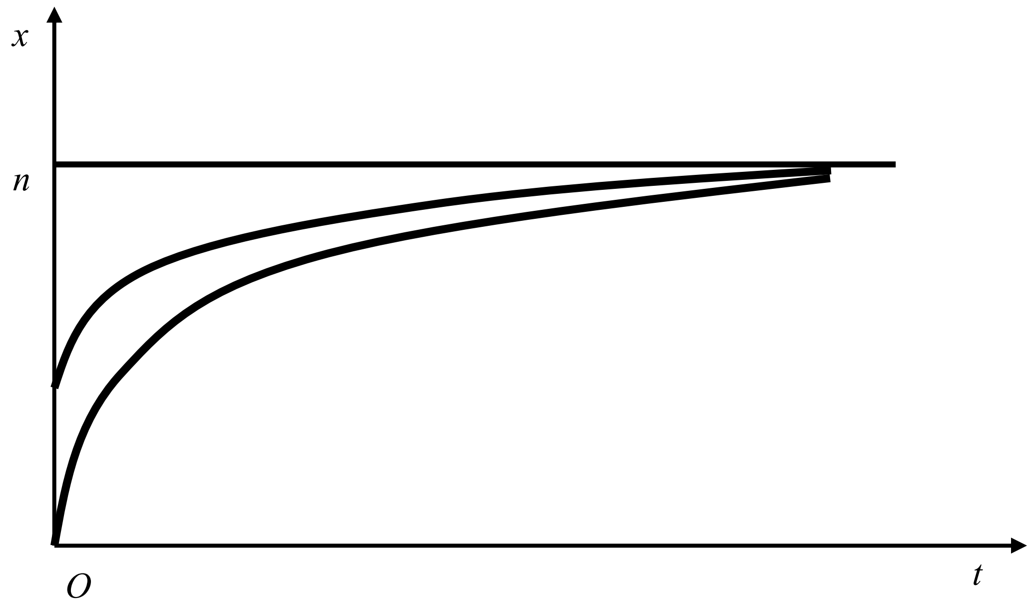

Рис. 3.1.1

3.2 Модель Эванса установления равновесной цены

Рассмотрим рынок одного товара. Будем полагать, что функция спроса $D = D(p)$ и функция предложения $S = S(p)$ линейно зависят от цены (рис. 3.2.1).

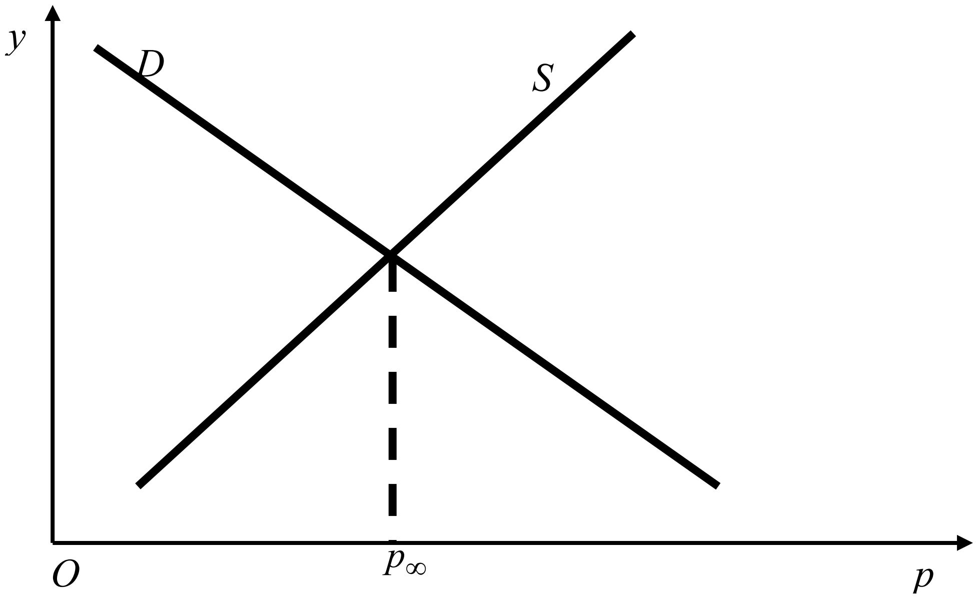

Рис. 3.2.1

$$D = a - bp\ , S = \alpha + \beta p\ . \qquad (3.2.1)$$

Здесь $a > 0, b > 0, \alpha > 0, \beta > 0, a > \alpha$. Предположим, что изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\Delta p = \gamma\left(D - S\right)\Delta t\ , \gamma > 0\ . \qquad (3.2.2)$$

Переходя в (3.2.2) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка для установления равновесной цены:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dt} + \left(b + \beta\right)p = a - \alpha,$$

или

$$T\frac{dp}{dt} + p = \frac{a - \alpha}{\left(b + \beta\right)},\ T = \frac{1}{\gamma\left(b + \beta\right)}. \qquad (3.2.3)$$

Начальным условием для уравнения (3.2.1) является соотношение

$$p\left(0\right) = p_0\ . \qquad (3.2.4)$$

Решением уравнения (3.2.3) с начальным условием (3.2.4) является функция

$$p(t)=\frac{a-\alpha}{b+\beta}+\left(p_0-\frac{a-\alpha}{b+\beta}\right)e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (3.2.5)$$

которая показывает, что равновесной ценой является точка пересечения прямых спроса и предложения.

$$\lim_{t\to\infty} p(t)=p_\infty=\frac{a-\alpha}{b+\beta}. \qquad (3.2.6)$$

3.3 Динамическая модель Кейнса

Рассмотрим основные компоненты расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t)$ – национальный продукт, $E(t)$ – государственные расходы, $S(t)$ – потребление, $I(t)$ – инвестиции, t – время. Составим соотношения баланса. Сумма всех расходов равна национальному доходу, поэтому

$$Y(t)=S(t)+I(t)+E(t). \qquad (3.3.1)$$

Общее потребление состоит из производственного потребления некоторой части национального дохода $a(t)Y(t)$ и непроизводственного (автономного, конечного) потребления $b(t)$:

$$S(t)=a(t)Y(t)+b(t). \qquad (3.3.2)$$

Здесь $a(t)$ – коэффициент склонности к потреблению $\left(0<a(t)<1\right)$.

Размер инвестиций пропорционален скорости роста национального дохода

$$I(t)=k(t)Y'(t). \qquad (3.3.3)$$

Здесь $k(t)$ – норма акселерации. Считается, что характеристики функционирования и развития государства $a(t),b(t),k(t),E(t)$ заданы. Исключая из балансовых уравнений (3.3.1) – (3.3.3) величины

$S(t), I(t)$, получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции национального дохода

$$Y'(t) = \frac{1 - a(t)}{k(t)} Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}, \tag{3.3.4}$$

общее решение которого определяется формулой (2.5.2). Начальным условием для уравнения (3.3.4) является условие

$$Y(0) = Y_0. \tag{3.3.5}$$

Рассмотрим важный частный случай, когда все характеристики функционирования и развития государства $a(t), b(t), k(t), E(t)$ являются константами – a, b, k, E. Тогда решение уравнения (3.3.4) с начальным условием будет иметь вид

$$Y(t) = Y_\infty + (Y_0 - Y_\infty) e^{\frac{1-a}{k}t}. \tag{3.3.6}$$

Здесь $Y_\infty = \dfrac{b + E}{1 - a}$ – равновесное (стационарное) решение исходного уравнения. Интегральные кривые показаны на рис. 3.3.1.

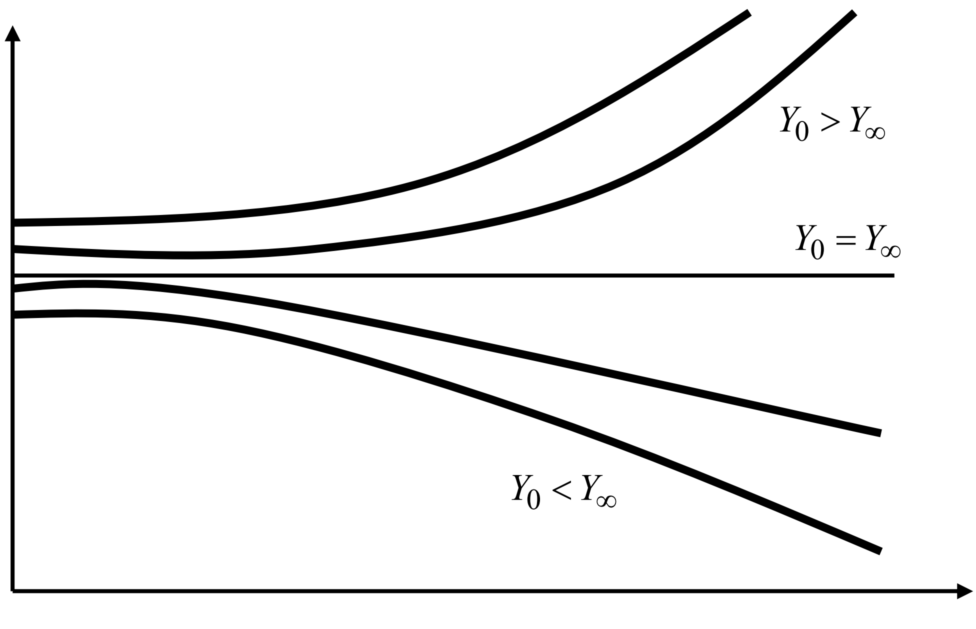

Рис. 3.3.1

Из рис. 3.3.1 видно, что если $Y_0 < Y_\infty$, то национальный доход со временем падает. И наоборот, если $Y_0 > Y_\infty$, то национальный доход со временем возрастает.

3.4 Односекторная модель экономического роста Солоу

Национальный доход (ВВП) Y задается однородной производственной функцией первого порядка

$$Y = F\left(K, L\right). \tag{3.4.1}$$

Здесь K – объем капиталовложений (производственных фондов), L – объем затрат труда (число занятых), $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Разделив обе части производственной функции (3.4.1) на L, получаем

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F\left(K, L\right)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(k\right). \tag{3.4.2}$$

Здесь y – производительность труда, $k = \dfrac{K}{L}$ – величина фондовооруженности. Будем предполагать, что:

1. Скорость роста трудовых ресурсов пропорциональна объему затрат труда:

$$\frac{dL}{dt} = \alpha L, \ \left(0 \le \alpha \le 1\right). \tag{3.4.3}$$

2. Инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов $\dfrac{dK}{dt}$ и амортизацию βK:

$$I = \frac{dK}{dt} + \beta K. \tag{3.4.4}$$

Здесь α – годовой темп прироста числа занятых, β – норма амортизации (доля выбывших за год основных производственных фондов).

Обозначая h норму инвестиций, находим:

$$I = hY = \frac{dK}{dt} + \beta K$$

или

$$\frac{dK}{dt} = hF(K,L) - \beta K. \tag{3.4.5}$$

Из формулы для фондовооруженности $k = \dfrac{K}{L}$ следует:

$$\ln k = \ln K - \ln L$$

или, после дифференцирования,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}. \tag{3.4.6}$$

Подставляя в соотношение (3.4.6) уравнения (3.4.4) и (3.4.5), получаем

$$\frac{k'}{k} = \frac{hF(K,L)}{K} - \beta - \alpha.$$

Подставляя сюда формулу (3.4.2), находим

$$\frac{k'}{k} = h\frac{f(k)}{k} - (\beta + \alpha),$$

или

$$k' = hf(k) - (\alpha + \beta)k. \tag{3.4.7}$$

Уравнение (3.4.7) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Начальным условием для уравнения (3.4.7) является соотношение

$$k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}. \tag{3.4.8}$$

Пусть производственная функция (3.4.1) имеет вид

$$F(K,L)=\sqrt{KL}\,. \tag{3.4.9}$$

Тогда

$$f(k)=\sqrt{k} \tag{3.4.10}$$

и уравнение (3.4.7) принимает вид

$$\frac{dk}{dt}=h\sqrt{k}-(\alpha+\beta)k\,. \tag{3.4.11}$$

Разделяя переменные в уравнении (3.4.11), получаем

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left(h-(\alpha+\beta)\sqrt{k}\right)}=dt\,,$$

или

$$\int\frac{dk}{\sqrt{k}\left(h-(\alpha+\beta)\sqrt{k}\right)}=\int dt\,.$$

Вычисляя интеграл левой части методом замены переменной $z=\sqrt{k}$, находим общее решение уравнения (3.4.11):

$$k(t)=\left(\frac{h}{\alpha+\beta}+Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right)^2. \tag{3.4.12}$$

Произвольная константа находится из начального условия (3.4.8):

$$k(0)=k_0=\left(\frac{h}{\alpha+\beta}+C\right)^2=\left(\sqrt{k_\infty}+C\right)^2.$$

Здесь $k_\infty=\dfrac{h^2}{(\alpha+\beta)^2}$. Таким образом $C=\sqrt{k_0}-\sqrt{k_\infty}$ и формула (3.4.12) принимает вид

$$k(t)=\left(\sqrt{k_\infty}+\left(\sqrt{k_0}-\sqrt{k_\infty}\right)e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right)^2. \tag{3.4.13}$$

Уравнение (3.4.11) и решение (3.4.13) показывают, что значение k_∞ является стационарным решением уравнения $\left(k'(t)=0\right)$ (рис. 3.4.1).

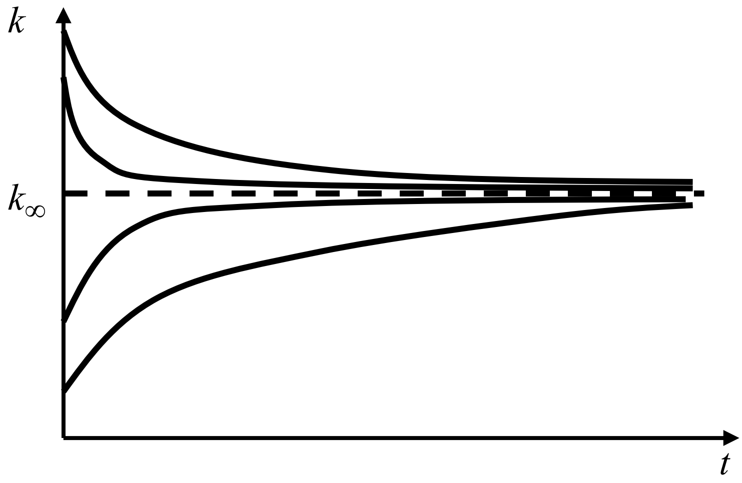

Рис. 3.4.1

Семейство интегральных кривых сходится к стационарному решению сверху и снизу

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k_\infty .$$

Таким образом, точка k_∞ является точкой устойчивого равновесия.

3.5 Модель рынка с прогнозируемыми ценами

В простых моделях спрос и предложение полагают зависящими только от цены, но в реальных ситуациях спрос и предложение зависит еще от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными от функции цены $P(t)$.

Рассмотрим пример, в котором функция спроса и предложения будет задаваться следующим образом:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18\ ,\ S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3,$$

где $D(t)$ – спрос, $S(t)$ – предложение.

Принятые выражения вполне объяснимы. Спрос зависит от темпов изменения цены. Если темп увеличивается, то интерес рынка к товару становится больше и наоборот. Если же цена становится выше, при этом наблюдается быстрый рост цены, то это отпугивает покупателей, поэтому слагаемое с первой производной входит в функцию спроса со знаком "–".

Предложение еще в большей мере усиливается темпом изменения $P(t)$, поэтому слагаемое, содержащее $P'(t)$, входит со знаком "+". Требуется установить зависимость цены от времени.

Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D(t) = S(t)$, то приравняем выражения:

$$3P'' - P' - 2P + 18 = 4P'' + P' + 3P + 3,$$

приведем подобные:

$$P'' + 2P' + 5P = 15,$$

характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем сопряженные комплексные корни:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i,$$

следовательно, обобщенное решение однородного уравнения имеет вид:

$$P_0 = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1, C_2 – const.

Найдем частное решение неоднородного уравнения: $P_{ч.н.} = A$, откуда $P''_{ч.н.} = 0$, следовательно $A = 3$.

Тогда обобщенное решение принимает вид:

$$P = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3.$$

Полученная функция описывает зависимость цены от времени. При наложении начальных условий в конкретных примерах можно найти $C_1, C_2,$ тогда функция позволит строить прогноз изменения цены со временем.

4. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1 Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

В ТОУ для решения задач применяется специфический математический аппарат, основанный на достаточных условиях оптимальности и основах вариационного исчисления.

Определение.

Простейшей задачей вариационного исчисления называется следующая экстремальная задача:

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),x'(t))dt \to extr;\, x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1.$$

Задача $B(x)=J(x)+l(x(t_0),x(t_1)) \to extr$ называется задачей Больца. Здесь $f(t,x(t),x'(t))$ – функция трех переменных, называемая интегрантом, $l(\xi_0,\xi_1)$ – функция двух переменных, называемая терминантом. Отрезок $[t_0,t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0<t_1$. Задача рассматривается в пространстве $C^1([t_0,t_1])$. Локальный экстремум в этом пространстве называется слабым.

Теорема (уравнение Эйлера).

Пусть f, f_x, $f_{x'}$ – непрерывны. Тогда, если $\hat{x}$ доставляет слабый экстремум в простейшей задаче или задаче Больца, то $\hat{f}_{x'} \in C^1([t_0,t_1])$ и выполняется уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{f}_{x'}+\hat{f}_x=0, \forall t\in[t_0,t_1],$$

где $\hat{f}_{x'}=f_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$, $\hat{f}_x=f_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$.

В задаче Больца удовлетворяются также условия трансверсальности (краевые условия):

$$\hat{f}_{x'}(t_i)=(-1)^i\hat{l}_{\xi_i}, \text{ где } \hat{l}_{\xi_i}=l_{\xi}(t_0,t_1), i=0,1.$$

Доказательство.

Рассмотрим функции одного переменного:

$$\varphi(a)=\varphi_h(a)=J(\hat{x}+ah)=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t)+ah(t),\hat{x}'(t)+ah'(t))dt,$$

$$\psi(a)=\psi_h(a)=B(\hat{x}+ah).$$

Поскольку $\hat{x}$ доставляет слабый экстремум, функции $\varphi(a)$ в простейшей задаче и $\psi(a)$ в задаче Больца имеют экстремум при $a=0$. Из теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла следует, что эти функции дифференцируемы в нуле и, значит, по теореме Ферма $\varphi'(0)=0$, $\psi'(0)=0$. Дифференцируя функции φ, ψ и полагая $a=0$, получаем

$$\varphi'(0)=\int_{t_0}^{t_1}\hat{f}_x(t)h(t)+\hat{f}_{x'}(t)h'(t))dt=0, \qquad (4.1.1)$$

$$\psi'(0)=\int_{t_0}^{t_1}\hat{f}_x(t)h(t)+\hat{f}_{x'}(t)h'(t))dt+\hat{l}_{\xi_0}h(t_0)+\hat{l}_{\xi_1}h(t_1)=0. \qquad (4.1.2)$$

Лемма (Дюбуа-Реймон).

Пусть $a_0,a_1\in C^1([t_0,t_1])$ и $\int_{t_0}^{t_1}a_0h(t)+a_1h'(t))dt=0$ для всех $h\in C^1([t_0,t_1]), h(t_i)=0, i=0,1$.

Тогда $a_1 \in C^1([t_0,t_1])$ и $-\dfrac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0, \forall t \in [t_0,t_1]$.

Доказательство леммы.

Возьмем функцию $p \in C^1([t_0,t_1])$ такую, что $p'(t) = a_0(t)$, $\int\limits_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)dt$. Тогда для любой функции $h \in C^1([t_0,t_1])$, зануляющейся на концах отрезка, по условию леммы должно выполняться равенство

$$0 = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_0 h(t) + a_1 h'(t))dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_0 h(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1 h'(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_1(t) - p(t))h'(t)dt. \quad (4.1.3)$$

Возьмем функцию $\widetilde{h}(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_1(\tau) - p(\tau))d\tau$. Тогда $\tilde{h}' = a_1 - -p \in C^1([t_0,t_1])$ и она равна нулю в граничных точках. Действительно, равенство $\widetilde{h}(t_0) = 0$ следует из определения функции $\widetilde{h}(t)$. Равенство $\widetilde{h}(t_1) = 0$ имеет место в силу выбора функции p: $\widetilde{h}(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_1(t) - p(t))dt = 0$. Значит для функции $\widetilde{h}(t)$ должно выполняться равенство (4.1.3), т. е. $\int\limits_{t_0}^{t_1} (a_1(t) - p(t))^2 dt = 0$. Из последнего соотношения следует, что $a_1(t) \equiv p(t)$, т.е. $a_1 \in C^1([t_0,t_1])$ и $-\dfrac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0$.

Лемма Дюбуа-Реймона доказана.

Из леммы Дюбуа-Реймона и соотношения (4.1.1) следует утверждение теоремы об уравнении Эйлера. Для завершения доказательства, касающегося задачи Больца, надо в (4.1.1) проинтегрировать по частям, воспользоваться уравнением Эйлера и получить условия трансверсальности.

4.2 Условие сильного максимума Вейерштрасса

Рассмотрим простейшую задачу, во-первых, на минимум (а не на экстремум), а во-вторых, в несколько более широком пространстве $PC^1([t_0,t_1])$ кусочно непрерывно-дифференцируемых функций (а не в пространстве $C^1([t_0,t_1])$).

Определение.

Говорят, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет в простейшей задаче сильный минимум, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой функции

$x \in PC^1([t_0,t_1])$, удовлетворяющей условию $\left|x-\hat{x}\right|_{C([t_0,t_1])} < \varepsilon$ и граничным условиям, выполняется неравенство: $J(x) \ge J(\hat{x})$.

Приведем теорему, являющуюся необходимым условием сильного минимума без доказательства.

Теорема (необходимое условие Вейерштрасса).

При выполнении условий теоремы 1, если $\hat{x}$ доставляет сильный минимум в простейшей задаче, тогда в любой точке τ непрерывности функции $\hat{x}'$ выполняется неравенство

$$E(\tau,\hat{x}(\tau)\hat{x}'(\tau),u) \ge 0, \forall u \in R,$$

где $E(t,x,x',u) = f(t,x,x') - f(t,x,u) - f_{x'}(t,x,x')(x'-u)$.

Указанная функция называется функцией Вейерштрасса.

4.3 Принцип максимума для задачи со свободным концом

Определение.

Задачей оптимального управления со свободным (правым) концом называется следующая экстремальная задача:

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\,dt \to \min, x'(t) = \varphi(t,x(t),u(t)), x(t_0) =$$

$$= x_0, u(t) \in U. \qquad (4.3.1)$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, f – функция $n+r+1$ переменного, φ – отображение из R^{n+r+1} в R^n; U – некоторое (произвольное непустое) множество в R^r, отрезок $[t_0,t_1]$фиксирован.

Задачу (4.3.1) рассмотрим в пространстве $Z = PC^1([t_0,t_1],R^n)\times$ $\times PC^1([t_0,t_1],R^r)$ (декартовом произведении кусочно-непрерывно дифференцируемых вектор-функций из $[t_0,t_1]$ в R^n и кусочно-непрерывных вектор-функций из $[t_0,t_1]$в R^r).

Допустимую пару $(\hat{x},\hat{u}) \in Z$ назовем оптимальным процессом в задаче (4.3.1) или сильным минимумом в этой задаче, если существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой пары (x,u), для которой $|x-\hat{x}|_{C([t_0,t_1],R^n)} < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(x,u) \geq J(\hat{x},\hat{u})$.

Теорема (необходимое условие оптимальности – принцип максимума Понтрягина для задачи со свободным концом).

Пусть $f, f_x, \varphi, \varphi_x$ – непрерывны. Тогда для (единственного) решения задачи Коши (φ_x^* – транспонированная матрица к матрице φ_x)

$$-\dot{p}(t) + \hat{f}_x(t) - \hat{\varphi}_x^*(t)p(t) = 0, p(t_1) = 0$$

в любой точке τ непрерывности функции $\hat{u}$ выполнено соотношение (называемое принципом максимума Понтрягина)

$$\max_{u\in U}([p(\tau),\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),u)] - f(\tau,\hat{x}(\tau),u)) = [p(\tau),\hat{\varphi}(\tau)] - \hat{f}(\tau).$$

5. ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА

5.1 Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств

Теорема, доказываемая в этом пункте, является бесконечномерным обобщением и правила множителей Лагранжа. При формулировке этого правила Лагранж писал: "'Можно высказать следующий общий принцип.

Если ищется максимум или минимум некоторой функции при условии, что между ее переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно к минимизируемой функции прибавить функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных." Иначе говоря: составь функцию Лагранжа и действуй далее, "как если бы переменные были независимы".

Определение.

Пусть X – нормированное пространство и $f : X \to \overline{R}$ – функция на X. Задача

$$f_0(x) \to \min \tag{5.1.1}$$

называется задачей без ограничений. Если f – гладкая функция, то мы называем ее элементарной гладкой задачей. (Примером элементарной гладкой задачи является задача Больца).

Пусть X,Y – банаховы пространства, U – окрестность x, $f : U \to R, f_1 : U \to Y$.

Задача

$$f_0(x) \to extr, f_1(x) = 0. \qquad (5.1.2)$$

называется гладкой задачей с ограничениями типа равенств или задачей математического программирования. Функция Лагранжа задачи (5.1.2) имеет вид:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda f_1(x).$$

Имеет место следующее утверждение (восходящее к Ферма и называемое далее теоремой Ферма):

Пусть $f_0 \in D^1(\hat{x}, R)$. Тогда, если $\hat{x}$ – точка локального минимума в элементарной гладкой задаче (5.1.1), то $f_0'(\hat{x}) = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим семейство одномерных функций $\varphi_\xi'(t) = f_0(\hat{x} + t\xi)$. По теореме о суперпозиции все функции φ_ξ дифференцируемы в нуле и $\varphi_\xi'(0) = [f_0'(0), \xi]$.

Из одномерной теоремы Ферма следует, что $\varphi_\xi'(0) = 0, \forall \xi \in X$ и, значит, $f_0'(0) = 0$.

Теорема (принцип Лагранжа для гладких задач с равенствами).

Пусть в задаче математического программирования (5.1.2) функция f_0 и отображение f_1 строго дифференцируемы в точке $\hat{x}$ (условие гладкости) и, кроме того, $f_1'(\hat{x})X$ – замкнутое подпространство Y (условие слабой регулярности). Тогда, если $\hat{x}$ доставляет локальный минимум в задаче (5.1.2), то для задачи (5.1.2) выполнен принцип Лагранжа, т.е. найдутся множители Лагранжа $(\lambda_0, \lambda) \in Y^* \times R$, не равные одновременно нулю такие, что для функции Лагранжа выполнено условие стационарности:

$$L(\hat{x}, \lambda_0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow [\lambda_0 f_0'(\hat{x}), x] + [\lambda f_1'(\hat{x}), x] = 0, \forall x \in X.$$

При этом, если выполнено условие сильной регулярности, состоящее в том, что $f_1'(\hat{x})X = Y$, то $\lambda_0 \neq 0$.

Комментарий. В приведенной теореме заключена иллюстрация принципа Лагранжа: составив функцию Лагранжа, мы применяем необходимое условие экстремума (теорему Ферма) к функции Лагранжа, «как если бы переменные были независимы» (т.е. являющейся элементарной гладкой задачей), и получаем нужный вид необходимых условий. Данная теорема обобщает результат, который принято называть правилом множителей Лагранжа.

5.2 Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа

Пусть $z = (x,u) \in C^1(\Delta, R^n) \times C^1(\Delta, R^r)$,

$$B_i(z) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))dt + \psi_i(x(t_0), x(t_1)), i = 0,1,...,m,$$

где $f_i : R \times R^n \times R^r \to R, \psi_i : R \times R^n \times R^n \to R$.

Определение.

Задачей Лагранжа (с фиксированным временем) называется следующая экстремальная задача:

$$B_0(z) \to \min,\ B_i(z) \leq 0,\ i = 1,...,m,\ B_i(z) = 0,\ i = m' + 1,...,n,$$

$$x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0.$$

Функционалы $B_i(z)$ называются функционалами Больца, соотношение $x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0$ называется дифференциальной связью. Поставленную задачу будем рассматривать в банаховом пространстве $Z = C^1(\Delta, R^n) \times C^1(\Delta, R^r)$, локальный экстремум в этом пространстве называется слабым.

Теорема (принцип Лагранжа в задаче Лагранжа).

Пусть в задаче Лагранжа все функции f_i, ψ_i и отображение φ непрерывно дифференцируемы в окрестности множества $(t,x,u)\big| t\in[t_0,t_1],\ x=\hat{x}(t), u=\hat{u}(t)$ (условие гладкости). Тогда, если $\{\hat{x},\hat{u}\}$ доставляет слабый минимум в задаче Лагранжа, то в этой точке выполнен принцип Лагранжа.

Расшифровку фразы «выполнен принцип Лагранжа» проведем в конце доказательства.

Доказательство.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z)\to\min,\quad F(z)=0(f_0=B_0, F(z)=(f_1,B_1,...,B_m)). \qquad (5.2.1)$$

Было доказано, что если выполнены условия гладкости теоремы, то все функционалы Больца и отображение дифференциальной связи непрерывно дифференцируемы в Z в окрестности $\hat{z}$ (а значит, строго дифференцируемы в $(\hat{x},\hat{u})$). При этом

$$F'(\hat{z})=(f_1'(\hat{z}),B_1'(\hat{z}),...,B_m'(\hat{z})),$$

а $f_1'((\hat{x},\hat{u}),(x,u))=x'-C(t)x(t)-D(t)u(t)$, где $C(t)=\hat{\varphi}_x(t)$, $D(t)=\hat{\varphi}_u(t)$.

Отображение B конечномерно, следовательно, выполняется условие слабой регулярности отображения F. Итак, в силу парагр. 6.1 принцип Лагранжа для задачи верен.

Применим приведенную в парагр. 6.1 теорему. Согласно этой теореме существуют числа $(\mu_0,\mu_1,...,\mu_m)$ и линейный функционал $\lambda\in C^*([t_0,t_1],R^n)$ такие, что для $L=\sum_{i=0}^{m}\mu_i B(z)+[\lambda,f_1(z)]$ выполнены равенства $L_x=0, L_u=0$, где функция Лагранжа исходной задачи имеет вид:

$$L(x,u,\lambda,\mu,\mu_0)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),x'(t),u(t))dt+l(x(t_0),x(t_1)),$$

$$f = \sum_{i=0}^{m} \mu_i f_i \,,\ l = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \psi_i \,.$$

Принцип Лагранжа в задаче Лагранжа означает, что найдутся множители Лагранжа $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m, p$, удовлетворяющие условиям неотрицательности и дополняющей нежесткости (по неравенствам), условиям стационарности $p' + A^* p = \hat{f}_x$ и $B^* p = \hat{f}_u$ и условиям трансверсальности $p(t_j) = (-1)^j \hat{l}_{\xi_j}$, $j = 0{,}1$.

5.3 Принцип Лагранжа для выпуклых задач

Для выпуклых задач принцип Лагранжа приобретает законченную форму: в точке минимума задачи с ограничениями функция Лагранжа (при некоторых множителях Лагранжа) имеет минимум в задаче без ограничений (или по ограничениям, не включенным в функцию Лагранжа). При этом, если множитель Лагранжа λ_0 не равен нулю, то необходимые условия для выпуклой задачи являются достаточными. Докажем это.

Определение.

Выпуклой задачей или задачей выпуклого программирования называется следующая экстремальная задача:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1,...,m, \quad x \in A. \qquad (5.3.1)$$

Здесь $f_i(x) : X \to R, i = 0,1,...,m$, то f_i – выпуклые функции, отображающие пространство X в расширенную прямую; $A \subset X$ – выпуклое множество. Функция Лагранжа задачи (5.3.1) имеет вид:

$$L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Теорема (принцип Лагранжа для выпуклых задач или теорема Куна-Таккера).

a) Пусть X – линейное пространство, $f_i(x): X \to R, i = 0,1,...,m$ – выпуклые функции; $A \subset X$ – выпуклое множество. Тогда если $\hat{x}$ – решение выпуклой задачи (5.3.1), то найдутся число λ_0 и ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m) \in R^m$, не равные одновременно нулю, обладающие:

1) свойствами неотрицательности $(\lambda_i \geq 0, 0 \leq i \leq m)$,

2) дополняющей нежесткости $(\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, i = 1,...,m)$ и

3) такие, что функция Лагранжа задачи достигает минимума по $x \in A$ в точке $\hat{x}$: $\min_{x \in A} L(x, \lambda, \lambda_0) = L(\hat{x}, \lambda, \lambda_0)$ (в этом случае мы говорим, что выполнен принцип минимума для функции Лагранжа).

b) Если для допустимой точки $\hat{x}$ выполнены условия 1) – 3) и $\lambda_0 \neq 0$, то

$\hat{x} \in abs\min$.

c) Если при выполнении 1)–3) выполнено также и условие Слейтера, т.е. существует точка $\bar{x} \in A$, для которой $f_i(x) < 0, i = 0,1,...,m$, то $\lambda_0 \neq 0$.

Доказательство.

Не ограничив себя в общности, можно считать, что $f_0(\hat{x}) = 0$ (иначе f_0 заменим на $f_0 - f_0(\hat{x})$). Рассмотрим множество

$$B = \{b = (b_0,...,b_m) \in R^{m+1} \big| \exists x \in A : f_i(x) \leq b_i\}.$$

B – непустое множество (так как R^{m+1} содержится в *B,* надо взять $\hat{x}$ вместо *x* в определении *B*). Оно выпукло, так как если b и b' – элементы из *B* и точки x, x' таковы, что $f_i(x) \leq b_i$, а $f_i(x') \leq b_i'$, то положив $x_\alpha = \alpha x + (1-\alpha)x'$, получим, что $b_\alpha = \alpha b + (1-\alpha)b' \in B$ (так как $f_i(x_\alpha) \leq \alpha f_i(x) + (1-\alpha) f_i(x')$). При этом луч $(c_0, 0,...,0), c_0 < 0$ не пересекается с *B* (иначе нашелся бы элемент $\bar{x} \in A$ такой, что $f_i(\bar{x}) \leq 0$, а $f_0(\bar{x}) \leq c_0 < 0$, что означало бы, что $\hat{x}$ – не минимум в задаче).

Значит найдутся множители $\lambda_0,...,\lambda_m$ такие, что

$$\sup_{c_0<0}(\lambda_0 c_0) \le \inf_{b\in B}\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i b_i\right). \qquad (5.3.2)$$

Если допустить, что $\lambda_0 < 0$, то верхняя грань слева была бы равна бесконечности, что противоречит (5.3.2). Но тогда $\sup_{c_0<0}(\lambda_0 c_0) = 0$.

Если предположить, что $\lambda_i < 0, 1 \le i \le m$, то нижняя грань в правой части (5.3.2) равнялась бы минус бесконечности, что противоречит тому, что эта нижняя грань неотрицательна.

Положив $b_0 = ... = b_{i-1} = 0, b_i = f_i(\hat{x}), b_{i+1} = ... = b_m = 0$, получим, что $\lambda_i f_i(\hat{x}) \ge 0$, откуда и из $\lambda_i \ge 0, f_i(\hat{x}) < 0$ следует, что $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$. Наконец, из (5.3.2) следует, что

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x) \ge 0 = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(\hat{x}).$$

Утверждение (a) теоремы доказано.

Докажем (b). Имеем

$$f_0(x) = \lambda_0^{-1}(\lambda_0 f_0(x))^1 = \lambda_0^{-1}L(x,\lambda,\lambda_0)^3 \ge \lambda_0^{-1}L(\hat{x},\lambda,\lambda_0)^2 = f_0(x).$$

Доказано (b). Наконец, если выполнены требования a) – c) и условие Слейтера, то, предположив, что $\lambda_0 = 0$, получим:

$$0 \ge \sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(\bar{x}) = L(\bar{x},\lambda,0) \overset{3}{\ge} L(\hat{x},\lambda,0) = 0.$$

Противоречие. Теорема доказана.

5.4 Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств

Определение.

Пусть X,Y – нормированные пространства, U – окрестность точки $\hat{x}$, $f_i : U \to R, 0 \le i \le m, i \ne 1, f_1 : U \to Y$. Если все функции f_i и отображение f_1 обладают некоторой гладкостью, задачу

$$f_0(x) \to \min, f_i(x) \le 0, f_1(x) = 0 \tag{5.4.1}$$

называем гладкой задачей с ограничением типа равенств и неравенств.

Теорема (принцип Лагранжа для гладких задач с равенствами и неравенствами).

Пусть в задаче (5.4.1) функции $f_i, 0 \le i \le m, i \ne 1$ и отображение f_1 строго дифференцируемы в точке $\hat{x}$ (условие гладкости) и, кроме того, $f_1'(\hat{x})X$ – замкнутое подпространство Y (условие слабой регулярности). Тогда, если $\hat{x}$ доставляет локальный минимум задаче (5.4.1), то для нее выполнен принцип Лагранжа. т.е. найдутся множители Лагранжа $(\lambda_0, \lambda) \in Y^* \times R^{m+1}$, не равные одновременно нулю, удовлетворяющие условиям неотрицательности, дополняющей нежесткости и стационарности:

$$L(\hat{x}, \lambda_0, y^*) = 0 \Leftrightarrow [\sum_{i=0, i \ne 1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}), x] + [y^* f_1'(\hat{x}), x] = 0, \forall x \in X.$$

Оставим теорему без доказательства.

5.5 Принцип Лагранжа для задачи оптимального управления с закрепленными концами

Определение.

Задачей оптимального управления с закрепленными концами называется следующая экстремальная задача:

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt \to \min, x'(t)=$$
$$=\varphi(t,x(t),u(t)), x(t_i)=x_i, i=0,1, u(t)\in U. \qquad (5.4.2)$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, f – функция $n+r+1$ переменного, φ – отображение из R^{n+r+1} в R^n, U – некоторое (произвольное непустое) множество в R^r, отрезок $[t_0,t_1]$фиксирован.

Задачу (5.4.2) рассмотрим в пространстве $Z = PC^1([t_0,t_1],R^n)\times$ $\times PC^1([t_0,t_1],R^r)$ (декартовом произведении кусочно-непрерывно дифференцируемых вектор-функций из $[t_0,t_1]$ в R^n и кусочно-непрерывных вектор-функций из $[t_0,t_1]$ в R^r).

Допустимую пару $(\hat{x},\hat{u})\in Z$ назовем оптимальным процессом в задаче (5.4.2) или сильным минимумом в этой задаче, если существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой пары (x,u), для которой $|x-\hat{x}|_{C([t_0,t_1],R^n)} < \varepsilon$ выполнено неравенство $J(x,u)\ge J(\hat{x},\hat{u})$.

Теорема (необходимое условие оптимальности в задаче с закрепленными концами).

Пусть $f, f_x, \varphi, \varphi_x$ – непрерывны. Тогда существует решение p дифференциального уравнения (сопряженного уравнения)

$$-p'(t)+\hat{f}_x(t)-\hat{\varphi}_x^*(t)p(t)=0, p(t_1)=0 \qquad (5.4.3)$$

такое, что в любой точке τ непрерывности функции выполнен принцип минимума (выражающий (совместно с сопряженным уравнением) принцип Лагранжа для задачи (5.4.3)):

$$\min_{u\in U}(f(\tau,\hat{x}(\tau),u))-[p(\tau),\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),u)]=\hat{f}(\tau)-[p(\tau),\hat{\varphi}(\tau)]. \quad (5.4.4)$$

Равенство (5.4.4) эквивалентно соотношению

$$\max_{u\in U}([p(\tau),\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),u)]-f(\tau,\hat{x}(\tau),u))=[p(\tau),\hat{\varphi}(\tau)]-\hat{f}(\tau),$$

называемому принципом максимума Понтрягина.

6. УСЛОВИЕ ЛЕЖАНДРА, ЯКОБИ И ВЕЙЕРШТРАССА

Определение.

Пусть

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t))dt \to \min; x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \qquad (6.1)$$

простейшая задача вариационного исчисления. Решение уравнения Эйлера называется экстремалью этой задачи. Говорят, что на экстремали $\hat{x}$ удовлетворяется условие Лежандра, если $A(t) = \hat{f}_{x'x'} \geq 0, \forall t \in [t_0, t_1]$; если $A(t) > 0$, говорят, что выполнено усиленное условие Лежандра.

Говорят, что на экстремали $\hat{x}$ удовлетворяется условие Якоби, если (при выполнении дополнительных требований $A(t) \in C^1([t_0, t_1])$) и при этом выполнено усиленное условие Лежандра $A(t) > 0$, то на (t_0, t_1) не должно быть сопряженных точек, т. е. нулей решения задачи Коши $h(t_0) = 0, h'(t_0) = 1$ уравнения Якоби –

$$-\frac{d}{dt} A(t)h' + B(t)h = 0,$$

где $B(t) = \hat{f}_{xx}(t) - \frac{d}{dt}\hat{f}_{x'x'}(t)$.

Если сопряженных точек нет на полуинтервале $(t_0, t_1]$, то говорят, что выполнено усиленное условие Якоби.

Теорема (необходимые условия второго порядка в простейшей задаче). Пусть в простейшей задаче интегрант $f : R^3 \to R$ – дважды непрерывно-дифференцируемая функция. Если $\hat{x} \in C^2([t_0, t_1])$ доставляет слабый минимум в простейшей задаче, то выполняются:

a) уравнение Эйлера,

b) условие Лежандра,

c) условие Якоби.

Если $\hat{x}$ доставляет сильный минимум в задаче (6.1), тогда помимо условий Эйлера, Лежандра и Якоби должно выполняться ещё d) условие Вейерштрасса.

Доказательство.

Начнем с условий сильного минимума.

Редуцируем простейшую задачу к задаче оптимального управления:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt \to \min; x'(t) = u \in R, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \qquad (6.2)$$

Оптимальный процесс в этой задаче – это то же самое, что сильный минимум в простейшей задаче (6.1). Применим к этой задаче принцип Лагранжа, который равносилен здесь принципу максимума. Для этого составим функцию Лагранжа (легко понять, что число λ_0 можно выбрать равным единице):

$$L(x, p(t), \mu_0, \mu_1, 1) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t) + p(t)(x'(t) - u(t)))dt + \mu_0 x(t_0) + \mu_1 x(t_1).$$

Тогда, если $(\hat{x}, \hat{x}')$ – оптимальный процесс в (6.2), то должны удовлетворяться уравнение Эйлера и принцип минимума (условия трансверсальности здесь не информативны):

$$-p'(t) + \hat{f}_x(t) = 0, \qquad (6.3)$$

$$f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)u \geq \hat{f}(t) - p(t)\hat{x}'. \qquad (6.4)$$

Дифференцируя (6.4) по u, получаем равенство $p(t) = \hat{f}_x(t)$, из которого совместно с (6.3) приходим к уравнению Эйлера. Дифференцируя (6.4) второй раз, получаем неравенство $\hat{f}_x(t) = A(t) \geq 0$ (это условие минимума второго порядка в точке $\hat{x}'$ функции $f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)u$). Таким образом, введено условие Лежандра как условие сильного минимума. Само же неравенство (6.4) равносильно неравенству $E(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), u) \geq 0, u \in R^n$ и это означает, что доказана необходимость для сильного минимума условия Вейерштрасса.

Докажем условия Лежандра и Якоби как условия слабого минимума.

Пусть $h \in C^1([t_0, t_1]), h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Обозначая $f_h(s) = J(\hat{x} + sh)$, дифференцируя дважды по s, полагая $s = 0$ и пользуясь тем, что $f_h^{/}(0) = 0$, получаем

$$f_h^{//}(0) = K(h) = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{f}_{x'x'}(t)\dot{h}^2(t) + 2\hat{f}_{xx'}(t)h'(t)h(t) + \hat{f}_{xx}(t)h^2(t))dt \geq 0, \quad (6.5)$$

так как $\hat{x}$ – экстремум.

Интегрируя среднее слагаемое по частям, получаем (функции A и B определены в формулировке теоремы), что в задаче о минимизации квадратичного функционала

$$K(h) = \int_{t_0}^{t_1} (A(t)h'^2(t) + B(t)h(t))dt \to \min; \; h(t_0) = h(t_1) = 0 \quad (6.6)$$

достигается абсолютный минимум в точке $\overline{h}(t) = 0$.

Применяя принцип максимума к этой задаче как к задаче оптимального управления с $h' = u$ и ограничением $u(t) \in R$, приходим к неравенству $A(t)u^2 \geq 0, \forall u \in R$, т. е. $A(t) \geq 0$. Казалось бы, не получено ничего нового, ибо применяли условие сильного минимума для функционала *К*. Но на самом деле это не так.

Доказано, что если для любой кусочно-непрерывно дифференцируемой функции квадратичный функционал неотрицателен, то

$A(t) \geq 0$. Значит тем более это условие должно быть выполнено, если рассматривать неотрицательность лишь на функциях из $C^1([t_0, t_1])$. Таким образом, мы доказали условие Лежандра как условие слабого минимума.

Аналогично следует поступить с условием Якоби.

Задача ценовой дискриминации

Данная задача связана с распределением товара одного вида по разным рынкам с разным спросом для того, чтобы максимизировать прибыль. Из-за неодинаковой эластичности спроса на рынках происходит установление разных цен на один и тот же товар, что приводит к так называемой ценовой дискриминации.

Пусть $x_1, x_2, .. x_m$ – количество одного и того же товара, продаваемого на m рынках по ценам $P_i, i = \overline{1, m}$.

Если $C = S(x_1 + x_2 + ... + x_m)$ – функция затрат, зависящая от продаваемого товара, то функция прибыли: $f = P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... +$ $+ P_m x_m - S(x_1 + x_2 + ... + x_m)$. Необходимое условие экстремума приводит к системе: $P_i + x_i P_i' - S_i' = 0$.

Проанализируем доход $R_i = x_i P_i$ в зависимости от цены на товар.

Скорость роста дохода выражается через первую производную:

$$R_i = P_i + x_i P_i' = P_i \left(1 + \frac{x_i P_i'}{P_i} \right) = P_i \left(1 + \frac{1}{E_i} \right),$$

где $E_i = \dfrac{P_i}{x_i P_i'}$ – эластичность i-рынка.

Так как эластичность обычно отрицательна, то из формулы скорости роста дохода следует:

или $|E_i| < 1$, тогда $R_i' < 0$ – рынок неэластичный, возникает ценовая дискриминация и требуется перераспределить количество товара по рынкам;

или $|E_i| > 1$, тогда $R_i' > 0$ – рынок эластичен, ценовой дискриминации нет, распределение товара при такой эластичности считают оптимальным.

Пусть имеется три рынка с количеством товара x_1, x_2, x_3 и с ценами $P_1 = 25 - 5x_1$, $P_2 = 45 - 4x_2$, $P_3 = 85 - 10x_3$. Функция затрат имеет вид $C = 10 + 5(x_1 + x_2 + x_3)$. Нужно распределить товар по рынкам так, чтобы прибыль была максимальной. Проверить эластичность полученных рынков, в случае неэластичности перераспределить товар.

В нашем случае функция прибыли имеет вид

$$f = x_1(25 - 5x_1) + x_2(45 - 4x_2) + x_3(85 - 10x_3) - 10 - 5(x_1 + x_2 + x_3).$$

Найдем частные производные функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_i. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20 - 10x_1 - 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 45 - 8x_2 - 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 85 - 20x_3 - 5.$$

Отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$. Найдем вторую производную функции прибыли: $\frac{\partial^2 f}{\partial {x^2}_1} = -10$, $\frac{\partial^2 f}{\partial {x^2}_2} = -8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial {x^2}_3} = -20$. Составить матрицу вторых производных:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}.$$

Вычислим старшие миноры матрицы $A_1 = (-1)^1(-10) > 0$, $A_2 = (-1)^2(-8)(-10) > 0$, $A_3 = (-1)^3(-10)(-8)(-20) > 0$, по принципу Лагранжа получим, что в точке (2,5,4) достигается локальный максимум.

Вычислим эластичность рынков: $E_1 = \frac{25 - 5x_1}{x_1\left(20 - 10x_1\right)} = -1{,}5 > 1$, $E_2 = -\frac{25}{20} > 1$, $E_3 = \frac{45}{45} > 1$. Следовательно, все рынки эластичны, товар распределен оптимально.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$ оптимальное распределение товара по рынку.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Правило решения.

1. При решении уравнения с разделяющимися переменными $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ следует привести его к уравнению вида: $\left(\frac{M_1(t)}{N_1(t)} + \frac{N_2(x)}{M_2(x)}x'\right)dt = 0$.

2. Проинтегрировать полученное выражение.

$\int \frac{M_1(t)}{N_1(t)}dt + \int \frac{N_2(x)}{M_2(x)}dx = C$ – общий интеграл исходного уравнения.

Пример.

Рассмотрим уравнение

$$t(1+x^2)dt = x(1+t^2)dx.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{t}{1+t^2}dt,$$

в котором функции $1+t^2, 1+x^2$ не обращаются в нуль. Поэтому все решения получаются интегрированием последнего уравнения и имеют вид

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{t}{1+t^2}dt + c.$$

Эти решения можно переписать в виде

$$\ln(1+x^2) = \ln(1+t^2) + \ln C_1,$$

где C_1 – произвольная положительная постоянная.

Окончательно получим, что $1 + x^2 = C_1(1 + t^2)$.

Правило решения.

1. При решении линейного уравнения $x' + p(t)x = q(t)$ решается с помощью подстановки $x(t) = u(t)v(t)$.

2. Исходное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + puv = q \Rightarrow u'v + u(v' + pv) = q .$$

3. Подбирают $v(t)$ так, что $(v' + pv) = 0$. Тогда $u'v = q$. Находят $v(t)$.

4. Так как $(v' + pv) = 0$, то $u'v = q$. Тогда

$$u' = \frac{q}{v} \Rightarrow u' = qe^{\int pdt} \Rightarrow u = \int qe^{\int pdt} dt + C .$$

5. Окончательное решение находят как $x(t) = u(t)v(t)$.

Пример.

Рассмотрим уравнение

$$x' + 2tx = te^{-t^2} .$$

С помощью подстановки $x(t) = u(t)v(t)$ получаем

$$u'v + uv' + 2tuv = te^{-t^2} \Rightarrow u'v + u(v' + 2tv) = te^{-t^2} .$$

Находим $v(t)$:

$$(v' + 2tv) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2tdt \Rightarrow \ln v = -t^2 \Rightarrow v = e^{-t^2} .$$

Таким образом,

$$u' = \frac{te^{-t^2}}{v} \Rightarrow du = tdt \Rightarrow u = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow x = \left(\frac{t^2}{2} + C\right)e^{-t^2} .$$

Правило решения.

1. Проверить уравнение на однородность.

2. При решении однородного уравнения преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной $z=\frac{x}{t}$. При этом $x=tz, dx=zdt+tdz$.

3. Полученное уравнение с разделяющимися переменными решаем по приведенному выше правилу.

4. В окончательном решении следует заменить z на $\frac{x}{t}$.

Пример.

Решить уравнение

$$x'=\frac{tx}{t^2-x^2}.$$

Проверяем на однородность

$$f(\lambda t,\lambda x)=\frac{\lambda t\lambda x}{(\lambda t)^2-(\lambda x)^2}=\frac{tx}{t^2-x^2}=f(t,x).$$

Применим подстановку $z=\frac{x}{t}$. Тогда

$$z+tz'=\frac{t^2z}{t^2-t^2z^2}\Rightarrow tz'=\frac{z}{1-z^2}-z\Rightarrow tz'=\frac{z-z+z^3}{1-z^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tz'=\frac{z^3}{1-z^2}\Rightarrow\frac{1-z^2}{z^3}dz=\frac{dt}{t}\Rightarrow\int\frac{1-z^2}{z^3}dz=ln\,Ct\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}\right)=ln\,Ct\Rightarrow-\frac{1}{2z^2}-ln\,z=ln\,Ct\Rightarrow-\frac{1}{2z^2}=ln(Ctz)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2z^2}}=ln(Ctz)\Rightarrow e^{-\frac{t^2}{2x^2}}=Cx.$$

Правило решения.

1. Проверить: является ли уравнение $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ уравнением в полных дифференциалах, то есть выполняется ли равенство $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

2. Рассмотреть функцию $u = u(t,x)$ такую, что

$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t,x), \frac{\partial u}{\partial x} = N(t,x)$.

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0.$$

3. $u(t,x) = C$ – решение исходного уравнения.

Пример.

Решить уравнение

$$\left(x\cos t + t^2\right)dt + \left(\sin t + 2x\right)dx = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \cos t, \frac{\partial N}{\partial t} = \cos t \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Построим функцию $u = u(t,x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x\cos t + t^2 \Rightarrow u = \int\left(x\cos t + t^2\right)dt + \varphi(x) =$$

$$= x\sin t + \frac{t^3}{3} + \varphi(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \sin t + \varphi'(x) = \sin t + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2 \Rightarrow u = x\sin t + \frac{t^3}{3} + x^2.$$

Таким образом, решение уравнения в неявной форме имеет вид

$$x\sin t + \frac{t^3}{3} + x^2 = C.$$

Задания для самостоятельного выполнения

Решить следующие уравнения:

1. $(tx^2+t)dt+(x-t^2x)dx=0$.
2. $txx'=1-t^2$.
3. $xx'=\dfrac{1-2t}{x}$.
4. $x'\mathrm{tg}t-x=a$.
5. $tx'+x=x^2$.
6. $x'+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-t^2}}=0$.
7. $x'=\dfrac{x^2}{t^2}-2$.
8. $tdx-xdt=xdx$.
9. $x'=\dfrac{t+x}{t-x}$.
10. $x'=\dfrac{2tx}{t^2-x^2}$.
11. $x'=\dfrac{t}{x}+\dfrac{x}{t}$.
12. $tx'-x=\sqrt{t^2+x^2}$.
13. $3e^t\mathrm{tg}x+\left(1-e^t\right)\dfrac{x'}{\cos^2 x}=0$.
14. $x'+2x=4t$.
15. $x'+2tx=te^{-t^2}$.
16. $x'+\dfrac{1-2t}{t^2}x=1$.
17. $(1+t^2)x'-2tx=(1+t^2)^2$.
18. $x'+x=\cos t$.
19. $x'=\dfrac{1}{2t-x^2}$.

20. $tx' + x - e^t = 0$.

21. $(2t^3 - tx^2)dt + (2x^3 - t^2x)dx = 0$.

22. $\dfrac{tdx}{t^2 + x^2} = \left(\dfrac{x}{t^2 + x^2} - 1\right)dt$.

23. $e^x dt + (te^x - 2x)dx = 0$.

24. $xt^{x-1}dt + t^x \ln t dx = 0$.

25. $\dfrac{tdt + xdx}{\sqrt{t^2 + x^2}} = \dfrac{xdt - tdx}{t^2}$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

Правило решения.

1. При решении линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка $x'' + p_1x' + p_2x = f(t), p_i = \mathrm{const}$ составляют характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного уравнения $x'' + p_1x' + p_2x = 0$:

$$k^2 + p_1k + p_2 = 0.$$

2. В зависимости от корней характеристического уравнения находят общее решение $\overline{x}$ соответствующего линейного однородного уравнения.

Если корни характеристического уравнения k_1, k_2 действительные и различные, то $\overline{x} = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если корни характеристического уравнения k_1, k_2 действительные и равные, то

$$\overline{x} = e^{kt}(C_1 + C_2t).$$

Если корни характеристического уравнения k_1, k_2 комплексно сопряженные: $k_1, k_2 = \alpha \pm i\beta$, то данному случаю отвечает решение $\bar{x} = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

3. В зависимости от функции $f(t)$ находят частное решение x^* линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Если $f(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m$, то x^* также ищут в виде многочлена степени m:

$$x^* = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Если $f(t) = Ce^{\gamma t}$, то x^* также представляют экспоненциальной функцией: $x^* = Ae^{\gamma t}$ или $x^* = At\ e^{\gamma t}$, или $x^* = At^2 e^{\gamma t}$ в зависимости от корней характеристического уравнения. В первом случае корни не совпадают с величиной γ; во втором – корни k_1, k_2 действительные и различные, и величина γ равна одному из них, а в третьем корни k_1, k_2 действительные и равные, и их значения совпадают с величиной γ.

Если $f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, то x^* ищется в виде $x^* = C \cos \omega t + D \sin \omega t$.

4. Общее решение $x(t)$ неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\bar{x}$ и частного решения x^* неоднородного уравнения:

$$x(t) = \bar{x}(t) + x^*(t).$$

Пример.

Решить уравнение:

$$x'' - 6x' + 9x = 2t^2 - t + 3.$$

Соответствующее однородное уравнение:

$$x'' - 6x' + 9x = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет два равных действительных корня $k_1 = k_2 = 3$, значит

$$\bar{x}(t) = e^{3t}(C_1 + C_2 t).$$

Так как $f(t) = 2t^2 - t + 3$, то $x^*(t) = B_0 t^2 + B_1 t + B_2$. После двойного дифференцирования, подстановки и приведения подобных членов в левой части уравнения, в обеих его частях получают многочлены степени 2.

Для того, чтобы эти многочлены тождественно совпадали при любых значениях t, должны совпадать их коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях уравнения.

Приравнивая слева и справа коэффициенты при свободных членах и множителях t, t^2, получим 3 алгебраических уравнения с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} 9B_2 - 6B_1 + 2B_0 = 3, \\ 9B_1 - 12B_0 = -1, \\ 9B_0 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = \dfrac{2}{9}, \\ B_1 = \dfrac{5}{27}, \\ B_2 = \dfrac{11}{27}. \end{cases}$$

Тогда $x^*(t) = \dfrac{2}{9}t^2 + \dfrac{5}{27}t + \dfrac{11}{27}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$x(t) = e^{3t}(C_1 + C_2 t) + \frac{2}{9}t^2 + \frac{5}{27}t + \frac{11}{27}.$$

Задания для самостоятельного выполнения.

1. $x'' + x' - 2x = 0$.
2. $x'' + x' - 2x = t^2 - 1$.
3. $x'' + x' - 2x = -7$.

4. $x'' + x' - 2x = 2e^t$.

5. $x'' + x' - 2x = -\cos t$.

6. $x'' + x' - 2x = \cos t + \sin t$.

7. $x'' + x = 0$.

8. $x'' + x = 4t$.

9. $x'' + x = 2\sin t$.

10. $x'' + x = e^{3t}$.

11. $3x'' - 2x' - 8x = 0$.

12. $3x'' - 2x' - 8x = 3t - 1$.

13. $x'' + x' - 2x = 0$.

14. $x'' + 6x' + 13x = 0$.

15. $x'' - 7x' + 6x = 2t$.

16. $x'' - 7x' + 6x = 2e^t$.

17. $x'' - 7x' + 6x = \sin t$.

18. $x'' + 2x' + x = 1$.

19. $x'' + 2x' + x = 3e^{2t}$.

20. $x'' + 2x' + x = \sin t - 2\cos t$.

21. $3x'' - 2x' - 8x = 2e^{-2t}$.

22. $3x'' - 2x' - 8x = -\sin t$.

23. $x'' + 16x' + 64x = 0$.

24. $x'' + 16x' + 64x = t^2 - 2t - 3$.

25. $x'' + 16x' + 64x = \cos t$.

Конечномерные гладкие задачи без ограничений

Правило решения.

1. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Решения этой системы называются стационарными точками и обозначаются $\hat{x}$.

2. Проверить выполнение условий экстремума второго порядка. Для этого найти матрицу вторых производных:

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Найти последовательные главные миноры $A_{i\ldots k}$. Если все $A_{i\ldots k} > 0$, то $\hat{x} \in loc\min f$; если все $(-1)^k A_{i\ldots k} > 0$, то $\hat{x} \in loc\max f$.

Если предыдущие условия не выполняются, то надо проверить, будет ли

$A_{i_1\ldots i_k} \geq 0;\ 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n, k = 1,\ldots,n$ (тогда $A \geq 0$) и

$(-1)^k A_{i_1\ldots i_k} \geq 0;\ 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n, k = 1,\ldots,n$ (тогда $A \leq 0$).

Если выполняются оба условия $A \leq 0$ и $A \geq 0$, то экстремума нет. Если выполняется одно из условий $A \leq 0$ или $A \geq 0$, то проверка на экстремум производится по определению экстремума.

Пример.

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2} \to extr.$$

Необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\begin{cases} f_{x_1} = x_2 - \dfrac{50}{x_1^2} = 0, \\ f_{x_1} = x_1 - \dfrac{50}{x_2^2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 x_2 = 50, \\ x_1 x_2^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} x_2, \\ x_1 x_2^2 = 20. \end{cases}$$

Стационарная точка $\hat{x} = (5,2)$.

Вторые частные производные

$$f_{x_1x_1}=\frac{100}{x_1^3},f_{x_1x_2}=f_{x_2x_1}=1,f_{x_2x_2}=\frac{40}{x_2^3}.$$

Матрица вторых частных производных в точке $\hat{x}$: $A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

Последовательные главные миноры:

$$A_1=\frac{4}{5},A_2=\begin{vmatrix}\frac{4}{5} & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=3>0\Rightarrow \hat{x}\in loc\min f(x_1,x_2).$$

Минимальное значение функции $f_{\min}=30$.

Задания для самостоятельного выполнения.

1. $f=(x_1-1)^2-2x_2{}^2\to extr$.
2. $f=x_1{}^4+x_2{}^4-2x_1{}^2+4x_1x_2-2x_2{}^2\to extr$.
3. $f=(x_1{}^2+x_2{}^2)e^{-(x_1{}^2+x_2{}^2)}\to extr$.
4. $f=\dfrac{1+x_1-x_2}{\sqrt{1+x_1{}^2+x_2{}^2}}\to extr$.
5. $f=x_1+\dfrac{x_2^2}{4x_1}+\dfrac{x_3^2}{x_2}+\dfrac{2}{x_3}\to extr,\quad (x_1>0,x_2>0,x_3>0)$.
6. $f=x_1{}^2+x_2{}^2-2x_1-x_1x_2+x_2\to extr$.
7. $f=\sin x_1\sin x_2\sin(x_1+x_2)\to extr,\quad (0\le x\le\pi,0\le y\le\pi)$.
8. $f=x_1x_2{}^2x_3{}^3(1-x_1-2x_2-3x_3)\to extr,(x_1>0,x_2>0,x_3>0)$.
9. $f=x_1{}^3x_2{}^2(6-x_1-x_2)\to extr$.
10. $f=x_1{}^2+x_2{}^2+2x_3{}^2+x_1x_2+2x_1x_3+3x_2x_3-x_1\to extr$.
11. $f=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_1x_2+x_1-2x_3\to extr$.
12. $f=2x_1{}^3+x_2{}^2+5x_1{}^2+x_1x_2{}^2\to extr$.
13. $f=x_1x_2(5-x_1-x_2)\to extr$.
14. $f=(x_1+x_2{}^2+2x_2)e^{2x_1}\to extr$.

15. $f=(2x_1-x_1{}^2)(4x_2-x_2{}^2)\to extr$.

16. $f=\sin x_1+\sin x_2+\cos(x_1+x_2)\to extr,\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4},0\le y\le\dfrac{\pi}{4}\right)$.

17. $f=x_2\sqrt{1+x_1}+x_1\sqrt{1+x_2}\to extr$.

18. $f=2x_1^2+x_2^2+2x_3-x_1x_2-x_1x_3\to extr$.

19. $f=10-3x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2\to extr$.

20. $f=4(x_1-x_2)-x_1{}^2-x_2{}^2\to extr$.

21. $f=(x_1+x_2{}^2+2x_2)e^{x_2}\to extr$.

22. $f=\sin x_1\sin x_2\to extr,\quad (0\le x\le\pi,0\le y\le\pi)$.

23. $f=x_1{}^2+(x_2-1)^2\to extr$.

24. $f=x_1{}^2-(x_2+1)^2\to extr$.

26. $f=\dfrac{1+x_1+x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}\to extr$.

Конечномерные гладкие задачи с ограничениями типа равенств

Правило решения.

1. Составить функцию Лагранжа $L(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)$.

2. Написать необходимое условие экстремума первого порядка – условие стационарности:

$$L'(\hat{x})=0\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i{}'(\hat{x})=0.$$

3. Решение указанной системы даёт стационарные точки. При этом сначала рассматривается случай $\lambda_0=0$, а затем $\lambda_0=1$ или любое другое положительное число. Обычно этого достаточно, чтобы уста-

новить, являются ли стационарные точки точками локального или абсолютного максимума или минимума по их определению. Можно воспользоваться достаточными условиями экстремума второго порядка. При этом для максимума удобно брать $\lambda_0 = -1$ или любое другое отрицательное число.

Пример.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \to extr;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Функция Лагранжа:

$$L = \lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) + \lambda_2 (x_1 + x_2 + x_3).$$

Условия стационарности:

$L_{x_1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 x_2 x_3 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0$,

$L_{x_2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 x_1 x_3 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$,

$L_{x_3} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 x_1 x_2 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 = 0$.

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда $2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 = 0$.

Если эти три равенства сложить и принять во внимание, что $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, получаем $\lambda_1 = 0$, а значит и $\lambda_2 = 0$. Отсюда $\lambda_0 \neq 0$.

Принимаем $\lambda_0 = 1$. Получаем:

$x_2 x_3 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0$,

$x_1 x_3 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$,

$x_1 x_2 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 = 0$.

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$(x_2 - x_1)x_3 + 2\lambda_1 (x_1 - x_2) = 0$ или $(x_2 - x_1)(x_3 - 2\lambda_1) = 0$.

Аналогично имеем два других уравнения:

$(x_2 - x_3)(x_1 - 2\lambda_1) = 0$ и $(x_1 - x_3)(x_2 - 2\lambda_1) = 0$.

Из этих уравнений и ограничительных условий видим, что две переменные равны некоторому числу *p*, а третья равна $-2p$ (из $x_1 + x_2 + x_3 = 0$).

Тогда из $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ имеем $p^2 + p^2 + 4p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Итак,

$$\hat{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Для первых трех $f=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, для следующих трех $f=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Так как функция непрерывна и определена на окружности, то по следствию из теоремы Вейерштрасса первые три значения дают $abs\min f$, а вторые – $abs\max f$.

Задания для самостоятельного выполнения.

1. $f=x_1x_2x_3\to extr;\ x_1+x_2-x_3=3,\ x_1-x_2-x_3=8$.

2. $f=e^{x_1x_2}\to extr;\ x_1+x_2=1$.

3. $f=\cos^2 x_1+\cos^2 x_2\to extr;\ x_2-x_1-\frac{\pi}{4}=0$.

4. $f=x_1x_2\to extr;\ x_1^2+x_2^2=1$.

5. $f=x_1^2+x_2^2\to extr;\ \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{3}=1$.

6. $f=x_1x_2x_3\to extr;\ x_1+x_2+x_3=5,\ x_1x_2+x_2x_3-x_1x_3=8$.

7. $f=6-4x_1-3x_2\to extr;\ x_1^2+x_2^2=1$.

8. $f=x_1-2x_2+2x_3\to extr;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=9$.

9. $f=\sin x_1\sin x_2\sin x_3\to extr;\ x_1+x_2+x_3=\frac{\pi}{2},\ x_1>0,x_2>0,x_3>0$.

10. $f=x_1^3+x_2^3\to extr;\ x_1+x_2=2,\ x_1>0,x_2>0$.

11. $f=x_1x_2\to extr;\ x_1^2+x_2^2=4$.

12. $f=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\to extr;\ \dfrac{1}{x_1^{\,2}}+\dfrac{1}{x_2^{\,2}}=\dfrac{1}{a^2}$.

13. $f=x_1+x_2+x_3\to extr;\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=1$.

14. $f=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}\to extr;\ x_1+x_2+x_3=1$.

15. $f=x_2^{\,2}+4x_3^{\,2}-4x_2x_3-2x_1x_3-2x_1x_2\to extr;$

$2x_1^{\,2}+3x_2^{\,2}+6x_3^{\,2}=1$.

16. $f=x_1+x_2\to extr;\ x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=1$.

17. $f=x_1+2x_2-x_3\to extr;\ x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=16$.

18. $f=e^{x_1x_2}\to extr; x_1-x_2=1$.

19. $f=\cos^2x_1+\cos^2x_2\to extr;\ x_2-x_1-\dfrac{\pi}{3}=0$.

20. $f=x_1x_2x_3\to extr;\ x_1+x_2+x_3=3,\ x_1-2x_2-x_3=6$.

21. Найти наибольшее значение произведения $xyzt$ неотрицательных чисел x,y,z,t при условии, что их сумма сохраняет постоянную величину $x+y+z+t=4c$.

22. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1,0)$ до эллипса $4x_1^{\,2}+9x_2^{\,2}=36$.

23. Найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $x-y=5$.

24. На эллипсе $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой $3x+y-9=0$.

25. На эллипсе $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой $x+y-4=0$.

Экстремали функционала. Уравнение Эйлера

Правило решения.

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида:

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),x'(t))dt \to extr;\ x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$$

на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки $P_0(t_0,x_0), P_1(t_1,x_1)$.

Известно, что для того, чтобы функционал, определенный на множестве функций $x=x(t)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$, достигал на данной функции $x=x(t)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{f}_{x'}+\hat{f}_x=0.$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями.

Уравнение Эйлера в развернутом виде:

$$x''(t)f_{x'x'}+x'(t)f_{xx'}+f_{tx'}-f_x=0,\ f_{x'x'}\neq 0.$$

Данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка; его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных, вообще говоря, определяются из граничных условий $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$.

Экстремум функционала может реализоваться только на тех экстремалях, которые удовлетворяют граничным условиям.

Краевая задача:

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d}{dt}\hat{f}_{x'} + \hat{f}_x = 0, \\
x(t_0) = x_0, \\
x(t_1) = x_1
\end{cases}
$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Пример.

На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$
J(x) = \int_1^2 (x'^2 - 2xt)dt;\ x(1) = 0, x(2) = -1?
$$

Здесь $f(t, x, x') = x'^2 - 2xt$, так что уравнение Эйлера имеет вид $x'' + t = 0$.

Тогда общее решение уравнения Эйлера:

$$
x(t) = -\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2 .
$$

Граничные условия дают систему линейных уравнений для определения C_1, C_2:

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 = \dfrac{1}{6}, \\
2C_1 + C_2 = \dfrac{2}{6}.
\end{cases}
$$

Отсюда $C_1 = \dfrac{1}{6}, C_2 = 0$. Следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой $x(t) = \dfrac{t}{6}(1 - t^2)$.

Задания для самостоятельного выполнения.

Найти экстремали следующих функционалов:

1. $J = \int\limits_{1}^{3} (3t - x)x'^2 dt;\, x(1) = 1, x(3) = 4.5$.

2. $J = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2) dt;\, x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. $J = \int\limits_{-1}^{0} (12tx - x'^2) dt;\, x(-1) = 1, x(0) = 0$.

4. $J = \int\limits_{1}^{2} (x'^2 + 2xx' + x^2) dt;\, x(1) = 1, x(2) = 0$.

5. $J = \int\limits_{0}^{1} x(1 + x'^2) dt;\, x(0) = x(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $J = \int\limits_{0}^{1} xx'^2 dt;\, x(0) = 1, x(1) = \sqrt[3]{4}$.

7. $J = \int\limits_{0}^{\pi} (4x\cos t + x'^2 - x^2) dt;\, x(0) = 0, x(\pi) = 0$.

8. $J = \int\limits_{0}^{1} (x'^2 - x^2 - x)e^{2t} dt;\, x(0) = 0, x(1) = e^{-1}$.

9. $J = \int\limits_{-1}^{1} (x'^2 - 2tx) dt;\, x(-1) = -1, x(1) = 1$.

10. $J = \int\limits_{-1}^{0} (x'^2 - 2tx) dt;\, x(-1) = 0, x(0) = 2$.

11. $J = \int\limits_{1}^{e} (tx'^2 + xx') dt;\, x(1) = 0, x(e) = 1$.

12. $J = \int\limits_{a}^{b} (2tx + (t^2 + e^x)x'^2) dt;\, x(a) = A, x(b) = B$.

13. $J=\int_0^1 (tx'^2+e^x)dt; x(0)=0, x(1)=\alpha$.

14. $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x'^2-x^2)dt; x(0)=1, x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. $J=\int_0^{\pi} (x'^2-x^2)dt; x(0)=1, x(\pi)=-1$.

16. $J=\int_0^1 (t+x'^2)dt; x(0)=1, x(1)=2$.

17. $J=\int_0^2 (t+x'^2)dt; x(0)=1, x(2)=4$.

18. $J=\int_0^1 (x^2+x'^2)dt; x(0)=0, x(1)=1$.

19. $J=\int_0^e (x^2+x'^2)dt; x(0)=0, x(e)=e$.

20. $J=\int_0^1 (4x^2+x'^2)dt; x(0)=e^2, x(1)=1$.

21. $J=\int_0^1 (x'^2-2x)dt; x(0)=0, x(1)=1$.

22. $J=\int_0^1 2x'^2 dt; x(0)=1, x(1)=2$.

23. $J=\int_0^3 (x'^2-1)dt; x(0)=0, x(3)=6$.

24. $J=\int_0^1 (tx-x'^2)dt; x(0)=1, x(1)=0$.

25. $J=\int_1^2 (2t-x')x' dt; x(1)=1, x(2)=2$.

Достаточные условия экстремума функционала

Правило решения.

Семейство кривых $x = x(t,c)$ образуют собственное поле в заданной области D, если через каждую точку (t,x) этой области проходит одна и только одна кривая семейства $x = x(t,c)$.

Угловой коэффициент $u(t,x)$ касательной к кривой семейства $x = x(t,c)$, проходящей через точку (t,x), называется наклоном поля в точке (t,x).

Семейство кривых $x = x(t,c)$ образуют центральное поле в области D, если эти кривые покрывают без самопересечений всю область D и исходят из одной точки (t_0, x_0), лежащей вне области D. Точка (t_0, x_0) называется центром пучка кривых.

Говорят, что экстремаль $x = x(t)$ включена в собственное поле экстремалей, если найдено семейство экстремалей $x = x(t,c)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$ экстремаль $x = x(t)$, причем эта экстремаль $x = x(t)$ не лежит на границе области D, в которой семейство $x = x(t,c)$ образует поле.

Если пучок экстремалей с центром в точке (t_0, x_0) в окрестности экстремали $x = x(t)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то говорят, что найдено центральное поле, включающее данную экстремаль $x = x(t)$. За параметр семейства $x = x(t,c)$ принимается угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке (t_0, x_0).

Кривая C доставляет слабый экстремум функционалу

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t))dt;\, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

если:

1. Кривая C является экстремалью функционала, удовлетворяющей граничным условиям, то есть является решением уравнения Эйлера для функционала, удовлетворяющим граничным условиям.

2. Экстремаль C может быть включена в поле экстремалей; в частности, это будет, если выполнено условие Якоби.

Аналитическая форма условия Якоби. Если решение $h = h(t)$ уравнения Якоби

$$(\hat{f}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{f}_{xx'})h - \frac{d}{dt}(\hat{f}_{x'x'}h) = 0,$$

удовлетворяющее условию $h(t_0) = 0$, обращается в нуль еще в какой-нибудь точке интервала $t_0 < t < t_1$, то сопряженная с $A(t_0, x_0)$ точка A^* лежит на дуге AB экстремали (точка B имеет координаты (t_1, x_1)).

Если существует решение $h = h(t)$ уравнения Якоби, удовлетворяющее условию $h(t_0) = 0$ и не обращающееся в нуль ни в одной точке полуинтервала $t_0 < t \le t_1$, то на дуге AB нет точек, сопряженных с $A(t_0, x_0)$. В этом случае дугу AB экстремали можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(t_0, x_0)$.

В уравнении Якоби в функции $\hat{f}_{xx}(t,x,x'), \hat{f}_{xx'}(t,x,x'), \hat{f}_{x'x'}(t,x,x')$ вместо $x = x(t)$ надо подставить правую часть уравнения экстремали $x = x(t, C_0)$.

3. Функция Вейерштрасса

$$E(t,x,x',u) = f(t,x,x') - f(t,x,u) - f_{x'}(t,x,x')(x'-u),$$

где $u = u(t,x)$ – наклон поля экстремалей, должна сохранять знак во всех точках (t,x), близких к экстремали C, и для близких к $u = u(t,x)$ значений x'. Функционал будет иметь максимум на C, если $E(t,x,x',u) \le 0$, и минимум, если $E(t,x,x',u) \ge 0$.

Пример.

Исследовать на экстремум функционал

$$J = \int_0^1 (x'^3 + x')dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2.$$

Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $x'x''=0$, так что экстремалями являются прямые $x(t)=C_1t+C_2$. Экстремалью, удовлетворяющей заданным граничным условиям, является прямая $x=2t$. Наклон поля в точках этой экстремали $u=2$. Очевидно, данная экстремаль $x=2t$ включается в центральное поле экстремалей $x=Ct$ с центром в точке $O(0,0)$. Нетрудно проверить, что в данном случае выполнено условие Якоби. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид

$$-\frac{d}{dt}(6x'h')=0,$$

где в силу уравнения экстремали имеем $x'=2$. Следовательно, уравнение Якоби примет вид $h''(t)=0$, откуда $h(t)=C_1t+C_2$. Из условия $h(0)=0$ получаем $C_2=0$. Так как это решение $h(t)=C_1t$ при $C_1\neq 0$, кроме точки $t=0$, нигде в нуль не обращается, то условие Якоби выполнено.

Составляем функцию Вейерштрасса:

$$E(t,x,x',u)=x'^3+x'-u^3-u-(x'-u)(3u^2+1)=(x'-u)^2(x'+2u).$$

Первый множитель всегда неотрицателен при любых x', а второй положителен при значениях x', близких к 2. Следовательно, выполнены все условия существования слабого минимума.

Задания для самостоятельного выполнения.

Исследовать на экстремум следующие функционалы:

1. $J=\int\limits_{-1}^{1}(12tx+x'^2+t^2)dt; x(-1)=-2, x(1)=0$.
2. $J=\int\limits_{0}^{a}(x'^2+9t^2-3t)dt; x(0)=0, x(a)=0$.
3. $J=\int\limits_{0}^{1}(1+x'^2)dt; x(0)=x(1)=0$.

4. $J=\int\limits_0^a x' e^{x'} dt; x(0)=1, x(a)=b (a>0)$.

5. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2) dt; x(0)=0, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

6. $J=\int\limits_0^1 (x'^2 - xx'^3) dt; x(0)=0, x(1)=0$.

7. $J=\int\limits_0^a x'^3 dt; x(0)=0, x(a)=b>0$.

8. $J=\int\limits_{t_0}^{t_1} n(x)\sqrt{1+x'^2(t)}\,dt; x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, n(x)>0$.

9. $J=\int\limits_0^a (6x'^2 - x'^4) dt; x(0)=0, x(a)=b, a>0, b>0$.

10. $J=\int\limits_0^1 e^t\left(x^2+\frac{1}{2}x'^2\right) dt; x(0)=1, x(1)=e$.

11. $J=\int\limits_0^1 e^t x'^2 dt; x(0)=1, x(1)=\ln 4$.

12. $J=\int\limits_1^2 \frac{t^3}{x'^2} dt; x(1)=1, x(2)=4$.

13. $J=\int\limits_0^a \frac{dt}{x'}; x(0)=0, x(a)=b, a>0, b>0$.

14. $J=\int\limits_0^1 (1+t)x'^2 dt; x(0)=0, x(1)=1$.

15. $J=\int\limits_1^2 (1-t)x'^2 dt; x(1)=0, x(2)=1$.

16. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x'^2) dt; x(0)=1, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

17. $J=\int\limits_{0}^{1}(x^2-x')dt; x(0)=1, x(1)=1$.

18. $J=\int\limits_{-1}^{2}x'(1+t^2x')dt; x(-1)=1, x(2)=4$.

19. $J=\int\limits_{-1}^{1}(x'^3+x'^2)dt; x(-1)=-1, x(1)=3$.

20. $J=\int\limits_{0}^{1}(x'^2+x')dt; x(0)=1, x(1)=2$.

21. $J=\int\limits_{0}^{1}(t+2x+0.5x'^2)dt; x(0)=0, x(1)=0$.

22. $J=\int\limits_{0}^{1}x'^3dt; x(0)=0, x(1)=2$.

23. $J=\int\limits_{0}^{3}(1-x'^2)dt; x(0)=x(3)=0$.

24. $J=\int\limits_{0}^{1}(x'^2+9t^2+t)dt; x(0)=0, x(1)=1$.

25. $J=\int\limits_{0}^{2}(1+t)x'^2dt; x(0)=0, x(2)=1$.

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА

1. Основы моделирования экономических процессов.
2. Задача освоения производственных мощностей.
3. Модель Эванса установления равновесной цены.
4. Динамическая модель Кейнса.
5. Односекторная модель экономического роста Солоу.
6. Установление равновесной цены на рынке с прогнозируемыми ценами.
7. Простейшая задача вариационного исчисления.
8. Задача Больца.
9. Уравнение Эйлера.
10. Условие трансверсальности.
11. Условие Вейерштрасса сильного минимума.
12. Достаточные условия экстремума функционала.
13. Принцип максимума для задачи со свободным концом.
14. Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств.
15. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа.
16. Принцип Лагранжа для выпуклых задач.
17. Задача ценовой дискриминации.
18. Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
19. Принцип Лагранжа для задачи оптимального управления с закрепленными концами.
20. Условие Лежандра, Якоби и Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.Н. Теория оптимального управления непрерывными динамическими системами: учеб. пособие. М.: Изд-во Физического факультета МГУ, 2011.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1969.
3. Жаров А.Н. Модели и методы оптимизации: учеб.-метод. пособие. Ярославль: Изд-во Института управления, 2012.
4. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М., 2002.
5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. М., 1973.
6. Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008.
7. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление: учеб.-метод. пособие. СПб.: ЮТАС, 2008.
8. Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г. Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры: метод. пособие. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2013.
9. Тихомиров В.М. Конспект лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М., 2001.
10. Шарапов В.Г. Руководство по решению задач по курсу «Вариационное исчисление и методы оптимизации»: метод. пособие. Волгоград: Изд-во Волгоградского государственного университета, 2004.
11. Юрьев В.Н. Методы оптимизации в экономике и менеджменте: учеб. пособие. М.: Изд-во политехнического ун-та, 2015.

Учебное издание

Дюжева Александра Владимировна,
Яковлева Юлия Олеговна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ,
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 23.11.2017. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,0.
Тираж 300 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ . Арт. 31/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.