

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

*Ю.Л. ФАЙНИЦКИЙ*

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2006

УДК 517.1 (075)

ББК

Ф



**Инновационная образовательная программа  
"Развитие центра компетенции и подготовка  
специалистов мирового уровня в области аэрокос-  
мических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: проф., доктор техн. наук Б. А. Г о р л а ч  
доц., канд. физ.-мат. наук Е. Я. Г о р е л о в а

***Файницкий Ю.Л.***

Ф **Дифференциальные уравнения:** учеб. пособие по самосто-  
ятельной работе / Ю.Л. Файницкий. – Самара: Изд-во Самар. гос.  
аэрокосм. ун-та, 2006. – 51 с.

**ISBN 5-7883-0430-X**

Предназначено для студентов всех специальностей СГАУ. Содержит материалы по математике, предлагаемые для самостоятельного изучения во втором семестре. Рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений и их систем, особые решения, устойчивость систем.

Определения, утверждения и приемы решения задач, рассматриваемые на лекционных и практических занятиях, здесь не дублируются. Предполагается, что студент уже ознакомился с указанным материалом. Учебное пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

Учебное пособие выполнено на кафедре высшей математики в рамках инновационной образовательной программы «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

УДК 517.1 (075)

ББК

**ISBN 5-7883-0430-X**

© Файницкий Ю.Л., 2006

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2006

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит материалы по математике, предлагаемые студентам всех специальностей СГАУ для самостоятельного изучения во втором семестре. Здесь рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений и их систем, особые решения, устойчивость решений.

Пособие состоит из 13 пунктов (параграфов), каждый из которых имеет следующую структуру. Параграф, как правило, начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для решения очередной задачи. Теоремы приводятся без доказательств, однако, в каждом конкретном случае указывается учебное пособие, с помощью которого можно ознакомиться с обоснованием соответствующего утверждения.

Далее приводится формулировка и решение очередной задачи. Затем формулируется аналогичная задача, предназначенная для самостоятельного решения, и ответ к ней, если только ответ не следует из условия. В отдельных случаях в завершение параграфа может приводиться еще одна или несколько пар задач.

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы. Прежде всего, необходимо по конспекту и учебнику проработать материал, рассмотренный на лекционных занятиях, ознакомиться с введенными там понятиями, изучить формулировки и доказательства теорем. Затем, опираясь на решения задач, предложенных на практических занятиях, выполнить текущее домашнее задание. И только после этого целесообразно осваивать материал, приведенный в настоящем учебном пособии.

Такая последовательность изучения материала связана, в частности, с тем, что здесь не дублируются рассматриваемые на лекционных и практических занятиях определения, утверждения и приемы. Предполагается, что студент с ними уже ознакомился. Пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

# 1 УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

## 1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Пусть дано дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad (1)$$

где  $a, b, c$  – постоянные и  $f$  – заданная функция.

Путем введения новой искомой функции

$$z = ax + by + c$$

уравнение (1) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

1. Решить уравнение

$$y' = \sin(x - y). \quad (2)$$

*Решение.*

Обозначим

$$z = x - y$$

и продифференцируем обе части этого равенства:

$$z' = 1 - y'.$$

Тогда

$$y' = 1 - z'$$

и уравнение (2) принимает вид:

$$1 - z' = \sin z,$$

или

$$z' = 1 - \sin z.$$

Разделим переменные

$$\frac{dz}{1 - \sin z} = dx.$$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{dz}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} = dx,$$

$$\frac{dz}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right)} = dx.$$

Интегрируя, получим:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right) = x + C.$$

Следовательно, уравнение (2) имеет общий интеграл

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = x + C. \quad (3)$$

*Замечание.* Здесь и в дальнейшем, до конца данного учебного пособия, символы  $C, C_1, C_2, \dots$  обозначают произвольные постоянные.

Выясним, не были ли потеряны решения при делении на выражение  $1 - \sin z$ . Если

$$1 - \sin z = 0,$$

то

$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$y = x - 2\pi n - \frac{\pi}{2},$$

или, поскольку  $n$  – произвольное целое число,

$$y = x + 2\pi n - \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Подставив эту функцию в уравнение (2), получим тождество:

$$\frac{d}{dx} \left( x + 2\pi n - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( x - x - 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right).$$

Следовательно, функция (4) является решением уравнения (2) при любом целом значении  $n$ .

Выясним, нельзя ли получить это решение из общего при некотором значении параметра  $C$ . При этом следует рассматривать, в частности, случаи  $C \rightarrow \pm\infty$ .

Запишем общий интеграл (3) в виде:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2} \right) = \frac{1}{x+C}.$$

При  $C \rightarrow \infty$  это равенство принимает форму:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2} \right) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2} &= \pi n, \\ y &= x + 2\pi n - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение (4) получается из общего решения при  $C \rightarrow \infty$ , то есть функция (4) является частным решением уравнения (2), входящим в однопараметрическое множество, заданное уравнением (3).

**2.** Решить уравнение

$$y' = ax + by + c$$

( $a, b, c$  – постоянные).

*Ответ.*

$$b(ax + by + c) + a = Ce^{bx}.$$

**3.** Решить уравнение

$$(8x + 4y + 1) + (4x + 2y + 1)y' = 0. \quad (5)$$

*Решение.*

Здесь коэффициенты при  $x$  и  $y$  пропорциональны и уравнение (5) можно записать в форме

$$(4(2x + y) + 1) + (2(2x + y) + 1)y' = 0$$

или

$$y' = -\frac{4(2x + y) + 1}{2(2x + y) + 1}.$$

Это – уравнение вида (1).

Обозначим

$$z = 2x + y,$$

Тогда

$$z' = 2 + y', \quad y' = z' - 2$$

и уравнение (5) примет вид

$$4z + 1 + (2z + 1)(z' - 2) = 0,$$

или

$$4z + 1 + (2z + 1)z' - 4z - 2 = 0, \\ (2z + 1)dz = dx.$$

Найдем общий интеграл уравнения (5):

$$\frac{1}{4}(2z + 1)^2 = x + C_1,$$

или

$$(4x + 2y + 1)^2 = 4x + C.$$

**4.** Решить уравнение:

$$(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0.$$

*Ответ:*

$$x + 3y - \ln|x - 2y| = C.$$

## 1.2 Уравнения, приводящиеся к однородным

### 1.2.1 Параллельный перенос осей координат

Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \quad (6)$$

где  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  – постоянные и  $f$  – заданная функция. Предположим также, что  $c^2 + c_1^2 \neq 0$  и

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Условие  $c^2 + c_1^2 \neq 0$  означает, что хотя бы один из параметров  $c, c_1$  отличен от нуля.

Введем новые переменные  $\xi$  и  $\eta$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \xi + \alpha, \\ y &= \eta + \beta, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные, подлежащие определению. Тогда

$$dx = d\xi, \quad dy = d\eta$$

и уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right).$$

Выберем в качестве  $\alpha$  и  $\beta$  решение системы

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение (6) преобразуется в однородное:



$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right).$$

**Замечание.** Решение  $(\alpha, \beta)$  последней системы линейных уравнений представляет собой координаты точки пересечения прямых

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (6) преобразуется в однородное при переносе начала координат в указанную точку.

5. Решить уравнение

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0. \quad (7)$$

*Решение.*

В форме (6) уравнение (7) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Введем новые переменные  $\xi, \eta$ :

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta.$$

Получим уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-7\xi + 3\eta - 7\alpha + 3\beta + 7}{3\xi - 7\eta + 3\alpha - 7\beta - 3}.$$

Найдем  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} -7\alpha + 3\beta + 7 = 0, \\ 3\alpha - 7\beta - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -21\alpha + 9\beta + 21 = 0, \\ 21\alpha - 49\beta - 21 = 0, \\ \beta = 0, \alpha = 1. \end{cases}$$

Таким образом, необходимо решить однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-7\xi + 3\eta}{3\xi - 7\eta}, \quad (8)$$

где

$$\xi = x - 1, \quad \eta = y.$$

Примем

$$\frac{\eta}{\xi} = u.$$

Тогда

$$\eta = u\xi, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \xi \frac{du}{d\xi} + u.$$

Подставим в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \xi \frac{du}{d\xi} + u &= \frac{-7 + 3u}{3 - 7u}, \\ \xi \frac{du}{d\xi} &= \frac{-7 + 3u - 3u + 7u^2}{3 - 7u}, \\ \xi \frac{du}{d\xi} &= \frac{7u^2 - 7}{3 - 7u}. \end{aligned}$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{3 - 7u}{u^2 - 1} du &= 7 \frac{d\xi}{\xi}, \\ \frac{3}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| - \frac{7}{2} \ln |u^2 - 1| &= 7 \ln |\xi| + \ln C_1. \end{aligned}$$

Подставим сюда выражение функции  $u$  через  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\frac{3}{2} \ln \left| \frac{\frac{\eta}{\xi} - 1}{\frac{\eta}{\xi} + 1} \right| - \frac{7}{2} \ln \left| \frac{\eta^2}{\xi^2} - 1 \right| = 7 \ln |\xi| + \ln |C_1|,$$

или

$$\frac{3}{2} \ln \left| \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi} \right| - \frac{7}{2} \ln \left| \frac{\eta^2 - \xi^2}{\xi^2} \right| = 7 \ln |\xi| + \ln |C_1|.$$

Упростим это соотношение:

$$\begin{aligned} 3 \ln |\eta - \xi| - 3 \ln |\eta + \xi| - 7 \ln |\eta - \xi| - 7 \ln |\eta + \xi| + \\ + 14 \ln |\xi| &= 14 \ln |\xi| + 2 \ln |C_1|, \\ -4 \ln |\eta - \xi| - 10 \ln |\eta + \xi| &= 2 \ln |C_1|, \\ -2 \ln |\eta - \xi| - 5 \ln |\eta + \xi| &= \ln |C_1|. \end{aligned}$$

Выразив  $\xi$  и  $\eta$  через  $x$  и  $y$  и выполнив потенцирование, получим общий интеграл уравнения (7)

$$(x - y - 1)^2 (x + y - 1)^5 = C.$$

**Замечание 1.** В процессе интегрирования уравнения (7) выполнялось деление на функцию

$$3x - 7y - 3,$$

однако потери решений при этом не произошло. Проверьте это самостоятельно.

**Замечание 2.** Если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то уравнение (6) может быть записано в форме (1) (задачи 3, 4).

6. Решить уравнение:

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

Ответ:

$$y^2 - 2xy - x^2 - 8y + 4x = C.$$

## 1.2.2 Подстановка степенной функции

Пусть дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \quad (9)$$

левая часть которого представляет собой многочлен относительно  $x$  и  $y$ . Сумма степеней, в которых данные переменные входят в некоторое слагаемое этого многочлена, называется измерением указанного слагаемого.

Сделаем в уравнении (9) подстановку  $y = z^\alpha$  и подсчитаем измерения членов данного уравнения. Если существует значение  $\alpha$ , при котором все эти измерения одинаковы, то при данном  $\alpha$  уравнение, полученное с помощью указанной подстановки, будет однородным.

7. Решить уравнение

$$2xy'(x - y^2) + y^3 = 0. \quad (10)$$

*Решение.*

Сделаем подстановку

$$y = z^\alpha, \\ y' = \alpha z^{\alpha-1} z'.$$

Получим уравнение

$$2x\alpha z^{\alpha-1} z' (x - z^{2\alpha}) + z^{3\alpha} = 0,$$

или

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1} z' - 2\alpha x z^{3\alpha-1} z' + z^{3\alpha} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) однородное, если

$$2 + \alpha - 1 = 1 + 3\alpha - 1 = 3\alpha,$$

то есть при  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$2 \cdot \frac{1}{2} x^2 z^{-\frac{1}{2}} z' - 2 \cdot \frac{1}{2} x z^{\frac{1}{2}} z' + z^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (12)$$

или

$$(x^2 - xz)z' + z^2 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) получено с помощью подстановки

$$y = z^\alpha = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z},$$

то есть предполагалось, что  $y \geq 0$ . Выясним, какое уравнение получится, если сделать замену переменной

$$y = -\sqrt{z} = -z^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$y' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z'$$

и уравнение (10) принимает вид:

$$-2x \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z' \left( x - \left( -z^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right) - z^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Это равенство совпадает с соотношением (12).

Решим уравнение (13). Введем функцию

$$u = \frac{z}{x}.$$

Тогда

$$z = ux, \quad z' = u'x + u.$$

Подставим эти значения в уравнение (13):

$$(x^2 - x^2u)(u'x + u) + x^2u^2 = 0,$$

или

$$(1 - u)(u'x + u) + u^2 = 0,$$

$$(u'x + u) = \frac{u^2}{u - 1},$$

$$u'x = \frac{u^2 - u^2 + u}{u-1},$$

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x}.$$

Выполним интегрирование:

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C|,$$

или

$$u = \ln|Cxu|.$$

Вернемся к переменной  $z$ :

$$\frac{z}{x} = \ln|Cz|.$$

Выразив эту переменную через  $x$ , получим общий интеграл уравнения (10):

$$y^2 = x \ln|Cy^2|.$$

8. Решить уравнение:

$$4y^6 + x^3 = 6xy^5 y'.$$

Ответ:

$$Cx^4 = y^6 + x^3.$$

### 1.3 Интегрирующий множитель

Пусть для уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{14}$$

выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

то есть соотношение (14) не является уравнением в полных дифференциалах.

Зададим какую-нибудь функцию  $\mu(x, y)$  и умножим на нее обе части уравнения (14):

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y)dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y)dy = 0. \quad (15)$$

При  $\mu \neq 0$  общее решение этого уравнения совпадает с общим решением уравнения (14). Если полученное таким образом уравнение (15) является уравнением в полных дифференциалах, то функция  $\mu(x, y)$  называется интегрирующим множителем уравнения (14).

Пусть функции  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ ,  $\mu(x, y)$  имеют непрерывные частные производные в некоторой односвязной области. Тогда равенство

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (16)$$

представляет собой необходимое и достаточное условие того, что соотношение (15) – уравнение в полных дифференциалах.

Предположим, что это условие выполняется и  $\mu$  зависит только от переменной  $x$ , то есть  $\mu = \mu(x)$ . Тогда равенство (16) принимает вид

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{d\mu}{dx} + \mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

или

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right). \quad (17)$$

Если  $\mu = \mu(x)$ , то равенство (17) возможно при том и только при том условии, что величина

$$\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

является функцией переменной  $x$ . В этом случае, решая уравнение (17), можно найти интегрирующий множитель  $\mu(x)$ .

Аналогично, если  $\mu = \mu(y)$ , то

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

где

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

зависит только от  $y$ .

### 9. Решить уравнение

$$(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0. \quad (18)$$

*Решение.*

Здесь

$$M = 1 - x^2 y, \quad N = x^2(y - x).$$

Поскольку

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

то соотношение (18) не является уравнением в полных дифференциалах.

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = \\ &= \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y - x)} = \frac{2x(x - y)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Так как это выражение зависит только от  $x$ , то интегрирующий множитель  $\mu$  также является функцией переменной  $x$ . Согласно равенству (17),

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = -\frac{2}{x},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= -2 \frac{dx}{x}, \\ \mu &= C_1 x^{-2}. \end{aligned}$$



Функция  $\mu$  определяется с точностью до постоянного множителя, поэтому можно принять  $C_1 = 1$ .

Умножим обе части равенства (18) на интегрирующий множитель  $\mu = x^{-2}$ . В результате получится уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1-x^2y}{x^2}dx + (y-x)dy = 0. \quad (19)$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1-x^2y}{x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y-x) = -1.$$

Решим уравнение (19). Существует функция  $u$ , такая что

$$\begin{aligned} du &= \frac{1-x^2y}{x^2}dx + (y-x)dy, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (y-x), \\ u &= \frac{y^2}{2} - xy + \varphi(x). \end{aligned}$$

Продифференцируем обе части этого соотношения по  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y + \varphi'(x).$$

Должно быть справедливо равенство

$$\frac{1-x^2y}{x^2} = -y + \varphi'(x),$$

или

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Поэтому

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} + C_2$$

и

$$u = \frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x} + C_2.$$

Соответственно, общий интеграл уравнения (18) может быть записан в виде:

$$\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x} = C.$$

10. Решить уравнение

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0.$$

*Ответ:*

$$x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C.$$

#### 1.4 Особые решения

**Определение.** Решение  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \tag{20}$$

называется особым, если в каждой точке  $(x_0, y_0)$  интегральной кривой  $y = \varphi(x)$  нарушается единственность решения, то есть через каждую такую точку проходит хотя бы еще одна интегральная кривая указанного уравнения, имеющая в точке  $(x_0, y_0)$  ту же касательную, что и кривая  $y = \varphi(x)$ , но не совпадающая с этой кривой на сколь угодно малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

Пусть уравнение (20) имеет общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{21}$$

Множество интегральных кривых, заданное уравнением (21), представляет собой однопараметрическое семейство кривых с параметром  $C$ .

**Определение.** Линия  $\Gamma$  называется огибающей однопараметрического семейства кривых, если эта линия касается каждой кривой данного семейства, причем в различных точках линии  $\Gamma$  ее касаются различные кривые семейства.

Например, каждая из прямых  $y = \pm 1$  является огибающей семейства окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

Продифференцируем обе части равенства (21) по  $C$  и составим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial C} \Phi(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

Исключим параметр  $C$  из этой системы. В результате получится уравнение, содержащее  $x$  и  $y$ . Предположим, что оно определяет некоторую функцию  $y = \psi(x)$ . Если эта функция удовлетворяет уравнению (20), то она задает огибающую семейства интегральных кривых (21), а огибающая такого семейства представляет собой особое решение уравнения (20) [3, гл. XIII, § 11 – 12].

#### 11. Найти особые решения уравнения

$$y' = 2\sqrt{y}. \quad (22)$$

*Решение.*

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx.$$

Проинтегрируем:

$$\sqrt{y} = x + C.$$

Запишем общее решение уравнения (22):

$$y = (x + C)^2. \quad (23)$$

Продифференцируем обе части этого равенства по параметру  $C$  и составим систему уравнений

$$\begin{cases} y = (x + C)^2, \\ 0 = 2(x + C). \end{cases}$$

Исключим из этой системы  $C$ . Так как  $x + C = 0$ , то в результате исключения получим:

$$y = 0. \quad (24)$$

Подстановка этой функции в уравнение (22) показывает, что она является его решением. Следовательно, уравнение (22) имеет особое решение (24).

Это подтверждается и геометрически: прямая (24) представляет собой огибающую семейства интегральных кривых – парабол (23). Следовательно, указанная прямая является интегральной кривой, соответствующей особому решению.

**12.** Найти особые решения уравнения

$$y' = 3\sqrt[3]{(y-1)^2}.$$

*Ответ:*

$$y = 1.$$

### 1.5 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Пусть дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

разрешимо относительно искомой функции, то есть может быть записано в виде

$$y = f(x, y'). \quad (25)$$

Введем обозначение  $y' = p(x)$ . В результате получится уравнение

$$y = f(x, p(x)).$$

Продифференцируем обе его части по  $x$ :

$$y' = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)p',$$

или

$$p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)p'. \quad (26)$$

Так как здесь считается, что функция  $f$  известна, то соотношение (26) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с искомой функцией  $p$ . Пусть решением этого уравнения является функция

$$p = \varphi(x, C). \quad (27)$$

Тогда общее решение уравнения (25) имеет форму

$$y = f(x, \varphi(x, C)).$$

Следует иметь в виду, что нельзя заменять переменную  $p$  в равенстве (27) на  $y'$  и затем интегрировать полученное дифференциальное уравнение. Это видно уже из того, что найденная таким путем функция будет зависеть от двух произвольных постоянных вместо одной.

Если для уравнения (26) получен общий интеграл в виде

$$x = \psi(p, C),$$

то решение уравнения (25) может быть задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} y = f(x, p), \\ x = \psi(p, C). \end{cases}$$

**13.** Решить уравнение

$$y = y'^2 + 4y'^3. \quad (28)$$

*Решение.*

Будем считать, что

$$y' = p(x).$$

Тогда

$$y = p^2 + 4p^3. \quad (29)$$

Продифференцируем обе части этого равенства по  $x$ :

$$p = 2p \cdot p' + 12p^2 \cdot p',$$

или

$$p(2p' + 12p \cdot p' - 1) = 0. \quad (30)$$

Рассмотрим уравнение

$$2p' + 12p \cdot p' - 1 = 0,$$

или

$$p'(2 + 12p) = 1.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$(2 + 12p)dp = dx,$$

$$x = 2p + 6p^2 + C.$$

Общее решение уравнения (30) можно задать в параметрической форме:

$$\begin{cases} y = p^2 + 4p^3, \\ x = 2p + 6p^2 + C. \end{cases} \quad (31)$$

Уравнение (30) удовлетворяется также, если

$$p = 0. \quad (32)$$

При известном  $p(x)$  решение уравнения (28) получается путем подстановки данной функции в соотношение (29). Выполнив эту операцию с учетом равенства (32), получим решение

$$y = 0. \quad (33)$$

Оно не может быть получено из решения (31) ни при каких значениях параметра  $C$ .

Действительно, изменение постоянной  $C$  приводит к сдвигу интегральной кривой вдоль оси  $Ox$ , не влияя на форму этой кривой. Следовательно, кривая (31) не обращается в прямую ни при каком значении параметра  $C$  и частное решение (33) не принадлежит однопараметрическому семейству (31).

Выясним, имеют ли линии (31) и (33) общие точки. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y = p^2 + 4p^3, \\ x = 2p + 6p^2 + C, \\ y = 0. \end{cases}$$

Она имеет решение

$$y = 0, x = C, p = 0.$$

Следовательно, через каждую точку  $(C, 0)$  оси  $Ox$  проходит две интегральных кривых уравнения (28): линия (31) и прямая (33).

Для линии, заданной уравнениями (31) имеем:

$$y' = p.$$

В общих точках линий (31) и (33)  $p = 0$  и  $y' = 0$ . Таким образом, в указанных точках производные функций (31) и (33) совпадают, прямая (33) касается линии (31) при всяком значении параметра  $C$ . Значит, функция (33) является особым решением уравнения (28).

Таким образом, уравнение (28) имеет общее решение (31) и особое решение (33).

14. Решить уравнение

$$x = y' \cos y'.$$

Ответ:

$$x = p \cos p,$$

$$y = p^2 \cos p - p \sin p - \cos p + C.$$

**Указание.** В данном случае заданное уравнение имеет вид

$$x = f(y, y'). \quad (34)$$

Считайте, что  $y' = p(y)$ . Тогда уравнение (34) принимает форму

$$x = f(y, p).$$

Продифференцируем обе его части по  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}.$$

Учитывая соотношение

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{p},$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy},$$

где  $f$  – известная функция.

Интегрируя его, найдем решение уравнения (34) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ y = \varphi(p, C). \end{cases}$$



## 2 УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

### 2.1 Уравнение в форме равенства производных

Пусть дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$(f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}))' = (\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}))',$$

то есть представляет собой равенство производных двух выражений, содержащих независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производные. Тогда порядок уравнения может быть понижен на единицу путем интегрирования обеих частей уравнения.

15. Решить уравнение

$$\frac{y''^2 - y' y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}. \quad (35)$$

*Решение.*

Запишем уравнение (35) в виде

$$-\frac{y''' y' - y''^2}{y'^2} = \frac{1}{x^2},$$

или

$$\frac{(y'')' \cdot y' - y'' \cdot (y')'}{y'^2} = -\frac{1}{x^2},$$

то есть

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y''}{y'} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Выполним интегрирование:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} + C_1.$$

Считая, что  $y' = p(x)$ , получим уравнение

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{x} + C_1,$$

или

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} + C_1 dx.$$

Интегрируя, найдем:

$$\ln|p| = \ln|x| + C_1 x + \ln|C_2|.$$

Потенцируем:

$$p = C_2 x e^{C_1 x},$$

или

$$y' = C_2 x e^{C_1 x}.$$

Интегрируем еще раз:

$$y = C_3 + \int C_2 x e^{C_1 x} dx. \quad (36)$$

Интеграл вычислим по частям:

$$u = x, \quad dv = e^{C_1 x} dx, \quad v = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}$$

и

$$\begin{aligned} \int x e^{C_1 x} dx &= \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x} - \int \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} dx = \\ &= \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x} + C. \end{aligned}$$

Решение (36) уравнения (35) принимает вид:

$$y = C_3 + C_2 \left( \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x} \right),$$

или

$$y = C_3 + \frac{C_2}{C_1} \left( x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} \right).$$

Имея в виду, что  $\frac{C_2}{C_1}$  — произвольная постоянная, решение можно записать в форме:

$$y = C_3 + C_2 \left( x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} \right).$$

16. Решить уравнение

$$yy'' + y'^2 = x.$$

Ответ:

$$y^2 = \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2.$$

## 2.2 Уравнение Эйлера

**Определение.** Дифференциальное уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x)$$

называется уравнением Эйлера. Здесь  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – постоянные,  $x \neq 0$ ,  $f(x)$  – заданная функция.

В области, где  $x > 0$ , уравнение Эйлера с помощью подстановки  $x = e^t$  преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Если  $x < 0$ , используется подстановка  $x = -e^t$ .

17. Решить уравнение

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 10x. \quad (37)$$

Решение.

Сделаем замену переменной  $x = e^t$ . Пусть  $y = \varphi(x)$  – решение уравнения (37). Тогда

$$y = \varphi(e^t) = y(t).$$

Таким образом, при замене  $x = e^t = x(t)$  имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (38)$$

то есть можем считать, что решение определяется параметрическими уравнениями (38).

Для производных  $y'$  и  $y''$  при этом получим формулы:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t} y'_t,$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(e^{-t} y'_t)'_t}{x'_t} =$$

$$= \frac{-e^{-t} y'_t + e^{-t} y''_{tt}}{e^t} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t).$$

Подставим данные выражения в уравнение (37):

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t) + e^t \cdot e^{-t} y'_t + 4y = 10e^t,$$

или

$$y''_{tt} + 4y = 10e^t. \quad (39)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение

$$Y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Частное решение неоднородного уравнения (39) будем искать в виде:

$$\bar{y} = Ae^t.$$

Подставим эту функцию в указанное уравнение:

$$Ae^t + 4Ae^t = 10e^t.$$

Отсюда

$$A = 2, \quad \bar{y} = 2e^t.$$

Запишем общее решение уравнения (39):

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2e^t. \quad (40)$$

Так как

$$x = e^t, \quad t = \ln x,$$

то

$$y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x) + 2x. \quad (41)$$

Если предположить, что  $x < 0$  и применить подстановку  $x = -e^t$ , то

$$y'_x = -e^{-t} y'_t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(-e^{-t} y'_t\right)'}{-e^t} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t).$$

Уравнение (37) преобразуется к виду

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t) - e^t \cdot (-e^{-t}) y'_t + 4y = -10e^t,$$

или

$$y''_{tt} + 4y = -10e^t. \quad (42)$$

Подставляя сюда частное решение в форме  $\bar{y} = Ae^t$ , получим

$$Ae^t + 4Ae^t = -10e^t,$$

$$A = -2, \bar{y} = -2e^t.$$

Общее решение уравнения (42) записывается в виде

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 2e^t.$$

При этом

$$x = -e^t, t = \ln(-x),$$

$$y = C_1 \cos(2 \ln(-x)) + C_2 \sin(2 \ln(-x)) + 2x.$$

Объединяя эту формулу с равенством (41), найдем общее решение уравнения (37):

$$y = C_1 \cos(2 \ln|x|) + C_2 \sin(2 \ln|x|) + 2x.$$

18. Решить уравнение

$$x^2 y'' - 6y = 12 \ln x.$$

Ответ:

$$y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}.$$

### 2.3 Уравнение, однородное относительно функции и ее производных

Пусть уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

однородное относительно искомой функции  $y$  и ее производных, то есть

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad (43)$$

где  $k$  – постоянная,  $t > 0$ .

С помощью подстановки  $z = \frac{y'}{y}$  порядок уравнения (43) может быть понижен на единицу.

19. Решить уравнение

$$xyy'' + xy'^2 = 2yy'. \quad (44)$$

Решение.

Если учитывать только функцию  $y$  и ее производные  $y'$  и  $y''$ , то каждый член уравнения имеет измерение, равное двум. Следовательно, уравнение (44) – однородное относительно указанных переменных.

Будем считать, что  $y' = yz$ , где  $z$  – новая искомая функция. Тогда

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'.$$

Подставим эти выражения для производных в уравнение (44):

$$xy^2z^2 + xy^2z' + xy^2z^2 = 2y^2z,$$

или

$$y^2(2xz^2 + xz' - 2z) = 0. \quad (45)$$

Рассмотрим соотношение

$$xz' - 2z = -2xz^2,$$

то есть

$$z' - 2\frac{z}{x} = -2z^2.$$

Это уравнение Бернулли. Будем искать его решение в виде произведения функций:

$$z = uv.$$

Тогда

$$u'v + uv' - 2\frac{uv}{x} = -2u^2v^2$$

и

$$\begin{cases} u' - 2\frac{u}{x} = 0, \\ v' = -2uv^2. \end{cases}$$

Первое из данных уравнений имеет решение

$$u = x^2.$$

Подставим это значение во второе уравнение системы:

$$v' = -2x^2v^2,$$

или

$$\frac{dv}{v^2} = -2x^2 dx.$$

Интегрируя, получим соотношение

$$\frac{1}{v} = 2\frac{x^3}{3} + C_1,$$

или

$$v = \frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + C_1}.$$

Поэтому

$$z = \frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3 + C_1}.$$

Так как  $z = \frac{y'}{y}$ , то

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3 + C_1},$$

или

$$2\frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{x^3 + \frac{3}{2}C_1}.$$

Выполним интегрирование:

$$2\ln|y| = \ln\left|x^3 + \frac{3}{2}C_1\right| + \ln|C_2|.$$

Потенцируем:

$$y^2 = C_2\left(x^3 + \frac{3}{2}C_1\right). \quad (46)$$

Заменяя обозначение произвольной постоянной  $C_2$  на  $C_1$ , а  $\frac{3}{2}C_1C_2$  — на  $C_2$ , получим общий интеграл уравнения (44) в форме

$$y^2 = C_1x^3 + C_2.$$

Приравнявая нулю первый из сомножителей левой части уравнения (45), получим решение

$$y = 0.$$

Однако это равенство не расширяет множества решений уравнения (44), так как функция  $y = 0$  определяется соотношением (46) при  $C_1 = C_2 = 0$ .



20. Решить уравнение

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$$

Ответ:

$$y = \frac{C_1}{\cos^2(x + C_2)}.$$

## 2.4 Уравнение с известными частными решениями

Если линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

имеет решение  $y_1$ , то порядок неоднородного уравнения с такой же правой частью

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

может быть понижен на единицу с помощью замены переменной  $y = y_1 z$ , где  $z$  — новая искомая функция. Уравнение при этом остается линейным. Затем следует сделать замену  $z' = p$ .

21. Известно, что уравнение

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

имеет частное решение  $y_1 = e^x$ . Найти общее решение уравнения

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x. \quad (47)$$

Решение.

Сделаем замену переменной  $y = e^x z$ . Тогда

$$\begin{aligned} y' &= e^x z + e^x z', \\ y'' &= e^x z + 2e^x z' + e^x z''. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение (47):

$$(x-1)(e^x z + 2e^x z' + e^x z'') - x(e^x z + e^x z') + e^x z = (x-1)^2 e^x.$$

Сократим на  $e^x$  и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} xz + 2xz' + xz'' - z - 2z' - z'' - xz - xz' + z &= (x-1)^2, \\ (x-1)z'' + (x-2)z' &= (x-1)^2. \end{aligned}$$

Обозначим  $z' = p$ . Получим линейное уравнение первого порядка:

$$(x-1)p' + (x-2)p = (x-1)^2,$$

или

$$p' + \frac{x-2}{x-1}p = (x-1). \quad (48)$$

Представим функцию  $p$  в виде произведения:

$$p = uv.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{x-2}{x-1}uv &= x-1, \\ \begin{cases} u' + \frac{x-2}{x-1}u = 0, \\ uv' = x-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим первое из уравнений системы:

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -\frac{x-2}{x-1} dx, \\ \frac{du}{u} &= \left(-1 + \frac{1}{x-1}\right) dx, \\ \ln|u| &= -x + \ln|x-1|, \\ u &= e^{-x}(x-1). \end{aligned}$$

Второе уравнение системы примет вид:

$$e^{-x}(x-1)v' = x-1,$$

или

$$v' = e^x.$$

Поэтому

$$v = e^x + C_1$$

и решение уравнения (48) записывается в виде:

$$p = x - 1 + C_1 e^{-x}(x-1).$$

Так как  $p = z'$ , то

$$z' = x - 1 + C_1 e^{-x}(x-1).$$

Интегрируя, найдем функцию  $z$ :

$$z = \frac{(x-1)^2}{2} + C_1(-e^{-x}(x-1) - e^{-x} + C_2),$$

или

$$z = \frac{(x-1)^2}{2} - C_1 x e^{-x} + C_1 C_2.$$

Учитывая, что  $y = e^x z$  и при этом  $(-C_1)$ ,  $C_1 C_2$  – произвольные постоянные, получим общее решение уравнения (47):

$$y = C_1 x + C_2 e^x + \frac{(x-1)^2}{2} e^x.$$

**22.** Известно, что уравнение

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

имеет частное решение  $y_1 = x$ . Найти общее решение данного уравнения.

*Ответ:*

$$y = C_1 x + C_2 \ln x.$$

### 3 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

#### 3.1 Метод вариации произвольных постоянных

Пусть задана нормальная линейная неоднородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &..... \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{49}$$

Обозначим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ ..... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ..... \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ..... \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (49) может быть записана в виде одного уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F. \tag{50}$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = AX. \tag{51}$$

Предположим, что оно имеет фундаментальную систему решений

$$X_1, X_2, \dots, X_n.$$

Тогда общее решение уравнения (51) имеет вид:

$$\bar{X} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n = \sum_{i=1}^n C_i X_i.$$

Здесь, как всегда,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные скалярные постоянные.

Будем искать частное решение уравнения (50) в форме

$$\sum_{i=1}^n C_i(t) X_i, \quad (52)$$

где  $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$  – функции, которые необходимо найти. Тогда общее решение уравнения (50) примет вид:

$$X = \bar{X} + \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i.$$

Подставим частное решение (52) в указанное уравнение:

$$\sum_{i=1}^n (C_i'(t) X_i + C_i(t) X_i') = A \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i + F,$$

или

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t) X_i + \sum_{i=1}^n C_i(t) (X_i' - A X_i) = F.$$

Учтем, что  $X_i$  является решением уравнения (51), то есть

$$X_i' - A X_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому функции  $C_i(t)$  определяются уравнением

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t) X_i = F.$$

23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases} \quad (53)$$

*Решение.*

Обозначим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases} \quad (54)$$

и матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{pmatrix},$$

где  $E$  – единичная матрица второго порядка,  $\lambda$  – параметр.

Запишем однородную систему линейных уравнений с матрицей  $A - \lambda E$ :

$$\begin{cases} (3 - \lambda)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (-4 - \lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases} \quad (55)$$

составим характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и решим его:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \lambda - 6 &= 0, \\ \lambda &= 2, \lambda = -3.\end{aligned}$$

При  $\lambda = 2$  система (55) принимает вид

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

и имеет решение  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$ .

При  $\lambda = -3$ :

$$\begin{cases} 6\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3. \end{cases}$$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (54) можно записать в форме:

$$\bar{X} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\bar{X} = C_1 X_1 + C_2 X_2,$$

где

$$X_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

есть фундаментальная система решений системы (54).

Будем искать частное решение неоднородной системы (53) в виде

$$C_1(t)X_1 + C_2(t)X_2,$$

или

$$C_1(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t)e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для отыскания функций  $C_1(t), C_2(t)$  составим уравнение

$$\sum_{i=1}^2 C_i' X_i = F,$$

то есть

$$C_1'(t)X_1 + C_2'(t)X_2 = F.$$

В данном случае имеем:

$$C_1' e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2' e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 2C_1' e^{2t} + C_2' e^{-3t} = t, \\ C_1' e^{2t} + 3C_2' e^{-3t} = 0. \end{cases}$$

Применим правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & 3e^{-3t} \end{vmatrix} = 5e^{-t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} t & e^{-3t} \\ 0 & 3e^{-3t} \end{vmatrix} = 3te^{-3t},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & t \\ e^{2t} & 0 \end{vmatrix} = -te^{2t}.$$

Найдем производные функций  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ :

$$C_1' = \frac{3}{5}te^{-2t}, \quad C_2' = -\frac{1}{5}te^{3t}.$$

Вычислим указанные функции:

$$C_1(t) = \frac{3}{5} \int te^{-2t} dt = \frac{3}{5} \left( -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt \right) =$$



$$= \frac{3}{5} \left( -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \right) = \left( -\frac{3}{10} t - \frac{3}{20} \right) e^{-2t},$$

$$C_2(t) = -\frac{1}{5} \int t e^{3t} dt = -\frac{1}{5} \left( \frac{1}{3} t e^{3t} - \frac{1}{3} \int e^{3t} dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{5} \left( \frac{1}{3} t e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t} \right) = \left( -\frac{1}{15} t + \frac{1}{45} \right) e^{3t}.$$

Произвольные постоянные при этом интегрировании считаем равными нулю.  
Получим решение системы (53):

$$X = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left( -\frac{3}{10} t - \frac{3}{20} \right) e^{-2t} e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left( -\frac{1}{15} t + \frac{1}{45} \right) e^{3t} e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

или

$$x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{3}{5} t - \frac{3}{10} - \frac{1}{15} t + \frac{1}{45},$$

$$y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-3t} - \frac{3}{10} t - \frac{3}{20} - \frac{1}{5} t + \frac{1}{15},$$

то есть

$$x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{2}{3} t - \frac{5}{18},$$

$$y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{12}.$$

**24.** Методом вариации произвольных постоянных решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$$

*Ответ.*

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2e^{2t},$$

$$y = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 9e^{2t}.$$

### 3.2 Фазовая траектория

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (56)$$

и известно решение этой системы:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (57)$$

Систему (57) можно считать параметрическими уравнениями некоторой кривой  $\Gamma$  на плоскости  $xOy$ . При изменении параметра  $t$  точка  $(x, y)$  перемещается вдоль этой кривой. Плоскость  $xOy$  называют фазовой плоскостью, а кривую  $\Gamma$  — фазовой траекторией системы уравнений (56).

**25.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t. \end{cases} \quad (58)$$

Найти ее фазовую траекторию, проходящую при  $t = 0$  через точку  $(1; 1)$ .

*Решение.*

Чтобы найти фазовую траекторию, следует решить задачу Коши для системы (58) при начальных условиях

$$x(0) = 1, y(0) = 1.$$

Применим метод вариации произвольных постоянных. Обозначим матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

и рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases} \quad (59)$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и решим его:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda &= 0, \\ \lambda &= 0, \quad \lambda = -2. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (-1-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

При  $\lambda = 0$  она принимает вид:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ .

При  $\lambda = -2$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1. \end{cases}$$

Получим общее решение системы (59):

$$\bar{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение

$$C_1' X_1 + C_2' X_2 = F,$$

или

$$C_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2' e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-2t} = e^t, \\ C_1' - C_2' e^{-2t} = e^t. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-2t}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-t}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = 0, \\ C_1' &= e^t, \quad C_2' = 0. \end{aligned}$$

Вычислим функции

$$C_1(t) = e^t, \quad C_2(t) = 0$$

и запишем общее решение системы (58):

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-2t} + e^t, \\ y &= C_1 - C_2 e^{-2t} + e^t. \end{aligned}$$

Учитывая, что при  $t = 0$  фазовая траектория должна проходить через точку с координатами  $x = 1, y = 1$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 1, \\ C_1 - C_2 + 1 = 1, \end{cases}$$

которая имеет решение  $C_1 = 0, C_2 = 0$ .

Таким образом, искомая фазовая траектория может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t, \end{cases}$$

то есть это — прямая

$$y = x.$$

**26.** Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + t. \end{cases}$$

Найти ее фазовую траекторию, проходящую при  $t = 0$  через точку  $(0; 0)$ .

*Ответ:*  $y = 0$ .

### 3.3 Устойчивость точки покоя

Пусть дана нормальная система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (60)$$

и известно ее решение

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (61)$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0, \quad (62)$$

где  $t_0, x_0, y_0$  – заданные постоянные.

**Определение.** Решение (61) – (62) системы (60) называется устойчивым, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всякого решения

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

системы (60), удовлетворяющего неравенствам

$$\begin{aligned} |x(t_0) - \varphi(t_0)| &< \delta, \\ |y(t_0) - \psi(t_0)| &< \delta, \end{aligned}$$

для всех  $t > t_0$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |x(t) - \varphi(t)| &< \varepsilon, \\ |y(t) - \psi(t)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Смысл данного определения в том, что малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям устойчивого решения.

Пусть задана линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (63)$$

коэффициенты которой постоянны и определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если для системы (63) заданы начальные условия

$$x(0) = 0, y(0) = 0,$$

то она имеет при этих условиях решение

$$x = 0, y = 0.$$

Определяемая данным решением фазовая траектория представляет собой одну точку  $(0; 0)$ .

**Определение.** Если фазовая траектория системы дифференциальных уравнений состоит из одной точки, то такая траектория называется точкой покоя данной системы.

Чтобы исследовать устойчивость точки покоя  $(0; 0)$  системы (63), следует решить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если действительные части обоих корней данного уравнения отрицательны, то точка покоя устойчива. В частности, она устойчива, если характеристическое уравнение имеет отрицательные действительные корни. Если корни комплексные, то точка покоя устойчива также в случае, когда действительные части корней нулевые, а мнимые отличны от нуля [3, гл. XIII, § 31].

**27.** Исследовать устойчивость точки покоя  $(0; 0)$  системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases} \quad (64)$$

*Решение.*

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Так как их действительные части положительны,

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = 1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 = 1 > 0,$$

то точка покоя  $(0; 0)$  системы уравнений (64) неустойчива.

**28.** Исследовать устойчивость точки покоя  $(0; 0)$  системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

*Ответ:* Устойчива.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г.Н. Берман – СПб. : Профессия, 2005. – 432 с.
2. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Макаренко. – М. : Высш. шк., 1978. – 287 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2 : учеб. пособие / Н.С.Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1995. – 365 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>1 УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.....</b>	<b>4</b>
1.1 Уравнения с разделяющимися переменными.....	4
1.2 Уравнения, приводящиеся к однородным.....	8
1.2.1 Параллельный перенос осей координат.....	8
1.2.2 Подстановка степенной функции .....	12
1.3 Интегрирующий множитель .....	14
1.4 Особые решения .....	18
1.5 Уравнения, не разрешенные относительно производной .....	20
<b>2 УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.....</b>	<b>25</b>
2.1 Уравнение в форме равенства производных.....	25
2.2 Уравнение Эйлера .....	27
2.3 Уравнение, однородное относительно функции и ее производных .	30
2.4 Уравнение с известными частными решениями .....	33
<b>3 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....</b>	<b>36</b>
3.1 Метод вариации произвольных постоянных .....	36
3.2 Фазовая траектория .....	42
3.3 Устойчивость точки покоя .....	45
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>49</b>

Учебное издание

*Файницкий Юрий Львович*

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Учебное пособие по самостоятельной работе

Редакторская обработка О.Ю. Дьяченко  
Компьютерная верстка Ю.Л. Файницкий  
Доверстка

Подписано в печать                    г. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 3,02. Усл. кр.-отт. 3,14. Печ. л. 3,25  
Тираж            экз. Заказ                    . ИП-22 / 2006

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.