

Куйбышевский
Ордена Трудового
Красного Знамени
Авиационный институт
имени С. П. Королёва

Ю. Н. ПОЛУХИН

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

КУЙБЫШЕВ
1973

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

Ю.Н. ПОЛУХИН

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

Учебное пособие по курсу
"ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ
РАДИОВОЛН"

Рассмотрено и утверждено
редакционным советом института
14 февраля 1971 года

Куйбышев 1973

ЮРИЙ НИКОЛАЕВИЧ ПОЛУХИН

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

Учебное пособие

Редактор А.И.Кондратьева
Техн.редактор Н.М.Каленюк
Корректор Е.П.Михайлова

Е000185. Подписано в печать 16/II-1973 г. Формат 60x84^I/16.

Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена 25 коп.

Куйбышевский авиационный институт им. С.П.Королева, г.Куйбышев,
Молодогвардейская, 151.

Областная типография им. Мяги, г. Куйбышев, ул.Венцека, 60.

Заказ № 2240

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие составлено применительно к некоторым разделам программы курса "Электродинамика и распространение радиоволн" и предназначено для студентов радиотехнического факультета. Состоит оно из трех разделов. В первом излагаются элементы общей теории направляющих систем. Второй раздел посвящен теории прямоугольных, а третий - круглых волноводов. При изучении второго и третьего разделов следует предварительно ознакомиться с первым, однако второй и третий разделы взаимно независимы.

Излагаемые вопросы предполагают знакомство студентов с начальными разделами курса "Электродинамика и распространение радиоволн" (уравнениями Максвелла, теоремой Пойнтинга, граничными условиями, векторами Герца, плоскими волнами).

В пособии используется Международная система единиц (СИ).

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

I.1. Понятие о направляющих системах

Как известно, полностью отражающие границы раздела сред обладают способностью направлять движение электромагнитной энергии. Действительно, если модуль коэффициента отражения равен единице (полностью отражающая граница), то средние значения векторов Пойнтинга падающей и отраженной волн равны по величине $\Pi_{cp}^n = \Pi_{cp}^{ot}$, а так как угол падения равен углу отражения, результирующий вектор Пойнтинга направлен вдоль границы (рис. I.1).

Направляющие свойства границ раздела используются для создания направляющих систем, т.е. систем для направленной передачи электромагнитной энергии. Различные направляющие системы образуются путем деформации направляющих поверхностей вокруг оси, совпадающей с направлением передачи энергии (рис. I.2) Составляющие электромагнитного поля вдоль этой оси будем называть продольными, а составляющие, перпендикулярные ей — поперечными.

Примером полностью отражающих границ является поверхность идеального проводника. Свойствами, близкими к свойствам идеального проводника, обладают хорошо проводящие металлы, поэтому наибольшее распространение получили направляющие системы, ограниченные металлическими поверхностями. Широкий класс таких систем составляют цилиндрические волноводы. Цилиндрическими волноводами называют направляющие системы в виде полых металлических цилиндров (труб) того или иного поперечного сечения, заполненных воздухом или другим диэлектриком. В зависимости от формы поперечного сечения различают прямоугольный, круглый, коаксиальный, П-образный, Н-образный и т.д. волноводы. Цилиндрические волноводы являются экранированными направляющими системами.

Другим примером полностью отражающих границ раздела является диэлектрическая граница при падении волны из оптически более плотной среды. Направляющие свойства таких границ используются для создания диэлектрических волноводов.

Направляющая система называется регулярной, если в ней отсутствуют неоднородности, создающие отражение электро-

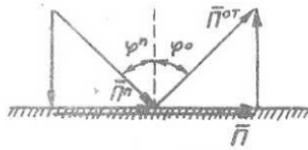


Рис. I.1

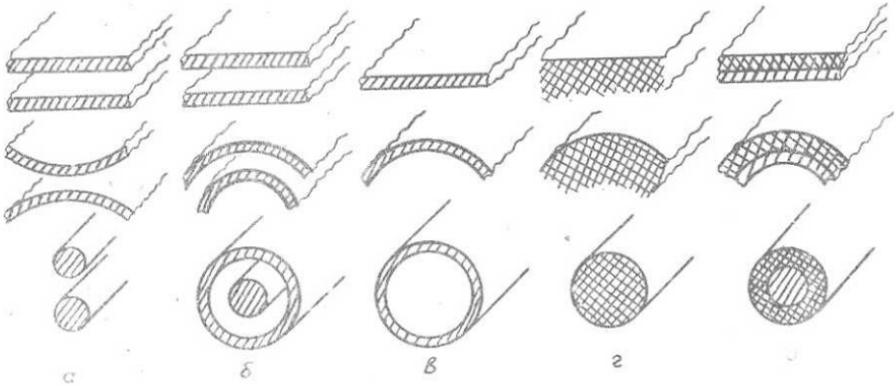


Рис. I.2. а - двухпроводная линия; б - коаксиальный волновод; в - круглый волновод; г - диэлектрический волновод; д - однопроводная линия.

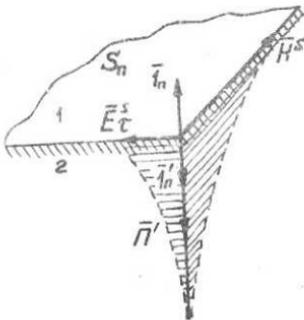


Рис. I.3

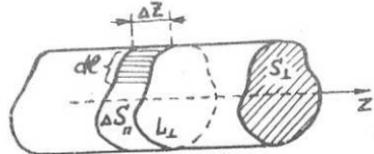


Рис. I.4

магнитной энергии. К ним относятся любые изменения поперечной структуры системы (формы и размеров поперечного сечения, параметров заполняющей среды и т.д.). Поскольку конец направляющей системы является неоднородностью, регулярной может быть только бесконечная система. Элементы связи направляющей системы с генератором и приёмным устройством (штыри, петли, щели и т.д.) также нарушают однородность системы.

1.2. Метод анализа и классификация направляемых волн

Первоначально при исследовании направляющих систем мы примем следующие ограничения:

- а) система является регулярной;
- б) в системе отсутствуют потери энергии, т.е. заполняющая среда является непоглощающей, а металлические поверхности — идеально проводящими. При этом задача сводится к определению структуры и условий существования электромагнитных полей в системах, но не охватывает вопросов возбуждения и потому позволяет определить поля лишь с точностью до постоянной величины.

Электромагнитное поле будем считать монохроматическим, что позволит любую составляющую A векторов поля (\vec{E} и \vec{H}) представить в виде комплекса

$$\dot{A} = \dot{A}_m e^{i\omega t}, \quad (1.1)$$

связанного с A соотношением:

$$A = \operatorname{Re} \dot{A} \quad (1.2)$$

Задача определения электромагнитного поля, т.е. векторов \vec{E} и \vec{H} , в любой направляющей системе сводится к интегрированию уравнений Максвелла с учетом граничных условий для \vec{E} и \vec{H} на направляющих поверхностях. Задачи такого рода относятся к классу граничных задач электродинамики и могут решаться либо непосредственно относительно векторов поля (\vec{E} , \vec{H}), либо с помощью вспомогательных функций, из которых наиболее универсальными являются векторы Гельмгольца (электрический \vec{I}^E и магнитный \vec{I}^M). При этом решению подлежат два векторных или шесть скалярных уравнений относительно двух векторных или шести скалярных функций. Однако в некоторых случаях для нахождения поля достаточно решения двух уравнений относительно двух скалярных функций.

Электромагнитное поле в любой системе можно представить как сумму полей двух классов. Поля первого класса не имеют магнитных составляющих вдоль оси системы q_3

$$H_3 = 0, E_3 \neq 0$$

и называются поперечно-магнитными (ТМ - *transverse magnetic*) или полями электрического типа (типа Е). Все составляющие поля типа Е могут быть выражены через одну скалярную функцию Γ^E , называемую электрической функцией Герца и являющуюся проекцией электрического вектора Герца на ось системы

$$\Gamma^E = \Gamma_3^E = \vec{I}_3 \vec{\Gamma}^E.$$

Здесь и в дальнейшем \vec{I}_i - орт направления q_i .

Поля второго класса не имеют электрических составляющих вдоль оси системы

$$E_3 = 0, H_3 \neq 0$$

и называются поперечно-электрическими (ТЕ - *transverse electric*) или полями магнитного типа (типа Н). Все составляющие поля типа Н могут быть выражены через одну скалярную функцию Γ^M , называемую магнитной функцией Герца и являющуюся проекцией магнитного вектора Герца на ось системы

$$\Gamma^M = \Gamma_3^M = \vec{I}_3 \vec{\Gamma}^M.$$

В общем случае поля типов Е и Н не являются какими-то физическими полями, а представляют собой лишь отдельные (возможно, взаимно зависимые) члены математического разложения общего поля. Однако, если эти поля порознь удовлетворяют уравнениям Максвелла, можно говорить о независимом существовании физических полей типа Е и Н, что имеет место при выполнении следующих условий:

а) координатная система q_1, q_2, q_3 , в которой решается задача, отвечает требованиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) &= 0, \\ h_3 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где h_i - коэффициент Ламе по координате q_i ;

б) электрическая Γ^E и магнитная Γ^M функции Герца удовлетворяют уравнениям вида:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial q_2} \right) \right] + \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}}{\partial q_3^2} + \kappa^2 \dot{\Gamma} = 0, \quad (I.4)$$

т.е. являются независимыми решениями этих уравнений.

При выполнении условий (I.3) выражения составляющих поля через функции Герца имеют вид:

Поля типа E

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_1 &= \frac{i\omega\varepsilon}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}^e}{\partial q_2}, & \dot{E}_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^e}{\partial q_1 \partial q_3}, \\ \dot{H}_2 &= -\frac{i\omega\varepsilon}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}^e}{\partial q_1}, & \dot{E}_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^e}{\partial q_2 \partial q_3}, \\ \dot{H}_3 &= 0, & \dot{E}_3 &= \kappa^2 \dot{\Gamma}^e + \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^e}{\partial q_3^2}, \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

Поля типа H

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= -\frac{i\omega\mu}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}^m}{\partial q_2}, & \dot{H}_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^m}{\partial q_1 \partial q_3}, \\ \dot{E}_2 &= \frac{i\omega\mu}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}^m}{\partial q_1}, & \dot{H}_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^m}{\partial q_2 \partial q_3}, \\ \dot{E}_3 &= 0, & \dot{H}_3 &= \kappa^2 \dot{\Gamma}^m + \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^m}{\partial q_3^2}, \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

Величина κ в (I.4 - I.6) есть постоянная распространения неограниченного пространства, имеющего те же параметры ε, μ , что и среда, заполняющая систему. Для среды без потерь она определяется выражением:

$$\kappa = \omega \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \kappa_0 \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}; \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}; \quad \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{Ф}}{\text{М}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Вб}}{\text{А}};$$

$$\kappa_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}; \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Таким образом, в случае, когда система координат отвечает требованиям (I.3), задача сводится к нахождению независимых решений уравнения (I.4) относительно \dot{r}^E и \dot{r}^H . Если такие решения существуют, то существуют и независимые поля типов E и H, которые могут быть найдены с помощью соотношений (I.5) и (I.6). При этом вводят понятие о волнах типа E как о физических полях, не имеющих магнитных составляющих вдоль оси системы, и о волнах типа H как о физических полях, не имеющих электрических составляющих вдоль оси системы.

Если же независимых решений уравнения (I.4) относительно \dot{r}^E и \dot{r}^H не существует, не существует и независимых полей типов E и H и задача в таком представлении не может быть доведена до конца. В этих случаях поле содержит все 6 составляющих, которые выражаются одновременно через обе функции Герца. Волны такого типа называют гибридными и делят на EH - и HE - волны.

При решении граничных задач рациональный выбор системы координат определяется удобствами наложения граничных условий на решения уравнений Максвелла. Граничные условия имеют наиболее простой вид, когда координатные поверхности совпадают с поверхностями раздела сред. При исследовании направляющих систем в общем виде целесообразно использовать обобщенно-цилиндрическую систему координат q_1, q_2, z , в которой координата z линейна и совпадает с осью направляющей системы, а q_1 и q_2 могут быть любыми криволинейными ортогональными координатами в плоскости поперечного сечения системы. Коэффициенты Ламэ такой системы координат удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} h_1 &\neq h_1(z), \\ h_2 &\neq h_2(z), \\ h_z &= 1, \end{aligned}$$

т.е. отвечает требованиям (I.3). При этом задача сводится к отысканию решений уравнения (I.4), которое в обобщенно-цилиндрических координатах совпадает с волновым уравнением

$$\nabla^2 \dot{r} + \kappa^2 \dot{r} = 0,$$

или

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{r} + \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial z^2} + \kappa^2 \dot{r} = 0, \quad (I.7)$$

где ∇_{\perp}^2 - двумерный лапласиан по поперечным координатам.

При записи $\dot{\Gamma}$ в виде (I.1) уравнение, аналогичное (I.7), справедливо и для комплексных амплитуд функций Герца.

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\Gamma}_m + \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}_m}{\partial z^2} + \kappa^2 \dot{\Gamma}_m = 0. \quad (\text{I.8})$$

Уравнение (I.8) обычно решают путем разделения переменных по методу Фурье, т.е. представляя $\dot{\Gamma}_m$ в виде произведения взаимно независимых функций координат. Однако для полного разделения переменных необходимо знать выражения коэффициентов h_1, h_2 , т.е. задать конкретную систему координат. Использование обобщенно-цилиндрических координат позволяет определить зависимость $\dot{\Gamma}_m$ только от продольной координаты z .

✓ I.3. Продольная зависимость полей направляемых волн

Представим $\dot{\Gamma}_m$ в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от поперечных координат q_1, q_2 , вторая - от продольной z

$$\dot{\Gamma}_m = \Gamma_0(q_1, q_2) \dot{Z}(z) \quad (\text{I.9})$$

Подставляя (I.9) в (I.8) и деля все члены уравнения на $\dot{\Gamma}_m$, получим

$$\frac{1}{\Gamma_0} \nabla_{\perp}^2 \Gamma_0 + \frac{1}{\dot{Z}} \frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2} = -\kappa^2.$$

Поскольку функции Γ_0 и \dot{Z} взаимно независимы, сумма членов левой части может равняться константе только в случае, если каждый из членов тоже равен некоторой константе. Обозначим эти константы через $-\gamma_{\perp}^2$ и $-\gamma^2$. При этом уравнение распадается на два независимых уравнения:

$$\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2} + \gamma^2 \dot{Z} = 0, \quad (\text{I.10})$$

$$\nabla_{\perp}^2 \Gamma_0 + \gamma_{\perp}^2 \Gamma_0 = 0, \quad (\text{I.11})$$

где γ и γ_{\perp} связаны соотношением

$$\gamma^2 + \gamma_{\perp}^2 = \kappa^2. \quad (\text{I.12})$$

Общее решение уравнения (I.10) имеет вид

$$\dot{Z} = C_1 e^{-i\gamma z} + C_2 e^{i\gamma z}. \quad (\text{I.13})$$

Мгновенное значение Γ согласно (I.2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma &= \operatorname{Re} \dot{\Gamma} = \operatorname{Re} \left\{ \Gamma_0 \dot{Z} e^{i\omega t} \right\} = \\ &= C_1 \Gamma_0 \cos(\omega t - \gamma z) + C_2 \Gamma_0 \cos(\omega t + \gamma z). \end{aligned} \quad (I.14)$$

Фаза первого слагаемого (I.13) и (I.14) в точке $z > 0$ меньше, чем в начале координат, поэтому его называют запаздывающим решением. Оно соответствует бегущей волне, распространяющейся в положительном направлении оси Z . Эту волну обычно называют прямой.

Фаза второго слагаемого (I.13) и (I.14) в точке $z > 0$ больше, чем в начале координат, поэтому его называют опережающим решением. Оно соответствует бегущей волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси Z . Эту волну называют обратной. Ее можно представить как результат отражения прямой волны от некоторой неоднородности.

Поскольку мы условились рассматривать регулярные направляющие системы, в решении (I.13) следует оставить только первое слагаемое. При этом выражения функций Герца будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \dot{\Gamma}_m e^{i\omega t} = \Gamma_0 e^{i(\omega t - \gamma z)}, \\ \dot{\Gamma}_m &= \Gamma_0 e^{-\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (I.15)$$

С учетом (I.12) и (I.15) выражения (I.5) и (I.6) для составляющих поля запишутся так:

Поля типа E

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_1 &= \frac{i\omega\epsilon}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}^3}{\partial q_2}, & \dot{E}_1 &= -\frac{i\gamma}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}^3}{\partial q_1}, \\ \dot{H}_2 &= -\frac{i\omega\epsilon}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}^3}{\partial q_1}, & \dot{E}_2 &= -\frac{i\gamma}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}^3}{\partial q_2}, \\ \dot{H}_3 &= 0, & \dot{E}_3 &= \gamma_L^2 \dot{\Gamma}^3, \end{aligned} \right\} \quad (I.16)$$

Поля типа H

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= -\frac{i\omega\mu}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}^m}{\partial q_2}, & \dot{H}_1 &= -\frac{i\gamma}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}^m}{\partial q_1}, \\ \dot{E}_2 &= \frac{i\omega\mu}{h_1} \frac{\partial \dot{\Gamma}^m}{\partial q_1}, & \dot{H}_2 &= -\frac{i\gamma}{h_2} \frac{\partial \dot{\Gamma}^m}{\partial q_2}, \\ \dot{E}_3 &= 0, & \dot{H}_3 &= \gamma_L^2 \dot{\Gamma}^m. \end{aligned} \right\} \quad (I.17)$$

Наличие множителя i в выражениях поперечных составляющих поля означает, что они сдвинуты по фазе относительно продольных на $\frac{\pi}{2}$. Взяв скалярное произведение поперечных составляющих электрического и магнитного полей, убеждаемся, что они взаимно перпендикулярны:

$$\dot{\vec{E}}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{\perp} = (\dot{E}_1 \dot{H}_1 + \dot{E}_2 \dot{H}_2) = \dot{E}_1 \dot{H}_1 + \dot{E}_2 \dot{H}_2 \equiv 0.$$

Из (I.16) и (I.17) следует, что при записи функций Герца в виде (I.15) в аналогичном виде запишутся и составляющие поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_m e^{i\omega t} = \dot{A}_0 e^{i(\omega t - \gamma z)} \\ \dot{A}_m &= \dot{A}_0 e^{-i\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (I.18)$$

Для определения Γ_0 необходимо решить двухмерное волновое уравнение (I.11). Решить его можно только в конкретной системе координат, выбор которой определяется типом направляющей системы. Обычно это уравнение решают также методом Фурье, т.е. представляя Γ_0 в виде произведения

$$\Gamma_0 = Q_1(q_1) Q_2(q_2).$$

I.4. Постоянная распространения, фазовая и групповая скорости направляемых волн

Как видно из выражений (I.15) и (I.18), величина γ характеризует периодичность поля вдоль оси направляющей системы. Поэтому её называют продольным волновым числом или постоянной распространения направляемой волны.

Величина γ_{\perp} находится в результате решения двухмерного волнового уравнения (I.11) и определяется видом поперечного сечения направляющей системы. Называется она поперечным волновым числом.

Фазовой скоростью v_{φ} направляемой волны называется скорость перемещения точки постоянной фазы вдоль оси направляющей системы. Определяется она следующим образом. Согласно (I.18) в момент времени t фаза колебания в точке z равна $\omega t - \gamma z$. Если скорость перемещения точки постоянной фазы $v_{\varphi} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, то по прошествии времени Δt колебание окажется в той же фазе

на расстоянии Δz , т.е.

$$\omega(t + \Delta t) - \gamma(z + \Delta z) = \omega t - \gamma z,$$

откуда

$$v_{gp} = \frac{\omega}{\gamma}. \quad (I.19)$$

Под групповой скоростью понимают скорость распространения фазы огибающей группы волн, близких между собой по частоте, т.е. скорость распространения сигнала. Определяется она соотношением

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{1}{d\gamma/d\omega} = \frac{v}{d\gamma/dk}. \quad (I.20)$$

Пространственный период поля вдоль оси направляющей системы называется длиной направляемой волны или волноводной длиной волны Λ . Определяется она как расстояние вдоль оси системы, на котором фаза колебания изменяется на 2π :

$$\begin{aligned} \gamma(z + \Lambda) - \gamma z &= 2\pi, \\ \Lambda &= \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{v_{gp}}{f}. \end{aligned} \quad (I.21)$$

I.5. Дисперсия направляемых волн. Быстрые и медленные волны

Зависимость фазовой скорости волны от частоты называется дисперсией. При распространении электромагнитных волн в неограниченном пространстве дисперсия обусловлена зависимостью параметров среды ϵ , μ от частоты поля. Дисперсия направляемых волн обусловлена не только свойствами заполняющей среды, но и влиянием направляющих поверхностей.

Представим выражение (I.12) в виде:

$$\gamma = \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_L}{\kappa}\right)^2}. \quad (I.22)$$

Поскольку $\kappa = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$, соотношение (I.22) определяет зависимость постоянной распространения, а значит, и фазовой скорости от частоты и называется дисперсионным уравнением. Через параметр γ_L постоянная распространения зависит от индивидуальных свойств конкретной направляющей системы.

Из (I.19 - I.21) с учётом (I.22) получим

$$\frac{\gamma}{\kappa} = \frac{v_{gp}}{v} = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_L}{\kappa}\right)^2}, \quad (I.23)$$

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{v_{gp}}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_L}{\kappa}\right)^2}}. \quad (I.24)$$

Как видим, для любой направляющей системы справедливо условие

$$v_{\varphi} v_{\varphi p} = v^2 = \frac{c^2}{\epsilon_r \mu_r}$$

Согласно (I.24) в случае, если γ_{\perp} - величина мнимая

$$\gamma_{\perp} = \pm i|\gamma_{\perp}|, \quad \gamma_{\perp}^2 < 0,$$

длина направляемой волны и её фазовая скорость меньше соответствующих величин в неограниченном пространстве

$$\Lambda < \lambda, \quad v_{\varphi} < v$$

Поэтому волны, для которых γ_{\perp} - мнимая величина, называют медленными, а волноводы, в которых эти волны могут существовать, - волноводами медленных волн.

В случае, если γ_{\perp} - вещественная величина

$$\gamma_{\perp} = |\gamma_{\perp}|, \quad \gamma_{\perp}^2 > 0,$$

длина направляемой волны и её фазовая скорость больше соответствующих величин в неограниченном пространстве

$$\Lambda > \lambda, \quad v_{\varphi} > v.$$

Такие волны называют быстрыми, а волноводы, в которых они могут существовать, - волноводами быстрых волн.

√ I.6. Волновое сопротивление направляющей системы

Отношение комплексов поперечных составляющих электрического и магнитного полей называется волновым или характеристическим сопротивлением направляющей системы

$$W = \frac{\dot{E}_{\perp}}{\dot{H}_{\perp}} = \frac{\sqrt{(\dot{E}_1)^2 + (\dot{E}_2)^2}}{\sqrt{(\dot{H}_1)^2 + (\dot{H}_2)^2}} \quad (I.25)$$

Подставляя в (I.25) выражения для соответствующих составляющих полей (I.16) и (I.17) и учитывая (I.22), получим для волновых сопротивлений E- и H-волн:

$$W_E = \frac{\gamma}{\omega \epsilon} = W_c \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_{\perp}}{\kappa}\right)^2}, \quad (I.26)$$

$$W_H = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{W_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_{\perp}}{\kappa}\right)^2}}, \quad (I.27)$$

где $W_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$ - волновое сопротивление неограниченного пространства, имеющего те же параметры, что и среда, заполняющая систему;

$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,8 \text{ ом}$ — волновое сопротивление свободного (неограниченного и незаполненного) пространства.

Выражения (1.26) и (1.27) получены в предположении, что направляющая система не имеет потерь. При учете потерь величины ϵ , μ , γ , W_c , а значит, и W становятся комплексными. При этом поперечные составляющие электрического \dot{E}_\perp и магнитного полей \dot{H}_\perp оказываются сдвинутыми по фазе.

1.7. Мощность направляемой волны

Средняя мощность $P_{\text{ср.}}$, переносимая направляемой волной, определяется как поток среднего значения вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}_{\text{ср.}}$ через поперечное сечение S_\perp направляющей системы

$$P_{\text{ср.}} = \int_{S_\perp} \vec{\Pi}_{\text{ср.}} \cdot d\vec{S} = \int_{S_\perp} \Pi_{\text{ср.}z} dS. \quad (1.28)$$

При гармоническом изменении поля $\vec{\Pi}_{\text{ср.}}$ выражается через комплексный вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{\text{ср.}} &= \text{Re} \vec{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^*], \\ \Pi_{\text{ср.}z} &= \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^*]_z = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{E}_\perp \dot{H}_\perp^*]_z. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Так как векторы \dot{E}_\perp и \dot{H}_\perp взаимно перпендикулярны и связаны друг с другом посредством волнового сопротивления, получим

$$\begin{aligned} [\dot{E}_\perp \dot{H}_\perp^*]_z &= \dot{E}_\perp \dot{H}_\perp^* = \frac{\dot{E}_\perp \dot{E}_\perp^*}{W} = W \dot{H}_\perp \dot{H}_\perp^* = \\ &= \frac{|\dot{E}_\perp|^2}{W} = W |\dot{H}_\perp|^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Подставляя (1.29) с учетом (1.30) в (1.28), найдем

$$P_{\text{ср.}} = \frac{1}{2W} \int_{S_\perp} |\dot{E}_\perp|^2 dS = \frac{W}{2} \int_{S_\perp} |\dot{H}_\perp|^2 dS. \quad (1.31)$$

1.8. Затухание направляемых волн

До сих пор мы считали металлические поверхности направляю-

щих систем идеально проводящими, а заполняющую среду непоглощающей, т.е. пренебрегали потерями энергии направляемых волн. Реальные направляемые волны являются затухающими. При этом постоянная распространения становится комплексной величиной

$$\dot{\gamma} = \gamma' - i\gamma'',$$

составляющие которой γ' и γ'' называют фазовой постоянной и постоянной затухания соответственно.

Структура поля в реальной направляющей системе отличается от структуры поля в системе без потерь. Однако в направляющих системах используют металлы с высокой проводимостью и диэлектрики с малым $\text{tg } \Delta^3$. При этом потери малы и можно считать, что они не влияют на структуру поля. Тем не менее, при большой длине направляющей системы полное затухание может быть ощутимым и важно знать его величину.

Обычно при анализе направляющих систем поступают следующим образом:

а) при исследовании полей направляемых волн считают, что наличие потерь не изменяет их структуру, т.е. анализ ведут как для волн, распространяющихся без затухания;

б) затухание учитывают введением комплексной постоянной распространения, причем постоянную затухания γ'' рассчитывают "энергетическим" методом, используя выражения полей, полученные в предположении отсутствия потерь.

Суть "энергетического" метода состоит в следующем.

При наличии затухания продольные зависимости составляющих поля и средней мощности волны согласно (1.18) и (1.31) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_m &= \dot{A}_0 e^{-i\dot{\gamma}z} = \dot{A}_0 e^{-\gamma''z} e^{-i\gamma'z}, \\ P_{cp} &= P_{cp0} e^{-2\gamma''z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

а скорость уменьшения P_{cp} выражается формулой

$$\frac{dP_{cp}}{dz} = -2\gamma'' P_{cp}.$$

По закону сохранения энергии средняя мощность потерь на участке длиной Δz равна уменьшению средней мощности волн

$$\Delta P_{пот} = -\Delta P_{cp} = -\frac{dP_{cp}}{dz} \Delta z = 2\gamma'' P_{cp} \Delta z.$$

Средняя мощность потерь на единицу длины системы выразится соотношением

$$P_n = \frac{\Delta P_{срn}}{\Delta z} = 2\gamma'' P_{ср.},$$

откуда получим для постоянной затухания

$$\gamma'' = \frac{P_n}{2P_{ср.}} \quad (I.33)$$

Входящая в (I.33) величина $P_{ср.}$ вычисляется по формуле (I.31), в которую подставляются поля, полученные без учета потерь.

Средняя мощность потерь на единицу длины системы складывается из двух частей, одна из которых P_n^d обусловлена потерями в диэлектрике, а другая P_n^n - в проводниках направляющей системы. Соответственно этому на две части распадается и постоянная затухания

$$\gamma'' = \gamma_d'' + \gamma_n'' \quad (I.34)$$

где

$$\gamma_d'' = \frac{P_n^d}{2P_{ср.}}, \quad \gamma_n'' = \frac{P_n^n}{2P_{ср.}} \quad (I.35)$$

В случае малых потерь, когда допустимо пренебречь их влиянием на структуру поля, величины γ_d'' и γ_n'' можно считать независимыми и вычислять их раздельно.

Затухание принято выражать в логарифмических единицах. Используя (I.32), запишем выражения затухания направляющей системы длиной Δz в неперх $N(n)$, беллах $N(d)$ и децибеллах N :

$$N(n) = \ln \left| \frac{A_0}{A_m} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{ср.0}}{P_{ср.}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-n} = \gamma'' \Delta z,$$

$$N(d) = \lg \frac{P_{ср.0}}{P_{ср.}} = \lg \frac{1}{1-n} = 0,434 \ln \frac{1}{1-n} = 0,868 \gamma'' \Delta z,$$

$$N = 10 \lg \frac{P_{ср.0}}{P_{ср.}} = 10 \lg \frac{1}{1-n} = 4,34 \ln \frac{1}{1-n} = 8,68 \gamma'' \Delta z,$$

где n - относительная величина мощности потерь

$$n = \frac{\Delta P_{cpn}}{P_{cp0}} = 1 - \frac{P_{cp}}{P_{cp0}} = 1 - e^{-0,23N} = 1 - 10^{-0,1N}$$

а) Потери в проводниках направляющей системы

Для определения средней мощности потерь в проводниках направляющей системы необходимо найти средний поток комплексного вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}'$, направленного внутрь проводника (рис.1.3), через проводящие поверхности S_n системы:

$$P_{cpn}^n = \int_{S_n} \text{Re} \vec{\Pi}' d\vec{S}$$

Воспользуемся приближенным граничным условием Леонтовича на поверхности реального проводника

$$\vec{E}_\tau^s = \dot{W}_2 [\vec{H}^s \vec{r}_n^s],$$

где $\vec{H}^s, \vec{E}_\tau^s$ - магнитное поле и тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности проводника;

\vec{r}_n^s - орт внутренней нормали к поверхности проводника;

$\dot{W}_2 \approx \frac{1+i}{2\sigma_2\delta}$ - волновое сопротивление реальной проводящей среды;

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}}$ - глубина проникновения поля в проводник;

σ_2 - проводимость.

Получим

$$\vec{\Pi}' = \frac{1}{2} [\vec{E}_\tau^s \vec{H}^s] = \frac{\dot{W}_2}{2} [[\vec{H}^s \vec{r}_n^s] \vec{H}^s] = \frac{\dot{W}_2}{2} |\vec{H}^s|^2 \vec{r}_n^s,$$

$$P_{cpn}^n = \frac{1}{2\sigma_2\delta} \int_{S_n} |\vec{H}^s|^2 dS.$$

Рассматривая участок длиной Δz , ограниченный поверхностью ΔS_n (рис.1.4), и учитывая, что $dS = \Delta z \cdot dl$, найдем

$$P_n'' = \frac{\Delta P_{cpn}}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z 2\sigma_2 \delta} \int_{\Delta S_n} |\dot{H}^s|^2 dS = \frac{1}{2\sigma_2 \delta} \int_{L_L} |\dot{H}^s|^2 dl,$$

откуда

$$\gamma_n'' = \frac{P_n''}{2P_{cp}} = \frac{\int_{L_L} |\dot{H}^s|^2 dl}{4\sigma_2 \delta P_{cp}}, \quad (I.36)$$

где L_L - контур поперечного сечения проводящих поверхностей системы.

Обозначим через R_s поверхностное активное сопротивление проводника на рабочей частоте, т.е. сопротивление поверхностного слоя единичной ширины и единичной длины

$$R_s = \frac{1}{\sigma_2 \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\sigma_2}}. \quad (I.37)$$

Выражение (I.36) запишется в виде

$$\gamma_n'' = \frac{R_s \int_{L_L} |\dot{H}^s|^2 dl}{4P_{cp}} \quad (I.38)$$

При выводе выражения (I.38) мы считали поверхность проводника идеально гладкой. Однако, затухание зависит от качества обработки поверхности. Это можно учесть, введя в (I.38) вместо R_s эквивалентное поверхностное сопротивление, величина которого при различной обработке поверхности приводится в справочниках.

б) Потери в диэлектрике направляющей системы

Постоянная распространения электромагнитной волны в неограниченном диэлектрике с потерями имеет вид

$$\kappa = \kappa' - i\kappa'' = \omega \sqrt{\mu(\epsilon' - i\epsilon'')} = \omega \sqrt{\mu\epsilon'} \sqrt{1 - itg\Delta^3},$$

где $tg\Delta^3 = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ - тангенс угла диэлектрических потерь. Разлагая κ в ряд по степеням малого параметра $tg\Delta^3$, получим

$$\kappa' \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon'}, \quad \kappa'' \approx \kappa' \frac{tg\Delta^3}{2}.$$

Если затухание направляемой волны обусловлено только

потерями в диэлектрике, то постоянную распространения с учётом дисперсионного уравнения (I.22) можно записать в виде

$$\dot{\gamma} = \gamma' - i\gamma'' = \sqrt{\kappa' - i\kappa''} \gamma_1^2 = \sqrt{(\kappa')^2 - (\kappa'')^2 - \gamma_1^2} \sqrt{1 - \frac{i 2\kappa'\kappa''}{(\kappa')^2 - (\kappa'')^2 - \gamma_1^2}}$$

Разлагая $\dot{\gamma}$ в ряд по степеням малого параметра $\frac{2\kappa'\kappa''}{(\kappa')^2 - (\kappa'')^2 - \gamma_1^2}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &\approx \sqrt{(\kappa')^2 - (\kappa'')^2 - \gamma_1^2}, \\ \gamma'' &\approx \frac{\kappa'\kappa''}{\gamma'} = \frac{(\kappa')^2 \operatorname{tg} \Delta^3}{2\gamma'} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.39})$$

I.9. Токи и щели в проводниках направляющих систем

Граничные условия для векторов поля позволяют найти распределение токов и решить вопрос о допустимых и недопустимых щелях в металлических поверхностях направляющих систем, если считать эти поверхности идеально проводящими.

Граничное условие для тангенциальных составляющих магнитного поля в общем случае имеет вид

$$[\vec{i}_n (\vec{H}_{(1)} - \vec{H}_{(2)})] = \vec{\eta}, \quad (\text{I.40})$$

где $\vec{H}_{(1)}$, $\vec{H}_{(2)}$ - магнитное поле на границе в средах I и 2 соответственно;

\vec{i}_n - орт нормали к границе раздела, направленный из среды 2 в среду I;

$\vec{\eta}$ - плотность поверхностного электрического тока.

Понятие идеального проводника предполагает отсутствие поля внутри него ($\vec{H}_{(2)} = \vec{E}_{(2)} = 0$) и возможность существования поверхностного тока на его поверхности ($\vec{\eta} \neq 0$). При этом условии (I.40) принимает вид

$$[\vec{i}_n \vec{H}_{(1)}] = \vec{\eta}. \quad (\text{I.41})$$

Соотношение (I.41) позволяет найти распределение тока в проводниках направляющей системы по известному распределению

магнитного поля исследуемой волны $\vec{H}_{(1)}$ на поверхности проводника (рис. I.5).

Если в проводнике прорезана щель, перпендикулярная линиям тока проводимости $\vec{\eta}$ (рис. I.6), то в силу непрерывности полного тока в щели (среда 3) должен существовать ток смещения, а значит, и электрическое поле $\vec{E}_{(3)}$, параллельное $\vec{\eta}$. Если щель достаточно узкая ($d \ll \lambda$), она не влияет на распределение поля у поверхности проводника, и тангенциальное электрическое поле в среде 1, как и при сплошном проводнике, должно отсутствовать ($E_{(1)\tau} = E_{(2)\tau} = 0$). При этом на границе раздела сред 1-3 существует разрыв тангенциальных составляющих электрического поля.

Согласно граничному условию для тангенциальных составляющих электрического поля

$$[\vec{T}_n (\vec{E}_{(1)} - \vec{E}_{(3)})] = -\vec{\eta}^M \quad (I.42)$$

их разрыв должен компенсироваться эквивалентным поверхностным магнитным током $\vec{\eta}^M$. В рассматриваемом случае ($E_{(1)\tau} = 0$) условие (I.42) принимает вид

$$[\vec{T}_n \vec{E}_{(3)}] = \vec{\eta}^M \quad (I.43)$$

Таким образом, узкая щель, перпендикулярная линиям электрического тока (параллельная $\vec{H}_{(1)}$), эквивалентна поверхностному магнитному току $\vec{\eta}^M$, направленному вдоль щели, которая излучает электромагнитное поле и, следовательно, создает дополнительные потери энергии направляемой волны. Такие излучатели называют щелевыми антеннами.

Узкая щель, параллельная линиям электрического тока (перпендикулярная $\vec{H}_{(1)}$), не разрывает путь тока и, следовательно, поле в ней отсутствует.

✓ I.10. Общие свойства цилиндрических волноводов

Цилиндрическими волноводами называют направляющие системы в виде полых металлических цилиндров того или иного поперечного сечения (прямоугольного, круглого и т.д.). При исследовании структуры полей в цилиндрических волноводах металлические поверхности можно считать идеально проводящими.

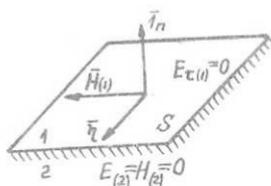


Рис. I.5.

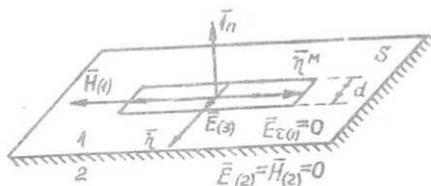


Рис. I.6.

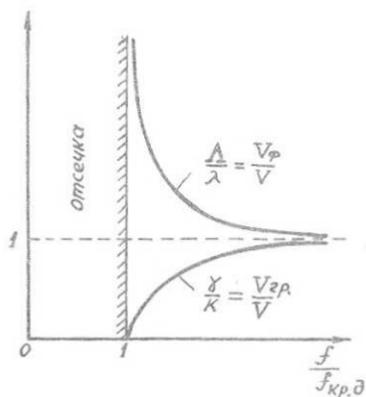


Рис. I.7.

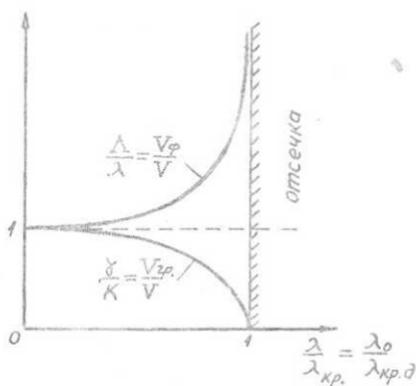


Рис. I.8.

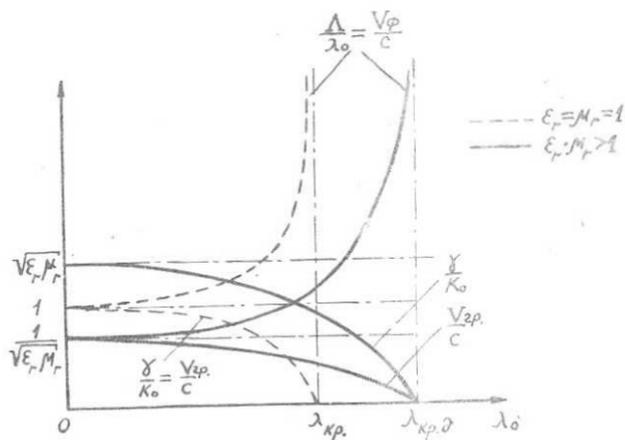


Рис. I.9.

Граничные условия на поверхности идеального проводника позволяют сформулировать граничные условия на стенках волновода непосредственно для функций Герца $\dot{\Gamma}^3$ и $\dot{\Gamma}^M$:

$$\dot{\Gamma}^3(L_{\perp}) = 0, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \dot{\Gamma}^M}{\partial n}(L_{\perp}) = 0, \quad (1.45)$$

где L_{\perp} - контур поперечного сечения волновода,
 n - нормаль к контуру волновода.

Наличие независимых граничных условий для $\dot{\Gamma}^3$ и $\dot{\Gamma}^M$ позволяет заключить, что уравнение (1.4) имеет независимые решения относительно $\dot{\Gamma}^3$ и $\dot{\Gamma}^M$ и, следовательно, справедливо деление всех типов волн цилиндрического волновода на Е - и Н- волны.

Можно показать (ниже это будет показано для прямоугольного и круглого волноводов), что для систем с замкнутой идеально проводящей оболочкой и однородным диэлектриком поперечное волновое число γ_{\perp} величина вещественная. Из этого следует, что цилиндрические волноводы являются волноводами быстрых волн, распространение быстрых волн возможно только при $\kappa > \gamma_{\perp}$. Действительно, в случае $\kappa < \gamma_{\perp}$ постоянная распространения становится мнимой величиной

$$\gamma = \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_{\perp}}{\kappa}\right)^2} = -i|\gamma|,$$

а поле теряет волновой характер и становится затухающим

$$\dot{A}_m = \dot{A}_0 e^{-i\gamma z} = \dot{A}_0 e^{-|\gamma|z}.$$

Такой режим работы волновода называют режимом отсечки.

Режим, при котором постоянная распространения обращается в нуль $\gamma = 0$, называется критическим. Рабочая длина волны (длина волны в свободном пространстве), соответствующая критическому режиму, называется критической длиной волны, частота поля, соответствующая критическому режиму - критической частотой.

Для незаполненного волновода ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) постоянная распространения вещественна при $\kappa_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} > \gamma_{\perp}$, т.е. при рабочих длинах волн $\lambda_0 < \frac{2\pi}{\gamma_{\perp}}$. Критическая длина волн и частота в этом случае выражаются формулами:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\gamma_L}, \quad f_{кр} = \frac{c}{\lambda_{кр}} = \frac{c\gamma_L}{2\pi}. \quad (I.46)$$

Для волновода, полностью заполненного диэлектриком ($\epsilon_r \cdot \mu_r > 1$) постоянная распространения вещественна при $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} > \gamma_L$, т.е. при рабочих длинах волн $\lambda_0 < \frac{2\pi}{\gamma_L} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$.

Критические длина волны и частота в этом случае определяются выражениями:

$$\lambda_{кр\partial} = \frac{2\pi}{\gamma_L} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \lambda_{кр} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \quad f_{кр\partial} = \frac{f_{кр}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \quad (I.47)$$

Таким образом, условие существования быстрых волн можно записать в одном из следующих видов:

незаполненный
волновод

$$\kappa_0 > \gamma_L,$$

$$f > f_{кр},$$

$$\lambda_0 < \lambda_{кр},$$

заполненный
волновод

$$\kappa > \gamma_L,$$

$$f > f_{кр\partial} = \frac{f_{кр}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}, \quad (I.48)$$

$$\lambda_0 < \lambda_{кр\partial} = \lambda_{кр} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}.$$

Подчеркнем, что в этих выражениях λ_0 - рабочая длина волны, т.е. длина волны в свободном (неограниченном и незаполненном) пространстве.

С учетом (I.46) и (I.47) дисперсионные соотношения (I.23) и (I.24) можно записать в виде:

$$\frac{\gamma}{\kappa} = \frac{v_{гр}}{v} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр\partial}}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр\partial}}{f}\right)^2}, \quad (I.49)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda} = \frac{v_{гр}}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр\partial}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр\partial}}{f}\right)^2}}. \quad (I.50)$$

Обобщенные дисперсионные характеристики цилиндрического волновода представлены на рис. I.7 и I.8. На рис. I.9 приведены зависимости $\frac{\chi}{\lambda_0}$, $\frac{v_{gr}}{c}$ и $\frac{v_{gr}}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ от λ_0 для незаполненного и заполненного волноводов.

В математике доказывается (ниже это будет показано для прямоугольного и круглого волноводов), что при заданных граничных условиях (I.44) или (I.45) двумерное волновое уравнение (I.II) имеет отличные от нуля частные решения не при любых, а только при определенных значениях величины $\chi_{l\ell}^2$, которые образуют возрастающую последовательность положительных вещественных чисел

$$\chi_{11}^2, \chi_{12}^2, \dots, \chi_{1k}^2, \chi_{1\ell}^2, \dots$$

и называются собственными значениями данной граничной задачи. Частные решения также образуют бесконечную дискретную совокупность функций

$$\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \dots, \Gamma_{(k)}, \Gamma_{(\ell)}, \dots,$$

которые называются собственными функциями граничной задачи. Каждая собственная функция $\Gamma_{(\ell)}$ соответствует строго определенному собственному значению $\chi_{l\ell}$. Это означает, что в цилиндрическом волноводе может существовать бесконечное множество различных типов E- и H-волн, отличающихся значениями поперечного волнового числа χ_l , т.е. характером зависимости составляющих поля от поперечных и продольной координат. Волне каждого типа соответствует своя критическая длина волны

$$\lambda_{кр\ell} = \frac{2\pi}{\chi_{l\ell}}$$

Условие существования волн того или иного типа имеет вид:

$$\lambda_0 < \lambda_{кр\ell}.$$

Если при данной рабочей длине волны λ_0 может существовать волна с собственным значением $\chi_{l\ell}$, то могут существовать и все низшие типы волн, так как для них условия существования также выполняются (рис. I.10):

$$\lambda_0 < \lambda_{кр\ell} < \lambda_{кр.k}.$$

Только волна самого низкого типа, называемая основной, в некотором диапазоне длин волн

$$\lambda_{кр.1} < \lambda_0 < \lambda_{кр.1}$$

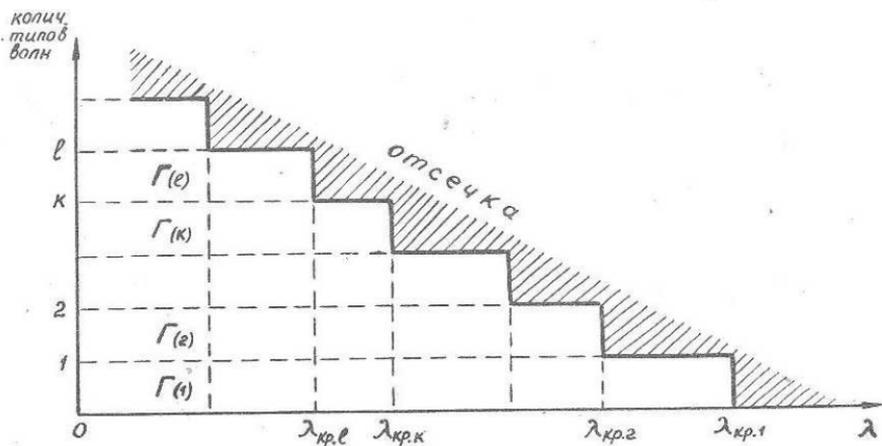


Рис. I.10

может существовать при отсутствии волн прочих типов. Энергетически выгодно передавать электромагнитную энергию именно на одной волне, что без специальных мер возможно только при работе на основной волне. Рабочий диапазон длин волн волновода обычно ограничивают пределами

$$1,05 \cdot \lambda_{кр.2} \leq \lambda_0 \leq 0,8 \lambda_{кр.1} \quad (I.51)$$

I.II. Влияние неоднородностей на режим направляющей системы

Если направляющая система имеет неоднородность или включена на некоторую нагрузку, то решения волнового уравнения должны содержать не только прямые, но и обратные волны, так как в противном случае не будут удовлетворены граничные условия на неоднородности. Прямые волны рассматриваются как волны, падающие на неоднородность, а обратные — как волны, отраженные ею. В большинстве случаев число типов волн, которые могут распространяться в системе, ограничено одним. Поэтому можно считать, что на некотором расстоянии от неоднородности

существует только одна падающая и одна отраженная волна, поперечные структуры которых одинаковы. Обычно при анализе нерегулярных направляющих систем продольную координату z отсчитывают от неоднородности (или нагрузки) в сторону генератора. При этом продольная зависимость комплексов поля для падающей волны характеризуется функцией $e^{i\gamma z}$, а для отраженной волны — функцией $e^{-i\gamma z}$. Наличие отражений приводит к уменьшению энергии, передаваемой по направляющей системе. Однако продольные составляющие поля не участвуют в переносе энергии вдоль оси системы, и потому при анализе влияния неоднородностей на работу системы могут не рассматриваться. Комплексные амплитуды поперечных составляющих электрического и магнитного полей запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_L &= \dot{E}^n + \dot{E}^{o\tau} = \dot{E}_o^n e^{i\gamma z} + \dot{E}_o^{o\tau} e^{-i\gamma z}, \\ \dot{H}_L &= \dot{H}^n + \dot{H}^{o\tau} = \dot{H}_o^n e^{i\gamma z} - \dot{H}_o^{o\tau} e^{-i\gamma z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Как в падающей, так и в отраженной волне поперечные составляющие электрического и магнитного полей связаны посредством волнового сопротивления системы для волны рассматриваемого типа

$$W = \frac{\dot{E}^n}{\dot{H}^n} = \frac{\dot{E}^{o\tau}}{\dot{H}^{o\tau}} \quad (1.53)$$

Режим направляющей системы при наличии неоднородностей характеризуется величиной коэффициента отражения, определяемого как отношение комплексов поперечных составляющих электрического поля падающей и отраженной волн

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{E}^{o\tau}}{\dot{E}^n} = \frac{\dot{E}_o^{o\tau}}{\dot{E}_o^n} e^{-i2\gamma z} = \dot{\Gamma}_o e^{-i2\gamma z} \quad (1.54)$$

Значение $\dot{\Gamma}$ в плоскости неоднородности ($z=0$) называется коэффициентом отражения неоднородности (или нагрузки)

$$\dot{\Gamma}_o = \frac{\dot{E}_o^{o\tau}}{\dot{E}_o^n} = |\dot{\Gamma}| e^{-i\psi_{\Gamma}} \quad (1.55)$$

Как видим, в системе без потерь модуль коэффициента отражения не меняется вдоль оси системы.

Подставляя (I.54) в (I.52), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_L &= \dot{E}_0^n e^{i\gamma z} (1 + \dot{\Gamma}), \\ \dot{H}_L &= \dot{H}_0^n e^{i\gamma z} (1 - \dot{\Gamma}). \end{aligned} \right\} \quad (I.56)$$

Множитель $1 \pm \dot{\Gamma}$ в (I.56) можно представить в виде

$$1 \pm \dot{\Gamma} = |1 \pm \dot{\Gamma}| e^{i\alpha_{\pm}}$$

где

$$|1 \pm \dot{\Gamma}| = \sqrt{1 + |\dot{\Gamma}|^2 \pm 2|\dot{\Gamma}| \cos(2\gamma z + \psi_0)},$$

$$\alpha_{\pm} = \text{Arc tg} \frac{|\dot{\Gamma}| \sin(2\gamma z + \psi_0)}{1 \pm |\dot{\Gamma}| \cos(2\gamma z + \psi_0)}$$

Для мгновенных значений составляющих поля получим:

$$E_L = \text{Re} \{ \dot{E}_L e^{i\omega t} \} = E_{Lm} \cos(\omega t + \gamma z + \alpha_+ + \psi_E),$$

$$H_L = \text{Re} \{ \dot{H}_L e^{i\omega t} \} = H_{Lm} \cos(\omega t + \gamma z + \alpha_- + \psi_H),$$

где E_{Lm} , H_{Lm} - амплитуды или пространственные огибающие составляющих поля, не зависящие от времени и определяемые выражениями

$$\left. \begin{aligned} E_{Lm} &= |\dot{E}_L| = |\dot{E}_0^n| |1 + \dot{\Gamma}| = |\dot{E}_0^n| \sqrt{1 + |\dot{\Gamma}|^2 + 2|\dot{\Gamma}| \cos(2\gamma z + \psi_0)}, \\ H_{Lm} &= |\dot{H}_L| = |\dot{H}_0^n| |1 - \dot{\Gamma}| = |\dot{H}_0^n| \sqrt{1 + |\dot{\Gamma}|^2 - 2|\dot{\Gamma}| \cos(2\gamma z + \psi_0)}. \end{aligned} \right\} (I.57)$$

Как видим, при наличии неоднородностей амплитуды полей имеют периодическую зависимость от Z . Соседние минимумы поля расположены на расстоянии ΔZ , удовлетворяющем условию $2\alpha \Delta Z = 2\pi$, согласно которому пространственный период поля равен половине волноводной длины волны $\Delta Z = \frac{\lambda}{2}$.

Максимумы электрического и минимумы магнитного полей наблюдаются в одних и тех же сечениях, удовлетворяющих условию $2\gamma z + \psi_0 = 2\kappa\pi$ ($\kappa = 0, 1, 2 \dots$), минимумы электрического и максимумы магнитного полей - в сечениях, удовлетворяющих

условие $2\gamma z + \psi_0 = (2\kappa + 1)\pi$ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$). Пространственный сдвиг между максимумами электрического и магнитного полей составляет $\Delta z = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{\lambda}{4}$. Величины минимумов и максимумов поля определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} E_{L\max} &= |\dot{E}_0^n| (1 + |\dot{\Gamma}|), \\ E_{L\min} &= |\dot{E}_0^n| (1 - |\dot{\Gamma}|), \\ H_{L\max} &= |\dot{H}_0^n| (1 + |\dot{\Gamma}|), \\ H_{L\min} &= |\dot{H}_0^n| (1 - |\dot{\Gamma}|). \end{aligned} \right\} \quad (I.58)$$

При $|\dot{\Gamma}| = 0$ поле имеет характер бегущих волн:

$$\begin{aligned} E_{Lm} &= E_{L\max} = E_{L\min} = |\dot{E}_0^n|, \\ H_{Lm} &= H_{L\max} = H_{L\min} = |\dot{H}_0^n|. \end{aligned}$$

При $|\dot{\Gamma}| = 1$ продольная зависимость поля представляет собой чисто стоячие волны:

$$\begin{aligned} E_{Lm} &= 2|\dot{E}_0^n| \left| \cos\left(\gamma z + \frac{\psi_0}{2}\right) \right|, \\ H_{Lm} &= 2|\dot{H}_0^n| \left| \sin\left(\gamma z + \frac{\psi_0}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

При $0 < |\dot{\Gamma}| < 1$ имеет место режим смешанных волн, представляющих собой суперпозицию бегущих и стоячих волн, причем при $|\dot{\Gamma}| \ll 1$ переменные составляющие огибающих поля имеют продольную зависимость, близкую к гармонической.

Для измерения величины $\dot{\Gamma}$ или её модуля необходимо физически разделить падающую и отраженную волны, что встречает некоторые трудности. Более доступна для измерения другая величина, также характеризующая режим направляющей системы и называемая коэффициентом стоячей волны (к.с.в.)

$$K_{с.в.} = \frac{E_{L\max}}{E_{L\min}} = \frac{1 + |\dot{\Gamma}|}{1 - |\dot{\Gamma}|}. \quad (I.59)$$

Величина, обратная к.с.в., называется коэффициентом бегущей волны

$$K_{б.в.} = \frac{1}{K_{с.в.}} = \frac{E_{L\min}}{E_{L\max}} = \frac{1 - |\dot{\Gamma}|}{1 + |\dot{\Gamma}|}. \quad (I.60)$$

Из (I.59) и (I.60) получим

$$|\dot{\Gamma}| = \frac{K_{с.в.} - 1}{K_{с.в.} + 1} = \frac{1 - K_{д.в.}}{1 + K_{д.в.}} \quad (I.61)$$

Действие неоднородности на режим распространения волны можно описать при помощи эквивалентных сопротивлений. Отношение комплексов поперечных составляющих электрического и магнитного полей в данном сечении системы называется входным сопротивлением системы в этом сечении

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp} = W \frac{1 + \dot{\Gamma}}{1 - \dot{\Gamma}} \quad (I.62)$$

Значение \dot{Z} в плоскости неоднородности ($z = 0$) называется эквивалентным сопротивлением неоднородности (или нагрузкой)

$$\dot{Z}_H = \left(\frac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp} \right)_{z=0} = W \frac{1 + \dot{\Gamma}_0}{1 - \dot{\Gamma}_0} \quad (I.63)$$

Выражения (I.62) и (I.63) позволяют записать:

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{Z} - W}{\dot{Z} + W}, \quad (I.64)$$

$$\dot{\Gamma}_0 = \frac{\dot{Z}_H - W}{\dot{Z}_H + W}. \quad (I.65)$$

Из сопоставления (I.62) с (I.57) и (I.58) видно, что входное сопротивление системы без потерь чисто активно в точках максимумов и минимумов поля:

$$R_{max} = \frac{E_{\perp max}}{H_{\perp min}} = W \frac{1 + |\dot{\Gamma}|}{1 - |\dot{\Gamma}|} = W \cdot K_{с.в.}, \quad (I.66)$$

$$R_{min} = \frac{E_{\perp min}}{H_{\perp max}} = W \frac{1 - |\dot{\Gamma}|}{1 + |\dot{\Gamma}|} = \frac{W}{K_{с.в.}}. \quad (I.67)$$

В практике часто возникает задача определения входного сопротивления системы по известному сопротивлению неоднородности. Подставляя (I.54) с учётом (I.55) и (I.65) в (I.62) и выполняя ряд преобразований, получим

$$\dot{Z} = W \frac{\dot{Z}_H + iW \operatorname{tg} \gamma z}{W + i\dot{Z}_H \operatorname{tg} \gamma z} \quad (\text{I.68})$$

Нередко возникает и обратная задача: определение эквивалентного сопротивления неоднородности по известному входному сопротивлению системы на заданном расстоянии от неоднородности. Из (I.68) получим

$$\dot{Z}_H = R_H + iX_H = W \frac{\frac{\dot{Z}}{W}(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma z) + i\left[\left(\frac{\dot{Z}}{W}\right)^2 - 1\right] \operatorname{tg} \gamma z}{1 + \left(\frac{\dot{Z}}{W}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma z} \quad (\text{I.69})$$

Учитывая выражение (I.67) для входного сопротивления системы в плоскости минимума электрического поля, представим (I.69) в виде:

$$R_H = W \frac{\kappa_{с.в.}(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma \Delta z)}{\kappa_{с.в.}^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma \Delta z},$$

$$X_H = W \frac{(1 - \kappa_{с.в.}^2) \operatorname{tg} \gamma \Delta z}{\kappa_{с.в.}^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma \Delta z}, \quad (\text{I.70})$$

где Δz - расстояние от неоднородности до ближайшего минимума электрического поля в сторону генератора.

При $\Delta z < \frac{\Lambda}{4}$ сопротивление неоднородности имеет ёмкостный характер ($X_H < 0$), причем эквивалентная ёмкость равна $C = -\frac{1}{\omega X_H}$, а при $\Delta z > \frac{\Lambda}{4}$ - индуктивный характер и эквивалентная индуктивность равна $L = \frac{X_H}{\omega}$.

Глава II. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД.

✓ 2.1. Решение волнового уравнения для функций Герца

Прямоугольным волноводом называют направляющую систему в виде полый металлической трубы прямоугольного сечения. При исследовании полей в прямоугольном волноводе целесообразно использовать декартову систему координат (рис.2.1). Проведем это исследование с помощью функций Герца. При записи функций Герца в виде

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_m e^{i\omega t} = \Gamma_0 e^{i(\omega t - \gamma z)}$$

задача сводится к решению двумерного волнового уравнения (I.11)

$$\nabla_{\perp}^2 \Gamma_0 + \gamma_{\perp}^2 \Gamma_0 = 0,$$

которое в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial y^2} + \gamma_{\perp}^2 \Gamma_0 = 0. \quad (2.1)$$

Используя метод Фурье, представим Γ_0 как произведение взаимно независимых функций координат

$$\Gamma_0 = X(x) Y(y).$$

При этом уравнение (2.1) запишется в виде

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\gamma_{\perp}^2$$

Так как функции X и Y взаимно независимы, уравнение распадается на два независимых уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \gamma_x^2 X &= 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \gamma_y^2 Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 = \gamma_{\perp}^2. \quad (2.3)$$

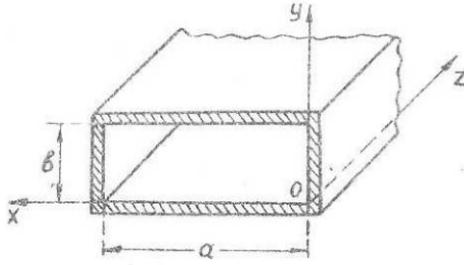


Рис. 2.1

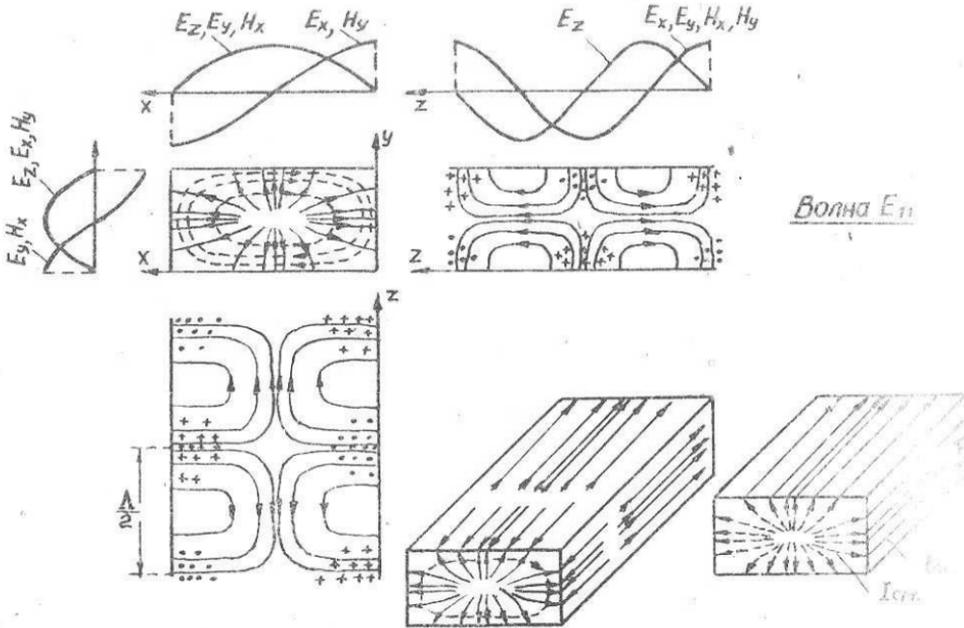


Рис. 2.2

Поскольку система в направлениях x и y ограничена металлическими стенками, решениями уравнений (2.2) должны быть стоячие волны, описываемые тригонометрическими функциями:

$$X = C_1 \sin(\gamma_x x) + C_2 \cos(\gamma_x x),$$

$$Y = C_3 \sin(\gamma_y y) + C_4 \cos(\gamma_y y).$$

При этом получим

$$\Gamma_o = XY = [C_1 \sin(\gamma_x x) + C_2 \cos(\gamma_x x)][C_3 \sin(\gamma_y y) + C_4 \cos(\gamma_y y)] \quad (2.4)$$

Для определения постоянных γ_x , γ_y и C_i следует использовать граничные условия для функций Герца, однако они различны для электрической Γ^e и магнитной Γ^m функций Герца, поэтому дальнейший анализ проведем отдельно для волн типов E и H.

✓ 2.2. Волны типа E в прямоугольном волноводе

Как указывалось в разделе I, после волны типа E полностью определяется электрической функцией Герца Γ^e , которая на идеально проводящей поверхности подчиняется граничному условию (1.44)

$$\Gamma^e(L_1) = 0 \quad (2.5)$$

В случае прямоугольного волновода это условие должно выполняться при $x = 0, a$ и $y = 0, b$.

Из (2.4), (2.5) при $x = 0$ и $y = 0$ получим

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.4), (2.5) при $x = a$ с учётом (2.6) следует условие:

$$C_1 \sin(\gamma_x a) = 0,$$

которое выполняется, если $C_1 = 0$ и если $\gamma_x a = m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Значение $C_1 = 0$ и $m = 0$ даёт тривиальные решения, т.е. обращают поле в нуль в любой точке системы, и поэтому недопустимы.

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{m\pi}{a}, \\ m &= 1, 2, 3, \dots, \\ C_1 &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Из (2.4), (2.5) при $y = b$ с учетом (2.6) следует

$$C_3 \sin(\gamma_y b) = 0,$$

откуда аналогично предыдущему случаю получим

$$\left. \begin{aligned} \gamma_y &= \frac{n\pi}{b}, \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \\ C_3 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.6-2.8) позволяют записать решение уравнения (2.1) для волны типа Е в виде

$$\Gamma_0^3 = C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \quad (2.9)$$

где

$$C_3 = C_1 C_3.$$

Подставляя (2.9) в (1.16), получим выражения для составляющих поля волн типа Е:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{x0} &= i\omega\epsilon \frac{n\pi}{b} C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\ \dot{H}_{y0} &= -i\omega\epsilon \frac{m\pi}{a} C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\ \dot{H}_{z0} &= 0, \\ \dot{E}_{x0} &= -i\gamma \frac{m\pi}{a} C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\ \dot{E}_{y0} &= -i\gamma \frac{n\pi}{b} C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\ \dot{E}_{z0} &= \gamma^2 C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.3), получим выражения для поперечного волнового числа и критической длины волны:

$$\gamma_1 = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (2.11)$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (2.12)$$

где

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Как видим, граничные условия выполняются не при любых, а лишь при определенных значениях γ_{\perp} . Каждому разрешенному значению γ_{\perp} , т.е. каждому сочетанию чисел m и n , соответствует свое определенное частное решение (2.9) волнового уравнения и, следовательно, свой определенный тип волны, структура поля которого определяется выражениями (2.10). Волна с заданными m и n обозначается E_{mn} . Условие существования волны того или иного типа имеет

$$\lambda < \lambda_{кр},$$

где $\lambda_{кр}$ определяется по (2.12).

Полученные соотношения позволяют найти пространственный период поля вдоль осей \vec{x} и \vec{y} , т.е. длины стоячих волн вдоль этих осей:

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\gamma_x} = \frac{2a}{m}, \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{\gamma_y} = \frac{2b}{n}.$$

Обычно через a обозначают размер широкой, а через b — узкой стенок волновода. При этом величины m и n показывают число полуволновых вариаций поля вдоль широкой и узкой стенок соответственно

$$m = \frac{a}{\lambda_x/2}, \quad n = \frac{b}{\lambda_y/2}.$$

Наименьшие допустимые значения m и n для волн типа E равны единице ($m=n=1$). Следовательно, нижней волной типа E в прямоугольном волноводе является волна E_{11} . Для нее согласно (2.12)

$$\lambda_{кр} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2.13)$$

Используя выражения (2.10), можно построить структуру поля любой волны типа E . Соотношение (1.41) при известной структуре поля позволяет построить структуру токов в стенках волновода. На рис. 2.2 представлены структуры поля и токов волны E_{11} .

Общей особенностью волн типа E является наличие только поперечных составляющих магнитного поля и, следовательно, только продольных токов в стенках волновода. Поэтому попереч-

ные щели в стенках искажают структуру поля волн типа Е и резко увеличивают их затухание, а продольные - не влияют на структуру поля.

✓ 2.3. Волны типа Н в прямоугольном волноводе

Поля волн типа Н полностью определяются магнитной функцией Герца Γ^M , которая на идеально проводящих поверхностях подчиняется граничному условию (1.45). В случае прямоугольного волновода это условие принимает вид

$$\left. \frac{\partial \Gamma^M}{\partial x} \right|_{x=0, a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Gamma^M}{\partial y} \right|_{y=0, b} = 0. \quad (2.14)$$

Дифференцируя (2.4) по x и y , найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_0^M}{\partial x} &= [C_1 \gamma_x \cos(\gamma_x x) - C_2 \gamma_x \sin(\gamma_x x)] Y, \\ \frac{\partial \Gamma_0^M}{\partial y} &= [C_3 \gamma_y \cos(\gamma_y y) - C_4 \gamma_y \sin(\gamma_y y)] X. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Из (2.14), (2.15) при $x=0$ и $y=0$ получим

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0. \quad (2.16)$$

Из (2.14), (2.15) при $x=a$ с учетом (2.16) следует условие:

$$C_2 \gamma_x \sin(\gamma_x a) = 0,$$

которое выполняется, если $C_2 = 0$ и если $\gamma_x a = m\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots$). Значение $C_2 = 0$ недопустимо, так как даёт тривиальное решение, значение же $m=0$ в данном случае не обращает в нуль выражение (2.4) и потому допустимо. Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{m\pi}{a}, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, \\ C_2 &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Из (2.14), (2.15) при $x=a$ с учетом (2.16) следует

$$C_4 \gamma_y \sin(\gamma_y b) = 0,$$

откуда аналогично предыдущему случаю получим

$$\left. \begin{aligned} \gamma_y &= \frac{n\pi}{b}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \\ C_4 &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Соотношения (2.16 - 2.18) позволяют записать решение уравнения (2.1) для волн типа Н в виде

$$\Gamma_0^M = C_M \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (2.19)$$

где

$$C_M = C_2 \cdot C_4.$$

Подставляя (2.19) в (1.17), получим выражения для составляющих поля волн типа Н:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{x0} &= i\omega\mu \frac{n\pi}{b} C_M \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ \dot{E}_{y0} &= -i\omega\mu \frac{m\pi}{a} C_M \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ \dot{E}_{z0} &= 0, \\ \dot{H}_{x0} &= i\gamma \frac{m\pi}{a} C_M \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ \dot{H}_{y0} &= i\gamma \frac{n\pi}{b} C_M \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ \dot{H}_{z0} &= \gamma^2 C_M \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.3), получим:

$$\gamma_{\perp} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (2.21)$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (2.22)$$

где

$$m=0,1,2,\dots, \quad n=0,1,2,\dots$$

Как и в случае E -волн, поперечное волновое число имеет дискретный ряд разрешенных значений, каждому из которых соответствует определенный тип волны. Волна с заданными m и n обозначается H_{mn} . Числа m и n , как и в случае E -волн, показывают количество поперечных вариаций поля вдоль широкой и узкой стенок волновода.

Согласно (2.12) и (2.22) волны H_{mn} и E_{mn} с одинаковыми индексами имеют равные критические длины волн и скорости распространения, т.е. могут существовать одновременно и по характеру распространения неразличимы. Это явление называется вырождением, а волны H_{mn} и E_{mn} с одинаковыми индексами - вырожденными. Невырожденными волнами прямоугольного волновода являются волны H_{0n} и H_{m0} , так как нулевые значения m и n допустимы только для волн типа H . Однако согласно (2.19) при $m=n=0$ $\Gamma_0^m = \text{const}$ и, следовательно, поле тождественно равно нулю. Поэтому значение $m=0$ возможно при $n \neq 0$, и наоборот.

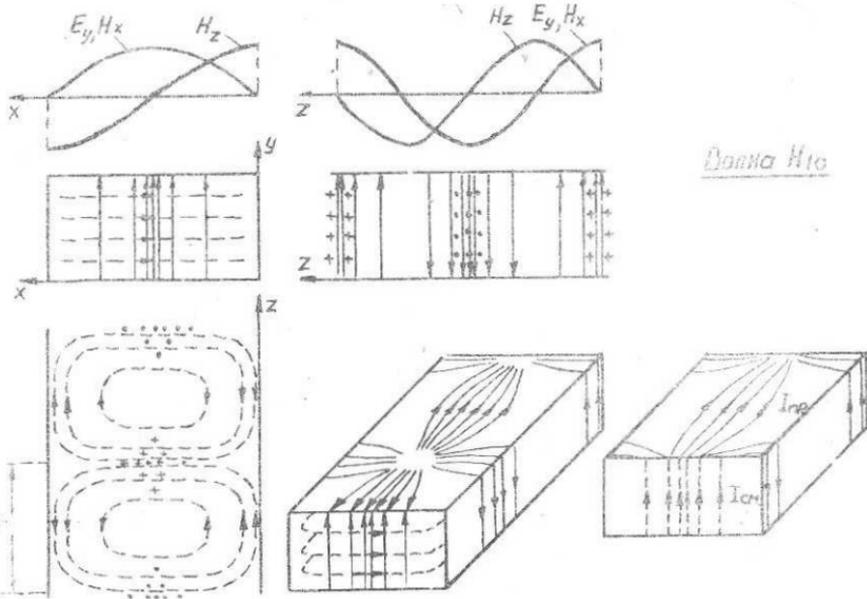
Поскольку за a мы приняли размер широкой стенки волновода ($a > b$), нижней волной типа H в прямоугольном волноводе является волна H_{10} . Для неё из (2.22) получим

$$\lambda_{кр} = 2a. \quad (2.23)$$

Из сравнения (2.23) с (2.13) видно, что при неизменных поперечных размерах волновода $\lambda_{кр}$ для волны H_{10} больше, чем для волны E_{11} . Следовательно волна H_{10} является не только нижней волной типа H , но и основной волной прямоугольного волновода. Согласно (2.23) размер b не влияет на критическую частоту и скорость распространения волны H_{10} .

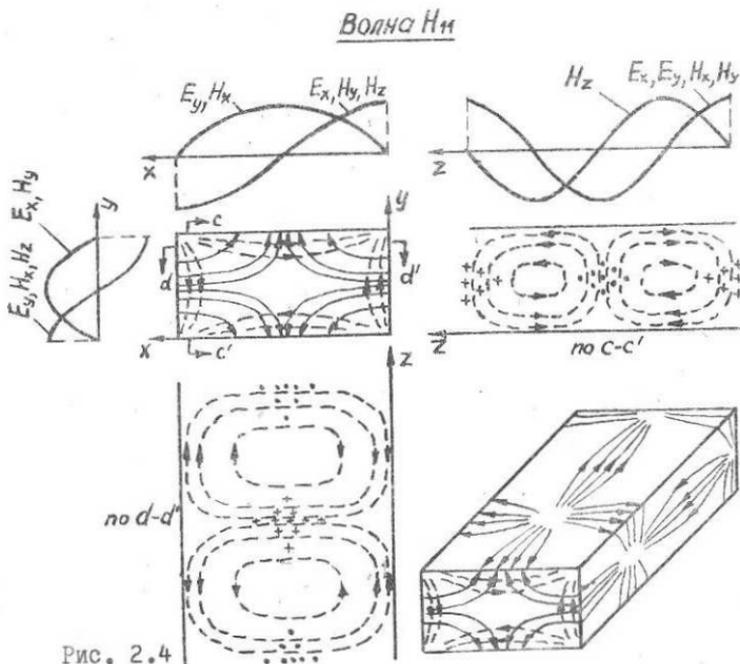
Диапазон частот, в пределах которого волна H_{10} может существовать без примеси волн высших типов, снизу ограничен критической частотой самой волны H_{10} , а сверху - критической частотой ближайшей волны высшего типа. В зависимости от соотношения поперечных размеров волновода ближайшими к H_{10} высшими типами волн могут быть H_{01} или H_{20} , для которых

$$\lambda_{кр01} = 2b, \quad \lambda_{кр20} = a.$$



Волна H_{10}

Рис. 2.3



Волна H_{11}

Рис. 2.4

При $\beta > 0,5a$ $\lambda_{кр.01} > \lambda_{кр.20}$, т.е. ближайшей к H_{10} является волна H_{01} . В этом случае

$$\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right)_{10} = \frac{\lambda_{кр.10}}{\lambda_{кр.01}} = \frac{a}{\beta} < 2.$$

При $\beta \leq 0,5a$ $\lambda_{кр.01} \leq \lambda_{кр.20}$, т.е. ближайшей к H_{10} является волна H_{20} . При этом

$$\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right)_{10} = \frac{\lambda_{кр.10}}{\lambda_{кр.20}} = 2.$$

В последнем случае $\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right)_{10}$ больше, чем в первом, поэтому обычно берут $\beta \leq 0,5a$.

Соотношения (2.20) и (1.41) позволяют построить структуры полей и токов волн типа Н в прямоугольном волноводе. На рис. 2.3, 2.4 представлены структуры полей и токов для волн H_{10} и H_{11} .

2.4. Затухание и мощность волн прямоугольного волновода

При определении средней мощности $P_{ср}$, переносимой волной того или иного типа, используем выражение (1.31). Постоянную затухания γ_n'' , обусловленного потерями в металлических стенках волновода, находим с помощью соотношения (1.38).

а) Волны типа H_{m0} ($m \neq 0, n = 0$)

Сначала найдем среднюю мощность, переносимую волной H_{m0} . Используя (2.20), запишем

$$|\dot{E}_{\perp}|^2 = |\dot{E}_{y0}|^2 = (\omega\mu)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 C_m^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right). \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (1.31) и интегрируя по S_{\perp} , получим

$$\begin{aligned} P_{ср} &= \frac{1}{2W_H} \int_{S_{\perp}} |\dot{E}_{\perp}|^2 dS = \frac{1}{2W_H} \int_0^a \int_0^b |\dot{E}_{y0}|^2 dx dy = \\ &= \frac{(\omega\mu m\pi)^2}{4W_H} \frac{b}{a} C_m^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для определения χ_n'' необходимо взять интеграл, стоящий в числителе (I.38). На широких стенках волновода ($y=0, b$) согласно (2.20) имеем:

$$|\dot{H}^s|^2 = (|\dot{H}_{x0}^s|^2 + |\dot{H}_{z0}^s|^2)_{y=0, b} = C_M^2 \left[\left(\frac{\gamma m \pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) + \chi_L^4 \cos^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \right],$$

$$\int_{L_x} |\dot{H}^s|^2 d\ell = 2 \int_0^a (|\dot{H}_{x0}^s|^2 + |\dot{H}_{z0}^s|^2)_{y=0} dx = C_M^2 a \left[\left(\frac{\gamma m \pi}{a} \right)^2 + \chi_L^4 \right]. \quad (2.26)$$

Выполняя интегрирование по узким стенкам волновода ($x=0, a$), найдем

$$|\dot{H}^s| = |\dot{H}_{z0}^s|_{x=0, a} = \chi_L^2 C_M,$$

$$\int_{L_y} |\dot{H}^s|^2 d\ell = 2 \int_0^b |\dot{H}_{z0}^s|^2_{x=0} dy = 2b \chi_L^4 C_M^2. \quad (2.27)$$

Подставляя (2.25) и сумму (2.26) и (2.27) в (I.38), получим

$$\chi_n'' = \frac{R_s W_n}{(\omega \mu m \pi)^2} \frac{a}{b} \left\{ a \left[\left(\frac{\gamma m \pi}{a} \right)^2 + \chi_L^4 \right] + 2b \chi_L^4 \right\}.$$

Учитывая (I.22) и (I.27) и проделав ряд преобразований, приведем χ_n'' к виду:

$$\chi_n'' = \frac{R_s}{W_c b} \cdot \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \right)^2}}. \quad (2.28)$$

Рассмотрим зависимость χ_n'' от частоты. Раскрывая выражение для R_s , представим (2.28) в виде

$$\chi_n'' = \frac{2K_1}{a \sqrt{\lambda_{кр.}}} \cdot \frac{\frac{a}{2b} \xi^2 + 1}{\sqrt{\xi} \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (2.29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{f}{f_{кр.0}} = \frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} \\ K_1 &= \sqrt{\frac{\pi M_2}{6_2 \mu W_c}} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Согласно (2.29) при $\xi \rightarrow 1$, т.е. при стремлении частоты к критической, затухание резко растет и при $\xi = 1$ обращается в бесконечность. Последний вывод объясняется неприменимостью данного метода расчёта вблизи критической частоты. Однако при $\xi \approx 1$ затухание действительно становится аномально большим, хотя и не бесконечным.

При больших значениях ξ ($\xi \gg 1$) затухание растет пропорционально \sqrt{f}

$$\gamma_n \approx \frac{K_1}{6\sqrt{\lambda_{кр}}} \sqrt{\xi}.$$

Объясняется это тем, что при $f \gg f_{кр}$ волновод приближается по свойствам к обычным длинным линиям ($\gamma \rightarrow \kappa$), частотная зависимость затухания которых определяется частотной зависимостью поверхностного сопротивления R_s , пропорционального \sqrt{f} .

Так как при $\xi \approx 1$ затухание падает, а при $\xi \gg 1$ растет с ростом ξ , при некотором значении ξ_{opt} должен быть минимум затухания. Дифференцируем (2.29) по ξ и приравняв производную нулю, найдем ξ_{opt}

$$\xi_{opt} = \sqrt{3 \frac{b}{a} + \frac{3}{2} + \sqrt{9 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 7 \frac{b}{a} + \frac{9}{4}}}. \quad (2.31)$$

Расчеты по (2.31) показывают, что при изменении $\frac{b}{a}$ в пределах $0,3 \div 0,5$ ξ_{opt} изменяется в пределах $2,13 \div 2,42$.

Выразим мощность волны N_{mo} через максимум напряженности электрического поля в волноводе. Из (2.20) найдем мгновенное значение единственной составляющей электрического поля волны N_{mo}

$$\vec{E}_y = \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_{y0} e^{i(\omega t - \gamma z)} \right\} = \frac{\omega \mu m \pi}{a} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \gamma z)$$

Максимум электрического поля имеет место при $x = \frac{a}{2m}$

$$E_{max} = \frac{\omega \mu m \pi}{a} C_m. \quad (2.32)$$

Подставляя C_m из (2.32) в (2.25), получим

$$P_{ср.} = \frac{ab}{4W_h} E_{max}^2 = \frac{ab}{4W_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} E_{max}^2. \quad (2.33)$$

Соотношение (2.33) позволяет найти предельную мощность

волны H_{m0} , пропускаемую волноводом, т.е. мощность, при которой электрическое поле в волноводе в режиме бегущей волны достигает пробивного значения $E_{пр}$. Для воздуха при нормальном атмосферном давлении в сантиметровом и дециметровом диапазонах волн $E_{пр} \approx 29 \frac{кВ}{см}$. Чем выше тип волны, тем меньше $\lambda_{кр.}$, следовательно наибольшую величину предельной мощности имеет волна основного типа.

б) Волны типа H_{mn} ($m \neq 0, n \neq 0$)

Используя выражения (2.20) для составляющих поля волн H_{mn} в прямоугольном волноводе, найдем $P_{ср.}$:

$$\begin{aligned} |\dot{E}_{\perp}|^2 &= |\dot{E}_{x0}|^2 + |\dot{E}_{y0}|^2 = \\ &= (\omega\mu)^2 C_m^2 \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right], \\ P_{ср.} &= \frac{1}{2W_H} \int_{S_{\perp}} |\dot{E}_{\perp}|^2 dS = \frac{1}{2W_H} \int_0^a \int_0^b (|\dot{E}_{x0}|^2 + |\dot{E}_{y0}|^2) dx dy = \\ &= \frac{(\omega\mu\chi_{\perp})^2 a b}{8 W_H} C_m^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Определим χ_n'' , для чего найдем интеграл, стоящий в числителе (1.38). На широких стенках волновода ($y = 0, b$) согласно (2.20) имеем:

$$\begin{aligned} |\dot{H}^s|^2 &= (|\dot{H}_{x0}|^2 + |\dot{H}_{z0}|^2)_{y=0, b} = \\ &= C_m^2 \left[\left(\frac{\gamma m \pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \chi_{\perp}^4 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right], \end{aligned}$$

$$\int_{L_x} |\dot{H}^s|^2 dl = 2 \int_0^a (|\dot{H}_{x0}|^2 + |\dot{H}_{z0}|^2)_{y=0} dx = C_m^2 a \left[\left(\frac{\gamma m \pi}{a}\right)^2 + \chi_{\perp}^4 \right]. \quad (2.35)$$

На узких стенках ($x = 0, a$) получим с учётом (2.20):

$$\begin{aligned} |\dot{H}^s|^2 &= (|\dot{H}_{y0}|^2 + |\dot{H}_{z0}|^2)_{x=0, a} = \\ &= C_m^2 \left[\left(\frac{\gamma n \pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \chi_{\perp}^4 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right], \end{aligned}$$

$$\int_{L_y} |\dot{H}|^2 dL = 2 \int_0^b (|\dot{H}_{y0}|^2 + |\dot{H}_{z0}|^2) \chi_{x=0} dy = C_n^2 b \left[\left(\frac{\gamma n \pi}{b} \right)^2 + \gamma_L^4 \right]. \quad (2.36)$$

Подставляя (2.34) и сумму (2.35) и (2.36) в (1.38), получим

$$\gamma_n'' = \frac{2R_s W_H}{(\omega \mu \gamma_L)^2 a b} \left\{ a \left[\left(\frac{\gamma m \pi}{a} \right)^2 + \gamma_L^4 \right] + b \left[\left(\frac{\gamma n \pi}{b} \right)^2 + \gamma_L^4 \right] \right\}. \quad (2.37)$$

Раскрывая выражения для R_s и W_H и выполняя ряд преобразований, приведем (2.37) к виду

$$\gamma_n'' = \frac{2K_1}{a \sqrt{\lambda_{кр}} \sqrt{\xi(\xi^2 - 1)}} \left[(\xi^2 - 1) a \frac{m^2 b + n^2 a}{(mb)^2 + (na)^2} + (1 + \frac{a}{b}) \right], \quad (2.38)$$

где K_1 и ξ определяются выражениями (2.30).

Согласно (2.38) при $\xi \rightarrow 1$ затухание неограниченно возрастает, а при $\xi \gg 1$ оно пропорционально \sqrt{f} .

$$\gamma_n'' \approx \frac{2K_1}{\sqrt{\lambda_{кр}}} \sqrt{\xi} \frac{m^2 b + n^2 a}{(mb)^2 + (na)^2}$$

Таким образом, частотная зависимость затухания волн H_{mn} в прямоугольном волноводе аналогична частотной зависимости затухания волн H_{m0} .

в) Волны типа Е

Используя выражения (2.10) для составляющих поля волн типа Е, найдем P_{cp} :

$$\begin{aligned} |\dot{E}_\perp|^2 &= |\dot{E}_{x0}|^2 + |\dot{E}_{y0}|^2 = \\ &= \gamma^2 C_3^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{cp} &= \frac{1}{2W_E} \int_{S_L} |\dot{E}_\perp|^2 dS = \frac{1}{2W_E} \int_0^a \int_0^b (|\dot{E}_{x0}|^2 + |\dot{E}_{y0}|^2) dx dy = \\ &= \frac{(\gamma \gamma_L)^2 a b}{8 W_E} C_3^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Перейдем к определению γ_n'' . На широких стенках волновода ($y = 0, b$) согласно (2.10) имеем:

$$|\dot{H}^s|^2 = |\dot{H}_{x0}|_{y=0,b}^2 = \left(\frac{\omega \varepsilon n \pi}{b}\right)^2 C_3^2 \sin^2\left(\frac{m \pi}{a} x\right),$$

$$\int_{L_x} |\dot{H}^s|^2 d\ell = 2 \int_0^a |\dot{H}_{x0}|_{y=0}^2 dx = \left(\frac{\omega \varepsilon n \pi}{b}\right)^2 a C_3^2. \quad (2.40)$$

На узких стенках ($x = 0, a$) получим с учетом (2.10):

$$|\dot{H}^s|^2 = |\dot{H}_{y0}|_{x=0,a}^2 = \left(\frac{\omega \varepsilon m \pi}{a}\right)^2 C_3^2 \sin^2\left(\frac{n \pi}{b} y\right),$$

$$\int_{L_y} |\dot{H}^s|^2 d\ell = 2 \int_0^b |\dot{H}_{y0}|_{x=0}^2 dy = \left(\frac{\omega \varepsilon m \pi}{a}\right)^2 b C_3^2. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.39) и сумму (2.40) и (2.41) в (1.38), найдем

$$\gamma_n'' = \frac{2R_s}{a W_E} \cdot \frac{m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^3}{m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}. \quad (2.42)$$

Раскрывая выражения для R_s и W_E , приведем (2.42) к виду:

$$\gamma_n'' = \frac{2K_1}{a \sqrt{\lambda_{kp}}} \cdot \frac{\sqrt{\xi^3}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \frac{m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^3}{m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}, \quad (2.43)$$

где K_1 и ξ определяются выражениями (2.30).

Согласно (2.43) при $\xi \rightarrow 1$ затухание неограниченно возрастает, а при $\xi \gg 1$ пропорционально \sqrt{f} :

$$\gamma_n'' \approx \frac{2K_1}{a \sqrt{\lambda_{kp}}} \cdot \sqrt{\xi} \cdot \frac{m^2 + n^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3}{m^2 + n^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

Таким образом, частотная зависимость затухания волн типа E в прямоугольном волноводе аналогична частотной зависимости затухания волн типа H.

На рис. 2.6 представлены кривые затухания волн H_{10} ,

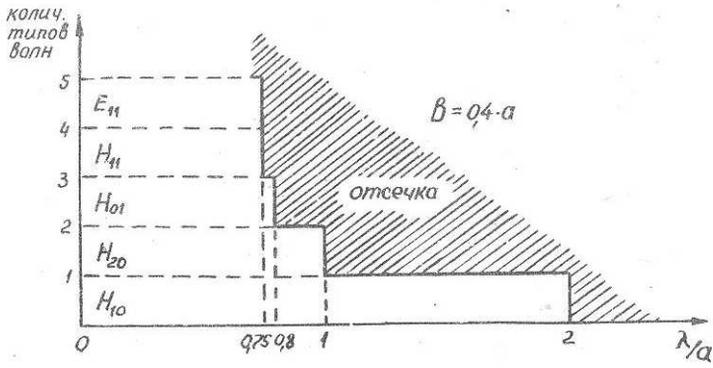


Рис. 2.5

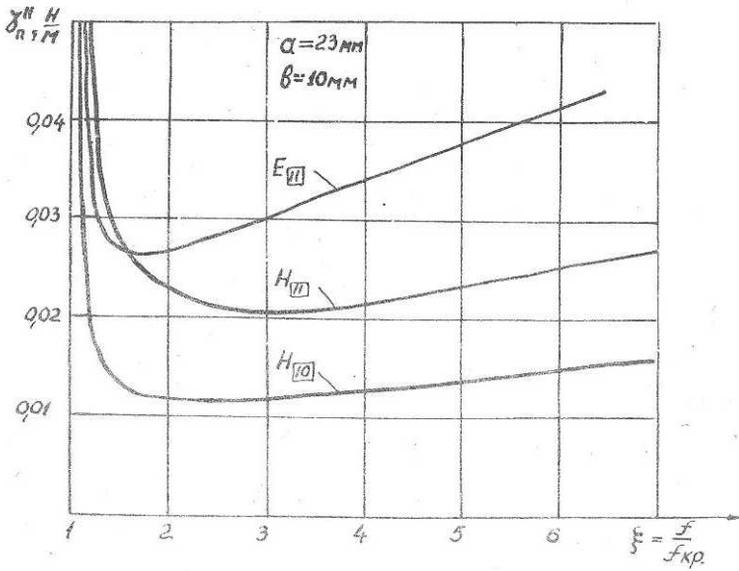


Рис. 2.6

H_{II} и E_{II} в прямоугольном волноводе в функции $\xi = \frac{f}{f_{кр}}$ при $\alpha = 23$ мм и $\beta = 10$ мм.

Глава III. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД

3.1. Решение волнового уравнения для функций Герца

Круглым называют цилиндрический волновод, контур поперечного сечения которого представляет собой окружность. При исследовании полей в круглом волноводе целесообразно использовать цилиндрические координаты r , φ , z (рис.3.1). Проведем это исследование с помощью функций Герца.

При записи функций Герца в виде (1.15)

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_m e^{i\omega t} = \vec{\Gamma}_0 e^{i(\omega t - \gamma z)}$$

задача сводится к решению двумерного волнового уравнения (1.11)

$$\nabla_{\perp}^2 \Gamma_0 + \gamma_{\perp}^2 \Gamma_0 = 0,$$

которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \varphi^2} + \gamma_{\perp}^2 \Gamma_0 = 0. \quad (3.1)$$

Используя метод Фурье, представим Γ_0 в виде произведения взаимно независимых функций поперечных координат r и φ

$$\vec{\Gamma}_0 = R(r) \Phi(\varphi). \quad (3.2)$$

Дифференцируя (3.2) по r и φ и умножая все члены (3.1) на $r^2/R\Phi$, получим

$$\frac{r}{R} \left(r \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\gamma_{\perp}^2 r^2.$$

Так как R и Φ взаимно независимы, сумма членов левой части может равняться постоянной величине только в случае, если каждый из членов также равен некоторой константе. Если второе слагаемое приравнять $-m^2$, то первое будет равно $-(\gamma_{\perp}^2 r^2 - m^2)$. При этом уравнение распадается на два независимых уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + R \left(\gamma_{\perp}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

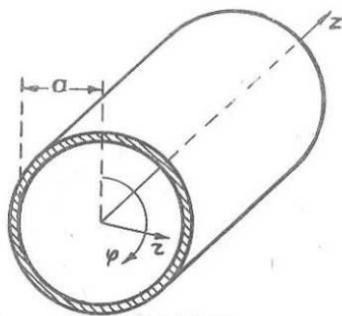


Рис. 3.1

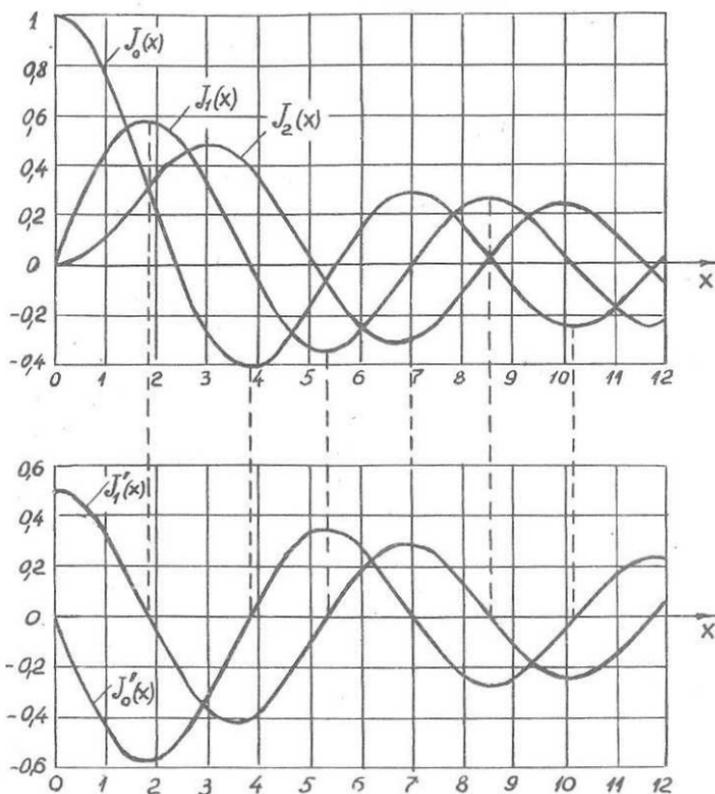


Рис. 3.2

Решениями первого из уравнений (3.3) в общем случае могут быть как тригонометрические так и показательные функции φ . Первые из них представляют собой стоячие, а вторые - бегущие по азимуту волны. Однако бегущие азимутальные волны, интерферируя, также дадут стоячую волну, поэтому решение уравнения для Φ следует взять в тригонометрической форме

$$\Phi = C_1' \cos m\varphi + C_1'' \sin m\varphi.$$

Приведем это решение в виду:

$$\Phi = C_1 \cos(m\varphi + \varphi_0).$$

Так как сечение волновода обладает круговой симметрией, начало отсчета φ можно выбрать так, чтобы $\varphi_0 = 0$. При этом решение для Φ запишется в виде

$$\Phi = C_1 \cos m\varphi. \quad (3.4)$$

Условие однозначности поля требует, чтобы при изменении φ на 2π функция Φ принимала одни и те же значения:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \Phi(\varphi + 2\pi), \\ \cos m\varphi &= \cos(m\varphi + 2\pi m). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо только при целых m , поэтому

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

Согласно (3.4) пространственный период поля вдоль координаты φ , т.е. длина стоячей азимутальной волны, определяется выражением

$$\lambda_\varphi = \frac{2\pi a}{m},$$

где a - радиус волновода. Следовательно, величина $2m$ показывает число полуволновых вариаций поля по окружности волновода.

Рассмотрим второе из уравнений (3.3). Введя новую переменную $x = \gamma_1 r$, видим, что оно представляет собой уравнение Бесселя порядка m

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + R \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) = 0. \quad (3.6)$$

Решениями уравнения (3.6) в общем случае могут быть функции:

$$R = C_2 J_m(x) + C_3 N_m(x),$$

$$R = C_4 H_m^{(1)}(x) + C_5 H_m^{(2)}(x),$$

где $J_m(x)$ и $N_m(x)$ - функции Бесселя и Неймана порядка m ,
 $H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + i N_m(x)$ - функция Ханкеля первого рода порядка m ,
 $H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - i N_m(x)$ - функция Ханкеля второго рода порядка m .

Функции Неймана любого порядка при $x = 0$ обращаются в бесконечность. Однако физически реальные поля не могут быть бесконечными, поэтому в случаях, когда точка $x = 0$ входит в исследуемую область, функции Неймана и Ханкеля не могут быть решениями уравнения (3.6). В рассматриваемом случае точка $x = \chi_1 r = 0$ входит в исследуемую область, поэтому решение для R возьмем в виде

$$R = C_2 J_m(x) = C_2 J_m(\chi_1 r). \quad (3.7)$$

Таблицы функций Бесселя приводятся в математических справочниках. На рис. 3.2 представлены графики функций Бесселя и их производных первых трех порядков. Из графиков видно, что функции Бесселя принимают колеблющиеся около абсцисс значения с монотонно спадающей амплитудой. Следовательно, решение (3.7) представляет собой радиальные стоячие волны.

Подставляя (3.4) и (3.7) в (3.2), получим общее решение волнового уравнения (I.11) для круглого волновода:

$$\Gamma_0 = R\Phi = C J_m(\chi_1 r) \cos m\varphi, \quad (3.8)$$

где $C = C_1 C_2$.

Для определения χ_1 воспользуемся граничными условиями для функций Герца на поверхности идеального проводника. Однако эти условия различны для электрической Γ^E и магнитной Γ^M функций Герца, поэтому дальнейший анализ следует проводить отдельно для волн типов E и H.

V 3.2. Волны типа E в круглом волноводе

Поле волны типа E полностью определяется электрической функцией Герца Γ^3 , которая на идеально проводящих поверхностях подчиняется граничному условию (I.44)

$$\Gamma^3(L_{\perp}) = 0.$$

В случае круглого волновода это условие должно выполняться при $r = a$, что с учётом (3.8) приводит к соотношению

$$J_m(\chi_{\perp} a) = 0. \quad (3.9)$$

Обозначим корни функции Бесселя, т.е. значения её аргумента, при которых функция равна нулю, через ν_{mn} , где m - порядок функции Бесселя, n - номер корня. При этом (3.9) тождественно равенству

$$\chi_{\perp} a = \nu_{mn},$$

из которого следуют выражения для поперечного волнового числа и критической длины волны:

$$\chi_{\perp} = \frac{\nu_{mn}}{a}, \quad (3.10)$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi_{\perp}} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}. \quad (3.11)$$

Корни функций Бесселя образуют бесконечный ряд дискретных значений. При этом и χ_{\perp} имеет дискретный ряд разрешенных значений. Каждому значению χ_{\perp} , т.е. каждому сочетанию чисел m и n , соответствует свое определенное частное решение (3.8) волнового уравнения и, следовательно, свой определенный тип волны. Волна с заданными m и n обозначается E_{mn} . Величина $2m$ равна числу полуволновых вариаций поля по окружности волновода. Величина n определяет количество радиальных вариаций поля. Условие существования волны того или иного типа имеет вид

$$\lambda < \lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}.$$

В таблице 3.1 приведены значения нескольких корней функций Бесселя первых трёх порядков, а в таблице 3.2 - значения $\lambda_{кр}$ для ряда низших типов волн, рассчитанные

по (3.11) и расположенные в порядке убывания.

Таблица 3.1

		V_{mn}		
$m \backslash n$	1	2	3	
0	2,405	5,520	8,654	
1	3,832	7,016	10,173	
2	5,136	8,417	11,620	

Таблица 3.2

E_{mn}	E_{01}	E_{11}	E_{21}	E_{02}
$\frac{\lambda_{кр}}{a}$	2,62	1,64	1,22	1,44

Подставляя (3.8) в (1.16), получим выражения составляющих поля волн типа E в круглом волноводе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{r0} &= -i\omega\epsilon \frac{m}{r} C_3 J_m(\chi_L r) \sin m\varphi, \\ \dot{H}_{\varphi 0} &= -i\omega\epsilon \chi_L C_3 J'_m(\chi_L r) \cos m\varphi, \\ \dot{H}_{z0} &= 0, \\ \dot{E}_{r0} &= -i\chi \chi_L C_3 J'_m(\chi_L r) \cos m\varphi, \\ \dot{E}_{\varphi 0} &= i\chi \frac{m}{r} C_3 J_m(\chi_L r) \sin m\varphi, \\ \dot{E}_{z0} &= \chi_L^2 C_3 J_m(\chi_L r) \cos m\varphi, \end{aligned} \right\} (3.12)$$

где χ_L - поперечное волновое число, определяемое по (3.10).

Используя (3.12) и графики функций Бесселя и их производных (рис.3.2), можно построить структуры полей волн типа E

Волна E_{01}

$$\lambda_{кр} = 2,62 \cdot a, \quad \gamma_1 = \frac{\mu_{11}}{\gamma_{01}} a = 0,75 \cdot a$$

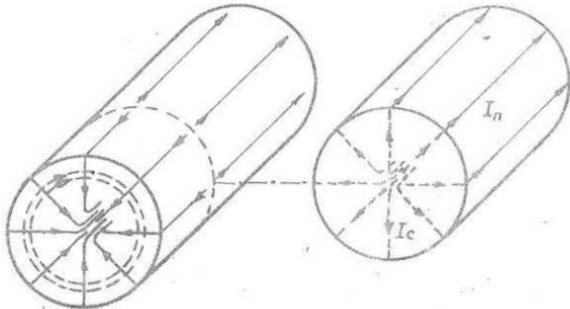
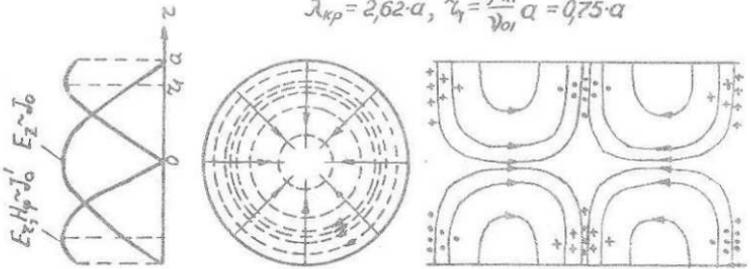


Рис. 3.3

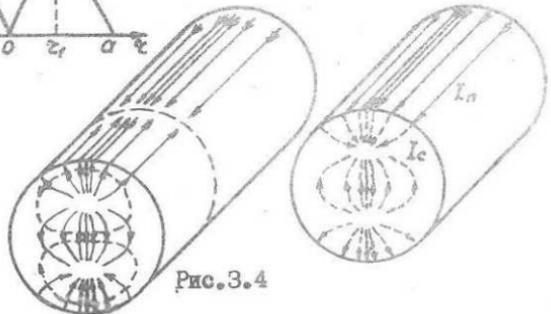
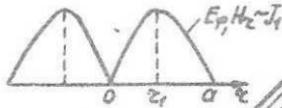
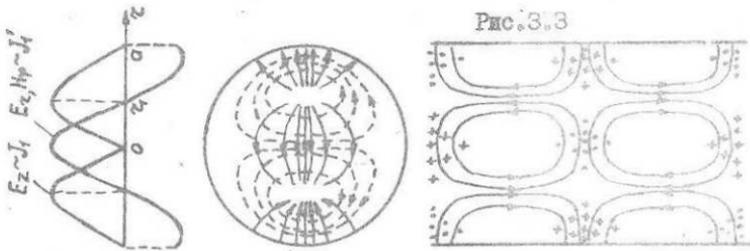


Рис. 3.4

Волна E_{11}

$$\lambda_{кр} = 1,64 \cdot a$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_{11}}{\gamma_{11}} a = 0,48 \cdot a$$

в круглом волноводе. Соотношение (1.41) при известной структуре поля позволяет построить картину распределения токов в стенках волновода для исследуемой волны. На рис. 3.3 и 3.4 представлены структуры полей и токов для волн E_{0I} и E_{II} .

По данным таблицы 3.2 нижней волной типа E в круглом волноводе является волна E_{0I} , для которой $\lambda_{кр} = 2,62 \cdot a$. Согласно (3.12) при $m = 0$ поле не зависит от координаты φ , т.е. обладает круговой симметрией. Эта особенность волны E_{0I} используется при необходимости вращения одних частей волноводного тракта относительно других без нарушения условий распространения энергии.

Общей особенностью волн типа E является наличие только поперечных составляющих магнитного поля и, следовательно, только продольных токов в стенках волновода. Поэтому поперечные щели в стенках искажают структуру поля волн типа E и резко увеличивают их затухание, а продольные - не влияют на структуру поля.

✓ 3.3. Волны типа H в круглом волноводе

Поле волны типа H полностью определяется магнитной функцией Герца Γ^M , которая на идеально проводящих поверхностях подчиняется граничному условию (1.45). В случае круглого волновода это условие принимает вид

$$\frac{\partial \Gamma^M}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (3.13)$$

Подстановка (3.8) в (3.13) приводит к соотношению

$$J_m'(\chi_1 a) = 0. \quad (3.14)$$

Обозначим корни производной функции Бесселя, т.е. значения аргумента, при которых производная равна нулю, через μ_{mn} , где m - порядок функции Бесселя, n - номер корня её производной. При этом (3.14) тождественно равенству

$$\chi_1 a = \mu_{mn},$$

из которого получаем:

$$\chi_1 = \frac{\mu_{mn}}{a}, \quad (3.15)$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi_1} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}. \quad (3.16)$$

Корни производных функций Бесселя, а следовательно, и χ_{\perp} образуют бесконечный ряд дискретных значений. Каждому значению χ_{\perp} соответствует свое частное решение (3.8) волнового уравнения и, следовательно, свой определенный тип волны.

Волна с заданными m и n обозначается H_{mn} . Как и в случае E - волн, величина $2m$ равна числу поперечных вариаций поля по окружности волновода, а величина n определяет количество радиальных вариаций поля. Условие существования волны того или иного типа имеет вид

$$\lambda < \lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}$$

В таблице 3.3 приведены значения нескольких корней производных функций Бесселя первых трёх порядков, а в таблице 3.4 - значения $\lambda_{кр}$ для ряда низших типов волн, рассчитанные по (3.16) и расположенные в порядке убывания.

Таблица 3.3

		μ_{mn}		
		1	2	3
$m \backslash n$	0	3,832	7,016	10,173
	1	1,841	5,331	8,536
	2	3,054	6,706	9,969

Таблица 3.4

H_{mn}	H_{11}	H_{21}	H_{01}	H_{31}
$\frac{\lambda_{кр}}{a}$	3,41	2,06	1,64	1,49

Подставляя (3.8) в (1.17), получим выражения составляющих поля волн типа H в круглом волноводе:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{r0} &= i\omega\mu \frac{m}{r} C_m J_m(\gamma_{\perp} r) \sin m\varphi, \\
 \dot{E}_{\varphi 0} &= i\omega\mu \gamma_{\perp} C_m J_m'(\gamma_{\perp} r) \cos m\varphi, \\
 \dot{E}_{z0} &= 0, \\
 \dot{H}_{r0} &= -i\gamma_{\perp} C_m J_m'(\gamma_{\perp} r) \cos m\varphi, \\
 \dot{H}_{\varphi 0} &= i\gamma \frac{m}{r} C_m J_m(\gamma_{\perp} r) \sin m\varphi, \\
 \dot{H}_{z0} &= \gamma_{\perp}^2 C_m J_m(\gamma_{\perp} r) \cos m\varphi,
 \end{aligned} \right\} (3.17)$$

где γ_{\perp} — поперечное волновое число, определяемое по (3.15).

Соотношения (3.17) совместно с графиками функций Бесселя и их производных позволяют построить структуры полей волн типа Н в круглом волноводе, а соотношения (1.41) при известной структуре поля — картину распределения токов в стенках волновода. На рис. 3.5 — 3.7 представлены структуры полей и токов для волн H_{11} , H_{21} и H_{01} .

По данным таблицы 3.4 нижней волны типа Н в круглом волноводе является волна H_{11} , для которой $\lambda_{кр} = 3,41a$. Сравнивая значения $\lambda_{кр}$ для волн H_{11} и E_{01} , видим, что волна H_{11} является не только нижней волной типа Н, но и основной волной круглого волновода. Диапазон длин волн, в котором волна H_{11} может существовать без примеси волн высших типов, ограничен пределами

$$\lambda_{крE_{01}} = 2,62a < \lambda < \lambda_{крH_{11}} = 3,41a$$

Волна H_{11} близка по структуре поля к основной волне прямоугольного волновода (H_{10}). Поэтому при переходах с прямоугольного волновода на круглый и наоборот эти волны хорошо преобразуются друг в друга.

Интересными особенностями обладают волны типа H_{0m} ($m=0$) в круглом волноводе. Согласно (3.17) эти волны не имеют поперечных составляющих магнитного поля на стенках вол-

новода ($r = a$) и, следовательно, не имеют продольных токов. Благодаря этому затухание волн H_{0n} , в отличие от волн прочих типов, падает с ростом частоты, и поэтому они способны переносить энергию с малыми потерями на большие расстояния. Наибольший интерес с этой точки зрения представляет волна H_{01} , низшая из волн типа H_{0n} .

Вторая особенность волн H_{0n} также связана с отсутствием продольных токов и состоит в том, что поперечные щели не влияют на структуру полей этих волн и не увеличивают их затухания.

Третья особенность волн H_{0n} является следствием известного соотношения теории цилиндрических функций

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (3.18)$$

благодаря которому $\mu_{0n} = \nu_{1n}$ (см. рис. 3.2). Значит волны H_{0n} и E_{1n} (например, H_{01} и E_{11}) имеют равные критические частоты и скорости распространения, т.е. могут существовать одновременно и по характеру распространения неразличимы. Это явление называется вырождением, а волны H_{0n} и E_{1n} - вырожденными.

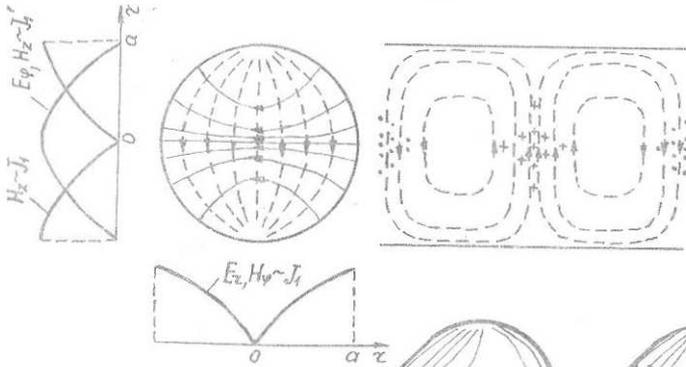
Вырождение значительно усложняет проблему передачи энергии с помощью волн H_{01} , так как при небольших изменениях формы волновода волна H_{01} имеет тенденцию превращаться в волну E_{11} , имеющую ту же скорость распространения, но гораздо большее затухание.

Для устранения паразитного влияния волны E_{11} применяют специальные меры, основанные на различии структуры полей волн H_{01} и E_{11} .

На рис. 3.8 представлена диаграмма взаимного расположения критических длин волн для ряда низших E - и H -волн круглого волновода.

3.4. Затухание и мощность волн круглого волновода

Используя результаты раздела I, найдем среднюю мощность и затухание волн круглого волновода. Средняя мощность, переносимая волной того или иного типа, выражается формулой (1.31). Постоянная затухания, обусловленного потерями в металлических стенках волновода, определяется выражением (1.38).



Волна H₁₁
 $\lambda_{кр} = 3,41 \cdot a$

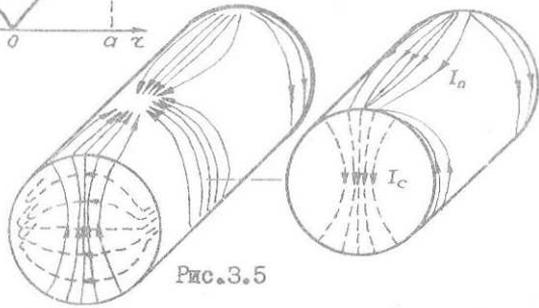
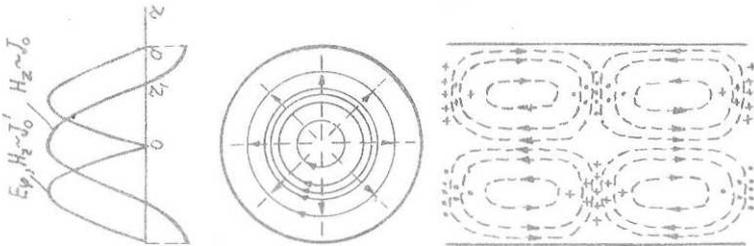


Рис. 3.5



Волна H₀₁
 $\lambda_{к0} = 1,64 \cdot a$
 $z = \frac{\lambda_{01}}{M_{01}} a = 0,63 \cdot a$

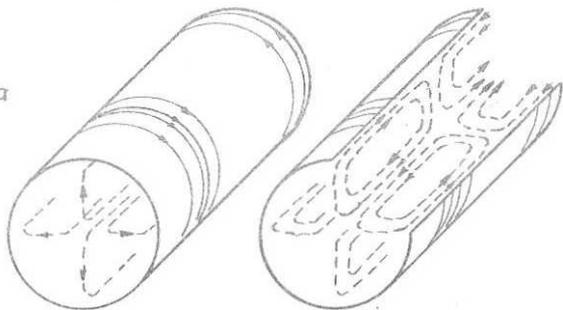


Рис. 3.6

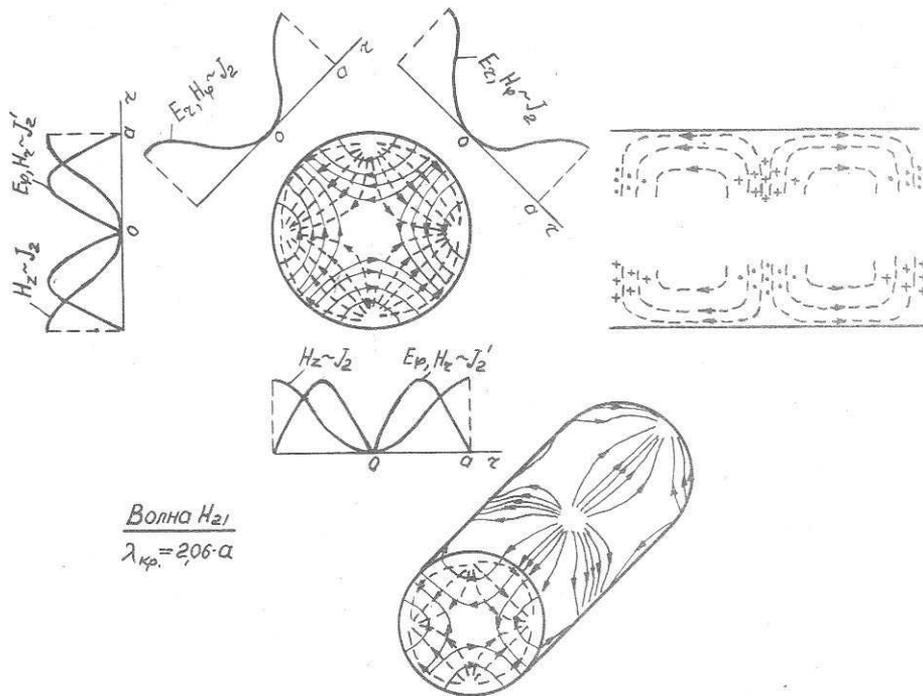


Рис. 3.7.

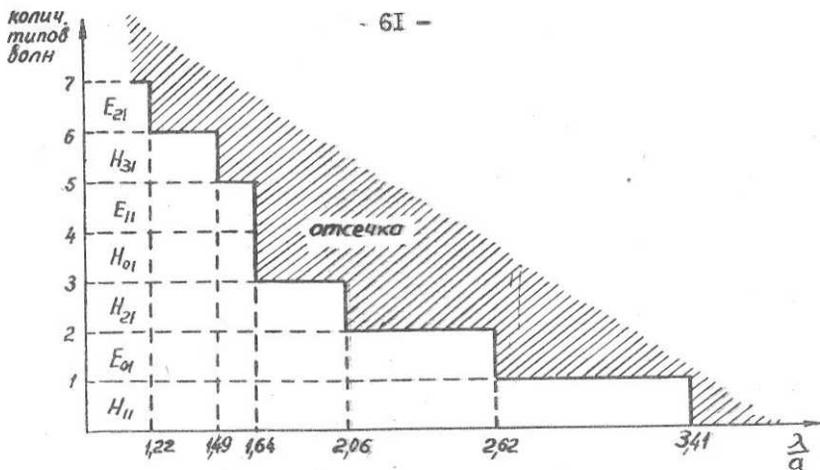


Рис. 3.8

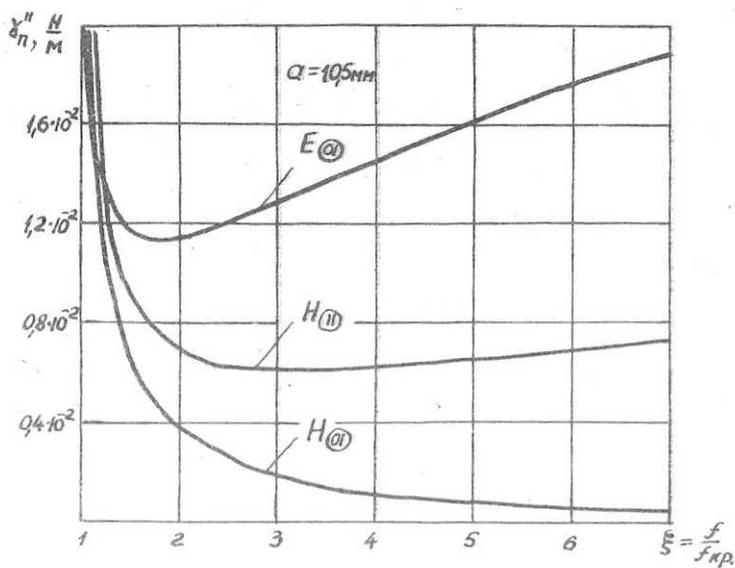


Рис. 3.9

а) Волны типа H_{mn} ($m \neq 0, n \neq 0$)

Найдем сначала среднюю мощность P_{cp} , переносимую волной H_{mn} . Используя (3.17), запишем

$$|\dot{E}_\perp|^2 = |\dot{E}_{r0}|^2 + |\dot{E}_{\varphi 0}|^2 =$$

$$= (\omega\mu)^2 C_m^2 \left[\left(\frac{m}{r}\right)^2 J_m^2(\chi_\perp r) \sin^2 m\varphi + \chi_\perp^2 J_m^2(\chi_\perp r) \cos^2 m\varphi \right], \quad (3.19)$$

Подставим (3.19) в (1.31) и, учитывая, что $dS = r dr d\varphi$, проинтегрируем по S_\perp

$$P_{cp} = \frac{1}{2W_H} \int_{S_\perp} |\dot{E}_\perp|^2 dS = \frac{1}{2W_H} \int_0^{2\pi} \int_0^a (|\dot{E}_{r0}|^2 + |\dot{E}_{\varphi 0}|^2) r dr d\varphi =$$

$$= \frac{(\omega\mu)^2 \pi}{2W_H} C_m^2 \int_0^a \left[m^2 \frac{J_m^2(\chi_\perp r)}{(\chi_\perp r)^2} + J_m^2(\chi_\perp r) \right] \chi_\perp^2 r dr =$$

$$= \frac{(\omega\mu)^2 \pi}{2W_H} C_m^2 \int_0^{\mu_{mn}} \left[m^2 \frac{J_m^2(x)}{x^2} + J_m^2(x) \right] x dx.$$

Здесь произведена замена переменной

$$\chi_\perp r = x, \quad \chi_\perp^2 r dr = x dx$$

и учтено, что для волн H_{mn} $\chi_\perp a = \mu_{mn}$. Воспользуемся известным соотношением теории Бесселевых функций

$$\int \left[m^2 \frac{J_m^2(x)}{x^2} + J_m^2(x) \right] x dx = \frac{x^2}{2} \left[J_m^2(x) \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) + \frac{2}{x} J_m(x) J_m'(x) + J_m'^2(x) \right]. \quad (3.20)$$

Учитывая, что $J_m'(\mu_{mn}) = 0$, получим

$$P_{cp} = \frac{(\omega\mu)^2 \pi}{4W_H} C_m^2 J_m^2(\mu_{mn}) (\mu_{mn}^2 - m^2). \quad (3.21)$$

Для определения χ_n'' необходимо взять интеграл, стоящий в числителе (1.38). Согласно (3.17) на стенках волновода, т.е. при $r = a$ ($\chi_\perp a = \mu_{mn}$), имеем

$$|\dot{H}^s|^2 = (|\dot{H}_{\varphi 0}|^2 + |\dot{H}_{z0}|^2)_{r=a} =$$

$$= C_n^2 \gamma_m^2 (\mu_{mn}) \left[\left(\frac{\delta m}{a} \right)^2 \sin^2 m\varphi + \gamma_{\perp}^4 \cos^2 m\varphi \right],$$

$$\int_{L_{\perp}} |\dot{H}^z|^2 d\ell = \int_0^{2\pi} \left[|\dot{H}_{\varphi 0}|^2 + |\dot{H}_{z0}|^2 \right] r_{r=\alpha} d\varphi = C_n^2 \gamma_m^2 (\mu_{mn}) \pi \alpha \left[\left(\frac{\delta m}{a} \right)^2 + \gamma_{\perp}^4 \right] =$$

$$= C_n^2 \gamma_m^2 (\mu_{mn}) \gamma_{\perp}^2 \frac{\pi}{a} \left[\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 m^2 + (\mu_{mn}^2 - m^2) \right]. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.21) и (3.22) в (1.38), получим

$$\gamma_n'' = \frac{R_s W_n}{W_c^2 \alpha} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \left[\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} + 1 \right] =$$

$$= \frac{R_s}{W_c \alpha \frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 - 1}} \left[\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} + 1 \right]. \quad (3.23)$$

Рассмотрим зависимость γ_n'' от частоты. Раскрывая выражение для R_s , представим (3.23) в виде:

$$\gamma_n'' = \frac{K_1}{a \sqrt{\lambda_{кр}}} \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \frac{\xi^2 + 1}{\sqrt{\xi} \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{f}{f_{кр, \partial}} = \frac{\lambda_{кр}}{\lambda}, \\ K_1 &= \sqrt{\frac{\pi M_2}{\sigma_2 \mu W_c}} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Согласно (3.24) при $\xi \rightarrow 1$, т.е. при стремлении частоты к критической, затухание резко растет и при $\xi = 1$ обращается в бесконечность. Последний вывод объясняется неприменимостью данного метода расчёта вблизи критической частоты.

Однако при $\xi \approx 1$ затухание действительно становится аномально большим, хотя и не бесконечным.

При больших значениях ξ ($\xi \gg 1$) затухание растёт с ростом частоты пропорционально \sqrt{f} :

$$\gamma_n'' \approx \frac{K_1}{a \sqrt{\lambda_{кр}}} \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \sqrt{\xi}.$$

Объясняется это тем, что при $f \gg f_{кр}$ волновод приближается по свойствам к обычным длинным линиям ($\gamma \rightarrow \kappa$), частотная зависимость затухания которых определяется частотной зависимостью поверхностного сопротивления R_s , пропорционального \sqrt{f} . Поскольку при $\xi \approx 1$ затухание падает, а при $\xi \gg 1$ растет с увеличением ξ , при некотором значении ξ_{opt} должен быть минимум затухания. Дифференцируя (3.24) по ξ и приравнявая производную нулю, нетрудно найти ξ_{opt} .

Используя (3.19) и (3.21), выразим мощность основной волны круглого волновода H_{11} ($m=n=1$) через максимум напряженности электрического поля. Выражение (3.19) при $m=n=1$ принимает вид

$$\begin{aligned} |\dot{E}_\perp|^2 &= |\dot{E}_{r0}|^2 + |\dot{E}_{\varphi 0}|^2 = \\ &= (\omega \mu \gamma_\perp)^2 C_n^2 \left[\frac{J_1^2(\gamma_\perp r)}{(\gamma_\perp r)^2} \sin^2 \varphi + J_1^2(\gamma_\perp r) \cos^2 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения теории бесселевых функций

$$\begin{aligned} J_1'(x) &= J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \\ J_0(0) &= 1, \quad \frac{J_1(x)}{x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

убеждаемся, что максимум поля находится в центре волновода ($r=0$):

$$E_{max} = |\dot{E}_\perp|_{r=0} = |\dot{E}_{r0}|_{r=0, \varphi=\frac{\pi}{2}} = |\dot{E}_{\varphi 0}|_{r=0, \varphi=0} = \frac{\omega \mu \gamma_\perp}{2} C_n. \quad (3.26)$$

Подставляя C_n из (3.26) в (3.21), получим

$$P_{cp} = \pi a^2 \frac{M_{11}^2 - 1}{W_c M_{11}^2} J_1^2(M_{11}) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} E_{max}^2. \quad (3.27)$$

Соотношение (3.27) позволяет найти предельную мощность волны H_{11} , т.е. мощность, при которой электрическое поле в волноводе в режиме бегущей волны достигает пробивного значения $E_{пр}$.

б) Волны типа H_{0n} ($m=0, n \neq 0$)

Используя выражения (3.17) для составляющих поля H -волн при $m=0$, найдем P_{cp} :

$$|\dot{E}_\perp|^2 = |\dot{E}_{\varphi 0}|^2 = (\omega \mu)^2 \gamma_\perp^2 C_M^2 J_0'^2(\gamma_\perp r), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} P_{cp} &= \frac{1}{2W_H} \int_{S_\perp} |\dot{E}_\perp|^2 dS = \frac{1}{2W_H} \int_0^{2\pi} \int_0^a |\dot{E}_{\varphi 0}|^2 r dr d\varphi = \\ &= C_M^2 \frac{(\omega \mu)^2}{W_H} \pi \int_0^{M_{0n}} J_0'^2(x) x dx. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена переменной $x = \gamma_\perp r$ и учтено, что для волн H_{0n} $\gamma_\perp a = M_{0n}$. Используя (3.20) при $m = 0$ и учитывая, что $J_0'(M_{0n}) = 0$, получим

$$P_{cp} = \frac{(\omega \mu)^2 M_{0n}^2 \pi}{2W_H} J_0^2(M_{0n}) C_M^2. \quad (3.29)$$

Определим γ_n'' для волн H_{0n} . Согласно (3.17) на стенках волновода, т.е. при $r = a$ ($\gamma_\perp a = M_{0n}$), имеем:

$$\begin{aligned} |\dot{H}^s|^2 &= |\dot{H}_{z0}|_{r=a}^2 = \gamma_\perp^4 C_M^2 J_0^2(M_{0n}), \\ \int_{L_\perp} |\dot{H}^s|^2 dl &= \int_0^{2\pi} (|\dot{H}_{z0}|_{r=a}^2 r)_{r=a} d\varphi = 2\pi a \gamma_\perp^4 J_0^2(M_{0n}) C_M^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подставляя (3.29) и (3.30) в (1.38), получим

$$\gamma_n'' = \frac{R_s W_H \gamma_\perp^2}{(\omega \mu)^2 a} = \frac{R_s}{W_c a \frac{\lambda_{kp}}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda_{kp}}{\lambda}\right)^2 - 1}}. \quad (3.31)$$

Выражение (3.31) может быть получено как частный случай (3.23) при $m = 0$, однако (3.29) не совпадает с (3.21) при $m = 0$.

Рассмотрим частотную зависимость γ_n'' . Раскрывая выражение для R_s , приведем (3.31) к виду

$$\gamma_n'' = \frac{K_I}{a \sqrt{\lambda_{kp}}} \frac{1}{\sqrt{\xi} \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.32)$$

где K_I и ξ определяются выражениями (3.25). Как видим, в любой области частот затухание падает с ростом частоты и при $\xi \gg 1$ может стать весьма малым

$$\chi_n'' \approx \frac{K_1}{a\sqrt{\lambda_{кр}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}$$

Физически это объясняется тем, что у волн H_{0n} отсутствуют поперечные составляющие магнитного поля на стенках волновода и, следовательно, отсутствуют продольные токи. Продольная же составляющая магнитного поля, а вместе с ней и поперечные токи падают с ростом частоты и в пределе при $f \rightarrow \infty$ исчезают.

Используя (3.28) и (3.29), выразим мощность волны H_{0I} через максимум напряженности электрического поля. Согласно (3.18) $J_0'(x) = -J_1(x)$, а максимум $J_1(x)$ имеет место при $J_1'(x) = 0$, т.е. при $x = \mu_{II}$. При этом

$$E_{max}^2 = |\dot{E}_{\varphi 0}|_{max}^2 = (\omega\mu)^2 \chi_{\perp}^2 C_M^2 J_1^2(\mu_{II}). \quad (3.33)$$

Подставляя C_M из (3.33) в (3.29), получим

$$P_{ср} = \frac{\pi a^2}{2W_c} \frac{J_0^2(\mu_{0I})}{J_1^2(\mu_{II})} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} E_{max}^2. \quad (3.34)$$

в) Волны типа E_{mn} ($m \neq 0, n \neq 0$)

Используя выражения (3.12) для составляющих поля E - волн, найдем $P_{ср}$:

$$\begin{aligned} |\dot{E}_{\perp}|^2 &= |\dot{E}_{r0}|^2 + |\dot{E}_{\varphi 0}|^2 = \\ &= \chi^2 C_3^2 \left[\chi_{\perp}^2 J_m^2(\chi_{\perp} r) \cos^2 m\varphi + \left(\frac{m}{r}\right)^2 J_m^2(\chi_{\perp} r) \sin^2 m\varphi \right], \\ P_{ср} &= \frac{1}{2W_E} \int_{S_{\perp}} |\dot{E}_{\perp}|^2 dS = \frac{1}{2W_E} \int_0^{2\pi} \int_0^a (|\dot{E}_{r0}|^2 + |\dot{E}_{\varphi 0}|^2) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\chi^2 C_3^2}{2W_E} \pi \int_0^{\nu_{mn}} \left[J_m^2(x) + m^2 \frac{J_m^2(x)}{x^2} \right] x dx. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена переменной $x = \chi_{\perp} r$ и учтено, что для волн E_{mn} $\chi_{\perp} a = \nu_{mn}$. Используя (3.20) и учитывая, что $J_m(\nu_{mn}) = 0$, получим

$$P_{ср} = \frac{\pi \chi^2 \nu_{mn}^2}{4W_E} J_m^2(\nu_{mn}) C_3^2. \quad (3.35)$$

Перейдем к определению γ_n'' . Согласно (3.12) на стенках волновода, т.е. при $r = a$ ($\gamma_{\perp} a = \nu_{mn}$) имеем:

$$|\dot{H}^s|_{r=a}^2 = |\dot{H}_{\varphi 0}|_{r=a}^2 = (\omega \epsilon \gamma_{\perp})^2 C_3^2 J_m'^2(\nu_{mn}) \cos^2 m \varphi,$$

$$\int_{L_{\perp}} |\dot{H}^s|^2 dL = \int_0^{2\pi} (|\dot{H}_{\varphi 0}|_{r=a}^2)_{r=a} d\varphi = (\omega \epsilon \gamma_{\perp})^2 C_3^2 a \pi J_m'^2(\nu_{mn}). \quad (3.36)$$

Подставляя (3.35) и (3.36) в (1.38) и учитывая (1.26), получим

$$\gamma_n'' = \frac{R_s}{a W_E} = \frac{R_s}{a W_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}}. \quad (3.37)$$

Раскрывая выражение для R_s , преобразуем (3.37)

$$\gamma_n'' = \frac{K_r}{a \sqrt{\lambda_{kp}}} \frac{\sqrt{\xi^3}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.38)$$

где K_r и ξ определяются выражениями (3.25). Согласно (3.38) при $\xi \rightarrow 1$ затухание неограниченно возрастает, а при $\xi \gg 1$ пропорционально \sqrt{f} . Таким образом, частотная зависимость затухания волн E_{mn} в круглом волноводе аналогична частотной зависимости затухания волн H_{mn} при $m \neq 0$.

г) Волны типа E_{0n} ($m=0, n \neq 0$)

Используя выражения (3.12) при $m=0$, найдем P_{cp} :

$$\begin{aligned} |\dot{E}_{\perp}|^2 &= |\dot{E}_{r0}|^2 = (\gamma \gamma_{\perp})^2 C_3^2 J_0'^2(\gamma_{\perp} r), \\ P_{cp} &= \frac{1}{2 W_E} \int_{S_{\perp}} |\dot{E}_{\perp}|^2 ds = \frac{1}{2 W_E} \int_0^{2\pi} \int_0^a |\dot{E}_{r0}|^2 r dr d\varphi = \\ &= \frac{\gamma^2 C_3^2}{W_E} \pi \int_0^{\nu_{0n}} J_0'^2(x) x dx. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена переменной $x = \gamma_{\perp} r$ и учтено, что для волн E_{0n} $\gamma_{\perp} a = \nu_{0n}$. Используя (3.20) при $m=0$

и учитывая, что $J_0(\nu_{0n}) = 0$, получим

$$P_{\varphi} = \frac{\bar{\mu} \gamma^2 \nu_{0n}^2}{2W_E} J_0'^2(\nu_{0n}) C_3^2. \quad (3.39)$$

Определим γ_n'' для волн E_{0n} . Согласно (3.12) на стенках волновода, т.е. при $r = a$ ($\gamma_{\perp} a = \nu_{0n}$), имеем:

$$|H^s|^2 = |H_{\varphi 0}|_{r=a}^2 = (\omega \epsilon \gamma_{\perp})^2 C_3^2 J_0'^2(\nu_{0n}),$$

$$\int_{L_{\perp}} |H^s|^2 d\ell = \int_0^{2\pi} (|H_{\varphi 0}|_{r=a}^2) r d\varphi = (\omega \epsilon \gamma_{\perp})^2 C_3^2 2a\pi J_0'^2(\nu_{0n}). \quad (3.40)$$

Подставляя (3.39) и (3.40) в (1.38), получим

$$\gamma_n'' = \frac{R_s}{a W_E} = \frac{R_s}{a W_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \quad (3.41)$$

Выражение (3.41) совпадает с (3.37) при подстановке в последнее соответствующей критической длины волны. Следовательно, частотная зависимость затухания для волн E_{0n} имеет тот же характер, что и для волн E_{mn} при $m \neq 0$. Выражение (3.39) не совпадает с (3.35) при $m = 0$.

Выразим мощность волны E_{0I} через максимум напряженности электрического поля. Согласно (3.12) при $m = 0$ электрическое поле имеет две составляющих:

$$\dot{E}_{r0} = -i \gamma \gamma_{\perp} C_3 J_0'(\gamma_{\perp} r),$$

$$\dot{E}_{z0} = \gamma_{\perp}^2 C_3 J_0(\gamma_{\perp} r).$$

Поскольку эти составляющие сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$, максимум электрического поля равен максимуму большей из них. Согласно (3.18) $J_0'(x) = -J_1(x)$, а максимум $J_1(x)$ имеет место при $J_1'(x) = 0$, т.е. при $x = \mu_{II}$, причем $J_1(\mu_{II}) = 0,582$. При этом

$$|\dot{E}_{r0}|_{\max} = \gamma \gamma_{\perp} C_3 \cdot 0,582. \quad (3.42)$$

Максимум $J_0(x)$ имеет место при $x = 0$, причем $J_0(0) = 1$, поэтому

$$|\dot{E}_{z0}|_{\max} = \gamma_{\perp}^2 C_3. \quad (3.43)$$

Сравним (3.42) и (3.43)

$$\frac{|\dot{E}_{r0}|_{\max}}{|\dot{E}_{z0}|_{\max}} = 0,582 \sqrt{\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda}\right)^2 - 1}.$$

В рабочем диапазоне частот волны E_{0I} ($2,06.\alpha < \lambda < 2,62.\alpha$) второй сомножитель последнего выражения изменяется от 0,78 до 0.

Следовательно:

$$|\dot{E}_{r0}|_{\max} < |\dot{E}_{z0}|_{\max},$$

$$E_{\max} = |\dot{E}_{z0}|_{\max} = \gamma_L^2 C_9. \quad (3.44)$$

Подставляя C_9 из (3.44) в (3.39), получим

$$P_{ср} = \frac{\pi a^2 \gamma_L^2 (V_{0I})}{2W_c} \frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda}\right)^2 - 1} E_{\max}^2. \quad (3.45)$$

На рис.3.9 представлены кривые затухания волн H_{II} , H_{0I} и E_{II} в круглом волноводе в функции $\xi = \frac{f}{f_{кр}}$ при $\alpha = 10,5$ мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введенский Б.А., Аренберг А.Г. Радиоволноводы. Гостехиздат, 1946.
2. Слэтер Дж. Передача ультракоротких волн, Перевод с английского под ред. Гвоздова С.Д., ГИТТИ, 1946.
3. Страттон Дж. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
4. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. Изд-во ВКАС, 1949.
5. Тамм И.Е. Основы теории электричества. ГИТТИ, 1954.
6. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. Изд-во "Сов. радио", 1957.
7. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. Изд-во "Высшая школа", 1961.
8. Лебедев И.В. Техника и приборы сверхвысоких частот. Госэнергоиздат, 1961.
9. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. Изд-во "Высшая школа", 1965.
10. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. Изд-во "Наука", 1966.
11. Гольдштайн Л.Д. Электромагнитные поля и волны. Изд-во
Зернов Н.В. "Сов. радио", 1971.

СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие	3
Глава I.	<u>Элементы общей теории направляющих систем</u>	4
I.1.	Понятие о направляющих системах	4
I.2.	Метод анализа и классификация направляемых волн	6
I.3.	Продольная зависимость полей направляемых волн	10
I.4.	Постоянная распространения, фазовая и групповая скорости направляемых волн	12
I.5.	Дисперсия направляемых волн. Быстрые и медленные волны	13
I.6.	Волновое сопротивление направляющей системы	14
I.7.	Мощность направляемой волны	15
I.8.	Затухание направляемых волн	15
I.9.	Токи и щели в проводниках направляющих систем	20
I.10.	Общие свойства цилиндрических волноводов	21
II.	Влияние неоднородностей на режим направляющей системы	26
Глава II.	<u>Прямоугольный волновод</u>	32
2.1.	Решение волнового уравнения для функций Герца	32
2.2.	Волны типа E в прямоугольном волноводе	34
2.3.	Волны типа H в прямоугольном волноводе	37
2.4.	Затухание и мощность волн прямоугольного волновода	41

Глава III.	<u>Круглый волновод</u>	48
3.1.	Решение волнового уравнения для функций Герца	48
3.2.	Волны типа E в круглом волноводе	52
3.3.	Волны типа H в круглом волноводе	55
3.4.	Затухание и мощность волн круглого вол- новода	58
ЛИТЕРАТУРА	70