АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

2007

СГАУ

САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

АЛГЕБРА и ГЕОМЕТРИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Самара, 2007

Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области
аэрокосмических и геоинформационных
технологий”

Модуль I «ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ»
Авторы: *Чостковская О.П., Старинова О.Л*

Модуль II «ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ»
Автор *Калугин Н.А.*

Модуль III «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА»
Автор: *Белашевский Г.Е.*

Рецензенты:
д-р. тех. наук., проф. В.С. Асланов (модуль III)
д. физ. – мат. н., проф. В.М. Чернов (модуль II)
канд. физ. – мат. наук, доц. Е.Я. Горелова (модуль III)
канд. тех. наук, доц., А.А. Авраменко (модуль I, модуль II)

Б 43

УДК 517.2 УДК 514.14 (075) УДК 514.7 (075)

ББК
ISBN

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

АЛГЕБРА и ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Самара
Издательство СГАУ
2007

УДК 512 (075)+514 (075)
ББК 22.14+22 (151)
А 456

Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий"

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. В. С. А с л а н о в (модуль III)
д-р физ. – мат. наук, проф. В. М. Ч е р н о в (модуль II)
канд. физ. – мат. наук, доц. Е. Я. Г о р е л о в а (модуль III)
канд. техн. наук, доц. А. А. А в р а м е н к о (модуль I, модуль II)

Авторы:
Белашевский Г.Е., Калугин Н.А., Чостковская О.П., Старинова О.Л.

А 456 **Алгебра и геометрия**: учеб. пособие/ [Г.Е. Белашевский и др.]-Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007.-160 с.:ил.

ISBN 978-5-7883-0482-3

В учебном пособии содержатся методические материалы по реализации нелинейной схемы обучения.

Модуль I «Линейные пространства и операторы» предназначен для студентов специальности, содержащей курс «Линейная алгебра». Относится к группе дисциплин по выбору (факультатив), трудоемкость –1 зачетная единица ECTS. Авторы: *Чостковская О.П., Старинова О.Л.* Модуль II «Основы проективной геометрии» содержит основные теоретические сведения о проективной геометрии и упражнения. Относится к группе дисциплин по выбору (факультатив), трудоемкость – 1 зачетная единица ECTS. Автор *Калугин Н.А.* Модуль III «Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа» предназначен для студентов – механиков. Относится к группе дисциплин, изучаемых обязательно и строго последовательно, трудоемкость – 3.5 зачетных единиц ECTS. Автор *Белашевский Г.Е.*

Учебное пособие подготовлено на кафедре высшей математики.

УДК 512 (075)+514 (075)
ББК 22.14+22 (151)

ISBN 978-5-7883-0482-3

Содержание

I. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

1. Линейные пространства

1.1. Основные понятия и определения

Пусть на элементах множества V заданы операции сложения и умножения на число, обладающие следующими свойствами:

1. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$.
2. $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$.
3. В V существует нулевой элемент 0 такой, что $\vec{v} + 0 = \vec{v}$ для всех $\vec{v}$ из V.
4. В V для любого элемента $\vec{v}$ существует противоположный элемент $-\vec{v}$ такой, что $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$.

Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

5. $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$.
6. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$.
7. $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$.
8. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Множество V называется ***линейным пространством***, если оно замкнуто относительно двух операций: сложения и умножения на число. Т.е. для него выполняется:

1. для любых двух векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ из пространства V найдется единственный вектор $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ принадлежащий V.
2. для любого вектора $\vec{v}$ из линейного пространства V и для любого вещественного числа α найдется единственный вектор $\alpha\vec{v}$ из V.

Пусть даны векторы линейного пространства $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ и действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_к$. Вектор

$$\vec{y} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_k\vec{v}_k \qquad (1)$$

называется линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_к$ - коэффициентами комбинации.

Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ называется ***линейно зависимой***, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$, среди которых хотя бы одно отличается от нуля, для которых выполняется равенство $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$.

Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ называется ***линейно независимой***, если из равенства $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_к = 0$.

Теорема. Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор системы является линейной комбинацией остальных векторов.

Чтобы найти линейное выражение вектора $\vec{y} \in V$ через векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ из V, следует записать векторное равенство (1) и от него перейти к покомпонентным равенствам. В результате получится система m линейных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$. Определив эти числа из полученной системы и подставив их в равенство (1), найдем линейное выражение вектора $\vec{y}$ через векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

1.2. Базис и размерность линейного пространства

Если в линейном пространстве существует *n* линейно независимых векторов, а любые *n+1* векторов линейно зависимы, то число *n* называется ***размерностью*** этого пространства. Обозначение: $\dim V = n$ или V_n.

Пространство размерности *n* называется ***n - мерным пространством***, а составляющее его вектора ***n - мерными***.

Очевидно, что любая система векторов *n* - мерного пространства, содержащая векторов больше *n*, линейно зависима.

Базисом *n* - мерного пространства V называется упорядоченная совокупность *n* линейно независимых векторов этого пространства.

Теорема. Пусть в пространстве V зафиксирован некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Тогда любой вектор этого пространства представим в виде линейной комбинации векторов базиса (т.е. допускает разложение по базису): $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$, причем единственным образом. Коэффициенты разложения вектора $\vec{v}$ по

базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ называются ***координатами вектора*** $\vec{v}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Понятно, что в другом базисе и координаты могут быть другими.

Пусть V - линейное пространство, и пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ - его базис. Рассмотрим еще один базис пространства V: пусть он состоит из векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$. Векторы $\vec{f}_i$, будучи векторами линейного пространства V, раскладываются по базису $\vec{e}_i$:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{f}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Матрицей $A_{E\to F}$ ***перехода*** от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ называется матрица коэффициентов разложений, выписанная по столбцам:

$$A_{E\to F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Пусть V - линейное пространство, и пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ - его базис. Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ - еще один базис пространства V. Тогда $x_F = A^{-1}x_E \qquad \forall x \in V$, где x_F - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$, x_E - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, A - матрица перехода от базиса $\vec{e}_i$ к базису $\vec{f}_i$.

Пусть дана система векторов, заданных координатами в одном и том же базисе:

$$\vec{x}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}),$$

$$\vec{x}_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\vec{x}_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}).$$

Для них запишем матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{ns} \end{pmatrix},$$

в k - м столбце которой стоят координаты вектора $\vec{x}_k$. Матрицу X назовем матрицей системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_s$ в заданном базисе.

Теорема. Для того чтобы s векторов n - мерного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы векторов был равен s, т.е. числу векторов.

1.3. Евклидово пространство

Говорят, что в n - мерном линейном пространстве V определена ***операция скалярного умножения векторов***, если любой паре векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из V поставлено в соответствие действительное число, которое называется ***скалярным произведением векторов*** $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначается символом (x, y), и если для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ из V и любого действительного числа α выполняются следующие аксиомы:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $(x, x) > 0$ *при* $x \neq 0$ *и* $(x, x) = 0$ *при* $x = 0$.

Действительное n - мерное линейное пространство V, в котором определено скалярное умножение векторов по правилу

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

называют ***n - мерным евклидовым пространством*** и обозначают через E_n.

Длиной $|x|$ вектора x евклидова пространства E_n называют величину

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Нормировать вектор x — значит, заменить его вектором

$$x^0 = \frac{x}{|x|}.$$

Векторы x и y евклидова пространства называют ***ортогональными***, если $(x, y) = 0$.

Система векторов называется ***ортогональной***, если в ней все векторы попарно ортогональны. Система векторов называется ***ортонормированной***, если она ортогональна и в ней все векторы нормированы. Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независимая.

Базис евклидова пространства называют ***ортогональным***, если его векторы попарно ортогональны. Если, кроме того, все векторы этого базиса нормированы, то он называется ***ортонормированным.*** В ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выполняются условия

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Всякое евклидово пространство обладает ортогональным и ортонормированным базисами.

От любой линейно независимой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклидова пространства можно перейти к ортогональной системе векторов $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Такой переход совершается с помощью ***процесса ортогонализации Грамма-Шмидта***. Он состоит в следующем.

Полагают $b_1 = a_1, \quad b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$ и из условия

$$(b_1, b_2) = (b_1, \alpha_1 b_1 + a_2) = \alpha_1(b_1, b_1) + (b_1, a_2) = 0$$

находят коэффициент $\alpha_1 = -\dfrac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}$.

Затем полагают $b_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + a_3$ и из условий

$$(b_1, b_3) = \beta_1(b_1, b_1) + (b_1, a_3) = 0,$$
$$(b_2, b_3) = \beta_2(b_2, b_2) + (b_2, a_3) = 0$$

находят коэффициенты

$$\beta_1 = -\frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)}, \quad \beta_2 = -\frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)}.$$

Так продолжают до тех пор, пока не получат ортогональную систему ненулевых векторов $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Если эти векторы нормировать, то придем к ортонормированной системе векторов.

Пример 1. Пусть $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Выяснить, пользуясь определением, является ли данная система векторов линейно зависимой.

<u>*Решение.*</u>

Допустим, что существует некая линейная комбинация векторов $a_1, \quad a_2, \quad a_3$, обращающаяся в ноль: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Выполним почленное сложение в правой части и запишем это равенство в виде однородной линейной системы:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Найдем общее решение: $\alpha_1 = t, \quad \alpha_2 = -t, \quad \alpha_3 = -t$. Выпишем какое-либо частное решение, например, если $\alpha_3 = -1$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Таким образом мы отыскали нетривиальную линейную комбинацию, обращающую в ноль данную систему векторов:

$$a_1 + a_2 - a_3 = 0.$$

Следовательно, исходный набор векторов $a_1, \quad a_2, \quad a_3$ является линейно зависимой системой векторов.

Пример 2. Показать, что система векторов $e_1(3,4,3), \quad e_2(1,2,-6), \quad e_3(0,1,3)$ образует базис, и разложить вектор $x(7,13,9)$ по этому базису.

<u>*Решение.*</u>

Составим матрицу системы векторов e_1, e_2, e_3 и найдем ее ранг:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -9 & -12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 27 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 3, т.е. количеству векторов в системе. Следовательно, векторы линейно независимы, они образуют базис трехмерного пространства.

Разложим вектор x по этому базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

$$\alpha_1(3,4,3) + \alpha_2(1,2,-6) + \alpha_3(0,1,3) = (7,13,9).$$

Перепишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 13 \\ 3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 9. \end{cases}$$

Решим эту систему по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 13 & 2 & 1 \\ 9 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 54,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 13 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 13 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 81,$$

тогда $\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3$.

Разложение вектора x по базису принимает вид

$$x = 2e_1 + e_2 + 3e_3.$$

Пример 3. Дано двухмерное пространство R^2 с базисом $e_1, \quad e_2$. Пусть $f_1, \quad f_2$ - новый базис в R^2, и пусть

$$\begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 \\ f_2 = e_1 + e_2. \end{cases}$$

Найти координаты вектора x в базисе $f_1, \quad f_2$, если в базисе $e_1, \quad e_2$ вектор x имеет координаты (1,-1).

<u>*Решение.*</u>

Мы можем выразить координаты вектора x в новом базисе через его координаты в старом базисе при помощи матрицы перехода:

$$x_f = A^{-1} x_e.$$

Матрица перехода выписывается из разложений базиса $f_1, \quad f_2$ по базису $e_1, \quad e_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ следовательно } x_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную к A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Окончательно получаем

$$x_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть на плоскости R^2 фиксирован базис $e_1, \quad e_2$, и пусть имеются еще два базиса:

$$\begin{cases} f_1 = 3e_1 + e_2 \\ f_2 = 2e_1 + e_2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} h_1 = e_1 + e_2 \\ h_2 = -e_2 \end{cases}.$$

Найти координаты вектора x в базисе h, если известны его координаты в базисе f: $x_f = (1, 2)$.

<u>*Решение.*</u> Эта задача решается при помощи матрицы перехода. Надо найти переход от базиса f к базису h: $x_h = A^{-1} x_f$, где A - матрица перехода от базиса f к базису h.

Для того чтобы выписать матрицу A, нужно знать, как выражаются базисные векторы $h_1, \quad h_2$ через базисные векторы $f_1, \quad f_2$. Исходя из разложений этих векторов по базису $e_1, \quad e_2$, мы можем получить нужное нам выражение. Прежде всего запишем разложения $h_1, \quad h_2$ и $f_1, \quad f_2$ в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Из этих матричных соотношений получим выражения для $e_1, \quad e_2$:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Приравняем правые части:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Домножим это соотношение на $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ слева. Тем самым выразим $h_1, \quad h_2$:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Получили, что разложение векторов $h_1, \quad h_2$ по базису $f_1, \quad f_2$ таково: $\begin{cases} h_1 = -f_1 + 2f_2 \\ h_2 = 2f_1 - 3f_2 \end{cases}$ и матрица перехода нам известна:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем вернуться к нахождению координат вектора x в базисе f:

$$x_h = A^{-1}x_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта и нормирование векторов, ортонормировать систему векторов

$$a_1 = (1,1,0,0), \quad a_2 = (1,0,1,0), \quad a_3 = (1,0,0,1).$$

Решение.

Положим $b_1 = a_1$, $b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$ и найдем α_1 из условия $(b_1, b_2) = \alpha_1(b_1, b_1) + (b_1, a_2) = 0$.

Тогда получим

$$\alpha_1 = -\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} = -\frac{(a_1, a_2)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому $b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2 = -\dfrac{1}{2}a_1 + a_2 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Далее положим $b_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + a_3$ и найдем β_1, β_2 из условий $(b_1, b_3) = \beta_1(b_1, b_1) + (b_1, a_3) = 0, \quad (b_2, b_3) = \beta_2(b_2, b_2) + (b_2, a_3) = 0.$

Тогда получим

$$\beta_1 = -\frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} = -\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$b_3 = -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{3}b_2 + a_3 = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Нормируем векторы b_1, b_2, b_3. Найдем их длины

$$|b_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad |b_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$|b_3| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Получаем ортонормированную систему векторов

$$q_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$q_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{2}{\sqrt{6}} b_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right),$$

$$q_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} b_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right).$$

Задачи к теме «Линейные пространства»

Найти линейную комбинацию векторов:

1. $3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 8\vec{a}_3$, *если* $\vec{a}_1(1,2,1,2)$, $\vec{a}_2(-1,-3,4,5)$, $\vec{a}_3(-5,0,2,3)$.
2. $2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 8\vec{a}_3 + 4\vec{a}_4$, *если* $\vec{a}_1(1,2,1,2)$, $\vec{a}_2(-1,-3,4,5)$, $\vec{a}_3(-5,0,2,3)$, $\vec{a}_4 = (5,-1,4,0)$.
3. $\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$, если $\vec{a}_1(1,2,1,2)$, $\vec{a}_2(-1,-3,4,5)$, $\vec{a}_3(-5,0,2,3)$.

Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми:

4. $\vec{x}_1(2,4,6,1)$, $\vec{x}_2(2,6,0,1)$, $\vec{x}_3(1,2,3,0)$.
5. $\vec{x}_1(3,4,3,4,1)$, $\vec{x}_2(2,3,2,3,1)$, $\vec{x}_3(1,2,3,4,1)$.
6. $\vec{x}_1(3,0,6,)$, $\vec{x}_2(1,1,4)$, $\vec{x}_3(0,-1,5,)$, $\vec{x}_4(-2,7,11)$.
7. $\vec{x}_1(0,4,0,-1)$, $\vec{x}_2(1,3,0,2)$, $\vec{x}_3(6,2,2,1)$, $\vec{x}_4(3,1,1,7)$.
8. $\vec{x}_1(6,2,-1,3)$, $\vec{x}_2(1,3,2,-1)$, $\vec{x}_3(8,11,2,0)$.
9. $\vec{x}_1(1,0,3,8,11)$, $\vec{x}_2(2,-4,3,1,0)$, $\vec{x}_3(4,0,2,5,-3)$, $\vec{x}_4(4,-8,6,2,0)$.

Показать, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют базис трехмерного пространства, и разложить вектор $\vec{x}$ по этому базису:

10. $\vec{e}_1(4,3,7)$, $\vec{e}_2(-2,1,-1)$, $\vec{e}_3(1,-1,3)$, $\vec{x}(16,23,33)$.
11. $\vec{e}_1(3,-1,2)$, $\vec{e}_2(1,2,3)$, $\vec{e}_3(-1,4,-2)$, $\vec{x}(10,10,5)$.

12. $\vec{e}_1(-1,2,1)$, $\vec{e}_2(6,1,2)$, $\vec{e}_3(3,-1,1)$, $\vec{x}(8,2,4)$.

13. $\vec{e}_1(-2,1,3)$, $\vec{e}_2(1,-3,2)$, $\vec{e}_3(3,1,2)$, $\vec{x}(9,3,16)$.

14. $\vec{e}_1(-7,4,1)$, $\vec{e}_2(1,-1,5)$, $\vec{e}_3(2,3,10)$, $\vec{x}(21,0,33)$.

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

15. $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(-1,3,2)$, $\vec{c}(7,-3,5)$, $\vec{d}(6,10,17)$.

16. $\vec{a}(4,7,8)$, $\vec{b}(9,1,3)$, $\vec{c}(2,-4,1)$, $\vec{d}(1,-13,-13)$.

17. $\vec{a}(8,2,3)$, $\vec{b}(4,6,10)$, $\vec{c}(3,-2,1)$, $\vec{d}(7,4,11)$.

18. $\vec{a}(10,3,1)$, $\vec{b}(1,4,2)$, $\vec{c}(3,9,2)$, $\vec{d}(19,30,7)$.

19. $\vec{a}(2,4,1)$, $\vec{b}(1,3,6)$, $\vec{c}(5,3,1)$, $\vec{d}(24,20,6)$.

20. $\vec{a}(1,7,3)$, $\vec{b}(3,4,2)$, $\vec{c}(4,8,5)$, $\vec{d}(7,32,14)$.

21. $\vec{a}(1,-2,3)$, $\vec{b}(4,7,2)$, $\vec{c}(6,4,2)$, $\vec{d}(14,18,6)$.

22. $\vec{a}(1,4,3)$, $\vec{b}(6,8,5)$, $\vec{c}(3,1,4)$, $\vec{d}(21,18,33)$.

23. $\vec{a}(2,7,3)$, $\vec{b}(3,1,8)$, $\vec{c}(2,-7,4)$, $\vec{d}(16,14,27)$.

24. $\vec{a}(7,2,1)$, $\vec{b}(4,3,5)$, $\vec{c}(3,4,-2)$, $\vec{d}(2,-5,-13)$.

Показать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ образуют базис четырехмерного пространства, и разложить вектор $\vec{x}$ по этому базису:

25. $\vec{e}_1(2,1,2,1)$, $\vec{e}_2(5,2,2,4)$, $\vec{e}_3(11,5,3,3)$, $\vec{e}_4(3,1,1,1)$, $\vec{x}(2,1,-3,-3)$.

26. $\vec{e}_1(7,1,3,5)$, $\vec{e}_2(5,7,1,3)$, $\vec{e}_3(3,5,7,1)$, $\vec{e}_4(1,3,5,7)$, $\vec{x}(12,0,4,16)$.

27. $\vec{e}_1(1,1,2,1)$, $\vec{e}_2(-1,1,7,-3)$, $\vec{e}_3(-3,-2,0,1)$, $\vec{e}_4(2,0,5,0)$,

$\vec{x}(-4,1,-4,4)$.

28. Даны разложения векторов $\vec{f}$ в базисе $\vec{e}$ и координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{f}$:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}, \qquad \vec{x}_e = (1,-1).$$

Даны разложения векторов $\vec{f}$ и $\vec{h}$ в базисе $\vec{e}$ и координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{f}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{h}$:

29. $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \vec{h}_1 = -\vec{e}_2 \\ \vec{h}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$, $\vec{x}_f = (1,1)$.

30. $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 \end{cases}$, $\begin{cases} \vec{h}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{h}_2 = \vec{e}_2 \end{cases}$, $\vec{x}_f = (-1,0)$.

31. $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \vec{h}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{h}_2 = \vec{e}_2 \end{cases}$, $\vec{x}_f = (2,1)$.

32. Векторы базисов $\vec{e}$, $\vec{e}'$ и вектор $\vec{x}$ даны координатами в некотором базисе $\vec{e}^0$. Найти матрицы перехода от базиса $\vec{e}^0$ к базисам $\vec{e}$, $\vec{e}'$ и от базиса $\vec{e}$ к базису $\vec{e}'$, а также координаты вектора $\vec{x}$ в базисах $\vec{e}$ и $\vec{e}'$:
$\vec{e}_1 = (3,2,3)$, $\vec{e}_2 = (-4,-3,-5)$, $\vec{e}_3 = (5,1,-1)$,
$\vec{e}'_1 = (2,2,-1)$, $\vec{e}'_2 = (2,-1,2)$, $\vec{e}'_3 = (-1,2,2)$, $\vec{x} = (1,2,1)$.

Ортонормировать систему векторов:

33. $a_1 = (1,2,2,-1)$, $a_2 = (1,1,-5,3)$, $a_3 = (3,2,8,-7)$.

34. $a_1 = (1,-2,2)$, $a_2 = (-1,0,-1)$, $a_3 = (5,-3,-7)$.

35. $a_1 = (1,1,-1,-2)$, $a_2 = (5,8,-2,-3)$, $a_3 = (3,9,3,8)$.

36. $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (3,3,-1,-1)$, $a_3 = (2,0,6,8)$.

Ответы к задачам по теме «Линейные пространства»

1. $(-35,12,11,20)$. **2.** $(59,-9,14,-5)$. **3.** $(-24,-13,29,39)$.
10. $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$. **11.** $\vec{x} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. **12.** $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.
13. $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$. **14.** $\vec{x} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. **15.** $\vec{d}(2,3,1)$.

16. $\vec{d}(-2,1,0)$. **17.** $\vec{d}(0,1,1)$. **18.** $\vec{d}(1,0,3)$. **19.** $\vec{d}(2,0,4)$. **20.** $\vec{d}(4,1,0)$. **21.** $\vec{d}(0,2,1)$. **22.** $\vec{d}(3,0,6)$. **23.** $\vec{d}(5,0,3)$. **24.** $\vec{d}(2,-3,0)$.

25. $\vec{x}=-2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$. **26.** $\vec{x}=2\vec{e}_1-2\vec{e}_3+\vec{e}_4$. **27.** $\vec{x}=3\vec{e}_1+\vec{e}_3-2\vec{e}_4$.

28. $\vec{x}_f(2,-3)$. **29.** $\vec{x}_h(1,-1)$. **30.** $\vec{x}_h(1,1)$. **31.** $\vec{x}_h(4,2)$.

33. $(\sqrt{10}/10, \sqrt{10}/5, \sqrt{10}/5, -\sqrt{10}/10)$.

34. $(1/3,-2/3,2/3), (-2/3,-2/3,-1/3), (2/3,-1/3,-2/3)$.

35. $(1,1,-1,-2), (2,5,1,3)$.

36. $(1/2,1/2,1/2,1/2), (1/2,1/2,-1/2,-1/2), (-1/2,1/2,-1/2,1/2)$.

2. Линейные операторы

2.1. Линейное преобразование и его матрица

Пусть даны линейные пространства V_n и V_m. И задано преобразование $f:V_n\to V_m$, т.е. закон, по которому каждому вектору $\vec{x}\in V_n$ соответствует единственный вектор $\vec{y}=f(\vec{x})\in V_m$. Вектор $\vec{y}$ называют ***образом*** вектора $\vec{x}$, вектор $\vec{x}$ - ***прообразом*** вектора $\vec{y}$ при преобразовании f.

Если пространства V_n и V_m совпадают, то говорят, что преобразование действует в пространстве V_n. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай, уточнений о размерности пространства не делаем.

Преобразование называется ***линейным оператором***, если $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ и $f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$ для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ из пространства V и для любого числового коэффициента α.

Пусть в линейном пространстве V зафиксирован базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ и задан линейный оператор $f:V\to V$. Под действием оператора f базисные векторы переходят в векторы $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2),\ldots, f(\vec{e}_n)$, которые, будучи векторами линейного пространства V, допускают разложение по базису:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1)=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n \\ f(\vec{e}_2)=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\vec{e}_n)=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Коэффициенты этих разложений, выписанные по столбцам, называются ***матрицей линейного оператора*** f.

Теорема. Пусть в линейном пространстве V зафиксирован базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$. Тогда связь между координатами вектора $\vec{x}$ и его образа $\vec{y}=f(\vec{x})$ в матричной форме имеет вид

$$y=Ax,$$

где $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\ldots\\y_n\end{pmatrix}$, $A=(a_{ij})$ - матрица линейного оператора f в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$.

В разных базисах один и тот же оператор имеет разные матрицы.

Пусть в линейном пространстве V действует линейный оператор f и пусть он имеет матрицу A в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ и матрицу B в другом базисе этого пространства $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n'$. Тогда эти матрицы связаны соотношением

$$B=T^{-1}AT,$$

где T — матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n'$.

2.2. Действия с линейными операторами

Пусть даны f и g - два линейных оператора в пространстве V.

Операторы считаются ***равными***, если $f(x)=g(x)$ для любого x из V. Равные линейные операторы в одном и том же базисе имеют одинаковые матрицы.

Суммой линейных операторов f и g называют линейный оператор $f+g$, действующий по правилу $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ для любого x из V. Матрицей суммы линейных операторов в фиксированном базисе является сумма матриц слагаемых операторов в том же базисе.

Произведением линейного оператора f на число α называют линейный оператор αf, действующий по правилу $(\alpha f)(x)=\alpha\cdot(f(x))$ для любого x из V. При умножении оператора на число его матрица умножается на то же число.

Произведением линейных операторов f и g называют результат последовательного выполнения этих операторов и обозначают fg. Произведение линейных операторов f и g - тоже линейный оператор, действующий по правилу $(fg)(x)=f(g(x))$ для любого x из V. Матрицей произведения линейных операторов в фиксированном базисе является произведение матрицы оператора, действующего вторым, на матрицу оператора, действующего первым в том же базисе.

2.3. Характеристический многочлен

Характеристической матрицей квадратной матрицы A порядка n называют матрицу $A-\lambda E$ с переменной λ, принимающей любые числовые значения.

Определитель $|A-\lambda E|$ матрицы $A-\lambda E$ является многочленом n-й степени от λ. Этот многочлен называют ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а его корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - характеристическими корнями или ***характеристическими числами*** матрицы A. Транспонированная матрица A^t имеет одинаковые с матрицей A характеристические многочлены и характеристические числа.

2.4. Собственные векторы линейного оператора

Ненулевой вектор $\vec{x}$ линейного пространства V называется ***собственным вектором*** линейного оператора f, если существует такое вещественное число λ, что выполняется равенство

$$f(\vec{x})=\lambda\vec{x}. \tag{2.1}$$

Число λ называется ***собственным значением*** линейного оператора f.

Равенство (1) можно записать в матричной форме:

$$Ax=\lambda x, \tag{2.2}$$

где A - матрица линейного оператора f, x - вектор-столбец из координат вектора $\vec{x}$.

Перепишем равенство (2.2) в виде

$$(A-\lambda E)x=0. \tag{2.3}$$

Это матричная запись системы линейных однородных уравнений относительно столбца x координат собственного вектора, принадлежащего собственному значению λ. Ее подробная запись:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases} \tag{2.4}$$

То есть, если известно собственное значение λ, то все собственные векторы, принадлежащие этому собственному значению, находятся как ненулевые решения системы (2.4). С другой стороны, однородная система с квадратной матрицей $(A-\lambda E)$ имеет ненулевые решения лишь тогда, когда определитель $|A-\lambda E|$ матрицы этой системы равен нулю.

Поэтому для отыскания собственных значений оператора с матрицей A нужно найти все характеристические числа матрицы A из условия $|A-\lambda E|=0$.

А для отыскания собственных векторов нужно найти все ненулевые решения системы (2.4) при каждом собственном значении λ.

2.5. Ортогональные и симметрические матрицы и преобразования

Матрица A называется ***ортогональной***, если $A^t A = AA^t = E$, где E - единичная матрица (т.е. транспонированная матрица совпадает с обратной).

Для ортогональной матрицы A ее определитель $|A| = \pm 1$.

Линейный оператор в евклидовом пространстве является ***ортогональным***, если его матрица в некотором ортонормированном базисе является ортогональной.

Матрица A называется ***симметрической***, если $A = A^t$.

Линейный оператор f в евклидовом пространстве является ***симметрическим или самосопряженным***, если для произвольных векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ скалярное произведение $(\vec{x}_1, f(\vec{x}_2))$ равно скалярному произведению $(\vec{x}_2, f(\vec{x}_1))$. Симметрический оператор в любом ортонормированном базисе евклидова пространства имеет симметрическую матрицу. Собственные векторы симметрического оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

В базисе из собственных векторов матрица оператора имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные значения оператора.

Если в исходном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ оператор имеет матрицу A, а в базисе $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, ..., \vec{e}_n^{\,'}$ из собственных векторов - матрицу Λ, то $\Lambda = T^{-1}AT$, где T - матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, ..., \vec{e}_n^{\,'}$, то есть произвольную симметрическую матрицу можно привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы.

Любой симметрический линейный оператор f (с матрицей A) в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет, по крайней мере, одну тройку попарно перпендикулярных собственных векторов, при определении которых возможны следующие случаи:

- Если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ симметрической матрицы A различны, то соответствующие собственные векторы попарно ортогональны.
- Если среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ два одинаковых, то двукратному корню, например, $\lambda_2 = \lambda_3$, соответствует бесконечное множество собственных векторов, лежащих в плоскости, перпендикулярной к собственному вектору, соответствующему собственному значению λ_1.
- Если все собственные значения одинаковы, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ - трехкратный корень, то симметрический линейный оператор есть подобие в пространстве с коэффициентом λ. Следовательно, в этом случае любые три попарно перпендикулярных вектора являются собственными векторами симметрического линейного оператора.

Пример 1. Пусть на плоскости R^2 фиксирован базис $e_1, \; e_2$. И пусть на плоскости действует отображение φ:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Показать, что отображение $\varphi : R^2 \to R^2$ является линейным оператором, и выписать его матрицу в том базисе, в котором даны координаты векторов.

<u>*Решение.*</u>

Для того чтобы доказать, что отображение $\varphi : R^2 \to R^2$ является линейным оператором, достаточно показать, что этот оператор обладает свойствами, указанными в определении линейного оператора. Пусть векторы x и y имеют следующие координаты:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

в базисе $e_1, \; e_2$. Выпишем действие оператора φ на их сумму $x + y$:

$$\varphi(x+y)=\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1+x_2+y_2\\x_1+y_1-x_2-y_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\\(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1+y_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}=\varphi(x)+\varphi(y).$$

Аналогично можно расписать действие φ на скалярное произведение:

$$\varphi(\alpha x)=\varphi\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha x_2\\\alpha x_1-\alpha x_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha(x_1+x_2)\\\alpha(x_1-x_2)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}=\alpha\varphi(x).$$

Эти соотношения в совокупности означают, что согласно определению линейного оператора отображение φ, действующее на плоскости, действительно является линейным оператором.

Теперь выпишем матрицу этого оператора в указанном базисе. Для этого надо знать, во что переходят базисные векторы e_1, e_2 под действием оператора φ. Заметим, что в базисе e_1, e_2 базисные векторы имеют следующие координаты: $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Поэтому

$$\varphi(e_1)=\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=e_1+e_2\,,$$

$$\varphi(e_2)=\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=e_1-e_2\,,$$

и мы можем записать разложения образов базисных векторов по базису:

$$\begin{cases}\varphi(e_1)=e_1+e_2\\\varphi(e_2)=e_1-e_2\end{cases}.$$

Отсюда $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Пример 2. Пусть в двумерном пространстве линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}5&3\\-1&4\end{pmatrix}.$$

Найти $f(x)$, если $x=2e_1-3e_2$.

<u>*Решение.*</u>

По теореме о связи координат вектора x и его образа y имеем:

$$f(x)=y=Ax\,.$$

По этой формуле находим

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-14\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $y=f(x)=e_1-14e_2$.

Пример 3. Найти матрицу линейного оператора φ, который переводит тройку линейно независимых векторов

$$a_1=(0,0,1),\qquad a_2=(0,1,1),\qquad a_3=(1,1,1)$$

в тройку произвольных векторов

$$b_1=(1,3,-2),\qquad b_2=(-1,1,1),\qquad b_3=(2,2,1)$$

в том базисе, в котором даны координаты этих векторов.

<u>*Решение.*</u>

1 вариант. Итак, по условию, оператор φ переводит векторы a_i в векторы b_i:

$$\begin{cases}\varphi(a_1)=b_1\\\varphi(a_2)=b_2\\\varphi(a_3)=b_3\end{cases}\text{, то есть }\begin{cases}\varphi(e_3)=e_1+3e_2-2e_3\\\varphi(e_2+e_3)=-e_1+e_2+e_3\\\varphi(e_1+e_2+e_3)=2e_1+2e_2+e_3\end{cases}.$$

Воспользуемся свойствами линейного оператора и запишем систему следующим образом:

$$\begin{cases}\varphi(e_3)=e_1+3e_2-2e_3\\\varphi(e_2)+\varphi(e_3)=-e_1+e_2+e_3\\\varphi(e_1)+\varphi(e_2)+\varphi(e_3)=2e_1+2e_2+e_3\end{cases}.$$

Для разрешения этой системы относительно $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ мы воспользуемся одним из вариантов метода Гаусса, который состоит в следующем. Выпишем в виде единой таблицы коэффициенты при $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ и при e_1, e_2, e_3. После чего при помощи элементарных преобразований строк приведем левую часть к единичному виду. Тогда в правой части окажутся как раз коэффициенты нужных нам разложений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow III \\ \\ \leftarrow I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II \\ -III \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы выписываем разложения образов базисных векторов:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 3e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) = -2e_1 - 2e_2 + 3e_3 \\ \varphi(e_3) = e_1 + 3e_2 - 2e_3 \end{cases}.$$

Отсюда записываем матрицу линейного оператора φ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 вариант. Пусть A - матрица заданного оператора. Тогда по условию получаем

$$A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3),$$

отсюда $A = (b_1, b_2, b_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)^{-1}$.

Записывая координаты векторов по столбцам, получаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть оператор φ действует в трехмерном пространстве и переводит при этом векторы a_i в векторы b_i:

$$a_1 = (0,0,1) \qquad a_2 = (0,1,3) \qquad a_3 = (-1,2,1)$$
$$b_1 = (2,3,2) \qquad b_2 = (1,0,1) \qquad b_3 = (-2,3,1).$$

Найти координаты вектора $\varphi(x)$, если $x = (1,0,-1)$.

<u>*Решение.*</u>

Прежде всего вычислим матрицу оператора φ в том базисе, в котором указаны координаты всех векторов так же, как мы это уже делали выше (см. пример 3), а затем применим теорему о действии линейного оператора в матричной форме (см. пример 2).

Т.к. оператор φ переводит векторы a_i в векторы b_i, то

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = b_1 \\ \varphi(a_2) = b_2 \\ \varphi(a_3) = b_3 \end{cases}, \text{ то есть } \begin{cases} \varphi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_2 + 3e_3) = e_1 + e_3 \\ \varphi(-e_1 + 2e_2 + e_3) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 \end{cases}$$

и значит, $\begin{cases} \varphi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_2) + 3\varphi(e_3) = e_1 + e_3 \\ -\varphi(e_1) + 2\varphi(e_2) + \varphi(e_3) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 \end{cases}.$

Теперь, применяя метод Гаусса, мы можем выразить разложения образов базисных векторов:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow III \\ \\ \leftarrow I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II \\ -III*3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II*2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 6 & 18 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} *(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -18 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы выписываем разложения образов базисных векторов:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = -6e_1 - 18e_2 - 9e_3 \\ \varphi(e_2) = -5e_1 - 9e_2 - 5e_3 \\ \varphi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \end{cases}.$$

Отсюда записываем матрицу линейного оператора φ:

$$A=\begin{pmatrix}-6 & -5 & 2\\ -18 & -9 & 3\\ -9 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

Дальнейшее решение сводится к матричному умножению:

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}-6 & -5 & 2\\ -18 & -9 & 3\\ -9 & -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ -21\\ -11\end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -2 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение.

Характеристический многочлен данной матрицы имеет вид

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & -3\\ -2 & -\lambda & -3\\ 2 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4.$$

Для нахождения характеристических чисел решаем уравнение

$$f(x)=0,$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0\,,$$

$$(\lambda^3-\lambda^2)-(4\lambda^2-4\lambda)+(4\lambda-4)=0\,,$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0\,.$$

Корни этого уравнения (характеристические числа):

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\lambda_3=2\,.$$

Пример 6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ, заданного в некотором базисе матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -2 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение.

Характеристическое уравнение (см. пример 5) имеет вид $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$, и так как его корни - характеристические числа, то они являются собственными значениями оператора φ. Собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\lambda_3=2$, найдем из однородной системы уравнений, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases}-\lambda x_1-2x_2-3x_3=0\\ -2x_1-\lambda x_2-3x_3=0\\ 2x_1+2x_2+(5-\lambda)x_3=0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\lambda x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+\lambda x_2+3x_3=0\\ 2x_1+2x_2+(5-\lambda)x_3=0\end{cases}.$$

Подставим сюда $\lambda=1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+x_2+3x_3=0\\ 2x_1+2x_2+4x_3=0\end{cases}.$$

Ранг этой системы равен 2; одно из ее решений имеет вид $x_1=1,\quad x_2=1,\quad x_3=-1$. Тогда собственные векторы для $\lambda=1$ имеют вид $U_1=\alpha(1,1,-1)$, где $\alpha\neq 0$ - любое действительное число.

Пусть теперь $\lambda=2$, тогда получаем

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases},$$

ранг которой равен 1. Два ее линейных независимых решения имеют вид

$$x_1=-1,\quad x_2=1,\quad x_3=0$$

$$x_1=-\frac{3}{2},\quad x_2=0,\quad x_3=1.$$

Собственные векторы для $\lambda = 2$ имеют вид $U_2 = \beta(-1,1,0)$, $U_3 = \gamma(-\frac{3}{2},0,1)$, где $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ - любые действительные числа.

Пример 7. Найти собственные значения и собственные векторы симметрического линейного оператора φ, заданного в некотором ортогональном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

и привести ее к диагональному виду.

Решение.

Как в примере 6, составим характеристическое уравнение и найдем собственные значения оператора:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 7-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 21\lambda^2 + 144\lambda - 320 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 8$.

Собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 5, \quad \lambda = 8$, найдем из однородной системы уравнений, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (7-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (7-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Подставив сюда $\lambda_1 = 5$, получим

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ранг этой системы равен 2. Тогда собственные векторы для $\lambda_1 = 5$ имеют вид $U_1 = \alpha(1,-1,-1)$, где $\alpha \neq 0$ - любое действительное число.

Аналогично найдем собственные векторы для $\lambda = 8$:

$U_2 = \beta(1,0,1)$, где $\beta \neq 0$ - любое действительное число.

Так как собственное значение $\lambda = 8$ является двукратным корнем характеристического уравнения, ему соответствует бесконечное множество собственных векторов, лежащих в плоскости, перпендикулярной к собственному вектору, соответствующему собственному значению $\lambda_1 = 5$. Поэтому, умножив векторно U_1 на U_2, найдем еще собственные векторы с собственным значением $\lambda = 8$:

$$U_1 \times U_2 = U_3 = \alpha \cdot \beta(-1,-2,1).$$

Итак, симметрический линейный оператор φ с данной симметрической матрицей A имеет, по крайней мере, одну тройку попарно перпендикулярных собственных векторов, а следовательно матрицу A можно привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы.

Нормируя собственные векторы

$$U_1 = (1,-1,-1), \; U_2 = (1,0,1) \text{ и } U_3 = (-1,-2,1),$$

получаем векторы

$$e_1(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}), \quad e_2(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad e_3(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}),$$

которые составляют ортонормированный базис.

Ортогональная матрица перехода имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Обратная ей матрица

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Тогда $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица, элементами главной диагонали которой являются собственные значения.

Задачи к теме «Линейные операторы»

Координаты вектора $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и вектора $f(\vec{x})$ заданы в одном и том же базисе. Выясните, являются ли данные преобразования линейными:

1. $f(\vec{x}) = \vec{y}(2\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2)$.
2. $f(\vec{x}) = \vec{y}(\alpha_1 + 2, \alpha_2, \alpha_3)$.
3. $f(\vec{x}) = \vec{y}(\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_3)$.
4. $f(\vec{x}) = \vec{y}(2\alpha_1, 0, 0)$.
5. $f(\vec{x}) = \vec{y}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$.
6. $f(\vec{x}) = \vec{y}(\alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1)$.

Матрица А линейного преобразования f и вектор $\vec{x}$ заданы в некотором базисе. Найти в этом базисе координаты вектора $\vec{y} = f(\vec{x})$:

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}(2;-1)$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}(3;2)$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}(-1;7)$.

10. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *и* $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_3'$. Найдите матрицу этого преобразования в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_3'$:

12. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

15. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$

.

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

Найти матрицу преобразования, переводящего векторы $\vec{a}$ в векторы $\vec{b}$:

17. $\vec{a}_1 = (1,-1,3)$, $\vec{a}_2 = (0,1,4)$, $\vec{a}_3 = (0,0,-1)$,
$\vec{b}_1 = (3,5,2)$, $\vec{b}_2 = (3,3,0)$, $\vec{b}_3 = (4,1,2)$.

18. $\vec{a}_1 = (0,-1,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,4)$, $\vec{a}_3 = (1,0,-1)$,
$\vec{b}_1 = (2,1,1)$, $\vec{b}_2 = (3,3,4)$, $\vec{b}_3 = (1,1,2)$.

19. $\vec{a}_1 = (-1,1,4)$, $\vec{a}_2 = (0,1,2)$, $\vec{a}_3 = (0,0,-1)$,
$\vec{b}_1 = (1,1,2)$, $\vec{b}_2 = (3,3,1)$, $\vec{b}_3 = (4,-1,1)$.

20. Найти преобразование, обратное линейному преобразованию:
$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 - 5y_3 \end{cases}.$$

21. Линейное преобразование в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу этого преобразования в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

22. Линейное преобразование в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу этого преобразования в базисе
$\vec{q}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{q}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{q}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

23. Линейное преобразование в базисе
$\vec{a}_1 = (8,-6,7), \vec{a}_2 = (-16,7,-13), \vec{a}_3 = (9,-3,7)$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу этого преобразования в базисе
$\vec{b}_1 = (1,-2,1), \vec{b}_2 = (3,-1,2), \vec{b}_3 = (2,1,2)$.

Определить, какие из указанных векторов являются собственными векторами линейных операторов, заданных указанными матрицами:

24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

26. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

27. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе указанными матрицами. Если матрица оператора приводится к диагональному виду путем перехода к новому базису, то найти эту диагональную матрицу и соответствующий базис:

28. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

31. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

32. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

33. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

34. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

35. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверить, является ли оператор A линейным в R^3, если является, то найти его матрицу. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей А:

36. $Ax = (x_2 + x_3\ ,\ 2x_1 + x_3\ ,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$.

37. $Ax = (x_2 + x_1\ ,\ 2x_1 - 3x_3\ ,\ -3x_2 + x_3)$.

38. $Ax = (x_2 + x_1\ ,\ x_1 - x_3\ ,\ x_2 - x_3)$.

39. $Ax = (2x_2 + 4x_1\ ,\ 3x_1 - x_3\ ,\ x_2 + 3x_3)$.

40. $Ax = (x_2 - x_3\ ,\ 3x_2 - x_3\ ,\ 3x_1 + x_3)$.

41. $Ax = (x_1\ ,\ x_2 + 2x_3\ ,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

42. $Ax = (x_2 + x_1\ ,\ x_2 + x_3\ ,\ -x_1 + x_3)$.

43. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3\ ,\ x_1\ ,\ x_2 + 2x_3)$.

44. $Ax = (2x_1 - 3x_2\ ,\ -2x_1 + x_3\ ,\ x_2 - 2x_1)$.

45. $Ax = (2x_2\ ,\ x_2 + x_3\ ,\ x_1 + x_2)$.

Ответы к задачам по теме «Линейные операторы»

1. Да. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** Да. **7.** $\vec{y}(-3,3)$. **8.** $\vec{y}(3,0)$. **9.** $\vec{y}(-3,19)$. **10.** $\vec{y}(-4,7,7)$. **11.** $\vec{y}(1,3,4)$. **12.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 34 & 19 & -4 \\ 15 & 7 & -1 \\ 16 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -2 & \frac{5}{4} \\ 2 & -1 & 1 \\ \frac{13}{4} & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -6 & 11 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{cases} y_1 = 13x_1 - 14x_2 - 11x_3 \\ y_2 = 8x_1 - 9x_2 - 7x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$.

21. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. **25.** $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$. **26.** $\vec{x}_3$. **27.** $\vec{x}_2$.

28. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $c(1,1,-1)$, $c \neq 0$; .

29. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $c_1(1,2,0) + c_2(0,0,1)$, где $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

30. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $c(3,1,1)$, *где* $c \neq 0$.

31. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $c_1(1,2,0) + c_2(1,0,-1)$, $\lambda_3 = -1$, $c(3,5,6)$, где $c \neq 0, c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ и $diag(1,1,-1)$, базис: $\{(2,1,0),(1,0,-1),(3,5,6)\}$.

32. $\lambda_1 = 1, c(3,5,6)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $c_1(1,1,0) + c_2(1,0,-3)$, где $c \neq 0, c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ и $diag(1,2,2)$, базис: $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,-3)\}$.

33. $\lambda = 2, c_1(1,1,-1,0) + c_2(1,1,0,1)$, *где* $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

34. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $c_1(1,0,1,0) + c_2(0,0,0,1)$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $c_1(0,1,0,0) + c_2(0,0,1,0)$, где $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ и $diag(1,1,0,0)$, базис: $\{(1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$.

35.
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, c_1(1,1,0,0) + c_2(1,0,1,0) + c_3(1,0,0,1)$, $\lambda_4 = -2$, $c(1,-1,-1,-1)$, где $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0, c \neq 0$ и $diag(2,2,2,-2)$, базис: $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,-1,-1,-1)\}$.

36. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **37.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **38.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

39. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **40.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **41.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

42. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **43.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **44.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

45. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Квадратичные формы

3.1. Основные понятия и определения

Квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется симметрический однородный многочлен второй степени от этих переменных:

$$\varphi(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$$\varphi(x_1; x_2; \ldots; x_n) = x^t A x ,$$

где A - матрица, составленная из коэффициентов квадратичной формы, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Квадратичная форма $g(x_1; x_2; ...; x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda y_n^2$, содержащая только квадраты переменных, называется ***каноническим видом*** квадратичной формы. Матрица B, соответствующая канонической форме квадратичной формы, диагональна. Если в каноническом виде квадратичной формы все коэффициенты равны 1 или -1, то такая квадратичная форма называется нормальным видом квадратичной формы.

3.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Так как матрица A симметрическая вещественная, задача приведения квадратичной формы к каноническому виду сводится к задаче приведения к диагональному виду матрицы симметрического линейного преобразования с помощью ортогональной матрицы (ортогонального преобразования).

Корни характеристического многочлена матрицы A называют ***характеристическими числами*** квадратичной формы, а направления собственных векторов, соответствующих характеристическим числам, ***главными направлениями квадратичной формы***.

Правило нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму n переменных к каноническому виду:

- записать матрицу A квадратичной формы;
- составить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$;
- найти собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$;
- записать однородную систему уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ и найти собственные векторы матрицы A;
- образовать новый ортогональный базис из собственных векторов и составить ортогональную матрицу перехода T;
- записать канонический вид квадратичной формы.

Мы рассмотрели случай, когда переход совершается от ортонормированного базиса к ортонормированному базису. В общем случае правило изменения матрицы A квадратичной формы будет $C = Q^t AQ$, где C - диагональная матрица полученного канонического вида, Q - матрица преобразования коэффициентов.

Так же для приведения квадратичной формы к каноническому виду применяется ***метод Лагранжа***. Основная идея этого метода состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов по каждой переменной.

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

<u>*Решение.*</u>

- Запишем квадратичную форму в симметрическом виде $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2^2$;
- запишем матрицу A квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;
- составим характеристическое уравнение матрицы A $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$;
- находим собственные значения матрицы A $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$;
- запишем систему уравнений, определяющую искомые собственные векторы: $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$;
- подставляя сюда $\lambda = \lambda_1 = 1$ *и* $\lambda = \lambda_2 = 6$, найдем собственные векторы $U_1(2,1), \quad U_2(-1,2)$. Заметим, что они ортогональны;
- нормируя ортогональные векторы U_1 и U_2, находим векторы, образующие новый ортонормированный базис квадратичной формы: $e_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \quad e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Ортогональная матрица перехода T имеет вид $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

Обратная матрица имеет вид $T^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$, тогда

$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ - диагональный вид матрицы A в найденном ортонормированном базисе.

Итак, ортогональное преобразование переменных

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{\sqrt5}y_1-\frac{1}{\sqrt5}y_2 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt5}y_1+\frac{2}{\sqrt5}y_2 \end{cases}$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду:

$$\varphi(y_1,y_2)=y_1^2+6y_2^2.$$

Пример 2. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

и указать невырожденное преобразование переменных, осуществляющее такое преобразование квадратичной формы.

<u>*Решение.*</u>

В данной квадратичной форме отсутствуют члены с квадратами переменных. Поэтому сначала добьемся, чтобы в квадратичной форме появились такие члены. Для этого совершим невырожденное преобразование переменных

$$x_1=y_1+y_2,\quad x_2=y_1-y_2,\quad x_3=y_3.$$

Матрица этого преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{т.е.}\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

В результате получим

$$f=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3=$$
$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

Здесь коэффициент при y_1^2 отличен от нуля. Поэтому можно выделить полный квадрат по y_1:

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3=2(y_1^2-2y_1y_3)-2y_2^2+8y_2y_3=$$
$$=2(y_1-y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3.$$

Теперь выделим полный квадрат по y_2:

$$f=2(y_1-y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3=$$
$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2^2-4y_2y_3)-2y_3^2=$$
$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+8y_3^2-2y_3^2=$$
$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

Введем новые переменные по правилу

$$z_1=y_1-y_3,\quad z_2=y_2-2y_3,\quad z_3=y_3.$$

Матрица этого преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Получим канонический вид квадратичной формы

$$f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

Чтобы найти матрицу линейного преобразования, приводящего квадратичную форму к найденному каноническому виду, выразим из равенства $(*)$ y_1,y_2,y_3 и подставим в равенство $(**)$. Получим

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда выразим x_1, x_2, x_3:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}.$$

Задачи к теме «Квадратичные формы»

Составить матрицу каждой из канонических форм, предварительно записав форму в симметрическом виде:

1. $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.
2. $2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy - 6xz + 10yz$.
3. $4x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - x_1x_2 + 8x_1x_4 - 5x_2x_4$.
4. $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Записать квадратичную форму по ее матрице:

5. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 18 & 6 & -6 \\ 6 & 21 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти квадратичную форму, полученную из данной линейным преобразованием:

9. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$, $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$.
10. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2$, $\begin{cases} x = -y_1 + 2y_2 \\ x = 3y_1 + y_2 + y_3 \\ x = -2y_1 - y_2 \end{cases}$.
11. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$, $\begin{cases} x = y_1 + y_2 - y_3 \\ x = y_1 - y_2 + y_3 \\ x = y_2 + y_3 \end{cases}$.

Привести канонические формы к каноническому виду с целыми коэффициентами и найти выражение новых неизвестных через старые:

12. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
13. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.
14. $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду и записать ее канонический вид:

15. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

16. $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 12x_1x_2$.

17. $\varphi(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{5}x_1x_2$.

18. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$.

19. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$.

Найти нормальный вид квадратичной формы и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду:

20. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

21. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

22. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Привести квадратичную форму к каноническому виду; найти ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид; найти матрицу перехода к ортонормированному базису:

23. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\sqrt{5}x_1x_2 + x_2^2$.

24. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$.

25. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 24x_1x_2 - 5x_2^2$.

26. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 5x_2^2$.

27. $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.

28. $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 24x_1x_2 - 3x_2^2$.

29. $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4\sqrt{14}x_1x_2 + 6x_2^2$.

30. $f(x_1, x_2) = 11x_1^2 + 24x_1x_2 + 4x_2^2$.

31. $f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 4\sqrt{6}x_1x_2 + 5x_2^2$.

32. $f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 48x_1x_2 + 13x_2^2$.

Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой и указать преобразование координат:

33. $5x^2+5y^2+xy-5=0$

34. $8x^2-4y^2-5xy-1=0$

35. $-3x^2+2y^2-12xy-9=0$

36. $x^2+y^2-xy-6=0$

37. $2x^2+3y^2+z^2-4xy+4xz-12x-6z+4=0$

38. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+2x-4z-1=0$

39. $8x^2+4y^2+5z^2-4xz-44x-2z+29=0$

Ответы к задачам по теме «Квадратичные формы»

9. $f_1(y_1, y_2) = 19y_1^2 - 2y_2^2 - 10y_1y_2$.

10. $f_1(y_1, y_2, y_3) = 22y_1^2 + 12y_2^2 + 3y_3^2 + 11y_1y_2 + 17y_1y_3 + 8y_2y_3$.

11. $f_1(y_1, y_2, y_3) = 7y_2^2 + 9y_3^2 - 3y_1y_2 + 5y_1y_3$.

12. $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$, $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3$, $y_3 = \frac{1}{10}x_3$.

13. $3y_1^2 + 30y_2^2 + 530y_3^2$, $y_1 = x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3$, $y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3$, $y_3 = \frac{1}{20}x_3$.

14. $2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_4^2$, $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3$, $y_3 = \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{2}x_4$, $y_4 = \frac{3}{2}x_4$.

15. $f(y_1, y_2) = 3y_1^2 - y_2^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$.

16. $f(y_1, y_2) = 9y_1^2 - 4y_2^2$, $x_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{13}}y_2$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}y_2$.

17. $\varphi(y_1, y_2) = 12y_1^2 - 2y_2^2$, $x_1 = \frac{3}{\sqrt{14}}y_1 + \sqrt{\frac{5}{14}}y_2$, $x_2 = \sqrt{\frac{5}{14}}y_1 - \frac{3}{\sqrt{14}}y_2$.

18. $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}y_2$, $x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$.

19. $f(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 14y_2^2$, $x_1 = -\frac{5}{\sqrt{70}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{14}}y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{6}{\sqrt{70}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{14}}y_3$,

$x_3 = -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{70}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{14}}y_3$.

20. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$.

21. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = -y_2 + y_3$.

22. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.

33. $\frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2}+\frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2}=1,$ *эллипс* , $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1$.

34.

$-\frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{17}}\right)^2}=1,$ *гипербола* , $x=\frac{1}{\sqrt{26}}x_1-\frac{5}{\sqrt{26}}y_1$, $y=\frac{5}{\sqrt{26}}x_1+\frac{1}{\sqrt{26}}y_1$.

35.

$\frac{x_1^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{y_1^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2}=1,$ *гипербола* , $x=\frac{2}{\sqrt{13}}x_1+\frac{3}{\sqrt{13}}y_1$, $y=-\frac{3}{\sqrt{13}}x_1+\frac{2}{\sqrt{13}}y_1$.

36. $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{4}=1$, *эллипс* , $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1$.

Индивидуальное задание на тему «Квадратичные формы»

Привести квадратичную форму к каноническому виду:

a) методом Лагранжа;
b) с помощью перехода к ортонормированному базису.

1. $f(x_1,x_2)=2.9x_1^2-0.6x_1x_2+2.1x_2^2$.
2. $f(x_1,x_2)=3.8x_1^2-1.2x_1x_2+2.2x_2^2$.
3. $f(x_1,x_2)=4.7x_1^2-1.8x_1x_2+2.3x_2^2$.
4. $f(x_1,x_2)=5.6x_1^2-2.4x_1x_2+2.4x_2^2$.
5. $f(x_1,x_2)=6.5x_1^2-3x_1x_2+2.5x_2^2$.
6. $f(x_1,x_2)=7.4x_1^2-3.6x_1x_2+2.6x_2^2$.
7. $f(x_1,x_2)=8.3x_1^2-4.2x_1x_2+2.7x_2^2$.

8. $f(x_1,x_2)=2.2x_1^2+0.8x_1x_2+2.8x_2^2$.
9. $f(x_1,x_2)=2.4x_1^2+1.6x_1x_2+3.6x_2^2$.
10. $f(x_1,x_2)=2.6x_1^2+2.4x_1x_2+4.4x_2^2$.
11. $f(x_1,x_2)=2.8x_1^2+3.2x_1x_2+5.2x_2^2$.
12. $f(x_1,x_2)=3x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2$.
13. $f(x_1,x_2)=3.2x_1^2+4.8x_1x_2+6.8x_2^2$.
14. $f(x_1,x_2)=3.4x_1^2+5.6x_1x_2+7.6x_2^2$.
15. $f(x_1,x_2)=2.36x_1^2+0.96x_1x_2+2.64x_2^2$.
16. $f(x_1,x_2)=2.72x_1^2+1.92x_1x_2+3.28x_2^2$.
17. $f(x_1,x_2)=3.08x_1^2+2.88x_1x_2+3.92x_2^2$.
18. $f(x_1,x_2)=3.44x_1^2+3.84x_1x_2+4.56x_2^2$.
19. $f(x_1,x_2)=3.8x_1^2+4.8x_1x_2+5.2x_2^2$.
20. $f(x_1,x_2)=4.16x_1^2+5.76x_1x_2+5.84x_2^2$.
21. $f(x_1,x_2)=4.52x_1^2+6.72x_1x_2+6.48x_2^2$.
22. $f(x_1,x_2)=1.2x_1^2+3.2x_1x_2-2.2x_2^2$.
23. $f(x_1,x_2)=3x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2$.
24. $f(x_1,x_2)=4.8x_1^2+4.8x_1x_2-1.8x_2^2$.
25. $f(x_1,x_2)=6.6x_1^2+5.6x_1x_2-1.6x_2^2$.
26. $f(x_1,x_2)=8.4x_1^2+6.4x_1x_2-1.4x_2^2$.
27. $f(x_1,x_2)=10.2x_1^2+7.2x_1x_2-1.2x_2^2$.
28. $f(x_1,x_2)=12x_1^2+8x_1x_2-x_2^2$.
29. $f(x_1,x_2)=-1.95x_1^2+1.2x_1x_2+0.2x_2^2$.
30. $f(x_1,x_2)=-1.5x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$.
31. $f(x_1,x_2)=-1.05x_1^2+2.8x_1x_2+1.8x_2^2$.

32. $f(x_1,x_2) = -0.6x_1^2 + 3.6x_1x_2 + 2.6x_2^2$.

33. $f(x_1,x_2) = -0.15x_1^2 + 4.4x_1x_2 + 3.4x_2^2$.

34. $f(x_1,x_2) = 0.3x_1^2 + 5.2x_1x_2 + 4.2x_2^2$.

35. $f(x_1,x_2) = 0.75x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

II ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В современной математике проективная геометрия, которой посвящён настоящий модуль, несколько потеряла своё ведущее значение. В частности, роль теоретической базы аналитической геометрии перешла к линейной алгебре. С точки зрения получения численных результатов это сыграло полезную роль, но необходимо отметить, что использование алгебраических формул часто затемняет геометрический смысл некоторых задач. Применение же выводов проективной геометрии позволяет получить обобщённый геометрический взгляд на некоторые проблемы.

Однако в последнее время, особенно в связи с задачей построения на экране компьютера реального изображения, опять повысился интерес к проективной геометрии. Это обусловлено тем, что мы живем в мире, в котором соблюдаются законы перспективы, а перспективное отображение есть часть проективной геометрии.

Цель настоящего модуля – дать читателю основные сведения о проективной геометрии. В первом разделе рассказывается о проективной плоскости и перспективном соответствии, во втором – о проективных координатах. Третий раздел посвящен линиям первого и второго порядка на проективной плоскости, и, наконец, в последнем разделе модуля рассматриваются проективные преобразования и отображения.

С целью лучшего усвоения изложение материала иллюстрируется большим количеством примеров. Это, как и представленные упражнения, позволяет использовать пособие для самостоятельной работы студентов.

Модуль в основном ориентирован на учебную программу специальности «механика», однако он пригоден и для самостоятельного изучения студентами других специальностей. Для понимания излагаемого материала достаточно знаний, полученных в курсах линейной алгебры и аналитической геометрии.

4. Проективная плоскость

4.1. Связка. Проективная плоскость

Множество всех прямых и плоскостей трехмерного пространства, проходящих через точку О, называется связкой с центром в точке О или просто связкой О.

Рассмотрим какую-нибудь плоскость П, не проходящую через О (рис.4.1).

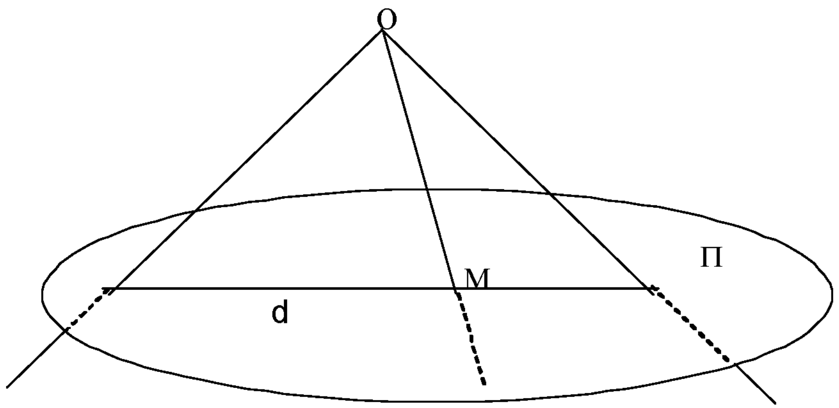

Рис.4.1 Перспективное соответствие

Через каждую точку М плоскости П проходит единственная прямая ОМ связки О (в дальнейшем *прямые связки условимся называть лучами*). Таким образом, *каждой точке плоскости можно поставить в соответствие единственный луч связки* О. *Это соответствие называется перспективным соответствием* (ПС). Кроме того, ПС каждой прямой d плоскости П ставит в соответствие единственную плоскость Od связки, которую можно рассматривать как множество всех лучей связки, проходящих через точки прямой d.

Легко видеть, что ПС не является взаимно однозначным. Действительно, в связке имеются *лучи, параллельные плоскости П*, которым не соответствует ни одна точка плоскости П. Мы будем

называть такие лучи *особыми*. *Плоскость связки, параллельную плоскости П, мы также будем называть особой, так как ей не соответствует ни одна прямая плоскости П.* Ясно, что *особая плоскость представляет собой множество всех особых лучей связки.* Заметим также, что каждая неособая плоскость связки содержит единственный особый луч.

Проведем пополнение плоскости П несобственными элементами (несобственнными точками и несобственной прямой) так, чтобы выполнялись следующие *аксиомы*:

- *каждая прямая d плоскости П пополняется единственной несобственной точкой (точкой «пересечения» особого луча плоскости Od с плоскостью П);*
- *две прямые d и b плоскости П имеют общую несобственную точку В тогда и только тогда, когда они параллельны (эта точка – точка «пересечения» общего особого луча плоскостей Od и Ob с плоскостью П);*
- *две прямые d и a плоскости П имеют общую собственную точку А тогда и только тогда, когда они не параллельны (эта точка соответствует общему лучу плоскостей Od и Oa);*
- *совокупность всех несобственных точек плоскости П образует единственную несобственную прямую (линию «пересечения» особой плоскости с плоскостью П).*

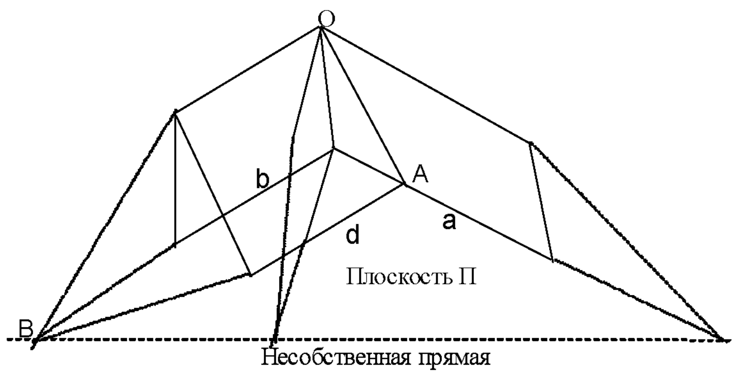

Рис.4.2 Аксиомы проективной плоскости

Плоскость П, пополненную несобственными элементами, мы будем называть проективной плоскостью. Она обладает следующими *свойствами*:

- *всякие две прямые проективной плоскости имеют единственную общую точку (таким образом, для проективной плоскости евклидово понятие параллельности прямых линий исчезает):*
- *для всяких двух точек проективной плоскости имеется единственная прямая, проходящая через эти две точки.*

Легко видеть, что перспективное соответствие между лучами связки и точками проективной плоскости, а также между плоскостями связки и прямыми проективной плоскости является взаимно однозначным.

Упражнения

Упр.4.1 На проективной плоскости заданы две прямые: b и d. Определить тип их общей точки (собственная или несобственная) в следующих случаях:

а. b – собственная,d - несобственная,

б. b и d – собственные, b параллельна d,

в. b и d – собственные, b не параллельна d.

Упр.4.2 На проективной плоскости заданы две точки: M и P. Установить тип прямой, проходящей через них, в следующих случаях:

а. M и P – собственные.

б. M – собственная, P – несобственная.

в. M и P – несобственные.

Упр.4.3 Три прямые проективной плоскости имеют общую собственную точку. Являются ли все три прямые собственными?

Упр.4.4 Три прямые проективной плоскости имеют общую несобственную точку. Что можно сказать о прямых?

Упр.4.5 В треугольнике ABC на проективной плоскости точки A и B – собственные, точка C – несобственная. Чему равна сумма углов BAC и ABC треугольника?

5. Проективные координаты

5.1. Проективная система координат в связке

Пусть в пространстве введена аффинная система координат с началом в центре связки. Напомним, что для задания аффинной системы координат достаточно задать в пространстве аффинный репер: начало отсчета и три некомпланарных вектора (обозначим их $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$). В дальнейшем мы будем говорить о системе координат $O\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$.При этом *координатами* любого *вектора* $\boldsymbol{a}$ *называются три числа* a_1,a_2,a_3*, определяемые однозначным разложением*

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3, \qquad (5.1)$$

а *координатами точки M называют координаты вектора* $\boldsymbol{OM}$.

Назовем проективными координатами (x_1,x_2,x_3) *луча OM связки O координаты любого ненулевого вектора* $\boldsymbol{OK}$*, коллинеарного* $\boldsymbol{OM}$. Легко понять, что любая аффинная система координат в пространстве порождает для произвольного луча связки бесчисленное множество пропорциональных троек проективных координат, однако каждой тройке координат соответствует единственный луч связки. *Две аффинных системы координат в пространстве с началом в точке O называют проективно эквивалентными* (мы будем говорить просто *эквивалентными*), *если всякая тройка чисел, являясь проективными координатами некоторого луча в одной из них, в другой системе определяет тот же луч*. Можно показать, что две системы координат с началом в точке O эквивалентны тогда и только тогда, когда векторы репера одной из них получаются из соответствующих векторов другой умножением на одно и то же число, отличное от нуля.

Аффинную систему координат (АСК) в пространстве можно задать и другим способом: задать три прямые OX_1,OX_2,OX_3, несущие векторы репера, и точку E(1,1,1) (рис. 5.1). Тогда для определения векторов $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ достаточно, как это видно на рисунке, выбрать на несущих прямых положение одной из четырех точек: точки E или точки, являющейся концом одного из векторов репера.

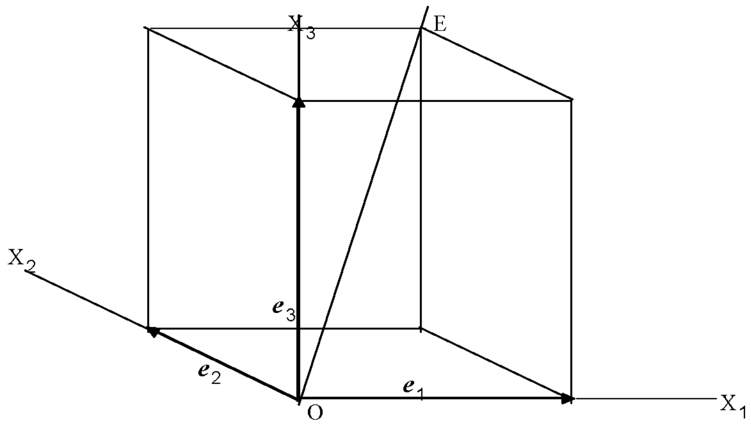

Рис.5.1 Система проективных координат в связке

Легко понять, что *две аффинных системы координат эквивалентны тогда и только тогда, когда у них совпадают несущие прямые OX_1, OX_2, OX_3 , а точки с координатами (1,1,1) лежат на одном и том же луче.* Таким образом, проективные координаты любого луча связки будут определены, если задать четыре направления OX_1, OX_2, OX_3 ,OE, каждые три из которых не лежат в одной плоскости. Тем самым в связке будет задана *проективная система координат (ПСК)* $X_1X_2X_3E$.

Заметим, что любая ПСК определяет множество эквивалентных АСК в связке, причем для построения конкретной АСК достаточно выбрать одну из точек с координатами (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) на соответствующем луче OX1, OX2, OX3 ,OE. С другой стороны, любая АСК с началом в точке О порождает множество эквивалентных АСК и единственную ПСК. Таким образом, можно теперь уточнить определение:

Проективными координатами произвольного луча ОМ в ПСК $X_1X_2X_3E$ называется тройка чисел (x_1,x_2,x_3), являющаяся тройкой координат вектора ***ОМ*** *в любой АСК, определяемой данной ПСК.*

5.2. Проективная система координат на плоскости

Рассмотрим теперь наряду со связкой некоторую проективную плоскость. Введем в связке ПСК $X_1X_2X_3E$ и зафиксируем точки пересечения несущих лучей OX_1, OX_2, OX_3 ,OE с проективной плоскостью (рис.5.2).

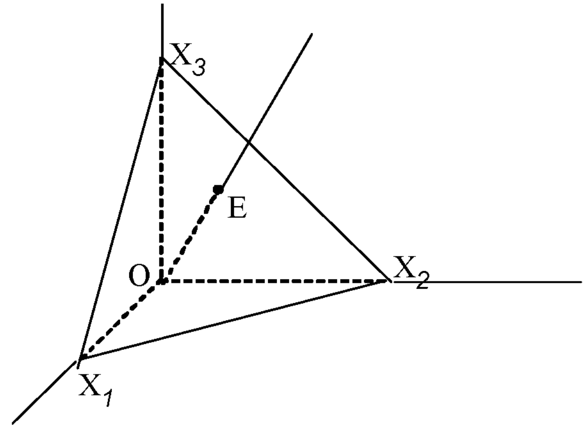

Рис 5.2 Система проективных координат на проективной плоскости

Обозначим эти точки X_1, X_2, X_3, E и назовем их *фундаментальными* (*базисными*). Заметим, что эти точки могут быть несобственными (но не более двух, иначе нарушается условие некомпланарности направлений).

Проективными координатами произвольной точки М проективной плоскости П назовем тройку проективных координат луча ОМ в некоторой ПСК $X_1X_2X_3E$ с центром в произвольной точке О, не принадлежащей плоскости.

Можно показать, что проективные координаты любой точки проективной плоскости полностью определены положением фундаментальных точек и не зависят от выбора центра связки (лишь бы он не принадлежал плоскости). Именно поэтому мы далее будем говорить о ПСК $X_1X_2X_3E$ на проективной плоскости, не уточняя положения О.

Базисные точки, по определению, имеют координаты, пропорциональные тройкам (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).

Тройки координат фундаментальных точек называются согласованными, если сумма матриц координат точек X_1, X_2, X_3 равна матрице координат точки Е. Геометрически это означает, что в качестве проективных координат точек X_1, X_2, X_3 , Е выбраны, соответственно, координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ в некоторой АСК, связанной с данной ПСК.

Тройки проективных координат точек имеют следующие *свойства*:

- *тройка (0,0,0) не может быть координатами точки, поэтому называется запрещенной;*
- *каждой незапрещенной тройке координат соответствует единственная точка;*
- *если некоторая тройка является координатами точки, то любая тройка, пропорциональная данной, определяет ту же точку;*
- *любые две тройки координат одной точки пропорциональны.*

5.3. Переход к новой системе проективных координат

Пусть на плоскости заданы две ПСК: старая $X_1X_2X_3E$ и новая $X^*_1X^*_2X^*_3E^*$. При этом новая система дана матрицами координат ее фундаментальных точек $\mathbf{X}^*_1$, $\mathbf{X}^*_2$, $\mathbf{X}^*_3$, $\mathbf{E}^*$, определенных в старой ПСК.

Требуется найти формулы преобразования координат, позволяющие по старым координатам точки $M(x_1,x_2,x_3)$ найти ее новые координаты (x^*_1,x^*_2,x^*_3), и наоборот.

Сначала согласуем координаты новых фундаментальных точек, для чего найдем три числа (α, β, γ), удовлетворяющие матричному уравнению

$$\alpha\mathbf{X}^*_1+\beta\mathbf{X}^*_2+\gamma\mathbf{X}^*_3=\mathbf{E} \tag{5.2}$$

Вследствие фундаментальности точек X^*_1, X^*_2, X^*_3, E^*, эта система является невырожденной и имеет единственное решение. После определения α, β, γ соответствующие координаты надо умножить на найденные числа.

Выберем произвольно центр связки O. Тем самым, вследствие согласованности координат старых и новых фундаментальных точек, в пространстве будут определены два базиса (старый $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$ и новый $\boldsymbol{e}^{*\mathrm{T}}$), определяемые матричными соотношениями

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3),\quad \boldsymbol{e}^{*\mathrm{T}}=(\boldsymbol{e}^*_1,\boldsymbol{e}^*_2,\boldsymbol{e}^*_3),\quad \boldsymbol{e}^{*\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}. \tag{5.3}$$

В равенстве (5.3) через **S** обозначена матрица преобразования координат, столбцами которой являются матрицы согласованных координат новых базисных точек:

$$\mathbf{S}=(\alpha\mathbf{X}_1^*, \beta\mathbf{X}_2^*, \gamma\mathbf{X}_3^*). \tag{5.4}$$

Поскольку начало координат не меняется, для вектора **OM** со старыми координатами **X** и новыми $\mathbf{X}^*$ имеют место два разложения:

$$\mathbf{OM}=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{X},\qquad \mathbf{OM}=\boldsymbol{e}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^*, \tag{5.5}$$

из которых следуют две формулы преобразования координат:

$$\mathbf{X}=\mathbf{S}\mathbf{X}^*,\qquad \mathbf{X}^*=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}. \tag{5.6}$$

Учитывая пропорциональность троек проективных координат точки, получаем окончательную формулу связи между старыми и новыми координатами точки на проективной плоскости:

$$\lambda\mathbf{X}^*=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}. \tag{5.7}$$

5.4. Однородные координаты

Рассмотрим связку O и проективную плоскость П. Пусть на плоскости введена аффинная система координат $O_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ (рис.5.3). Введем АСК в пространстве следующим образом: в качестве начала координат выберем центр связки O, а в качестве базисных векторов – векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{OO}_1$.

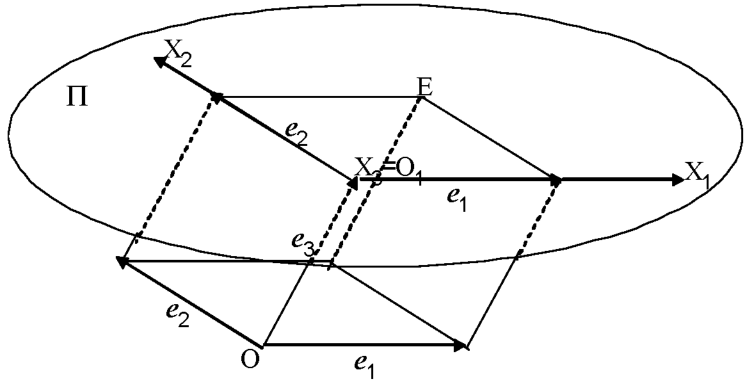

Рис.5.3 Однородные координаты на проективной плоскости

Аффинную систему координат в пространстве, введенную описанным способом, называют системой координат, естественно связанной с системой координат $O_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ на плоскости.

Проективные координаты точек проективной плоскости, порожденные АСК, естественно связанной с АСК на плоскости, называют однородными координатами, а саму ПСК – однородной системой координат (ОСК).

Однородные координаты обладают всеми свойствами проективных, но имеют и некоторые преимущества, так как в них, в частности, легко отличить собственную точку от несобственной. Назовем тройку однородных координат вида $(x_1,x_2,0)$ особой, а другие тройки – обыкновенными (тройка (0,0,0) – по-прежнему запрещенная). Укажем *дополнительные свойства однородных координат*.

- *Каждой обыкновенной тройке соответствует единственная собственная точка проективной плоскости П.*
- *Каждой особой тройке соответствует единственная несобственная точка проективной плоскости (это следует из того, что в пространстве особой тройке соответствует особый луч связки). В системе координат на плоскости две первых координаты особой тройки задают вектор, определяющий направление на несобственную точку.*

Зная координаты точки на плоскости, легко получить ее однородные координаты. Действительно, по определению имеет место цепь равенств:

$$M(x,y) \Rightarrow O_1M=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\ \mathbf{;} \Rightarrow \mathbf{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\ ; \Rightarrow M(x,y,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\lambda x,\lambda y,\lambda).$$

Так же легко перейти от однородных координат собственной точки к ее координатам на плоскости. Опишем процесс перехода:

$$M(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow \mathbf{OM}=\lambda(x_1,x_2,x_3); \Rightarrow \mathbf{OM}=(x_1/x_3,\ x_2/x_3,1); \Rightarrow$$

$$\mathbf{O_1M}=(x_1/x_3,\ x_2/x_3); \Rightarrow M(x_1/x_2,\ x_2/x_3).$$

Заметим в заключение, что фундаментальные точки X_1 и X_2 в однородной системе координат являются несобственными, точка X_3 совпадает с точкой O_1 (рис.5.3), а точка E - с точкой (1.1) плоскости.

5.5. Связь проективных и трилинейных координат

Пусть на плоскости задан треугольник $X_1X_2X_3$ (рис.5.4).

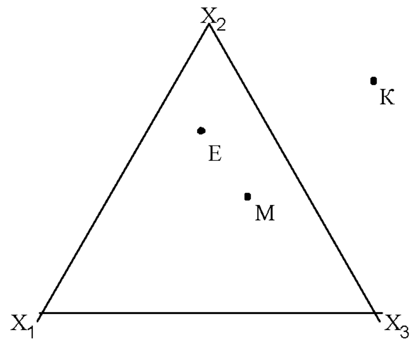

Рис.5.4 Треугольные и трилинейные координаты точки на плоскости

Обозначим через (A–12), (A–23), (A–13) расстояния от точки A до прямых X_1X_2, X_2X_3, X_1X_3, соответственно (через 1-23 обозначим расстояние от точки X_1 до прямой X_2X_3 и т.д).

Определим для каждой точки M плоскости тройку чисел α_M, β_M, γ_M:

$$\alpha_M=\frac{M\text{–}23}{1\text{–}23};\ \beta_M=\frac{M\text{–}31}{2\text{–}31};\ \gamma_M=\frac{M\text{–}12}{3\text{–}12}. \qquad (5.8)$$

При этом будем α_M считать положительным, если точки M и X_1 находятся в одной полуплоскости по отношению к прямой X_2X_3 (β_M, γ_M – аналогично). Например, для точки K (рис.5.4) α_K меньше 0, β_K больше 0, γ_K больше 0.

Заметим, что эти три числа не являются независимыми. Можно показать, что для любой точки M плоскости справедливо следующее равенство:

$$\alpha_M+\beta_M+\gamma_M=1.$$

В литературе иногда называют тройку α_M, β_M, γ_M однородными координатами, но мы, во избежание путаницы, будем говорить: «треугольные координаты».

Можно показать, что проективные координаты произвольной точки М плоскости пропорциональны тройке отношений

$$\left(\frac{\alpha_M}{\alpha_E}; \frac{\beta_M}{\beta_E}; \frac{\gamma_M}{\gamma_E}\right) \qquad (5.9)$$

и не зависят от выбора центра связки О.

Тройку чисел (5.9) называют трилинейными координатами точки на плоскости. Заметим, что их можно определять и по формулам:

$$\left(\frac{M-23}{E-23}; \frac{M-31}{E-31}; \frac{M-12}{E-12}\right). \qquad (5.10)$$

Соотношения (5.10) более удобны в том случае, когда приходится иметь дело с несобственными точками. В этих соотношениях перед дробями ставится знак «+», если точки М и Е находятся в одной полуплоскости по отношению к соответствующей прямой, и знак «-» в противном случае.

Связь проективных координат с трилинейными позволяет определять проективные координаты точек проективной плоскости, а также находить точки по заданным координатам, опираясь только на положение фундаментальных точек. Рассмотрим два примера.

Пример 5.1 На плоскости заданы положения собственных базисных точек X_1, X_2, X_3, Е (рис.5.5). Построить точку А(2,3,-1) и указать координаты хотя бы одной несобственной точки, если треугольные координаты точки Е $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

<u>Решение</u>. Сначала воспользуемся формулой (5.9). Учитывая, что проективные координаты пропорциональны трилинейным, получим для определения треугольных координат точки А систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_A = 2\lambda\alpha_E, \\ \beta_A = 3\lambda_E, \\ \gamma A = -\lambda\gamma_E, \\ \alpha_A + \beta_A + \gamma_A = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda\left(2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Решив эту систему, придем к соотношениям:

$$\lambda = \frac{4}{3}; \ \alpha_A = \frac{2}{3}; \ \beta_A = 1; \ \gamma_A = -\frac{2}{3}.$$

Теперь точку А легко построить на чертеже.

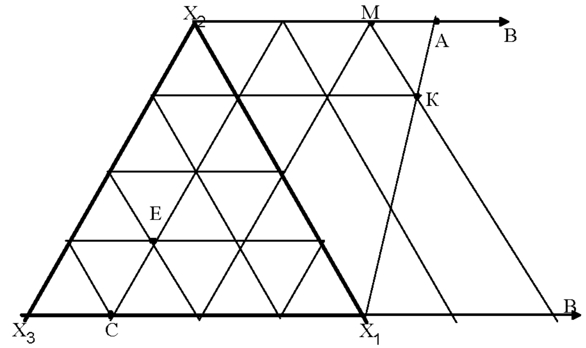

Рис.5.5 Построение точки по проективным координатам

Обратимся ко второй части задачи. Пусть координаты несобственной точки (x,y,z). Для любой несобственной точки, вследствие удаленности ее в бесконечность, нельзя найти конечные треугольные координаты. Поэтому должны выполняться равенства

$$x\alpha_E + y\beta_E + z\gamma_E = 0, \Rightarrow x\cdot\frac{1}{4} + y\cdot\frac{1}{4} + z\cdot\frac{1}{2} = 0; \Rightarrow x + y + 2z = 0.$$

Любая точка с проективными координатами, удовлетворяющими последнему равенству, будет несобственной. Таковой, например, является точка В(2,0,-1).

Опишем теперь геометрический способ построения точки А с заданными координатами. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Отношение проективных координат x_1/x_2 для любой точки прямой, проходящей через фундаментальную точку X_3, есть величина постоянная для этой прямой. Тем же свойством обладают и прямые, проходящие через точки X_1, X_2, только постоянными у точек этих прямых являются, соответственно, отношения x_2/x_3 и x_1/x_3.

В том случае, когда все фундаментальные точки являются собственными, это утверждение легко следует из определения трилинейных координат и подобия треугольников. В случае же, когда хотя бы одна фундаментальная точка – несобственная, доказательство также проводится на основе рассмотрения подобия треугольников, разница лишь в том, что для этого приходится использовать пространственные треугольники с вершиной в центре связки O.

Для построения точки A сначала найдем точку M, находящуюся на расстоянии вдвое большем, чем точка E, от прямой X_3X_2 и на таком же расстоянии, что и точка E (но с другой стороны) от прямой X_1X_2. У этой точки отношение x_1/x_3 равно –2. Аналогично построим точку K, для которой отношение x_2/x_3 равно –3. Искомая точка A находится на пересечении прямых X_2M и X_1K.

В заключение опишем процесс построения несобственной точки B. Она должна находиться на пересечении прямых X_2M и X_3C (для точки C отношение x_2/x_3 равно 0). Легко видеть что эти прямые параллельны. Поэтому точка B действительно является несобственной и находится в бесконечности. Можно указать только направление на нее.

На первый взгляд геометрический способ более громоздок, однако он позволяет находить точки на проективной плоскости и в том случае, когда некоторые фундаментальные точки являются несобственными.

Пример 5.2 На проективной плоскости заданы фундаментальные точки, причем точки X_3 и E являются несобственными (рис.5.6). Требуется построить точки A(3,-2,-6) и B(1,2,0).

<u>Решение.</u> Для построения точки A поступим следующим образом. Проведем луч X_1E и выберем на нем точку K. Найдем точку M, находящуюся на таком же расстоянии от X_1X_3 и в три раза дальше от прямой X_1X_2 (отношение x_3/x_2 равно 3). Аналогично на луче X_2E выберем точку C и найдем точку H, находящуюся в два раза дальше, чем C, от X_1X_2 и на таком же расстоянии, но с другой стороны от X_1X_3 (отношение x_3/x_2 равно –2). Искомая точка A находится на пересечении прямых X_1M и X_2H.

Для построения точки B придется поступить по-другому. Дело в том, что две линии, идущие в B из точек X_1, X_2 , совпадают с прямой X_1X_2. Поэтому сначала построим, так же, как точку A, точку P(1,2,1) и проведем линию, проходящую через X_3 параллельно X_2X_3 до пересечения с прямой X_1X_2 (отношение x_1/x_2 для точек B и P совпадает).

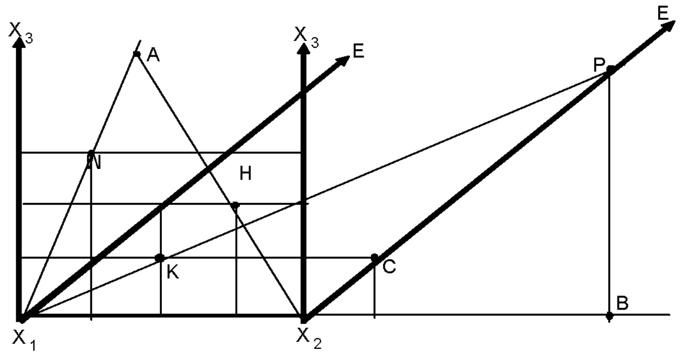

Рис.5.6 Построение точек по известным проективным координатам

Для лучшего уяснения геометрического смысла проективных координат часть упражнений данного раздела сформулированы для двумерной аналогии: связки на плоскости и проективной прямой (рис.5.7).

Проективные координаты точки M на проективной прямой – это пара чисел, представляющая координаты вектора ***OM*** *в некоторой аффинной системе координат с началом в центре связки O, введенной на плоскости* (на рисунке изображена точка M(2,1)).

Фундаментальными точками являются точки X_1, X_2, E, которые полностью определяют проективные координаты любой точки проективной прямой. Заметим, что только одна фундаментальная точка может быть несобственной.

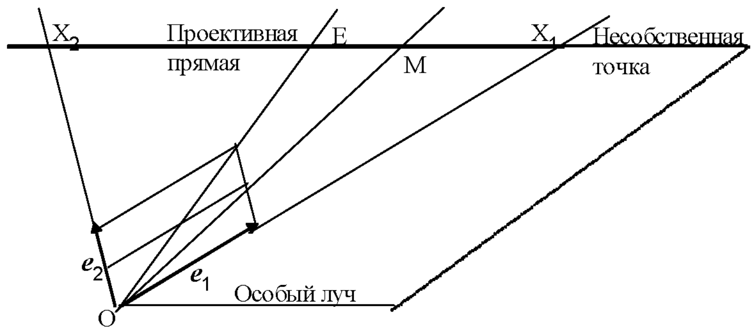

Рис.5.7 Связка и проективная прямая

Аналогично треугольным вводятся «*линейные координаты*» α_M, β_M точки прямой в том случае, когда X_1, X_2 – собственные точки:

$$\alpha_M = \frac{MX_2}{X_1X_2}; \quad \beta_M = \frac{MX_1}{X_2X_1}.$$

Формулы (5.9) и (5.10) остаются теми же, достаточно в них полагать третью координату равной нулю или вообще игнорировать.

Проективные координаты произвольной точки полностью определяются «линейными» координатами и представляют собой пары чисел, пропорциональные *«двухточечным координатам»* (аналог трилинейных):

$$\left(\frac{\alpha_M}{\alpha_E}, \frac{\beta_M}{\beta_E}\right).$$

Двухточечные координаты можно определить и соотношениями

$$\left(\frac{MX_2}{EX_2}, \frac{MX_1}{MX_1}\right),$$

в некоторых случаях более удобными для применения.

Пример 5.3 На проективной прямой заданы фундаментальные точки X_1, X_2, E, причем точка E – несобственная (рис.5.8). Найти точку A(1.2).

<u>Решение</u>. Выберем точку O, не лежащую на проективной прямой, в качестве центра связки. На особом луче связки, задающем направление на несобственную фундаментальную точку E, выберем произвольно точку E_1, и на ее основе построим базисные векторы системы аффинных координат с началом в точке O. Порядок дальнейшего построения полностью ясен из рисунка (5.8).

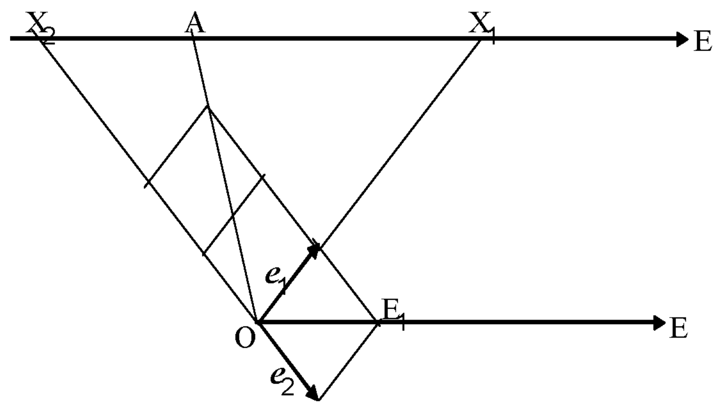

Рис.5.8 Определение положения точки на проективной прямой

Упражнения

Упр.5.1 На прямой заданы собственные точки X_1, X_2, E, причем линейные координаты точки E(0.25; 0.75). Построить точку A с проективными координатами (1,-2) и найти проективные координаты несобственной точки.

Упр.5.2 На прямой заданы собственные точки X_1, X_2, E, причем линейные координаты точки E(1.5;-0.5). Построить точку A с проективными координатами (1,-2) и найти проективные координаты несобственной точки.

Упр.5.3 Точка X_1 – несобственная. Построить на чертеже точку A с проективными координатами (1,-2).

Упр.5.4 Точка X_2 – несобственная. Построить на чертеже точку A с проективными координатами (1,-2).

Упр.5.5 В старой ПСК заданы проективные координаты фундаментальных точек новой ПСК: $X_1^*(1,2)$, $X_2^*(0,1)$, $E^*(1,0)$. Определить новые координаты точки E(1,1) и старые координаты точки B с новыми координатами (2,1).

Упр.5.6 На проективной плоскости заданы собственные точки X_1, X_2, X_3, E, причем точка E – точка пересечения медиан треугольника $X_1X_2X_3$. Построить точки A(1,2-1), B(1,2,0) двумя способами: с использованием треугольных координат и геометрически. Установить связь между проективными координатами несобственных точек.

Упр.5.7 На проективной плоскости заданы собственные точки X_1, X_2, X_3, E, причем точка E имеет треугольные координаты (1,2,-2). Построить точки A(1,2-1), B(1,2,0) двумя способами: с использованием треугольных координат и геометрически. Установить связь между проективными координатами несобственных точек.

Упр.5.8 На проективной плоскости заданы собственные точки X_1, X_2, X_3, E, причем точка E имеет треугольные координаты (-0.5;-0.5;2). Построить точки A(1,2-1), B(1,2,0) двумя способами: с использованием треугольных координат и геометрически. Установить связь между проективными координатами несобственных точек.

Упр.5.9 Точки X_1, X_2, X_3 располагаются в вершинах равностороннего треугольника, а точка E – несобственная, причем направление на нее – высота треугольника, опущенная из вершины X_3. Построить точку A(1,2,-1).

Упр.5.10 Точки X_1, X_2, E располагаются в вершинах равностороннего треугольника, а точка X_3 – несобственная, причем направление на нее – высота треугольника, опущенная из вершины E. Построить точку A(1,2,-1).

Упр.5.11 Точки X_3, E располагаются в вершинах квадрата X_3EAB, а точки X_1 и X_2 – несобственные, причем направление на X_1 задано стороной X_3B, а на X_2 – диагональю X_3A. Построить точку C(1,2,-1).

Упр.5.12 В старой ПСК заданы проективные координаты фундаментальных точек новой ПСК: $X_1^*(1,0,0)$, $X_2^*(0,1,0)$, $X_3^*(1,1,1)$, $E^*(0,0,1)$. Определить новые координаты точки A(1,2,-1) и старые координаты точки B с новыми координатами (1,2,0).

Упр.5.13 В системе аффинных координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ на плоскости заданы координаты фундаментальных точек ПСК: $X_1(1,0)$, $X_2(0,1)$, $X_3(0,0)$, E(1,1). Найти проективные координаты точки A(1,2) и аффинные координаты точки B, имеющей однородные координаты (12,8,-2).

Упр.5.14 На плоскости задан треугольник $X_1X_2X_3$ и точка E – точка пересечения его медиан. Вводится аффинная система координат с началом в точке X_3 и базисными векторами $\mathbf{X_3X_1}$, $\mathbf{X_3X_2}$. Найти аффинные координаты точки A с однородными координатами (1,2,-1) и однородные координаты точки B(1,1).

6. Линии первого и второго порядка

6.1. Уравнение прямой линии на проективной плоскости

Покажем, что *любая прямая на проективной плоскости может быть задана уравнением*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \tag{6.1}$$

и наоборот, каждое уравнение вида (6.1) определяет единственную прямую этой плоскости.

Рассмотрим на проективной плоскости прямую d. Уравнение плоскости Od в пространственной АСК с началом в точке O будет иметь вид (6.1), так как плоскость проходит через начало координат. Если точка M с проективными координатами (x_1, x_2, x_3) принадлежит прямой d, то эти же координаты определяют некоторый луч OK, коллинеарный OM. Следовательно, точка K принадлежит плоскости Od, а ее аффинные координаты должны удовлетворять уравнению (6.1). Отсюда вытекает то, что проективные координаты точки M также удовлетворяют этому уравнению.

С другой стороны, если точка не принадлежит прямой d, то луч OM не принадлежит плоскости Od. Следовательно, точка K не лежит в плоскости, а тройка ее проективных координат не должна удовлетворять уравнению (6.1).

Таким образом, любая прямая на проективной плоскости может быть задана уравнением (6.1). При этом если два таких уравнения имеют пропорциональные коэффициенты, то они задают одну прямую. Это является следствием того, что в пространстве они задают одну и ту же плоскость.

С другой стороны, каждое уравнение вида (6.1) определяет в пространстве единственную плоскость. Поэтому на проективной плоскости этому уравнению будут удовлетворять координаты точек единственной прямой, а именно, линии «пересечения» плоскости (6.1) и проективной. Следовательно, каждое уравнение (6.1) в данной ПСК определяет единственную прямую проективной плоскости.

Заметим, что если в пространстве уравнение определяет плоскость, параллельную проективной, то на самой проективной плоскости оно определяет несобственную прямую.

Тот факт, что уравнение прямой в ПСК совпадает с уравнением плоскости в АСК, порожденной данной проективной системой координат, позволяет легко записать уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными проективными координатами A(a_1, a_2, a_3) и C(c_1, c_2, c_3). Оно должно совпадать с уравнением плоскости OAC и будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix} = 0. \tag{6.2}$$

Пример 6.1 Записать уравнение несобственной прямой, если известно, что точки с проективными координатами (0,1,0) и (1,1,1) являются несобственными.

<u>Решение</u>. Поскольку несобственная прямая проходит через все несобственные точки (следовательно, и через две заданные), будем иметь уравнение

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = 0; \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0.$$

Пример 6.2 Найти проективные координаты точки пересечения прямых линий, заданных уравнениями $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$; $x_1 + x_2 = 0$.

<u>Решение</u>. Воспользуемся методом Гаусса и решим систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = t. \end{cases} \Leftrightarrow A(1,-1,-1).$$

6.2. Координаты прямой на проективной плоскости

Назовем координатами прямой **d** *тройку коэффициентов* a_1, a_2, a_3 *уравнения* (6.1), *определяющего эту прямую в некоторой ПСК, введенной на проективной плоскости*. Для краткости будем пользоваться обозначением

$$\mathbf{d}=\{a_1,a_2,a_3\}. \tag{6.3}$$

Очевидны следующие *свойства проективных координат прямой* линии:

- *тройка {0,0,0} не может быть координатами прямой;*
- *любые две тройки координат данной прямой пропорциональны;*
- *если некоторая тройка определяет прямую линию, то любая тройка, пропорциональная данной, определяет ту же прямую.*

Координаты прямой в некоторой однородной системе координат мы также будем называть однородными.

Пример 6.3 Определить однородные координаты прямой линии, заданной следующим уравнением на плоскости: $2x - 3y + 5 = 0$.

<u>Решение</u>. Ранее было показано, что для перехода к однородным координатам достаточно считать

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{6.4}$$

Поэтому можно записать следующую цепочку равенств:

$$2\cdot\frac{x_1}{x_2} - 3\cdot\frac{x_2}{x_3} + 5 = 0, \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \Leftrightarrow d = \{2; -3; 5\}.$$

Из данного примера следует *полезное правило:*

если прямая задана уравнением в некоторой АСК на плоскости, то ее однородными координатами в соответствующей ОСК будут коэффициенты этого уравнения.

Легко также перейти от уравнения в однородных координатах к уравнению прямой в соответствующей АСК на плоскости. Для этого достаточно поделить все уравнение на x_3 и провести обратную замену:

$$\frac{x_1}{x_3} = x; \qquad \frac{x_2}{x_3} = y. \tag{6.5}$$

Особый интерес представляют координаты несобственной прямой.

Проще всего определить ее координаты в однородных координатах. Так как уравнение особой плоскости в АСК, связанной с ОСК, имеет вид $x_3 = 0$, то несобственная прямая будет иметь однородные координаты $\{0,0,1\}$.

Рассмотрим различные случаи вычисления координат несобственной прямой в произвольной системе проективных координат.

Случай, когда две фундаментальные точки являются несобственными, уже рассмотрен в примере 6.1.

В том случае, когда точка E – собственная, легко определить ее треугольные координаты. Если фундаментальные точки X_1, X_2, X_3 являются собственными, они вычисляются по формулам (5.3), (5.4), а тогда, когда одна из этих точек – несобственная, достаточно считать, что расстояние до нее стремится к бесконечности (рис.6.1).

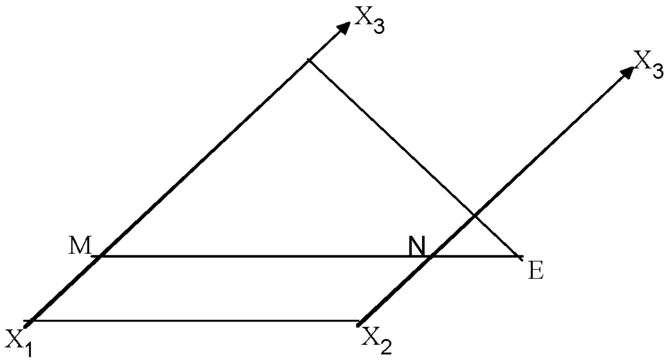

Рис.6.1 Треугольные координаты точки E

Легко понять, что в случае расположения точки E, представленном на рисунке, ее треугольные координаты можно вычислить по следующим формулам:

$$\alpha_E = -\frac{EN}{MN}; \quad \beta_E = \frac{EM}{NM}; \gamma_E = 0.$$

Теперь для определения координат несобственной прямой достаточно воспользоваться правилом, следующим из решения примера (5.1).

Проективные координаты несобственной прямой пропорциональны тройке треугольных координат точки E.

Рассмотрим теперь случай, когда точка E – несобственная, а остальные фундаментальные точки – собственные (рис.6.2). Направление на точку E задано лучом X_3E.

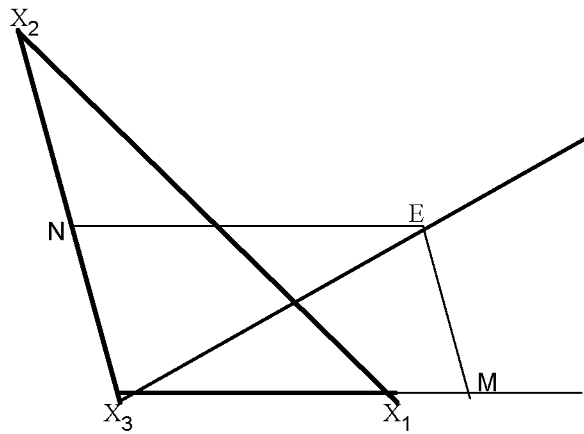

Рис.6.2 Определение координат несобственной прямой

Рассмотрим сначала ситуацию, когда точка E находится на луче X_3E и является собственной. Введем следующие обозначения:

$$a = X_1X_3; \; b = X_2X_3; \; m = \pm MX_3; \; n = \pm NX_3.$$

При этом знак «+» для m будем выбирать тогда, когда точки M и X_1 находятся с одной стороны от точки X_3, а для n, соответственно, тогда, когда точки N и X_2 находятся с одной стороны от точки X_3.

С учетом введенных обозначений, треугольные координаты точки E будут равны

$$\left(\frac{m}{a}; \frac{n}{b}; 1 - \frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right).$$

Тогда в качестве координат несобственной прямой можно выбрать тройку чисел, полученную из предыдущей умножением на величину отношения a/n:

$$\left(\frac{m}{n}; \frac{a}{b}; \frac{a}{n} - \frac{m}{n} - \frac{a}{b}\right).$$

Теперь будем перемещать точку E по лучу X_3E в бесконечность. При этом n будет стремиться к бесконечности, а отношения m/n и a/b не изменяются.В результате координаты несобственной прямой в случае несобственной точки E будут определяться тройкой чисел

$$\left(\frac{m}{n}; \frac{a}{b}; -\frac{m}{n} - \frac{a}{b}\right).$$

6.3. Понятие инцидентности. Принцип двойственности

Назовем точку с координатами (x_1, x_2, x_3) инцидентной прямой с координатами {a_1, a_2, a_3}, если имеет место равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

При этом прямая линия называется инцидентной точке.

Данное определение задает *отношение инцидентности* между прямыми и точками проективной плоскости. В частности, инцидентными некоторой точке будут все прямые, проходящие через эту точку, а инцидентными некоторой прямой являются все точки этой прямой.

Поставим теперь во взаимно однозначное соответствие каждой точке проективной плоскости прямую, чьи проективные координаты совпадают с проективными координатами точки. Тем самым определяется взаимно однозначное отображение множества элементов проективной плоскости (точек и прямых) само на себя, причем это отображение сохраняет инцидентность. Действительно,

данное отображение переводит точку (x_1, x_2, x_3) в прямую {x_1, x_2, x_3},а прямую {a_1, a_2, a_3} в точку (a_1, a_2, a_3), что не изменяет условия инцидентности.

Непосредственным следствием этого является *принцип двойственности для проективной плоскости*.

Пусть верно какое-нибудь предложение, касающееся точек, прямых и отношения инцидентности между ними. Тогда будет верно и двойственное предложение, полученное из исходного заменой слова «прямая» на слово «точка» и наоборот.

Приведем примеры двойственных в указанном смысле предложений (доказательство этих предложений можно найти, например, в работе [4]).

Теорема 1. Для всяких двух различных точек проективной плоскости имеется единственная прямая, им инцидентная.

Теорема 1*. Для всяких двух различных прямых проективной плоскости имеется единственная точка, им инцидентная.

Теорема 2. Пусть (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3) есть координаты трех точек проективной плоскости. Необходимым и достаточным условием того, чтобы эти три точки лежали на одной прямой (были инцидентны одной прямой), является равенство (6.6):

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{Vmatrix} = 0. \qquad (6.6)$$

Теорема 2*. Пусть {x_1, x_2, x_3}, {a_1, a_2, a_3}, {c_1, c_2, c_3} есть координаты трех прямых проективной плоскости. Необходимым и достаточным условием того, чтобы эти три прямые проходили через одну точку (были инцидентны одной точке) является выполнение равенства (6.6).

Принцип двойственности позволяет иногда доказывать весьма сложные теоремы аналитической геометрии через доказательство более простой двойственной теоремы. Например, доказательство теоремы 2 очевидно, поскольку равенство (6.6) представляет собой просто условие компланарности трех векторов с началом в центре связки O и концами в рассматриваемых точках. Доказательство же двойственной теоремы значительно хуже интерпретируется геометрически и поэтому более сложно.

6.4. Кривая второго порядка

Кривой второго порядка на проективной плоскости называется множество точек, чьи проективные координаты удовлетворяют равенству

$$X^T AX=0. \qquad (6.7)$$

В этом равенстве использованы обозначения

$$X=(x_1,x_2,x_3)^T;\; A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}; A=A^T \neq O \qquad (6.8)$$

Напомним, что левая часть равенства (6.7) представляет собой квадратичную форму, заданную на множестве R_3. *Кривая, заданная уравнением (6.7), называется невырожденной, если ранг матрицы А равен трем.*

В пространстве уравнение (6.7) определяет один из следующих объектов:

- эллиптический конус второго порядка с вершиной в точке О (каноническое уравнение: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$);
- точку О (каноническое уравнение: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$);
- пару плоскостей, пересекающихся по линии, проходящей через точку О (каноническое уравнение: $x_1^2 - x_2^2 = 0$);
- прямую, проходящую через точку О (каноническое уравнение: $x_1^2 + x_2^2 = 0$);
- две совпадающих плоскости, проходящих через точку О (каноническое уравнение: $x_1^2 = 0$).

Кривая второго порядка на проективной плоскости представляет собой сечение поверхности, заданной уравнением (6.7) в пространстве, проективной плоскостью. В зависимости от расположения плоскости и вида поверхности это могут быть следующие объекты: эллипс, гипербола, парабола, две различные прямые, две совпадающие прямые, точка, причем прямые и точки могут быть и несобственными.

В дальнейшем нам понадобится умение переходить от уравнения кривой второго порядка в АСК, заданной на плоскости, к уравнению в ОСК, связанной с этой АСК. Это проводится, как и ранее, заменой (6.4) или(6.5).

Пример 6.4 Перейти от уравнения $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ кривой второго порядка на плоскости к уравнению кривой в проективных координатах, и наоборот, от уравнения кривой второго порядка x_1^2-$4x_3^2$=0 в проективных координатах к уравнению кривой на плоскости.

Решение.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;\Leftrightarrow\frac{x_1^2}{4x_3^2}+\frac{x_2^2}{9x_3^2}=1;\Leftrightarrow 9x_1^2+4x_2^2-36x_3^2=0;$$

$$x_1^2-4x_3^2=0;\Leftrightarrow\frac{x_1^2}{x_3^2}-4=0;\Leftrightarrow x^2-4=0;\Leftrightarrow x=\pm 2.$$

Упражнения

Упр.6.1 Найти координаты следующих прямых на проективной плоскости:

а. прямой АВ, A(1.2.-1), B(3,5,-2).

б. прямых AX_1, AX_2, AX_3, AE, если A(3,-1,2).

в. прямых X_1X_2, X_1E, X_2X_3.

Упр.6.2 Заданы точки A(3,1,5), B(-2,0,7) и прямая с координатами {7,-2,4}. Определить координаты точки пересечения заданной прямой и прямой АВ.

Упр.6.3 Заданы две прямые с координатами {3,1,5},{-2,0,7} и точка A(7,-2,4). Определить координаты прямой, проходящей через точку А и точку пересечения заданных прямых. Сравнить результат с ответом в упражнении 6.2.

Упр.6.4 $X_1X_2X_3E$ – параллелограмм. Найти координаты несобственной прямой.

Упр.6.5 $X_1X_2EX_3$ – параллелограмм. Найти координаты несобственной прямой.

Упр.6.6 Точка E – точка пересечения медиан треугольника $X_1X_2X_3$. Найти координаты несобственной прямой.

Упр.6.7 Точка X_3 – точка пересечения медиан треугольника X_1X_2E. Определить координаты несобственной прямой.

Упр.6.8 Точки X_2, X_3 – несобственные. Определить координаты несобственной прямой.

Упр.6.9 Задан параллелограмм X_1X_2AB. Точка E – точка пересечения диагоналей параллелограмма, направление на несобственную точку X_3 определяется лучом X_1B. Найти координаты несобственной прямой.

Упр.6.10 Задан параллелограмм $X_1X_2AX_3$. Направление на несобственную точку E задается диагональю X_1A. Найти координаты несобственной прямой.

Упр.6.11 Задан треугольник $X_1X_2X_3$ и координаты несобственной прямой {2,1,-1}. Определить координаты прямой, проходящей через точку X_3 параллельно прямой X_1X_2.

Упр.6.12 Определить координаты точки пересечения прямой $x_3 = 0$ и прямой, проходящей через общую точку прямых $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и точку A с координатами (2,1,-1). Сравнить результат с упражнением 6.11.

Упр.6.13 Найти однородные координаты точки пересечения прямых, заданных следующими уравнениями на плоскости:

$$2x + 3y - 5 = 0;\ 3x - 4y + 1 = 0.$$

Упр.6.14 От уравнений кривых второго порядка, заданных в декартовой системе координат на плоскости, перейти к уравнениям в однородных координатах:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;\quad x^2=2y;\quad x^2-6xy+2y^2+10x-8y+4=0.$$

Упр.6.15 От уравнений кривых второго порядка в однородных координатах перейти к уравнениям в декартовой системе координат на плоскости:

$$x_1^2-4x_2^2+5x_3^2=0;\quad x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3+x_2^2=0.$$

7. Проективные преобразования

7.1. *Проективное преобразование и его свойства*

Пусть на проективной плоскости П задана некоторая исходная ПСК. Задать на П *проективное преобразование* означает следующее:

- *выбрать новую систему проективных координат;*
- *потребовать, чтобы каждой точке M с координатами (x_1, x_2, x_3) в старой системе соответствовала точка – образ M^* с теми же координатами в новой системе.*

Из определения сразу следует, что обратное преобразование также является проективным. Кроме того, поскольку проективные координаты любой точки плоскости представляют собой координаты этой точки в некоторой пространственной аффинной системе координат с началом в центре связки O, то имеют место три важных *следствия*:

- *всякое проективное преобразование проективной плоскости порождается некоторым аффинным преобразованием пространства, оставляющим неподвижным центр связки O;*
- *всякое аффинное преобразование пространства, оставляющее неподвижной точку O, порождает некоторое проективное преобразование проективной плоскости;*
- *два аффинных преобразования пространства порождают одно и то же проективное преобразование тогда и только тогда, когда одно из них получается из другого последующим равномерным растяжением (сжатием) пространства с центром в точке O.*

Связь проективного преобразования с аффинным позволяет дать еще одно, более удобное в практических приложениях, определение проективного преобразования.

Проективное преобразование плоскости означает преобразование, при котором каждой точке M с матрицей–столбцом координат $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ в некоторой ПСК ставится в соответствие точка-образ M^* с координатами $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ в той же самой системе, определяемыми по формуле

$$\lambda X^{*}=SX;\ \ (\lambda\neq 0, \det S\neq 0). \qquad (7.1)$$

Здесь det – символ определителя, S – матрица согласованных координат новых фундаментальных точек (см. пункт 5.3). Матрица S также представляет собой матрицу перехода от базиса АСК, связанной с ПСК, к базису некоторой новой АСК, определяемой новым положением фундаментальных точек.

Согласно второму определению, ПСК на плоскости не меняется, меняется лишь адрес точек плоскости. Из определения вытекают два полезных *свойства проективного преобразования.*

- *Линия второго порядка преобразуется в линию второго порядка, прямая линия преобразуется в прямую. При этом собственная прямая может стать несобственной, и наоборот.*
- *Если точка принадлежит прообразу линии, то образ точки принадлежит образу линии. Отсюда следует, что если линии «пересекаются» в некоторой точке, то образы линий «пересекаются» в образе этой точки. При этом собственная точка может стать несобственной.*

Покажем, что с помощью матрицы S можно также определить координаты образа прямой линии и коэффициенты уравнения образа кривой второго порядка.

Пусть прямая с координатами $\{b_1,b_2,b_3\}$ переходит в прямую-образ с координатами $\{b_1^*,b_2^*,b_3^*\}$. Введем в рассмотрение матрицы- столбцы координат прямых

$$B=(b_1,b_2,b_3)^T;\ \ B^*=(b_1^*,b_2^*,b_3^*)$$

и запишем уравнения прямой и ее образа в матричной форме:

$$X^TB=0;\ \ X^{*T}B^*=0. \qquad (7.2)$$

Подставляя во второе уравнение соотношение (7.1), получим выражение

$$\lambda X^TS^TB^*=0.$$

Сравнивая его с уравнением прообраза из (7.2), легко прийти к двум формулам:

$$\lambda B=S^TB^*;\ \ \lambda B^*=\left(S^T\right)^{-1}B. \qquad (7.3)$$

Здесь параметр λ подчеркивает тот факт, что два уравнения с пропорциональными коэффициентами эквивалентны.

Совершенно аналогично из уравнений прообраза и образа кривой второго порядка

$$X^TAX=0;\ \ X^{*T}A^*X^*=0$$

можно получить соотношения для матриц коэффициентов:

$$\lambda A=S^TA^*S;\ \ \lambda A^*=\left(S^T\right)^{-1}AS^{-1}. \qquad (7.4)$$

Проективное преобразование, при котором каждая собственная точка имеет образом собственную точку, а каждая несобственная - несобственную, называется проективно-аффинным преобразованием (ПАП). Можно показать, что ПАП порождается некоторым аффинным преобразованием самой плоскости, и наоборот, каждое аффинное преобразование плоскости порождает некоторое ПАП.

То, что собственная точка при проективном преобразовании может стать несобственной, определяет существенное отличие проективного преобразования от аффинного. Покажем это на примере.

Пример 7.1 На плоскости введена система декартовых координат Oxy. Проективное преобразование задано в соответствующей системе однородных координат матрицей

$$S=\lambda\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Определить образы прямых линий $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$, образ кривой $x^2 + y^2 = 1$, прообраз кривой $y = x^2$.

Решение. Перейдем сначала к уравнениям заданных линий в однородных координатах. Эти уравнения будут иметь, соответственно, вид: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_2–x_3=0$; $x_1^2+x_2^2–x_3^2=0$; $x_1{*}^2-x_2{*}x_3{*}=0$.

Данная в условии матрица S определяет следующую связь между старыми и новыми координатами точек (параметр λ принят равным единице): $x_1{*}= - x_3$; $x_2{*}=x_2$; $x_3{*}=x_1$.

Подставляя эти соотношения в соответствующие уравнения, будем иметь для исследуемых кривых следующие уравнения: $x_3{*}=0$ (несобственная прямая); $x_2{*}=0$; $x_2{*}+x_1{*}=0$; $x_3{*}^2 + x_2{*}^2 - x_1{*}^2 = 0$; $x_3^2 - x_1x_2 = 0$.

Перейдя в полученных уравнениях от однородных координат к декартовым, для первой прямой образа не получим, а для остальных придем к следующим уравнениям: $y=0$; $x+y=0$; $x^2-y^2=0$; $xy=1$.

Таким образом, при данном проективном преобразовании единичная окружность превращается в гиперболу, прообразом параболы является гипербола, ось Оy становится несобственной прямой, а две параллельные прямые становятся пересекающимися.

Имеет место следующее, очень важное утверждение, доказательство которого можно найти, например, в работе [5].

Существует одно и только одно проективное преобразование, переводящее четыре точки A,B,C,D, из которых любые три не принадлежат одной прямой, в точки A^*,B^*,C^*,D^*, обладающие тем же свойством.

Если известны матрицы координат этих точек X_A, X_B, X_C, X_D и матрицы координат их образов X_A^*, X_B^*, X_C^*, X_D^*, то для получения матрицы S проективного преобразования следует провести следующие операции:

- согласовать координаты точек-прообразов, для чего разложить столбец X_D по столбцам X_A, X_B, X_C:

$$X_D=\alpha X_A+\beta X_B+\gamma X_C\,;$$

- согласовать координаты точек–образов, для чего найти три числа a, b, c, удовлетворяющие уравнению

$$X^*_D=aX^*_A+bX^*_B+cX^*_C\,;$$

- решить матричное уравнение

$$\lambda X^*=SX.$$

В последнем уравнении приняты следующие обозначения:

$$X=\left(\alpha X_A,\beta X_B,\gamma X_C\right);\ \lambda X^*=\left(aX^*_A,\,bX^*_B,\,cX^*_C\right).$$

Легко видеть, что матрица преобразования будет определяться соотношением

$$S=\lambda X^*X^{-1}. \tag{7.5}$$

Здесь, как и ранее, параметр λ можно задавать произвольно.

В том случае, когда проективное преобразование определено не через преобразование четырех точек, поиск матрицы S значительно более прост. Покажем это на примере.

Пример 7.2. Найти какое-нибудь преобразование, переводящее точки A(1,0,0), B(0,1,0) в точки $A^*(1,1,0)$, $B^*(1,0,1)$ соответственно.

Решение. Выберем произвольно точку C(0,0,1), не лежащую на AB, точку $C^*(0,0,1)$, не принадлежащую A^*B^* (в данном случае точка C выбрана совпадающей со своим образом), и найдем преобразование, переводящее A в A^*, B в B^*, C в C^*.

Координаты этих точек можно считать согласованными, так как четвертая точка не задана. Тогда для определения матрицы S нужно решить матричное уравнение

$$\lambda\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

В результате получим, что искомое преобразование может быть задано матрицей

$$S=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Координаты «недостающих» точек можно задавать абсолютно произвольно. Необходимо лишь следить за тем, чтобы матрицы X и X^* были невырожденными. Понятно, что преобразование в этом случае не будет единственным.

Пример 7.3 Найти какое-нибудь преобразование, переводящее прямые $x=0$, $y=0$ в прямые $x+y=0$, $x+y=2$ соответственно.

<u>*Решение*</u>. Сначала найдем однородные координаты точек пересечения прямых. Для прообразов это будет точка O(0,0,1), а для образов - точка $O^*(1,-1,0)$. Теперь выберем произвольно по собственной точке на каждой прямой и на ее образе, после чего, как в предыдущем примере, найдем преобразование, переводящее точки O(0,0,1), A(0,1,1), B(1,0,1) в точки $O^*(1,-1,0)$, $A^*(1,-1,1)$, $B^*(1,1,1)$ соответственно. Проведя необходимые вычисления, получим для матрицы S выражение

$$S=\lambda\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Можно решить задачу и по-другому. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}x_1^*+x_2^*=\alpha x_1\ ,\\ x_1^*+x_2^*-2x_3^*=\beta x_2\ .\end{cases}$$

Выбирая для коэффициентов α, β произвольные значения, будем получать различные матрицы S. Например, выбрав α=β=1, придем к системе уравнений

$$\begin{cases}x_3^*=\frac{1}{2}\left(x_1-x_2\right)\ ,\\ x_1^*+x_2^*=x_1\ ,\end{cases}$$

которая позволяет получить бесконечно большое количество различных решений с невырожденной матрицей S. Эти решения можно найти обычным подбором. Например, допустимо принять

$$\begin{cases}x_1^*=2x_1+x_3\ ,\\ x_2^*=-x_1-x_3\ ,\\ x_3^*=\frac{1}{2}\left(x_1-x_2\right),\end{cases}\Leftrightarrow S=\lambda\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

Матрица, полученная первым способом, отличается от матрицы, вычисленной во второй раз. Однако можно убедиться, что обе матрицы удовлетворяют условиям задачи.

Задачу можно решить и третьим способом: используя принцип двойственности и соотношения (7.3). Действительно, требуется найти преобразование, переводящее прямые с координатами {1,1,0}, {0,1,0} в прямые с координатами {1,1,0}, {1,1,-2}. Для решения задачи можно действовать как в примере 7.2, считая координаты прямых координатами точек, а получившуюся в результате матрицу транспонировать и обратить. Читателю предлагается сделать это в качестве упражнения.

Пример 7.4. Найти какое-нибудь преобразование, переводящее единичную окружность в параболу $y=x^2$.

<u>*Решение*</u>. Перейдя к однородным координатам, получим равенство

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=\lambda\left(x_1^{*2}-x_2^*x_3^*\right).$$

Из него при λ=1 получается соотношение

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=x_1^{*2}-x_2^*x_3^*\ .$$

Для удовлетворения последнего легко подобрать следующую зависимость между новыми и старыми координатами:

$$\begin{cases} x_1^* = x_1 \,, \\ x_2^* = x_2 + x_3 \,, \\ x_3^* = -x_2 + x_3 \,, \end{cases} \Rightarrow S = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Опять совершенно очевидно, что найденное преобразование не является единственным.

7.2. Инвариантные точки и инвариантные прямые

Не все точки плоскости при проективном преобразовании изменяют свое местоположение. *Назовем инвариантными (неподвижными) точками (прямыми) проективного преобразования точки (прямые), чьи проективные координаты не меняются при этом преобразовании.*

По определению, координаты неподвижных точек должны удовлетворять равенству

$$\lambda X = SX. \tag{7.6}$$

Из соотношения (7.6) следует, что поиск инвариантных точек эквивалентен поиску собственных векторов матрицы S. Последняя задача хорошо известна из курса линейной алгебры.

Каждое проективное преобразование имеет хотя бы одну неподвижную точку. Это следует из того, что характеристический многочлен матрицы S, как всякий многочлен третьего порядка, имеет хотя бы один вещественный корень.

Матрица S, для которой известны собственные числа и векторы, легко определяется, как решение следующего матричного уравнения (известного из курса линейной алгебры):

$$(X_1, X_2, X_3)^{-1} S (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Пример 7.5. Найти все преобразования проективной прямой, оставляющие неподвижными точки A(1,-1) и B(1,2).

Решение. Запишем уравнение (7.7) для координат заданных точек:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} S \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}; \ \alpha\beta \neq 0.$$

Из него легко определяется матрица преобразований

$$S = \lambda \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \beta - \alpha \\ 2\beta - 2\alpha & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

Теперь займемся задачей поиска инвариантной прямой проективного преобразования. По определению, ее координаты должны удовлетворять уравнению, являющемуся следствием соотношения (7.3):

$$\lambda B = S^T B. \tag{7.8}$$

Опять задача сводится к поиску собственных векторов, но теперь уже транспонированной матрицы преобразований. Напомним, что собственные числа квадратных матриц, связанных операцией транспонирования, совпадают.

Прямая, проходящая через две неподвижных точки, является инвариантной прямой. Точка пересечения инвариантных прямых неподвижна. Не все точки инвариантной прямой должны быть инвариантными.

Если все собственные числа матрицы преобразования координат вещественны и различны, то существуют три инвариантные прямые и три неподвижные точки. В случае единственного вещественного собственного значения, имеется единственная неподвижная точка и единственная инвариантная прямая. В случае, когда имеют место кратные собственные числа, количество неподвижных точек и инвариантных прямых зависит от количества линейно независимых собственных векторов. Например, тогда, когда все корни действительны и совпадают, а количество линейно независимых собственных векторов равно трем, инвариантными являются любая точка и любая прямая проективной плоскости.

7.3. Проективное и перспективное отображения

Пусть на проективной плоскости П задана проективная система координат $X_1X_2X_3E$, а на проективной плоскости Р проективная система координат $X_1^*X_2^*X_3^*E^*$. *Проективным отображением* плоскости П на плоскость Р называется отображение, при котором каждой точке М плоскости П с некоторыми координатами в ПСК $X_1X_2X_3E$ соответствует точка-образ М* плоскости Р с теми же координатами в системе координат $X_1^*X_2^*X_3^*E^*$.

Очевидно, что проективное преобразование представляет собой частный случай проективного отображения, при котором плоскость Р совпадает с плоскостью П. Еще одним частным случаем проективного отображения является *перспективное отображение* плоскости П на Р.

Выберем в пространстве точку О, не принадлежащую ни одной из проективных плоскостей Пи Р (рис.7.1).

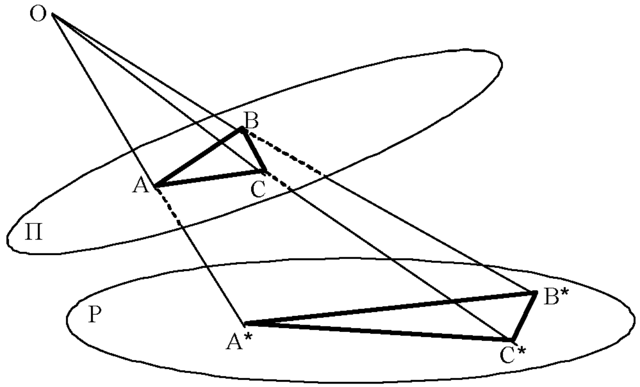

Рис.7.1 Перспективное отображение

Поставим каждой точке М плоскости П во взаимно однозначное соответствие точку М плоскости Р, являющуюся точкой пересечения луча ОМ с плоскостью Р. При этом как точка М, так и точка М* могут быть несобственными.*

Описанное соответствие задает отображение плоскости П на плоскость Р, которое мы будем называть перспективным.

Легко понять, что перспективное отображение является проективным отображением, при котором точки X_1^*, X_2^*, X_3^*, E^* представляют собой образы точек X_1, X_2, X_3, E.

Имеет место следующая *основная теорема о проективном преобразовании.*

Всякое проективное преобразование плоскости П либо сводится к проективно-аффинному преобразованию, либо может быть осуществлено посредством собственного или несобственного движения плоскости П в пространстве в новое положение Р и последующего перспективного отображения П на Р.

Эта теорема позволяет уяснить геометрический смысл того факта, что при проективном преобразовании кривые одного аффинного класса могут превращаться в кривые других аффинных классов.

7.4. Классификация кривых второго порядка

Две кривые называются аффинно-эквивалентными (проективно-эквивалентными), если существует такое аффинное (проективное) преобразование плоскости, при котором одна из них переходит в другую, и неэквивалентными, если такого преобразования не существует. При этом также говорят, что кривые принадлежат к одному аффинному (проективному) классу или к разным классам, соответственно.

Существует *девять аффинных классов кривых второго порядка*:

1. *класс действительных эллипсов ($x^2+y^2=1$).*
2. *класс мнимых эллипсов ($x^2+y^2= -1$).*
3. *класс гипербол ($x^2-y^2=1$).*
4. *класс пар действительных пересекающихся прямых ($x^2-y^2=0$).*
5. *класс пар мнимых пересекающихся прямых (точек) ($x^2+y^2=0$).*
6. *класс парабол ($x^2=y$).*
7. *класс пар параллельных действительных прямых ($x^2-1=0$).*
8. *класс пар параллельных мнимых прямых ($x^2+1=0$).*
9. *класс пар действительных совпадающих прямых ($x^2=0$).*

При этом у кривых второго и восьмого классов на вещественной плоскости нет ни одной точки.

Перечислим теперь *проективные классы кривых второго порядка*, причем для каждого класса укажем, кривые каких аффинных классов в нем объединяются.

Существует всего *пять проективных классов.*

1. *Класс мнимых овалов* ($x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$). К этому классу относятся кривые второго аффинного класса.
2. *Класс действительных овалов* ($x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$). В этом классе объединяются кривые первого, третьего и шестого аффинных классов (невырожденные кривые).
3. *Класс пар мнимых прямых* ($x_1^2+x_2^2=0$). К данному проективному классу относятся кривые пятого и восьмого аффинных классов.
4. *Класс пар действительных прямых* ($x_1^2-x_2^2=0$). Этот проективный класс объединяет кривые четвертого и седьмого аффинных классов.
5. *Класс пар действительных совпадающих прямых* ($x_1^2=0$). К этому классу относятся кривые девятого аффинного класса.

Выясним теперь, почему в том или ином проективном классе объединяются кривые определенных аффинных классов.

Класс действительных овалов. В пространстве уравнение данного класса описывает эллиптический конус, а сами кривые представляют сечение конической поверхности плоскостью, не проходящей через вершину конуса (рис.7.2). В зависимости от положения секущей плоскости, в сечении может получиться эллипс, гипербола или парабола. Поэтому становится ясно, что кривые первого, третьего и шестого аффинных классов (невырожденные кривые) при перспективном отображении могут превращаться одна в другую, следовательно, объединяются в данном проективном классе.

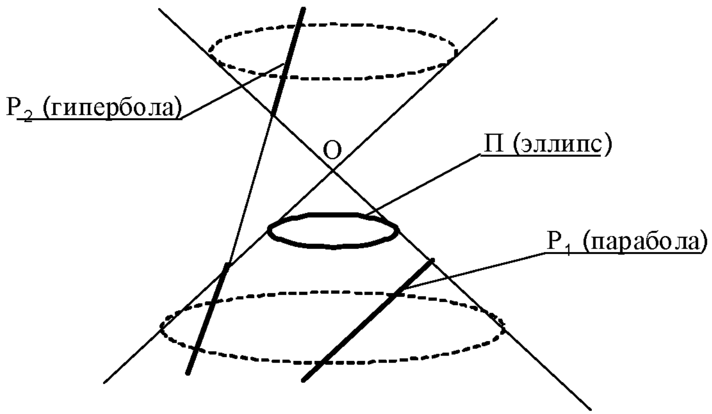

Рис.7.2 Кривые второго проективного класса

Класс пар мнимых прямых. В пространстве уравнению данного класса соответствует луч связки, который может быть

особым. Поэтому становится понятным, что к данному проективному классу относятся кривые пятого и восьмого аффинных классов (рис.7.3).

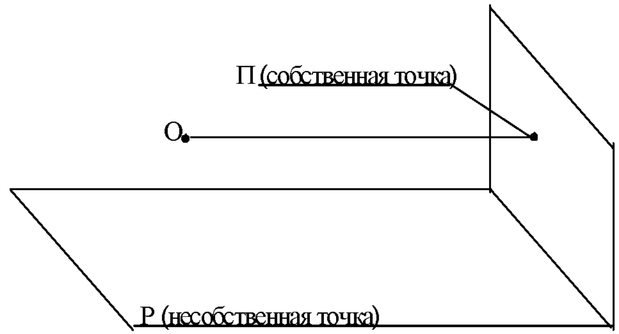

Рис.7.3 Кривые третьего проективного класса

Класс пар действительных прямых. В пространстве уравнение этого класса определяет две плоскости, пересекающиеся по лучу связки, поэтому сечение проективной плоскостью представляет собой две пересекающиеся (неособый луч) или две параллельные (особый луч) прямые. Ясно, что данный проективный класс объединяет кривые четвертого и седьмого аффинных классов (рис.7.4).

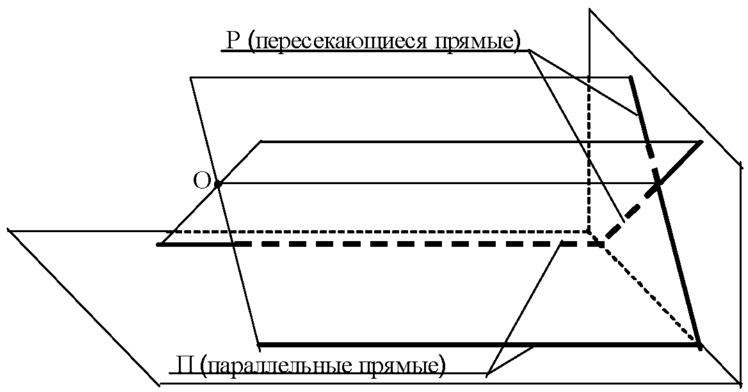

Рис.7.4 Кривые четвертого проективного класса

Определить проективный класс кривой, заданной общим уравнением, очень просто. Для этого достаточно перейти к проективным координатам, любым способом привести квадратичную форму, определяемую уравнением кривой, к каноническому виду и сравнить полученное уравнение с уравнением, определяющим проективный класс.

Пример 7.6 Определить проективный класс кривой, заданной общим уравнением на плоскости: $4x^2+4xy+y^2-24x-12y+5=0$.

<u>Решение</u>. Сначала перейдем к уравнению кривой в однородных координатах:

$$4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-24x_1x_3-12x_2x_3+5x_3^2=0.$$

Теперь для приведения квадратичной формы к каноническому виду воспользуемся методом выделения полных квадратов:

$$(4x_1^2+4x_1x_2-24x_1x_3+x_2^2+36x_3^2-12x_2x_3)-36x_3^2+5x_3^2=0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x_1+x_2-6x_3)^2-31x_3^2=0.$$

Обозначая $x_1^*=2x_1+x_2-x_3$; $x_2^*=x_3\sqrt{31}$; $x_3^*=x_2$, придем к уравнению

$$x_1^{*2}-x_2^{*2}=0,$$

из которого следует, что заданная кривая относится к четвертому проективному классу.

В заключение заметим, что если уравнение кривой на плоскости легко приводится к каноническому виду, то для определения ее проективного класса достаточно знать, к какому классу относится кривая данного аффинного класса.

Упражнения

Упр.7.1 Найти образы и прообразы фундаментальных точек при проективном преобразовании $\lambda x_1^*=x_1+x_2+x_3$; $\lambda x_2^*=x_1-4x_2$; $\lambda x_3^*=x_1+x_3$. В какую кривую превращается единичная окружность?

Упр.7.2 Напишите формулы проективного преобразования плоскости, при котором точки X_1, X_2, X_3 переходят, соответственно, в точки X_2, X_3, X_1, а точка E остается неподвижной.

Упр.7.3 Найти преобразование проективной прямой, при котором точки A(1,2), B(2,1), C(1,1) переходят в точки $A^*(1,0)$, $B^*(0,2)$, $C^*(1,-2)$.

Упр.7.4 На плоскости задана система декартовых координат. Найти проективное преобразование, при котором точка O(0,0) остается неподвижной, а прямые $x+y+2=0$; $x-y-4=0$; $x-4y-3=0$ переходят, соответственно, в прямые $x+3y+2=0$; $x-3y+4=0$; $x+2y-3=0$.

Упр.7.5 Найти какое-нибудь проективное преобразование, при котором точка O(0,0) остается неподвижной, а прямая $x-y-1=0$ переходит в прямую $x+y-1=0$.

Упр.7.6 Определить инвариантные прямые и неподвижные точки проективного преобразования $\lambda x_1^*=2x_1+x_2-x_3$; $\lambda x_2^*=3x_2+x_3$; $\lambda x_3^*=x_3$.

Упр.7.7 Найти какое-нибудь, отличное от тождественного, проективное преобразование проективной плоскости, при котором точки A(0,1,0), B(1,2,1), C(1,-1,1) остаются неподвижными.

Упр.7.8 Найти все преобразования проективной плоскости, при которых все точки прямой $x=0$ остаются неподвижными.

Упр.7.9 Найти все проективные преобразования проективной плоскости, при которых прямая $x=0$ является инвариантной.

Упр.7.10 Определить проективный класс следующих кривых второго порядка, заданных уравнениями на плоскости:

а. $2x^2+4y^2+3xy+5x+2y-1=0$.

б. $x^2+4y^2-4xy+2x-4y+1=0$.

в. $4x^2+y^2-4xy-12x+6y+34=0$.

Упр.7.11 Найти какое-нибудь проективное преобразование, переводящее кривую $x^2+y^2=1$ в кривую $x^2-y^2=1$.

Упр.7.12 Найти какое-нибудь проективное преобразование плоскости, переводящее кривую $6x_1^2-x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2+5x_1x_3+x_2x_3=0$ в кривую с уравнением $x_1^2-2x_2^2+x_3^2-x_1x_2+2x_2x_3=0$.

Указание. Привести каждую кривую к каноническому виду и воспользоваться обратным преобразованием.

Заключение

Модуль ни в коей мере не претендует на то, чтобы заменить фундаментальные труды по аналитической и проективной геометрии.

Автор сочтет свою задачу выполненной, если читатель получит ясное представление об основах проективной геометрии и научится решать задачи, аналогичные рассмотренным в пособии.

Автор также надеется, что пособие вызовет у читателя интерес к проективной геометрии, послужит базой для ее дальнейшего изучения и окажет помощь в решении практических задач.

III ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Дифференциальная геометрия и тензорный анализ являются естественным математическим языком для описания и исследования различных задач физики, аналитической механики, механики жидкости и газа, механики деформируемых сред. Такая широта охвата обусловлена универсальностью понятий тензора и многообразия. На многообразии достаточно просто строится дифференциальное и интегральное исчисление тензорных полей. Это позволяет создавать математические модели различных физических процессов и проводить эффективный аналитический и числовой анализ моделей.

В пособии излагаются основы дифференциальной геометрии и тензорного анализа. Теоретическую часть пособия поддерживают задачи. Их цель – закрепление теоретических положений и применение для постановки и решения прикладных задач. Необходимым условием успешного усвоения дифференциальной геометрии и основ тензорного анализа является самостоятельная работа студентов.

Особенностью пособия является отсутствие рисунков и нумерации приводимых формул. Отсутствие нумерации связано с желанием «иметь всё перед глазами» и избавить читателя от необходимости перелистывать страницы в поисках нужного.

Дополнение содержания графиками, диаграммами и рисунками рассматривается как «неявно заданный» сборник задач, яркие примеры решений которых приведены в книгах А.Т. Фоменко «Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире» и А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко «Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии».

8. Геометрия кривых

8.1. *Определения*

Линия на плоскости обычно понимается как подмножество точек плоскости, выделяемое с помощью какого-либо условия. Аналитическое задание линии можно выполнить, если ее рассматривать как график функции $f: I \to R$, где I – некоторый интервал R. Однако для задания, например, всей окружности нужно уже использовать соотношение $F(x,y)=0$. Вместе с тем согласно теореме Уитни для *любого* замкнутого подмножества C аффинного пространства (в частности, плоскости) существует бесконечно дифференцируемая функция $F(x,y)$, такая, что $(x,y)\in C \Leftrightarrow F(x,y)=0$ и множество C может оказаться совершенно непохожим на линию. В этом случае обычно вводятся дополнительные условия на функцию $F(x,y)$, которые обеспечивают существование линии как графика неявно заданной функции.

8.2. *Параметризованная кривая*

Пусть A – аффинное пространство, V – ассоциированное линейное пространство, I – некоторый интервал R. Непрерывное отображение $\gamma: I \to A: t \to \gamma(t)$ называется *параметризованной кривой* (t – кривой), множество $\gamma(I)$ – носителем t – кривой γ. Носитель t – кривой может выглядеть достаточно сложно (кривая Пеано проходит через все точки квадрата). В аналитической механике t – кривой соответствует траектория (носитель) движения точки по заданному закону. Параметризованная кривая называется *простой*, если отображение $\gamma: I \to A$ инъективно и взаимно непрерывно. Носитель простой t – кривой называется простой кривой. Пусть $\dim A = n$, тогда параметризованная кривая $\gamma: I \to A$ может быть задана соотношениями $x^i = \gamma^i(t),\ i=\overline{1,n}$. Кривая $\gamma: I \to A$ называется *гладкой* t – кривой класса C^r, если координатные функции $x^i = \gamma^i(t),\ i=\overline{1,n}$ класса C^r. Выберем в

A какую-либо точку o и примем её за начало отсчета. Тогда для $\forall a \in A, \exists!\, r=\overrightarrow{oa}\in V$ и $r(t)=e_i x^i(t)$, где $\{e_i\}$ – базис линейного пространства V и по повторяющемуся индексу i ведется суммирование от 1 до n (правило Эйнштейна). Кривая $\gamma: I \to A$ называется *регулярной* в точке $t_o \in I$, если $r'(t_o)\neq o$, и регулярной на I, если она регулярна во всех точках I.

Пусть $\alpha: I \to A: t \to \alpha(t)$ и $\beta: J \to A: \tau \to \beta(\tau)$. Параметризованные кривые α, β называются *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $h: I \to J: t \to \tau = h(t)$, такой, что $\alpha = \beta \circ h$. Диффеоморфизм h принято называть *заменой параметра*.

Эквивалентные параметризованные кривые α, β называются *положительно эквивалентными*, если $h'(t)>0$.

Теорема 1.1. Простые и регулярные t – кривые α, β имеют один и тот же носитель тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

8.3. *Натуральная параметризация*

Пусть $\gamma: I \to A$ – параметризованная кривая, V – ассоциированное евклидово пространство, $\dim V = 3$. Параметр s называется *натуральным*, если $\forall s \in I \quad \|r'(s)\|=1$. Кривая $\gamma: I \to A$ называется параметризованной *s – кривой*, если s – натуральный параметр.

Теорема. Каждой регулярной t – кривой можно поставить в соответствие эквивалентную s – кривую.

$\triangleright$ Пусть $\rho: I \to V: \rho(t)=e_i y^i(t)$ регулярная t – кривая. Тогда $\forall t \in I \ \|\rho'(t)\|>0$. Определим отображение $h: I \to R: t \to s = h(t)$ формулой

$$h(t)=\int_{t_o}^{t}\|\rho'(\tau)\|d\tau,\ t, t_o \in I.$$

Так как $h'(t)=\left\|\rho'(t)\right\|>0$, то $h: I \to J = h(I)$ – диффеоморфизм и $\exists h^{-1}: J \to I$.

Определим t – кривую $r=\rho\circ h^{-1}$, r эквивалентна ρ, поскольку h^{-1} – диффеоморфизм.

Далее

$$r'(s)=(\rho\circ h^{-1})'(s)=\rho'(h^{-1}(s))(h^{-1}(s))'=\rho'(t)\frac{1}{h'(t)}=\frac{\rho'(t)}{\left\|\rho'(t)\right\|}$$

.

Следовательно, $\forall s\in J \; \left\|r'(s)\right\|=1$ и s – натуральный параметр. ◁

Натуральная параметризация единственна с точностью до выбора начальной точки и направления отсчета длины.

8.4. Кривая

Подмножество $\Gamma \subset \grave{A}$ называется *кривой*, если $\forall a \in \Gamma$ существуют окрестность W точки a, $W \subset \Gamma, a \in W$ и регулярная t – кривая $\gamma: I \to A$, такие, что $\gamma: I \to W = \gamma(I)$ взаимно однозначное и непрерывное отображение вместе с γ^{-1}.

Регулярная t – кривая $\gamma: I \to A$ называется *локальной параметризацией* кривой Γ в окрестности точки a. Кривая Γ называется *простой*, если существует глобальная параметризация кривой Γ.

Семейство параметризаций $\{\gamma_p : I_p \to A\}$, (p – индекс) называется *ориентацией* кривой Γ, если:

A1. Объединение носителей параметризаций покрывает кривую Γ,

A2. На каждом пересечении пары носителей соответствующие параметризации положительно эквивалентны.

Кривая Γ называется *ориентированной,* если на ней задана ориентация. Пусть кривая Γ ориентирована. Локальная параметризация $\gamma: I \to W \subset \tilde{A}$ называется *согласованной* с ориентацией Γ, если на пересечениях $\gamma(I)\cap\gamma_p(I_p)$ параметризации положительно эквивалентны.

8.5. Кривизна

Пусть $W \subset \Gamma$ дуга кривой Γ, $r(t)=e_i x^i(t)$ – её локальная параметризация, $t \in I = (\alpha,\beta)$. Длина $l(W)$ дуги W вычисляется по формуле

$$l(W)=\int_{\alpha}^{\beta}\left\|r'(t)\right\|dt .$$

Теорема. Длина дуги кривой не зависит от выбора локальной параметризации.

▷ Пусть $\rho_1(t): I_1 \to W$, $\rho_2(\tau): I_2 \to W$ – две локальные параметризации W. По теореме 1 параметризации $\rho_1(t)$, $\rho_2(\tau)$ эквивалентны и существует диффеоморфизм $h: I_1 \to I_2 : t \to \tau = h(t)$, такой, что $\rho_1 = \rho_2 \circ h$. Тогда

$$\left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left\|\rho_1'(t)\right\|dt\right|=\left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left\|(\rho_2\circ h)'(t)\right\|dt\right|=\left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left\|\rho_2'(h(t))h'(t)\right\|dt\right|=\left|\pm\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left\|\rho_2'(h(t))\right\|h'(t)dt\right|=\left|\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\left\|\rho_2'(\tau)\right\|d\tau\right|$$

◁

Пусть $\gamma: I \to A$, – s – кривая, $r(s)=e_i x^i(s)$ – её векторное задание. Скаляр $\kappa=\left\|r''(s)\right\|$ называется *кривизной* в точке s. Заметим, что векторы $r'(s)$ и $r''(s)$ ортогональны. Действительно, так как s – натуральный параметр, то $\forall s\in J \; \left\|r'(s)\right\|=1$. Дифференцируя $r'(s)\cdot r'(s)=1$, получим $2r'(s)\cdot r''(s)=0$, следовательно, $r'(s)\perp r''(s)$.

Если $\rho: I \to V : \rho(t)=e_i y^i(t)$ – регулярная t – кривая, то кривизна вычисляется по формуле

$$k(t)=\frac{\left\|\dfrac{d\rho}{dt}\times\dfrac{d^2\rho}{dt^2}\right\|}{\left\|\dfrac{d\rho}{dt}\right\|^3}.$$

▷ Для её доказательства необходимо:

1. Вычислить производную $\dfrac{d^2\rho}{dt^2}$, где $\rho(t)=r(s(t))$, ρ и r – эквивалентные кривые (теорема 1.2).
2. Найти скалярное произведение $\dfrac{d^2\rho}{dt^2}\cdot\dfrac{d^2\rho}{dt^2}$, учитывая $r'(s)\perp r''(s)$, $\kappa^2=\|r''(s)\|^2$ и $\|r'(s)\|^2=1$.
3. Выразить из полученного соотношения κ^2 и, используя тождество Лагранжа для векторов *a, b, c, d*, получить требуемую формулу. ◁

Задача. Пусть $\rho:I\to V:\rho(t)=e_iy^i(t)$ регулярная t – кривая. Доказать, если кривизна во всех точках кривой равна нулю, то носитель кривой лежит на прямой.

▷ Перейти к эквивалентной *s* – кривой. ◁

8.6. Репер Френе

Пусть $\gamma:J\to A$, $r(s)=e_ix^i(s)$- *s* – кривая, а $\rho:I\to V:\rho(t)=e_iy^i(t)$ эквивалентная t – кривая.

Ортонормированная тройка векторов

$$\tau(s)=r'(s),n(s)=\frac{r''(s)}{\|r''(s)\|},b(s)=r'(s)\times\frac{r''(s)}{\|r''(s)\|}$$

называется *репером Френе*. Составляющие векторы $\tau(s),n(s),b(s)$ называются касательным вектором, вектором главной нормали и вектором бинормали соответственно. Для t – параметризации

$$\tau(t)=\frac{\rho'(t)}{\|\rho'(t)\|},\ n(t)=\frac{\|\rho'(t)\|}{\|\rho'(t)\times\rho''(t)\|}\rho''(t)-\frac{\rho'(t)\cdot\rho''(t)}{\|\rho'(t)\|\|\rho'(t)\times\rho''(t)\|}\rho'(t),\ b(t)=\tau(t)\times n(t).$$

Задача. Доказать формулы

$$\tau(t)=\frac{\rho'(t)}{\|\rho'(t)\|},n(t)=-\frac{\rho'(t)\times(\rho'(t)\times\rho''(t))}{\|\rho'(t)\|\|\rho'(t)\times\rho''(t)\|},b(t)=\frac{\rho'(t)\times\rho''(t)}{\|\rho'(t)\times\rho''(t)\|}.$$

▷ Для любых векторов *a*, *b*, *c*,: $(a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$, ◁

Пусть Г – ориентированная кривая, *x* ∈ Г, $\rho:I\to V$ – локальная параметризация кривой Г в окрестности точки *x*. Репером Френе кривой Г в точке *x* называется репер Френе t – параметризации $\rho:I\to V$. Инвариантность репера Френе (независимость от выбора параметризации) следует из положительной эквивалентности параметризаций в окрестности точки *x*.

8.7. Формулы Френе. Кручение

Составляющие репер Френе векторы $\tau(t),n(t),b(t)$ образуют базис, по которому можно разложить производные $\tau'(t),n'(t),b'(t)$. Так как $\tau(t)=\dfrac{\rho'(t)}{\|\rho'(t)\|}$,то

$$\tau'(t)=\frac{\rho''(t)\|\rho'(t)\|-\rho'(t)\|\rho'(t)\|'}{\|\rho'(t)\|^2}=\|\rho'(t)\|\frac{\|\rho'(t)\times\rho''(t)\|}{\|\rho'(t)\|^3}n(t)=\|\rho'(t)\|k(t)n(t)$$

Дифференцируя равенство $b(t)=\tau(t)\times n(t)$ и учитывая $\tau'(t)=\|\rho'(t)\|k(t)n(t)$, получим $b'(t)=\tau(t)\times n'(t)$. Следовательно, $b'(t)\perp\tau(t)$. Кроме того, дифференцируя $b(t)\cdot b(t)=1$, находим $b'(t)\perp b(t)$. Следовательно, $b'(t)$ коллинеарен $n(t)$ и $b'(t)=-\|\rho'(t)\|\chi(t)n(t)$. Аналогично дифференцируя равенство $n(t)=b(t)\times\tau(t)$ и учитывая

$\tau'(t) = \|\rho'(t)\| k(t)n(t)$, $b'(t) = -\|\rho'(t)\| \chi(t)n(t)$, получим $n'(t) = \|\rho'(t)\|(-k(t)\tau(t) + \chi(t)b(t))$.

Найденные разложения производных $\tau'(t), n'(t), b'(t)$ по базису $\tau(t), n(t), b(t)$ называются *формулами Френе*, скаляр $\chi(t)$ – *кручением*. Формулы Френе удобно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \tau(t) \\ n(t) \\ b(t) \end{bmatrix}' = \|\rho'(t)\| \begin{bmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \chi(t) \\ 0 & -\chi(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(t) \\ n(t) \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Если $\gamma : J \to A$, $r(s) = e_i x^i(s)$ - s – кривая, $t = s$, то $\|r'(s)\| = 1$ и формулы упрощаются.

Для вычисления кручения воспользуемся формулами

$$n(s) = \frac{r''(s)}{k(s)}, b(s) = r'(s) \times \frac{r''(s)}{k(s)}.$$

Так как $b'(s) = -\chi(s)n(s)$, то $\chi(s) = -b'(s) \cdot n(s)$. Вычислим $b'(s)$.

Имеем

$$b'(s) = \left(\frac{1}{k(s)} r'(s) \times r''(s)\right)' = \left(\frac{1}{k(s)}\right)' r'(s) \times r''(s) + \frac{1}{k(s)} r'(s) \times r'''(s).$$

Тогда, подставляя выражения для $b'(s)$ и $n(s)$ в формулу для $\chi(s)$, получим

$$\chi(s) = \frac{[r'(s), r''(s), r'''(s)]}{k^2(s)}.$$

Задача. Доказать, что для параметризованной t – кривой кручение можно вычислить по формуле

$$\chi(t) = \frac{[r'(t), r''(t), r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2}.$$

▷ Вычислить смешанное произведение $[r'(t), r''(t), r'''(t)]$.

◁

8.8. Кривая с заданными кривизной и кручением

Пусть задана s – кривая $\gamma : J \to A$, $r(s) = e_i x^i(s)$. Тогда справедливы формулы Френе

$$\begin{bmatrix} \tau(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\chi(s) \\ 0 & \chi(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}.$$

Задача. По известным гладким функциям кривизны $f(s)$, $f(s) > 0$ и кручения $g(s)$, $s \in J$ найти соответствующую s – кривую.

▷ Для решения введем обозначения $F(s) = \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \end{bmatrix}$ – неизвестный репер Френе и

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & -f(s) & 0 \\ f(s) & 0 & -\chi(s) \\ 0 & \chi(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда можно записать дифференциальное уравнение $F'(s) = A(s)F(s)$ с начальным условием $s = s_0$ $F(s_0) = [e_1, \ e_2, \ e_3]$, где e_1, e_2, e_3 – ортонормированный базис в точке s_0. Решение $F(s) = \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \end{bmatrix}$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию, существует и единственно (теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения). Необходимо проверить ортонормированность векторов $v_i(s)\ \ \forall s\in J$. Введем компоненты векторов $v_i=\{v_{i,j}(s)\}$ и запишем решение в виде $F(s)=[v_{i,j}(s)]$. Тогда при $s=s_0$ $F(s_0)^T F(s_0)=E$, где E – единичная матрица. Докажем, что условие ортонормированности $F(s)^T F(s)=E$ выполняется для $\forall s\in J$. Действительно,

$$(F^TF)'=(F^T)'F+F^TF'=F^TF+F^TF'=F^TA^TF+F^TAF=F^T(A^T+A)F=F^TOF=O$$

.

Следовательно, $F^TF=const=F(s_0)^T F(s_0)=E$. Пусть теперь $r(s)=r_0+\int\limits_{s_0}^{s}v_1(p)dp$. Тогда

$r'(s)=v_1(s),\quad \|r'(s)\|=1, r''(s)=v_1'(s)=f(s)v_2(s)$ и

$$r'''(s)=-f^2(s)v_1(s)+f'(s)v_2(s)+f(s)g(s)v_3(s).$$

Кривизна $k(s)=\|r''(s)\|=|f(s)|=f(s)$

и кручение $\chi(s)=\dfrac{[r'(s),r''(s),r'''(s)]}{k^2(s)}=\dfrac{f^2(s)g(s)}{f^2(s)}=g(s)$

построенной s – кривой равны заданным функциям. $\triangleleft$

8.9. Эволюта и эвольвента

Пусть $\gamma: I\to A$, – плоская t – кривая. Скаляр $R(t)=\dfrac{1}{k(t)}$ называется *радиусом кривизны* и является радиусом соприкасающейся окружности. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны* и находится на главной нормали с направляющим вектором $n(t)$. Множество центров кривизны называется *эволютой* кривой γ, а исходная кривая $\gamma: I\to A$ – *эвольвентой*. Пусть $\rho: I\to V$:, $\rho(t)=e_i y^i(t)$ – исходная t – кривая. Тогда параметрическое уравнение эволюты можно записать в виде

$$\tilde{\rho}(t)=\rho(t)+R(t)n(t).$$

Свойства эволюты:

- касательная к эволюте совпадает с нормалью к эвольвенте,
- длина дуги эволюты равна разности радиусов кривизны эвольвенты в начале и конце дуги.

8.10. Локальное строение кривой

Пусть $\gamma: J\to A$, $r(s)=e_i x^i(s)$ – s – кривая, $\tau(s), n(s), b(s)$ – репер Френе. Принимая пары векторов репера Френе в качестве направляющих векторов плоскости, получим три плоскости:

- *соприкасающаяся плоскость* с направляющими векторами $\tau(s), n(s)$;
- *спрямляющая плоскость* с направляющими векторами $\tau(s), b(s)$;
- *нормальная плоскость* с направляющими векторами $n(s), b(s)$.

Для исследования локального строения кривой в окрестности фиксированной точки S запишем разложение $r(s)$ по формуле Тейлора

$$r(s)=r(0)+sr'(0)+\frac{s^2}{2}r''(0)+\frac{s^3}{6}r'''(0)+\ldots$$

и введем локальную систему координат с началом в точке S и базисом $e_1=\tau, e_2=n, e_3=b$.

Подставим

$$r(0)=\vec{0}, r'(0)=\tau_0, r''(0)=k_0n_0, r'''(0)=k_0'n_0+k_0n_0'=-k_0^2\tau_0+k_0'n_0+k_0\chi_0b_0$$

в разложение $r(s)$ и получим

$$r(s)=(s+\ldots)e_1+(\frac{k_0}{2}s^2+\ldots)e_2+(\frac{k_0\chi_0}{6}s^3+\ldots)e_3.$$

Следовательно, в окрестности точки S параметрические уравнения кривой имеют вид

$$x=(s+\ldots),\quad y=(\frac{k_0}{2}s^2+\ldots),\quad z=(\frac{k_0\chi_0}{6}s^3+\ldots).$$

На соприкасающейся плоскости уравнения

$x=(s+\ldots),\quad y=(\frac{k_0}{2}s^2+\ldots)$ задают параболу,

на спрямляющей плоскости – кубическую параболу

$$x=(s+\ldots),\quad z=(\frac{k_0\chi_0}{6}s^3+\ldots)$$

и на нормальной плоскости – полукубическую параболу

$$y=(\frac{k_0}{2}s^2+\ldots),\quad z=(\frac{k_0\chi_0}{6}s^3+\ldots).$$

9. Геометрия поверхностей

9.1. *Определения*

Поверхность, как и линия, обычно понимается как подмножество точек пространства. Например, график функции $f:U\to R, U\in R^2$, – поверхность в пространстве R^3. Пусть задано отображение $F:A\to R$, x,y,z – аффинные координаты точки M в A. Тогда равенство $F(x,y,z)=0$ в окрестности точки М может определять поверхность (см. теорему о неявно заданной функции).

Пусть $f:U\to A, U\in R^2, \dim A=3$ – отображение в аффинное пространство A. Выберем в пространстве A начало отсчета O. Тогда f можно записать в виде $r:U\to R^3,(u,v)\mapsto r(u,v)$. Если r – гладкое (непрерывно дифференцируемое) отображение и $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\neq 0$, то r называется *параметризованной поверхностью*. Обозначение параметризованной поверхности – (U,r), множество $r(U)$ называется *носителем*.

Пример. Пусть $f:U\to R, U\in R^2$ задана равенством

$$w=u^2+v^2, U=R^2.$$

Тогда $r:U\to R^3,(u,v)\mapsto r(u,v)$ можно определить соотношением

$r:U\to R^3,(u,v)\mapsto r(u,v)=ue_1+ve_2+(u^2+v^2)e_3$. Так как $\forall(u,v)\in U\quad r_u\times r_v\neq 0$, и r – гладкое, (U,r) – параметризованная поверхность и её носитель – параболоид.

Две параметризованные поверхности (U,r) и (H,ρ) называются *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм

$h:U\to H$, такой, что $r=\rho\circ h$. В этом случае $r(U)=\rho(H)$.

Задача. Доказать, что $r(U)=\rho(H)$.

9.2. Поверхность

Множество точек $S\subset A^3$ называется *поверхностью*, если $\forall a\in S$ существуют окрестность W точки a, $W\subset S, a\in W$ и параметризация (U,r), такие, что $r(U)=W$ и $r:U\to W$ – непрерывное взаимно однозначное отображение. Параметризация (U,r) обычно называется *локальной параметризацией*. Так как r – взаимно однозначное отображение, то существует обратное непрерывное отображение $r^{-1}:W\to U, a\mapsto(u,v)$, которое называется *локальной картой* S, а пара чисел (u,v) – *локальными координатами* точки a. Поверхность называется *простой*, если существует глобальная параметризация. Параболоид является простой поверхностью, сфера – нет. Набор карт, покрывающих всю поверхность S, называется *атласом*. Количество карт атласа может быть различным, например, на сфере при проектировании точек сферы на координатные плоскости атлас состоит из шести карт, если же использовать географические координаты, то можно построить атлас из двух карт.

Лемма А. Пусть S – поверхность, (U,r) – локальная параметризация в окрестности точки a, $r^{-1}:W\to U$ – локальная карта S. Тогда для любой точки $\forall a\in W$ существуют открытая окрестность B точки a, $B\subset A$ и гладкое отображение $g:B\to U$, такие, что $r^{-1}\big|_{W\cap B}=g\big|_{W\cap B}$.

$\triangleright$ Пусть (U,r) локальная параметризация, $r(u,v)=e_i f^i(u^1,u^2)$ и $a(u_0^1,u_0^2)$. Тогда $\forall(u^1,u^2)\in U \quad r_{u^1}\times r_{u^2}\neq 0$, следовательно, хотя бы один из трех определителей матриц

$\begin{bmatrix} f^i_{u^1} & f^j_{u^1}\\ f^i_{u^2} & f^j_{u^2}\end{bmatrix}$, где (i,j) = (2,3), (i,j) = (1,3), (i,j) = (1,2), не равен нулю.

Допустим, что $\det\begin{bmatrix} f^1_{u^1} & f^2_{u^1}\\ f^1_{u^2} & f^2_{u^2}\end{bmatrix}\neq 0$. Введем отображение

$f:U\to R^2, (u^1,u^2)\mapsto(x,y)$, где

$x=f^1(u^1,u^2),\ y=f^2(u^1,u^2)$. По теореме об обратной функции существуют окрестности $V(u_0^1,u_0^2)\subset U$ и $H(x_0,y_0)\subset R^2$, такие, что $f:V\to H$ – диффеоморфизм. Так как $r:U\to W$ – взаимно однозначное непрерывное отображение (гомеоморфизм), то $r(V)$ – окрестность точки a. Следовательно, существует окрестность точки a $B(a)\subset R^3$, такая, что $r(V)=B\cap W$. Тогда отображение $g=f^{-1}\circ p:B\to U$ удовлетворяет условию $r^{-1}\big|_{W\cap B}=g\big|_{W\cap B}$ как композиция гладких отображений и выполняется равенство

$$r^{-1}(x,y.z)=(u^1,u^2)=f^{-1}(x,y)=f^{-1}(p(x,y,z))=(f^{-1}\circ p)(x,y,z)$$

. Здесь p - проекция на R^2. $\triangleleft$

Теорема. (о замене параметризации). Пусть S – поверхность, W – открытое множество на S, $r:U\to W$, $\rho:H\to W$ – две локальные параметризации S, тогда существует диффеоморфизм $h:U\to H$, такой, что $r=\rho\circ h$ (диффеоморфизм h называется локальной заменой параметризации на S).

$\triangleright$ Отображение $h=\rho^{-1}\circ r:U\to H$ является взаимнооднозначным и непрерывным отображением. Докажем его дифференцируемость. По предыдущей лемме, примененной к параметризации ρ^{-1}, существует отображение $g:B\to U$, такое, что $\rho^{-1}\big|_{W\cap B} = g\big|_{W\cap B}$. Тогда $h\big|_V = \rho^{-1}\circ r\big|_V = g\circ r\big|_V$, где $V = \rho^{-1}(W\cap B)$, дифференцируема, как композиция дифференцируемых отображений. Аналогично доказывается дифференцируемость $h^{-1} = r^{-1}\circ\rho$ с помощью леммы, примененной к параметризации r^{-1}. $\lhd$

9.3. Кривые на поверхности

Пусть $\rho : I \to R^3$ – параметризованная кривая, S – поверхность. Параметризованная кривая ρ *принадлежит* поверхности S, если $\rho(I)\subset S$.

Теорема. Пусть S – поверхность, (U,r) – локальная параметризация, $\rho : I \to R^3$ – кривая на поверхности, тогда существует параметризованная кривая $\mu : I \to U$, такая, что $\rho = r\circ\mu$ и $\rho'(t)\neq 0 \Leftrightarrow \mu'(t)\neq 0$.

$\rhd$ Используя заданные (U,r) и $\rho : I\to R^3$, определим $\mu : I \to U$ соотношением $\mu = r^{-1}\circ\rho$. Для любой точки $\forall a\in W$ существуют открытая окрестность B точки a, $B\subset A$ и гладкое отображение $g : B\to U$, такие, что $r^{-1}\big|_{W\cap B} = g\big|_{W\cap B}$. Тогда $\mu = r^{-1}\circ\rho$ – гладкое, как композиция гладких отображений. Дифференцируя равенство $\rho = r\circ\mu$ по параметру t, получим $\dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial f^i}{\partial u^j}\dfrac{d\alpha^j}{dt}$, где $rang\left[\dfrac{\partial f^i}{\partial u^j}\right] = 2$. Так как $\rho'(t) = \left[\dfrac{dx^i}{dt}\right]$, $\mu'(t) = \left[\dfrac{d\alpha^j}{dt}\right]$, выполняется условие $\rho'(t)\neq 0 \Leftrightarrow \mu'(t)\neq 0$. $\lhd$

Из теоремы следует, что для задания параметризованной кривой на поверхности достаточно задать параметризованную кривую в области определения параметризации $\mu : I\to U,\ t\mapsto (\alpha^1(t),\alpha^2(t))$. Уравнения $u^j = \alpha^j(t)$ называются *уравнениями внутреннего задания* кривой $\mu : I\to U$.

9.4. Касательное пространство

Пусть S – поверхность, точка $a\in S$. Вектор τ называется *касательным вектором* к поверхности S в точке a, если существует кривая на поверхности $\rho : I\to R^3$, такая, что $\exists t_0\in I,\ \rho(t_0) = a$ (кривая проходит через точку a) и $\rho'(t_0) = \tau$.

Теорема.

1. Множество T_aS касательных векторов в точке a – подпространство в R^3.
2. Векторы $\{\partial_i r\}$ в точке a образуют базис пространства T_aS.

$\rhd$ Пусть $\tau_i\in T_aS,\quad i = 1,2$. Тогда по определению касательных векторов существуют параметризованные кривые $\rho_i : I_i\to R^3$, такие, что: $\rho_i(t_i) = a$ и $\rho_i'(t_i) = \tau_i$. Уравнения внутреннего задания этих кривых – $u^j = \alpha_i^j(t)$ и касательные векторы в точке a можно записать в виде $\tau_i = \partial_j r\dfrac{d\alpha_i^j}{dt}$. Определим параметризованную кривую $\rho : I\to R^3$ с помощью уравнений внутреннего задания

$$\alpha^j(t) = u_0^j + \left[\lambda\frac{d\alpha_1^j(t_1)}{dt} + \gamma\frac{d\alpha_2^j(t_2)}{dt}\right](t-t_0),\qquad \lambda,\gamma\in R$$

j=1,2. Тогда $\rho(t_0) = a$, т.е. кривая проходит через точку a, и

$$\rho'(t_0) = \partial_j r \frac{d\alpha^j(t_0)}{dt} =$$

$$= \partial_j r \left[\lambda \frac{d\alpha_1^j(t_1)}{dt} + \gamma \frac{d\alpha_2^j(t_2)}{dt} \right] = \lambda \tau_1 + \gamma \tau_2 \in T_a S.$$

Следовательно, множество $T_a S$ – подпространство в R^3.

Докажем, что векторы $[\partial_i r]$ образуют базис пространства $T_a S$. Пусть $\tau \in T_a S$, тогда по определению касательного вектора существует кривая на поверхности $\rho : I \to R^3$, проходящая через точку *a*, и $\rho'(t_0) = \tau$. Перейдем к внутреннему заданию кривой $\rho = r \circ \mu$ и вычислим $\rho'(t_0) = (r \circ \mu)'(t_0) = \partial_j r \dfrac{d\alpha^j(t_0)}{dt} = \tau$. Следовательно, любой вектор $\tau \in T_a S$ раскладывается по линейно независимой паре векторов $[\partial_1 r, \partial_2 r]$, принадлежащих $T_a S$. ◁

Линейное пространство $T_a S$ называется *касательным пространством* к поверхности *S* в точке *a*. Плоскость $P = a + T_a S$ называется *касательной плоскостью* к поверхности *S* в точке *a*. Так как $\dim T_a S = 2$, то ортогональное дополнение $(T_a S)^{\perp}$ – одномерно. Прямая $l = a + (T_a S)^{\perp}$ называется *нормалью* к плоскости *S* в точке *a*.

9.5. Ориентация поверхности

Линейное пространство *L* называется ориентированным, если выбран базис этого пространства. Две ориентации пространства *L* называются *эквивалентными*, если определитель матрицы перехода от одного базиса к другому больше нуля, и не эквивалентными, если определитель меньше нуля. Поверхность *S* называется *ориентированной*, если $\forall a \in S$, пространства $T_a S$ эквивалентно

ориентированы. Существуют поверхности, на которых ориентацию задать нельзя, например, лента Мебиуса. Так как $\dim T_a S = 2$, ориентацию поверхности удобнее задавать с помощью непрерывного векторного поля на *S* $n : S \to R^3, a \mapsto n(a) \perp T_a S$. Пример: *S* – простая поверхность, (U, r) – глобальная параметризация, тогда ориентацию можно задать векторным полем $N(u^1, u^2) = \partial_1 r \times \partial_2 r$. Ориентация поверхности *S* с помощью непрерывного векторного поля *H* может не совпадать с ориентацией $N(u^1, u^2)$, индуцированной системой координат (u^1, u^2).

9.6. Первая фундаментальная форма поверхности

Пусть *S* – поверхность в евклидовом пространстве E^3, метрика задана скалярным произведением $g : R^3 \times R^3 \to R, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w, \qquad v \cdot w = g_{ij} v^i w^j$, а $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ – метрический тензор. Так как $T_a S \subset E^3$, то на $T_a S$ также определено скалярное произведение. Отображение $I : T_a S \times T_a S \to R, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w$ называется *первой фундаментальной формой* поверхности *S*. Пусть (U, r) – локальная параметризация в окрестности точки *a*. Тогда для $\forall \tau \in T_a S$ может быть представлен в виде $\tau = \tau^i \partial_i r$ и $I(\tau, \tau) = \tau^i \tau^j \partial_i r \cdot \partial_j r$.

Введем обозначения

$$E = \partial_1 r \cdot \partial_1 r, \; F = \partial_1 r \cdot \partial_2 r, \; G = \partial_2 r \cdot \partial_2 r$$

и первую фундаментальную форму запишем в виде

$$I(\tau, \tau) = E(\tau^1)^2 + 2F\tau^1\tau^2 + G(\tau^2)^2.$$

Если касательный вектор обозначить как $dr = du\partial_1 r + dv\partial_2 r$, то первая фундаментальная форма выглядит так:

$$I(dr, dr) = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2.$$

Зная первую фундаментальную форму, на поверхности можно вычислить длину дуги l, угол между кривыми θ и площадь поверхности σ:

$$l = \int \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\,dt,$$

$$\cos\theta = \frac{\rho_1' \cdot \rho_2'}{\|\rho_1'\|\|\rho_2'\|},$$

$$\sigma = \iint_U \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

9.7. Вторая фундаментальная форма

Пусть S – поверхность, (U, r) – локальная параметризация S, $n = \dfrac{\partial_1 r \times \partial_2 r}{\|\partial_1 r \times \partial_2 r\|}$ – поле единичных векторов, задающее ориентацию S. Будем считать, что параметризация r дважды дифференцируема, тогда можно записать

$$d^2 r = \partial_{uu} r(du)^2 + 2\partial_{uv} r du dv + \partial_{vv} r(dv)^2 + \partial_u r d^2 u + \partial_v r d^2 v$$

.

Здесь нижним индексом обозначена частная производная по соответствующей переменной.

Квадратичная форма $II = d^2 r \cdot n$ называется *второй фундаментальной формой* поверхности. Вычисляя скалярное произведение $d^2 r \cdot n$, получим

$$II = L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2$$

или, для касательного вектора $\tau = \tau^i \partial_i r$,

$$II = L(\tau^1)^2 + 2M\tau^1\tau^2 + N(\tau^2)^2.$$

Здесь $L = \partial_{uu} r \cdot n, \quad M = \partial_{uv} r \cdot n, \quad N = \partial_{vv} r \cdot n$ - коэффициенты второй фундаментальной формой.

Задача. Доказать, что

$$L = -\partial_u r \cdot \partial_u n, \quad M = -(\partial_v r \cdot \partial_u n + \partial_u r \cdot \partial_v n), \quad N = -\partial_v r \cdot \partial_v n$$

.

$\triangleright \quad dn = \partial_u n du + \partial_v n dv, \quad dr \cdot n = 0 \Rightarrow d^2 r \cdot n + dr \cdot dn = 0$

$\triangleleft$.

Если найти частные производные $\partial_u n, \partial_v n$ для нормального вектора, то для L, M, N можно получить:

$$L = (r_{uu}, r_u, r_v)/\Delta, \quad M = (r_{uv}, r_u, r_v)/\Delta, \quad N = (r_{vv}, r_u, r_v)/\Delta$$

,

где $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$.

9.8. Кривизна кривых на поверхности

Пусть S – поверхность, (U, r) – локальная параметризация S и $\rho : I \to S, \quad I \subset R$ s – кривая на S, s – натуральный параметр, $\tau = \rho'(s)$ – касательный вектор к кривой, n – единичный вектор, нормальный к поверхности S, $b = n \times \tau$. Тройка векторов (τ, n, b) называется *репером поверхности S*. (Для репера Френе кривой $\rho : I \to S,$ введем теперь обозначение (τ, k, b), $b = k \times \tau$).

Разложение $\rho''(s)$ по реперу поверхности (τ, n, b) имеет вид $\rho''(s) = \alpha\tau + \kappa_n n + \kappa_g b$, где $\alpha, \kappa_n . \kappa_g \in R$. Так как $\rho' \cdot \rho' = 1$, то $\rho'' \cdot \rho' = 0$, следовательно, и $\alpha = 0$. Тогда $\rho''(s) = \kappa_n n + \kappa_g b$. Скаляр $\kappa_n = \rho'' \cdot n$ называется *нормальной кривизной* кривой ρ и равен длине проекции вектора кривизны на вектор нормали, а скаляр $\kappa_g = \rho'' \cdot b$ называется *геодезической кривизной* кривой ρ.

Можно доказать, что для t – кривой $\rho(t)$

$$\kappa_n = \frac{II(\rho'(t), \rho'(t))}{I(\rho'(t), \rho'(t))},$$

$$\kappa_g = \frac{(\rho''(t), \rho'(t), n)}{\|\rho'(t)\|^3}.$$

Теорема Менье. Пусть $R = \dfrac{1}{\kappa}$ – радиус кривизны t – кривой $\rho(t)$, в точке $a \in S$, $R_n = \dfrac{1}{\kappa_n}$ – радиус кривизны нормального сечения в той же точке $a \in S$, тогда

$$R = \pm R_n \cos\theta,$$

где θ – угол между нормалью к поверхности S и главной нормалью к кривой $\rho(t)$.

9.9. Гауссова и средняя кривизны поверхности

Пусть точка a принадлежит поверхности S, n – нормальный вектор в точке a. Проведем через n плоскости, пересекающие S, тогда на поверхности получим пучок линий пересечения, проходящих через точку а и имеющих разные кривизны в точке a. Нормальная кривизна $\kappa_n = \rho'' \cdot n$ зависит от направления, определяемого единичным касательным вектором к кривой $\rho : I \to S$. Найдем те направления, для которых κ_n принимает экстремальные значения. Для этого запишем задачу об условном экстремуме.

Так как $\tau = u'\partial_u r + v'\partial_v r$ и $\|\tau\| = 1$, то

$$I(\tau,\tau) \equiv E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = 1 \text{ и}$$

$$II(\tau,\tau) \equiv L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 = \kappa_n.$$

Запишем функцию Лагранжа

$\Lambda(u',v',\lambda) = II(u',v') + \lambda(I(u',v') - 1)$ и составим систему уравнений $\begin{cases} \partial_{u'}\Lambda = 0, \\ \partial_{v'}\Delta = 0, \\ \partial_{\lambda}\Delta = 0. \end{cases}$. Умножим первое уравнение на u', второе – на v' и сложим, в результате получим $\kappa_n + \lambda = 0$, откуда $\lambda = -\kappa_n$. Третье уравнение является тождеством, первые два можно записать в виде

$$\begin{cases} (L - \kappa_n E)u' + (M - \kappa_n F)v' = 0, \\ (M - \kappa_n F)u' + (N - \kappa_n G)v' = 0. \end{cases}$$

Эта система допускает нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е. $\kappa_n^2 - 2H\kappa_n + K = 0$. Здесь приняты обозначения

$$H = \tfrac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Величина K называется *Гауссовой или полной* кривизной, а H называется *средней кривизной* поверхности в точке a.

Пусть S, H – две поверхности. Отображение $f : S \to H$ называется *изометрией*, если оно не меняет длин кривых на поверхности, т.е. длина отрезка кривой на S равна длине её образа на H. Изометрией является, например, изгибание куска плоскости в цилиндрическую поверхность.

Теорема Гаусса. Полная кривизна поверхности не меняется при изгибании.

По теореме Виета $K = \kappa_1\kappa_2$, $H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$, где κ_1, κ_2 – экстремальные (главные) значения нормальной кривизны.

Точка $a \in S$ называется: *эллиптической*, если $K = \kappa_1\kappa_2 > 0$; *гиперболической*, если $K = \kappa_1\kappa_2 < 0$; *параболической*, если $K = \kappa_1\kappa_2 = 0$; *омбилической*, если $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$; *точкой уплощения*, если $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Обозначим через τ_1, τ_2 касательные векторы к кривым с главными кривизнами κ_1, κ_2. Для единичного касательного вектора τ

$$\tau = \tau_1 \cos\theta + \tau_2 \sin\theta.$$

Нормальная кривизна кривой с касательным вектором τ связана с главными кривизнами κ_1, κ_2 *формулой Эйлера*

$$k_n(\tau) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Известно, что в случае кривой L её локальной аппроксимацией второго порядка служит соприкасающаяся окружность. Для поверхности S такой аппроксимацией в эллиптической и гиперболической точках являются эллиптический и гиперболический параболоиды соответственно, а в параболической точке – параболический цилиндр. Омбилической точке соответствует сфера, а точке уплощения – плоскость.

9.10. Линии кривизны

Линия на поверхности S, в каждой точке которой кривизна имеет одно из экстремальных значений, называется *линией кривизны*. Например, на цилиндре линии кривизны – окружности и образующие. Линии кривизны в случае $\kappa_1 \neq \kappa_2$ образуют систему ортогональных координат на поверхности.

Уравнения линий кривизны можно получить из системы уравнений

$$\begin{cases} (L-\kappa_n E)du + (M-\kappa_n F)dv = 0, \\ (M-\kappa_n F)du + (N-\kappa_n G)dv = 0. \end{cases}$$

Исключая κ_n, получим

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0,$$

или

$$\det\begin{bmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{bmatrix} = 0.$$

Решения этого дифференциального уравнения определяют два семейства кривых, которые и являются линиями кривизны.

Теорема. Пусть S – поверхность, не являющаяся плоскостью или сферой. Для того чтобы система координат на S была системой линий кривизны, необходимо и достаточно, чтобы $M=F=0$.

Допустим, что система координат (u,v) на S является системой линий кривизны с кривизнами κ_1, κ_2 соответственно. Тогда уравнения

$$\begin{cases} (L-\kappa_n E)du + (M-\kappa_n F)dv = 0, \\ (M-\kappa_n F)du + (N-\kappa_n G)dv = 0 \end{cases}$$

упрощаются и принимают вид

$$\begin{cases} (L-\kappa_1 E)du = 0, \\ (N-\kappa_2 G)dv = 0, \end{cases}$$

откуда $\kappa_1 = L/E, \quad \kappa_2 = N/G$.

9.11. Деривационные формулы

Пусть S – поверхность, (U,r) – локальная параметризация S, u^1, u^2 – локальные координаты, $(\partial_1 r, \partial_2 r, n)$ – натуральный репер поверхности (называемый также *репером Дарбу*) $n = \dfrac{\partial_1 r \times \partial_2 r}{\|\partial_1 r \times \partial_2 r\|}$,

$g_{ij} = \partial_i r \cdot \partial_j r, \quad h_{ij} = -\partial_i r \cdot \partial_j n = -\partial_j r \cdot \partial_i n = \partial_{ij} r \cdot n$ – коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности S. Разложим векторы $\partial_{ij} r$, $\partial_i n$ по базису $(\partial_1 r, \partial_2 r, n)$, в результате получим так называемые *деривационные формулы*

$$\partial_i n = a_i^k \partial_k r + a_i n,$$
$$\partial_{ij} r = \Gamma_{ij}^k \partial_k r + b_{ij} n,$$

$a_i^k, a_i, , \Gamma_{ij}^k, b_{ij}$ – неизвестные коэффициенты разложений, а по повторяющемуся индексу k проводится суммирование от 1 до 2. Найдем эти коэффициенты. Умножим первое равенство скалярно на вектор n, тогда

$$\partial_i n \cdot n = a_i^k \partial_k r \cdot n + a_i n \cdot n \Rightarrow 0 = a_i^k 0 + a_i 1 \Rightarrow a_i = 0.$$

Умножая первое равенство скалярно на $\partial_j r$, получим

$$\partial_i n\cdot\partial_j r = a_i^k\partial_k r\cdot\partial_j r = a_i^k g_{kj} \Rightarrow -h_{ij} = a_i^k g_{kj} \Rightarrow -h_{ij}g^{js} = a_i^k g_{kj} g^{js} = a_i^k\delta_k^s = a_i^s$$

.

В итоге $a_i^s = -h_{ij}g^{js}$.

Умножим второе равенство $\partial_{ij}r = \Gamma_{ij}^k\partial_k r + b_{ij}n$ скалярно на вектор n, тогда $\partial_{ij}r\cdot n = \Gamma_{ij}^k\partial_k r\cdot n + b_{ij}n\cdot n \Rightarrow h_{ij} = b_{ij}$.

Коэффициенты $\Gamma_{m,ij} = \partial_{ij}r\cdot\partial_m r$ называются *символами Кристоффеля первого рода*, а Γ_{ij}^k – *символами Кристоффеля второго рода*. Умножим равенство $\partial_{ij}r = \Gamma_{ij}^k\partial_k r + b_{ij}n$ скалярно на вектор $\partial_m r$, тогда $\partial_{ij}r\cdot\partial_m r = \Gamma_{ij}^k\partial_k r\cdot\partial_m r + b_{ij}n\cdot\partial_m r \Rightarrow \Gamma_{m,ij} = g_{mk}\Gamma_{ij}^k$.

Продифференцируем равенство $\partial_i r\cdot\partial_j r = g_{ij}$ по переменной u^k, тогда $\partial_{ik}r\cdot\partial_j r + \partial_i r\cdot\partial_{jk}r = \partial_k g_{ij}$, или с учетом принятых обозначений

$$\Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk} = \partial_k g_{ij}.$$

Аналогично можно получить

$$\Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji} = \partial_i g_{kj},$$

$$\Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj} = \partial_j g_{ik}.$$

Сложим два последних уравнения и вычтем первое, тогда, учитывая симметрию $g_{ij} = g_{ji}$, $\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji}$, получим

$$\Gamma_{k,ij} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\right),$$

откуда

$$\Gamma_{ij}^s = \tfrac{1}{2}g^{sk}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\right).$$

Итак, все коэффициенты деривационных формул найдены.

9.12. *Геодезические линии на поверхности*

Пусть $\rho: I\to S$, $I\subset R$ параметризованная кривая на поверхности S. Её геодезическая кривизна находится по формуле $\kappa_g = \dfrac{(\rho''(t),\rho'(t),n)}{\|\rho'(t)\|^3}$ (см. п.2.8). Кривая на поверхности S называется *геодезической*, если в каждой точке этой кривой её геодезическая кривизна равна нулю.

Найдем выражение геодезической кривизны через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Для этого вычислим $\rho''(t)$, $\rho'(t)$ с помощью деривационных формул $\partial_{ij}r = \Gamma_{ij}^k\partial_k r + h_{ij}n$. Пусть (U,r) – локальная параметризация S, u^1, u^2 – локальные координаты и $\rho(t) = r(u^1(t), u^2(t))$.

Тогда $\rho' = \partial_i r\, u_t^i$, $\rho'' = \partial_{ij}r\, u_t^i u_t^j + \partial_k r u_{tt}^k$, где индекс t обозначает дифференцирование по t.

Заменяя $\partial_{ij}r$ по формулам $\partial_{ij}r = \Gamma_{ij}^k\partial_k r + h_{ij}n$, получим $\rho'' = (\Gamma_{ij}^k u_t^i u_t^j + u_{tt}^k)\partial_k r + h_{ij}u_t^i u_t^j n$. Подставляя полученные выражения для $\rho''(t)$, $\rho'(t)$ в $\kappa_g = \dfrac{(\rho''(t),\rho'(t),n)}{\|\rho'(t)\|^3}$ и учитывая, что $n = \dfrac{\partial_1 r\times\partial_2 r}{\|\partial_1 r\times\partial_2 r\|}$, находим

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{(\sqrt{g_{ij}u_t^i u_t^j})^3}\left[(\Gamma_{ij}^1 u_t^i u_t^j + u_{tt}^1)u_t^2 - (\Gamma_{ij}^2 u_t^i u_t^j + u_{tt}^2)u_t^1\right]$$

.

Теорема. Кривая $\rho: I\to S$, $\rho''(t)\neq 0$ на поверхности S является геодезической тогда и только тогда, когда $\rho''(t)\perp T_{\rho(t)}S$ (т.е. вектор главной нормали ортогонален касательному пространству).

$\triangleright$

$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow (\rho''(t), \rho'(t), n) = 0 \Leftrightarrow \rho''(t)\ \text{êî ëëèí åàðåí}\ \ n \Leftrightarrow \rho''(t) \perp T_{\rho(t)}S$

$\triangleleft$

Так как для геодезической $\rho''(t) \perp T_{\rho(t)}S$, то $\rho''(t) \cdot \partial_n r = 0$ или $((\Gamma^k_{ij} u^i_t u^j_t + u^k_{tt})\partial_k r + h_{ij} u^i_t u^j_t n) \cdot \partial_n r = 0$. Следовательно, $(\Gamma^k_{ij} u^i_t u^j_t + u^k_{tt}) g_{kn} = 0$. Тогда соотношения

$$\Gamma^k_{ij} u^i_t u^j_t + u^k_{tt} = 0$$

представляют систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $u^1(t), u^2(t)$. Они называются *уравнениями геодезической кривой.*

10. Тензорная алгебра

10.1. Линейные пространства

Множество ***V*** называется *вещественным линейным пространством,* если определены две операции “+” и “·”, удовлетворяющие свойствам:

1. $\forall v, w \in \mathrm{V} \quad v + w = w + v.$
2. $\forall u, v, w \in \mathrm{V} \quad \left(u + v\right) + w = u + \left(v + w\right).$
3. $\exists \Theta \in \mathrm{V}, \forall v \in \mathrm{V} \quad v + \Theta = v.$
4. $\forall v \in \mathrm{V}\ \exists w \in \mathrm{V} \quad v + w = \Theta.$

Эти свойства определяются на *V* структуру коммутативной группы.

5. $1 \cdot v = v.$
6. $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$
7. $(\alpha + \beta) \cdot v) = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
8. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall v, w \in V$$

Элементы множества *V* называются *векторами*. Система векторов $\left\{e_i\right\} \subset \mathrm{V} \quad i = \overline{1,n}$ называется *базисом,* если она линейно независима, а $\forall x \in \mathrm{V},\ \left\{x, e_i\right\}$ – линейно зависима. В этом случае $\dim \mathrm{V} = n.$

Пусть $e_{i'} = P^i{}_{i'} e_i,$. Тогда

$$\left(\left\{e_{i'}\right\} - \text{áàçèñ}\right) <=> \left(\det\left[P^i{}_{i'}\right] \neq 0\right).$$

Пусть $v = v^i e_i$ и $v = v^{i'} e_{i'}$. Тогда $v^i = P^i{}_{i'}\, v^{i'}$ и $v^{i'} = P^{i'}{}_i\, v^i$, где $\left[P^{i'}{}_i\right] = \left[P^i{}_{i'}\right]^{-1} \cdot \left(P^i{}_{i'} P^{i'}{}_j = \delta^i_j, \quad P^i{}_{i'} P^{j'}{}_i = \delta^{j'}_{i'}\right)$ и

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$ – символ Кронекера.

Подмножество $H \subset \mathrm{V}$ называется *подпространством*, если $\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 + h_2 \in H$; $\forall \acute{r} \in \mathrm{R}, \breve{h} \in H \quad \acute{r} \cdot \breve{h} \in H$.

Пусть H, W – подпространства в ***V***. Множество $H + W = \{h + w; h \in H, w \in W\}$ называется *суммой подпространств*. Оно также является подпространством в ***V***.

Множество $H \oplus W$ называется *прямой суммой*, если пересечение H и W состоит только из нулевого вектора, т.е. $H \cap W = \{\vec{0}\}$.

Пример. Пусть P_1, P_2 – две не параллельные плоскости в R^3, тогда $P_1 + P_2$ – сумма подпространств в R^3, но не прямая сумма, т.к. $P_1 \cap P_2 \neq \{\vec{0}\}$.

Пример. Пусть P – плоскость в R^3 и L – прямая в R^3, тогда $P \oplus L, L \not\subset P$ – прямая сумма.

Теорема. Пусть H, W – подпространства в ***V***, тогда

$$\dim(H + W) = \dim(H) + \dim(W) - \dim(H \cap W).$$

Пусть ***V***, ***W*** – два линейных пространства. Отображение $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ называется *линейным*, если выполняются условия:

1. $\forall v_1, v_2: \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
2. $\forall \lambda \in \mathrm{R}, v \in \mathrm{V}: \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Пусть $\{e_i\}$ – базис в ***V***, $i = \overline{1,n}$; $\{\acute{y}_j\}$ – базис в ***W***, $j = \overline{1,m}$, тогда $f(e_i) = f_i^j \acute{y}_j \Rightarrow \left[f_i^j\right]$ – матрица отображения в базисах $e_i, \acute{y}_j$.

Ядро линейного отображения $\ker f = \{v \in \mathrm{V}, f(v) = \vec{0}\}$ – линейное пространство, состоящее из векторов пространства ***V***. *Образ линейного отображения* $\operatorname{Im} \mathrm{f} = \{\mathrm{f}(\mathrm{v}) \in W; \mathrm{v} \in V\}$ является линейным пространством, но в ***W***.

Множество линейных отображений, действующих из $V \to W$, обозначается символом $L(V, W)$. Это множество само является линейным пространством. Отображение $\mathrm{f} : V \to W$ называется *изоморфизмом*, если: $\mathrm{f} \in \mathrm{L}(V, W)$, $\operatorname{Im} \mathrm{f} = W$ и f – взаимно однозначное отображение.

Линейные пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\mathrm{f} : V \to W$.

10.2. Сопряженное пространство

Отображение $\mathrm{f} : V \to R$ называется *линейной формой или ковектором*, если $\mathrm{f} \in L(V, R)$. Множество всех линейных форм, определенных на V, является линейным пространством. Оно называется *сопряженным пространством* и обозначается V^*. Пусть $\{e_i\}$ – базис в V, набор линейных форм $\{e^i\}$, определенных условием $e^i(e_j) = \delta^i_j$, является *базисом сопряженного пространства* V^*, $\dim V^* = \dim V$.

Если $\mathrm{f} \in V^*$, то

$$\forall x \in V \quad f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = f_i x^i = f_i e^i(x),$$

где $\mathrm{f}_i = \mathrm{f}(e_i) \in R$. Следовательно, если $\mathrm{f} \in V^*$, то $\mathrm{f} = f_j e^i$, матрица $[\mathrm{f}_i]$ – матрица линейной формы (ковектора) и $\mathrm{f} = f_j e^i$ – разложение формы f по базису $\{e^i\}$.

Пусть $\mathrm{F} : V \to W$ – линейное отображение, тогда однозначно определено *сопряженное отображение* $F^* : W^* \to V^*$ формулой:

$F^*(h) = h \circ F \quad (h \in W^*, h \circ F \in V^*)$. Пусть $\{e_i\}, \{\acute{y}_j\}$ – базисы в V и W соответственно, тогда $F(e_i) = F_i^j \acute{y}_j$, $F^*(\acute{y}^j) = F_i^j e^i$ (суммирование по повторяющемуся индексу!).

Если $f \in L(V,R)$, $\dim V = n$, то $\ker f$ – подпространство в V и $\dim(\ker f) = n-1$.

Теорема. Для любого подпространства $\acute{I} \in V$, $\dim H = n-1$ существует линейная форма $f \in L(V,R)$, такая, что $\ker f = H$.

10.3. Тензорное произведение линейных пространств

Пусть V,W - линейные пространства, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\{e_i\}$, $\{\acute{y}_j\}$ – базисы пространств.

Множество $V \times W = \{(\mathrm{v},\mathrm{w}) : \mathrm{v} \in V, \mathrm{w} \in W\}$ называется *декартовым произведением* пространства V на W.

Тензорным произведением $V \otimes W$ пространств V,W называется линейное пространство, в котором:

1. Базис – множество упорядоченных пар $(e_i, \acute{y}_j)$, которое обозначается $(e_i, \acute{y}_j) \equiv e_i \otimes \acute{y}_j$ (названия: базисная диада, неопределенное произведение, тензорное произведение).
2. Любой паре $(v,w) \in V \times W$ ставится в соответствие тензорное произведение $v \otimes w = v^i w^j e_i \otimes \acute{y}_j$.
3. $\forall x, y \in V \otimes W \quad x = x^{ij} e_i \otimes \acute{y}_j, y = y^{ij} e_i \otimes \acute{y}_j$ вводятся операции:

- $(x+y) = (x^{ij} + y^{ij}) e_i \otimes \acute{y}_j$,
- $\forall \lambda \in R, \forall x \in V \otimes W, \quad \lambda x = (\lambda x^{ij}) e_i \otimes \acute{y}_j$.

Из свойств 2 и 3 следует, что $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$; $(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w) = \alpha (v \otimes w)$.

Замена базиса в $V \otimes W$ индуцируется заменой базисов в пространствах V и W. Пусть $e_{i'} = P_{i'}^i e_i \quad \acute{y}_{j'} = Q_{j'}^j \acute{y}_j$, тогда $e_{i'} \otimes \acute{y}_{j'} = P_{i'}^i Q_{j'}^j e_i \otimes \acute{y}_j$. Тензорное произведение не зависит от выбора базиса. Действительно, пусть $v \otimes w = v^i w^j e_i \otimes \acute{y}_j$, тогда

$$(v \otimes w)' = v^{i'} w^{j'} e_{i'} \otimes \acute{y}_{j'} = v^{i'} w^{j'} P_{i'}^i e_i \otimes Q_{j'}^j \acute{y}_j =$$
$$= (P_{i'}^i v^{i'})(Q_{j'}^j w^{j'}) e_i \otimes \acute{y}_j = v^i w^j e_i \otimes \acute{y}_j = v \otimes w.$$

Элементы тензорного произведения $V \otimes W$ пространств V,W называются *тензорами*. Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то $\dim(V \otimes W) = nm$. Из условия $T \in V \otimes W$ следует разложение по базису: $T = T^{ij} e_i \otimes \acute{y}_j$.

Пример. Пусть $T \in W \otimes V^* \Rightarrow T = T_i^j \acute{y}_j \otimes e^i$. Так как $e^i(v) = e^i(v^k e_k) = v^k e^i(e_k) = v^k \delta_k^i = v^i$, то тензор можно рассматривать как линейный оператор из V в W, действующий по закону: $T(v) = T_i^j \acute{y}_j \otimes e^i(v) = T_i^j v^i \acute{y}_j$.

С другой стороны, если $F : V \to W$ линейный оператор, то $F(v) = F(v^i e_i) = v^i F(e_i) = v^i F_i^j \acute{y}_j$, и линейный оператор можно рассматривать как тензор, принадлежащий тензорному произведению $W \otimes V^*$.

Тензор $T \in W \otimes V^*$ называется тензором типа (1,1) (одноконтравариантный и одноковариантный). Вектор $v = v^i e_i$ – тензор типа (1,0), (одноконтравариантный), линейная форма (ковектор) $f = f_i e^i$ – тензор типа (0,1) (одноковариантный). Пусть

$T \in V \otimes W$, то $T = T^{ij} e_i \otimes e_j$ и тип тензора – (2,0) (дважды контравариантный), если же $T \in V^* \otimes V^* \Rightarrow T = T_{ij} e^i \otimes e^j \to$ ò èï $(0,2)$ (дважды ковариантный). Тензор $T \in V^* \otimes V^*$ определяет линейное отображение из V в V* по закону $T(v) = T_{ij} e^i \otimes e^j (v) = T_{ij} e^i v^j = T_{ij} v^j e^i \in V^*$.

Пусть T, H – тензоры одного типа (p,q), $T = T^{(p)}_{(q)} e^{(q)}_{(p)}$, $H = H^{(p)}_{(q)} e^{(q)}_{(p)}$, где *(p), (q)* – упорядоченные наборы индексов, тогда сумма тензоров одного типа вычисляется по формуле $T + H = \left(T^{(p)}_{(q)} + H^{(p)}_{(q)} \right) e^{(q)}_{(p)}$.

Пример. Пусть $T = T^{i_1 \bullet i_2}_{\bullet j_1 \bullet} e_{i_1} e^{j_1} e_{i_2}$, $H = H^{i_1 \bullet i_2}_{\bullet j_1 \bullet} e_{i_1} e^{j_1} e_{i_2}$. Тогда $T + H = \left(T^{i_1 \bullet i_2}_{\bullet j_1 \bullet} + H^{i_1 \bullet i_2}_{\bullet j_1 \bullet} \right) e_{i_1} e^{j_1} e_{i_2}$. Здесь $(p) = (i_1, \bullet, i_2)$, $q = (\bullet, j_1, \bullet)$. Тензор $T + H$ – типа (2,1).

Определение тензорного произведения легко распространяется на случай нескольких линейных пространств – сомножителей $V \otimes W \otimes H \ldots \otimes S \otimes M$.

10.4. Тензорное произведение и свертка

Пусть $T = T^{(p)}_{(q)} e^{(q)}_{(p)}$ и $H = H^{(r)}_{(s)} e^{(s)}_{(r)}$, тогда тензор $M = T \otimes H$ называется *тензорным произведением T* на *H* и $M = M^{(p,r)}_{(q,s)} e^{(q,s)}_{(p,r)}$, где $M^{(p,r)}_{(q,s)} = T^{(p)}_{(q)} H^{(r)}_{(s)}$, $e^{(q,s)}_{(p,r)} = e^{(q)}_{(p)} \otimes e^{(s)}_{(r)}$. Тип тензора *M – (p+r,q+s)*.

Пример. Пусть $\dim V = 3$, $\dim V^* = 3$, $v = e_1 + 2e_2 + e_3$, $t = e^1 e_2 + e^2 e_2$. Тогда

$v \otimes t = (e_1 + 2e_2 + e_3) \otimes (e^1 e_2 + e^2 e_2) = e_1 e^1 e_2 + e_1 e^2 e_2 + 2e_2 e^1 e_2 + 2e_2 e^2 e_2 + e_3 e^1 e_2 + e_3 e^2 e_2$. Здесь знак тензорного произведения $\otimes$ опущен для сокращения записи. Тип тензора $v \otimes t$ – (2,1), $v \otimes t \in V \otimes V^* \otimes V$. Компоненты тензора (не все!): $(v \otimes t)^{1 \bullet 2}_{\bullet 1 \bullet} = 1$, $(v \otimes t)^{1 \bullet 3}_{\bullet 2 \bullet} = 0$, $(v \otimes t)^{2 \bullet 2}_{\bullet 1 \bullet} = 2$, $(v \otimes t)^{3 \bullet 3}_{\bullet 3 \bullet} = 0$. Заметим, что тензорное произведение не коммутативно, $v \otimes t \neq t \otimes v$.

Пусть *T* – тензор типа *(p,q)*, индексы принимают значения $i_k = \overline{1,n}$ и $j_s = \overline{1,n}$. Свертка тензора – новый тензор, обозначается $tr^{i_k}_{j_s} T$ (trace). Компоненты тензора-свертки получаются приравниванием двух индексов $i = m$, $j = m$ (один – контравариантный, второй – ковариантный) и суммированием по повторяющемуся индексу $m = \overline{1,n}$. В результате тензор-свертка будет иметь тип *(p-1,q-1)*.

Пример. Пусть $T = T^{i_1 \bullet i_2}_{\bullet j_1} e_{i_1} e^{j_1} e_{i_2}$, тип тензора – (2,1). Выполним свертку по индексам $i_1 = j_1 = m$. Тогда $tr^{i_1}_{j_1} T = T^{m \bullet i_3}_{\bullet m} e_{i_3}$, получили тензор типа (1,0), т.е. вектор.

10.5. Полилинейные формы и тензоры

Пусть $\{V_k\}$ - набор линейных пространств, где $k = \overline{1,p}$, $\{e_{i_k}\}$ – базис пространства V_k, $\dim V_k = n_k$. Отображение $T : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \to R$, $(v_1, v_2, \ldots, v_p) \mapsto T(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ называется *полилинейной формой (p – формой)*, если оно линейно по каждому аргументу, т.е.:

1. $T(v_1,\ldots,v_{j-1},v_j+\tilde{v}_j,v_{j+1},\ldots,v_p) = T(v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_p) + T(v_1,\ldots,v_{j-1},\tilde{v}_j,v_{j+1},\ldots,v_p)$
,

2)
$$T\left(v_1,\dots v_{j-1},\alpha v_j,v_{j+1}\dots v_p\right)=\alpha T\left(v_1,\dots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\dots v_p\right).$$
В частности, если $p=2$, форма называется билинейной.

Пример. $\det: R^2\times R^2\mapsto R$, $(x,y)\mapsto\det(x,y)$, где
$$\det(x,y)=\begin{vmatrix}x^1 & y^1\\ x^2 & y^2\end{vmatrix}=x^1y^2-x^2y^1.$$
Проверим линейность по первому аргументу:
1)
$$\det(x_1+x_2,y)=\left(\left(x_1^1+x_2^1\right)y^2-\left(x_1^2+x_2^2\right)y^1\right)=\det(x_1,y)+\det(x_2,y)$$
,
2)
$$\det(\alpha x,y)=\alpha x^1y^2-\alpha x^2y^1=\alpha\left(x^1y^2-x^2y^1\right)=\alpha\det(x,y).$$
Аналогично проверяется линейность по второму аргументу. Следовательно, отображение $\det: R^2\times R^2\mapsto R$ является билинейной формой.

Пример. Пусть $f:V\mapsto R$ и $h:W\mapsto R$ – две линейных формы. Определим форму $g:V\times W\mapsto R$ равенством:
$$g(v,w)=f(v)\cdot h(w).$$
Т.к. f,h линейны, то g линейна по каждому аргументу и, следовательно, является билинейной формой.

Найдем матрицу полилинейной формы T (координаты полилинейной формы). Пусть (e_{i_k}) – базис пространства V_k. Разложим $v_k\in V_k$ по базису $v_k=v_k^{i_k}e_{i_k}$. Тогда
$$T\left(v_1,\dots,v_p\right)=T\left(v_1^{i_1}e_{i_1},\dots,v_p^{i_p}e_{i_p}\right)=T_{i_1\dots i_p}v_1^{i_1}\dots v_p^{i_p},$$
где $T_{i_1\dots i_p}=T\left(e_{i_1},\dots,e_{i_p}\right)$. Множество чисел $\left\{T_{i_1\dots i_p}\right\}$ называется *матрицей полилинейной формы* в базисах $\left\{e_{i_k}\right\}$. Для того чтобы

задать полилинейную форму в выбранном базисе, достаточно задать её матрицу.

Полилинейная форма инвариантна по отношению к выбору базисов, в которых заданы векторные аргументы, при переходе к другим базисам значение полилинейной формы не меняется. Пусть $\left\{e_{i'_k}\right\}$ – новые базисы пространств V_k, тогда $e_{i'_k}=P_{i'_k}^{i_k}e_{i_k}$, где $\left[P_{i'_k}^{i_k}\right]$ – матрица перехода от одного базиса к другому, $v^{i'_k}=P_{i_k}^{i'_k}v^{i_k}$, здесь $\left[P_{i_k}^{i'_k}\right]$ – матрица, обратная к $\left[P_{i'_k}^{i_k}\right]$. Так как
$$T\left(v_1,\dots,v_p\right)=T_{i_1\dots i_p}v_1^{i_1}\dots v_p^{i_p}=T_{i'_1\dots i'_p}v_1^{i'_1}\dots v_p^{i'_p}$$
и
$$T\left(v_1,\dots,v_p\right)=T\left(v_1^{i'_1}e_{i'_1},\dots,v_p^{i'_{p1}}e_{i'_{p1}}\right)=T_{i'_1\dots i'_p}P_{i_1}^{i'_1}\dots P_{i_p}^{i'_p}v_1^{i_1}\dots v_p^{i_p}$$
, то $T_{i_1\dots i_p}=P_{i_1}^{i'_1}\dots P_{i_p}^{i'_p}T_{i'_1\dots i'_p}$.

Из этого следует, что координаты (компоненты) полилинейной формы преобразуются так же, как и координаты тензора $T\in V_1^*\otimes\dots\otimes V_p^*$. Следовательно, множество тензоров, принадлежащих $V_1^*\otimes\dots\otimes V_p^*$, можно отождествить со множеством полилинейных форм, заданных на $V_1\times\dots\times V_p$. В данном случае тензор T типа *(o,p)*.

Пример. Пусть $T:\underbrace{V\times V\times\dots\times V}_{p}\to R$ – p – линейная форма, тогда её можно записать в виде $T=T_{i_1i_2\dots i_p}e^{i_1}\otimes e^{i_2}\otimes\dots\otimes e^{i_p}$, где
$$e^{i_k}(v)=e^{i_k}(v^je_j)=v^je^{i_k}(e_j)=v^j\delta_j^{i_k}=v^{i_k}.$$
Если среди линейных пространств $V_1,V_2,\dots,V_m$ есть s линейных пространств и q сопряженных линейных пространств, то тензор T будет принадлежать типу *(s,q)*, а соответствующая m-форма будет иметь s – векторных аргументов и q – ковекторных аргументов.

10.6. Характеристическая поверхность тензора

Пусть $x, y \in R^3$, $T : R^3 \times R^3 \mapsto R$ – симметричная билинейная форма. Тогда $T\left(x, y\right) = T_{ij} x^i y^j$ и $T_{ij} = T_{ji}$. Соответствующая ей квадратичная форма имеет вид: $T\left(x, x\right) = T_{ij} x^i x^j$. Множество точек в R^3, которые удовлетворяют уравнению $T_{ij} x^i x^j = 1$, называется *характеристической поверхностью* формы *T* или соответствующего тензора *T*. Так как матрица T_{ij} симметричная, то характеристическая поверхность будет центральной поверхностью второго порядка.

Пример. Пусть $T_{ij} = \delta_{ij}$, тогда $\delta_{ij} x^i x^j = 1$, или $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Следовательно, характеристическая поверхность единичного тензора – сфера единичного радиуса.

10.7. Симметрирование и альтернирование тензоров

Множество М называется *группой*, если задан закон $T : M \times M \mapsto M$, $\left(a, b\right) \mapsto aTb$, обладающий свойствами:

1. $\forall b, a, c \in M \quad \left(aTb\right)Tc = aT\left(bTc\right)$.
2. $\exists e \in M : eTa = aTe = a, \quad \forall a \in M$, е – нейтральный элемент.
3. $\forall a \in M \; \exists a' \in M : \quad aTa' = a'Ta = e$.

Пусть *M* – множество, состоящее из *p* элементов. Взаимно однозначное отображение $\sigma : M \mapsto M$ называется *подстановкой*. Результат действия подстановки на элемент множества *M* называется *перестановкой*. Перестановка называется *четной*, если её число инверсий четное. Знак перестановки определяется формулой:

$$sign\,\sigma = \begin{cases} 1, \; \sigma - \text{÷åò í}; \\ -1, \sigma - \text{í å÷åò í}. \end{cases}$$

Теорема. Пусть *M* – множество, p – количество элементов в *M*, S_p – множество всех подстановок на *M*. Тогда S_p – группа относительно закона композиции «$\circ$».

Пример. $M = \{1, 2, 3\}$,

$$S_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,2,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,2,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,2 \end{pmatrix} \right\}$$

.

Обозначим через $T_p^o V$ множество р – ковариантных тензоров или полилинейных форм. *Действием группы* S_p на множестве $T_p^o V$ называется отображение $S_p \times T_p^o V \mapsto T_p^o V$, $\left(\sigma, T\right) \mapsto \sigma T$, где σT определяется для $T\left(v_1, v_2, \ldots, v_p\right)$ формулой

$$\sigma \grave{O} = T\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(p)}\right).$$

Пример. Пусть $T = T\left(v_1, v_2, v_3\right)$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $\sigma T = T\left(v_2, v_1, v_3\right)$.

Если зафиксировать элемент σ, то указанное отображение является *линейным оператором* $\sigma : T_p^o V \mapsto T_p^o V$, $T \mapsto \sigma T$.

Симметрированием называется отображение $T_p^o V \to T_p^o V$, заданное формулой

$$\forall T \in T_p^o V \quad SymT = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma T$$

Оператор симметрирования обладает свойствами:

1. Sym – линейный оператор.
2. $Sym \circ Sym = Sym$.

3. Если $f:V\mapsto W$ – линейное преобразование, то $f^{\bullet}\circ Sym=Sym\circ f^{\bullet}$, где отображение $f^{\bullet}:T_p^oV\mapsto T_p^oW$ задано формулой $f^{\bullet}T(v_1,\dots v_p)=T(f(v_1),\dots f(v_p))$.
В координатном представлении

$$\left(SymT\right)_{i_1,i_2,\dots,i_p}=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}T_{i\sigma(1),i\sigma(2),\dots,i\sigma(p)}.$$

Пример. Пусть $T\in T_p^oV$, $p=2$. Так как $S_p=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$, то

$$SymT=\frac{1}{2}\left(\sigma_1T+\sigma_2T\right)=\frac{1}{2}\left(T\left(v_1,v_2\right)+T\left(v_2,v_1\right)\right).$$

Отображение, которое $\forall T\in T_p^oV$ ставит в соответствие тензор $Alt\left(T\right)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}sign\sigma\cdot\sigma\left(T\right)$, называется *альтернированием.*
В координатном представлении

$$\left(AltT\right)_{i_1,i_2,\dots,i_p}=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}sign\,\sigma\,T_{i\sigma(1),i\sigma(2),\dots,i\sigma(p)}.$$

Оператор альтернирования обладает свойствами:
1. оператор Alt линейный.
2. $Alt\circ Alt=Alt$
3. $f^{\bullet}\circ Alt=Alt\circ f^{\bullet}$.

Множество $Alt\left(T_p^oV\right)$ – называется множеством *кососимметричных (антисимметрических)* тензоров или p – форм. Множество $Alt\left(T_p^oV\right)$ является образом линейного отображения и,

следовательно, образует подпространство в T_p^oV, его обозначение - $Alt\left(T_p^oV\right)\equiv\Lambda^pV^*$.

Пусть $\omega^p\in\Lambda^pV^*$, $h^q\in\Lambda^qV^*$. Отображение $\Lambda^pV^*\times\Lambda^qV^*\to\Lambda^{p+q}V^*$,

$$\omega^p\wedge h^q:=\frac{(p+q)!}{p!q!}Alt\left(\omega\otimes h\right)$$

называется *внешним произведением* форм.
Свойства внешнего произведения:

1. ассоциативность $\left(\omega^p\wedge h^q\right)\wedge f^r=\omega^p\wedge\left(h^q\wedge f^r\right)$;

2. дистрибутивность $\omega^p\wedge\left(h^q+f^q\right)=\omega^p\wedge h^q+\omega^p\wedge f^q$;

3. косая коммутативность $\omega^p\wedge h^q=\left(-1\right)^{pq}h^q\wedge\omega^p$.

Из свойства 3, в частности, следует $\omega^1\wedge\omega^1=0$. Пусть $\dim V^*=n$. Можно доказать, что $\dim\Lambda^pV^*=C_n^p$, где $C_n^p=\frac{n!}{p!\left(n-p\right)!}$, и базисом линейного пространства Λ^pV^* является набор внешних произведений $\overrightarrow{\left\{e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\dots\wedge e^{ip}\right\}}$ $1\le i_1<i_2<\dots<i_p\le n$ базисных форм сопряженного пространства V^*.

Пусть $f:U\mapsto R^m$, точка $a\in U\subset R^n$. Функция f называется *дифференцируемой* в точке a, если существует линейное отображение

$$L_f:T_aR^n\to T_{f(a)}R^m$$

такое, что $f\left(a+h\right)-f\left(a\right)=L_f\cdot h+o\left(h\right)$, где $o\left(h\right)\to0$ при $h\to0$. Обозначение: $L_f=f'(a)=df_a=Df\left(a\right)$. В случае $f:U\mapsto R$ значение дифференциала $Df(a)$ на векторе v $Df(a)(v)=\partial_i f(a)v^i=\partial_i f(a)e^i(v)=\partial_i f(a)dx^i(v)$. Здесь принимается $e^i:=dx^i$ (dx^i – линейная форма!).

Следовательно, $Df(a)=\partial_i f(a)dx^i$ – линейная форма в точке a.

Выражение

$$Df(x)=\partial_i f(x)dx^i,\ x\in U$$

называется дифференциальной 1 – формой на U. Отображение, ставящее в соответствие $\forall\delta\in U$ кососимметричную p – форму $\omega^p(x)$, называется *дифференциальной p – формой* ω^p.

11. Многообразия

11.1. Дифференцируемое многообразие

Пусть M – топологическое пространство, U – открытое множество в M, V – открытое множество в R^n, $\varphi:U\to V$ – гомеоморфизм (непрерывное взаимно однозначное отображение, имеющее непрерывное обратное отображение).

Топологическое пространство M называется *многообразием,* если $\forall x\in M,\exists U\subset M, x\in U$ и гомеоморфизм $\varphi:U\to V$. Пара (U,φ) называется *локальной картой* на M, а система локальных карт $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ – *атласом*, если $M=\cup U_\alpha$. Если точка x принадлежит областям определения двух карт $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ и (U_β,φ_β), то $U_{\alpha\beta}\equiv U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ и координаты $x^i(x)$, $x^{i'}(x)$ точки x в картах $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, (U_β,φ_β) соответственно связаны *преобразованием координат*

$$\varphi_{\beta\alpha}:\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})\to\varphi_\beta(U_{\alpha\beta}),\quad x^{i'}=\varphi_{\beta\alpha}(x^i),$$

где $\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$.

Многообразие М называется *дифференцируемым*, если все преобразования координат $\varphi_{\beta\alpha}$ – дифференцируемые функции.

Пример. Пусть S – сфера в R^3. Топология на S индуцируется топологией R^3. Атлас можно ввести с помощью проектирований точек сферы на координатные плоскости в R^3. Все преобразования координат – дифференцируемые функции из R^2 в R^2, поэтому S – дифференцируемое многообразие размерности $\dim S=2$.

Пусть M, H – два дифференцируемых многообразия, $\dim M=n$ $\dim H=n$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, (V_β,ψ_β) – локальные карты на M, H соответственно. Отображение $f:M\to H,\quad x\mapsto y=f(x)$ называется дифференцируемым, если дифференцируемы локальные записи $f_{\beta\alpha}:y^j=f^j_{\beta\alpha}(x^i)$ в картах $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, (V_β,ψ_β),

здесь $f_{\beta\alpha}(x^i)=\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}(x^i)$.

11.2. Касательное пространство

Пусть M – дифференцируемое многообразие, I – интервал в R, $\gamma:I\to Ì$ – параметризованная кривая на M, $\gamma_\alpha:I\to R^n$ – локальная запись γ, $\gamma_\alpha(t)=\varphi_\alpha\circ\gamma(t)=\gamma^i(t)e_i$ в карте $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$. Дифференцируя равенство $\gamma_\beta(t)=\varphi_{\beta\alpha}\circ\gamma_\alpha(t)$, получим $\tau_\beta=d\varphi_{\beta\alpha}\,\tau_\alpha$, где $\tau_\beta=\dfrac{dx^{i'}}{dt}e_{i'}$, $\tau_\alpha=\dfrac{dx^i}{dt}e_i$ и $d\varphi_{\beta\alpha}(x)\equiv A_{\beta\alpha}=\left[\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right]$. Так как набор чисел $\dfrac{d\gamma^i}{dt}$ преобразуется при замене координат, как набор компонентов вектора, то τ_β,τ_α можно рассматривать записи касательного вектора $\tau=\dfrac{d\gamma}{dt}$ в различных картах. Отметим, что из свойств преобразований координат следуют равенства $A_{\lambda\alpha} = A_{\lambda\beta} \cdot A_{\beta\alpha}, A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}^{-1}$.

Множество всех касательных векторов в точке $x \in M$ называется *касательным пространством* $T_x M$, а объединение $T(M) = \cup T_x M$ – *касательным расслоением* над *M*. Касательный вектор в точке $x \in M$ к j – той координатной линии обозначается символом $\partial_j x$. Система векторов $\{\partial_j x\}$ образует базис касательного пространства $T_x M$, замена базиса выполняется по формулам $\partial_{j'} x = A_{j'}^j \partial_j x$.

Пространство всех линейных форм на $T_x M$ называется *кокасательным* пространством и является сопряженным к $T_x M$, обозначение – $T_x^* M$. Дифференциалы dx^i образуют базис пространства $T_x^* M$, причем $dx^i(\partial_j x) = \delta_j^i$ (*взаимные* базисы).

Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – карта окрестности точки $x \in M$, $T_x M$ – касательное пространство. Тогда можно ввести взаимно однозначное отображение

$$\varphi_{\alpha x} : T_x M \to R^n, \tau \mapsto \tau_\alpha .$$

Если $f : M \to H$ – дифференцируемое отображение и $f_{\beta\alpha} : y^j = f_{\beta\alpha}^j(x^i)$ – его локальная запись в картах $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (V_β, ψ_β), то можно определить дифференциал $Df(x)$ равенством

$$Df(x) : T_x M \to T_{f(x)} H, v \mapsto w = Df(x)(v),$$

где $Df(x)(v) = \psi_{\beta y}^{-1} \circ df_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha x}(v)$, и матрица дифференциала $df_{\beta\alpha}$ является матрицей Якоби $\partial_i f_{\beta\alpha}^j$.

Атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ на *M* называется *ориентированным*, если $\forall \alpha, \beta \quad \det A_{\beta\alpha} = \det\left[\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right] > 0$. Многообразие *M* называется *ориентированным*, если на нем существует ориентированный атлас.

11.3. Тензорная алгебра на дифференцируемом многообразии

Конструкция тензорного произведения может быть применена к линейным пространствам $T_x M$ и $T_x^* M$. Например, тензор *T* типа (1,1) в точке $x \in M$ является элементом тензорного произведения $T_x M \otimes T_x^* M$ и его разложение по базису можно записать в виде $T(x) = T_{\bullet j}^i(x)\, \partial_i x \otimes dx^j$. Считая точку *x* переменной, приходим к тензорному полю типа (1,1) на многообразии *M*.

Многообразие *M* называется *римановым*, на нем задано гладкое метрическое тензорное поле $g(x) = g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$, матрица которого $g_{ij}(x)$ симметрична и положительно определена. Задание метрического поля (метрики) означает, что на каждом касательном пространстве вводится скалярное произведение

$$\forall v, w \in T_x M, \quad (v, w) = g_{ij}(x) v^i w^j ,$$

что превращает $T_x M$ в евклидово пространство. Поля внешних форм на *M* вводятся с помощью сопряженных пространств $T_x^* M$. Пусть $\omega^p(\eth) \in \Lambda^p(T_x^* M)$, тогда $\omega^p(\eth) = \omega_{i_1 i_2 \to i_p}(\eth) dx^{i_1} \Lambda dx^{i_2} \Lambda \to \Lambda dx^{i_p}$,

где стрелка обозначает суммирование по строго упорядоченной последовательности индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$.

11.4. Ковариантное дифференцирование

Обычное дифференцирование тензорных полей приводит к объектам, не являющимся в общем случае тензорами. Ковариантное дифференцирование не выводит из множества тензорных полей. Пусть T – тензорное поле типа *(p, q)* на M. Тогда

$$T(x)=T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q}(x)\partial_{i_1}x\,\partial_{i_2}x\dots\partial_{i_p}x\,dx^{j_1}\,dx^{j_2}\dots dx^{j_q},$$

здесь знаки тензорного произведения $\otimes$ в базисном элементе опущены для сокращения записи. *Ковариантная производная* тензорного поля ∇T (градиент T) находится по формуле

$$\nabla T(x)=\nabla_k T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q}(x)\partial_{i_1}x\partial_{i_2}x\dots\partial_{i_p}x dx^{j_1}dx^{j_2}\dots dx^{j_q}dx^k,$$

где компоненты $\nabla_k T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q}$ тензорного поля ∇T имеют вид

$$\nabla_k T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q}=\partial_k\,T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q}+\Gamma^{i_1}_{ik}T^{ii_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q}+\dots+\Gamma^{i_p}_{ik}T^{i_1i_2\dots i}_{j_1j_2\dots j_q}$$
$$-\Gamma^{j}_{j_1k}T^{i_1i_2\dots i_p}_{jj_2\dots j_q}-\dots-\Gamma^{j}_{j_qk}T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j}.$$

Тип нового тензорного поля ∇T – *(p, q+1)*.

Свойства операции ∇:

1. $\nabla\left(T+H\right)=\nabla T+\nabla H$.
2. $\nabla\left(T\otimes H\right)=\nabla T\otimes H+T\otimes\nabla H$.
3. $\nabla\left(ST\right)=S\left(\nabla T\right)$, где S – свертка по паре индексов.

Набор функций $\{\Gamma^k_{ij}\}$ называется *аффинной связностью* на M. Эти функции обеспечивают тензорный характер ковариантного дифференцирования, сам же набор $\{\Gamma^k_{ij}\}$ тензором не является. Действительно, для векторного поля $V=V^i\partial_i x$ из последней формулы следует $\nabla_k V^i=\partial_k V^i+\Gamma^i_{jk}V^j$. Используя обозначение $A^{k'}_k=\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$, можно записать:

$$\nabla_k V^i=A^{k'}_k\partial_{k'}(A^i_{i'}V^{i'})+A^j_{j'}\Gamma^i_{kj}V^{j'}=A^{k'}_kA^i_{i'}\partial_{k'}V+A^{k'}_k\partial_{k'}A^i_{i'}V^{i'}+A^j_{j'}\Gamma^i_{kj}V^{j'}$$

.

С другой стороны,

$$\nabla_k V^i=A^{k'}_kA^i_{i'}\nabla_{k'}V^{i'}=A^{k'}_kA^i_{i'}(\partial_{k'}V^{i'}+\Gamma^{i'}_{k'j'}V^{j'}).$$

Сравнивая эти два выражения и учитывая то, что равенство должно выполняться для любого поля V, получим

$A^{k'}_kA^i_{i'}\Gamma^{i'}_{k'j'}=A^{k'}_k\partial_{k'}A^i_{i'}+A^j_{j'}\Gamma^i_{kj}$. Тогда закон преобразования Γ^k_{ij}:

$$\Gamma^i_{kj}=A^{j'}_jA^{k'}_kA^i_{i'}\Gamma^{i'}_{k'j'}-A^{j'}_jA^{k'}_k\partial_{k'}A^i_{i'}.$$

Задание аффинной связности на многообразии M в общем случае не связано с заданием метрики на M.

Тензором кручения аффинной связности $\{\Gamma^k_{ij}\}$ называется объект $\Omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}$. Проверка тензорных свойств проводится с помощью закона преобразования Γ^k_{ij}. Связность Γ^k_{ij} называется *симметричной*, если тензор кручения равен нулю.

Симметричная аффинная связность $\{\Gamma^k_{ij}\}$ называется *согласованной с метрикой g (или римановой связностью)*, если $\nabla g=0$. Из равенства $\nabla_k g_{ij}=0$ можно получить выражения для римановой связности $\{\Gamma^k_{ij}\}$, единственной связности, согласованной с метрикой g:

$$\tilde{A}^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{ks}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right),\text{ где } g_{ik}g^{kj}=\delta^j_i.$$

11.5. Параллельный перенос и геодезические

Ковариантная производная позволяет ввести производную тензорного поля по направлению. Пусть $v=v^p\partial_p x$ – векторное поле на M. Тогда производная тензорного поля по направлению v

$$\nabla_v T = \nabla_k T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x)\partial_{i_1} x \dots dx^{j_q} dx^k (v^p \partial_p x) =$$

$$= \nabla_k T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x)\partial_{i_1} x \dots dx^{j_q} v^p dx^k (\partial_p x) =$$

$$= \nabla_k T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x)\partial_{i_1} x \dots dx^{j_q} v^p \delta^k_p .$$

И окончательно $\nabla_v T = v^k \nabla_k T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x)\partial_{i_1} x \dots dx^{j_q}$.

Если T – тензор типа *(p, q)*, то и его производная по направлению $\nabla_v T$ – тензор того же типа.

Пусть $\gamma : I \to \grave{I}$ – гладкая параметризованная кривая на *M*, $\tau = \dfrac{d\gamma}{dt}$ – её касательный вектор, T – тензорное поле типа *(p, q)*, тогда определена производная по направлению $\nabla_\tau T$.

Гладкое векторное поле T называется *параллельным* вдоль кривой γ, если $\nabla_\tau T = 0$. В локальных координатах

$$\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^p \frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{pk} = \frac{dT^i}{dt} + T^p \Gamma^i_{pk}\frac{dx^k}{dt} = 0 .$$

Система уравнений $\dfrac{dT^i}{dt} + T^p \Gamma^i_{pk}\dfrac{dx^k}{dt} = 0$ называется *системой уравнений параллельного переноса* вдоль кривой γ. Пусть *V,W* – два параллельных векторных поля вдоль кривой γ, тогда скалярное произведение (*V,W*) = const вдоль кривой γ. Кривая $\gamma : I \to \grave{I}$ называется *геодезической,* если $\nabla_\tau \tau = 0$. Уравнения $\dfrac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{pk}\dfrac{dx^p}{dt}\dfrac{dx^k}{dt} = 0$ называются *уравнениями геодезических.*

11.6. Тензор кривизны (тензор Римана-Кристоффеля)

Известно, что для функции двух переменных $x^3 = f\left(x^1, x^2\right)$, выполняется равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}$. В случае ковариантного дифференцирования в общем случае $\nabla_k \nabla_p V^i \neq \nabla_p \nabla_k V^i$.

Вычислим вторую ковариантную производную векторного поля *V*. Для этого введем обозначение $\nabla_p V^i \equiv T^i_p$, $T^i_p = \nabla_p V^i = \dfrac{\partial V^i}{\partial x^p} + \tilde{A}^i_{ps} V^s$, тогда

$$\nabla_k \nabla_p V^i = \nabla_k T^i_p = \frac{\partial T^i_p}{\partial x^k} + \tilde{A}^i_{ks} T^s_p - \tilde{A}^s_{kp} T^i_s =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^p} + \tilde{A}^i_{ps} V^s\right) + \tilde{A}^i_{ks}\left(\frac{\partial V^s}{\partial x^p} + \tilde{A}^s_{pl} V^l\right) - \tilde{A}^s_{kp}\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^s} + \tilde{A}^i_{sl} V^l\right).$$

Отсюда

$$\nabla_k \nabla_p V^i = \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^k \partial x^p} + \frac{\partial \tilde{A}^i_{ps}}{\partial x^k} V^s + \tilde{A}^i_{ks}\frac{\partial V^s}{\partial x^p} + \tilde{A}^i_{ks}\frac{\partial V^s}{\partial x^p} - \tilde{A}^s_{kp}\frac{\partial V^i}{\partial x^s} + \tilde{A}^i_{ks}\tilde{A}^s_{pl} V^l -$$

$-\tilde{A}^s_{kp}\tilde{A}^i_{sl} V^l$. Аналогично получим

$$\nabla_p \nabla_k V^i = \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^p \partial x^k} + \frac{\partial \tilde{A}^i_{ks}}{\partial x^p} V^s + \tilde{A}^i_{ks}\frac{\partial V^s}{\partial x^p} + \tilde{A}^i_{ps}\frac{\partial V^s}{\partial x^k} - \tilde{A}^s_{pk}\frac{\partial V^i}{\partial x^s} + \tilde{A}^i_{ps}\tilde{A}^s_{kl} V^l - \tilde{A}^s_{pk}\tilde{A}^i_{sl} V^l$$

.

Тогда

$$\nabla_k \nabla_p V^i - \nabla_p \nabla_k V^i = \left(\frac{\partial \tilde{A}^i_{ps}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{A}^i_{ks}}{\partial x^p} + \tilde{A}^i_{kl}\tilde{A}^l_{ps} - \tilde{A}^i_{pl}\tilde{A}^l_{ks}\right) V^s$$

.

Тензор $T_{s\ \, k\ \, p}^{\bullet\ \bullet\ l} = \dfrac{\partial \tilde{A}^i_{ps}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \tilde{A}^i_{ks}}{\partial x^p} + \tilde{A}^i_{kl}\tilde{A}^l_{ps} - \tilde{A}^i_{pl}\tilde{A}^l_{ks}$ называется *тензором кривизны (тензором Римана-Кристоффеля).*

Равенство $T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ k\ p} = 0$ означает, что пространство допускает евклидову систему координат. Тензор кривизны имеет $\dfrac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$ независимых компонент (n – размерность многообразия M). В частности при $n = 2$ (поверхность) тензор имеет одну компоненту – гауссову кривизну K.

Свойства:

1. $T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ k\ p} = -T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ p\ k}$.
2. $T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ k\ p} + T^{\bullet\ \bullet\ i}_{k\ p\ s} + T^{\bullet\ \bullet\ i}_{p\ s\ k} = 0$ – тождество Риччи.
3. $\nabla_m T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ k\ p} + \nabla_k T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ p\ m} + \nabla_p T^{\bullet\ \bullet\ i}_{s\ m\ p} = 0$ – тождество Бианки.

Свертка тензора кривизны по паре индексов приводит к симметричному тензору, который называется *тензором Риччи*.

11.7. Внешнее дифференцирование

Пусть задана форма $\omega^p(\tilde{o}) \in \Lambda^p(T_x^*M)$, где $\omega^p(\tilde{o}) = \omega_{i_1 i_2 \to i_p}(\tilde{o})\, dx^{i_1} \Lambda\, dx^{i_2} \Lambda \to \Lambda\, dx^{i_p}$ (стрелка обозначает суммирование по строго упорядоченной последовательности индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$). Значение базисной формы на последовательности векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ из $\underbrace{T_xM \times T_xM \times \ldots \times T_xM}_{p}$ вычисляется по формуле

$dx^{i_1} \Lambda\, dx^{i_2} \Lambda \to \Lambda\, dx^{i_p}\,(x_1, x_2, \ldots, x_p) = X^{i_1 i_2 \ldots i_p}$. Здесь $X^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ – ориентированный объем p – мерного параллелепипеда, построенного на проекциях векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ на координатную p – мерную плоскость базисных векторов $(\partial_{i_1} x, \partial_{i_2} x, \ldots, \partial_{i_p} x)$,

$$X^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & \ldots & x_1^{i_p} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & \ldots & x_2^{i_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_p^{i_1} & x_p^{i_2} & \ldots & x_p^{i_p} \end{vmatrix}.$$

На множестве дифференциальных форм вводится операция внешнего дифференцирования d.

Линейное отображение $d : \Lambda^{\partial}(T_x^*M) \to \Lambda^{\partial+1}(T_x^*M)$ называется *внешним дифференциалом*, если:

1. $d(f) = df$, т.е. внешний дифференциал от обычной функции f совпадает с её обычным дифференциалом (по определению $\Lambda^0(T_x^*M)$ – множество обычных функций и $f \in \Lambda^0(T_x^*M)$).
2. $d(\omega \Lambda \psi) = d\omega \Lambda \psi + (-1)^{\deg\omega} \omega \Lambda d\psi$, где $\deg\omega$ – степень формы ω.
3. $d(d\omega) = 0$.

Пусть $\omega^p(\tilde{o}) = \omega_{i_1 i_2 \to i_p}(\tilde{o})\, dx^{i_1} \Lambda\, dx^{i_2} \Lambda \to \Lambda\, dx^{i_p}$,

тогда

$$d\omega^p(\tilde{o}) = d\omega_{i_1 i_2 \to i_p}(\tilde{o}) \Lambda\, dx^{i_1} \Lambda\, dx^{i_2} \Lambda \to \Lambda\, dx^{i_p} =$$

$$\partial_j \omega_{i_1 i_2 \to i_p}(\tilde{o}) dx^j \Lambda\, dx^{i_1} \Lambda\, dx^{i_2} \Lambda \to \Lambda\, dx^{i_p}.$$

Операция внешнего дифференцирования является обобщением операций градиента, ротора и дивергенции в векторном исчислении в R^3.

Пример. Пусть f – гладкая функция, тогда

$$d(f) = df = \partial_1 f\ dx^1 + \partial_2 f\ dx^2 + \partial_3 f\ dx^3 = grad\ f.$$

Используя предыдущие обозначения, можно записать:

$f \in \Lambda^0(R^{*3}),\ df \in \Lambda^1(R^{*3})$. Полагая по определению

$\omega_f^0 := f,\ \omega_v^1 := v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3$, получим

$d\omega_f^0 = \omega_{grad\ f}^1\ \ (v^i \equiv \partial_i f)$. Аналогично можно записать другие формулы векторного анализа $d\omega_w^1 = \omega_{rot\,w}^2$, $d\omega_w^2 = \omega_{div\,w}^3$, где

$$\omega_w^2 = w^1 dx^2 \Lambda\, dx^3 + w^2 dx^3 \Lambda\, dx^1 + w^3 dx^1 \Lambda\, dx^2 \in \Lambda^2(R^{*3})$$

и $\omega_f^3 = f\ dx^1 \Lambda\, dx^2 \Lambda\, dx^3 \in \Lambda^3(R^{*3})$.

11.8. Перенос и интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса

Если $l : R^m \to R^n$ – линейное отображение и $\omega^k : R^n \to R$ – внешняя к – форма, то возникает «сквозное» отображение $\omega^k \circ l : R^m \to R$, которое является внешней к – формой и обозначается $l^* \omega^k \equiv \omega^k \circ l$.

Для $v_i = l(w_i)$ $l^*\omega^k(w_1,\ldots,w_k) = \omega^k(lw_1,\ldots,lw_k)$. Отображение $l^* : \Lambda^k(R^{*n}) \to \Lambda^k(R^{*m})$ называется *переносом формы* (с R^n на R^m). Перенос форм – линейная операция, обладающая свойствами: $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$, $f^*(\omega^k \Lambda \omega^t) = f^*\omega^k\ \Lambda\ f^*\omega^t$ и $f^* d = df^*$. Пусть многообразие M – поверхность в R^n ($\dim M = m$), $M \subset P \subset R^n$, и в области P задана дифференциальная к – форма $\omega^k(x) = \omega_{i_1 \to i_k}(x)\, dx^{i_1} \Lambda \to \Lambda\, dx^{i_k}$, $x \in M$, определенная на векторах касательного пространства $T_x R^n$. Так как $T_x M \subset T_x R^n$, то можно ввести дифференциальную к – форму $\omega^k\big|_P$ как сужение $\omega^k(x)$, действующую на векторы из касательного пространства $T_x M$. Если (U,h) – локальная параметризация,

$$h : U \subset R^m \to V \subset M,\ t \mapsto x = h(t),$$

можно ввести перенос формы $h^*\omega^k(t) = \omega(h(t))(h'w_1,\ldots,h'w_k)$,

или в координатной форме

$h^*\omega^k(t) = \omega_{i_1 \to i_k}(x(t))\ A_{j_1 \to j_k}^{i_1 \to i_k}\, dt^{j_1} \Lambda \to \Lambda\, dt^{j_k}$, где

$$A_{j_1 \to j_k}^{i_1 \to i_k} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \ldots & \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_1}} & \ldots & \dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}} \end{bmatrix}.$$

Частный случай.

Пусть $m = n = k$,

тогда $h^*(dx^1 \Lambda \ldots \Lambda\, dx^n) = \det h'(t) dt^1 \Lambda \ldots \Lambda\, dt^n$. Считая, что $V = h(U)$, получим

$$\int_V f\ dx = \int_V f dx^1 \Lambda \ldots \Lambda dx^n = \int_U f(h(t)) \det h'(t) dt^1 \Lambda \ldots \Lambda dt^n$$

. Обозначим $\omega = f dx$, тогда окончательно $\int\limits_{h(U)} \omega = \int\limits_U h^*\omega$.

Многообразие M называется *многообразием с краем*, если в любой локальной системе координат $x^i(x)$ выполняется: $x^n(x) \ge 0$. Точка $x \in M$, в которой $x^n(x) > 0$, называется *внутренней* точкой M, если же $x^n(x) = 0$, то *граничной*. Множество граничных точек M называется *границей* M и обозначается символом ∂M. Если $\dim M = n$, то $\dim \partial M = n - 1$. Ориентация M позволяет ввести ориентацию ∂M, приняв в качестве атласа пересечения $(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha)$ и полагая локальные координаты $(y^1,\ldots,y^{n-1})$ на ∂M равными $(x^1,\ldots,x^{n-1})$. Пусть ω – дифференциальная форма степени *n-1*. Тогда справедлива *формула Стокса*

$$(-1)^n \int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Формула Стокса обобщает известные из векторного анализа классические формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса.

12. Библиографический список

Модуль 1.

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры./ Д.В. Беклемишев – М.: Наука, 1984.
2. Шевцов, Г.С. Линейная алгебра./ Г.С. Шевцов – М.: Гардарики, 1999.
3. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков – М.: Юнимедиастайл, 2002.

Модуль 2.

4. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ П.С. Александров – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
5. Постников, М.М. Аналитическая геометрия./ М.М. Постников – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
6. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.А. Бурдун, Е.А.Мурашко, М.М.Толкачев, и др.- Минск: Университетское, 1989.
7. Моденов, П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.

Модуль 3.

8. Мищенко, А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии./ А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.
9. Позняк, Э.Г. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В Шикин – М.: Изд-во МГУ, 1990.
10. Абрамов, А.А. Введение в тензорный анализ и риманову геометрию: учеб. пособие для вузов/ А.А. Абрамов – 2-е изд. – М.: Изд-во физ. – мат. лит., 2004.
11. Новиков, С.П. Элементы дифференциальной геометрии и топологии / С.П. Новиков, А.Т. Фоменко – М.: Наука, 1987.
12. Дифференциальная геометрия: учеб. пособие для мат. спец. вузов. / под ред. А.С. Феденко. – Минск: Изд-во БГУ, 1982.
13. Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: учебное пособие для вузов / – М.: Наука, 1987.
14. Фоменко, А.Т. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. / А.Т. Фоменко – М.: Изд-во Моск. ун- та, 1992.
15. Трофимов, В.В. Введение в геометрию многообразий с симметриями / В.В. Трофимов – М.: Изд-во МГУ, 1989.

16. Зуланке, Р. Дифференциальная геометрия и расслоения. / Р. Зуланке, П. Винтген – М.: Мир, 1975.
17. Торп, Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии./ Дж. Торп – М.: Мир, 1982.
18. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие для вузов./ А.И. Кострикин, Ю.И. Манин – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986.
19. Стернберг, С. Лекции по дифференциальной геометрии./ С. Стернберг – М.: Мир, 1970.
20. Неструев, Дж. Гладкие многообразия и наблюдаемые./ Дж. Неструев – М.: МЦНМО, 2000.
21. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений./ В.В Трофимов, А.Т. Фоменко – М.: Факториал, 1995.

Учебное издание

Белашевский Геннадий Егорович
Калугин Николай Александрович
Чостковская Ольга Петровна
Старинова Ольга Леонардовна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Технический редактор Э. И. К о л о м и е ц
Редакторская обработка Т. К. К р е т и н и н а
Корректорская обработка А. А. Н е ч и т а й л о
Доверстка Е. А. Л а р и о н о в а

Подписано в печать 10.10.07. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 10,0
Тираж 120 экз. Заказ . ИП- 25/2007.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.