

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра общей и теоретической физики

Е. К. Башкиров, А. В. Горохов

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ОПТИКУ

Часть 1

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Самара
Издательство «Самарский университет»
2013

УДК 530.1:512.54+535.14
ББК 22.31
Б 33

Рецензент д-р физ.-мат наук, проф. А. Ф. Крутов

Башкиров, Е. К.

Б 33 Введение в квантовую оптику: в 3 ч. : учебное пособие /
Е. К. Башкиров, А. В. Горохов. – Самара : Изд-во «Самарский уни-
верситет», 2013. Ч. 1. – 74 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с программами курсов «Квантовая электродинамика», «Кооперативные и когерентные явления» и «Квантовая оптика и квантовая информатика», которые читаются студентам и магистрантам физического факультета СамГУ.

Основное внимание уделено изложению базовых положений современной квантовой оптики.

Предназначено бакалаврам, студентам (специалистам) и магистрантам физических специальностей университетов, а также может быть интересно аспирантам, научным работникам и преподавателям вузов.

УДК 530.1:512.54+535.14
ББК 22.31

© Башкиров Е. К., Горохов А. В., 2013
© Самарский государственный
университет, 2013
© Оформление. Издательство
«Самарский университет», 2013

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Квантование свободного электромагнитного поля	7
§ 1.1. Классическое свободное электромагнитное поле	7
§ 1.3. Циклические граничные условия	12
§ 1.4. Представление вторичного квантования	17
§ 1.5. Задачи для самостоятельного решения	20
Глава 2. Состояния квантового электромагнитного поля	22
§ 2.1. Глауберовские когерентные состояния и их свойства	23
§ 2.2. Сжатые состояния и сжатый свет	27
§ 2.3. Состояния с определенной фазой	29
§ 2.4. Матрица плотности и тепловые состояния	32
§ 2.5. P -представление Глаубера — Сударшана и W -функция Вигнера	33
§ 2.6. Задачи для самостоятельного решения	36
Глава 3. Взаимодействие электромагнитного излучения с атомами	39
§ 3.1. Классическое электромагнитное поле в среде	39
§ 3.2. Функция Гамильтона поля, взаимодействующего с атомами . .	41
§ 3.3. Гамильтониан атома, взаимодействующего с квантовым электро- магнитным полем	44
§ 3.4. Модель двухуровневого атома	45
§ 3.5. Задачи для самостоятельного решения	51
Глава 4. Расчет вероятностей переходов и сечений рассеяния в рамках теории возмущения	52
§ 4.1. Теория квантовых переходов под влиянием внешнего возму- щения	52
§ 4.2. Спонтанное излучение двухуровневого атома	55
§ 4.3. Теория Дикке сверхизлучения системы двухуровневых атомов	59
§ 4.4. Комптоновское рассеяние	64

§ 4.5. Задачи для самостоятельного решения	68
Заключение	70
Библиографический список	71

Введение

История развития квантовой оптики и в более узком смысле квантовой электродинамики насчитывает более ста лет, если начать отсчет с квантовой теории равновесного теплового излучения, созданной Планком в 1900 году. Для объяснения закономерностей излучения абсолютно черного тела Планк впервые выдвинул гипотезу о том, что электромагнитное излучение испускается не непрерывно, а определенными порциями квантами с энергией пропорциональной частоте излучения. В 1905 г. Эйнштейну для объяснения законов фотоэффекта пришлось предположить, что свет не только должен испускаться, но и поглощаться порциями. Отметим также важную роль работы Эйнштейна 1917 года, где впервые введено понятие вынужденного или индуцированного излучения и сформулирована полуклассическая теория взаимодействия атомных систем с электромагнитным полем, не потерявшая своей актуальности по настоящее время.

Следующий шаг в построении последовательно квантовой теории взаимодействия вещества и поля был сделан в 1927 г. Дираком, который впервые применил процедуру квантования к свободному электромагнитному полю. Высшим достижением квантовой электродинамики, по-видимому, является блестящее подтверждение точайших радиационных поправок к дираковской теории атомных спектров, которые впервые были получены на основе релятивистски инвариантных методов теории возмущений, разработанных Томоногой, Швингером и Фейнманом в 1947 г. Многочисленные и продолжающиеся до настоящего времени экспериментальные проверки квантовой электродинамики показали ее безусловную справедливость вплоть до масштабов 10^{-14} см, т.е. в ее естественной области применимости, когда можно не учитывать взаимодействия неэлектромагнитной природы.

До 50-х годов прошлого века основным "потребителем" квантовой электродинамики можно было считать атомную спектроскопию. Однако в 50-х — начале 60-х годов родились новые разделы физики — физика лазеров и квантовая радиофизика (квантовая электроника). Для их целей существенны не только структура стационарных состояний и вероятностей электродинамических процессов, но и их полное динамическое описание. Появление новых разделов было обусловлено экспериментальной реализацией в этот период мазерного и лазерного эффектов в излучении. Сначала работоспособную теорию

лазера удалось создать в рамках полуклассической теории взаимодействия атомов с электромагнитным полем, в рамках которой рассмотрение атомов проводится в рамках квантового подхода, а поле считается классическим. Из ученых, внесших определяющий вклад в развитие этой теории, можно отметить имена Лэмба, Скалли, Хакена и Лэкса. И лишь в 80-е годы XX века удалось экспериментально наблюдать ряд новых эффектов взаимодействия излучения атомов с веществом, которые удалось понять и объяснить только в рамках полной квантовой теории взаимодействия атомов с электромагнитным полем. К таким эффектам можно отнести субпуассоновскую статистику света, антигруппировку фотонов, сжатие света, перепутывание состояний атомов и поля и др. Изучение таких эффектов и составляет предмет современной квантовой оптики.

В настоящем пособии рассматривается полностью квантовая нерелятивистская теория взаимодействия атомных систем с электромагнитным полем. В пособии описана процедура квантования атомных системы, взаимодействующих с электромагнитным полем, и на ее основе рассмотрен ряд задач квантовой оптики, связанных как с расчетом вероятностей электродинамических процессов, так и с полным динамическим описанием эволюции атомов и поля. Пособие состоит из трех частей. В первой части рассмотрена общая процедура получения квантового гамильтониана системы атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем, описаны наиболее интересные квантовые состояния электромагнитного поля, а также рассмотрен ряд эффектов, обусловленных взаимодействием атомов с квантовым полем, таких как спонтанное излучение изолированного атома, комптоновское рассеяние, для описания которых можно ограничиться нестационарной теорией возмущения. Вторая часть пособия содержит описание на основе полностью динамического подхода эффектов взаимодействия атомов с квантовым электромагнитным полем, таких как сверхизлучение, сжатие света, излучение атомов в высокочастотных резонаторах и др. Наконец, третья часть пособия посвящена физическим основам квантовой информатики и физики квантовых вычислений, при этом основное внимание уделено описанию фотон-фотонных, атом-фотонных и атом-атомных перепутанных состояний.

При написании пособия авторы находились под влиянием большого числа прекрасных монографий и курсов лекций по квантовой оптике [1-23].

Материалы пособия используются авторами при чтении потокового курса лекций «Квантовая электродинамика» для студентов 5 курса физического факультета, спецкурса «Когерентные и кооперативные явления» для студентов 4 курса специализации «Теоретическая физика», а также курса «Квантовая оптика и квантовая информатика», для магистрантов физического факультета направления «Теоретическая и математическая физика».

Глава 1. Квантование свободного электромагнитного поля

§ 1.1. Классическое свободное электромагнитное поле

Рассмотрим свободное классическое электромагнитное поле в вакууме в отсутствие зарядов и токов: $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Состояние такого электромагнитного поля можно задать в каждой точке пространства в каждый момент времени с помощью векторов напряженности электрического и магнитного полей

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t).$$

Эволюция векторов напряженности электрического и магнитного полей задается уравнениями Максвелла, которые для рассматриваемого случая имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Используя известные соотношения векторной алгебры

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \nabla(\nabla \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

а также 3-е и 4-е уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{H} = \nabla \vec{H} = 0$, $\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = 0$, из 1-го и 2-го уравнений Максвелла системы (1.1) легко получить волновые уравнения для векторов напряженностей магнитного и электрического поля

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.3}$$

Одними из возможных решений волновых уравнений (1.2), (1.3) являются решения в виде бегущих плоских монохроматических волн

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (1.4)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (1.5)$$

где частота ω и модуль волнового вектора \vec{k} связаны соотношением $k = \omega/c$ и \vec{E}_0 и \vec{H}_0 – комплексные амплитуды бегущих плоских волн. Решения (1.4), (1.5) описывает волну, движущуюся в направлении волнового вектора \vec{k} . Истинные электрическое и магнитное поля соответствуют действительным частям комплексных величин \vec{E} и \vec{H} .

Используя уравнения Максвелла, легко показать, что векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку векторов.

Кроме волнового вектора \vec{k} , важной характеристикой плоской волны является ее поляризация. В простейшем случае линейно поляризованной волны вектор напряженности электрического поля направлен вдоль фиксированного единичного вектора \vec{e}_1

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_1 E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.$$

В общем случае произвольной плоской волны мы можем представить вектор напряженности электрического (и магнитного) поля в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн (рис. 1)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1.6)$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{e}_1 E_{10} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{e}_2 E_{20} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

где $E_{10} = |E_{10}| e^{i\varphi_1}$ и $E_{20} = |E_{20}| e^{i\varphi_2}$ – комплексные амплитуды линейно поляризованных волн и φ_1 и φ_2 – фазы комплексных амплитуд.

Если амплитуды E_{10} и E_{20} имеют одинаковые фазы, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$, то (1.6) представляет собой линейно поляризованную волну с вектором поляризации, направленным под углом $\theta = \arctan(|E_{20}|/|E_{10}|)$ к оси \vec{e}_1 и с амплитудой $|E_0| = \sqrt{|E_{10}|^2 + |E_{20}|^2}$, как показано на рис. 2.

Если же E_{10} и E_{20} имеют различные фазы, то волна (1.6) называется эллиптически поляризованной. Если при этом комплексные амплитуды E_{10} и E_{20} одинаковы по модулю $|E_{10}| = |E_{20}| = |E_0|$, а по фазе отличаются на $\pm\pi/2$, то мы имеем дело с простейшей круговой (или циркулярной) поляризацией. Волна (1.6) в этом случае принимает вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = |E_{10}| (\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.$$

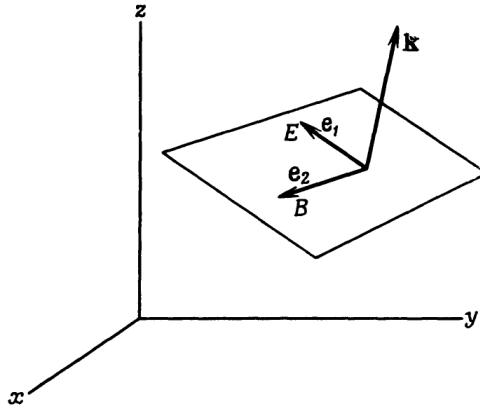


Рис. 1. Волновой вектор плоской электромагнитной волны и два ортогональных вектора поляризации

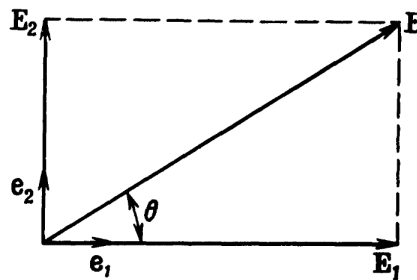


Рис. 2. Электрическое поле линейно поляризованной волны

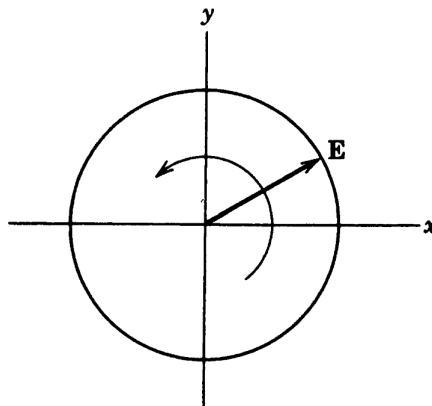


Рис. 3. Электрическое поле волны с круговой поляризацией

Пусть оси координат выбраны так, что волна распространяется в положительном направлении оси z , если \vec{e}_1 и \vec{e}_2 направлены соответственно вдоль осей x и y . Составляющие электрического поля мы получим, беря действительную часть

$$E_x(\vec{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t),$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \mp E_0 \cos(kz - \omega t).$$

В любой фиксированной точке пространства электрический вектор поля (1.6)

имеет постоянную амплитуду, но вращается по кругу с частотой ω , как показано на рис. 3. Верхний знак, $(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$, соответствует вращению против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего навстречу волне. Эта волна в оптике называется волной с левой круговой поляризацией, или имеет положительную спиральность. Последний термин представляется более удобным, поскольку в такой волне момент количества движения имеет положительную составляющую по оси z . При нижнем знаке $(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)$, если также смотреть навстречу волне, вращение электрического вектора происходит по часовой стрелке; это – волна с правой круговой поляризацией или с отрицательной спиральностью.

Две волны с круговой поляризацией аналогично линейно поляризованным волнам представляют собой базисную систему для описания общего случая поляризованных волн. Введем комплексные ортогональные единичные векторы

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2),$$

обладающие следующими свойствами

$$(\vec{e}_{\pm})^* \vec{e}_{\pm} = 1, \quad (\vec{e}_{\pm})^* \vec{e}_{\mp} = 0, \quad (\vec{e}_{\pm})^* \vec{e}_3 = 0.$$

Тогда общее представление (1.6) можно записать в эквивалентном виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_+ \vec{e}_+ + E_- \vec{e}_-) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (1.7)$$

где E_+ и E_- – комплексные амплитуды. Если E_+ и E_- различны по модулю, но имеют одинаковые фазы, то (1.7) представляет собой эллиптически поляризованную волну с главными осями эллипса, расположенными вдоль \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Отношение полуосей эллипса равно $(1+r)/(1-r)$, где $r = |E_-|/|E_+|$. Если же комплексные амплитуды E_+ и E_- имеют различные фазы, так что $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$, то оси эллипса, описываемого вектором \vec{E} , повернуты на угол $\alpha/2$. На рис. 4 показан общий случай эллиптической поляризации; в каждой точке пространства векторы \vec{E} и \vec{H} описывают эллипсы. При $r = \pm 1$ мы возвращаемся к случаю линейно поляризованных волн.

Число динамических переменных, описывающих свободное электромагнитное поле, можно уменьшить, вводя скалярный $\varphi(\vec{r}, t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r}, t)$ потенциалы поля

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (1.9)$$

В этом случае мы можем задать состояние поля указывая вместо шести функций координат и времени (трех проекций напряженности электрического и

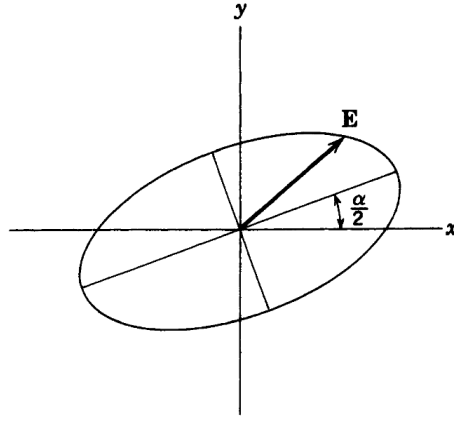


Рис. 4. Электрическое поле в эллиптически поляризованной волне

трех проекций напряженности магнитного поля) всего четыре функции координат и времени.

Соотношения (1.8), (1.9) определяют скалярный и векторный потенциалы неоднозначно, а с точностью до градиентных преобразований вида

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} - \nabla\chi, \\ \varphi' &= \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t},\end{aligned}$$

где $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ – произвольная функция координат и времени. Легко показать, что для свободного поля функцию χ можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ \operatorname{div}\vec{A} = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Такое соотношение (1.10) называется калибровкой Кулона. В кулоновской калибровке векторы напряженности электрического и магнитного полей связаны с векторным потенциалом соотношениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \quad (1.12)$$

Подставляя соотношения (1.11), (1.12) в уравнения Максвелла, нетрудно получить для векторного потенциала волновое уравнение вида

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Как и в случае волнового уравнения для напряженностей поля, одним из возможных решений уравнения (1.13) является решение в виде бегущей плоской волны

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (1.14)$$

§ 1.2. Циклические граничные условия

Как уже отмечалось выше, при описании свободного классического электромагнитного поля в кулоновской калибровке мы можем использовать непрерывные динамические переменные — три проекции векторного потенциала. Представляется более удобным перейти от непрерывного набора переменных к дискретному. Для этого будем рассматривать электромагнитное поле в ограниченном объеме пространства. Для простоты выберем в качестве такого объема (объема квантования) куб с ребром L . Наложим также на векторный потенциал циклические граничные условия:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}(x + L, y, z, t) = \vec{A}(x, y + L, z, t) = \vec{A}(x, y, z + L, t). \quad (1.15)$$

Далее заполним такими кубами все пространство. В результате такой операции векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ станет периодической функцией пространственных переменных, и мы можем разложить его в ряд Фурье

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (1.16)$$

где $\lambda = 1, 2$ — индекс, нумерующий две возможные независимые поляризации для плоской волны. При этом мы, как обычно, будем рассматривать свойства электромагнитного поля в выделенном объеме квантования.

Найдем, используя условия (1.15), возможные значения волнового вектора \vec{k} в разложении (1.16). Подставляя (1.16) в (1.15), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i(k_x(x+L) + k_y y + k_z z)} = \\ &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i(k_x x + k_y(y+L) + k_z z)} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z(z+L))}, \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = e^{ik_z L} = 1. \quad (1.17)$$

Соотношения (1.17) выполняются для проекций волнового вектора, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi}{L} n_x, & n_x &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ k_y &= \frac{2\pi}{L} n_y, & n_y &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ k_z &= \frac{2\pi}{L} n_z, & n_z &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \end{aligned}$$

В дальнейшем все вычисления для свободного электромагнитного поля мы будем проводить, используя дискретный набор динамических переменных $\vec{A}_{\vec{k},\lambda}$, представляющих собой фурье-амплитуды в разложении (1.16). Для того чтобы избавиться от произвола в выборе объема квантования, в конечных формулах для наблюдаемых мы перейдем к пределу $L \rightarrow \infty$. В случае больших значений L спектр возможных значений проекций волнового вектора становится квазинепрерывным, и в формулах для наблюдаемых суммы по проекциям волнового вектора могут быть заменены интегралами

$$\sum_{\vec{k}}(\dots) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int(\dots)dN(\vec{k}), \quad (1.18)$$

где $dN(\vec{k})$ – число разрешенных значений волнового вектора \vec{k} в интервале от \vec{k} до $\vec{k} + d\vec{k}$.

Вычислим величину $dN(\vec{k})$. Для этого рассмотрим вначале одну из проекций волнового вектора, например k_x . Рассмотрим проекции волнового вектора, соответствующие значениям n_x отличающимся на 1:

$$k_x = (2\pi/L)n_x,$$

$$k'_x = (2\pi/L)(n_x + 1).$$

Тогда расстояние между соседними значениями проекции волнового вектора k_x в пространстве волновых векторов равно

$$\Delta k_x = k'_x - k_x = (2\pi/L).$$

Число разрешенных значений проекции волнового вектора k_x , приходящихся на интервал dk_x , есть

$$dN(k_x) = dk_x/\Delta k_x = (L/2\pi)dk_x.$$

Тогда число разрешенных значений волнового вектора, проекции которых лежат в интервалах $(k_x, k_x + dk_x)$, $(k_y, k_y + dk_y)$ и $(k_z, k_z + dk_z)$, равно

$$dN(\vec{k}) = dN(k_x)dN(k_y)dN(k_z) = \frac{V}{(2\pi)^3}dk_xdk_ydk_z, \quad (1.19)$$

где $V = L^3$.

Тогда окончательно формула (1.18) принимает вид

$$\sum_{\vec{k}}(\dots) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \int(\dots)dk_xdk_ydk_z. \quad (1.20)$$

При вычислении интеграла в правой части выражения (1.20) мы можем использовать не только декартовы, но и сферические координаты в пространстве волновых векторов. Число состояний поля с модулем волнового вектора в интервале $(k, k + dk)$ и направлением волнового вектора, лежащим в телесном угле $d\Omega$, определяется формулой

$$dN_k = \frac{V}{(2\pi)^3} dk k^2 d\Omega, \quad (1.21)$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла в \vec{k} -пространстве. Тогда формула (1.20) примет вид

$$\sum_{\vec{k}} (\dots) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \int (\dots) k^2 dk d\Omega, \quad (1.22)$$

Подставим далее разложение (1.16) в волновое уравнение (1.13) для векторного потенциала. В результате получим временное уравнение для фурье-образов векторного потенциала

$$\ddot{\vec{A}}_{\vec{k},\lambda}(t) + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k},\lambda}(t) = 0. \quad (1.23)$$

Решениями уравнения (1.23) являются функции вида $e^{\pm i\omega_{\vec{k}}t}$. Выберем решения уравнения (1.23), соответствующие фурье-компоненте векторного потенциала с волновым вектором \vec{k} , вида $e^{-i\omega_{\vec{k}}t}$, а – фурье-компоненте для $(-\vec{k})$ решение вида $e^{+i\omega_{\vec{k}}t}$. В этом случае формула (1.16) примет вид разложения векторного потенциала в виде суперпозиции бегущих волн

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \{ \vec{a}_{\vec{k},\lambda}(t) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} + \vec{a}_{\vec{k},\lambda}^*(t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \}, \quad (1.24)$$

где комплексные амплитуды бегущих волн связаны с прежними фурье-амплитудами соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\vec{k},\lambda} &= \vec{a}_{\vec{k},\lambda} + \vec{a}_{\vec{k},\lambda}^*, \\ \dot{\vec{A}}_{\vec{k},\lambda} &= -i\omega_{\vec{k}}(\vec{a}_{\vec{k},\lambda} - \vec{a}_{\vec{k},\lambda}^*). \end{aligned}$$

Заметим, что векторный потенциал может быть представлен не только в виде суперпозиции бегущих, но и в виде суперпозиции стоячих волн [1].

Для упрощения математических выкладок будем всегда в дальнейшем использовать в качестве базиса для описания поляризации поперечных волн две линейно поляризованные волны, направления поляризации которых задаются единичными векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Тогда амплитуды бегущих волн удобно представить в следующем виде:

$$\vec{a}_{\vec{k},\lambda} = a_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda},$$

$$\vec{a}_{\vec{k},\lambda}^* = a_{\vec{k},\lambda}^* \vec{e}_{\vec{k},\lambda},$$

где индекс поляризации λ принимает два возможных значения $\lambda = 1, 2$.

В этом случае разложение (1.24) для векторного потенциала принимает вид

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \{a_{\vec{k},\lambda}(t) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} + a_{\vec{k},\lambda}^*(t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\}. \quad (1.25)$$

Таким образом, мы можем использовать для описания состояния свободного электромагнитного поля вместо непрерывного набора переменных $\vec{A}(\vec{r}, t)$ дискретный набор переменных $\{a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k},\lambda}^*\}$, представляющих собой комплексные амплитуды бегущих волн. Такие величины можно рассматривать как дискретный набор классических «переменных поля». Очевидно, что не только векторный потенциал (1.25), но и любая другая наблюдаемая величина для электромагнитного поля может быть представлена через новые переменные поля. В частности, для напряженностей электрического и магнитного полей имеем

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i \sum_{\vec{k},\lambda} k \{a_{\vec{k},\lambda}(t) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} - a_{\vec{k},\lambda}^*(t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\}, \quad (1.26)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \{a_{\vec{k},\lambda}(t) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} [\vec{k}, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}] - a_{\vec{k},\lambda}^*(t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} [\vec{k}, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}]\}, \quad (1.27)$$

где мы учли, что $\omega_{\vec{k}}/c = k$.

Для того чтобы выразить энергию свободного электромагнитного поля, подставим разложения (1.26) и (1.27) в формулу

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV,$$

где интегрирование ведется по объему квантования V . Так как волновой вектор \vec{k} принимает значения

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x \vec{i}_x + n_y \vec{i}_y + n_z \vec{i}_z),$$

то мы видим, что

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} dV = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Учитывая последнее соотношения и условие $\omega_{\vec{k}} = \omega_{-\vec{k}}$, получаем для энергии

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\vec{k},\lambda,\lambda'} (a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^* + a_{\vec{k},\lambda}^* a_{\vec{k},\lambda}) (k^2 \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda'} + ([\vec{e}_{\vec{k},\lambda}, \vec{k}][\vec{e}_{\vec{k},\lambda'}, \vec{k}]) - \quad (1.28)$$

$$-(a_{\vec{k},\lambda} a_{-\vec{k},\lambda'} + a_{\vec{k},\lambda}^* a_{-\vec{k},\lambda'}^*)(k^2 \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda'} + ([\vec{e}_{\vec{k},\lambda}, \vec{k}][\vec{e}_{-\vec{k},\lambda'}, (-\vec{k})])).$$

Воспользуемся также правилами векторного анализа для вычисления выражений

$$\begin{aligned} ([\vec{e}_{\vec{k},\lambda}, \vec{k}][\vec{e}_{\vec{k},\lambda'}, \vec{k}]) &= ([\vec{e}_{\vec{k},\lambda}[\vec{k}, e_{\vec{k},\lambda'}]]\vec{k}) = \\ &= [(\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda'})\vec{k} - (\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{k})\vec{e}_{\vec{k},\lambda'}]\vec{k} = k^2(\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda'}) = k^2 \delta_{\lambda,\lambda'}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где использовано, что $(\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{k}) = 0$ и $\vec{k}\vec{k} = k^2$. С помощью аналогичных преобразований получаем

$$([\vec{e}_{\vec{k},\lambda}, \vec{k}][\vec{e}_{-\vec{k},\lambda'}, \vec{k}]) = (\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda'}) (\vec{k}(-\vec{k})) = -k^2(\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{-\vec{k},\lambda'}). \quad (1.30)$$

Из (1.30) следует, что последний член в (1.28) тождественно обращается в нуль, в то время как из (1.29) следует, что в первом члене второй сомножитель сводится к $2k^2 \delta_{\lambda,\lambda'}$, и таким образом,

$$\mathcal{E} = \frac{V}{4\pi c^2} \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k}}^2 (a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^* + a_{\vec{k},\lambda}^* a_{\vec{k},\lambda}), \quad (1.31)$$

где мы учли, что $\omega_{\vec{k}} = kc$. Аналогичным образом, для импульса поля в объеме квантования

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi} \int [\vec{E}, \vec{H}] dV$$

с использованием новых переменных получаем выражение вида

$$\vec{G} = \frac{V}{4\pi} \sum_{\vec{k},\lambda} \vec{k} (a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^* + a_{\vec{k},\lambda}^* a_{\vec{k},\lambda}). \quad (1.32)$$

Для целей последующего перехода к квантовой теории свободного электромагнитного поля следует произвести еще некоторое преобразование этих переменных, в результате которого уравнения поля приобретают вид, аналогичный каноническим уравнениям классической механики. Для этого вместо комплексных амплитуд $a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k},\lambda}^*$ введем действительные канонические переменные поля следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{\vec{k},\lambda} &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (a_{\vec{k},\lambda} + a_{\vec{k},\lambda}^*), \\ P_{\vec{k},\lambda} &= i\omega \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (a_{\vec{k},\lambda} - a_{\vec{k},\lambda}^*). \end{aligned}$$

Обратные соотношения имеют вид

$$a_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\pi c^2}{V}} (Q_{\vec{k},\lambda} + iP_{\vec{k},\lambda}), \quad (1.33)$$

$$a_{\vec{k},\lambda}^* = \sqrt{\frac{\pi c^2}{V}} (Q_{\vec{k},\lambda} - iP_{\vec{k},\lambda}). \quad (1.34)$$

Векторный потенциал выражается через канонические переменные согласно

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ Q_{\vec{k},\lambda} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t) \vec{e}_{\vec{k},\lambda} - \frac{1}{\omega_{\vec{k},\lambda}} P_{\vec{k},\lambda} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t) \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \right\}. \quad (1.35)$$

Подставляя соотношения (1.33), (1.34) в формулу для энергии (1.32), получим классическую функцию Гамильтона для поля в объеме квантования в виде

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda} (P_{\vec{k},\lambda}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k},\lambda}^2). \quad (1.36)$$

Таким образом, классическая функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре канонических переменных $Q_{\vec{k},\lambda}, P_{\vec{k},\lambda}$. Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенным волновым вектором и поляризацией, причем имеет вид функции Гамильтона одномерного гармонического осциллятора. Поэтому о полученном разложении можно говорить как о разложении классического поля на осцилляторы.

§ 1.3. Представление вторичного квантования

Перейдем теперь к квантованию свободного электромагнитного поля. Для этого мы должны рассматривать канонические переменные – обобщенные координаты и обобщенные импульсы – как операторы с правилами коммутации

$$[\hat{Q}_{\vec{k},\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}',\lambda'}] = i\hbar \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}.$$

Вместе с ними эрмитовыми операторами также становятся векторный потенциал \vec{A} , напряженности электрического \vec{E} и магнитного поля \vec{H} . В квантовом случае классическая функция Гамильтона превращается в гамильтониан свободного электромагнитного поля

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} (\hat{P}_{\vec{k},\lambda}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}^2).$$

При описании квантового электромагнитного поля удобно использовать представление вторичного квантования. Для этого введем операторы $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ и $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$

$$\hat{Q}_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+),$$

$$\hat{P}_{\vec{k},\lambda} = \omega_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ - \hat{a}_{\vec{k},\lambda}),$$

удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям бозевского типа

$$[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k}',\lambda'}^+] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (1.37)$$

В представлении вторичного квантования гамильтониан свободного электромагнитного поля есть

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+). \quad (1.38)$$

Операторы $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$ и $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ действуют в пространстве функций $|\dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots\rangle$, зависящих от чисел заполнения $n_{\vec{k},\lambda} = 0, 1, 2, \dots$. Действия операторов $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$ и $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ на волновые функции задаются следующими правилами:

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda} |\dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}} |\dots, n_{\vec{k},\lambda} - 1, \dots\rangle, \quad (1.39)$$

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ |\dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} + 1} |\dots, n_{\vec{k},\lambda} + 1, \dots\rangle. \quad (1.40)$$

Из (1.39) и (1.40) следует, что оператор $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$ увеличивает, а оператор $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ уменьшает число $n_{\vec{k},\lambda}$ на единицу в состоянии, определяемом функцией $|\dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots\rangle$. Величины $n_{\vec{k},\lambda}$ являются собственными значениями оператора

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k},\lambda} = n_{\vec{k},\lambda} |\dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots\rangle.$$

Числа $n_{\vec{k},\lambda}$ мы будем интерпретировать в дальнейшем как числа фотонов в моде с волновым вектором \vec{k} и поляризацией λ . Соответственно операторы $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$ и $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ – как операторы рождения и уничтожения фотонов, а оператор $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ – как оператор числа фотонов в моде (\vec{k}, λ) .

С учетом коммутационного соотношения (1.37) гамильтониан свободного электромагнитного поля (1.38) можно представить в виде

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.41)$$

Оператор векторного потенциала свободного электромагнитного поля в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t) \vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+(t) \vec{e}_{\vec{k},\lambda}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \quad (1.42)$$

где $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t) = \hat{a}_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_{\vec{k}}t}$ и $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}(t) = \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} e^{i\omega_{\vec{k}}t}$. Нетрудно также получить выражения для операторов напряженности электрического и магнитного полей свободного электромагнитного поля

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\omega_{\vec{k}}\hbar c^2}{V}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t) \vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}(t) \vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{-i\vec{k}\vec{r}}),$$

$$\hat{\vec{H}}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t) [\vec{k}, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}] e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}(t) [\vec{k}, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}] e^{-i\vec{k}\vec{r}}).$$

Вычислим энергию свободного поля в состоянии с определенным числом фотонов в каждой из мод. Используя формулу (1.41), получаем

$$\mathcal{E} = \langle \dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots | \hat{H} | \dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots \rangle = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right).$$

Состояние электромагнитного поля, в котором во всех модах поля нет фотонов, т.е.

$$n_{\vec{k}_1} = n_{\vec{k}_2} = \dots = 0,$$

называется вакуумным состоянием поля. Несмотря на отсутствие фотонов, энергия поля в вакуумном состоянии отлична от нуля

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\vec{k}}. \quad (1.43)$$

Число слагаемых в сумме (1.43) бесконечно, а частоты мод поля положительны. Это означает, что энергия вакуумного состояния поля бесконечна. Избавиться от такой расходимости для энергии нулевых колебаний, исходя из первых принципов квантовой теории, невозможно. Однако, заметим, что в подавляющем числе экспериментов измеряемый отклик пропорционален энергии возбуждения поля относительно энергии нулевых колебаний $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$. Поэтому в дальнейшем мы будем просто отсчитывать энергию свободного поля от энергии вакуумного поля. В этом случае гамильтониан свободного электромагнитного поля примет вид

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}. \quad (1.44)$$

Основным аргументом при использовании гамильтониана свободного поля в виде (1.44) будет полное согласие полученных на основе этого выражения теоретических следствий эксперименту.

Заметим, что существует некоторое количество экспериментов, в которых измеряется некоторое изменение энергии самих нулевых колебаний, например, связанных с эффектом Казимира (притяжение двух проводящих пластин или сфер, находящихся на малом расстоянии) [24;25]. Однако и в этих экспериментах вычисляется сила притяжения проводников, которая выражается через разность двух бесконечных энергий нулевых колебаний для свободного поля и при наличии проводников.

§ 1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Используя уравнения Максвелла (1.1) для свободного электромагнитного поля, доказать, что векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку векторов.
2. Используя соотношения (1.26)-(1.30), получить формулу (1.32) для импульса свободного электромагнитного поля в объеме квантования.
3. Доказать, что кулоновская калибровка (1.10) удовлетворяет градиентному преобразованию для потенциалов свободного электромагнитного поля.
4. Поле излучения в простом проводящем кубическом резонаторе со стороной L удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

и условию кулоновской калибровки $div \vec{A} = 0$. Покажите, что решение, удовлетворяющее граничным условиям (поле обращается в ноль на стенках резонатора), имеет следующие составляющие:

$$A_x(\vec{r}, t) = A_x(t) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z),$$

$$A_y(\vec{r}, t) = A_y(t) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z),$$

$$A_z(\vec{r}, t) = A_z(t) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z),$$

где $\vec{A}(t)$ не зависит от положения, а компоненты волнового вектора определяются выражениями $k_i = 2\pi/L$ ($i = x, y, z$). Покажите, что целые числа n_x, n_y, n_z в выражении таковы, что только одно из них может равняться нулю в данный момент времени.

5. Рассмотрите одномодовое квантовое электромагнитное поле, описываемое оператором векторного потенциала

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \vec{e}_{\vec{k},\lambda}^- e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)}).$$

- Найти для этого поля операторы напряженности электрического и магнитного поля $\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)$, $\hat{\vec{H}}(\vec{r}, t)$.
- Покажите, что для этого поля

$$\langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{\vec{H}}(\vec{r}, t) | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = 0.$$

- Используя соотношения (1.25), (1.33) и (1.34), вывести формулу (1.35) для векторного потенциала свободного электромагнитного поля.
- Используя коммутационные соотношения (1.37), покажите, что гамильтониан свободного электромагнитного поля в представлении вторичного квантования имеет вид (1.41).
- Покажите, что при использовании "нормальной" формы записи операторов рождения и уничтожения фотонов гамильтониан (1.38) принимает вид (1.44). "Нормальной" называется такая форма записи операторных выражений, при которой операторы рождения всегда располагаются слева от операторов уничтожения.

Глава 2. Состояния квантового электромагнитного поля

В предыдущей главе было показано, что гамильтониан квантового свободного электромагнитного поля сводится к (бесконечной) сумме гамильтонианов одномодовых квантовых гармонических осцилляторов (см. §1.3). Каждому осциллятору при квантовании поля в полости отвечают состояния $|n_{\vec{k},\lambda}\rangle$, где $n_{\vec{k},\lambda} = 0, 1, 2, \dots$ — число фотонов в моде с номером (\vec{k}, λ) , \vec{k} — волновой вектор, а λ — состояние поляризации поля.

Состояния полного поля (с бесконечным числом мод)

$$|\{n_{\vec{k},\lambda}\}\rangle = |\dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots\rangle$$

образуют удобный полный ортонормированный базис, который называется фоковским ¹ (см., например, [1;2]). В результате произвольное чистое квантовое состояние поля можно представить в виде суперпозиции произведений одномодовых фоковских состояний:

$$|\Psi\rangle = \prod_{\{\vec{k},\lambda\}} \otimes \left(\sum_{n_{\vec{k},\lambda}} C_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle \right).$$

В данной главе мы изучим наиболее важные частные случаи как таких чистых состояний, так и тех, которые можно описать с использованием матрицы плотности. Последние называют смешанными состояниями.

В основном мы будем ограничиваться рассмотрением отдельной моды квантового электромагнитного поля. Такое ограничение согласуется с последними экспериментальными достижениями резонаторной квантовой электродинамики [5;6] при описании поля в высокодобротных резонаторах, выделяющих одну или несколько фотонных мод.

В случае одной моды (индексы моды далее будем опускать) фоковские состояния являются собственными векторами оператора числа фотонов $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$:

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^+ \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle,$$

¹Свойства этого базиса изложены в §1.4

где $n = 0, 1, 2, \dots$ имеет смысл числа фотонов в моде.

Нормированное на единицу вакуумное состояние моды $|0\rangle$ определено соотношением:

$$\hat{a}|0\rangle = 0.$$

Действие операторов рождения \hat{a}^+ и уничтожения \hat{a} на фоковские состояния дается формулами:

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Множество фоковских состояний является полной и ортонормированной системой состояний:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

С помощью фоковского базиса можно задавать как чистые состояния

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1,$$

так и смешанные состояния (см. §2.4), определенные матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{nm} |n\rangle\langle m|.$$

§ 2.1. Глауберовские когерентные состояния и их свойства

Выбор тех или иных физических состояний определяется исследуемыми физическими процессами. Для процессов излучения и поглощения небольшого числа фотонов, которые можно описать в низших порядках теории возмущения, удобным является фоковский базис. В этом базисе число фотонов в моде является определенным, но фазы отдельных состояний оказываются полностью неопределенными (соотношение неопределенности), но с использованием такого базиса не удастся адекватно описать такие явления как *когерентность*. В такой ситуации исключительно полезны (глауберовские) когерентные состояния (КС) $|\alpha\rangle$, которые были введены Глаубером в 1963 г.² для описания свойств лазерного излучения [26;27]. Оказалось, что именно

²Впервые такие состояния (нерасплывающиеся гауссовы пакеты для квантового осциллятора) были введены еще в 1926 г. Э. Шредингером (см. далее).

с помощью состояний $|\alpha\rangle$ наиболее естественно осуществляется переход к описанию интенсивных лазерных пучков.

Когерентные состояния вводятся Глаубером как нормированные на единицу собственные векторы для оператора уничтожения

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

где $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ – любое комплексное число.

Найдем разложение $|\alpha\rangle$ по фоковским состояниям $|n\rangle$.

Для этого умножим обе стороны соотношения (2.1) на бра-вектор $\langle n|$. Используя действие оператора \hat{a} на векторы $|n\rangle$, получим:

$$\langle n|\hat{a}|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle.$$

Используя получившееся рекуррентное соотношение, выразим $\langle n|\alpha\rangle$ через скалярное произведение $\langle 0|\alpha\rangle$:

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle.$$

С учетом нормировки найдем, что $|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2)$.

Выбирая фазовый множитель равным единице, находим разложение:

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.2)$$

Поскольку операторы \hat{a} , \hat{a}^+ эрмитово сопряжены, из (2.1) следует, что

$$\langle \alpha|\hat{a}^+ = \alpha^* \langle \alpha|. \quad (2.3)$$

Вспоминая вид оператора напряженности свободного квантованного электромагнитного поля

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\omega_k \hbar c^2}{V}} (\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+(t) \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i\vec{k}\vec{r}}),$$

и используя формулы (2.1) и (2.3), легко найти, что в одномодовом случае:

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\hat{\vec{E}}|\alpha\rangle &= \sqrt{\frac{2\pi\omega \hbar c^2}{V}} \vec{e} \left(\alpha e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \alpha^* e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \right) = \\ &= 2\sqrt{\frac{2\pi\omega \hbar c^2}{V}} |\alpha| \vec{e} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Видно, что последнее выражение имеет вид одномодового классического поля с векторной амплитудой:

$$\vec{E}_0 = 2\sqrt{\frac{2\pi\omega \hbar c^2}{V}} |\alpha| \vec{e}.$$

Именно это свойство КС и было использовано Глаубером при последовательно квантовом описании когерентного лазерного излучения.

Перечислим другие важные свойства осцилляторных КС.

- Скалярное произведение:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^* \beta) \right]. \quad (2.5)$$

Отсюда ясно, что два разных КС не ортогональны, и вероятность перехода между ними равна: $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$.

- Разложение единицы:

$$\hat{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \equiv \frac{1}{\pi} \int d\text{Re}(\alpha) d\text{Im}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) следует, что система КС переполнена

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha | \beta \rangle.$$

- Оператор сдвига:

КС $|\alpha\rangle$ получается из вакуумного состояния $|0\rangle$ действием унитарного оператора $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.7)$$

Для вывода формулы (2.7) представим оператор $\hat{D}(\alpha)$ в распутанном виде

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) |0\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle, \end{aligned}$$

Здесь использовано разложение $e^{-\alpha^* \hat{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha^* \hat{a})^n}{n!} = \hat{1} - \alpha^* \hat{a} + \dots$ и тот факт, что $\hat{a} |0\rangle = 0$.

- Распределение фотонов в КС:

Если фотонная мода приготовлена в КС α , то вероятность обнаружить в моде n -фотонов равна:

$$w_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^n e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \quad (2.8)$$

что соответствует распределению Пуассона со средним числом фотонов $\langle N \rangle = |\alpha|^2$ и среднеквадратичным отклонением

$$(\Delta N)^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2.$$

В результате относительная флуктуация

$$(\Delta N) / \langle \hat{N} \rangle = (\langle \hat{N} \rangle)^{-1/2}$$

стремится к нулю с ростом среднего числа фотонов.

- КС минимизируют соотношение неопределенности осциллятора поля: $(\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2)$. Здесь $\Delta F = \sqrt{\langle \hat{F}^2 \rangle - \langle \hat{F} \rangle^2}$. Операторы координаты и импульса \hat{x} , \hat{p} связаны с модовыми операторами \hat{a} , \hat{a}^+ соотношениями:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\xi} + i\hat{\pi}), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\xi} - i\hat{\pi}), \quad \hat{\xi} = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} \hat{x}, \quad \hat{\pi} = \sqrt{\frac{1}{\hbar\omega}} \hat{p}. \quad (2.9)$$

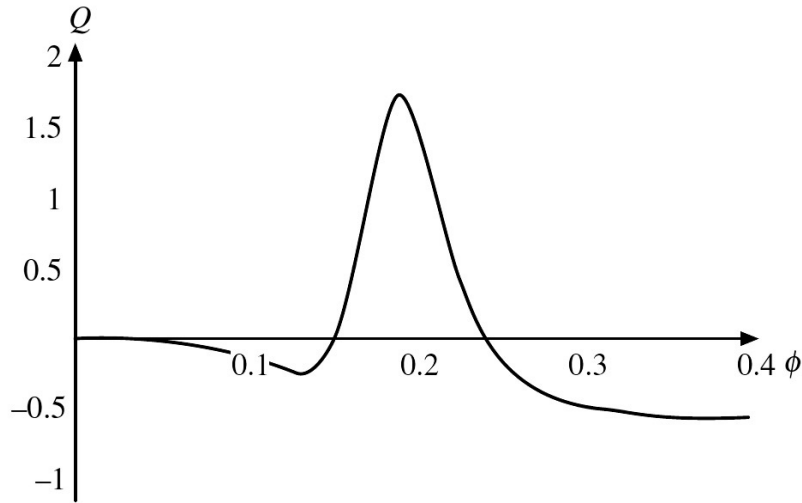


Рис. 5. Параметр Манделя Q для кота Шредингера с $\alpha = 4$

- Параметр Манделя Q :

$$Q = \frac{(\Delta N)^2 - \langle N \rangle}{\langle N \rangle}. \quad (2.10)$$

Для моды, приготовленной в КС, $Q = 0$.

Неклассическим называется поле с субпуассоновским поведением, когда $Q < 0$.

Примером неклассического состояния поля служит когерентная суперпозиция двух КС — состояние типа "кота Шредингера":

$$|\Psi_{cat}\rangle = \left[2 + 2 \cos(\alpha^2 \sin \phi) e^{-2\alpha^2 \sin^2(\phi/2)} \right]^{-1/2} \left[|\alpha e^{i\phi/2}\rangle + |\alpha e^{-i\phi/2}\rangle \right]. \quad (2.11)$$

Здесь α предполагается вещественным. Для этой суперпозиции существуют интервалы углов ϕ , в которых параметр Мандела $Q < 0$ (см. рис. 5). Неклассическое поведение можно объяснить интерференцией двух когерентных состояний.

Некогерентная смесь тех же КС, заданная матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ |\alpha e^{i\phi/2}\rangle \langle \alpha e^{i\phi/2}| + |\alpha e^{-i\phi/2}\rangle \langle \alpha e^{-i\phi/2}| \right\}, \quad (2.12)$$

не является неклассической – для нее параметр $Q = 0$.

§ 2.2. Сжатые состояния и сжатый свет

Сжатые состояния [28;29] еще один пример квантовых состояний, минимизирующих произведение квадратурных компонент электромагнитного поля. Квадратурные операторы $\hat{\xi}$, $\hat{\pi}$ (см. (2.9)) удовлетворяют коммутационному соотношению $[\hat{\xi}, \hat{\pi}] = i$. Их дисперсии $(\Delta\xi)^2 \equiv \langle \hat{\Delta}\xi^2 \rangle - \langle \hat{\Delta}\xi \rangle^2$ и $(\Delta\pi)^2 \equiv \langle \hat{\Delta}\pi^2 \rangle - \langle \hat{\Delta}\pi \rangle^2$ удовлетворяют в общем случае соотношению неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta\xi \cdot \Delta\pi \geq 1/2.$$

Как уже отмечалось, КС являются квантовыми состояниями с равными минимальными неопределенностями:

$$\Delta\xi = \Delta\pi = 1/\sqrt{2}.$$

Сжатые состояния, как и КС, оставляют минимальным произведение квадратурных компонент, но в отличие от КС уменьшают неопределенность одной из компонент, увеличивая неопределенность другой компоненты.

Определим такие состояния $|\alpha, \zeta\rangle$ действием на вакуумное состояние операторы сдвига $\hat{D}(\alpha)$ и унитарного оператора сжатия (оператора Столера, см., например [5, 30])

$$\hat{S}(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2} (\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta \hat{a}^{+2}) \right],$$

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\zeta) |0\rangle. \quad (2.13)$$

Можно проверить, что оператор сжатия $\hat{S}(\zeta)$ преобразует операторы уничтожения и рождения согласно формулам:

$$\hat{S}^+(\zeta) \hat{a} \hat{S}(\zeta) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^+ e^{-i2\phi} \sinh r, \quad (2.14)$$

$$\hat{S}^+(\zeta) \hat{a}^+ \hat{S}(\zeta) = \hat{a}^+ \cosh r - \hat{a} e^{i2\phi} \sinh r, \quad (2.15)$$

где $\zeta = r e^{-i2\phi}$. Повернутые квадратурные операторы

$$\hat{X}_1 = \hat{\xi} \cos \phi - \hat{\pi} \sin \phi, \quad (2.16)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{\pi} \cos \phi + \hat{\xi} \sin \phi, \quad (2.17)$$

преобразуются как

$$\hat{S}^+(\zeta)(\hat{X}_1 + i\hat{X}_2)\hat{S}(\zeta) = \hat{X}_1 e^{-r} + i\hat{X}_2 e^r$$

и для них

$$\Delta X_1 = e^{-r}/\sqrt{2}, \quad \Delta X_2 = e^r/\sqrt{2}. \quad (2.18)$$

Если $\zeta = r$, $\phi = 0$, то легко проверить, что $\Delta\xi = e^{-r}/\sqrt{2}$ и $\Delta\pi = e^r/\sqrt{2}$. Видно, что степень сжатия в квадратуре ξ определяется параметром сжатия r .

Если фотонная мода приготовлена в состоянии $|\alpha, \zeta\rangle$, то среднее число фотонов равно

$$\langle N \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r, \quad (2.19)$$

а среднеквадратичное отклонение дается выражением

$$(\Delta N)^2 = |\alpha \cosh r - \alpha^* e^{-i2\phi} \sinh^2 r|^2 + 2 \cosh^2 r \sinh r. \quad (2.20)$$

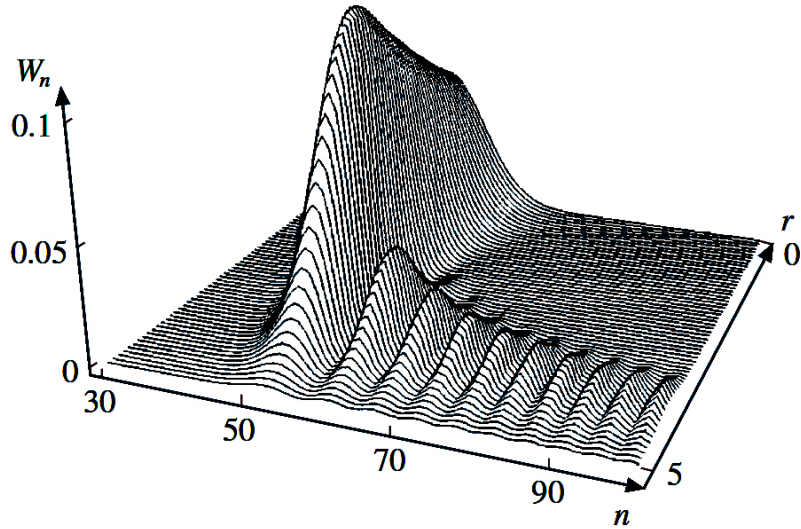


Рис. 6. Распределение числа фотонов W_n для сжатого состояния $|\alpha, \zeta\rangle$ с $\alpha = 6$

Для частного случая $\phi = 0$ параметр Манделя Q становится отрицательным для достаточно большого значения переменной α и $r > 0$.

Распределение фотонов $W_n = |\langle \alpha, r | n \rangle|^2$ при $r \neq 0$ становится более узким по сравнению с аналогичным распределением для КС с тем же α . Такое субпуассоновское поведение отражает неклассический характер сжатых состояний (см. рис. 6).

Из рис. 6 видно, что при параметре сжатия $r = 0$ реализуется распределение Пуассона для КС $|\alpha = 7\rangle$. С ростом r распределение фотонов осциллирует и становится субпуассоновским.

В работе [31] дано другое представление сжатых состояний. Сжатое состояние рассмотрено как собственное состояние оператора

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^+, \quad (2.21)$$

где $|u|^2 - |v|^2 = 1$ с собственным значением β :

$$\hat{b}|\zeta, \beta\rangle = \beta|\zeta, \beta\rangle.$$

Преобразование (2.21) называется преобразованием Боголюбова, которое было введено академиком Н.Н. Боголюбовым в 1947 г. при микроскопическом описании явления сверхтекучести. Между сжатием света и сверхтекучестью Бозе-газа существует глубокая аналогия.

Собственный вектор оператора \hat{b} можно записать в виде

$$|\zeta, \beta\rangle = \hat{S}(\zeta)\hat{D}(\beta)|0\rangle.$$

Параметр $\zeta = re^{-i2\phi}$ связан с параметрами преобразования Боголюбова:

$$u = \cosh r, \quad v = e^{-i2\phi} \sinh r.$$

Легко проверить, что параметры α и β связаны соотношением $\alpha = u\beta - v\beta^*$.

Сжатые состояния света впервые были обнаружены в 1985 г. [32]. При этом в четырехфотонном параметрическом процессе было достигнуто сжатие порядка 7%. Позднее были реализованы эксперименты (см. их описание, например, в [5;33]), из которых наибольшее сжатие ($\sim 50\%$) было получено в процессе спонтанного параметрического рассеяния (параметрической даун-конверсии).

§ 2.3. Состояния с определенной фазой

Задача описания квантово-механических состояний с определенной фазой имеет давнюю историю (см. гл. 8 монографии [4] и цитированную в ней литературу). Первая попытка введения таких состояний была предпринята Лондоном и Дираком еще в 1927 г. Фазовое состояние Лондона определено следующим разложением по фоковским состояниям:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle \quad (2.22)$$

и является собственным вектором экспоненциального оператора фазы

$$\widehat{e^{i\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1| = \frac{1}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^+}} \hat{a}. \quad (2.23)$$

Главный недостаток такого оператора в том, что он неунитарный и не может служить основой для определения эрмитового оператора $\hat{\phi}$ для фазы.

В самом деле, легко проверить, что имеют место соотношения:

$$\widehat{e^{i\phi}} \widehat{e^{-i\phi}} = \hat{1}, \quad \widehat{e^{-i\phi}} \widehat{e^{i\phi}} = \hat{1} - |0\rangle \langle 0|,$$

где

$$\widehat{e^{-i\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| = \hat{a}^+ \frac{1}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^+}} \quad (2.24)$$

и

$$[\widehat{e^{i\phi}}, \widehat{e^{-i\phi}}] = |0\rangle \langle 0|.$$

Тем не менее многие рассмотрения фазы квантового состояния

$$|\psi\rangle = \sum c_n |n\rangle$$

основываются именно на Лондоновском распределении фазы:

$$Prob_{\psi}(\phi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_n c_n e^{-in\phi} \right|^2. \quad (2.25)$$

Последующее рассмотрение фазы основано на использовании эрмитовых операторов

$$\widehat{\sin \phi} = \frac{1}{2i} (\widehat{e^{i\phi}} - \widehat{e^{i\phi}^+}), \quad \widehat{\cos \phi} = \frac{1}{2} (\widehat{e^{i\phi}} + \widehat{e^{i\phi}^+}), \quad (2.26)$$

Для них

$$[\widehat{\cos \phi}, \widehat{\sin \phi}] = \frac{i}{2} |0\rangle \langle 0|.$$

Эрмитовый оператор фазы был сконструирован Пеггом и Барнеттом [35] исходя из фазового состояния (2.22), ограниченном до конечномерного гильбертова пространства. Введем начальное состояние $|\theta_0\rangle$:

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_0} |n\rangle \quad (2.27)$$

и построим базис в $(s+1)$ - мерном пространстве:

$$|\theta_m\rangle = \exp \left[i \frac{2\pi m}{s+1} \hat{n} \right] |\theta_0\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots, s. \quad (2.28)$$

Тогда в фоковском базисе (ограниченном до указанного конечномерного пространства) получим:

$$|\theta_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp \left[i \cdot n \left(\theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1} \right) \right] |n \rangle \quad (2.29)$$

или

$$|\theta_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n \rangle,$$

где

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1}, \quad \theta_0 \leq \theta_m \leq \theta_0 + \frac{2s\pi}{s+1}.$$

Можно проверить, что этот базис ортонормирован и полон (в $(s+1)$ -подпространстве):

$$\langle \theta_m | \theta_l \rangle = \delta_{ml}, \quad \sum_{m=0}^s |\theta_m \rangle \langle \theta_m| = \hat{I}. \quad (2.30)$$

В результате вектор $|n \rangle$ можно разложить по базису Пегга и Барнетта:

$$|n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{l=0}^s e^{-in\theta_l} |\theta_l \rangle. \quad (2.31)$$

Эрмитовый оператор фазы Пегг и Барнетт вводят как:

$$\widehat{\varphi}_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m \rangle \langle \theta_m| = \theta_0 \hat{I} + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m |\theta_m \rangle \langle \theta_m|. \quad (2.32)$$

Видно, что его определение зависит от начальной фазы θ_0 . Используя соотношения ортогональности и полноты (2.30), легко получить

$$e^{i\widehat{\varphi}_\theta} = \exp \left[i \sum_m \theta_m |\theta_m \rangle \langle \theta_m| \right] = \sum_m e^{i\theta_m} |\theta_m \rangle \langle \theta_m|,$$

тогда

$$e^{\pm i\widehat{\varphi}_\theta} |\theta_m \rangle = e^{\pm i\theta_m} |\theta_m \rangle.$$

Рассмотрим теперь задачу о вычислении распределения фаз для поля, приготовленного в состоянии

$$|\psi \rangle = \sum_{n=0}^s C_n |n \rangle.$$

Используя разложение (2.31), находим, что

$$|\psi \rangle = \sum_{m=0}^s |\theta_m \rangle \langle \theta_m | \psi \rangle, \quad \langle \theta_m | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s C_n e^{-in\theta_m}.$$

Тогда распределение фазы определяется следующим образом:

$$W_{\theta_m} = |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \left| \sum_{n=0}^s C_n e^{-i\theta_m} \right|^2$$

и может быть интерпретировано как вероятность найти состояние $|\psi\rangle$ в состоянии с хорошо определенной фазой θ_m . Следует также отметить, что при выборе конечномерного ограничения пространства состояний возможные значения величины фазы пробегают дискретный набор значений.

Формализм Пегга — Барнетта открыл широкие возможности для исследования фазовых свойств оптических полей, реализуемых экспериментально. В частности, были исследованы фазовые свойства фоковского, когерентного и сжатого состояний и когерентного света, взаимодействующего с двухуровневым атомом. Исследовалась динамика фазы в некоторых квантовых моделях нелинейной оптики. Были построены состояния с минимальной неопределенностью "число фотонов — фаза" и с минимальным фазовым шумом.

Стоит все же заметить, что пока нет удовлетворительных результатов, свободных от ограничений, связанных с обрезанием бесконечномерного пространства состояний, и последовательно введенного оператора фазы с непрерывным спектром состояний не построено, так что проблема оператора фазы остается открытой.

§ 2.4. Матрица плотности и тепловые состояния

В вводном тексте данной главы уже было отмечено, что согласно принципам квантовой физики общий тип состояний системы описывается матрицей плотности (статистическим оператором) $\hat{\rho}$. Для чистого состояния $|\Psi\rangle$ матрица плотности дается проектором

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|,$$

а смешанные состояния, которые невозможно реализовать при помощи какого-либо вектора состояния $|\Psi\rangle$, представимы в виде:

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} p_{nm} |n\rangle\langle m|.$$

Диагональные коэффициенты p_{nn} имеют смысл вероятности обнаружить систему в состоянии $|n\rangle$, а недиагональные коэффициенты p_{nm} описывают корреляцию состояний $|n\rangle$ и $|m\rangle$ [37].

Важным частным случаем смешанного состояния являются термодинамически равновесные (тепловые) состояния, которые для одномодового ос-

циллятора определяются матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp(-\lambda \hat{a}^+ \hat{a}), \quad (2.33)$$

где $\lambda = \hbar\omega\beta$, а $\beta = 1/(k_B T)$ — обратная температура, k_B — постоянная Больцмана, а Z — статистическая сумма:

$$Z = Sp \left[e^{-\lambda \hat{a}^+ \hat{a}} \right] = [1 - e^{-\lambda}]^{-1}.$$

Такое состояние равновесное может быть реализовано, например, для полевой моды в резонаторе, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре.

Среднее число фотонов в полевой моде:

$$\langle n \rangle = Sp (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho}) = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda n} = [e^\lambda - 1]^{-1}.$$

Перепишем выражение (2.33) в виде:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\langle n \rangle + 1} \sum_n \left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1} \right)^n |n\rangle \langle n|. \quad (2.34)$$

Видно, что тепловая матрица плотности является некогерентной смесью чистых n -квантовых состояний.

§ 2.5. P -представление Глаубера — Сударшана и W -функция Вигнера

- P -представление

P -представление для матрицы плотности осциллятора было введено Глаубером [26] и Сударшаном [38] в 1963 г. Оно соответствует диагональному представлению матрицы плотности по когерентным состояниям:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (2.35)$$

Функция $P(\alpha) \equiv P(\alpha, \alpha^*)$ называется P -символом матрицы плотности или функцией плотности квазивероятности.

Если известно P -представление матрицы плотности, то среднее значение нормально упорядоченного произведения операторов приводится к виду интеграла:

$$\langle (\hat{a}^+)^m (\hat{a})^n \rangle = \int (\alpha^*)^m \alpha^n P(\alpha) d^2\alpha. \quad (2.36)$$

Для матрицы плотности системы, находящейся в когерентном состоянии $|\alpha_0\rangle$,

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0). \quad (2.37)$$

Для тепловой матрицы плотности (2.34)

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{\langle n \rangle} \right]. \quad (2.38)$$

Поле, для которого P -функция положительна, не обладает неклассическим поведением, например, таким, как сжатие. Для неклассических состояний, таких как сжатые состояния, P -функция может быть выражена только через обобщенные функции, такие как δ -функция Дирака и ее обобщенные производные.

Непосредственным обобщением P -представления является недиагональное представление матрицы плотности:

$$\hat{\rho} = \int \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha, \beta) \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle}. \quad (2.39)$$

В отличие от P -функции функция $P(\alpha, \beta)$ существует для любого физического состояния, заданного матрицей плотности $\hat{\rho}$:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \exp \left(-\frac{1}{4} |\alpha - \beta^*|^2 \right) \left\langle \frac{1}{2}(\alpha + \beta^*) | \hat{\rho} | \frac{1}{2}(\alpha + \beta^*) \right\rangle. \quad (2.40)$$

- W -функция Вигнера

Это квазивероятностное распределение было введено Е. Вигнером [39] для функции распределения симметрично упорядоченных произведений операторов. Функция Вигнера используется во многих разделах физики (квантовая оптика, теория систем многих частиц и др.), она важна при рассмотрении перехода от квантовой к классической механике.

Введем функцию Вигнера для одномодового квантово-полевого осциллятора. Операторы координаты и импульса для него определены следующим образом (напомним, что для полевых осцилляторов система единиц выбирается так, что масса осциллятора равна единице):

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a}^+ + \hat{a}),$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}).$$

Тогда функция Вигнера в переменных координата-импульс записывается как:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2ipy/\hbar} \langle x + y | \hat{\rho} | x - y \rangle, \quad (2.41)$$

где состояния $|x \pm y \rangle$ - собственные векторы оператора координаты.

Квадрат скалярного произведения двух квантовых состояний

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 2\pi\hbar \int \int dx dp W_{\psi_1}(x, p) W_{\psi_2}(x, p) \quad (2.42)$$

представляется интегралом перекрывания в фазовом пространстве соответствующих функций Вигнера.

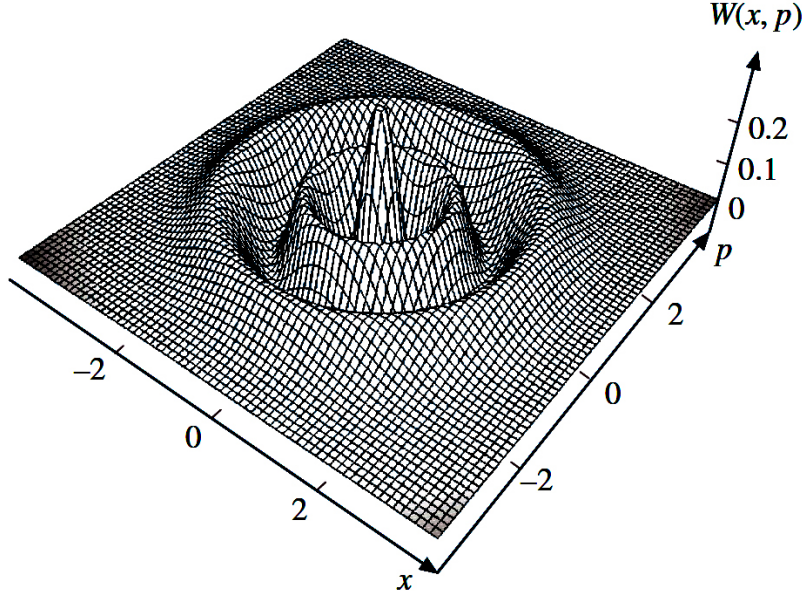


Рис. 7. Функция Вигнера для фоковского состояния $|n = 4 \rangle$

Для нормированного состояния $|\psi \rangle$ выполняется соотношение

$$\int \int dx dp [W_{\psi}(x, p)]^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}. \quad (2.43)$$

Операторы и средние значения вычисляются следующим образом:

$$F(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle x - y/2 | \hat{F} | x + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar},$$

$$Sp(\hat{F} \hat{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dp F(x, p) W(x, p).$$

Оказывается, что функция Вигнера имеет отрицательные значения для большинства квантовых состояний. Так, для фоковского состояния $|n \rangle$

$$W_n(\bar{x}, \bar{p}) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-\bar{x}^2 - \bar{p}^2} L_n(2\bar{x}^2 + 2\bar{p}^2), \quad (2.44)$$

становится отрицательной из-за осцилляций полинома Лагерра L_n (см. рис. 7).

В формуле (2.44) введены безразмерные координата $\bar{x} = \sqrt{\omega/\hbar}x$ и импульс $\bar{p} = 1/\sqrt{\omega\hbar}p$.

Однако для сжатого состояния $|\alpha, \zeta = r \rangle$ рассчитанная функция Вигнера имеет вид:

$$W_{\alpha,r}(\bar{x}, \bar{p}) = \frac{1}{\pi} \exp \left\{ -e^{2r} [\bar{x} - \sqrt{2\text{Re}\alpha}]^2 - e^{-2r} [\bar{p} - \sqrt{2\text{Im}\alpha}]^2 \right\} \quad (2.45)$$

и имеет вид гауссовой сигары (рис. 8). Функция всюду положительна.

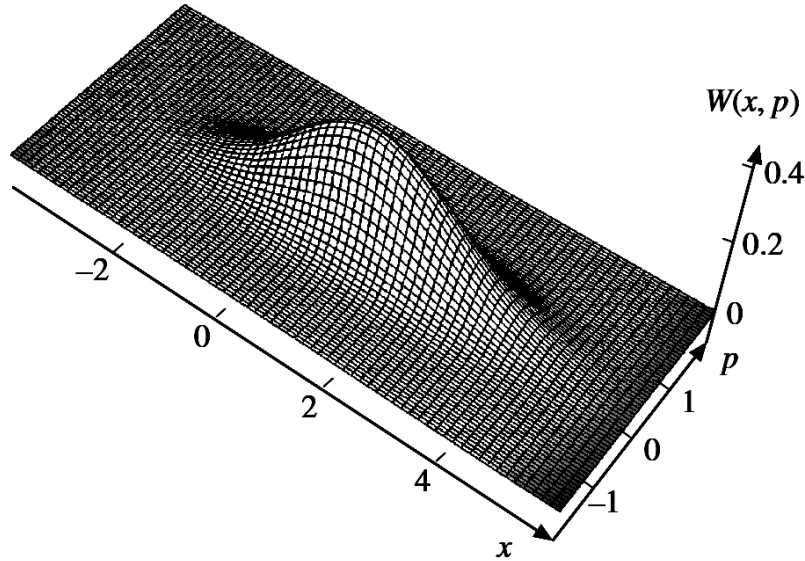


Рис. 8. Функция Вигнера для сжатого состояния $|\alpha, r \rangle$ для $\alpha = 1$ и $e^{2r} = 0.25$

§ 2.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить скалярное произведение когерентных состояний $\langle \alpha | \beta \rangle$ и проверить формулу (2.5).
2. Проверить справедливость соотношения (2.4).
3. Показать, что не существует нормированных собственных состояний $|\tilde{\alpha} \rangle$ оператора рождения \hat{a}^+ .
4. Показать, что для изолированной фотонной моды с течением времени состояние $|\alpha \rangle$ остается когерентным и переходит с точностью до фазы в КС $|\alpha(t) \rangle$, где $\alpha(t) = \alpha \cdot e^{-i\omega t}$ и ω - частота моды.
5. Доказать формулу Бейкера — Хаусдорфа

$$e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} = e^{[\hat{X}, \hat{Y}]/2} e^{\hat{X} + \hat{Y}},$$

которая справедлива, если двойные коммутаторы равны нулю, т.е.:

$$[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = [\hat{Y}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = 0.$$

Представить оператор сдвига в распутанном виде и доказать, что

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)}\hat{D}(\alpha + \beta).$$

6. Вычислить матричные элементы

$$\langle \alpha | \hat{D}(\gamma) | \beta \rangle, \quad \langle n | \hat{D}(\gamma) | m \rangle.$$

Указание: Использовать производящее свойство КС (2.2) и формулу (2.5).

7. Вычислить параметр Манделя Q для суперпозиции когерентных состояний типа "кота Шредингера" (2.11).

8. Вывести формулы (2.14) – (2.20).

9. Найти разложение сжатого состояния (2.13) по состояниям $|n\rangle$.

10. Проверить, что для операторов фазы (2.23), (2.24) и оператора числа фотонов имеют место следующие коммутаторы:

$$[\hat{a}^+ \hat{a}, \widehat{e^{i\phi}}] = -\widehat{e^{i\phi}}, \quad [\hat{a}^+ \hat{a}, \widehat{e^{-i\phi}}] = \widehat{e^{-i\phi}}.$$

11. Показать, что средние значения

$$\langle n | \widehat{\cos \phi} | n \rangle = \langle n | \widehat{\sin \phi} | n \rangle = 0.$$

$$\langle n | \left(\widehat{\cos \phi} \right)^2 | n \rangle = \langle n | \left(\widehat{\sin \phi} \right)^2 | n \rangle = \begin{cases} 1/2, & n \neq 0 \\ 1/4, & n = 0 \end{cases},$$

$$\langle \alpha | \widehat{\cos \phi} | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2} \text{Re} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n! \sqrt{n+1}}.$$

Подставляя $\alpha = \sqrt{\bar{n}} e^{i\phi}$, получить, что

$$\langle \alpha | \widehat{\cos \phi} | \alpha \rangle = e^{-\bar{n}} \sqrt{\bar{n}} \cos(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n! \sqrt{n+1}}.$$

12. Проверить (см. [1, гл. 7]), что результаты измерений числа фотонов и фазы электромагнитной моды подчиняются соотношениям неопределенностей:

$$\Delta n \cdot \Delta \cos \phi \geq \frac{1}{2} | \langle \sin \phi \rangle |, \quad \Delta n \cdot \Delta \sin \phi \geq \frac{1}{2} | \langle \cos \phi \rangle |.$$

13. Показать, что для большого среднего числа фотонов $\langle n \rangle$ когерентное состояние $|\alpha\rangle$ приводит к минимальному значению указанных в задаче 12 соотношений неопределенности, и поэтому КС является одним из квантовых состояний поля, которое можно прямо связать с классической электромагнитной волной с определенными амплитудой и фазой.

Иными словами, в классическом пределе $|\alpha\rangle$ соответствует волне, фаза которой равна фазе комплексного числа α , а ее амплитуда связана с $|\alpha|$ соотношением:

$$E_0 = 2\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}} |\alpha|.$$

14. Пусть матрица плотности квантовой моды определена соотношением:

$$\hat{\rho} = \hat{a}^+ \exp(-\xi \hat{a}^+ \hat{a}) \hat{a}.$$

Выяснить, какие состояния она определяет при $\xi \rightarrow 0$ и при $\xi \rightarrow \infty$.

15. Используя тепловую матрицу плотности (2.34), рассчитать дисперсию числа фотонов $\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$, где

$$\langle \hat{F} \rangle = Sp(\hat{F} \hat{\rho}).$$

16. Проверить, что функция $P(\alpha, \beta)$ (см. формулы (2.39) и (2.40)) всегда положительна.
17. Проверить формулы (2.44), (2.45).

Глава 3. Взаимодействие электромагнитного излучения с атомами

§ 3.1. Классическое электромагнитное поле в среде

Как и в случае свободного электромагнитного поля, построение гамильтониана электромагнитного поля, взаимодействующего с атомами, удобно начать с классической теории. Рассмотрим электромагнитное поле в среде, представляющей собой совокупность точечных зарядов, входящих в состав атомов. Система уравнений Максвелла в этом случае примет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{H} &= 0, \\ \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Объемная плотность зарядов ρ и плотность тока \vec{j} , входящие в уравнения (3.1), в случае системы точечных зарядов могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \\ \vec{j} &= \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),\end{aligned}\tag{3.2}$$

где q_i – величина i -го заряда, \vec{r}_i – его радиус-вектор и \vec{v}_i – скорость.

Как и в случае свободного поля, мы можем ввести скалярный и векторный потенциалы с помощью соотношений (1.18), (1.19). Для свободного поля мы использовали калибровку Кулона (1.10). В этом случае электромагнитное поле является поперечным и напряженности электрического и магнитного полей можно выразить через векторный потенциал. Для поля в среде такая

калибровка неудобна, так как электромагнитное поле перестает быть поперечным. У электрической составляющей электромагнитного поля появляется продольная компонента, представляющая собой статическое кулоновское поле, создаваемое зарядами. Тогда мы из кулоновской калибровки сохраним лишь условие $\text{div}\vec{A} = 0$. Это позволит нам использовать векторный потенциал для описания запаздывающей составляющей электромагнитного поля, а скалярный потенциал – для описания его продольной составляющей.

Согласно теореме Гельмгольца, мы можем представить любое векторное поле \vec{a} в виде суперпозиции поперечной и продольной составляющей

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_l,$$

где $\text{div}\vec{a}_t = 0$ и $\text{rot}\vec{a}_l = 0$. Тогда для электромагнитного поля в среде с учетом условий $\text{div}\vec{H} = 0$ и $\text{div}\vec{A} = 0$ имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_l, \quad \vec{H} = \vec{H}_t, \quad \vec{A} = \vec{A}_t, \quad \vec{j} = \vec{j}_t + \vec{j}_l,$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}_l &= -\nabla\varphi, \\ \vec{E}_t &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} &= \text{rot}\vec{A}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя соотношения (3.3) в уравнения Максвелла (3.1), после несложных преобразований (см., например [1]) получаем уравнение Пуассона для скалярного и волновое уравнение для векторного потенциала

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \tag{3.4}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_t. \tag{3.5}$$

Общие решения уравнений (3.4), (3.5) имеют, как известно, следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}', \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \int \frac{\vec{j}_t(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Для векторного потенциала выбрано "запаздывающее" решение, так как только оно удовлетворяет принципу причинности.

§ 3.2. Функция Гамильтона поля, взаимодействующего с атомами

Воспользуемся обычной схемой для построения функции Гамильтона электромагнитного поля в среде, в которой уравнения движения классической системы записываются сначала в лагранжевой, а затем в гамильтоновой форме. Реализацию схемы начнем с записи явного вида лагранжиана поля в среде. Вид функции Лагранжа для системы "поле+атомы" мы сначала постулируем, а затем покажем, что этот лагранжиан дает правильные классические уравнения движения для зарядов и поля. Выберем лагранжиан в виде

$$L = L_A + L_F + F_{AF}, \quad (3.6)$$

где

$$L_A = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}$$

– лагранжиан свободных заряженных частиц и $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ – скорости зарядов,

$$L_F = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) dV$$

– лагранжиан свободного электромагнитного поля,

$$L_{AF} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \vec{A} dV - \int \rho \varphi dV$$

– лагранжиан взаимодействия зарядов с полем.

Для систем точечных зарядов лагранжиан взаимодействия может быть также переписан в виде

$$L_{AF} = \frac{1}{c} \sum_i q_i \vec{v}_i \vec{A}(\vec{r}_i, t) - \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i, t).$$

Здесь аргументами функций φ и \vec{A} являются координаты зарядов. В качестве обобщенных координат зарядов выберем величины \vec{r}_i . Тогда уравнения движения зарядов в форме Лагранжа даются выражением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0. \quad (3.7)$$

После несложных преобразований уравнение (3.7) принимает вид

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = q_i \vec{E} + \frac{q_i}{c} [\dot{\vec{r}}_i, \vec{H}]. \quad (3.8)$$

Выражение в правой части уравнения (3.8) есть обычная сила Лоренца, действующая на заряды. Это означает, что лагранжиан (3.6) дает правильное уравнение движения зарядов.

Для того чтобы получить уравнения движения для поля, перепишем лагранжиан (3.6) в терминах скалярного и векторного потенциалов. Используя формулы (3.3), получаем для лагранжиана

$$L = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} + \frac{1}{8\pi} \int \{(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}}^2 - [\nabla, \vec{H}^2]^2\} dV + \frac{1}{c} \int \vec{j}_t \vec{A} dV - \int \rho\varphi dV. \quad (3.9)$$

Зависящую от переменных поля часть лагранжиана можно выразить через плотность лагранжиана \mathcal{L}

$$L = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} + \int \mathcal{L} dV,$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \{(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}}^2 - [\nabla, \vec{H}^2]^2\} + \frac{1}{c} \vec{j}_t \vec{A} - \rho\varphi.$$

Выберем в качестве обобщенных координат поля величины φ и \vec{A} . Нетрудно показать, что уравнения Лагранжа для переменных φ и \vec{A} совпадают с уравнениями поля в среде (3.4), (3.5).

Введем обобщенные импульсы, сопряженные обобщенным координатам, которые определим через плотность лагранжиана

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \\ P_{\vec{A}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \frac{1}{4\pi c^2} \dot{\vec{A}}.$$

Теперь мы можем определить классическую функцию Гамильтона поля в среде

$$H = \sum_i \vec{P}_i \vec{v}_i + \int (P_{\vec{A}} \dot{\vec{A}} + P_\varphi \dot{\varphi}) dV - L, \quad (3.10)$$

где обобщенные импульсы зарядов определяются соотношением

$$\vec{P}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \vec{v}_i + \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i, t).$$

Заменяя в (3.10) обобщенные скорости на обобщенные импульсы, а также учитывая, что для системы точечных зарядов для плотностей заряда и тока имеют место соотношения (3.2), а значит

$$\vec{j} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_i q_i (\vec{P}_i - \frac{q_i}{c} \vec{A}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

для классического гамильтониана получаем

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{P}_i - \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i, t))^2 + \frac{1}{8\pi} \int \{(-\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}}^2 + [\nabla, \vec{H}^2]^2\} dV + \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i, t). \quad (3.11)$$

С учетом соотношений (3.3) формула (3.11) принимает вид

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{P}_i - \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i, t))^2 + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_t^2 + \vec{H}^2) dV - \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_l^2) dV + \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i, t). \quad (3.12)$$

В этом выражении первое слагаемое включает кинетическую энергию зарядов и энергию их взаимодействия с поперечным электромагнитным полем. Второе слагаемое представляет собой энергию поперечного электромагнитного поля, третье слагаемое — энергию продольного статического электрического поля (порождаемого зарядами) и, наконец, последнее слагаемое есть энергия зарядов в продольном статическом электрическом поле. Будем отсчитывать энергию системы от энергии статического поля, выбранной с обратным знаком, тогда функция Гамильтона (3.12) упрощается и принимает вид

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{P}_i - \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i, t))^2 + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_t^2 + \vec{H}^2) dV + \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i, t). \quad (3.13)$$

Рассмотрим далее функцию Гамильтона (3.13) для случая одного атома, взаимодействующего с электромагнитным полем в диапазоне от инфракрасного до ультрафиолетового. В этом случае динамика рассматриваемой системы будет определяться взаимодействием валентных электронов с полем. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением атомов с одним валентным электроном. Кроме того, будет считать ядро атома неподвижным. Тогда функция Гамильтона одновалентного атома, взаимодействующего с электромагнитным полем, может быть записана в виде

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_e, t))^2 + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_t^2 + \vec{H}^2) dV - e\varphi(\vec{r}_e, t), \quad (3.14)$$

где e — модуль заряда валентного электрона, m — его масса, \vec{r}_e — радиус вектор электрона и φ — потенциал статического электрического поля, созданного ядром атома и всеми остальными электронами за исключением выделенного валентного электрона. Для дальнейших преобразований удобно записать (3.14) в следующем виде:

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (3.15)$$

где слагаемое

$$H_A = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 - e\varphi(\vec{r}_e, t) = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + U(\vec{r}_e, t)$$

включает в себя кинетическую энергию валентного электрона и энергию его взаимодействия с ядром и остальными электронами атома; слагаемое

$$H_F = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_t^2 + \vec{H}^2) dV$$

представляет собой энергию поперечного электромагнитного поля и, наконец, слагаемое

$$H_{AF} = \frac{e}{2mc} \vec{P} \vec{A}(\vec{r}_e, t) + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}(\vec{r}_e, t)^2 \quad (3.16)$$

описывает энергию взаимодействия валентного электрона с поперечным электромагнитным полем.

Для электромагнитного излучения, включая ультрафиолетовый диапазон, длина волны излучения много больше размеров атома, то есть $\lambda a_0 \ll 1$, где a_0 – первый боровский радиус. Это означает, что в функции Гамильтона (3.16) мы можем провести замену

$$\vec{A}(\vec{r}_e, t) = \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (3.17)$$

где \vec{r} – радиус-вектор ядра атома. Приближение (3.17) называется дипольным приближением. В дипольном приближении функция Гамильтона взаимодействия атома с полем (3.16) примет вид

$$H_{AF} = \frac{e}{2mc} \vec{P} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}(\vec{r}, t)^2. \quad (3.18)$$

§ 3.3. Гамильтониан атома, взаимодействующего с квантовым электромагнитным полем

Квантование рассмотренной системы проведем стандартным образом, заменяя обобщенные координаты и импульсы для зарядов и поля операторами, удовлетворяющими стандартным коммутационным соотношениям типа. Соответственно функции обобщенных координат и импульсов превратятся в функции операторов обобщенных координат и импульсов. В результате мы вместо классической функции Гамильтона получаем квантовый гамильтониан атома, взаимодействующего с электромагнитным полем в дипольном приближении вида

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF}, \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{H}_A &= \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + U(\vec{r}_e, t), \\ \hat{H}_F &= \frac{1}{8\pi} \int (\hat{E}_t^2 + \hat{H}^2), dV \\ \hat{H}_{AF} &= \hat{V}_1 + \hat{V}_2 = \frac{e}{2mc}\hat{P}\hat{A}(\vec{r}, t) + \frac{e^2}{2mc^2}\hat{A}(\vec{r}, t)^2.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Для описания поперечного электромагнитного поля будем, как и в главе 1, использовать представление вторичного квантования. Повторяя схему перехода к операторам рождения и уничтожения фотонов, развитую для свободного поля, оператор энергии поперечного поля и оператор векторного потенциала можно представить в виде

$$\begin{aligned}\hat{H}_F &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar\omega_k a_{\vec{k}, \lambda}^+ a_{\vec{k}, \lambda}, \\ \hat{A}(\vec{r}, t) &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \{ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+(t) \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} \}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

В отличие в случае свободного поля для поля в среде временные зависимости операторов рождения и уничтожения фотонов мы уже не можем представить в виде простых осцилляционных зависимостей вида $\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) \neq \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i\omega_k t}$.

В настоящее время точное решение квантовой динамической задачи для модели атома, взаимодействующего с электромагнитным полем, с гамильтонианом (3.19), не известно. Поэтому займемся дальнейшим его упрощением.

§ 3.4. Модель двухуровневого атома

Описание квантово-механических процессов ведется обычно на языке переходов между энергетическими уровнями. При этом один из уровней (начальный) характеризует стационарное состояние до перехода, а второй (конечный) – стационарное состояние после перехода. Переход из начального состояния в конечное может осуществляться через несколько промежуточных состояний.

Существует, однако, ситуация, в которой можно ограничиться рассмотрением только двух уровней. В этих случаях возникает модель двухуровневой системы (двухуровневого атома) как частицы, которая может находиться только в двух энергетических состояниях. Для взаимодействия с внешним полем, например, идеализация двухуровневой системы имеет место тогда, когда

любая пара уровней, за исключением одной, достаточно удалена от резонанса. Процесс взаимодействия такой частицы с внешним полем сводится лишь к переходам между уровнями этой пары.

Пусть имеется квазимонохроматическое электрическое поле, частота которого близка к частоте перехода, связывающего два энергетических уровня атома с энергиями E_+ и E_- (см. рис. 9,а). Принадлежащие этим энергиям собственные функции оператора H_A обозначим через $|+\rangle$ и $|-\rangle$.

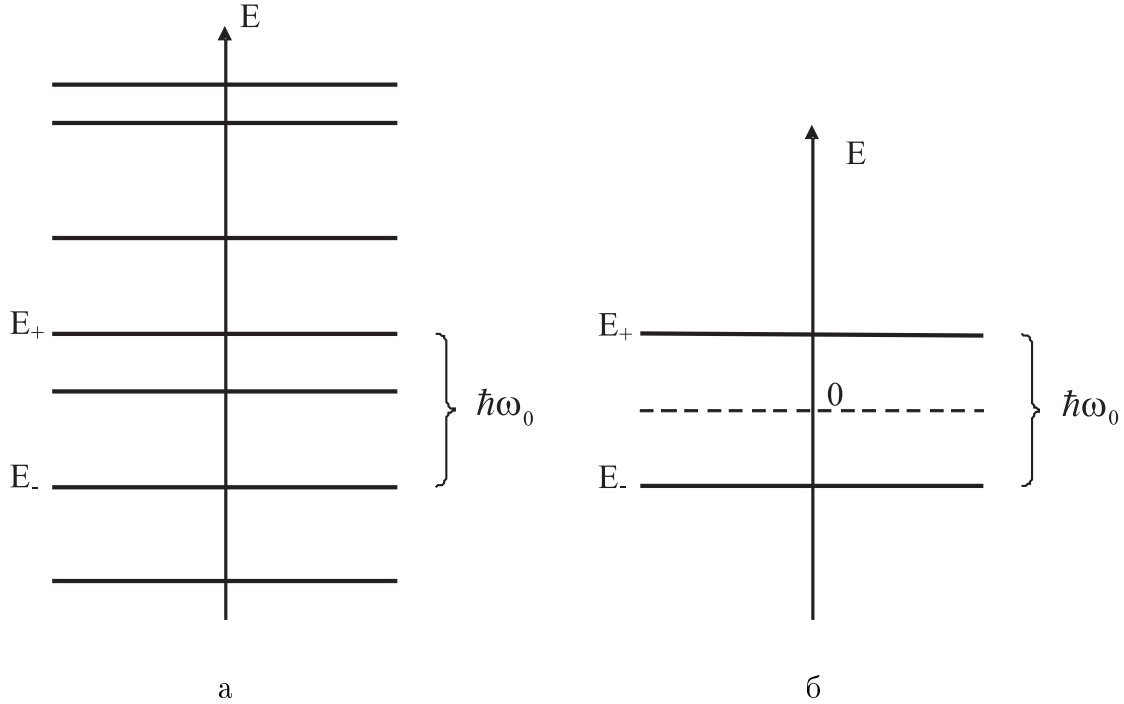


Рис. 9. Схема энергетических уровней в атоме

В рассматриваемой модели возможны только переходы между состояниями $|+\rangle$ и $|-\rangle$, поэтому достаточно рассматривать двумерное гильбертово пространство, натянутое на эти векторы. В этом случае временная волновая функция, эволюционирующая в двумерном гильбертовом пространстве, может быть представлена в виде

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|+\rangle + \beta(t)|-\rangle,$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношению $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$. В рассматриваемом пространстве мы можем описывать волновые функции двумерными столбцами (строками)

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix},$$

а операторы – квадратными матрицами размерности 2×2 .

В частности, гамильтониану свободного атома будет соответствовать матрица вида

$$H_A = \begin{pmatrix} \langle +|H_A|+ \rangle & \langle +|H_A|- \rangle \\ \langle -|H_A|+ \rangle & \langle -|H_A|- \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

С учетом соотношений $\langle +|H_A|+ \rangle = E_+$, $\langle -|H_A|- \rangle = E_-$, $\langle \pm|H_A|\mp \rangle = 0$ формулу (3.22) можно переписать в виде

$$H_A = \frac{E_+ - E_-}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{E_+ + E_-}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя так называемое квазиспиновое представление, гамильтониан свободного двухуровневого атома можно записать в виде

$$H_A = \frac{E_+ - E_-}{2} \sigma_z + \frac{E_+ + E_-}{2} I, \quad (3.23)$$

где I – единичный оператор и σ_z – оператор, соответствующий известной двумерной матрице Паули в квантовой теории. Термин "квазиспиновое" представление отражает тот факт, что в действительности мы рассматриваем атомы без учета спина, и операторы, аналогичные операторам спина появляются ввиду того, что мы ограничиваемся рассмотрением двух выделенных состояний изучаемой системы.

Отсчитывая энергию от значения $(E_+ + E_-)/2$ (см. рис. 9,б), мы можем переписать гамильтониан (3.23) в виде

$$H_A = \frac{E_+ - E_-}{2} \sigma_z.$$

Для того чтобы избавиться от "1/2" в гамильтониане, введем оператор полуразности населенностей атомных уровней $R_z = 1/2\sigma_z$. Состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ являются собственными для оператора R_z , соответствующими собственным значениям

$$R_z|+\rangle = (1/2)|+\rangle, \quad R_z|-\rangle = -(1/2)|-\rangle.$$

Вводя резонансную частоту перехода в двухуровневом атоме

$$\omega_0 = (E_+ - E_-)/\hbar,$$

мы можем окончательно записать гамильтониан свободного двухуровневого атома без учета движения его центра масс в виде

$$H_A = \hbar\omega_0 R_z. \quad (3.24)$$

Теперь запишем в квазиспиновом представлении первое слагаемое в гамильтониане взаимодействия двухуровневого атома с поперечным электромагнитным полем (3.20). Найдем предварительно матричные элементы оператора

импульса $\langle \alpha | \vec{p} | \beta \rangle$, $\alpha, \beta = +, -$. Для этого учтем, что для гамильтониана свободного атома вида $H_A = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r})$ имеет место коммутационное соотношение вида $[\vec{r}, H_A] = (i\hbar/m)\vec{p}$. Тогда имеем

$$\langle \alpha | \vec{p} | \beta \rangle = (m/i\hbar) \langle \alpha | [\vec{r}, H_A] | \beta \rangle = (m/i\hbar) (\langle \alpha | \vec{r} H_A | \beta \rangle - \langle \alpha | H_A \vec{r} | \beta \rangle).$$

Учитывая, что $H_A | \beta \rangle = E_\beta | \beta \rangle$, $\langle \alpha | H_A = E_\alpha \langle \alpha |$, для матричного элемента оператора импульса получаем

$$\langle \alpha | \vec{p} | \beta \rangle = (m/i\hbar) (E_\beta - E_\alpha) \langle \alpha | \vec{r} | \beta \rangle.$$

Тогда в случае $\alpha = \beta$ имеем, что $\langle \alpha | \vec{p} | \beta \rangle = 0$. Таким образом, в выбранном нами базисе диагональные матричные элементы оператора импульса равны нулю. Используя обозначение $\hbar\omega_0 = E_+ - E_-$ и вводя для валентного электрона стандартным образом оператор дипольного момента $\vec{d} = -e\vec{r}$ ($e > 0$), недиагональные элементы оператора импульса представим в виде

$$\langle \pm | \vec{p} | \mp \rangle = \pm (m\omega_0/i\hbar) \langle \pm | \vec{d} | \mp \rangle.$$

В квантовой механике волновая функция любого состояния определена с точностью до фазового множителя

$$\Psi \rightarrow e^{i\varphi} \Psi,$$

где φ – произвольный фазовый множитель. Выбирая различные значения для фазового множителя, мы можем получить различные выражения для недиагональных матричных элементов оператора дипольного момента. При этом физический смысл будет иметь квадрат модуля матричного элемента, а он от выбора параметра φ зависеть не будет. В нашем случае выберем фазовые множители состояний $|+\rangle$ и $|-\rangle$ так, чтобы матричные элементы дипольного момента стали чисто мнимыми

$$\langle \pm | \vec{d} | \mp \rangle = \pm i d \vec{e}_d,$$

где d – модуль дипольного момента двухуровневого атома и \vec{e}_d – единичный вектор, указывающий направление дипольного момента. В этом случае для недиагональных матричных элементов оператора импульса мы получаем

$$\langle + | \vec{p} | - \rangle = \langle - | \vec{p} | + \rangle = (m\omega_0 d/e) \vec{e}_d.$$

Соответственно, в квазиспиновом представлении оператор импульса двухуровневого атома принимает вид

$$\vec{p} = (m\omega_0 d/e) \sigma_x \vec{e}_d,$$

где σ_x – оператор, соответствующий матрице Паули $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда оператор взаимодействия двухуровневого атома с поперечным полем без учета процессов рассеяния фотонов на фотонах

$$H_{AF} = \frac{e}{2mc} \vec{p} \vec{A}$$

в квазиспиновом представлении принимает вид

$$H_{AF} = \frac{\omega_0 d}{2c} \sigma_x \vec{A} \vec{e}_d.$$

Используя для поля представление вторичного квантования, запишем оператор векторного потенциала в виде

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} (a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_\lambda + a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_\lambda).$$

Тогда сам оператор взаимодействия примет вид

$$H_{AF} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar g_k \sigma_x (a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \quad (3.25)$$

где

$$g_k \equiv g_{\vec{k}\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi}{V\omega_k \hbar}} d \omega_0 \vec{e}_\lambda \vec{e}_d.$$

Удобно переписать гамильтониан взаимодействия, используя атомные операторы переходов в двухуровневом атоме. Введем эти операторы следующим образом:

$$R^\pm = (1/2)(\sigma_x \pm i\sigma_y).$$

В двумерном базисе операторам перехода соответствуют матрицы вида

$$R^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Используя формулы (3.26), легко выяснить, как операторы R^+ и R^- действуют на базисные векторы $|\pm\rangle$

$$R^+|-\rangle = |+\rangle, \quad R^-|+\rangle = |-\rangle, \quad R^+|+\rangle = R^-|-\rangle = 0.$$

Таким образом, оператор R^+ описывает переход двухуровневого атома из невозбужденного состояния в возбужденное, а оператор R^- – обратный переход.

Используя определение операторов перехода, легко установить для них следующие важные соотношения:

$$R^+ R^- + R^- R^+ = 1, \quad [R^+, R^-] = 2R_z, \quad [R^\pm, R_z] = \pm R^\pm,$$

$$R^+R^- = 1/2 + R_z, \quad R^-R^+ = 1/2 - R_z. \quad (3.27)$$

С использованием операторов перехода гамильтониан взаимодействия принимает вид

$$H_{AF} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar g_k (R^+ + R^-) (a_{\vec{k}\lambda}^- e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}}). \quad (3.28)$$

Гамильтониан двухуровневого атома без учета взаимодействия с электромагнитным полем имеет вид (3.25). Для такого атома операторы переходов между уровнями в представлении Гейзенберга ведут себя как

$$R^\pm(t) = R^\pm e^{\pm i\omega_0 t}, \quad (3.29)$$

а операторы рождения и уничтожения фотонов как

$$a_{\vec{k},\lambda}^+(t) = a_{\vec{k},\lambda}^+ e^{i\omega_k t}, \quad (3.30)$$

$$a_{\vec{k},\lambda}^-(t) = a_{\vec{k},\lambda}^- e^{-i\omega_k t}. \quad (3.31)$$

Для рассматриваемого нами диапазона электромагнитных полей константа диполь-фотонного взаимодействия много меньше частоты перехода в двухуровневом атоме: $\frac{g_k}{\omega_0} \sim 10^{-5} - 10^{-7}$. Это означает, что при учете взаимодействия атома и поля осцилляционный характер поведения операторов (3.29)-(3.31) сохранится. Учтем также, что для полного гамильтониана двухуровневого атома, взаимодействующего с электромагнитным полем, имеет место соотношение $H = H(t)$, и то, что динамика системы будет в основном определять взаимодействие атома с модами поля, резонансно настроенными на частоту атомного перехода $\omega_k \approx \omega_0$. Тогда в гамильтониане взаимодействия (3.28) имеются слагаемые вида

$$R^+(t)a_{\vec{k},\lambda}^-(t), R^-(t)a_{\vec{k},\lambda}^+(t) \quad \text{и} \quad R^+(t)a_{\vec{k},\lambda}^+(t), R^-(t)a_{\vec{k},\lambda}^-(t).$$

Слагаемые первого типа являются медленно меняющимися функциями времени, а слагаемые второго типа осциллируют на удвоенной частоте $2\omega_0$. Пренебрегая в гамильтониане взаимодействия быстро осциллирующими слагаемыми, получаем

$$H_{AF} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar g_k (R^+ a_{\vec{k}\lambda}^- e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{\vec{k}\lambda}^+ R^- e^{-i\vec{k}\vec{r}}). \quad (3.32)$$

Такое приближение для гамильтониана взаимодействия двухуровневого атома с полем называется приближением "вращающейся волны" (ППВ). Сам термин взят из квантовой радиофизики. Там это приближение состоит в пренебрежении некоторым быстро осциллирующим вращающимся моментом для двухуровневого атома, взаимодействующего с классическим электромагнитным полем [11].

§ 3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Вывести уравнения для скалярного и векторного потенциалов (3.4) и (3.5) для электромагнитного поля в среде.
2. Показать, что для уравнения движения системы зарядов, взаимодействующих с электромагнитным полем и описываемых функцией Лагранжа (3.6), задается уравнениями (3.8).
3. Показать, что для той же системы уравнения движения для полевых переменных имеют вид уравнений Максвелла в среде.
4. Используя определение операторов перехода (3.26), докажите соотношение (3.27).
5. В случае выбора фаз возбужденного и основного состояний двухуровневого атома таким образом, чтобы матричные элементы дипольного момента были действительными, выражение (3.25) для гамильтониана взаимодействия атома с полем должно быть заменено на

$$H_{AF} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar g_k \sigma_y (a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} - a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}}). \quad (3.33)$$

Докажите данное утверждение.

6. Получите выражение для гамильтониана (3.33) в приближении вращающейся волны.

Глава 4. Расчет вероятностей переходов и сечений рассеяния в рамках теории возмущения

§4.1. Теория квантовых переходов под влиянием внешнего возмущения

Рассмотрим квантовую систему, характеризующуюся гамильтонианом \hat{H}_0 , который мы в дальнейшем будем называть невозмущенным гамильтонианом. Предположим, что нам известно точное решение стационарного уравнения Шредингера для невозмущенного гамильтониана

$$\hat{H}_0|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle. \quad (4.1)$$

Будем полагать, что невозмущенный гамильтониан обладает дискретным спектром собственных значений. Зависящие от времени волновые функции стационарных состояний невозмущенного гамильтониана есть

$$|\varphi_n(t)\rangle = |\varphi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Предположим, что на квантовую систему начинает действовать возмущение вида

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} \hat{W}(t) & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & t < 0, t > \tau. \end{cases}$$

Поставим перед собой задачу: найти решение временного уравнения Шредингера для квантовой системы при наличии возмущения

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t))|\Psi(t)\rangle. \quad (4.2)$$

Дополним уравнение (4.2) начальным условием. Будем полагать, что в начальный момент времени квантовая система приготовлена в одном из собственных состояний невозмущенного гамильтониана

$$|\Psi(0)\rangle = |\varphi_l(0)\rangle = |\varphi_l\rangle. \quad (4.3)$$

Будем искать решение уравнения (4.2) в виде разложения по полному набору стационарных собственных функций невозмущенного гамильтониана

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varphi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (4.4)$$

Из условия (4.3) следует, что

$$c_n(0) = \delta_{nl}. \quad (4.5).$$

Подставим разложение (4.4) в уравнение (4.2). Тогда с учетом соотношения (4.1) получим

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} |\varphi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n c_n(t) \hat{V}(t) |\varphi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (4.6)$$

Умножим левую и правую части уравнения (4.6) на бра-вектор $\langle\varphi_m|$. Тогда с учетом условия $\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn}$ для коэффициентов $c_n(t)$ в разложении (4.4) получаем уравнение

$$i\hbar \frac{dc_m(t)}{dt} = \sum_n c_n(t) \langle\varphi_m|\hat{V}(t)|\varphi_n\rangle e^{-i\omega_{mn}t}. \quad (4.7)$$

Начальное условие для уравнения (4.7) имеет вид (4.5).

Предположим, что возмущение $\hat{V}(t)$ содержит малый параметр

$$\hat{V}(t) = \lambda \hat{U}(t).$$

Тогда мы можем искать решение уравнения (4.7) методом последовательных итераций. В нулевом по возмущению приближении решение уравнения (4.7) есть

$$c^{(0)}(t) = c_n(0) = \delta_{nl}. \quad (4.8)$$

Для того чтобы найти решение уравнения (4.7) в первом порядке теории возмущений, поставим в правую часть уравнения значения коэффициентов в нулевом приближении (4.8). Тогда уравнение (4.7) примет вид

$$i\hbar \frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = \langle\varphi_m|\hat{V}(t)|\varphi_l\rangle e^{-i\omega_{ml}t}. \quad (4.9)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением возмущений, для которых диагональные элементы по невозмущенным состояниям равны нулю:

$$\langle\varphi_l|\hat{V}(t)|\varphi_l\rangle = 0.$$

Рассмотрим решения уравнения (4.9) для двух различных случаев.

1) $m = l$. В этом случае уравнение (4.9) принимает вид

$$i\hbar \frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = 0.$$

Откуда

$$c_l^{(1)}(t) = c_l^{(1)}(0) = 1.$$

2) $m \neq l$. В этом случае решение уравнения (4.9) с учетом начального условия $c_m^{(1)}(0) = 0$ можно представить в виде

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle \varphi_m | \hat{V}(t) | \varphi_l \rangle e^{-i\omega_{ml}t'} dt'. \quad (4.10)$$

Рассматриваемое возмущение действует на квантовую систему в интервале времени $0 \leq t \leq \tau$. Это означает, что для времен $t > \tau$ коэффициенты $c_m^{(1)}(t)$ перестают зависеть от времени и имеют то значение, которое они принимали в момент времени $t = \tau$

$$c_m^{(1)}(t) = c_m^{(1)}(\tau) \quad \text{для } t \geq \tau.$$

Величины $p_m(t) = |c_m^{(1)}(t)|^2$ представляют собой вероятности обнаружить квантовую систему в момент времени t в состоянии $|\varphi_m\rangle$. Поскольку в начальный момент времени квантовая система находилась в определенном состоянии с волновой функцией $|\varphi_l\rangle$, тогда величины $p_m(t)$ можно интерпретировать также как вероятности перехода к моменту времени t рассматриваемой квантовой системы из состояния $|\varphi_l\rangle$ в состояние $|\varphi_m\rangle$. Для времен $t > \tau$ вероятности $p_m(t)$ перестают зависеть от времени и равны

$$p_m(t) = p_m(\tau) \quad \text{для } t \geq \tau.$$

Тогда для вероятности перехода квантовой системы к моменту времени t из состояния $|\varphi_l\rangle$ в состояние $|\varphi_m\rangle$ из формулы (4.10) получаем

$$p_m(t) = p_m(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\tau \langle \varphi_m | \hat{V}(t) | \varphi_l \rangle e^{-i\omega_{ml}t'} dt' \right|^2. \quad (4.11)$$

Рассмотрим далее частный случай, когда возмущение имеет ступенчатый вид

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} \hat{W} & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & t < 0, t > \tau. \end{cases}$$

В этом случае интеграл по времени в правой части (4.11) легко вычисляется, и в результате мы получаем

$$p_m(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} |\langle \varphi_m | \hat{W} | \varphi_l \rangle|^2 \frac{4 \sin^2(\omega_{ml}\tau/2)}{\omega_{ml}^2}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим случай длительного возмущения, для которого выполняются соотношения $\omega_{ml}\tau \gg 1$. В этом случае с учетом предельного соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(x\tau)}{x^2\tau} = \pi\delta(x)$$

для вероятности перехода (4.12) получаем

$$p_m(\tau) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle \varphi_m | \hat{W} | \varphi_l \rangle|^2 \delta(\omega_{ml}) \tau = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \varphi_m | \hat{W} | \varphi_l \rangle|^2 \delta(E_m - E_l) \tau. \quad (4.13)$$

Вероятность перехода оказалась пропорциональной времени. Теперь из (4.13) легко получить вероятность перехода в единицу времени

$$\Gamma_{ml}(\tau) = \dot{p}_m(\tau) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \varphi_m | \hat{W} | \varphi_l \rangle|^2 \delta(E_m - E_l). \quad (4.14)$$

В дальнейшем нам придется иметь дело с переходами квантовой системы из дискретного в непрерывный спектр. В этом случае для того чтобы найти экспериментально измеряемую вероятность перехода, мы должны выражение вида (4.14) проинтегрировать по некоторому интервалу значений энергии конечного состояния E_m

$$\Gamma = \int \Gamma_{ml} dN(E_m) = \int \Gamma_{ml} \rho(E_m) dE_m, \quad (4.15)$$

где $dN(E_m)$ – число конечных состояний системы в интервале энергий от E_m до $E_m + dE_m$ и $\rho(E_m)$ – плотность числа конечных состояний квантовой системы. Из формул (4.15) и (4.14) получаем

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \varphi_m | \hat{W} | \varphi_l \rangle|^2 \rho(E_m) |_{E_l=E_m}. \quad (4.16)$$

Формула (4.15) называется золотым правилом Ферми.

§4.2. Спонтанное излучение двухуровневого атома

Рассмотрим одиночный двухуровневый атом, взаимодействующий с квантовым электромагнитным полем. Представим гамильтониан атома в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

где невозмущенный гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \hat{R}_z + \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar\omega_k \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}$$

включает в себя энергию свободного атома и свободного поля, а оператор возмущения имеет вид (3.32). Поскольку мы имеем дело с одиночным атомом,

то удобно совместить начало отсчета радиуса-вектора с ядром атома, тогда в выражении (3.32) мы можем положить $\vec{r} = 0$. В этом случае гамильтониан возмущения принимает вид

$$\hat{V} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar g_k (\hat{R}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{R}^-).$$

Выберем начальное состояние рассматриваемой системы. Пусть в начальный момент времени атом находится в возбужденном состоянии $|+\rangle$, а поле находится в многомодовом состоянии с определенным числом фотонов в каждой из мод $|\dots, n_{\vec{k}, \lambda}, \dots\rangle$. Поскольку в начальный момент времени атом и поле не взаимодействовали, то

$$|\Psi_{\text{нач}}\rangle = |+\rangle |\dots, n_{\vec{k}, \lambda}, \dots\rangle.$$

Предположим вначале, что атом испускает фотон с определенным направлением импульса $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ и поляризацией λ . Впоследствии мы усредним полученное выражение по всем возможным направлениям вылета фотонов и их поляризациям. Тогда конечное состояние рассматриваемой системы

$$|\Psi_{\text{кон}}\rangle = |-\rangle |\dots, n_{\vec{k}, \lambda} + 1, \dots\rangle.$$

Вероятность перехода из начального в конечное состояние за единицу времени будет определяться золотым правилом Ферми (4.16)

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_{\text{нач}} | \hat{V} | \Psi_{\text{кон}} \rangle|^2 \rho(E_{\text{кон}}) |_{E_{\text{нач}}=E_{\text{кон}}}. \quad (4.17)$$

Принимая во внимание соотношения

$$\hat{R}^+ |+\rangle = 0, \quad \hat{R}^- |+\rangle = |-\rangle,$$

$$\hat{a}_{k'}^+ |\dots, n_{k'}, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_{k'} + 1} |\dots, n_{k'} + 1, \dots, n_k, \dots\rangle,$$

где $k \equiv (\vec{k}, \lambda)$, $k' \equiv (\vec{k}', \lambda')$, легко вычислить матричный элемент, входящий в формулу (4.17),

$$\langle \Psi_{\text{нач}} | \hat{V} | \Psi_{\text{кон}} \rangle = \sum_{k'} \hbar g_{k'} \langle - | - \rangle \langle \dots, n_{k'}, \dots, n_k + 1, \dots | \dots, n_{k'} + 1, \dots, n_k, \dots \rangle. \quad (4.18)$$

В формуле (4.18) имеем

$$\langle - | - \rangle = 1, \quad \langle \dots, n_{k'}, \dots, n_k + 1, \dots | \dots, n_{k'} + 1, \dots, n_k, \dots \rangle = \delta_{k, k'}.$$

Тогда вероятность перехода в единицу времени (4.17) равна

$$\Gamma = 2\pi \hbar g_k^2 (n_k + 1)^2 \rho(E_{\text{кон}}) \quad (\text{при условии } E_{\text{нач}} = E_{\text{кон}}). \quad (4.19)$$

Условие $E_{\text{нач}} = E_{\text{кон}}$ означает, что испускаться могут только фотоны, для которых $\hbar\omega_0 = \hbar\omega_{k_0}$, где $k_0 = \omega_0/c$.

Ограничимся рассмотрением случая спонтанного излучения двухуровневого атома, т.е. будем полагать, что в начальный момент времени число фотонов в каждой из мод поля равно нулю $n_k = 0$. В этом случае формула (4.19) принимает вид

$$\Gamma = 2\pi\hbar g_{k_0}^2 \rho(E_{\text{кон}}) \quad (\text{при условии } E_{\text{нач}} = E_{\text{кон}}). \quad (4.20)$$

Рассчитаем теперь плотность числа конечных состояний системы по энергии $\rho(E_{\text{кон}})$. В результате испускания фотона атом переходит в определенное квантовое состояние $|-\rangle$. Тогда число возможных конечных состояний системы будет определяться числом конечных состояний электромагнитного поля. Число состояний поля с модулем волнового вектора в интервале $(k, k + dk)$ и направлением волнового вектора, лежащим в телесном угле $d\Omega$, определяется формулой (1.21). Учитывая соотношение между импульсом и волновым вектором $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, мы можем записать число состояний поля с модулем импульса в интервале $(p, p + dp)$ и направлением импульса, лежащим в телесном угле $d\Omega$, как

$$dN_p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} k^2 dk d\Omega.$$

Соответственно, число состояний поля с энергией в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ и направлением импульса в телесном угле $d\Omega$ есть

$$dN_\varepsilon = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \varepsilon^2 d\varepsilon d\Omega, \quad \text{где } \varepsilon = p c.$$

Тогда плотность числа состояний поля по энергии есть

$$d\rho_\varepsilon = \frac{dN_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \varepsilon^2 d\Omega. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.20) получаем выражение для вероятности испускания в единицу времени фотона с направлением импульса в телесный угол $d\Omega$ и определенной поляризацией

$$d\Gamma = 2\pi\hbar \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} g_{k_0}^2 \varepsilon_0^2 d\Omega, \quad (4.22)$$

где $\varepsilon_0 = \hbar\omega_0$, $k_0 = \omega_0/c$. Подставляя в (4.22) явный вид константы диполь-фотонного взаимодействия, получим

$$d\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3} (\vec{e}_d \vec{e}_\lambda)^2 d\Omega. \quad (4.23)$$

Усредним выражение (4.23) по всем возможным направлениям импульсов фотонов и всем возможным поляризациям

$$\Gamma = \sum_{\text{по поляр}} \int \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3} (\vec{e}_d \vec{e}_\lambda)^2 d\Omega. \quad (4.24)$$

Проведем вначале усреднение по поляризациям. Для этого нам необходимо вычислить сумму

$$\sum_{\text{по поляр}} (\vec{e}_d \vec{e}_\lambda)^2.$$

Для каждого возможного направления волнового вектора или импульса фотона имеются две независимые поляризации \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . В плоскости, перпендикулярной вектору \vec{k} , единичные векторы можно выбрать произвольным образом. Выберем базисные векторы поляризации \vec{e}_1 и \vec{e}_2 так, чтобы вектор \vec{e}_1 лежал в одной плоскости вектором \vec{e}_d , а вектор \vec{e}_2 был перпендикулярен этой плоскости (см. рис. 10). Тогда

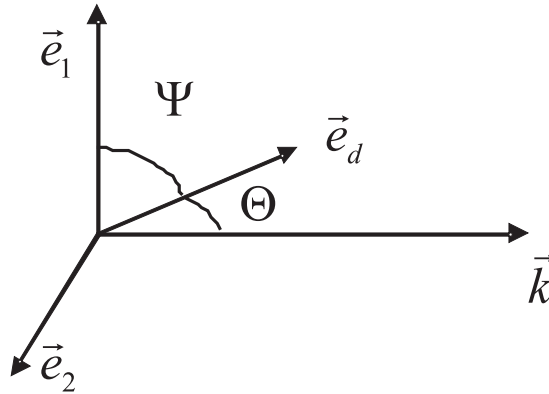


Рис. 10. Волновой вектор и поляризация испущенного фотона

$$\sum_{\text{по поляр}} (\vec{e}_d \vec{e}_\lambda)^2 = (\vec{e}_d \vec{e}_1)^2 + (\vec{e}_d \vec{e}_2)^2 = (\vec{e}_d \vec{e}_1)^2 = \cos^2 \psi = \sin^2 \theta. \quad (4.25)$$

Подставляя (4.25) в (4.24), получаем

$$\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3} \int \sin^2 \theta d\Omega. \quad (4.26)$$

Для вычисления интеграла в правой части выражения (4.26) выберем сферическую систему координат в \vec{k} -пространстве так, чтобы ось z совпадала по направлению с вектором \vec{e}_d . Тогда угол θ будет представлять собой азимутальный угол выбранной системы координат. В результате имеем $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ и

$$\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^3 \theta = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3} \frac{8\pi}{3}.$$

Окончательно для вероятности испускания двухуровневым атомом в единицу времени фотона с произвольными направлением вылета и поляризацией получаем

$$\Gamma = \frac{4d^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}. \quad (4.27)$$

Теперь мы можем выразить время спонтанного излучения атома как

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \frac{4d^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}. \quad (4.28)$$

§4.3. Теория Дикке сверхизлучения системы двухуровневых атомов

В предыдущем разделе мы вычислили вероятность спонтанного излучения одиночного атома, взаимодействующего с вакуумным электромагнитным полем. Если мы рассмотрим макроскопическую систему из N независимых атомов, то интенсивность излучения I системы атомов, т.е. энергия, теряемая в единицу времени, будет пропорциональна числу атомов в системе. Однако в 1954 году американский физик Роберт Дикке впервые показал, что макроскопическая система из N инвертированных двухуровневых атомов с размерами, меньшими длины волны излучения ("сосредоточенная" или "точечная" система излучателей), может спонтанно перейти в основное состояние за время τ_R , в N раз меньшее времени спонтанного излучения изолированного атома τ : $\tau_R = \tau/N$. При этом интенсивность излучения оказывается пропорциональной квадрату числа излучателей $I \sim N^2$, в отличие от обычного спонтанного излучения независимых атомов, для которого интенсивность излучения пропорциональна числу излучателей $I \sim N$.

Для оптического и инфракрасного излучений (т.е. наиболее интересных с точки зрения применений диапазонов излучения) "сосредоточенная модель" сверхизлучения неприменима. Однако в ряде работ была теоретически предсказана возможность реализации сверхизлучения в протяженных телах (см. ссылки в монографии [8]). В такой системе сверхизлучение возможно при условии, что имеет место селекция мод электромагнитного поля за счет использования особых иглообразных образцов (рис. 11). Сверхизлучение формируется в этом случае только такими фотонами, которые испущены в основную продольную моду, в отношении которой атомы оказываются неразличимыми. Коллективный характер испускания фотонов при сверхизлучении обусловлен неразличимостью атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем. Известно, что нельзя локализовать фотон в области, линейные размеры которой меньше длины волны излучения λ , поэтому для "сосредоточенной"

системы ($L < \lambda$) невозможно сказать, какой из атомов испустил первый фотон. При этом все атомы образца автоматически взаимодействуют с одной

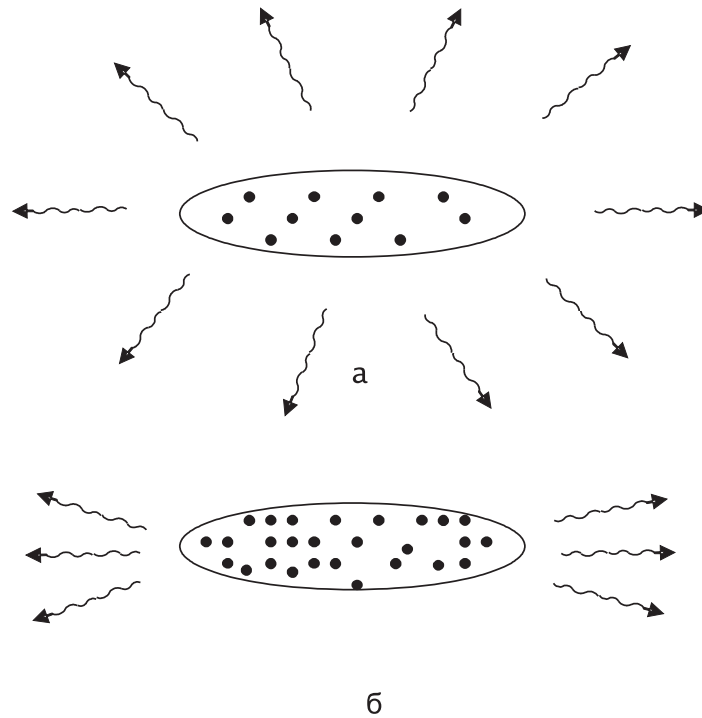


Рис. 11. Пространственное распределение интенсивности: обычное спонтанное излучение (а); сверхизлучение (б)

и той же модой электромагнитного поля и оказываются внутри объема когерентности. Если же атомы располагаются на расстояниях $L > \lambda$, то по отношению друг к другу они становятся локализованными источниками. Последнее означает, что один атом может испустить фотон, который повлияет на второй атом лишь с некоторой малой вероятностью (порядка $a/(4\pi L^2)$, где a – сечение рассеяния). При произвольной геометрии в такой системе сверхизлучение становится маловероятным процессом. Коллективное спонтанное излучение фотонов возможно в такой системе, как уже было сказано выше, при условии, что имеет место селекция мод электромагнитного поля. Другими словами, сверхизлучение запускается не любым первым фотоном, а лишь тем, который испущен в определенную моду, в отношении которой атомы оказываются неразличимыми.

В первой части нашего пособия мы рассмотрим теорию сверхизлучения Дикке, основанную на теории возмущений. Динамические аспекты эффекта будут обсуждаться во второй части пособия.

Рассмотрим ансамбль из N двухуровневых атомов, взаимодействующих

с многомодовым электромагнитным полем, описываемый гамильтонианом

$$H = \sum_{f=1}^N \hbar\omega_0 R_z^{(f)} + \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \sum_{f=1}^N \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar g_k (R_{(f)}^+ a_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}_f} + a_{\vec{k}, \lambda}^+ R_{(f)}^- e^{-i\vec{k}\vec{r}_f}), \quad (4.29)$$

где индекс f нумерует двухуровневые атомы в системе, а \vec{r}_f – радиус-вектор f -го атома.

Следуя работе Дикке [40], ограничимся вначале рассмотрением простейшего случая "сосредоточенной" системы двухуровневых излучателей, т.е. системы, размеры которой меньше длины волны излучения λ , и, соответственно, в гамильтониане (4.29) мы можем положить $\exp(\pm i\vec{k}\vec{r}_f) \approx 1$. Предположим, что в начальный момент времени все атомы возбуждены, т.е. каждый из них находится в состоянии $|+\rangle$. Тогда атомная волновая функция всей системы есть

$$|\Psi(0)\rangle = |+, \dots, +\rangle = \prod_{f=1}^N |+\rangle_f. \quad (4.30)$$

Предположим, что дальнейшая эволюция атомной системы обусловлена только взаимодействием атомов с полем излучения, т.е. пренебрежем всеми другими возможными механизмами эволюции, такими как столкновения атомов, и другими релаксационными процессами. Сделаем также фундаментальное предположение о том, что взаимодействие атомной подсистемы с квантовым электромагнитным полем симметрично относительно любых двух излучателей. Такое предположение является следствием того факта, что расстояние между атомами намного меньше длины волны излучения. Тогда в соответствии с соотношением неопределенностей атомы неразличимы по отношению к процессам испускания и поглощения фотонов. В рамках сделанных предположений мы можем утверждать, что атомная подсистема эволюционирует в гильбертовом пространстве, инвариантном относительно любых перестановок частиц, что является следствием того, что как начальное состояние атомной подсистемы (4.30), так и гамильтониан (4.29) в случае "сосредоточенной" системы являются инвариантными относительно перестановок атомов. Для описания таких систем удобно использовать формализм коллективных операторов

$$R_z = \sum_f R_z^{(f)}, \quad R^\pm = \sum_f R_{(f)}^\pm.$$

N -атомное состояние, инвариантное относительно перестановок частиц, изоморфно симметричной суперпозиции N спиновых состояний $|JM\rangle$ для спина $1/2$, которая является собственным состоянием коллективных операторов R_z и $R^2 = (R^+ R^- + R^- R^+) + R_z^2$:

$$R^2 |JM\rangle = J(J+1) |JM\rangle,$$

$$R_z | JM \rangle = M | JM \rangle,$$

соответствующим максимальному значению $J = N/2$ углового момента N квазиспинов. Всего имеется $N + 1$ таких состояний, которые могут быть получены повторным действием симметричного коллективного понижающего оператора R^- на начальное состояние $|\Psi(0)\rangle$:

$$| JM \rangle = \sqrt{\frac{(J+M)!}{N!(J-M)!}} (R^-)^{(J-M)} | +, \dots, + \rangle$$

для $-J \leq M \leq J$.

Состояние $| JM \rangle$ представляет полностью симметричное состояние, для которого $J + M$ атомов находятся на верхнем уровне $| + \rangle$ и $J - M$ атомов в нижнем состоянии $| - \rangle$. Введенные состояния удовлетворяют важным соотношениям

$$\langle JM | R^+ R^- | JM \rangle = J + M, \quad \langle JM | R^- R^+ | JM \rangle = J - M,$$

из которых следует, что операторы $R^+ R^-$ и $R^- R^+$ можно интерпретировать как операторы числа атомов в верхнем и нижнем состояниях соответственно. Энергия состояния $| JM \rangle$ есть $M\hbar\omega_0$ при условии, что за начало отсчета выбрана энергия атомной системы, соответствующая состоянию, в котором возбуждена половина атомов ($M = 0$). Тогда эволюцию атомной системы в результате процессов излучения мы можем рассматривать как перескоки вниз по энергетической "лестнице" из $2J + 1 = N + 1$ эквидистантных энергетических уровней (рис. 12).

Поскольку атомы локализованы в объеме с размерами, меньшими длины волны излучения, мы можем считать, что N излучателей ведут себя как точечный диполь, представляющий собой сумму индивидуальных диполей. Принимая во внимание, что интенсивность фотонной эмиссии изолированного атома в квантовой теории излучения есть

$$I_f = \Gamma \langle R_f^+ R_f^- \rangle,$$

где Γ – вероятность спонтанного распада изолированного атома и $\langle \dots \rangle$ обозначает квантово-механическое среднее, мы можем записать для интенсивности излучения системы N излучателей как

$$I_N = \Gamma \langle R^+ R^- \rangle.$$

Для $| JM \rangle$ состояния, учитывая, что операторы R^\pm аналогичны поперечным компонентам J_\pm углового момента $J = N/2$ системы спинов $1/2$, получаем

$$I_N = \Gamma \langle JM | R^+ R^- | JM \rangle = \Gamma(J + M)(J - M + 1). \quad (4.31)$$

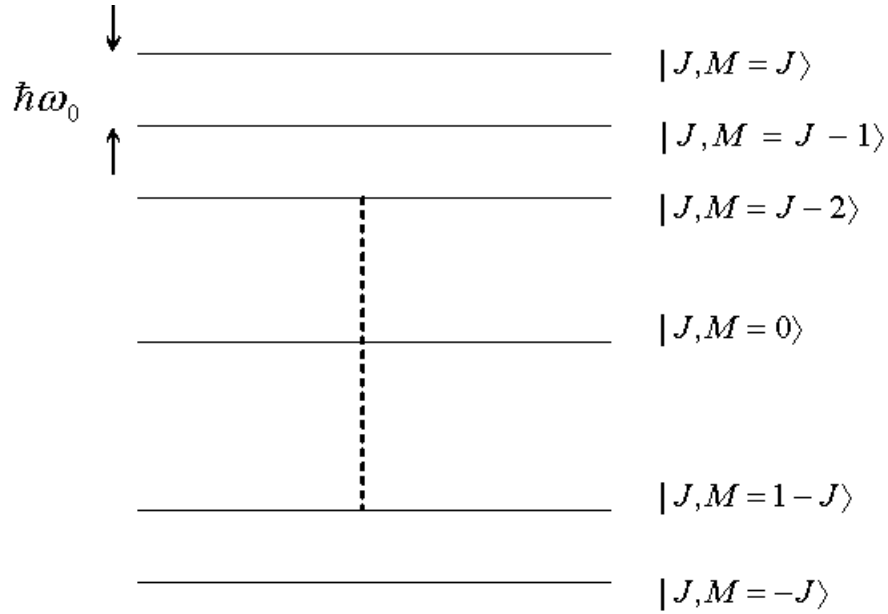


Рис. 12. Схема энергетических уровней системы двухуровневых атомов

В начальный момент времени для полностью возбужденного состояния атомной подсистемы ($M = J = N/2$) интенсивность излучения (4.31) имеет вид

$$I_N = 2\Gamma J = \Gamma N. \quad (4.32)$$

Как следует из (4.32), в начальный момент времени каждый атом начинает распадаться независимо от других, и интенсивность излучения пропорциональна N . В момент времени, когда атомная система находится в состоянии с $M = 0$ (населенности нижнего и верхнего уровней равны друг другу), для интенсивности излучения получаем

$$I_N = \Gamma J(J + 1) = \Gamma \frac{N}{2} \left(\frac{1}{2}N + 1 \right) \approx \frac{\Gamma}{4} N^2.$$

В данном состоянии распад системы носит кооперативный характер, и интенсивность излучения пропорциональна N^2 . При этом излучение изотропно по всем направлениям.

В теории Дикке не исследуется эволюция системы излучателей, соответственно, не анализируется механизм перехода как атомной, так и полевой подсистем в "сверхизлучательное" состояние. Временная теория сверхизлучения на основе динамического подхода будет рассмотрена в следующей части пособия.

§4.4. Комптоновское рассеяние

Рассмотрим задачу о рассеянии фотонов на свободных электронах (комптоновское рассеяние). В результате такого взаимодействия поглощается фотон одной моды k_1 с длиной волны λ_1 и испускается фотон другой моды k_2 с длиной волны λ_2 . При этом изменение длины волны рассеянного фотона составляет

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где λ_c — комптоновская длина волны равная 0,24 пм, θ — угол рассеяния, т.е. угол между волновыми векторами налетающего и рассеянного фотона. Соотношение для $\Delta\lambda$ легко может быть получено с использованием релятивистских законов сохранения импульса и энергии в предположении о корпускулярной природе фотонов.

Мы используем квантово-электродинамический подход для расчета сечений комптоновского рассеяния. Поскольку при рассеянии изменяются состояния двух мод поля, то описание такого процесса в рамках теории возмущения требует рассмотрения члена второго порядка по оператору \hat{V}_1 и первого порядка по оператору \hat{V}_2 (см. формулу (3.20)). Мы покажем, что для рассматриваемой задачи матричные элементы оператора \hat{V}_1 обращаются в нуль, поэтому процесс рассеяния будет описываться матричными элементами оператора \hat{V}_2 .

Выберем начальное состояние для рассматриваемой системы. Начальное и конечное состояние электрона будем описывать плоскими волнами $|\vec{p}_1\rangle$ и $|\vec{p}_2\rangle$. Для того чтобы работать с дискретным набором возможных значений импульса электрона, будем полагать, как обычно, что электрон находится в непроницаемом ящике с объемом V , который совпадает с объемом квантования электромагнитного поля. В координатном представлении начальная и конечная волновые функции электрона есть

$$\Psi_{\vec{p}_1} = \frac{1}{V} e^{i\vec{p}_1 \vec{r} / \hbar}, \quad \Psi_{\vec{p}_2} = \frac{1}{V} e^{i\vec{p}_2 \vec{r} / \hbar}.$$

Для записи начального и конечного состояний поля будем использовать представление чисел заполнения. Будем полагать, что до рассеяния мы имели фотон в моде k_1 , а после рассеяния — фотон в другой моде k_2 . Впоследствии мы усредним полученное выражение для сечения рассеяния фотона по возможным направлениям его рассеяния и поляризациям. Тогда начальное и конечное состояния всей системы есть

$$\Psi_{\text{нач}} = |\vec{p}_1\rangle |\dots, 1_{k_1}, \dots, 0_{k_2}, \dots\rangle,$$

$$\Psi_{\text{кон}} = |\vec{p}_2\rangle |\dots, 0_{k_1}, \dots, 1_{k_2}, \dots\rangle.$$

Легко заметить, что матричный элемент для оператора взаимодействия электрона и поля $\hat{V}_1 = e/(mc)\hat{p}\hat{A}$ в обкладках $|\vec{p}_1\rangle$ и $|\vec{p}_2\rangle$ равен нулю. Действительно,

$$\langle \vec{p}_1 | \hat{V}_1 | \vec{p}_2 \rangle = \frac{e}{mc} \hat{A} \langle \vec{p}_1 | \hat{p} | \vec{p}_2 \rangle = \frac{e}{mc} \hat{A} \vec{p}_2 \langle \vec{p}_1 | \vec{p}_2 \rangle = 0,$$

так как начальный и конечный импульсы электрона не равны. Тогда процесс рассеяния фотона на электроне, как уже отмечалось выше, будем описывать матричными элементами оператора

$$\hat{V}_2 = \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2. \quad (4.33)$$

Для расчета вероятности перехода между начальным и конечным состояниями системы воспользуемся золотым правилом Ферми (4.16). Вычислим вначале матричный элемент

$$\langle \Psi_{\text{нач}} | \hat{V}_2 | \Psi_{\text{кон}} \rangle,$$

где оператор взаимодействия \hat{V}_2 имеет вид (4.33) и оператор векторного потенциала \hat{A} можно представить в виде (3.21). Для сокращения записей обозначим $|1\rangle = |\Psi_{\text{нач}}\rangle$ и $|2\rangle = |\Psi_{\text{кон}}\rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{V}_2 | 2 \rangle &= \frac{e^2}{2mc^2} \frac{2\pi\hbar c^2}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{\vec{e}_\lambda \vec{e}'_{\lambda'}}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \{ \langle 1 | \hat{a}_k \hat{a}_{k'} e^{i(\vec{k} + \vec{k}')\vec{r}} | 2 \rangle + \langle 1 | \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^+ e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} | 2 \rangle + \\ &+ \langle 1 | \hat{a}_k^+ \hat{a}_{k'} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} | 2 \rangle + \langle 1 | \hat{a}_k^+ \hat{a}_{k'}^+ e^{-i(\vec{k} + \vec{k}')\vec{r}} | 2 \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Легко заметить, что первое и последнее слагаемое в фигурных скобках в формуле (4.34) равны нулю. Второе слагаемое равно

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^+ e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} | 2 \rangle &= \langle \vec{p}_1 | e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} | \vec{p}_2 \rangle \langle \dots, 1_{k_1}, \dots, 0_{k_2}, \dots | \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^+ | \dots, 0_{k_1}, \dots, 1_{k_2}, \dots \rangle = \\ &= \langle \vec{p}_1 | e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} | \vec{p}_2 \rangle \delta_{k', k_1} \delta_{k, k_2}. \end{aligned}$$

Матричный элемент

$$\langle \vec{p}_1 | e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}} | \vec{p}_2 \rangle = \frac{1}{V} \int e^{i(\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2 - \vec{p}_2)\vec{r}/\hbar} = \begin{cases} 0 & \vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2 - \vec{p}_2 \neq 0, \\ 1 & \vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2 - \vec{p}_2 = 0. \end{cases}$$

Аналогично вычисляется и третье слагаемое в правой части (4.34). Таким образом, матричный элемент $\langle 1 | \hat{V}_2 | 2 \rangle$ отличен от нуля только при выполнении закона сохранения импульса

$$\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2 - \vec{p}_2 = 0. \quad (4.35)$$

При выполнении такого условия матричный элемент принимает вид

$$\langle 1|\hat{V}_2|2\rangle = \frac{2\pi\hbar e^2 \vec{e}_1 \vec{e}_2}{mV \sqrt{\omega_1 \omega_2}}.$$

Будем в дальнейшем для упрощения записей использовать систему отсчета, в которой электрон до рассеяния покоится, т.е. будем полагать, что $\vec{p}_1 = 0$.

Для того чтобы рассчитать вероятность рассеяния фотонов с помощью золотого правила Ферми (4.16), найдем плотность числа конечных состояний по энергии нашей системы. Из закона сохранения импульса (4.35) следует, что конечный импульс электрона полностью определяется конечным импульсом фотона. Это означает, что число конечных состояний изучаемой системы совпадает с числом конечных состояний фотонной подсистемы.

Число фотонных состояний с модулем волнового вектора в интервале от k_2 от $k_2 + dk_2$, направлением волнового вектора в телесном угле $d\Omega$ и определенной поляризацией есть

$$dN(k_2) = \frac{V}{(2\pi)^3} k_2^2 dk_2 d\Omega.$$

Введем плотность числа конечных энергетических состояний изучаемой системы $\rho(E_2)$ с помощью соотношения

$$dN(k_2) = \rho(k_2) dk_2 = \rho(E_2) dE_2.$$

Откуда

$$\rho(E_2) = \frac{dN_{k_2}}{dE_2}.$$

Конечная энергия системы есть

$$E_2 = \hbar\omega_2 + \frac{\vec{p}_2^2}{2m}. \quad (4.36)$$

Подставляя в (4.36) закон сохранения импульса (4.35), получаем

$$E_2 = \hbar\omega_2 + \frac{\hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2}{2m}. \quad (4.37)$$

Вводя комптоновскую длину волны $\lambda_c = \hbar/(mc) \approx 2,4 \cdot 10^{-10}$ см, перепишем формулу (4.37) в виде

$$E_2 = \hbar c \left[k_2 + \frac{\lambda_c}{2} (k_1^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta + k_2^2) \right].$$

Тогда плотность числа конечных состояний есть

$$\rho(E_2) = \frac{dE_2}{dk_2} = \frac{V k_2^2 d\Omega}{(2\pi)^2 \hbar c} \frac{1}{[1 + \lambda_c (k_2 - k_1 \cos \theta)]}.$$

Теперь, используя золотое правило Ферми (4.16), найдем вероятность рассеяния фотона в единицу времени в состояние с модулем волнового вектора k_2 , поляризацией \vec{e}_2 и направлением волнового вектора \vec{k}_2 в телесном угле $d\Omega$

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 2|\hat{V}_2|1\rangle|^2 \rho(E_2) = \frac{e^2(\vec{e}_1\vec{e}_2)^2 d\Omega}{Vm^2\omega_1\omega_2[1 + \lambda_c(k_2 - k_1 \cos \theta)]}.$$

В экспериментах по рассеянию частиц обычно измеряют не саму вероятность, а дифференциальное сечение рассеяния. Определяя дифференциальное сечение рассеяния как отношение скорости перехода $d\Gamma$ и плотности потока вероятности падающих фотонов $J = c/V$, получаем для сечения рассеяния выражения

$$d\sigma(\vec{k}_2) = \frac{d\Gamma}{J} = \alpha^4 a_0^2 \frac{k_2}{k_1} \frac{(\vec{e}_1\vec{e}_2)^2 d\Omega}{1 + \lambda_c(k_2 - k_1 \cos \theta)}, \quad (4.38)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ – постоянная тонкой структуры и $a_0 = \hbar^2/(me^2) = 5 \cdot 10^{-9}$ см – первый борковский радиус. Введем также величину $\omega_1 = me^4/\hbar^3 = 4 \cdot 10^{16} c^{-1}$ – частоту обращения на первом борковском радиусе. Будем рассматривать фотоны, для которых $\omega \ll \omega_1$ или $\lambda_c k \ll 1$. Для таких фотонов изменение длины волны в результате комптоновского рассеяния очень мало $\Delta\lambda \ll \lambda$. В этом случае мы можем положить в формуле (4.34) $k_1 \approx k_2$. В результате сечение рассеяния (4.38) примет вид

$$d\sigma(\vec{k}_2) = r_0^2 (\vec{e}_1\vec{e}_2)^2 d\Omega, \quad (4.39)$$

где $r_0 = \alpha^2 a_0 = e^2/(mc^2) = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона.

Рассмотрим вначале рассеяние на электроне поляризованных фотонов. Вычислим скалярное произведение векторов поляризации в формуле (4.39)

$$\vec{e}_1\vec{e}_2 = \cos \theta = \sin \Psi,$$

где θ – угол между векторами \vec{k}_2 и \vec{k}_1 , а Ψ – угол между векторами \vec{k}_2 и \vec{k}_1 (см. рис. 13).

Дифференциальное сечение рассеяния принимает в этом случае вид

$$d\sigma = r_0^2 \cos^2 \theta d\Omega = r_0^2 \sin^2 \Psi d\Omega. \quad (4.40)$$

Формула (4.40) имеет тот же вид, что и классическое выражение для сечения рассеяния электромагнитных волн на свободных зарядах (формула Томсона).

Полное сечение рассеяния для фотонов с любыми направлениями волнового вектора \vec{k}_2

$$\sigma = \int d\sigma = \int r_0^2 \sin^2 \Psi d\Omega = 2\pi r_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \Psi d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

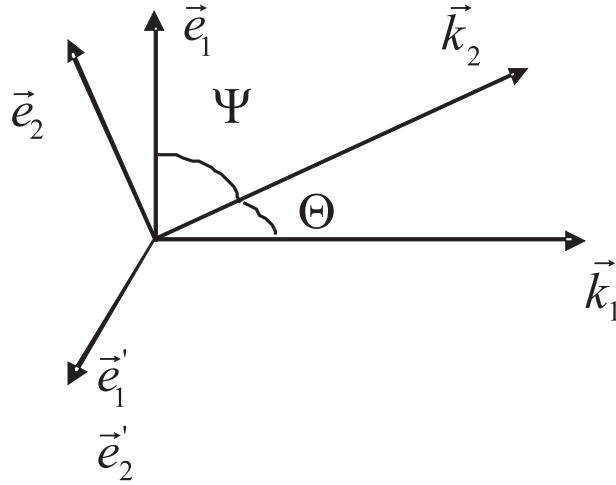


Рис. 13. Волновые векторы и поляризации налетающего и рассеянного фотонов

Рассмотрим также рассеяние неполяризованного света. Выберем базисные векторы поляризации для налетающих и рассеянных фотонов, как показано на рис. 13. Тогда, вычисляя среднее по поляризации

$$\overline{(\vec{e}_1 \vec{e}_2)^2} = \frac{1}{2} \{ (\vec{e}_1 \vec{e}_2)^2 + (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2)^2 \} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta + 1),$$

получаем для дифференциального сечения рассеяния неполяризованных фотонов

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

§ 4.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что во втором порядке теории возмущений сдвиг энергии возбужденного состояния двухуровневого атома $|+\rangle$ за счет взаимодействия с вакуумным состоянием электромагнитного поля после суммирования по поляризациям и интегрированию по углам (аналогично формуле (4.34)) определяется выражением

$$\delta E_+ = -\frac{8\pi}{3c} \left(\frac{\omega_0 d}{2\pi c} \right)^2 \int_0^{K_c} \frac{1}{\omega - \omega_0} \omega d\omega,$$

где K_c – условный верхний предел, устраняющий ультрафиолетовую расходимость.

2. Оценить скорости спонтанных радиационных переходов между колебательными и вращательными состояниями в двухатомной молекуле.

3. Используя золотое правило Ферми и феноменологический оператор взаимодействия низкочастотных ($\hbar\omega \ll mc^2$) фотонов вида

$$V_\gamma = \alpha \mathcal{E}^4 \mathcal{E}_{NL}^{-2},$$

где $\mathcal{E}_{NL} = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} = 4.44 \cdot 10^{13}$ Гс — характерная значение напряженности поля, для которой применимы линейные уравнения поля, получить оценку сечения рассеяния фотона на фотоне

$$\sigma_\gamma = \alpha^{18} a_0^2 \frac{\omega}{\omega_a}.$$

4. Учитывая, что при упругом рассеянии фотона на угол Θ передается импульс $\Delta p_x = \frac{\hbar\omega}{c}(1 - \cos\Theta)$, показать, что сила светового давления при рассеянии фотонов на свободном электроне равна

$$\vec{f} = \vec{n} \frac{4\pi}{3} r_0^2 \frac{I}{c},$$

где I — интенсивность падающего света и $\vec{n} = \vec{k}/k$.

5. Оценить скорость, которую приобретает электрон при рассеянии одного фотона.

Заключение

В учебном пособии рассмотрены вопросы квантовой нерелятивистской теории взаимодействия атомных систем с электромагнитным полем. Описана процедура квантования атомных системы, взаимодействующих с электромагнитным полем, и на ее основе рассмотрен ряд задач квантовой оптики, связанных как с расчетом вероятностей электродинамических процессов, так и с полным динамическим описанием эволюции атомов и поля. Изложен общий метод получения квантового гамильтониана системы атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем, и описано квантование свободного электромагнитного поля и поля в веществе. Изучены свойства наиболее интересных и используемых в приложениях квантовых состояний электромагнитного поля (фоковский базис, глауберовские когерентные состояния, сжатые состояния и состояния с определенной фазой), а также ряд эффектов, обусловленных взаимодействием атомов с квантовым полем, таких как спонтанное излучение изолированного атома, комптоновское рассеяние, для изучения которых можно ограничиться нестационарной теорией возмущения.

Авторы надеются, что изложение теоретического материала на доступном для студентов уровне, теоретический материал в котором иллюстрируется достаточно большим количеством индивидуальных заданий, позволит студентам глубже освоить соответствующие разделы квантовой оптики и получить хорошие навыки выполнения расчетов. Задания поискового характера снабжены ссылками на оригинальные статьи и монографии, работа с которыми позволит студентам и магистрантам научиться работать с неадаптированными научными источниками. Многие задания в принципе вполне могут стать основой для выполняемых студентами курсовых работ и подготовки к проведению оригинальных исследований.

Библиографический список

- [1] Лоудон Р. Квантовая теория света. М.: Мир, 1976. 488 с.
- [2] Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 428 с.
- [3] Гордов Е.П., Творогов С.Д. Квантовая теория распространения электромагнитного поля. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978. 176 с.
- [4] Шляйх В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве М.: Физматлит, 2005. 780 с.
- [5] Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 512 с.
- [6] Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000. 896 с.
- [7] Ильинский Ю.А., Келдыш Л.В. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. М.: МГУ, 1989. 304 с.
- [8] Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. Кооперативные явления в оптике. М.: Наука, 1988. 288 с.
- [9] Гришанин Б.А. Квантовая электродинамика для радиофизиков. М.: МГУ, 1981. 128 с.
- [10] Елютин П.В. Теоретические основы квантовой радиофизики М.: Мир, 1982. 144 с.
- [11] Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978. 224 с.
- [12] Килин С.Я. Квантовая оптика: поля и их детектирование. Минск: Наука и техника, 1990. 177 с.
- [13] Попов В.Н., Ярунин В.С. Коллективные эффекты в квантовой статистике излучения и вещества. Л.: ЛГУ, 1985. 192 с.

- [14] Андрианов С.Н., Самарцев В.В. Оптическое сверхизлучение и лазерное охлаждение в твердых телах. Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 1998. 132 с.
- [15] Калачев А.А., Самарцев В.В. Когерентные явления в оптике. Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2003. 281 с.
- [16] Крайнов В.П., Смирнов Б.М. Излучательные процессы в атомной физике М.: Высшая школа, 1983. 288 с.
- [17] Гринштейн Дж., Зайонц А. Квантовый вызов. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2008. 400 с.
- [18] Garrison J.G., Chiao R.Y. Quantum Optics. New York: Oxford University Press, 2008. 694 p.
- [19] Milonni P.W. The Quantum vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics. New York: Academic Press, 1994. 420 p.
- [20] Louisell W.H. Quantum Statistical Properties of Radiation. New York: Willey-Interscience Publication, 1990. 524 p.
- [21] Walls D.F., Milburn J.G. Quantum Optics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 425 p.
- [22] Gerry C.C., Knight P.L. Introductory Quantum Optics. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 317 p.
- [23] Meystre P., Sargent M. III. Elements of Quantum Optics. Fourth Edition. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2007. 502 p.
- [24] Sparnaay M.J. Measurements of attractive forces between flat plates // Physics. 1958. V.24. P. 751-764.
- [25] Lamoreaux S. Demonstration of the Casimir Force in the 0,6 μm Range // Phys.Rev.Lett. 1997. V.78. P. 5-8.
- [26] Glauber R.J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. //Phys.Rev. 1963. V.131. P. 2766-2789.
- [27] Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов // Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966. С. 91-281.
- [28] Stoler D. Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets. I// Phys. Rev. D 1. 1970. - P. 3217–3219; II // Phys. Rev. D 4. 1971. P. 1925–1926.
- [29] Walls D. Squeezed states of light // Nature. 1983. V. 306. P. 141-146.

- [30] Боголюбов Н.Н. (мл.), Козеровски М., Чан Куанг, Шумовский А.С. Новые эффекты в квантовой электродинамике // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 831-863.
- [31] Yuen H.P. Two-photon coherent states of the radiation field // Phys. Rev. 1976. A 13. P. 2226–2243.
- [32] Slusher R.E., Hollberg L.W., Yurke B., Mertz J.C., Valley J.F. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2409–2412.
- [33] Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния // УФН. 1987. Т. 153. С. 233-271.
- [34] Carruthers P., Nieto M.M. Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. 1968. V. 40. P. 411–440.
- [35] Pegg D.T., Barnett S.M. Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics // Europhysics Letters. 1988. V. 6. P. 483–487.
- [36] Мурзахметов Б.К., Чижов А.В. Проблема фазы электромагнитного поля в квантовой оптике // ЭЧАЯ. 1996. Т.27. С. 747-796.
- [37] Блум К. Теория матрицы плотности и ее приложения. М: Мир, 1983. 248 с.
- [38] Sudarshan E.C.G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams // Phys.Rev.Lett. 1963. V. 10. P. 277-279.
- [39] Wigner E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749–759.
- [40] Dicke R.H. Coherence in spontaneous radiation processes // Phys. Rev. 1954. V.93. №1. P. 99 - 110.

Учебное издание

**Башкиров Евгений Константинович,
Горохов Александр Викторович**

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ОПТИКУ

Часть 1

Учебное пособие

Редактор *Т. И. Кузнецова*
Компьютерная верстка, макет *Н. П. Бариновой, Е. К. Башкирова*

Подписано в печать 05.03.13. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 4,42; уч.-изд. л. 4,75. Гарнитура Times. Тираж 100 экз. Заказ № 2308
Управление по информационно-издательской деятельности Самарского государственного
университета www.infopress.samsu.ru

Издательство «Самарский университет» 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Тел. 8 (846) 334-54-23

Отпечатано на УОП СамГУ