МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра функционального анализа и теории функций

В. А. Алякин, С. Я. Новиков, Р. Ф. Узбеков

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ В ЗАДАЧАХ

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 01.03.01 "Математика", 01.03.03 "Механика и математическое моделирование" и специальности 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика"

Самара
Издательство "Самарский университет"
2015

УДК 517.983
ББК 22.162
А 60

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. СамГУ С.В. Асташкин,
д-р физ.-мат. наук, проф. МГУ А.С. Печенцов

Алякин, В.А.

А 60 **Элементы спектральной теории в задачах**: учебн. пособие / В.А. Алякин, С.Я. Новиков, Р.Ф. Узбеков. — Самара : Изд-во «Самарский университет», 2015. — 52 с.
ISBN 978-5-86465-661-7

Данное пособие по дисциплине "Функциональный анализ" представляет собой подборку задач и упражнений. Центральной темой пособия является спектральная теория операторов в гильбертовом и банаховом пространствах. Оно может быть использовано для самостоятельной подготовки студентов.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности "Фундаментальные математика и механика" и направлениям подготовки "Математика" и "Механика и математическое моделирование".

УДК 517.983
ББК 22.162

ISBN 978-5-86465-661-7

УСЛОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ЛНП — линейное нормированное пространство;
БП — банахово пространство;
ГП — гильбертово пространство;
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{C}^n)$ — евклидово пространство векторов-столбцов

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n),\ x_k \in \mathbb{R}\ (x_k \in \mathbb{C})$$

с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$l_p^n, p \geq 1$ — пространство векторов

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n),\ x_k \in \mathbb{R}\ (x_k \in \mathbb{C})$$

с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

l_∞^n — пространство векторов

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n),\ x_k \in \mathbb{R}\ (x_k \in \mathbb{C})$$

с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|;$$

$l_p, p \geq 1$ — банахово пространство последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \ldots),\ x_k \in \mathbb{R}\ (x_k \in \mathbb{C}),$$

удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

l_∞ — банахово пространство ограниченных числовых последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \ldots),\ x_k \in \mathbb{R}\ (x_k \in \mathbb{C})$$

с нормой
$$\|x\| = \sup_k |x_k|;$$
c_0 — банахово пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой
$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$
Все ЛНП будут рассматриваться над полем комплексных чисел. Использование поля вещественных чисел будет отмечаться отдельным замечанием.
$C[a,b]$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой
$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|;$$
$C(-\infty,\infty)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на $(-\infty,\infty)$ функций с нормой
$$\|x\| = \sup_{t\in(-\infty,\infty)} |x(t)|;$$
$L_p[a,b]$, $p \geq 1$ — банахово пространство функций, суммируемых с p-й степенью;
$\mathcal{R}(A)$, $Im(A)$ — область значений (образ) оператора A;
$\mathcal{N}(A)$, $Ker(A)$ — ядро оператора A;
$\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов
$$A : X \to X,$$
где X – БП;
X^* — сопряжённое пространство к X, то есть множество всех линейных непрерывных функционалов, определённых на линейном нормированном пространстве X.

ВВЕДЕНИЕ

Функциональный анализ давно стал необходимым элементом серьезного математического образования, а преподавание его основ включено в учебные планы математических специальностей университетов. Этой дисциплине посвящен целый ряд монографий и учебных пособий. Достаточно назвать ставшие классическими книги А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, Л.А. Люстерника и В.И. Соболева, К. Иосиды, У. Рудина. Для успешного владения предметом существуют великолепные задачники А.А. Кириллова и А.Д. Гвишиани, В.А. Треногина, А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. Но все они слишком сложны для самостоятельного изучения такого важного раздела функционального анализа как спектральная теория линейных операторов.

Данное учебное пособие представляет собой подборку упражнений и задач для студентов третьего курса специальности "Фундаментальные математика и механика" и направлений "Математика", "Механика и математическое моделирование"[1]. Оно может быть использовано для проведения аудиторных занятий по курсу функционального анализа. Центральной темой пособия является спектральная теория операторов в гильбертовом и банаховом пространствах. Каждый параграф соответствует примерно одному-двум занятиям. В начале каждого параграфа приводятся краткие теоретические сведения. Для типичных и трудных задач приводятся схемы решений или указания к решениям.

Пособие состоит из восьми параграфов. Первые два из них посвящены нахождению собственных значений и собственных векторов линейных операторов. В третьем параграфе рассматриваются задачи, связанные с нахождением спектрального радиуса и резольвенты. В параграфах 4-6 приведены задачи на нахождение спектра оператора, в том числе компактного и самосопряжённого. Параграф 7 посвящён решению интегральных уравнений. В заключительном восьмом параграфе читатель получает представление о неограниченных операторах, а именно о замкнутых операторах.

Авторы старались объединить задания, в которых используются сходные между собой алгоритмы решений.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки Россиии в рамках базовой части государственного задания

§1. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Напомним, что оператор $A : X \to Y$ (X,Y — ЛНП) называется: линейным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых скаляров α, β выполняется условие

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2);$$

ограниченным, если существует такое число $C > 0$, что

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X,$$

в этом случае конечное число

$$\|A\| = \sup_{x \in X, \ \|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

называется нормой оператора A.

Пусть $A : X \to X$ — линейный ограниченный оператор в БП X над полем $\mathbb{C}$. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и является ограниченным, определенным на всём X (то есть, если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим). Множество регулярных точек обозначается $\rho(A)$ и называется резольвентным множеством оператора A.

Дополнение к резольвентному множеству $\sigma(A)$ называется спектром оператора A. Таким образом,

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Определенная на $\rho(A)$ функция $\lambda \to (A - \lambda I)^{-1}$ называется резольвентой оператора A и обозначается $R(\lambda, A)$. Значениями этой функции являются ограниченные операторы.

Теорема 1.1. Спектр линейного ограниченного оператора A есть непустое компактное множество в $\mathbb{C}$, причем

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Банаховым сопряженным к A (обозначается A') называется ограниченный линейный оператор из X^* в X^*, определяемый равенством

$$(A'\ell)(x) = \ell(Ax)$$

для всех $\ell \in X^*$ и $x \in X$.

Теорема 1.2. Пусть $A : X \to X$ — линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X. Спектр оператора $A' : X^* \to X^*$ совпадает со спектром оператора A. Кроме того,

$$R(\lambda, A)' = R(\lambda, A')$$

для $\lambda \in \rho(A) = \rho(A')$.

Если H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то сопряженный к $A : H \to H$ оператор $A^* : H \to H$ определяется соотношением

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad x \in H, y \in H.$$

Оператор A^* называется **гильбертовым сопряженным** к оператору A. Соответствие $A \mapsto A^*$ является *сопряженно-линейным*, т. е. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$.

Теорема 1.3. Если H — гильбертово пространство, то

$$\sigma(A^*) = \{\lambda | \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}.$$

Кроме того,

$$R(\lambda, A)^* = R(\bar{\lambda}, A^*).$$

Если линейный оператор определён в конечномерном пространстве, то его спектр состоит только из собственных значений. Опираясь на теорему С. Банаха об обратном операторе, непрерывная обратимость оператора $A - \lambda I$ эквивалентна тому, что

$$Im(A - \lambda I) = X, \ Ker(A - \lambda I) = \{0\}.$$

Число λ принадлежит спектру $\sigma(A)$, если нарушено хотя бы одно их этих условий. В зависимости от этого выделяются следующие случаи:

1. Число λ называется собственным значение оператора A, если

$$Ker(A - \lambda I) \neq \{0\},$$

то есть существует ненулевой вектор x такой, что $Ax = \lambda x$. Такой вектор называется собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ. Множество собственных значений называется точечным спектром и обозначается $\sigma_p(A)$.

2. Число λ называется точкой непрерывного спектра оператора A, если $Ker(A - \lambda I) = \{0\}, \ Im(A - \lambda I) \neq X, \ \overline{Im(A - \lambda I)} = X$. Непрерывный спектр обозначается $\sigma_c(A)$.

3. Число λ называется точкой остаточного спектра оператора A, если $Ker(A - \lambda I) = \{0\}, \ \overline{Im(A - \lambda I)} \neq X$. Остаточный спектр обозначается $\sigma_r(A)$.

Таким образом, вся комплексная плоскость разбивается на четыре попарно непересекающиеся множества: резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектры:

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Спектральным радиусом оператора A называется радиус наименьшего круга на $\mathbb{C}$ с центром в нуле, содержащего $\sigma(A)$. Обозначать спектральный радиус будем $r(A)$.

Из теоремы 1.1. следует, что $r(A) \le \|A\|$. Известна и точная формула для вычисления спектрального радиуса:

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Задачи

1. Докажите, что собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

Решение. Применим принцип математической индукции.
Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ — различные собственные значения линейного оператора A, а $x_1, x_2, \dots x_n$ — соответствующие им собственные векторы.

1. База индукции. Система $\{x_1\}$ является линейно независимой, так как $x_1 \ne 0$.

2. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно при $n = k$ и докажем, что оно остаётся верным для $n = k + 1$. Допустим противное: равенство

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \, x_i = 0 \tag{2}$$

выполняется не при всех c_i, равных 0. Пусть, например,

$$c_{k+1} \ne 0.$$

Подействуем на равенство (2) оператором $A - \lambda_{k+1} I$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \, (Ax_i - \lambda_{k+1} x_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \, (\lambda_i x_i - \lambda_{k+1} x_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \, (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = 0.$$

По предположению, $c_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, значит $c_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Тогда из равенства (2) следует, что

$$c_{k+1}x_{k+1} = 0,$$

значит $x_{k+1} = 0$. В результате чего мы приходим к противоречию.

2. Найти собственные значения тождественного и нулевого операторов в X.

3. Пусть $A : X \to X$ — линейный оператор и оператор A^{-1} существует. Докажите, что A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы.

Решение. Пусть x — собственный вектор оператора A, так как в противном случае $Ker(A) = \{0\}$. Действуя оператором A^{-1}, получим:

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x,$$

значит,

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x.$$

Итак, x является собственным вектором и для оператора A^{-1}. Аналогично проводится вторая часть решения.

4. Пусть x_1, x_2— собственные векторы линейного оператора A с различными собственными значениями. Покажите, что вектор $\alpha x_1 + \beta x_2$, $(\alpha, \beta \neq 0)$ не является собственным для оператора A.

5. Покажите, что если λ — собственное значение линейного оператора A, то λ^n — собственное значение оператора A^n.

6. Покажите, что если число λ является собственным значением оператора A^2, то $\sqrt{\lambda}$ или $-\sqrt{\lambda}$ является собственным значением линейного оператора A.

Указание. Примените представление

$$(A^2 - \lambda I) = (A - \sqrt{\lambda}I)(A + \sqrt{\lambda}I).$$

7. Найдите собственные значения и собственные векторы операторов $A : l_2 \to l_2$, если для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$:

a)$Ax = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3, \ldots)$;

b)$Ax = (x_2,\ x_3, \ldots)$;

c)$Ax = (0,\ x_1,\ x_2, \ldots)$;

d)$Ax = (\lambda_1 x_1,\ \lambda_2 x_2, \ldots)$, $(\lambda_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ \sup|\lambda_n| < \infty)$.

Решение задачи 7 a). Число $\lambda = 0$ не является собственным значением, так как $Ax = 0$ только, если $x = 0$. Найдём ненулевые собственные значения. Предположим, что x — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda \neq 0$, то есть

$$Ax = \lambda x$$

или

$$(x_1 + x_2,\, x_2 + x_3, \ldots) = (\lambda x_1,\, \lambda x_2, \ldots).$$

Для определения x приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ \ldots \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{cases} x_2 = (\lambda - 1)x_1 \\ x_3 = (\lambda - 1)x_2 = (\lambda - 1)^2 x_1 \\ \ldots \\ x_n = (\lambda - 1)^{n-1} x_1 \end{cases}$$

Если $x_1 = 0$, то $x = 0$. При $x_1 \neq 0$ вектор $x \in l_2$, если $|\lambda - 1| < 1$. Соответствующий собственный вектор

$$x = (\lambda,\, (\lambda - 1)\lambda,\, (\lambda - 1)^2\lambda, \ldots).$$

Итак, $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\}$.

8. В вещественном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = x(-t)$.

Указание. Заметим, что $A^2 = I$.

9. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$Ax(t) = x(0) + t\,x(1).$$

10. Пусть H — ГП, $M \neq \{0\}$— подпространство в H, P — оператор проектирования на M. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора P.

Решение. Предположим, уравнение $Px = \lambda x$ имеет ненулевое решения для некоторого λ. Представим x в виде

$$x = Px + (x - Px)$$

и перепишем уравнение таким образом

$$Px = \lambda Px + \lambda(x - Px)$$

или

$$(1 - \lambda)Px = \lambda(x - Px).$$

Векторы, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, ортогональны, поэтому равенство возможно только в следующих случаях: $(1-\lambda)Px = 0$ или $\lambda(x - Px) = 0$.

Следовательно,

$$\sigma_p(A) = \{0, 1\}.$$

Собственному значению $\lambda = 1$ соответствует подпространство M, а значению $\lambda = 0$ — подпространство $M^{\perp}$.

11. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора сдвига

$$Ax(t) = x(t+h),\ h > 0,$$

действующего в пространстве: a)$C(\mathbb{R})$, b) $C[0, \infty)$.

Решение задачи 11 a). Очевидно, нуль не является собственным значением. Докажем теперь, что $\sigma_p(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ решения. Пусть $x(t)$ — нетривиальное решение уравнения

$$x(t+h) = \lambda x(t) \qquad (3).$$

Разобьём вещественную ось на полуинтервалы $\Delta_n = [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из (3) следует, что значения функции $x(t)$ на Δ_{n+1} получаются из её значений на Δ_n умножением на λ . Существует точка $t_0 \in \Delta_0$, в которой $x(t_0) \neq 0$. Тогда, если $|\lambda| > 1$, то

$$|x(t_0 + h)| = |x(t_0)||\lambda|^n \to \infty,$$

а если $|\lambda| < 1$, то

$$|x(t_0 - h)| = \frac{|x(t_0)|}{|\lambda|^n} \to \infty.$$

В обоих случаях $x(t)$ не принадлежит $C(\mathbb{R})$. Таким образом, собственные значения оператора A могут находиться лишь на единичной окружности $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

Второй способ использует теорему 1.1. Очевидно, что $\|A\| = 1$. Кроме того, оператор A непрерывно обратим:

$$A^{-1}y(t) = y(t-h),\ \|A^{-1}\| = 1.$$

Применяя указанную теорему, получаем:

$$\sigma_p(A) \subset \sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}.$$

Нетрудно видеть, что все точки на единичной окружности $\lambda = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ являются собственными значениями. Соответствующие им векторы имеют вид:

$$x(t) = e^{i\theta \frac{t}{h}} \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — периодическая функция с периодом $T = h$.

12. Найдите собственные значения и собственные векторы следующих операторов:

a)$A : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ Ax(t) = x(2\,t)$;

b)$A : C[0, \infty) \to C[0, \infty),\ Ax(t) = x(t^2)$;

c)$A : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ Ax(t) = x(\sqrt[3]{t})$;

d)$A : C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = e^t \int\limits_0^1 x(s)\, ds$.

13. Может ли линейный ограниченный оператор $A : X \to X$ с условием $A^2 = 0$, иметь ненулевые собственные значения?

14. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, заданного матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Задачи

1. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора A, если:
a) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1]\}$;
b) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$;
c) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = x(1)\}$;
d) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^1[0,1] : \alpha x(0) = x(1)\}$, где α – фиксированное число.

Решение задачи 1a). Так как $e^{\lambda t} \in C^1[0,1]$, то $\sigma_p(A) = \mathbb{C}$.

2. В вещественном пространстве $C[0,\pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$, если:
a) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi) = 0\}$;
b) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] : x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;
c) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi),\ x'(0) = x'(\pi)\}$.

Решение задачи 2a). Уравнение $Ax = \lambda x$ в этой задаче принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \lambda\, x(t).$$

Запишем общий вид решения этого уравнения.

Если $\lambda > 0$, то $x(t) = C_1\, e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2\, e^{-\sqrt{\lambda}t}$;
если $\lambda < 0$, то $x(t) = A\cos\sqrt{-\lambda}t\ +\ B\sin\sqrt{-\lambda}t$;
если $\lambda = 0$, то $x(t) = C_1 + t\, C_2$ (смотри, например, [8,п.9.4]).

При $\lambda \geq 0$ краевым условиям удовлетворяют только функции, которые тождественно равны нулю. При $\lambda < 0$ уравнения для нахождения констант A и B принимают вид:

$$x(0) = A\cos\sqrt{-\lambda}0 = 0,$$

$$x(\pi) = A\cos\sqrt{-\lambda}\pi + B\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0.$$

Из них вытекает, что числа вида $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ являются собственными значениями оператора A, а функции $\sin(nt)$ — собственными векторами этого оператора.

3. Найдите собственные значения и собственные векторы операторов A, если:

a) $A : C[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi]$, $Ax(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)\, x(s)\, ds$;

b) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^1 (t-s)\, x(s)\, ds;$

c) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^1 ts\,(1-ts)\, x(s)\, ds;$

d) $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = \int\limits_0^\pi (t-\sin(s))\, x(s)\, ds;$

e) $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = \int\limits_0^\pi K(t,s)\, x(s)\, ds$, где

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)\sin(ks)}{k^2}$$

(все пространства рассматриваются над полем вещественных чисел).

Решение задачи 3a). Уравнение $Ax = \lambda x$ запишем в виде

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(s)\cos(t) \ - \sin(s)\sin(t))\right)\, x(s)\, ds = \lambda x(t)$$

или

$$\cos(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s)\, x(s) ds - \sin(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(s)\, x(s) ds = \lambda x(t), \tag{1}$$

последнее же равенство эквивалентно следующему

$$C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t) = \lambda x(t). \tag{2}$$

Найдём константы C_1, C_2 . Пусть сначала $\lambda \neq 0$. Из равенства (2) получаем.

$$C_1 \cos^2(t) - C_2 \sin(t)\cos(t) = \lambda x(t)\cos(t).$$

Интегрируя последнее равенство на $[-\pi, \pi]$, получим

$$C_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \lambda C_1.$$

Теперь замечаем, что если

$$\lambda = \lambda_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi,$$

то уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение вида $x(t) = C_1 \cos(t)$, где C_1 — произвольная константа, например, $C_1 = 1$. Последнее предположение легко проверяется непосредственно: если $x_1(t) = \cos(t)$, то

$$Ax_1(t) = \cos(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s)\, ds = \lambda_1 \cos(t).$$

Умножая обе части (2) на $\sin(t)$, выделяем второе собственное значение оператора A:

$$\lambda_2 = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(s)\, ds = -\pi$$

и собственный вектор $x_2 = \sin(t)$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\lambda = 0$, то есть выяснить структуру ядра оператора A. Тригонометрическая система ортогональна на $[-\pi, \pi]$, поэтому (смотри (1)) все функции $x(t)$, лежащие в ортогональном дополнении подпространства, порожденного функциями $\{\cos(t),\, \sin(t)\}$, являются элементами ядра оператора A. Одним из таких элементов является, например, $\cos(2t)$. Итак,

$$\sigma_p(A) = \{-\pi,\, 0,\, \pi\},$$

соответствующие собственные векторы $\cos(t)$, $\cos(2t)$, $\sin(t)$.

4. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если

a) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\, ds$;

b) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\, ds + x(t)$;

c) $Ax(t) = \int\limits_0^t s\, x(s)\, ds$.

Решение задачи 4a). Число $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A, так как уравнение $\int\limits_0^t x(s)\, ds = 0,\ \ t \in [0,1]$ имеет только тривиальное решение. Пусть $\lambda \neq 0$. Уравнение $Ax = \lambda x$ запишем в виде

$$\int\limits_0^t x(s)\, ds = \lambda x(t).$$

Функция $x(t)$ дифференцируема и

$$\begin{cases} x(t) = \lambda x'(t), \\ 0 = \lambda\, x(0). \end{cases}$$

Покажем, что эта система имеет лишь тривиальное решение. Имеем

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \frac{x(t)}{\lambda}, \\ 0 = x(0). \end{cases}$$

Решая дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получаем

$$\begin{cases} x(t) = Ce^{\frac{t}{\lambda}}; \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

откуда $x(t) = 0$. Итак, $\sigma_p(A) = \emptyset$.

5. Докажите, что оператор Вольтерра

$$Ax(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\, x(s)\, ds,$$

где $K(t,s)$ — непрерывная функция в треугольнике $\{0 \le s \le t \le 1\}$, который действует в пространстве $C[0,1]$, не имеет ненулевых собственных значений.

§3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС И РЕЗОЛЬВЕНТА

Для нахождения резольвенты, кроме непосредственного способа, можно использовать следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть X – БП, $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда при $|\lambda| > r(A)$

$$R(\lambda, A) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}, \tag{1}$$

причём ряд (1) (ряд Неймана) сходится по операторной норме. Если же $X = H$ есть гильбертово пространство и оператор A — самосопряжённый, то

$$r(A) = \|A\|.$$

Задачи

1. a) Найдите спектральный радиус оператора Вольтерра, действующего в пространстве $C[a, b]$:

$Ax(t) = \int\limits_a^t x(s)\, ds;$

b) найдите спектральный радиус оператора Вольтерра, действующего в пространстве $C[0, 1]$:

$Ax(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{1+s^2}\, x(s)\, ds,$

c) $Ax(t) = \int\limits_0^t e^{t+s}\, x(s)\, ds.$

Решение задачи 1a). Так как

$$A^n x(t) = \int\limits_a^t x(s)\,\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds,$$

то

$$\|A^n x\| \le \|x\|\frac{(b-a)^n}{(n-1!)}$$

и

$$\|A^n\| \le \frac{(b-a)^n}{(n-1)!},\ n \in \mathbb{N}.$$

По формуле (1) из параграфа 1 получаем $r(A) = 0$.

2. Найдите резольвенту оператора из предыдущей задачи 1a).

Решение. Первый способ. Найдём непосредственно решение уравнения

$$\int\limits_a^t x(s)\, ds - \lambda x(t) = y(t).$$

Пусть $\int\limits_a^t x(s)\,ds = F(t),\ x(t) = F'(t)$. Решая дифференциальное уравнение

$$F(t) - \lambda F'(t) = y(t),$$

найдём $F(t) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_a^t y(s)\,e^{\frac{t-s}{\lambda}}\,ds$.
Тогда

$$x(t) = -\frac{1}{\lambda}y(t) - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_a^t y(s)\,e^{\frac{t-s}{\lambda}}\,ds \ (\lambda \neq 0).$$

Второй способ. По формуле (1) при $\lambda \neq 0$ получаем:

$$R_\lambda(A)y(t) = -\frac{1}{\lambda}y(t) - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_a^t y(s)\,ds - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{\lambda^{n+1}}\int\limits_a^t y(s)\,\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds - \ldots =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}y(t) - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_a^t y(s)(1 + \frac{t-s}{\lambda} + \frac{(t-s)^2}{2\lambda^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!\lambda^{n-1}} + \ldots)ds =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\,y(t) - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_a^t y(s)\,e^{\frac{t-s}{\lambda}}\,ds.$$

3. Найдите спектральный радиус и резольвенту оператора A, который действует в пространстве $C[0,1]$, если:

a)$Ax(t) = x(0) + t\,x(1)$; $b)Ax(t) = t\,x(0) + t^2\,x(1)$.

Решение задачи 3а). Легко проверить, что

$$A^n x(t) = x(0) + t\,((n-1)\,x(0) + x(1)).$$

Значит, $\|A^n\| = n + 1$ и

$$r(A) = \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Найдём резольвенту оператора. Рассмотрим уравнение $(A - \lambda I)x = y$ или

$$x(0) + t\,x(1) - \lambda\,x(t) = y(t) \qquad (2)$$

и попытаемся решить его относительно $x(t)$. Имеем

$$-\lambda\, x(0) + x(0) = y(0),$$

отсюда (при $\lambda \neq 1$) $x(0) = \frac{y(0)}{1-\lambda}$; теперь в уравнение (2) подставим $t = 1$, тогда получим

$$x(0) + x(1) - \lambda\, x(1) = y(1),$$

отсюда (при $\lambda \neq 1$) будем иметь

$$x(1)(1-\lambda) = y(1) - x(0)$$

или

$$x(1)(1-\lambda) = y(1) - \frac{y(0)}{1-\lambda}.$$

Поэтому $x(1) = \frac{y(1)}{1-\lambda} - \frac{y(0)}{(1-\lambda)^2}$ и из соотношения (2) при $\lambda \neq 0,\ 1$ получаем

$$\lambda\, x(t) = -y(t) + \frac{y(0)}{1-\lambda} + t\,\frac{y(1)}{1-\lambda} - t\,\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)^2}$$

или

$$x(t) = -\frac{1}{\lambda}\, y(t) + \frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)} + t\,\frac{y(1)}{\lambda(1-\lambda)} - t\,\frac{y(0)}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Методом суммирования ряда Неймана найдите резольвенту самостоятельно.

4. Найдите резольвенту оператора из задачи 10 параграфа 1.

Решение. Пусть $(A - \lambda I)x = y$. Тогда $Px - \lambda x = y$. Произведём стандартные преобразования:

$$Px - \lambda(Px + (x - Px)) = Py + (y - Py),$$

$$(1-\lambda)Px - \lambda(x - Px) = Py + (y - Py).$$

В силу единственности разложения при $\lambda \neq 0,\ 1$ имеем

$$Px = \frac{Py}{1-\lambda}, \quad x - Px = \frac{Py - y}{\lambda},$$

значит,

$$x = \frac{Py}{1-\lambda} + \frac{Py - y}{\lambda}.$$

Итак,

$$R_\lambda(A) = \frac{P}{1-\lambda} + \frac{P - I}{\lambda},\ \lambda \neq 0,\ 1.$$

Методом суммирования ряда Неймана резольвенту найдите самостоятельно.

5. Найдите резольвенту оператора $A : l_2 \to l_2$, если:
a)$Ax = (x_1,\ \frac{x_2}{2},\ \frac{x_3}{3}, \dots)$;
b)$Ax = (\frac{x_1}{2},\ \frac{2x_2}{3},\ \frac{3x_3}{4}, \dots)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$.

6. Найдите резольвенту оператора $Ax(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds$, который действует в пространстве $C[a,b]$, если ядро $K(t,s)$ и отрезок $[a,b]$ соответственно равны:
$a)t - s,\ [0,1]$;
$b)\cos(t-s),\ [0,\pi]$;
$c)t + \sin s,\ [-\pi,\pi]$;
$d)2\,t - s,\ [-1,1]$;
$e)(1+t)(1+s),\ [-1,0]$.

7. Найдите резольвенту оператора $Ax(t) = \int\limits_0^2 K(t,s)x(s)\,ds$, действующего в пространстве $C[0,2]$, если ядро $K(t,s)$ равно:
$a)e^{t-s}$;
$b)\frac{1+t}{1+s}$;
$c)t - s$;
$d)\frac{1+t^2}{1+s^2}$;
$e)\frac{\ln(t+1)}{\ln(s+1)}$.

8. Пусть A — нормальный оператор в ГП H, то есть линейный оператор, который является перестановочным со своим сопряженным:

$$AA^* = A^*A.$$

Доказать, что если $r(A) = 0$, то $A = 0$.

Указание. Используйте тот факт, что $\|A^2\| = \|A\|^2$.

9. Докажите, что для самосопряженного оператора в ГП $r(A) = \|A\|$.

10. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, где X — БП. Докажите, что на окружности

$$|\lambda| = r(A)$$

имеется хотя бы одна точка из $\sigma(A)$.

Указание. Используйте свойство замкнутости спектра.

11. Пусть A, $B \in \mathcal{L}(X)$, где X — БП, $AB = BA$. Докажите, что

$$r(A+B) \le r(A) + r(B),\ r(AB) \le r(A)\,r(B).$$

12. Докажите, что множество регулярных точек оператора A в БП X является открытым.

Указание. Если λ — регулярная точка оператора A, то $A - \lambda I$ определён на всём X и ограничен. Остаётся показать, что при достаточно малых $\delta > 0$ оператор $A - (\lambda + \delta)I$ тоже определён на X и ограничен.

§4. СПЕКТР ОПЕРАТОРА

Задачи

1. Пусть X — БП, $A \in \mathcal{L}(X)$ непрерывно обратим. Докажите равенство

$$\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$$

(простейшая форма теоремы об отображении спектра).

Решение. Отметим прежде всего, что $\lambda = 0$ не является элементом спектра ни для оператора A, ни для оператора A^{-1}. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, то есть оператор $A - \lambda I$ необратим. Рассмотрим композицию операторов

$$A^{-1}(A - \lambda I) = B.$$

Оператор B также необратим (иначе, обратим оператор $A - \lambda I = AB$), теперь заметим, что

$$B = I - \lambda A^{-1} = -\lambda(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}I),$$

то есть $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$. Тем самым доказано включение

$$\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(A^{-1}).$$

Такими же рассуждениями доказывается противоположное включение.

2. Найдите спектр оператора $A : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, если:

a) $Ax(t) = S_h\, x(t) = x(t+h),\ h > 0$;

b) $Ax(t) = x(2\,t)$;

c) $Ax(t) = x(\sqrt[3]{t})$.

Решение задачи 2a). Первый способ. При решении задачи 11a) из параграфа 1 было показано, что

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}.$$

Второй способ. Докажем, что если $|\lambda| \neq 1$, то $\lambda \in \rho(A)$. Рассмотрим уравнение

$$x(t+h) - \lambda x(t) = y(t),$$

где $y(t) \in C(\mathbb{R})$ и предположим решение этого уравнения существует. Если $|\lambda| > 1$, имеем:

$$x(t+h) = \lambda x(t) + y(t);$$

$$x(t+2\,h) = \lambda x(t+h) + y(t+h) = \lambda^2\, x(t) + \lambda\, y(t) + y(t+h);$$

$$\dots$$

$$x(t+n\,h)=\lambda^n x(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-k-1}\,y(t+k\,h). \qquad (1)$$

Из равенства (1) вытекает, что

$$x(t)=\frac{x(t+n\,h)}{\lambda^n}-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-k-1}\,y(t+k\,h).$$

Так как $|\frac{x(t+n\,h)}{\lambda^n}|\to 0$, $n\to\infty$, то

$$x(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}\,y(t+k\,h),$$

причём ряд абсолютно и равномерно сходится. Значит, $x(t)\in C(\mathbb{R})$.

Мы доказали, что если решение существует, то оно единственное и выражается полученной формулой. Непосредственной подстановкой нетрудно показать, что последняя формула действительно даёт решение исходного уравнения (проверьте это!).

Аналогично доказывается, что если $0<|\lambda|<1$, то $\lambda\in\rho(A)$. Наконец, если $\lambda=0$, то уравнение $x(t+h)=y(t)$ имеет решение $x(t)=y(t-h)$. Таким образом, обратным к оператору $A=S_h$ является оператор S_{-h}. Значит, $\lambda=0\in\rho(A)$.

3. Найдите спектр операторов из задачи 1 параграфа 2.

Решение задачи 3b). Покажем, что любое $\lambda\in\mathbb{C}$ является регулярным значением. Уравнение

$$x'(t)-\lambda\,x(t)=\,y(t)$$

имеет при любом $y(t)\in C[0,1]$ единственное решение

$$x(t)=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\,y(s)ds.$$

При этом, интегральный оператор

$$R_\lambda(A)(y(t))=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\,y(s)ds$$

ограничен и его норма равна

$$\|R_\lambda(A)\|=\frac{e^{Re\,\lambda}-1}{Re\,\lambda}.$$

Значит, $\sigma(A) = \emptyset$.

4. В пространстве $\mathbb{C}$ зададим оператор A по формуле $Az = a\,z$, где a — фиксированное комплексное число. Найдите спектр и его спектральный радиус. Каков геометрический смысл отображения A?

Решение. Уравнение $Az = \lambda\,z$ имеет ненулевые решения только при $\lambda = a$. Это означает, что $\sigma_p(A) = \{a\}$. При $\lambda \neq a$ $Im(A - \lambda I) = \mathbb{C}$, следовательно,

$$\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset.$$

Итак, $\sigma(A) = \{a\}$; $r(A) = |a|$.

5. Пусть $A : l_p \to l_p$ $(1 \leq p < \infty)$

$$Ax = (x_2, x_3, \ldots) \text{ (оператор сдвига).}$$

Найдите его спектр.

Решение. Так как $\|A\| = 1$, $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Ранее (смотри задачу 7b из параграфа 1) было показано, что

$$\sigma_p(A) = \{\lambda :\ |\lambda| < 1\}$$

(при $p = 2$, но в общем случае рассуждения аналогичные). Поэтому, в силу замкнутости спектра

$$\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}.$$

Можно показать, что точки λ, лежащие на окружности $|\lambda| = 1$ — это элементы непрерывного спектра, то есть показать, что образ $Im(A - \lambda I)$ всюду плотен в l_p. Для этого проверим условие $Ker(A^* - \lambda I) = \{0\}$.

Для оператора A сопряжённый A^* действует в пространстве l_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ при $1 < p < \infty$ и $q = \infty$ при $p = 1$ и имеет вид

$$A^* u = (0, u_1, u_2, \ldots).$$

Если $A^* u = \lambda\,u$ для некоторой последовательности $u = (u_1, u_2, \ldots) \in l_q$, то $u = 0$ (так как $\lambda \neq 0$). В результате,

$$\sigma_p(A) = \{\lambda :\ |\lambda| < 1\},$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda :\ |\lambda| = 1\},$$

$$\sigma_r(A) = \emptyset.$$

6. Решите предыдущую задачу для оператора $A : l_\infty \to l_\infty$.

7. Найдите спектр оператора P проектирования на ненулевое подпространство ГП.

Указание. Используйте решение задач 4 и 10 из параграфа 1.

8. Найдите спектры операторов из задачи 3 параграфа 1.

Указание. Используйте решение задач 3 и 9 из параграфа 1.

9. Найдите спектр диагонального оператора $A : l_2 \to l_2$

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots),\ x = (x_1,\, x_2, \ldots),$$

где $\lambda_n \in \mathbb{C},\ \sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$.

Решение. В задаче 7d из параграфа 1 было показано, что

$$\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}.$$

Учитывая замкнутость спектра, получаем $\overline{\{\lambda_n\}} \subset \sigma(A)$ (черта означает замыкание множества). Для доказательство обратного включения достаточно заметить, что если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\{\lambda_n\}}$, то можно в явном виде построить $(A - \lambda I)^{-1}$ и убедиться в его ограниченности:

$$(A - \lambda I)^{-1} y = \left(\frac{y_1}{\lambda_1 - \lambda}, \frac{y_2}{\lambda_2 - \lambda}, \ldots \right).$$

10. Найдите спектр линейного оператора

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

§5. СПЕКТР ОПЕРАТОРА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Задачи

1. Найдите спектры операторов A, если:
a) $A : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi],\ A\,x(t) = e^{i\,t}\,x(t)$;
b) $A : C[0, 1] \to C[0, 1],\ A\,x(t) = t\,x(t)$.
Решение задачи 1a). Если $Ax = \lambda x$, то есть $e^{i\,t}\,x(t) = \lambda\,x(t)$, то

$$(e^{i\,t} - \lambda)\,x(t) \equiv 0.$$

С учётом непрерывности функции $x(t)$ отсюда следует, что $x(t) \equiv 0$. Значит,

$$\sigma_p(A) = \emptyset.$$

Если $|\lambda| \neq 1$, то функция $(e^{i\,t} - \lambda)^{-1}$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и для любого $y(t) \in C[0, 2\pi]$ функция $x(t) = \frac{y(t)}{e^{i\,t} - \lambda}$ непрерывна и является решением уравнения $(A - \lambda I)x = y$. При этом оператор

$$A\,y(t) = \frac{y(t)}{e^{i\,t} - \lambda}$$

ограничен (проверьте это!); следовательно, множество

$$\{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| \neq 1\}$$

состоит из регулярных точек оператора A.

Пусть теперь $|\lambda| = 1,\ \lambda = e^{i\,\varphi}$. Если $y(t) = (e^{i\,t} - \lambda)\,x(t)$, то $y(\varphi) = 0$. Для функции $y_0(t) = 1$ получаем

$$\rho(y, y_0) = \max_{[0,2\pi]} |y(t) - y_0(t)| \geq |y(\varphi) - y_0(\varphi)| = 1,$$

то есть $y_0(t) \in C[0, 2\pi] \setminus \overline{Im\,(A - \lambda I)}$. Это означает, что

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| = 1\}.$$

2. Решите задачу 1b), если оператор A задан в пространстве $L_p[0, 1]$.

Решение. Как и в предыдущей задаче покажем, что у оператора A нет собственных значений и если $\lambda \notin [0, 1]$, то λ является регулярным значением.

Покажем, что все точки отрезка $[0, 1]$ являются точками непрерывного спектра. Если при некотором $y(t)$ уравнение

$$(A - \lambda I)x = y$$

имеет решение, то $x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}$. При $y_0(t)=1$ почти всюду получаем

$$x(t)=\frac{1}{t-\lambda}\notin L_p[0,1],$$

при $\lambda\in[0,1]$. Значит $y_0(t)\notin Im\,(A-\lambda I)$ и весь отрезок состоит из спектральных значений. Покажем теперь, что

$$\overline{Im\,(A-\lambda I)}=L_p[0,1].$$

Если функция $y(t)=0$ в окрестности точки $\lambda\in[0,1]$, то она является образом функции $x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}$, принадлежащей пространству $L_p[0,1]$. Для любой функции $y(t)\in L_p[0,1]$ можно построить последовательность $y_n(t)\in L_p[0,1]$ такую, что $y_n\to y$ в $L_p[0,1]$. Положим

$$y_n(t)=\begin{cases} y(t), & |t-\lambda|\geq\frac{1}{n};\\ 0, & |t-\lambda|<\frac{1}{n}.\end{cases}$$

Тогда,

$$\|y_n-y\|_p^p=\int\limits_{[0,1]}|y_n(t)-y(t)|^p\,dt=\int\limits_{\{t\colon\,|t-\lambda|<\frac{1}{n}\}}|y(t)|^p\,dt\to 0,\ n\to\infty,$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Данные функции $y_n\in Im(A-\lambda I)$, следовательно,

$$\overline{Im\,(A-\lambda I)}=L_p[0,1].$$

Итак, $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$.

3. Пусть $\alpha(t)\in C(\mathbb{R})$ и оператор $A:C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$ задан по формуле:

$$A\,x(t)=\alpha(t)\,x(t).$$

Докажите, что $\sigma(A)=\overline{\alpha(\mathbb{R})}$, причём

$$\sigma_p(A)=\{\lambda:\ \alpha^{-1}(\lambda)\text{ содержит отрезок}\}=\{\lambda:\ \mu(\alpha^{-1}(\lambda))>0\},$$

$$\sigma_r(A)=\sigma(A)\setminus\sigma_p(A).$$

4. Найдите спектры операторов из задачи 1 параграфа 3.

5. Пусть e_n — ортонормированный базис в ГП H, то есть система попарно ортогональных элементов $e_1,e_2,...,e_n,\ldots$ гильбертова пространства H такая, что любой элемент $x\in H$ однозначно представим в виде сходящегося по норме ряда

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne_n, c_n\in\mathbb{C}.$$

Определим оператор $A : H \to H$ равенствами

$$A\,e_1 = 0,\; A\,e_{k+1} = e_k \;\; (k \in \mathbb{N}).$$

a) Докажите, что A — линейный ограниченный оператор.
b) Найдите сопряжённый к нему оператор A^*.
c) Докажите, что

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\; |\lambda| \le 1\},\; \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\; |\lambda| < 1\}.$$

d) Докажите, что

$$\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\; |\lambda| \le 1\},\; \sigma_p(A^*) = \emptyset.$$

Решение задачи 5a). Если $x \in H$, то $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$;

$$Ax = \sum_{k=2}^{\infty} (x, e_k)\, e_{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{k+1})\, e_k;$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_{k+1})|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2.$$

(Здесь было использовано равенство Парсеваля, а именно: если дано гильбертово пространство H, тогда в нём можно ввести

$$\|x\| = \sqrt{|(x, x)|}$$

индуцированную этим скалярным произведением норму. Поэтому, если система e_k — ортонормированный базис в H, то $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e)|^2$.)

Отсюда получаем, что $\|A\| \le 1$. Неравенство $\|A\| \ge 1$ очевидно, значит $\|A\| = 1$.

Решение задачи 5b). Сопряжённый оператор находится по стандартной схеме

$$(Ax,\, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{k+1})\, e_k, \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k)\, e_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{k+1})(y, e_k) =$$

$$= (x, e_1)0 + (x, e_2)(y, e_1) + (x, e_3)(y, e_2) + \ldots =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k, \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{y}, e_k)\, e_k \right) = (x, A^* y),$$

где $\tilde{y} = A^* y$ определяется соотношением

$$A^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k)\, e_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k)\, e_{k+1},$$

то есть $A^* e_k = e_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$.

Решение задачи 5c). Так как $\|A\| = 1$, то

$$\sigma(A) \subset \{\lambda :\ |\lambda| \le 1\}.$$

Если $Ax = \lambda x$ или

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{k+1})\, e_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k,$$

то

$$(x, e_2) = \lambda (x, e_1),\ (x, e_3) = \lambda (x, e_2), \ldots (x, e_{k+1}) = \lambda (x, e_k);$$

$$(x, e_2) = \lambda (x, e_1),\ (x, e_3) = \lambda^2 (x, e_1), \ldots (x, e_{k+1}) = \lambda^k (x, e_1). \tag{1}$$

Уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение, если коэффициенты Фурье элемента x, удовлетворяющие соотношениям (1), также отвечают и условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|\lambda|^k \, |(x, e_k)| \right) < \infty,$$

вытекающему из равенства Парсеваля. Последнее соотношение выполняется при всех $|\lambda| < 1$. Из этого замечания и следует выполнение условия c).

Решение задачи 5d). Первая часть этого утверждения непосредственно следует из соотношения $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ (смотри теорему 1.3).

Предположим, что уравнение $A^* x = \lambda x$ имеет решение x_0, это будет означать:

$$\lambda (x_0, e_1) = 0,\ \lambda (x_0, e_2) = (x_0, e_1), \ldots \lambda (x_0, e_{k+1}) = (x_0, e_k).$$

Отсюда следует, что $x_0 = 0$. Следовательно,

$$\sigma_p(A^*) = \emptyset.$$

6. Докажите, что любое компактное множество на комплексной плоскости является спектром некоторого оператора $A \in \mathcal{L}(l_2)$.

Указание. Используйте задачу 9 из параграфа 4.

7. Пусть X – БП, $A \in \mathcal{L}(X),\ \lambda \in \sigma(A)$. Докажите, что $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

§6. СПЕКТР КОМПАКТНОГО И САМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА

Множество E из ЛНП X называется относительно компактным, если из любой последовательности $\{x_n\} \in E$ можно извлечь подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к некоторому элементу $x \in X$.

Оператор $A : X \to Y$ называется компактным, если он переводит всякое ограниченное множество из X в относительно компактное множество в Y.

Теорема 6.1. Пусть X — БП, $A : X \to X$ — линейный компактный оператор. Тогда спектр $\sigma(A)$ состоит не более чем из счётного множества собственных значений, единственной предельной точкой которого может служить лишь точка 0. Если X — бесконечномерно, то $0 \in \sigma(A)$.

Теорема 6.2. Спектр самосопряженного оператора в ГП вещественен и лежит на отрезке $[m, M]$, где

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,\, x),\ M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,\, x)$$

Если, кроме того, оператор A компактен и $A \neq 0$, то A имеет, по-крайней мере, одно собственное значение, отличное от 0.

Задачи

1. Докажите, что оператор $A : l_2 \to l_2$

$$Ax = (0,\, x_1,\, \frac{x_2}{2},\, \frac{x_3}{3}, \ldots),\ x = (x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots) \in L_2$$

компактен и найдите его спектр.

Решение. Проверим компактность оператора A. Пусть множество E ограничено в l_2. Докажем, что $A(E)$ относительно компактно в l_2. Воспользуемся критерием относительной компактности в l_2: множество M относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall x \in M\ \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon. \tag{1}$$

Ограниченность $A(E)$ вытекает из ограниченности множества E и непрерывности оператора A (проверьте, что $\|A\| = 1$).

Проверим выполнение условия (1). Пусть $c > 0$ — радиус шара с центром в 0, содержащего множество E. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\ \frac{x_n}{n}\ |^2 + |\ \frac{x_{n+1}}{n+1}\ |^2 + \ldots \leq c^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \right),\ \forall x \in E.$$

Ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Это доказывает условие (1).

Легко показать, что оператор A не имеет собственных значений. Значит, в силу теоремы 6.1 $\sigma(A) = \{0\}$. Причём из соотношений:

$$KerA = \{0\},\ \overline{ImA} \neq l_2$$

вытекает, что $0 \in \sigma_r(A)$. Итак, $\sigma(A) = \sigma_r(A) = 0$.

2. Решите задачу 1 в случае, если оператор A задан следующим образом

$$Ax = (x_1,\, 0,\, \frac{x_2}{2!},\, 0,\, \frac{x_3}{3!}, \ldots).$$

3. Докажите, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 t\, s\, (1 - ts)\, x(s)\, ds$$

компактен и найдите его спектр.

Решение. Компактность оператора A вытекает из конечномерности образа $ImA = \{c_1\, t + c_2\, t^2\}$, $c_1,\ c_2$ – произвольные постоянные.

Теперь, действуя стандартным образом (смотрите решение задачи 3 из параграфа 2), можно показать, что

$$\sigma_p(A) = \{0,\ \lambda_1,\ \lambda_2\},$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2$ – корни уравнения

$$240\lambda^2 - 32\lambda - 1 = 0.$$

Итак,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A).$$

4. Покажите что оператор $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$ компактен и найдите его спектр, если:

a) $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t^2\, s\, x(s)\, ds$;

b) $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (1+t)\,(1+s)\, x(s)\, ds$.

5. Пусть X — БП, $A : X \to X$ — линейный компактный оператор, $\lambda \neq 0$. Докажите, что множество $Im(A - \lambda I)$ замкнуто в X.

Решение. Пусть $y_n \in Im(A - \lambda I)$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$, тогда получим $y_n = (A - \lambda I)x_n$. Если x_n содержит ограниченную подпоследовательность, то в силу компактности оператора A существует сходящаяся подпоследовательность Ax_{nk}, следовательно, сходится последовательность

$$x_{nk} = \frac{1}{\lambda}\left(Ax_{nk} - y_{nk}\right).$$

Положим $x_0 = \lim x_{nk}$. Тогда $Ax_0 = \lim Ax_{nk}$, значит

$$y = (A - \lambda I)x_0,\ y \in Im(A - \lambda I).$$

Если же x_n не содержит ограниченной подпоследовательности, то тогда $\|x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$ и, полагая $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, повторяем прежнее доказательство.

6. Докажите что собственные векторы

a) самосопряженного

b) нормального

оператора в ГП, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Решение задачи 6a). Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — собственные значения самосопряженного оператора A и $x_1,\ x_2$ — соответствующие собственные векторы. Тогда

$$\lambda_1\,(x_1, x_2) = (\lambda_1\,x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) =$$
$$= (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2\,x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

(в последнем равенстве использовалось свойство вещественности собственных значений самосопряженного оператора). Значит, $(x_1, x_2) = 0$.

7. Докажите, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$Ax(t) = t^2\,x(t)$$

самосопряженный и найдите его спектр.

8. Докажите, что самосопряженный оператор является неотрицательным тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in \sigma(A)$ выполняется неравенство $\lambda \geq 0$.

9. Пусть A — самосопряженный оператор в ГП H и λ не является его собственным значением. Докажите, что

$$\overline{Im(A - \lambda I)} = H.$$

Решение. Так как λ — не собственное значение оператора A, то тогда $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$. Тогда $\overline{Im(A - \lambda I)} = H$ (смотри задачу 5).

10. Пусть A — самосопряженный оператор в ГП H и $Im(A - \lambda I) = H$. Докажите, что $\lambda \in \rho(A)$.

11. Пусть A — самосопряженный оператор и $\lambda \in \rho(A)$ – вещественное число. Докажите, что резольвента $R_\lambda(A)$ — самосопряженный оператор.

12. Пусть A — компактный оператор в комплексном БП X. Может ли собственное подпространство A, соответствующее собственному значению $\lambda = 0$ быть бесконечномерным?

Указание. Смотрите решение задачи 3.

13. Пусть компактный самосопряженный оператор A в ГП H имеет конечное множество собственных значений. Докажите, что $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A.

§7. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральными уравнениями Фредгольма второго рода называются уравнения вида

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = f(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – неизвестная функция, $K(t,s)$, $f(t)$ – известные функции, λ – числовой параметр.

Если ядро уравнения (1) является вырожденным, то есть имеет вид

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,g_i(s),$$

где функции $f_i(t)$, $g_i(s)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны и линейно независимы, то (1) можно записать в виде

$$x(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i\,f_i(t)$$

и неизвестные C_i определить из системы линейных алгебраических уравнений. Если уравнение (1) имеет решение, то имеет решение и алгебраическая система, верно и обратное утверждение.

Если для некоторого $\lambda \neq 0$ однородное уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = 0 \tag{1$'$}$$

имеет ненулевое решение $x_0(t) \in L_2[a,b]$, то λ называется характеристическим числом ядра или уравнения, а $x_0(t)$ – собственной функцией ядра (уравнения). Если λ – характеристическое число, то $\frac{1}{\lambda}$ – собственное значение интегрального оператора.

Некоторые виды интегральных уравнений (так называемые уравнения типа свёртки) решаются с помощью преобразования Лапласа. Так называют интегральное преобразование вида

$$\mathcal{L}[x](\tau) = \int\limits_0^\infty x(t)\,e^{-\tau t}\,dt,$$

которое ставит в соответствие функции (оригиналу) $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ функцию $\mathcal{L}[x](\tau)$ (изображение) комплексной переменной $\tau = \sigma + i\omega$. Функция $x(t)$, которая подвергается преобразованию Лапласа, удовлетворяет трём условиям:
1. $x(t)$ определена и кусочно-дифференцируема на всей положительной числовой полуоси $[0; +\infty)$;
2. $x(t) = 0$ при $t < 0$;
3. существуют такие положительные числа M и p, что

$$x(t) \leq Me^{pt},\ 0 \leq t < \infty.$$

Преобразование Лапласа рассматривается в курсах "Теория функций комплексных переменных"и "Уравнения математической физики", его основные свойства и таблицы приведены в [8]. Напомним здесь лишь основные из них:

1. Умножение изображений

$$f(x)g(0) + \int\limits_0^x f(x-\tau)g'(\tau)\,d\tau = sF(s)G(s).$$

2. Дифференцирование и интегрирование оригинала. Изображением по Лапласу первой производной от оригинала по аргументу является произведение изображения на аргумент последнего за вычетом оригинала в нуле справа:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s \cdot F(s) - f(0^+).$$

В более общем случае (производная n-го порядка):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Изображением по Лапласу интеграла от оригинала по аргументу является изображение оригинала, делённое на свой аргумент:

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

3. Дифференцирование и интегрирование изображения. Обратное преобразование Лапласа от производной изображения по аргументу есть произведение оригинала на свой аргумент, взятое с обратным знаком:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -xf(x).$$

Обратное преобразование Лапласа от интеграла изображения по аргументу есть оригинал этого изображения, делённый на свой аргумент:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int\limits_s^{+\infty} F(s)\,ds\right\} = \frac{f(x)}{x}.$$

4. Предельные теоремы. Запаздывание изображения:

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x).$$

Запаздывание оригинала:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(x-a)H(x-a).$$

Примечание: H(x) — функция Хевисайда.

5. Линейность:

$$\mathcal{L}\{af(x)+bg(x)\} = aF(s)+bG(s).$$

6. Умножение на число:

$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Отметим, что в задачах, которые ниже будут решаться с помощью преобразования Лапласа обеспечена взаимная однозначность этого преобразования. Из всех свойств преобразования Лапласа выделим отдельно теорему о свёртке.

Теорема 7.1. Свёртке функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ при применении преобразования Лапласа

$$(x_1 * x_2)(s) = \int\limits_0^t x_1(t)\,x_2(s-t)\,dt$$

соответствует произведение $\mathcal{L}[x_1]\cdot\mathcal{L}[x_2]$.

Задачи

1. В пространстве $C[a,b]$ найдите решение интегрального уравнения (1), если:

а) $a=-\frac{\pi}{4},\ b=\frac{\pi}{4},\ K(t,s)=tg\,s,\ f(t)\equiv 1;$

b) $a = 0,\ b = \frac{\pi}{2},\ K(t,s) = \sin t\,\cos s,\ f(t) = \sin t;$
c) $a = 0,\ b = \pi,\ K(t,s) = \sin t\,\cos s,\ f(t) = \sin t;$
d) $a = 0,\ b = 1,\ K(t,s) = t + s - 2\,t\,s,\ f(t) = t + t^2;$
e) $a = -1,\ b = 1,\ K(t,s) = ts - t^2\,s^2,\ f(t) = t^2 + t^4;$
f) $a = 0,\ b = 2\pi,\ K(t,s) = |\pi - s|\sin t,\ f(t) = t;$
g) $a = 0,\ b = \pi,\ K(t,s) = \sin s + s\,\cos t,\ f(t) = 1 - 2\frac{t}{\pi};$
h) $a = 0,\ b = \pi,\ K(t,s) = \sin(t - 2\,s),\ f(t) = \cos(2t).$

Решение задачи 1a). Уравнение имеет вид:

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\, s\, x(s)\, ds = 1. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $x(t) = \lambda C_1 + 1$, то есть решение надо искать в виде константы, которую обозначим C. Подставляя в (2), имеем

$$C = \lambda\, C \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\, s\, ds + 1,$$

значит, $C = 1$. Таким образом, $x(t) \equiv 1$.

Решение задачи 1b). Уравнение имеет вид:

$$x(t) = \lambda \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, \cos s\, x(s)\, ds + \sin t. \tag{3}$$

Перепишем (3) в виде

$$x(t) = \lambda \sin t \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, x(s)\, ds + \sin t. \tag{4}$$

Замечаем, что решение (3) следует искать в виде $x(t) = C \sin t$. Подставляя в (4), имеем

$$C \sin t = C\lambda \sin t \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, \sin s\, ds + \sin t$$

или

$$C = C\lambda \frac{1}{2} + 1,\ C(1 - \frac{\lambda}{2}) = 1. \tag{5}$$

Значит, $C = \frac{2}{2-\lambda}$ при $\lambda \neq 2$. Если $\lambda = 2$, то уравнение (5), а следовательно, и (3) не имеет решения.

Решение задачи 1d). Уравнение имеет вид:

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (t + s - 2ts)\, x(s)\, ds = t + t^2.$$

Перепишем его в виде

$$x(t) = \lambda t \int\limits_0^1 x(s)\, ds + \lambda \int\limits_0^1 s\, x(s)\, ds - 2\lambda t \int\limits_0^1 s\, x(s)\, ds + t + t^2 \qquad (6)$$

и ищем решение в виде $x(t) = C_1 + C_2\, t + C_3\, t^2$. Подставим последнее выражение в (6) и найдём постоянные C_i:

$$C_1 + C_2\, t + C_3\, t^2 = \lambda t \int\limits_0^1 (C_1 + C_2 s + C_2 s^2)\, ds +$$

$$+\lambda \int\limits_0^1 (C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3)\, ds -$$

$$-2\lambda t \int\limits_0^1 (C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3)\, ds + t + t^2;$$

$$C_1 + C_2 t + C_3 t^2 = \lambda \frac{C_1}{2} + \lambda \frac{C_2}{3} +$$

$$+\lambda \frac{C_3}{4} + \left(1 + \lambda(C_1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_3}{3}) - 2\lambda(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{4})\right) t + t^2$$

учитывая линейную независимость функций $\{1,\, t,\, t^2\}$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{C_1\lambda}{2} + \frac{C_2\lambda}{3} + \frac{C_3\lambda}{4}, \\ C_2 = 1 + \lambda C_1 + \frac{C_2\lambda}{2} + \frac{C_3\lambda}{3} - \frac{2C_1\lambda}{2} - \frac{2C_2\lambda}{3} - \frac{2C_3\lambda}{2}, \\ C_3 = 1. \end{array} \right. \qquad (7)$$

Далее, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{C_1\lambda}{2} + \frac{C_2\lambda}{3} + \frac{\lambda}{4}, \\ C_2 = 1 - \frac{C_2\lambda}{6} - \frac{\lambda}{6}, \\ C_3 = 1. \end{array} \right.$$

Значит,

$$C_1 = \frac{\lambda(42-\lambda)}{6(2-\lambda)(6+\lambda)},\ C_2 = \frac{6-\lambda}{6+\lambda}$$

при $\lambda \neq 2,\ \lambda \neq -6$ и

$$C_3 = 1.$$

При $\lambda = 2$ или $\lambda = -6$ система (7) не имеет решений. Следовательно, не имеет решений и уравнение (6); при остальных значениях параметра

$$x(t) = \frac{\lambda(42-\lambda)}{6(2-\lambda)(6+\lambda)} + \frac{6-\lambda}{6+\lambda}t + t^2.$$

2. В $C[a,b]$ найдите характеристические числа λ_i и собственные функции φ_i для уравнения (1'), если:

a) $a = 0,\ b = 2\pi,\ K(t,s) = \sin(t+s)$;

b) $a = 0,\ b = 1,\ K(t,s) = 2ts - 4t^2$;

c) $a = 0,\ b = \pi,\ K(t,s) = \cos(t+s)$;

d) $a = -1,\ b = 1,\ K(t,s) = ts + t^2s^2$.

Решение задачи 2a). Запишем данное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda \sin t \int\limits_0^{2\pi} x(s)\ \cos s\, ds + \lambda \cos t \int\limits_0^{2\pi} x(s)\ \sin s\, ds. \qquad (8)$$

Такая запись показывает, что решение следует искать в виде

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

где C_1 и C_2 — константы. Подставим записанную таким образом функцию $x(t)$ в (8):

$$C_1 \sin t + C_2 \cos t = \lambda \sin t \int\limits_0^{2\pi} (C_1 \sin s + C_2 \cos s)\ \cos s\, ds +$$

$$+\lambda \cos t \int\limits_0^{2\pi} (C_1 \sin s + C_2 \cos s)\ \sin s\, ds;$$

$$C_1 \sin t + C_2 \cos t = \lambda C_2 \sin(t)\pi + \lambda C_1 \cos(t)\pi$$

Учитывая линейную независимость тригонометрических функций, получаем систему уравнений для нахождения констант:

$$\begin{cases} C_1 = \lambda\pi C_2, \\ C_2 = \lambda\pi C_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \lambda\pi(\lambda\pi C_1), \\ C_2 = \lambda\pi C_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(1-\lambda^2\pi^2) = 0, \\ C_2 = \lambda\pi C_1. \end{cases}$$

Ненулевые решения существуют при $\lambda = \pm\frac{1}{\pi}$.

Таким образом,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi},$$

C_1 – произвольно, $C_2 = C_1$;

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\pi},$$

C_1 – произвольно, $C_2 = -C_1$.

Обычно полагают $C_1 = 1$. Тогда

$$\varphi_1(t) = \sin t + \cos t;\ \varphi_2(t) = \sin t - \cos t.$$

Решение задачи 2b). Ищем решение в виде $x(t) = C_1 t + C_2 t^2$. Для нахождения констант приходим к системе

$$\begin{cases} C_1 = \frac{2\lambda C_1}{3} + \frac{\lambda C_2}{2}, \\ C_2 = -2\lambda C_1 - \frac{4\lambda C_2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(6-4\lambda) - 3\lambda C_2 = 0, \\ 6\lambda C_1 + (3+4\lambda)C_2 = 0. \end{cases}$$

Получившаяся однородная система имеет ненулевые решения при $\lambda = -3$. При таком значении λ имеем $C_2 = -2C_1$.

Таким образом,

$$\lambda = -3,\ \varphi(t) = t - 2t^2.$$

3. В пространстве $C[a,b]$ найдите решение интегрального уравнения (1) при всех значениях параметров α, β, γ, входящих в свободный член этого уравнения, если:

a) $a = -1,\ b = 1,\ K(t,s) = ts,\ f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$;

b) $a = 0,\ b = \pi,\ K(t,s) = \cos(t+s),\ f(t) = \alpha \sin t + \beta$;

c) $a = -1,\ b = 1,\ K(t,s) = t^2 - 2ts,\ f(t) = \alpha t^2 - \beta t$;

d) $a = -1,\ b = 1,\ K(t,s) = 3t + ts - 3t^2 s^2,\ f(t) = \alpha t$.

Решение задачи 3a). Запишем уравнение в виде

$$x(t) = \gamma + \left(\beta + \lambda \int_{-1}^{1} s\, x(s)\, ds\right) t + \alpha t^2 \tag{9}$$

и будем искать решение в виде

$$x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2.$$

Подстановка в (9) после приравнивания соответствующих коэффициентов даёт:

$$\begin{cases} C_1 = \gamma, \\ C_2 = \beta + \frac{2}{3}\lambda C_2, \\ C_3 = \alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \gamma, \\ C_2(1 - \frac{2}{3}\lambda) = \beta, \\ C_3 = \alpha; \end{cases}$$

Если $\lambda \neq \frac{3}{2}$, то последняя система имеет решение при любых значениях параметров и

$$x(t) = \gamma + \frac{\beta}{1 - \frac{2}{3}\lambda} t + \alpha t^2.$$

Если $\lambda = \frac{3}{2}$, то система имеет решение лишь при $\beta = 0$:

$$x(t) = \gamma + Ct + \alpha t^2,$$

C — произвольная константа.

4. Используя преобразование Лапласа, решите уравнение

$$x(t) - \int\limits_0^t K(t-s)\, x(s)\, ds = f(t),$$

если

a) $K(z) = e^{-2z},\ f(t) = 1 + t;$

b) $K(z) = \sin z,\ f(t) = t;$

c) $K(z) = 2\cos z,\ f(t) = e^t;$

d) $K(z) = 1,\ f(t) = \cos t.$

Решение задачи 4a). К исходному уравнению применим преобразование Лапласа и теорему 7.1:

$$\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[K]\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f],\ \mathcal{L}[x] = \frac{\mathcal{L}[f]}{1 - \mathcal{L}[K]}.$$

Преобразования $\mathcal{L}[K]$, $\mathcal{L}[f]$ находим в таблицах ([8], стр. 235).

$$\mathcal{L}[x](\tau) = \frac{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}}{1 - \frac{1}{\tau+2}} = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\tau^2}.$$

Теперь остаётся по изображению восстановить оригинал . Делаем это с помощью таблиц: $x(t) = 1 + 2t$. Непосредственная проверка убеждает, что эта функция и является решением интегрального уравнения.

5. Используя преобразование Лапласа, в пространстве $C[a, b]$ найдите решение уравнения

$$\int_0^t K(t-s)\,x(s)\,ds = f(t),$$

если

a) $K(z) = \cos z,\ f(t) = \sin t$;

b) $K(z) = \cos z,\ f(t) = t \sin t$;

c) $K(z) = \cos z,\ f(t) = t + t^2$;

d) $K(z) = e^z,\ f(t) = t^2$;

e) $K(z) = \sin z,\ f(t) = 1 - \cos t$.

Решение задачи 5a). Применяя теорему 7.1, имеем

$$\mathcal{L}[K]\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f]$$

или (смотрим таблицы)

$$\frac{\tau}{\tau^2+1}\mathcal{L}[x] = \frac{1}{\tau^2+1},\ \mathcal{L}[x] = \frac{1}{\tau}.$$

С помощью таблиц находим $x(t) = 1$. Обращаем внимание на непрерывность этой функции.

Решение задачи 5b). Аналогично имеем

$$\frac{\tau}{\tau^2+1}\mathcal{L}[x] = \frac{2\tau}{(\tau^2+1)^2},\ \mathcal{L}[x] = \frac{2}{1+\tau^2},\ x(t) = 2\sin t.$$

Ниже приведём список основных оригиналов $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ и соответствующих им изображений $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ при действии преобразования Лапласа (q, α, ω — постоянные величины):

1. $x(t) = \delta(t-\tau),\ X(s) = e^{-\tau s}$;
2. $x(t) = \delta(t),\ X(s) = 1, \forall s$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака;
3. $x(t) = \frac{(t-\tau)^n}{n!}e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot H(t-\tau),\ X(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^{n+1}},\ s > 0$, где $H(t)$ — функция Хевисайда;
4. $x(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot H(t),\ X(s) = \frac{1}{s^{n+1}},\ s > 0$;
5. $x(t) = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \cdot H(t),\ X(s) = \frac{1}{s^{q+1}},\ s > 0$;
6. $x(t) = H(t),\ X(s) = \frac{1}{s},\ s > 0$;
7. $x(t) = H(t-\tau),\ X(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s},\ s > 0$;
8. $x(t) = t \cdot H(t),\ X(s) = \frac{1}{s^2},\ s > 0$;

9. $x(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} \cdot H(t),\ X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}},\ s > -\alpha;$

10. $x(t) = e^{-\alpha t} \cdot H(t),\ X(s) = \frac{1}{s+\alpha},\ s > -\alpha;$

11. $x(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \cdot H(t),\ X(s) = \frac{\alpha}{s(s+\alpha)},\ s > 0;$

12. $x(t) = \sin(\omega t) \cdot H(t),\ X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},\ s > 0;$

13. $x(t) = \cos(\omega t) \cdot H(t),\ X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2},\ s > 0;$

14. $x(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \cdot H(t),\ X(s) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2},\ s > -\alpha;$

15. $x(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \cdot H(t),\ X(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2},\ s > -\alpha;$

16. $x(t) = \sqrt[n]{t} \cdot H(t),\ X(s) = s^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ s > 0,$ где $\Gamma(n)$ — гамма-функция;

17. $x(t) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot H(t),\ X(s) = -\frac{t_0}{s}[\ln(t_0 s) + \gamma],\ s > 0, t_0 \in \mathbb{R}.$

§8. ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X, Y — БП и $A : X \to Y$ — линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Оператор A называется неограниченным, если

$$\sup_{x\in\mathcal{D}(A):\,\|x\|\le 1} \|Ax\| = +\infty.$$

Оператор A называется замкнутым, если из $x_n \in \mathcal{D}(A)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ вытекает, что $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = y$.
Понятие замкнутого оператора обобщает понятие оператора, непрерывного на замкнутом подмножестве в банаховом пространстве.

Теорема 8.1. Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то A замкнут.

Теорема 8.2. Если $A : X \to Y$ есть замкнутый оператор и у него существует обратный A^{-1}, то оператор A^{-1} замкнут.

Теорема 8.3. (С. Банаха о замкнутом операторе) Пусть A является замкнутым линейным оператором с $\mathcal{D}(A) = X$. Тогда A ограничен.
Так как оператор $A : X \to X$ замкнут тогда и только тогда, когда $A - \lambda I$ замкнут, то оператор A будет замкнутым, если его резольвента $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ существует и ограничена хотя бы для одного значения параметра λ.

Задачи

1. Докажите, что ядро замкнутого оператора является замкнутым множеством.

2. Докажите, что линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ является замкнутым тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(A)$ замкнуто в X.

3. Рассмотрим оператор $A : l_2 \to l_2$

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \left(x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 x_k^2 < \infty \right),$$

где $\{\lambda_k\}$ – неограниченная последовательность чисел для которой выполняется условие $\inf |\lambda_k| > 0$. Докажите, что A — неограниченный замкнутый оператор.

Решение. Рассмотрим $e_n = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда норма $\|e_n\|_2 = 1$, $\|Ae_n\|_2 = |\lambda_n|$ и ввиду неограниченности последовательности $\{\lambda_n\}$ будет выполнено условие

$$\sup \|Ae_n\|_2 = \infty.$$

Значит, оператор A неограничен. Неравенство $\inf|\lambda_k| > 0$ обеспечивает непрерывную обратимость оператора A. Тогда по теореме 8.1 оператор A^{-1} замкнут, а по теореме 8.2. замкнут оператор $A = (A^{-1})^{-1}$.

4. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$Ax(t) = x'(t)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A) = C^1[0,1]$. Докажите, что A — замкнутый неограниченный оператор и найдите его точечный спектр $\sigma_p(A)$.

Решение. Неограниченность данного оператора A следует из того, что для последовательности $x_n(t) = t^n$ имеем:

$$\|x_n\| = 1, \quad \|Ax_n\| = n.$$

Докажем теперь замкнутость оператора.
Пусть $x_n(t) \in \mathcal{D}(A)$ и

$$x_n(t) \rightrightarrows x(t),$$
$$x_n'(t) \rightrightarrows y(t)$$

равномерно на $[0,1]$. Тогда, применяя теорему о дифференцировании функциональной последовательности, получаем $x(t) \in C^1[0,1]$ и $x'(t) = y(t)$. Точечный спектр оператора был найден в задаче 1 а) параграфа 2.

5. Проверьте замкнутость оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$Ax(t) = x'(t),$$

область определения которого есть часть $C^1[0,1]$, удовлетворяющая условию:

a) $x(0) = 0$;
b) $x(0) = x(1) = 0$;
c) $x(0,5) = 0$;
d) $\int\limits_0^1 x(t)\, t\, dt = 0$.

Найдите точечный спектр оператора A в случаях a),b),c).

Решение задачи 5a). Найдём обратный оператор A^{-1}. Проинтегрировав равенство $x'(t) = y(t)$, получим

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t y(s)\, ds.$$

Если потребовать, чтобы $x(t) \in \mathcal{D}(A)$, то

$$x(t) = A^{-1}y(t) = \int\limits_0^t y(s)\, ds.$$

Так как оператор A^{-1} ограничен, то по теореме 8.2 следует, что A замкнут. Точечный спектр оператора был найден в задаче 1 b) параграфа 2.

6. Рассмотрим операторы $A: C[0,\infty) \to C[0,\infty)$:

$$a) Ax(t) = t\,x(t),$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C[0,\infty): \ \ |x(t)| \le \frac{C}{1+t},\ \forall t \ge 0\};$$

$$b) Ax(t) = t^2\,x(t),$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C[0,\infty): \ \ |x(t)| \le \frac{C}{1+t^2},\ \forall t \ge 0\}$$

(постоянная C своя для каждой функции). Докажите неограниченность и замкнутость A.

Решение задачи 6a). Пусть $x_n(t) = \frac{n}{n+t}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие равенства $\|x_n\| = 1$, $\|Ax_n\| = n$ (проверьте!). Следовательно, оператор A неограничен.

Проверим теперь замкнутость.
Пусть в $C[0,\infty)$ выполняются условия

$$x_n(t) \to x(t),$$

$$t\,x_n(t) \to y(t)$$

при $n \to \infty$. Тогда

$$(1+t)\,x_n(t) \to x(t) + y(t)$$

при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для $n \ge N$

$$|(1+t)\,x_n(t) - x(t) - y(t)| < \varepsilon,\ \forall\, t \in [0,\infty) \tag{1}$$

или

$$x_n(t) \to \frac{x(t)+y(t)}{1+t},\ n \to \infty.$$

Учитывая, что $x_n(t) \to x(t)$, получаем $\frac{x(t)+y(t)}{1+t} = x(t)$, откуда $y(t) = t\,x(t)$, то есть $y = Ax,\ x \in \mathcal{D}(A)$, так как в силу неравенства (1)

$$|x(t)| = |x(t) - x_N(t) + x_N(t)| = |\frac{x(t)+y(t)}{1+t} - x_N(t) + x_N(t)| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{1+t} + \frac{C_N}{1+t} = \frac{C_N+\varepsilon}{1+t},\ \forall\, t \in [0,\infty).$$

7. Рассмотрим операторы $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$:

$$a)\ Ax(t) = t\,x(1),\ \mathcal{D}(A) = C[0,1];$$

$$b)\ Ax(t) = t\,x(0),\ \mathcal{D}(A) = C[0,1].$$

Докажите незамкнутость операторов.

Решение задачи 7a). Пусть $x_n(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$x_n(t) \to 0,$$

$$Ax_n(t) \to t$$

при $n \to \infty$ по норме пространства $L_2[0,1]$. Но $A(0) \neq t$, поэтому оператор не является замкнутым.

8. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$Ax(t) = \frac{x(t)}{t}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C[0,1] :\ \exists \lim_{t \to +0} t^{-1}\, x(t)\}.$$

Докажите, что A — замкнутый неограниченный оператор.

9. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^2[0,1] :\ x(0) = x'(0) = 0\}.$$

Докажите, что A — замкнутый неограниченный оператор.

10. Пусть $A : X \to Y$ — линейный замкнутый оператор. Верно ли что

a) $\mathcal{D}(A)$ замкнуто в X;

b) $\mathcal{R}(A)$ замкнуто в Y?

Указание. В случае a) рассмотреть оператор из задачи 9, а в случае b) оператор $A : C^1[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t)$.

Введём дополнительные обозначения.

$AC[a,b]$ — множество абсолютно непрерывных функций на $[a,b]$, то есть таких, что для функции $x(t) \in AC[a,b]$ найдётся соответствующая функция $y(t) \in L_1[a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^t y(s)\,ds = x(t) - x(a).$$

Таким образом, $x(t) \in AC[a,b]$ п.в. имеет производную.

Введём ещё два обозначения.

$$M_1[a,b] = \{x(t) \in L_2[a,b] :\ x(t) \in AC[a,b],\ x'(t) \in L_2[a,b]\}.$$

$$M_2[a,b] = \{x(t) \in L_2[a,b] :\ \exists\, x(t) \in AC[a,b],\ x''(t) \in L_2[a,b]\}.$$

11. Докажите замкнутость оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$Ax(t) = x'(t)$$

с областью определения $M_1[a,b]$.

Решение. Пусть $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ в $L_2[0,1]$. Согласно неравенству Гёльдера, имеем

$$\int\limits_0^t |Ax_n(s) - y(s)|\, ds \le \sqrt{t}\, \|Ax_n - y\|_2,$$

так что последовательность $\int\limits_0^t Ax_n(s)\, ds$ сходится равномерно по t из отрезка $[0,1]$. Тогда она сходится и в пространстве $L_2[0,1]$. Значит, в $L_2[0,1]$ сходится последовательность чисел

$$x_n(0) = x_n(t) - \int\limits_0^t Ax_n(s)\, ds.$$

Тогда последовательность $\{x_n(0)\}$ является фундаментальной в $L_2[0,1]$ и из равенства

$$|x_n(0) - x_m(0)| = \|x_n(0) - x_m(0)\|$$

следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(0)$. Положим

$$\widetilde{x}(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(0) + \int\limits_0^t y(s)\, ds.$$

Отметим, что по определению $\widetilde{x} \in \mathcal{D}(A)$ и $A\widetilde{x} = y$. Докажем, что $\widetilde{x} = x$. Ввиду единственности предела для этого достаточно доказать, что $x_n \to \widetilde{x}$ в $L_2[0,1]$. Но это очевидно, так как $x_n(t) \to \widetilde{x}(t)$ равномерно по $t \in [0,1]$.

12. Проверьте замкнутость операторов $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$Ax(t) = x''(t),$$

если $\mathcal{D}(A)$ есть часть $M_2[0,2]$, задаваемая одним из условий:

a) $x(0) = 0$;
b) $x'(0) = 0$;
c) $x'(0) = x(0) = 0$;
d) $M_2[0, 1]$;
e) $x(0.5) = 0$;
f) $\int\limits_0^2 x(s)\, ds = 0$.

Указание. Получите представление

$$x_n(t) = x_n(0) + x_n'(0)\, t + \int\limits_0^t Ax_n(s)\, (t - s) ds$$

и далее рассуждайте как при решении задачи 11.

13. В ГП H рассмотрим оператор A с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Покажите, что оператор A^* сопряжённый к замкнутому оператору A, является замкнутым.

14. Докажите, что оператор в $C[0, 1]$, определённый соотношением

$$Ax(t) = \int\limits_0^t \frac{x(s)}{s}\, ds$$

на множестве функций $x(t)$, для которых

$$\int\limits_0^t \frac{x(s)}{s}\, ds \in C[0, 1]$$

является замкнутым

15. Пусть $A : \mathcal{D}(A) \to Y$, $B : \mathcal{D}(B) \to Y$ $(\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \subset X)$ — линейные операторы, причём A замкнут, а B ограничен. Докажите, что оператор $A + B$ замкнут.

Литература

[1] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа // А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

[2] Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа // Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

[3] Канторович, Л.В. Функциональный анализ // Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – С.-П.: Невский диалект, БХВ-Петербург, 2004. – 816 с.

[4] Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу // В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

[5] Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа // А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М.: Наука, 1988. – 400 с.

[6] Дюдяева, Г.В. Методическое пособие по функциональному анализу // Г.В. Дюдяева.– Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1982. 20 с.

[7] Ахиезер, Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве // Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1966. – 440 с.

[8] Корн, Г. Справочник по математике // Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

[9] Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения // А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: Высшая школа, 1984. – 286 с.

[10] Антоневич, А.Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу // А.Б. Антоневич, П.Н. Князев, Я.В. Радыно. – Минск: Высшая школа, 1978. – 206 с.

[11] Пуляев, В.Ф. Задачи по функциональному анализу // В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: Кубанский университет, 1983. – 90 с.

[12] Рудин, У. Функциональный анализ // У. Рудин. М.: Мир, 1975. 442 с.

[13] Треногин, В.А. Функциональный анализ // В.А. Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

[14] Халмош, П. Гильбертово пространство в задачах // П. Халмош. – М.: Мир, 1970. – 352 с.

[15] Фёдоров, В.М. Курс функционального анализа // В.М. Фёдоров. – М.: Лань, 2005. – 352 с.

[16] Богачёв, В.И. Действительный и функциональный анализ: университетский курс // В.И. Богачёв, Смолянов О. Г. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. – 728 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Алякин Владимир Алексеевич,
Новиков Сергей Яковлевич,
Узбеков Роман Фатихович

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет Р. Ф. Узбекова

Подписано в печать 25.03.2015.
Гарнитура Times New Roman. Формат $60 \times 84/16$.
Typeset by LaTeX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,25 . Тираж 100 экз. Заказ № 2602.
Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано на УОП СамГУ