

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Н. В. Воропаева, С. Я. Новиков, М. Е. Федина

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

*Утверждено редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия*

Самара
Издательство «Самарский университет»
2015

УДК 621.391.26(075)

ББК 32.81

В75

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. В.И. Астафьев,
канд. физ.-мат. наук, доц. М.Н. Осипов

Воропаева, Н. В.

В75 **Дискретное преобразование Фурье в обработке сигналов:** учеб. пособие / Н. В. Воропаева, С. Я. Новиков, М. Е. Федина. — Самара : Изд-во «Самарский университет», 2015. — 48 с.

ISBN 978-5-86465-683-9

В учебном пособии излагаются основы дискретного преобразования Фурье и его приложений к частотной фильтрации цифровых изображений. Теоретический материал иллюстрируется решением задач.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и специальности 10.05.01 «Компьютерная безопасность», может быть полезно аспирантам и специалистам в области математического моделирования, прикладной математики, компьютерной и информационной безопасности.

УДК 621.391.26(075)

ББК 32.81

ISBN 978-5-86465-683-9

© Воропаева Н. В., Новиков С. Я.,
Федина М. Е., 2015

© ФГБОУ ВПО «Самарский
государственный университет», 2015

Содержание

Введение	4
1 Определение дискретного преобразования Фурье	5
2 Дискретное преобразование Фурье и частотная фильтрация	10
3 Соответствие между фильтрацией в пространственной области и фильтрацией в частотной области	14
Список литературы	47

Введение

В связи с широким распространением цифровой обработки изображений возникает необходимость ознакомить студентов различных направлений подготовки и специальностей с дискретным преобразованием Фурье, лежащим в основе частотной фильтрации сигналов.

В предлагаемом учебном пособии теоретический материал дополнен решениями задач практического содержания из главы 4 известного учебного пособия Р. Гонсалеса и Р. Вудса «Цифровая обработка сигналов» [1].

Рассматриваются как одномерные, так и двумерные преобразования. Приведены примеры частотных фильтров и обработка изображений с их применением. Уделено внимание свойствам дискретного преобразования Фурье, в частности, теореме о свёртке.

Учебное пособие «Дискретное преобразование Фурье в обработке сигналов» будет полезно бакалаврам, магистрам и аспирантам, изучающим дискретную математику и её приложения. Может использоваться для самостоятельного изучения основ дискретного преобразования Фурье и цифровой обработки сигналов ¹.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, проект № 204

1 Определение дискретного преобразования Фурье

Цифровая обработка сигналов основана на дискретизации и квантовании аналоговых сигналов. Результатом этих процедур оказывается комплекснозначная функция дискретного аргумента $f(x)$, $x = 0, 1, \dots, M-1$, то есть вектор из пространства \mathbb{C}^M . Одним из базисов этого пространства является стандартный, или евклидов, базис

$$\{e_0, e_1, \dots, e_{M-1}\},$$

где

$$e_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = j, \\ 0, & \text{если } x \neq j. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ продолжается периодически с периодом M , то есть $f(x + M) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{Z}$. Например, если $M = 10$, то $f(25) = f(15) = f(5) = f(-5)$. Из теории рядов Фурье известно, как можно представить периодическую функцию суммой синусов и косинусов кратных дуг. Аналогом такого представления дискретного сигнала является дискретное преобразование Фурье (ДПФ) или Фурье-преобразование.

Векторы $E_0, E_1, \dots, E_{M-1} \in \mathbb{C}^M$, определяемые равенствами

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad x = 0, 1, \dots, M-1;$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i x}{M}}, \quad x = 0, 1, \dots, M-1;$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i 2x}{M}}, \quad x = 0, 1, \dots, M-1;$$

...

$$E_{M-1} = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i (M-1)x}{M}}, \quad x = 0, 1, \dots, M-1;$$

или, общей формулой,

$$E_u = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i u x}{M}}, \quad 0 \leq x, u \leq M-1,$$

образуют новый ортонормированный базис (ОНБ) пространства \mathbb{C}^M .

В соответствии с теорией евклидовых пространств имеем

$$f = \sum_{u=0}^{M-1} \langle f, E_u \rangle E_u \quad (1)$$

где

$$\langle f, E_u \rangle = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \overline{\frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i u x}{M}}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i u x}{M}}.$$

Фурье-преобразование дискретного сигнала (дискретной функции *одной* переменной) $f(x)$, $x = 0, 1, \dots, M-1$, задается равенством

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i u x}{M}}, \quad u = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2)$$

Это (прямое) дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Таким образом, замечаем, что ДПФ определяет коэффициенты представления сигнала в «частотном базисе» $\{E_u\}_{u=0}^{M-1}$, с точностью до множителя:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \langle f, E_u \rangle, \quad u = 0, 1, \dots, M-1.$$

Формула (1) принимает вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{u=0}^{M-1} \langle f, E_u \rangle E_u(x) = \sqrt{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) E_u(x) = \\ &= \sqrt{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i u x}{M}} = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{2\pi i u x}{M}}, \end{aligned}$$

таким образом,

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{2\pi i u x}{M}}, \quad x = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3)$$

Это представление сигнала в частотном базисе называется *формулой обращения* или *обратным дискретным преобразованием Фурье*. Числа $\{|F_u|\}_{u=0}^{M-1}$ называют *амплитудным спектром сигнала* f . Формула (2) позволяет определить Фурье-образ $F(u)$ не только для указанных значений переменной u , но и для всех остальных целых значений. При этом функция $F(u)$ оказывается периодической с периодом M , т.е. $F(u + M) = F(u)$.

Любые M подряд взятых значений аргумента содержат всю информацию о Фурье-образе. В этом случае в формуле обращения (3) суммирование следует вести от u_0 до $u_0 + M$, где u_0 — любое целое число.

Аналогично, формула (3) имеет смысл для всех целых значений переменной x . При этом определяемая этой формулой функция целого аргумента совпадает с периодическим (периода M) продолжением исходной функции $f(x)$ на все целые значения аргумента. Если предварительно продолжить функцию $f(x)$ периодически с периодом M на все целые значения аргумента, то и в формуле (2) суммирование можно вести по любому периоду длины M , т.е. от x_0 до $x_0 + M$, где x_0 — любое целое число.

Вычисление Фурье-преобразования $F(u)$ по формуле (2) осуществляется последовательно: сначала подставляется значение $u = 0$ в показатель экспоненты, затем, с помощью суммирования, находится $F(0)$; далее в экспоненту подставляется значение $u = 1$ и снова производится суммирование по всем значениям переменной x . Для получения полного Фурье-образа этот процесс повторяется для всех M значений переменной u . Таким образом, для вычисления Фурье-образа потребуется M^2 умножений. Фурье-образ является, как и исходная функция, дискретной величиной и содержит M различных значений.

Задача 1.

Показать, что $F(u)$ и $f(x)$ в формулах (2) и (3) образуют Фурье-пару.

Решение:

Проверим справедливость формулы (3):

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{2\pi i u x}{M}} &= \sum_{u=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{v=0}^{M-1} f(v) e^{-\frac{2\pi i u v}{M}} \right] e^{\frac{2\pi i u x}{M}} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} f(v) e^{-\frac{2\pi i u v}{M}} e^{\frac{2\pi i u x}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{v=0}^{M-1} f(v) \sum_{u=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i u}{M}(x-v)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим внутреннюю сумму. Если $v = x$, то получается

$$\sum_{u=0}^{M-1} 1 = M.$$

Если $v \neq x$, то

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i u}{M}(x-v)} &= 1 + e^{\frac{2\pi i}{M}(x-v)} + e^{\frac{2\pi i 2}{M}(x-v)} + \dots + e^{\frac{2\pi i (M-1)}{M}(x-v)} = \\ &= 1 + \omega_M^{(x-v)} + \omega_M^{2(x-v)} + \dots + \omega_M^{(M-1)(x-v)}, \end{aligned}$$

где $\omega_M = e^{\frac{2\pi i}{M}}$, т.е. получается сумма геометрической прогрессии со знаменателем ω_M^{x-v} . Находим ее:

$$\sum_{u=0}^{M-1} \omega_M^{u(x-v)} = \frac{1 - \omega_M^{M(x-v)}}{1 - \omega_M^{x-v}} = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i}{M}M}}{1 - \omega_M^{x-v}} = 0,$$

т.к. $e^{2\pi i} = 1$. Таким образом,

$$\sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{2\pi i u x}{M}} = f(x),$$

$x = 0, 1, \dots, M - 1$. Аналогичные вычисления доказывают формулу (2).
□

Дискретное прямое и обратное преобразование Фурье допускают непосредственное обобщение на *двумерный* случай. Прямое ДПФ функции $f(x, y)$ (изображения) размерами $M \times N$ задается равенством

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}. \quad (4)$$

Как и в одномерном случае, это выражение должно быть вычислено для всех $u = 0, 1, \dots, M - 1$, и также для всех $v = 0, 1, \dots, N - 1$. Аналогично, исходное изображение $f(x, y)$ восстанавливается с помощью формул обращения

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)},$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1.$$

Переменные u и v называют *частотными*, x и y — *пространственными переменными*.

Задача 2.

Показать, что преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье являются линейными операторами.

Решение:

Обозначая преобразование Фурье через $F[f(x, y)]$, задачу можно сформулировать в виде проверки равенства:

$$F[a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] = a_1 F[f_1(x, y)] + a_2 F[f_2(x, y)],$$

где a_1 и a_2 — произвольные комплексные числа.

Решение теперь сводится к следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned} & F[a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} a_1 f_1(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} + \\ &+ \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} a_2 f_2(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \\ &= a_1 F[f_1(x, y)] + a_2 F[f_2(x, y)]. \end{aligned}$$

□

2 Дискретное преобразование Фурье и частотная фильтрация

Обычной практикой стало умножение исходной функции-изображения на $(-1)^{x+y}$ перед выполнением Фурье-преобразования.

Задача 3.

Проверить, что

$$F [f(x, y)(-1)^{x+y}] = F \left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2} \right).$$

Доказательство:

Сначала заметим, что $(-1)^{x+y} = e^{i\pi(x+y)}$.

Имеем

$$\begin{aligned} F [f(x, y)(-1)^{x+y}] &= F [f(x, y)e^{i\pi(x+y)}] = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y)e^{i\pi(x+y)}] e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y)e^{-2i\pi \left(-\frac{xM}{2M} - \frac{yN}{2N} \right)}] e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi \left(\frac{x(u-\frac{M}{2})}{M} + \frac{y(v-\frac{N}{2})}{N} \right)} = \\ &= F \left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2} \right). \end{aligned}$$

Это равенство означает, что начало координат для Фурье-преобразования функции $f(x, y)(-1)^{x+y}$, т.е. та точка, где значение этого преобразования равно $F(0, 0)$, находится в точке с координатами $u = \frac{M}{2}$, $v = \frac{N}{2}$.

□

Умножение функции $f(x, y)$ на $(-1)^{x+y}$ приводит к сдвигу начала координат для ее образа Фурье $F(u, v)$ в точку с частотными координатами $\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$, которая является центром прямоугольника размером $(M \times N)$, занимаемого двумерным ДПФ, так называемого *частотного прямоугольника*.

Из формулы (4) следует, что

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y), \quad (5)$$

т.е. среднему значению функции $f(x, y)$. Если $f(x, y)$ – изображение, то значение Фурье-преобразования в начале координат равно среднему значению яркости на изображении.

На рисунке 1 представлено изображение интегральной схемы под микроскопом и его центрированный Фурье-спектр (или Фурье-образ) ².

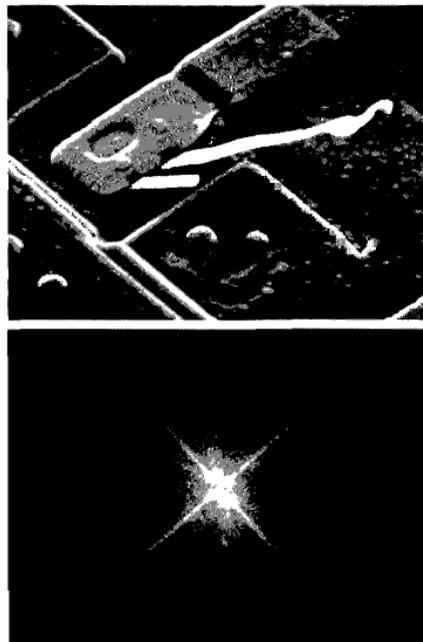


Рис. 1

Основные этапы фильтрации сигнала в частотной области:

- 1) исходное изображение $f(x, y)$ умножается на $(-1)^{x+y}$ для центрирования Фурье-преобразования;
- 2) вычисляется ДПФ $F(u, v)$;
- 3) функция $F(u, v)$ умножается на функцию фильтра $H(u, v)$;
- 4) вычисляется обратное ДПФ;
- 5) выделяется вещественная часть результата шага 4;
- 6) результат шага 5 умножается на $(-1)^{x+y}$.

²Все рисунки в данном пособии взяты из [1]

Множитель $H(u, v)$, называемый фильтром или передаточной функцией фильтра, изменяет некоторые частоты, оставляя другие без изменения. Фурье-образ после фильтрации будет выглядеть следующим образом:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v).$$

Фильтрованное изображение получается вычислением обратного преобразования от $G(u, v)$:

$$\text{фильтрованное изображение} = \mathfrak{F}^{-1} [G(u, v)].$$

Низкие частоты Фурье-преобразования отвечают за возникновение ярких участков на гладких фрагментах изображения, высокие частоты отражают контуры и шумы. В соответствии с этим принципом разработаны низкочастотные (НЧ) (т.е. ослабляющие высокие частоты) и высокочастотные (ВЧ) фильтры. После применения НЧ фильтрации изображение содержит меньше деталей (изображение становится "мягким"). ВЧ фильтрация уменьшает яркость гладких областей и выделяет контуры, делая изображение более резким.

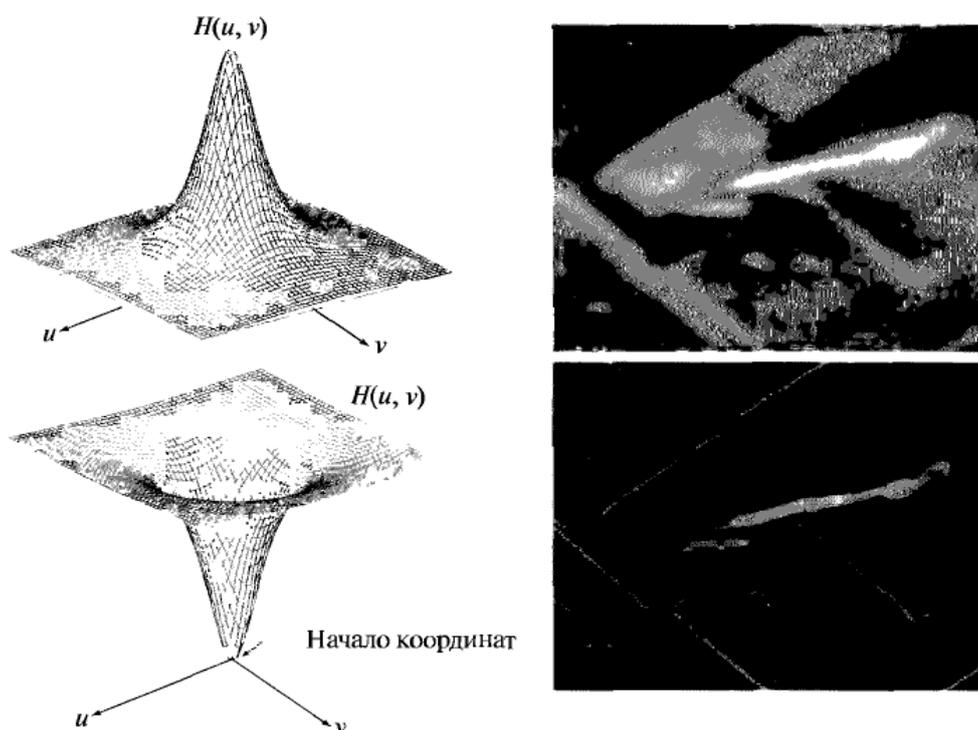


Рис. 2

На рисунке 2 показаны результаты фильтрации изображения интегральной схемы низкочастотным (верхний ряд — слева фильтр, справа — фильтрованное изображение) и высокочастотным (нижний ряд — слева фильтр, справа — фильтрованное изображение).

Примеры простейших фильтров:

1) Пусть $H(u, v) \equiv A > 0$.

В этом случае $G(u, v) = A \cdot F(u, v)$,

$$\mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)] = \mathfrak{F}^{-1}[A \cdot F(u, v)] = A \cdot \mathfrak{F}^{-1}[F(u, v)] = A \cdot f(x, y).$$

Элементы изображения в пространственной области умножаются на ту же самую константу. Это следствие линейности ДПФ.

□

2) Предположим, необходимо обратить в ноль среднее значение изображения. В соответствии с (5) среднее значение задается величиной $F(0, 0)$. Если обнулить значение в частотной области и осуществить обратное преобразование, то среднее значение выходного изображения будет равно нулю. В предположении, что изображение было предварительно отцентрировано, понадобится т.н. фильтр-пробка вида

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } (u, v) = \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right); \\ 1, & \text{если } (u, v) \neq \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right). \end{cases}$$

□

Схема фильтрации изображена на рисунке 3.

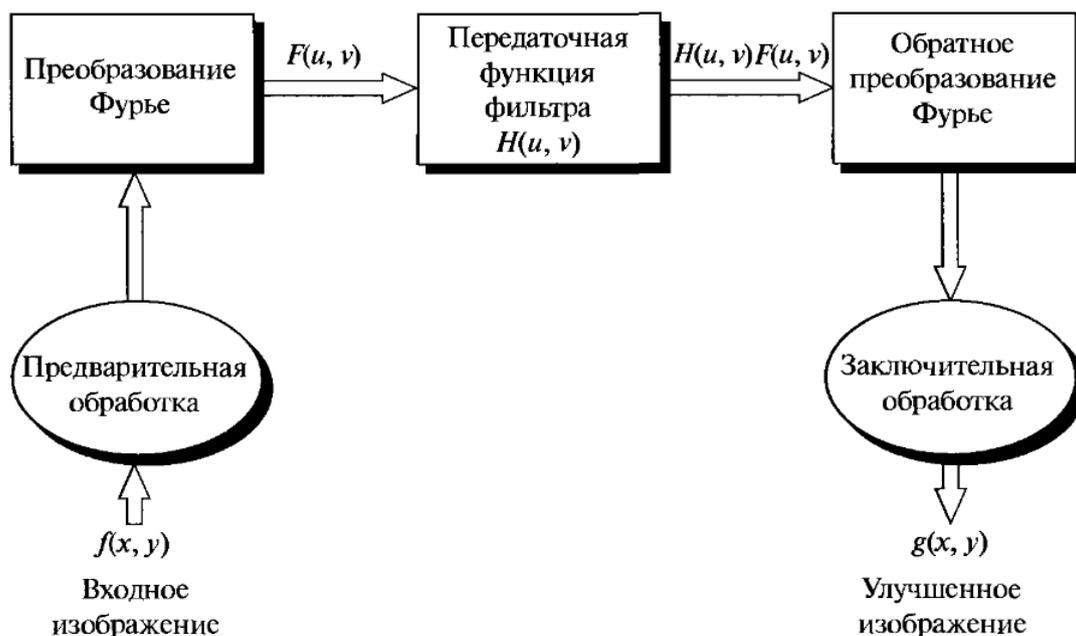


Рис. 3. Основные этапы фильтрации в частотной области

3 Соответствие между фильтрацией в пространственной области и фильтрацией в частотной области

Пространственная фильтрация изображения $f(x, y)$ основана на операции свертки:

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n),$$

где $h(x, y)$ — функция-маска, или пространственный фильтр изображения.

Если $F(u, v)$ и $H(u, v)$ обозначают соответственно Фурье-образы функций $f(x, y)$ и $h(x, y)$, то **теорема о свертке** утверждает, что функции $f(x, y) * h(x, y)$ и $F(u, v) \cdot H(u, v)$ образуют Фурье-пару, также, как и функции $f(x, y) \cdot h(x, y)$ и $F(u, v) * H(u, v)$.

Импульсная функция (импульс) $A\delta(x - x_0, y - y_0)$ с интенсивностью A , локализованным в точке с координатами (x_0, y_0) , — это изображение размером $M \times N$, состоящее из нулей за исключением точки с координатами (x_0, y_0) , в которой соответствующий пиксель имеет уровень яркости A .

Непосредственно из определения следуют равенства:

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)A\delta(x - x_0, y - y_0) = Af(x_0, y_0),$$

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)A\delta(x, y) = Af(0, 0).$$

Несмотря на внешнее сходство, левые части этих равенств не являются свертками!

Найдем Фурье-образ импульса интенсивности A , локализованного в начале координат:

$$F[\delta](u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} A\delta(x, y)e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = \frac{A}{MN},$$

где $0 \leq u \leq M - 1$, $0 \leq v \leq N - 1$.

Таким образом, Фурье-образом такого импульса оказывается константа.

С другой стороны, если использовать импульс в качестве пространственного фильтра, получим

$$A\delta(x, y) * f(x, y) = \frac{A}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A\delta(m, n)f(x - m, y - n) = \frac{A}{MN}f(x, y).$$

Получившиеся два равенства служат хорошей иллюстрацией к теореме о свертке.

Задача 4.

Каким будет результат частотной фильтрации фильтром $H(u, v) = A$, где $0 \leq u \leq M - 1$, $0 \leq v \leq N - 1$?

Решение:

Обратное ДПФ константы A из частотной области приведет к импульсу интенсивности A в пространственной области. Следовательно, в пространственной области следует рассмотреть свертку импульса с изображением. Такое рассмотрение приведет к умножению каждого пикселя на A .

□

Задача 5.

Передаточная функция гауссова низкочастотного фильтра в частотной области имеет вид

$$H(u, v) = Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}.$$

Покажите, что соответствующий фильтр в пространственной области имеет вид

$$h(x, y) = 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}.$$

Решение:

Решение этой задачи предполагает использование интегрального преобразования Фурье, которое определяется формулами

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi iux} dx$$

и

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du.$$

Заметим, что $D^2(u, v) = u^2 + v^2$ выражает квадрат расстояния точки с координатами (u, v) от начала координат. Пусть $w^2 := D^2(u, v) = u^2 + v^2$. Имеем:

$$H(w) = e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}}.$$

Обратное преобразование Фурье запишем в виде

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(w) e^{2\pi i w z} dw = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} e^{2\pi i w z} dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [w^2 - 4\pi i \sigma^2 w z]} dw. \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством

$$e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} e^{\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} = 1.$$

Подстановкой в интеграл получаем:

$$\begin{aligned} h(z) &= e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [w^2 - 4\pi i \sigma^2 w z - (2\pi)^2 \sigma^4 z^2]} dw = \\ &= e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [w - 2\pi i \sigma^2 z]^2} dw. \end{aligned}$$

Обозначаем $r := w - 2\pi i \sigma^2 z$, $dr = dw$. Имеем

$$h(z) = e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr.$$

Умножаем и делим правую часть на $\sqrt{2\pi}\sigma$:

$$h(z) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \right].$$

Выражение внутри скобок представляет собой интеграл от плотности гауссовского распределения, который, как известно, равен 1. Получаем, что

$$h(z) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2 z^2 \sigma^2}{2}},$$

или, заменяя z^2 на $x^2 + y^2$,

$$h(x, y) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2 \sigma^2 (x^2 + y^2)}.$$

Обратите внимание на расположение множителя σ^2 в пространственном и частотном фильтрах!

□

Задача 6.

Равенство

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

показывает связь передаточных функций низкочастотного и высокочастотного фильтров. Используя результат задачи 5, укажите, какой вид в пространственной области имеет гауссов фильтр высоких частот.

Решение:

Пространственный фильтр получается обратным преобразованием Фурье из соответствующего фильтра в частотной области. Последний найден в предыдущей задаче. Таким образом,

$$\begin{aligned} h_{hp}(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}[1 - H_{lp}(u, v)] = \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[1] - \mathfrak{F}^{-1}[H_{lp}(u, v)] = \delta(x, y) - \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2 \sigma^2 (x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Общий вид этой функции в одномерном варианте изображен на рисунке 4 (сверху — Гауссов низкочастотный и высокочастотный фильтры в частотной области, снизу — соответствующие низкочастотный и высокочастотный фильтры в пространственной области).

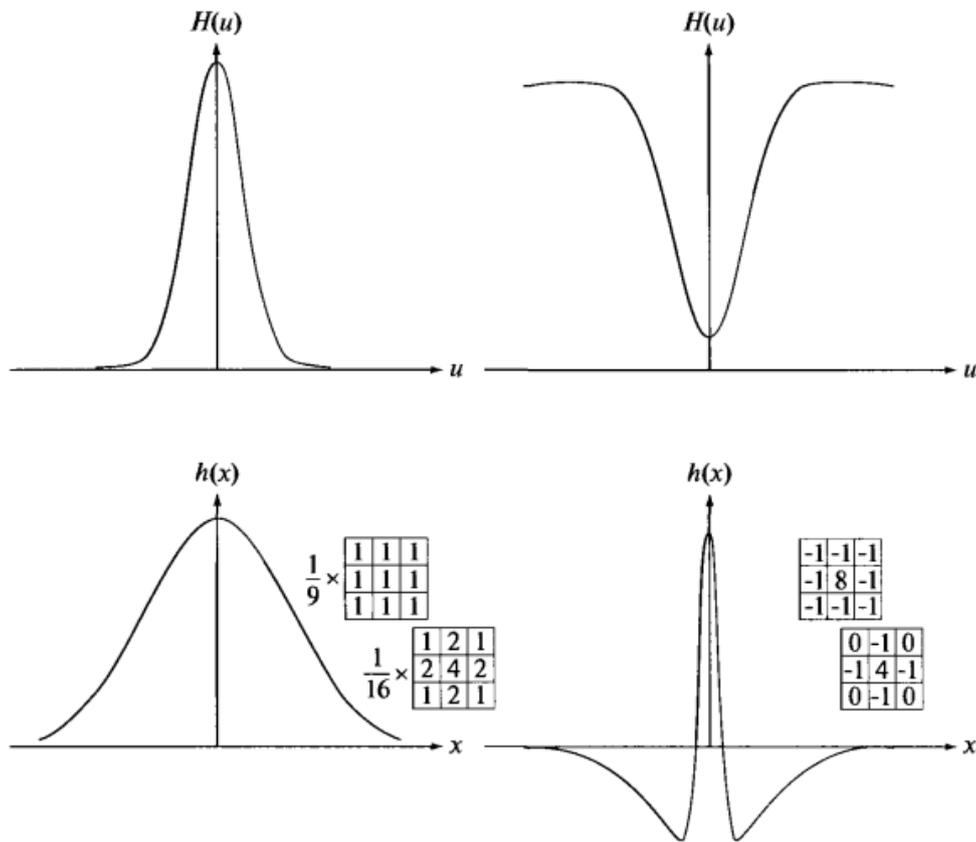


Рис. 4.

□

Задача 7.

а) Докажите равенство:

$$\mathfrak{F} [f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - M/2, v - N/2). \quad (6)$$

Решение:

Сначала заметим, что $(-1)^{x+y} = e^{i\pi(x+y)}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} [f(x, y)(-1)^{x+y}] &= \mathfrak{F} [f(x, y)e^{i\pi(x+y)}] = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y)e^{i\pi(x+y)}] e^{-2\pi i(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[f(x, y) e^{-2i\pi \left(-\frac{xM}{2M} - \frac{yN}{2N} \right)} \right] e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi \left(\frac{x \left(u - \frac{M}{2} \right)}{M} + \frac{y \left(v - \frac{N}{2} \right)}{N} \right)} = \\
&= F \left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2} \right).
\end{aligned}$$

Это равенство означает, что начало координат для Фурье-преобразования функции $f(x, y)(-1)^{x+y}$, т.е. та точка, где значение этого преобразования равно $F(0, 0)$, находится в точке с координатами $u = \frac{M}{2}$, $v = \frac{N}{2}$.

Умножение функции $f(x, y)$ на $(-1)^{x+y}$ приводит к сдвигу начала координат для ее образа $F(u, v)$ в точку с частотными координатами $\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$, которая является центром прямоугольника размером $(M \times N)$, занимаемого двумерным ДПФ, так называемого *частотного прямоугольника*.

□

б) Докажите соответствия:

$$f(x, y) e^{2\pi i(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0), \quad (7)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-2\pi i(u_0 x/M + v_0 y/N)}. \quad (8)$$

Решение:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F} \left[f(x, y) e^{2\pi i(u_0 x/M + v_0 y/N)} \right] = \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[f(x, y) e^{2\pi i(u_0 x/M + v_0 y/N)} \right] e^{-2\pi i(ux/M + vy/N)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i(x[u-u_0]/M+y[v-v_0]/N)} = \\
&= F(u - u_0, v - v_0).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathfrak{F}^{-1} \left[F(u, v) e^{-2\pi i(ux_0/M+vy_0/N)} \right] = f(x - x_0, y - y_0).$$

□

Задача 8.

Каково происхождение почти периодических ярких точек на горизонтальной оси в спектре на рисунке 5?

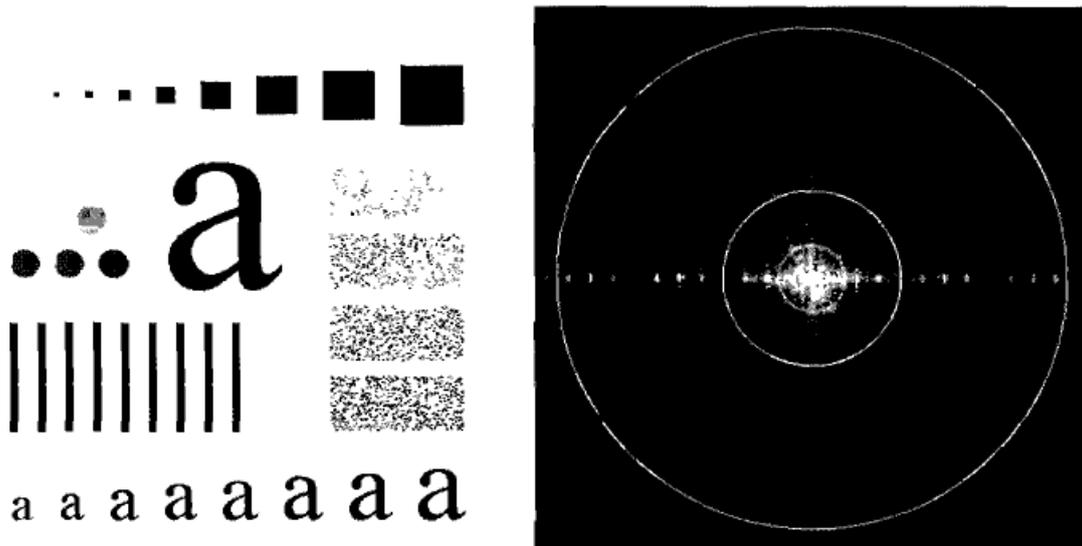


Рис. 5 Изображение размерами 500×500 пикселей и его Фурье-спектр. Наложённые круги имеют радиусы 5, 15, 30, 80 и 230 и заключают в себе 92,0, 94,6, 96,4, 98,0, 99,5% энергии изображения соответственно.

Ответ: Вертикальные полосы в нижней левой части рисунка.

□

Задача 9.

Каждый из пространственных фильтров на рисунке 6 имеет сильный пик в начале координат. Объясните происхождение этих пиков.

Решение:

На рисунке 6 представлены пространственные высокочастотные фильтры. Все они построены по схеме задачи 6. Обратное преобразование Фурье константы-единицы представляет собой единичный импульс в начале координат, которое на рисунках трансформировано в центр рисунка.

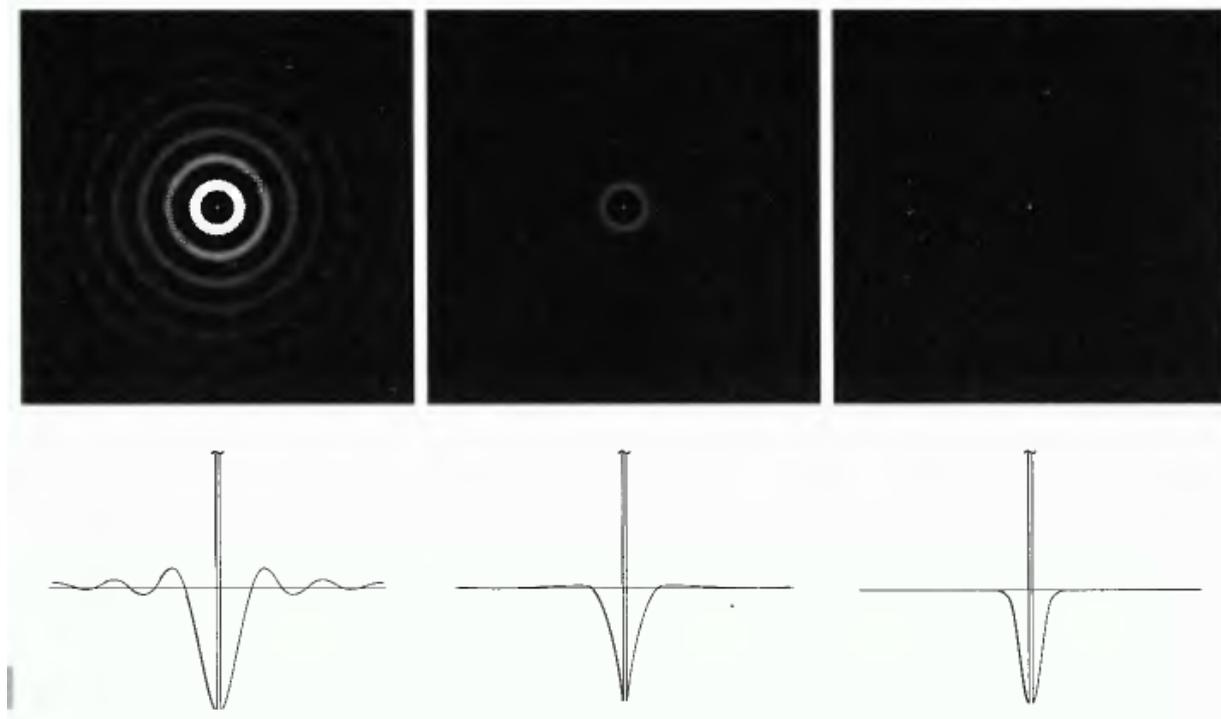


Рис. 6 Представление в пространственной области типичных высокочастотных фильтров: идеальный фильтр, фильтр Баттерворта, гауссов фильтр; внизу представлены соответствующие им профили яркости.

Представляет интерес рассмотрение функции $h(x, y)$ для идеальных фильтров с различными частотными срезами.

□

Задача 10.

Рассмотрим представленные изображения (рис. 7). Изображение справа получено следующим образом:

- (а) изображение слева умножено на $(-1)^{x+y}$;
- (б) вычислено ДПФ;
- (в) взято комплексное сопряжение Фурье-образа;
- (г) вычислено обратное ДПФ;

(д) вещественная часть полученного результата умножена на $(-1)^{x+y}$.

Объясните рисунок справа.

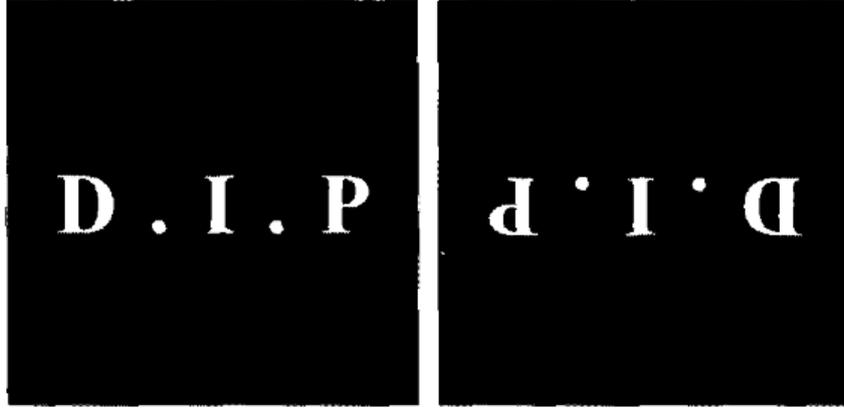


Рис. 7

Решение:

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1} \left[\overline{F(u, v)} \right] &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \overline{F(u, v)} e^{2\pi i (ux/M + vy/N)} = \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \overline{F(u, v) e^{-2\pi i (ux/M + vy/N)}} = \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \overline{F(u, v) e^{2\pi i (u(-x)/M + v(-y)/N)}} = \overline{f(-x, -y)}. \end{aligned}$$

Вещественные части комплексного числа и его сопряженного совпадают, поэтому полученное изображение можно описать как $f(-x, -y)$, симметричного исходному относительно центра.

□

Задача 11.

Покажите, что если передаточная функция фильтра $H(u, v)$ вещественная и центрально-симметричная, то и соответствующий пространственный фильтр $h(x, y)$ вещественный и центрально-симметричный.

Решение:

Если функция $H(u, v)$ вещественная и центрально-симметричная, то

$$H(u, v) = \overline{H(u, v)} = \overline{H(-u, -v)} = H(-u, -v).$$

Соответствующий фильтр в пространственной области

$$h(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)] = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) e^{2\pi i(ux/M+vy/N)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \overline{h(x, y)} &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \overline{H(u, v)} e^{-2\pi i(ux/M+vy/N)} = \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \overline{H(-u, -v)} e^{2\pi i(-ux/M-vy/N)} = \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) e^{2\pi i(ux/M+vy/N)} = h(x, y), \end{aligned}$$

то есть фильтр $h(x, y)$ вещественный. Далее,

$$\begin{aligned} h(-x, -y) &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) e^{-2\pi i(ux/M+vy/N)} = \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(-u, -v) e^{2\pi i(ux/M+vy/N)} = \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) e^{2\pi i(ux/M+vy/N)} = h(x, y), \end{aligned}$$

то есть фильтр $h(x, y)$ обладает центральной симметрией.

□

Задача 12.

Доказать теорему о свертке для непрерывных функций одного переменного.

Доказательство:

Свертка непрерывных функций определяется интегралом с параметром

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x - s) ds.$$

Рассмотрим преобразование Фурье свертки

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}[(f * g)](u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s) ds \right] e^{-2\pi i u x} dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-s)e^{-2\pi i u x} dx \right] ds = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i u(s+t)} dt \right] ds = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi i u s} ds \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i u t} dt = F(u) \cdot G(u).
 \end{aligned}$$

□

Задача 13.

Рассмотрим представленные изображения (рис. 8). Изображение справа получено в результате низкочастотной фильтрации с помощью гауссова фильтра низких частот и последующего применения к результату высокочастотной фильтрации с помощью гауссова фильтра высоких частот. Размер изображения 420×344 и $D_0 = 25$ для каждого из фильтров.

- (а) Рассмотрим рисунок справа. Почему центральная часть кольца выглядит как сплошная яркая область, в то время как превалирующая часть изображения после фильтрации состоит из контуров вдоль внешней границы объектов (например, костей пальцев и запястья) с темными областями посередине? Другими словами, разве не следует ожидать потемнения области постоянной яркости внутри кольца в результате ВЧ-фильтрации, коль скоро ВЧ-фильтры уничтожают постоянную составляющую изображения?
- (б) Изменится ли результат, если поменять порядок применения фильтров?

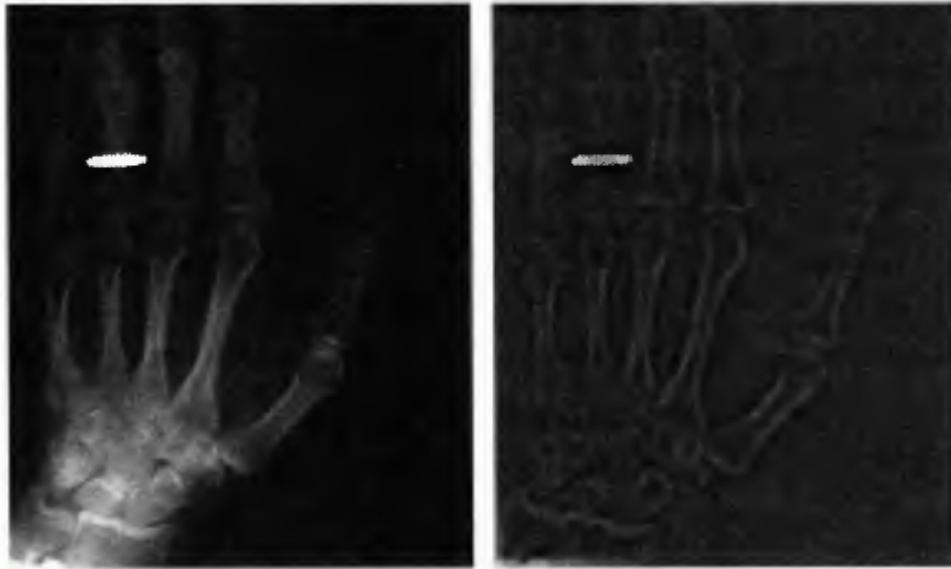


Рис. 8

Решение:

- (а) На самом деле кольцо имеет темную область в центре, результат ВЧ-фильтрации. НЧ-фильтр усреднил темную центральную область. Кольцо выглядит ярким, так как разрывы на границах намного интенсивнее, чем где бы то ни было на изображении, поэтому и усредненный серый уровень выглядит ярче.
- (б) Фильтрация с применением преобразования Фурье является линейным процессом. Порядок применения фильтров не влияет на результат.

□

Задача 14.

Пусть дано изображение размерами $M \times N$, и проводится эксперимент, состоящий в последовательном применении к изображению процедур НЧ-фильтрации с использованием одного и того же гауссова фильтра НЧ с заданной частотой среза D_0 . Ошибкой округления можно пренебречь. Пусть k_{\min} — наименьшее положительное число, представимое в компьютере, на котором проводится эксперимент.

- (а) Обозначим через K число произведенных процедур фильтрации. Каков будет результат при достаточно большом K ?
- (б) Получите выражение для *минимального* значения, гарантирующего получение результата пункта (а).

Решение:

(а) Однократное применение фильтра описывается равенством

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}F(u, v).$$

После K -кратного применения фильтра имеем

$$G_K(u, v) = e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2}F(u, v).$$

Если K достаточно велико, гауссов НЧ-фильтр будет давать тот же эффект, что фильтр-пробка, пропускающий только $F(0, 0)$. Как было показано, $F(0, 0)$ равно среднему значению яркостей изображения в целом.

Таким образом, существует такое K , что после K -кратного применения гауссова НЧ-фильтра получаем изображение-константу. Значения яркостей каждого пикселя будут равны среднему значению яркостей всего изображения.

(б) Предполагая, что значения частот лежат в единичном интервале, требуется подобрать K так, чтобы

$$H_K(u, v) = e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2} = \begin{cases} 1, & (u, v) = (0, 0), \\ 0, & (u, v) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Учитывая двоичную форму записи чисел в компьютере, требуемый эффект будет достигнут при выполнении неравенства

$$e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2} < \frac{1}{2}k_{\min}$$

для всех $D(u, v) > 0$. Решаем неравенство:

$$K > -\frac{\ln(0, 5k_{\min})}{D^2(u, v)/2D_0^2} > -\frac{D_0^2 \ln(0, 5k_{\min})}{D^2(u, v)}.$$

Так как u и v — натуральные числа, то последнее неравенство будет выполнено для всех $D^2(u, v)$, если оно выполняется для минимального значения $D^2(u, v) = 1$. Таким образом, должно выполняться неравенство

$$K > -2D_0^2 \ln(0, 5k_{\min}).$$

Это неравенство гарантирует действие фильтра как фильтра-пробки, пропускающего только $F(0, 0)$. В пространственной области получается изображение с равномерной яркостью.

□

Задача 15.

Сформирован НЧ пространственный фильтр, действие которого в каждой точке (x, y) сводится к усреднению значений в четырех ближайших к ней точках, исключая её саму.

(а) Найдите эквивалентный фильтр в частотной области.

(б) Покажите, что это действительно низкочастотный фильтр.

Решение:

(а) Пространственный фильтр записывается следующим образом:

$$g(x, y) = \frac{1}{4} [f(x, y + 1) + f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y - 1)].$$

Свойства преобразования Фурье позволяют записать соответствующий фильтр в частотной области:

$$G(u, v) = \frac{1}{4} \left[e^{\frac{2\pi i v}{N}} + e^{\frac{2\pi i u}{M}} + e^{-\frac{2\pi i u}{M}} + e^{-\frac{2\pi i v}{N}} \right] F(u, v),$$

где

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi u}{M} \right) + \cos \left(\frac{2\pi v}{N} \right) \right]$$

— передаточная функция фильтра в частотной области.

(б) Для обоснования того, что получившийся фильтр является низкочастотным, представим передаточную функцию в центрированном виде

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi(u - M/2)}{M} \right) + \cos \left(\frac{2\pi(v - N/2)}{N} \right) \right].$$

Дальнейшее обоснование можно провести графически. Для упрощения можно ограничиться графиком одного слагаемого.

□

Задача 16.

Приближенное вычисление производной в дискретном случае включает вычисление разности $f(x + 1, y) - f(x, y)$.

- (а) Найдите передаточную функцию фильтра $H(u, v)$ для осуществления эквивалентной операции в частотной области.
- (б) Покажите, что фильтр $H(u, v)$ есть фильтр высоких частот.

Решение:

- (а) В условии задачи указано преобразование по x . Аналогично может быть выражено преобразование по y . Суммарная фильтрация записывается в виде

$$g(x, y) = f(x + 1, y) - f(x, y) + f(x, y + 1) - f(x, y).$$

Из (8) получаем

$$\begin{aligned} G(u, v) &= F(u, v)e^{2\pi iu/M} - F(u, v) + F(u, v)e^{2\pi iv/N} - F(u, v) = \\ &= \left[e^{2\pi iu/M} - 1 \right] F(u, v) + \left[e^{2\pi iv/N} - 1 \right] F(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H(u, v) &= e^{2\pi iu/M} - 1 + e^{2\pi iv/N} - 1 = \\ &= e^{\pi iu/M} \left[e^{\pi iu/M} - e^{-\pi iu/M} \right] + e^{\pi iv/N} \left[e^{\pi iv/N} - e^{-\pi iv/N} \right] = \\ &= 2i \left[\sin \left(\frac{\pi u}{M} \right) e^{\pi iu/M} + \sin \left(\frac{\pi v}{N} \right) e^{\pi iv/N} \right]. \end{aligned}$$

- (б) Запишем $H(u, v)$ в центрированном виде

$$H_1(u, v) = 2i \left[\sin \left(\frac{\pi(u - M/2)}{M} \right) e^{\pi iu/M} + \sin \left(\frac{\pi(v - N/2)}{N} \right) e^{\pi iv/N} \right].$$

Для обоснования того, что полученный фильтр высокочастотный, можно рассмотреть графический профиль функции.

□

Задача 17.

Рассмотрим представленную последовательность изображений (рис. 9). Изображение слева - рентгеновский снимок печатной платы. Следующие за ним изображения суть результаты 1-кратного, 10-кратного и 100-кратного повторения процедуры фильтрации с использованием гауссова высокочастотного фильтра с $D_0 = 30$.

- (а) Вид изображений наводит на мысль, что после некоторого количества повторений результаты перестают меняться. Так ли это?

Пусть k_{\min} — наименьшее положительное число, представимое в компьютере, на котором проводится эксперимент.

- (б) Найдите минимальное количество итераций, после выполнения которых изображение перестает меняться.

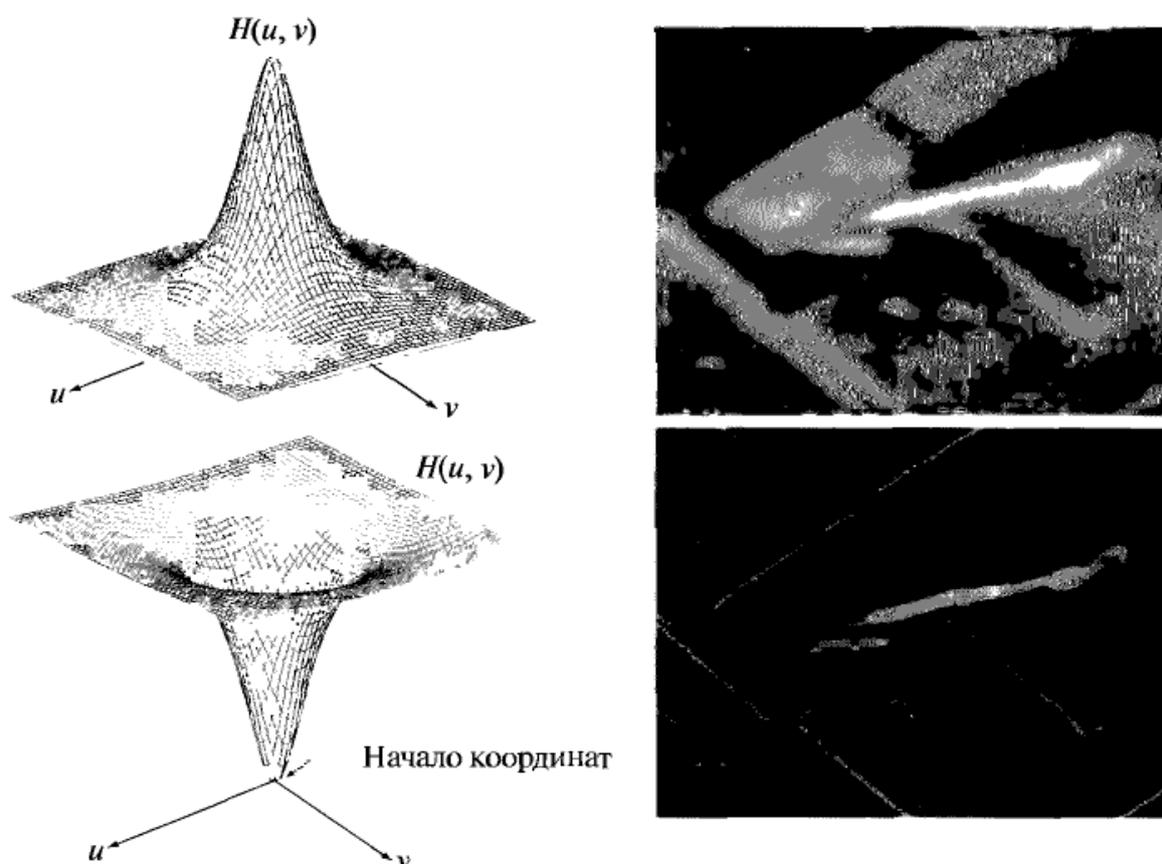


Рис. 9

Решение:

(а) Правильный ход решения через выражение

$$G_K(u, v) = H_K(u, v)F(u, v) = \left[1 - e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2}\right] F(u, v),$$

то есть K -кратное применение ВЧ-фильтра описывается как 1 минус K -кратное применение соответствующего НЧ-фильтра.

Решение через возведение в K -ю степень передаточной функции гауссовского ВЧ-фильтра приводит к нереализуемым вычислениям.

(б) При достаточно большом K получится фильтр-пробка, который превращает $F(0, 0)$ в ноль. Вычислите $F(0, 0)$. Таким образом, получится изображение с нулевым средним значением уровней яркостей, что возможно лишь при наличии пикселей с отрицательными значениями уровней яркостей.

В реальном эксперименте получится черное однотоновое изображение.

Формальное решение повторяет решение задачи 14.

Определяем K так, чтобы

$$H_K(u, v) = 1 - e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2} = \begin{cases} 0, & (u, v) = (0, 0), \\ 1, & (u, v) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Ответ совпадает с ответом задачи 14.

□

Задача 18.

Как показывает рисунок 10, совместное использование процессов фильтрации с усилением высоких частот и эквализации гистограммы является эффективным методом повышения резкости и улучшения контраста.

(а) Влияет ли порядок процедур на окончательный результат?

(б) Какую процедуру целесообразнее применять первой?

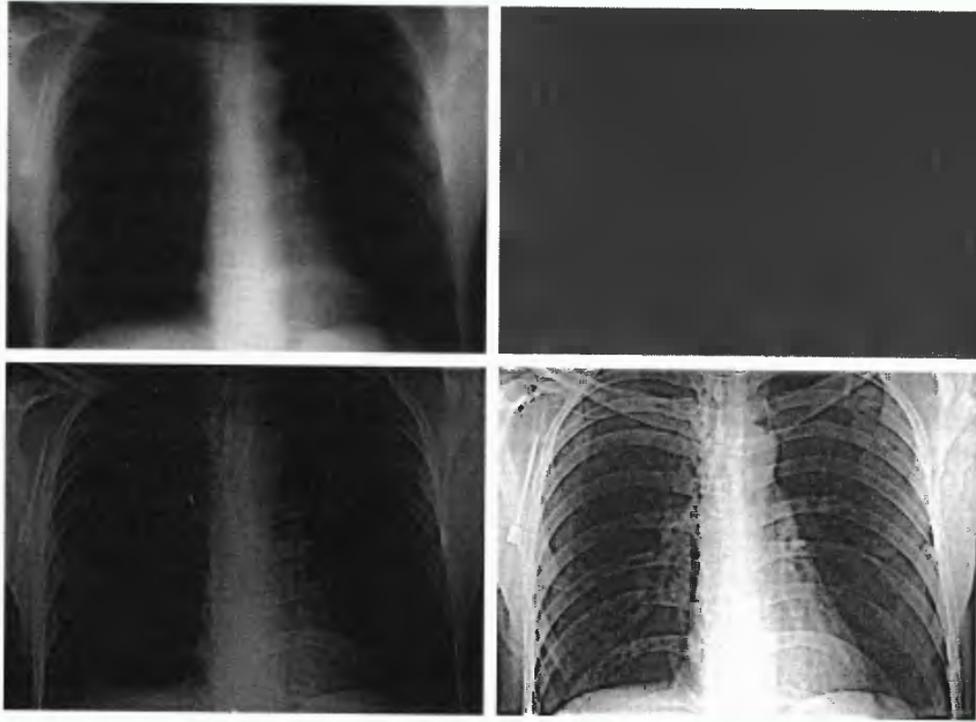


Рис. 10 Рентгеновский снимок грудной клетки (слева, сверху). Результат высокочастотной фильтрации с использованием фильтра Баттерворта (справа, сверху). Результат фильтрации с усилением высоких частот (слева, снизу). Результат применения метода эквализации гистограммы к фильтрации с усилением высоких частот (справа, снизу).

Теоретическое введение.

В результате высокочастотной фильтрации получаются темные изображения. Это связано с тем, что ВЧ-фильтры уничтожают $F(0, 0)$, т. е. среднее значение фильтрованного изображения становится равным 0.

Для улучшения качества изображения применяется *ВЧ-фильтрация с подъемом частотной характеристики*. Этот метод обобщает метод *нерезкого маскирования* в пространственной области.

Нерезкое маскирование — это формирование резкого изображения путем вычитания из оригинала его сглаженной копии.

Метод нерезкого маскирования описывается формулой

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_l(x, y),$$

и в частотной области совпадает с ВЧ-фильтрацией.

Метод ВЧ-фильтрации с подъемом частотной характеристики обобщает метод нерезкого маскирования и описывается формулой

$$f_{hb}(x, y) = Af(x, y) - f_{lp}(x, y),$$

с некоторой константой $A \geq 1$. Последнее равенство можно записать в виде

$$f_{hb}(x, y) = (A - 1)f(x, y) + f(x, y) - f_{lp}(x, y),$$

или

$$f_{hb}(x, y) = (A - 1)f(x, y) + f_{hp}(x, y).$$

Таким образом, основа метода ВЧ-фильтрации с подъемом частотной характеристики — ВЧ-фильтрация. При $A = 1$ получается обычная ВЧ-фильтрация.

В частотной области соответствующая формула выглядит так:

$$H_{hb}(u, v) = (A - 1) + H_{hp}(u, v).$$

Последнее равенство оправдывает название метода: передаточная функция (частотная характеристика) ВЧ-фильтра поднимается на величину $(A - 1) \geq 0$.

Обобщением метода ВЧ-фильтрации с подъемом частотной характеристики является *фильтрация с усилением высоких частот*. Она описывается формулой

$$H_{hfe}(u, v) = a + bH_{hp}(u, v),$$

где $a \geq 0$ и $b > a$.

Метод ВЧ-фильтрации с подъемом частотной характеристики получается при $a = A - 1$ и $b = 1$. При $b > 1$ происходит усиление высоких частот.

Изображение с узким диапазоном яркостей может быть существенно улучшено методом *эквализации гистограммы*.

Этот метод основан на вероятностных идеях.

Предположим пока, что значения, отражающие яркость элементов изображения, распределены непрерывно в диапазоне $[0, 1]$, при этом значение $r = 0$ соответствует черному, а $r = 1$ — белому.

Рассмотрим преобразование вида

$$s = T(r),$$

причем функция $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и монотонно возрастает, так что имеет обратную функцию. Будем рассматривать r и s как случайные величины с плотностями распределения p_r и p_s соответственно. В курсе теории вероятностей доказывается формула связи плотностей:

$$p_s(t) = p_r(t) |(T^{-1}(t))'| = p_r(t) \cdot (T'(t))^{-1},$$

с учетом возрастания функции $T(\cdot)$.

Рассмотрим преобразование, в котором в качестве функции выступает функция распределения случайной величины r :

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(t) dt.$$

Для этого преобразования получаем

$$p_s(t) = p_r(t) \cdot (T'(t))^{-1} = p_r(t) \cdot p_r(t)^{-1} = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

оказалось, что случайная величина имеет *равномерное распределение*.

Для дискретных случайных величин плотность заменяется вероятностью значения, а интеграл - суммой. Вероятность появления пикселя со значением яркости r_k определяется дробью из гистограммы

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1.$$

Здесь n — общее число пикселей на изображении, n_k — число точек яркости r_k , L — количество уровней яркости изображения.

Дискретным аналогом функции распределения является сумма

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1.$$

Преобразование по предыдущей формуле называется *эквализацией (выравниванием) гистограммы*.

См. рисунки 11 — 12.

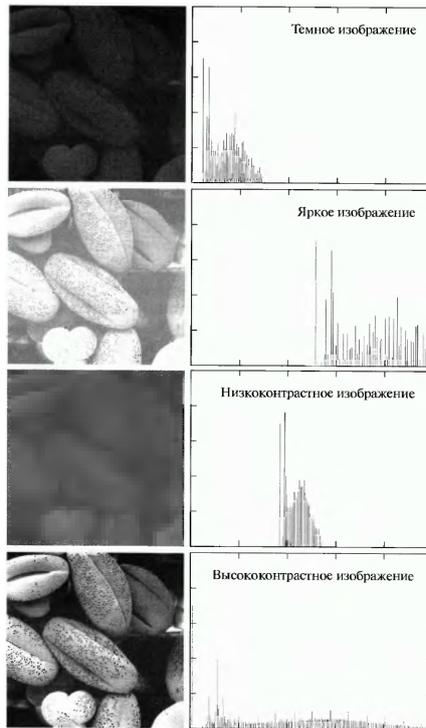


Рис. 11 Четыре основных типа изображения: темное, светлое, низкоконтрастное, высококонтрастное.

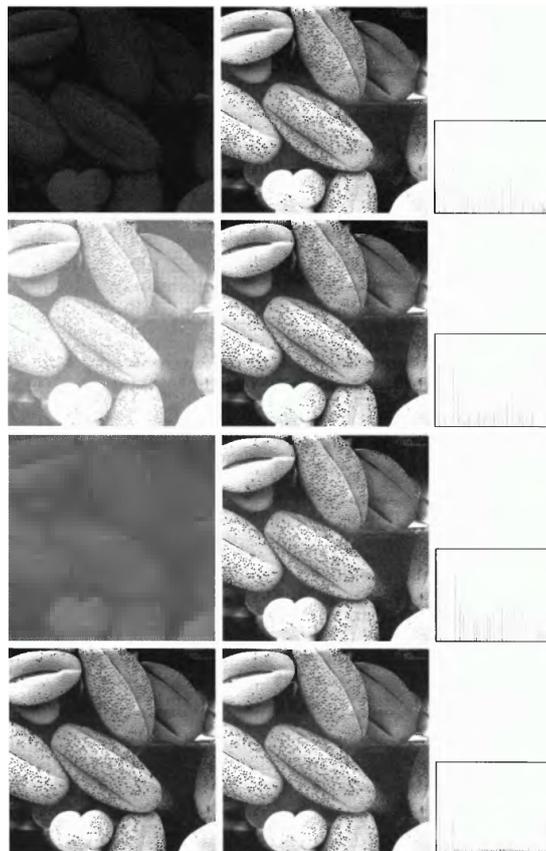


Рис.12 Изображения из рисунка 11. Результаты эквализации гистограммы. Гистограммы изображений после обработки.

Решение:

(а) Фильтрация в пространственной области описывается формулой

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y),$$

где h — пространственный фильтр, f — исходное изображение. Эквиализация T гистограммы полученного изображения дает

$$g_1(x, y) = T[g(x, y)] = T[h(x, y) * f(x, y)].$$

Если эквализацию гистограммы сделать вначале, то получим

$$\tilde{g}(x, y) = T[f(x, y)], \quad \tilde{g}_1(x, y) = h(x, y) * T[f(x, y)].$$

Преобразование T нелинейное и, вообще говоря, $g_1(x, y) \neq \tilde{g}_1(x, y)$, так что порядок действий меняет результирующее изображение.

(б) Высокочастотная фильтрация резко уменьшает контрастность изображения. Усиление высоких частот улучшает изображение, но это улучшение незначительно (см. рис. 10). Если Эквализацию гистограммы провести первой, то Высокочастотная фильтрация нейтрализует это улучшение. Поэтому целесообразно сначала провести Высокочастотную фильтрацию, а затем сделать Эквализацию гистограммы.

□

Задача 19.

Можно ли использовать преобразование Фурье для вычисления модуля градиента?

Решение:

В обработке изображения $f(x, y)$ градиент f в точке (x, y) определяется как двумерный вектор-столбец

$$\nabla f = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Модуль этого вектора определяется

$$|\nabla f| = [G_x^2 + G_y^2]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Компоненты вектора градиента являются линейными операторами, но модуль вектора нет. Часто градиентом называют его модуль.

Из-за большого объема вычислений часто заменяют вычисление модуля приближенным значением

$$|\nabla f| = |G_x| + |G_y|.$$

На рисунке 13 представлен 3×3 – фрагмент изображения. Центральной точкой выбрана z_5 .

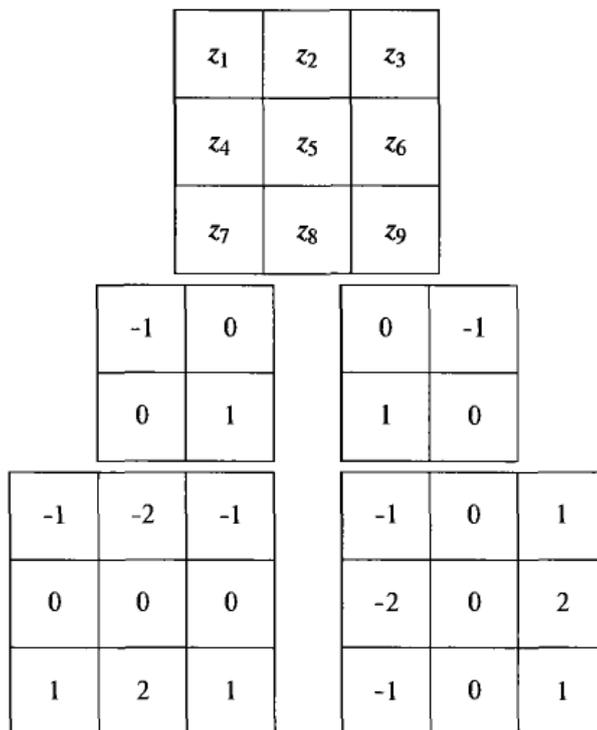
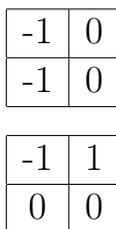


Рис. 13 Область изображения размерами 3×3 элемента (z_1, \dots, z_9 – значения яркости соответствующих пикселей под маской) и маски, используемые для вычисления градиента в точке, отмеченной z_5 . Суммы коэффициентов по каждой из масок равны нулю.

Простейшие приближения первой производной по формулам

$$G_x = z_8 - z_5, \quad G_y = z_6 - z_5$$

приводят к маскам



Во второй строке рисунка 13 представлены маски перекрестного градиентного оператора Робертса, в котором

$$G_x = z_9 - z_5 \quad G_y = z_8 - z_6$$

и

$$|\nabla f| \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|.$$

Однако маски четного размера реализовывать неудобно. Последняя строка рисунка 13 представляет маски оператора Собела. Они приближают градиент по формуле

$$|\nabla f| \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + \\ + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|.$$

Разность третьей и первой строки левого квадрата приближает значение производной по направлению x , а разность третьего и первого столбца — производную по y . Центральным точкам приписан вес 2 для придания им большей значимости, увеличивает гладкость изображения.

Градиент используют в техническом контроле для обнаружения дефектов.

Пример применения градиента в техническом контроле представлен на рисунке 14.

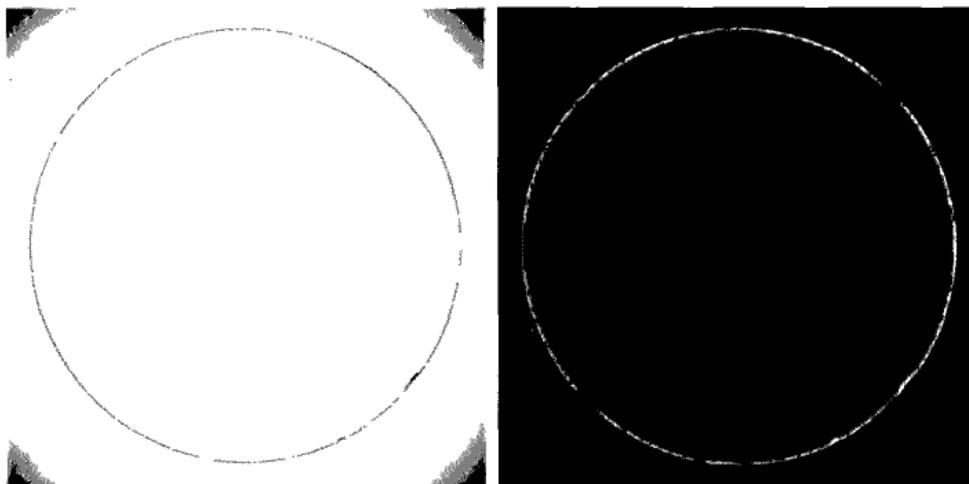


Рис. 14 Оптическое изображение контактной линзы (дефекты видны на краях окружности в позициях «4 и 5 часов»). Градиент, полученный оператором Собела.

Преимущество второго изображения — удалены слабо меняющиеся изменения яркостей, упрощена задача автоматического контроля. Градиентная обработка подчеркивает мелкие дефекты, которые трудно обнаружить на полутоновом изображении. Градиентные фильтры относятся к пространственным.

Ответ отрицательный. Преобразование Фурье — линейный оператор, возведение в степень, переход к модулям — операции нелинейные. Преобразование Фурье можно использовать для вычисления производных (задача 16), но нельзя применять для таких операций, как возведение в квадрат, извлечение квадратного корня, переход к абсолютным значениям. Таким образом, градиентные фильтры относятся к пространственным.

□

Задача 20.

Начните с маски для дискретного приближения лапласиана на рисунке 15 и получите фильтр в частотной области, реализующий это приближение.

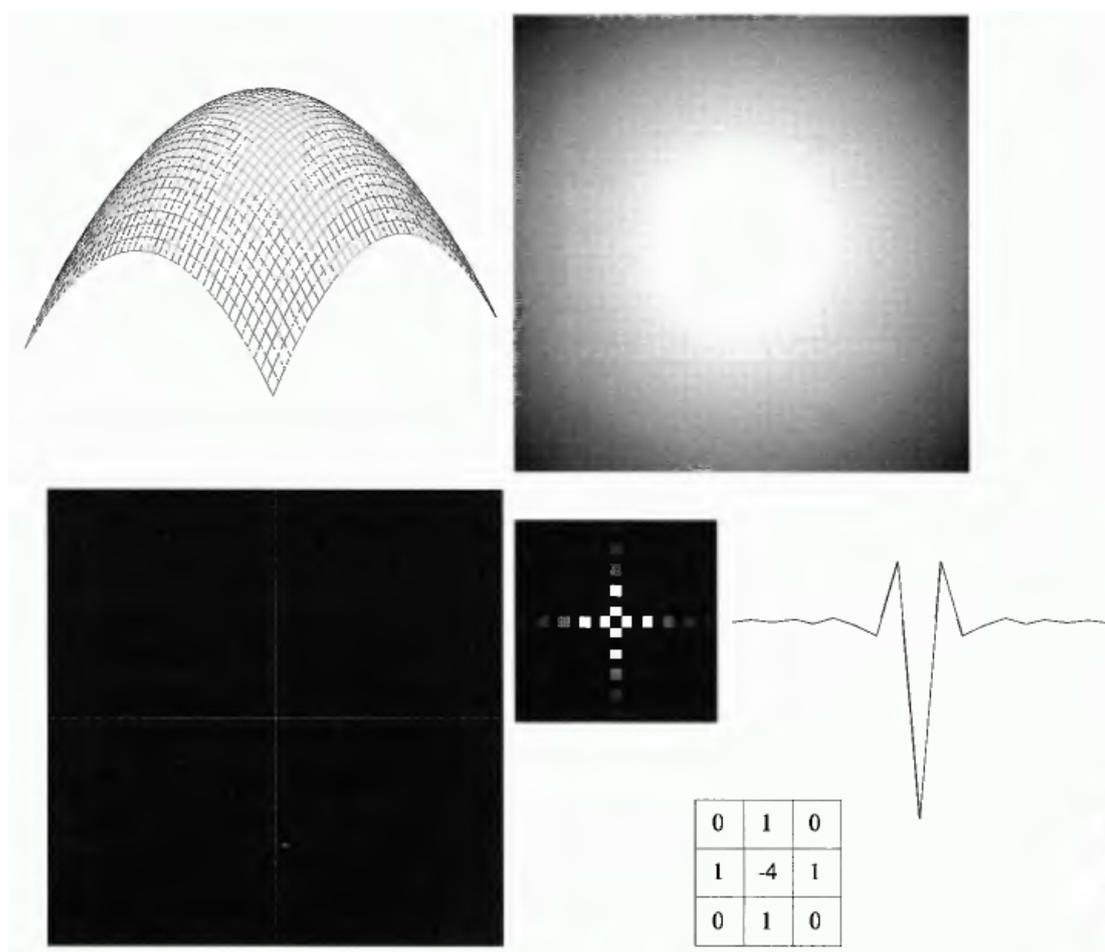


Рис. 15 Трехмерное изображение лапласиана в частотной области. Полутонное изображение. Лапласиан в пространственной области, полученный с применением обратного ДПФ к полутонному изображению. Увеличенный центральный фрагмент. Профиль яркости, проходящий через центр фрагмента. Маска лапласиана.

Решение:

Лапласиан в пространственной области имеет соответствующий фильтр в частотной области

$$H(u, v) = -(u^2 + v^2).$$

В соответствии с маской лапласиана изображение преобразуется по формуле

$$g(x, y) = [f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1)] - 4f(x, y).$$

В частотной области

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v),$$

где

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \left[e^{\frac{2\pi i u}{M}} + e^{-\frac{2\pi i u}{M}} + e^{\frac{2\pi i v}{N}} + e^{-\frac{2\pi i v}{N}} - 4 \right] = \\ &= 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi u}{M} \right) + \cos \left(\frac{2\pi v}{N} \right) - 2 \right]. \end{aligned}$$

После центрирования фильтр примет вид

$$H_c(u, v) = 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi(u - M/2)}{M} \right) + \cos \left(\frac{2\pi(v - N/2)}{N} \right) - 2 \right].$$

Сравнить $H_c(u, v)$ и

$$H_{c1}(u, v) = -[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2].$$

С помощью графического редактора можно построить соответствующую поверхность.

□

Задача 21.

Используя передаточную функцию высокочастотного фильтра Баттерворта порядка n , сконструируйте гомоморфный фильтр. Этот фильтр должен иметь характерную форму, показанную на рисунке 16, и содержать те же параметры, что и на рисунке.

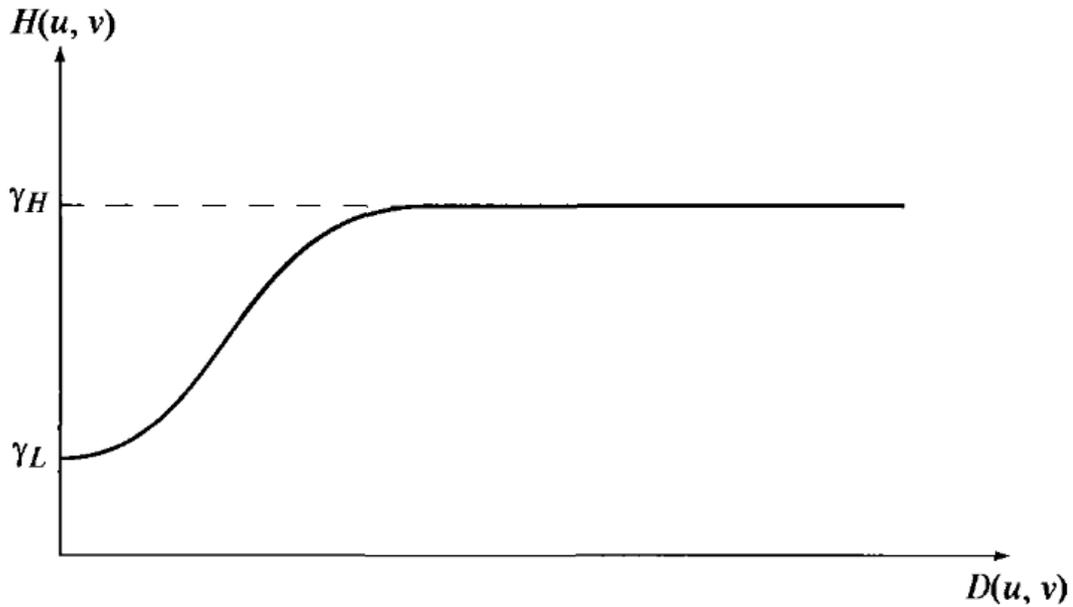


Рис. 16

Решение:

Теоретическое введение. Функцию $f(x, y)$ можно характеризовать двумя компонентами:

- 1) величиной светового потока $i(x, y)$, который падает на наблюдаемую сцену от некоторого внешнего источника, назовем эту величину *освещенностью* (измеряется в люменах)³.
- 2) относительной долей $r(x, y)$ светового потока, отраженного от объектов этой сцены, т.н. *коэффициент отражения*.

Функция-изображение

$$f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y), \quad (9)$$

$$0 < i(x, y) < \infty$$

и

$$0 < r(x, y) < 1. \quad (10)$$

В неравенстве (10) 0 — полное поглощение, 1 — полное отражение. $i(x, y)$ зависит от источника освещения, $r(x, y)$ определяется свойствами объектов изображаемой сцены.

³1 лм = 1 кд × 1 ср. Люмен (русское обозначение: лм; международное: lm) — единица измерения светового потока в Международной системе единиц (СИ), является световой величиной. Один люмен равен световому потоку, испускаемому точечным изотропным источником, с силой света, равной одной канделе, в телесный угол величиной в один стерадиан. Полный световой поток, создаваемый изотропным источником, с силой света одна кандела, равен 4π люменам.

Если изображение формируется в проходящем сквозь наблюдаемый объект потоке света (рентген), то в качестве $r(x, y)$ выступает *коэффициент пропускания*.

Примеры:

А) освещенность:

ясный день, Солнце — 90000 лм/м^2 ,

пасмурный день — 10000 лм/м^2 ,

безоблачная ночь, полнолуние — $0,1 \text{ лм/м}^2$,

норма для служебного помещения — 1000 лм/м^2 .

Б) отражение:

черный бархат — $r(x, y) = 0,01$,

нержавеющая сталь — $r(x, y) = 0,65$,

поверхность белой стены — $r(x, y) = 0,80$,

снег — $r(x, y) = 0,93$.

При переходе в частотную область логарифмируется соотношение (9):

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

В силу линейности преобразования Фурье

$$\mathfrak{F}\{z(x, y)\} = \mathfrak{F}\{\ln f(x, y)\} = \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\},$$

или

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v),$$

где $F_i(u, v)$ и $F_r(u, v)$ — Фурье-образы функций $\ln i(x, y)$ и $\ln r(x, y)$ соответственно.

Проводим фильтрацию в частотной области:

$$S(u, v) = H(u, v)Z(u, v) = H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v).$$

В пространственной области имеем

$$s(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{S(u, v)\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\} := \\
&:= i'(x, y) + r'(x, y)
\end{aligned}$$

Обработанное изображение

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y)} \cdot e^{r'(x, y)} := i_0(x, y) \cdot r_0(x, y)$$

Схема гомоморфной фильтрации представлена на рисунке 17.

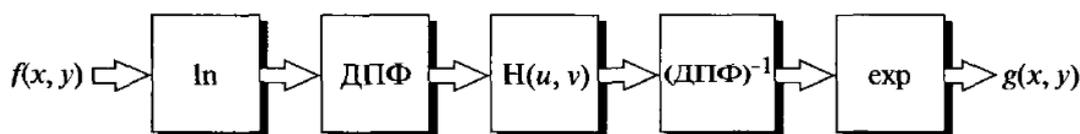


Рис. 17

Гомоморфная фильтрация иногда используется для редактирования изображений. Улучшение заключается в нормализации яркости изображения и увеличении его контрастности. Яркость изображения можно считать низкочастотной составляющей, так как освещенность меняется в пространстве достаточно медленно, а само изображение можно считать более высокочастотным сигналом. Если бы результирующим сигналом на фотографии была сумма этих составляющих, можно было бы разделить их высокочастотной фильтрацией, избавившись таким образом от перепадов освещенности. Но в реальной фотографии сигналы не складываются, а перемножаются. Путем гомоморфной обработки можно свести задачу к линейной. Для этого берется логарифм от произведения изображений равный сумме логарифмов множителей, к полученному сигналу применяется линейный фильтр высоких частот, а затем, для возвращения к исходному масштабу, берется экспонента.

Гомоморфная фильтрация также используется для удаления мультипликативных шумов/помех на изображении.

Передаточная функция гомоморфного фильтра конструируется так, чтобы происходило ослабление низких частот (они связаны с освещенностью), и усиление высоких, связанных с отражением.

На рисунке 16 профиль такого фильтра. Здесь $\gamma_L < 1$, и $\gamma_H > 1$.

Передаточная функция высокочастотного фильтра Баттерворта

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}.$$

Требуется модифицировать её так, чтобы $H(u, v) = \gamma_L$ при $D(u, v) = 0$, и стремилась к γ_H при $D(u, v) \rightarrow \infty$.

Соответствующая модификация

$$H_g(u, v) = \gamma_L + \frac{\gamma_H - \gamma_L}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}.$$

Выбор показателя n регулирует крутизну наклона кривой перехода от γ_L к γ_H .

□

Задача 22.

При фильтрации изображения в частотной области в ряде случаев целесообразно дополнять нулями картинку в конце строк и столбцов. Изменится ли результат при окружении изображения бордюром из нулей?

Решение:

Даны два изображения $f(x, y)$ и $h(x, y)$ размерами $A \times B$ и $C \times D$ соответственно. Для применения частотной фильтрации их надо рассматривать как периодические с периодами P в направлении x и Q в направлении y . Выбор

$$P \geq A + C - 1$$

и

$$Q \geq B + D - 1$$

позволяет избежать ошибок перекрытия при вычислении двумерной свертки.

Такое искусственное увеличение периода осуществляется дополнением нулями исходного изображения, т. е. строятся черные полосы, обычно по правому и нижнему краям изображения:

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & 0 \leq x \leq A - 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0, & A \leq x \leq P \quad \text{или} \quad B \leq y \leq Q, \end{cases}$$

и

$$h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y), & 0 \leq x \leq C - 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0, & C \leq x \leq P \quad \text{или} \quad D \leq y \leq Q. \end{cases}$$

Добавление нулей устанавливает буфер-промежуток между периодами, которые возникают в ДПФ, и позволяет избежать искажений, связанных с наложениями периодов. Если изображение слева продублировать бесконечно много раз так, чтобы покрыть всю xy -плоскость, то получится клетчатая доска, каждый квадрат которой будет изображением и черным окаймлением. Если аналогичную операцию проделать с изображением справа, то результаты будут неразличимы. Таким образом, любая форма дополнения нулями по краям изображения дает одинаковый результат.

□

Задача 23.

Два представленных Фурье-спектра являются спектрами одного и того же изображения (рис.18). Спектр слева соответствует исходному изображению, спектр справа — дополненному нулями изображению.

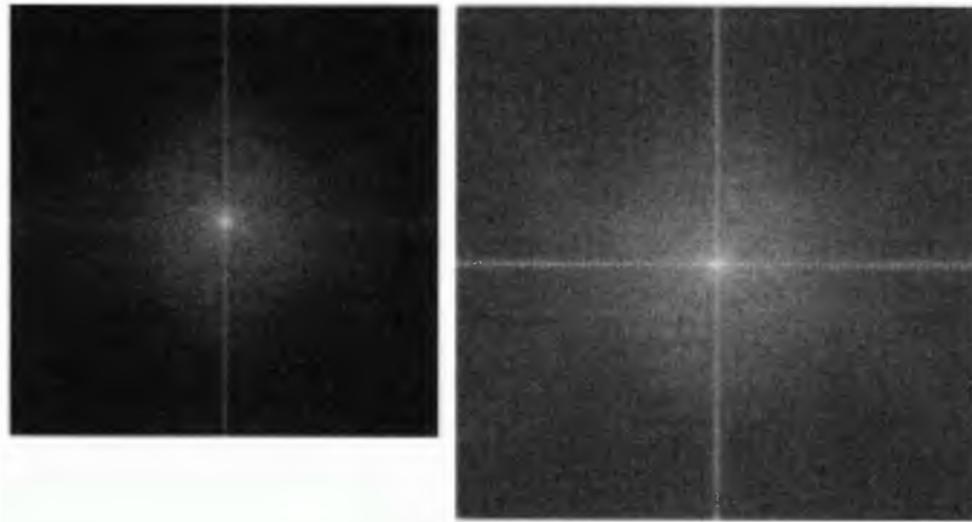


Рис. 18

- (а) Объясните разницу в общем уровне яркости.
- (б) Объясните значительный рост уровня сигнала вдоль вертикальной и горизонтальной осей в спектре справа.

Решение:

- (а) Добавление нулей увеличивает размер изображения, не изменяя уровни яркости исходного. Средний уровень яркости падает. Поэтому $F(0, 0)$, среднее значение уровней яркости изображения, справа меньше, чем соответствующее значение слева. Все остальные значения на спектре справа также уменьшаются и заполняют меньший диапазон значений. Общий контраст спектра справа ниже.
- (б) Дополнение нулями вводит сильные разрывы уровней яркости по границам исходного изображения. Возникают резкие вертикальные и горизонтальные края, обрамленные абсолютно черными (нулевыми) полосами. Эти резкие переходы усиливают горизонтальные и вертикальные оси спектра.

□

Задача 24.

Имеется набор изображений, полученных в результате астрономических наблюдений. Каждое изображение состоит из множества ярких разбросанных точек-звезд. Звезды едва различимы на фоне дополнительного освещения, возникающего в результате рассеяния света в атмосфере. Исходя из модели, в которой изображения представляют собой суперпозицию постоянной яркостной составляющей и множества импульсов, предложите основанную на гомоморфной фильтрации процедуру для выявления составляющих изображения, которые непосредственно связаны со звездами.

Решение:

Изображение изолированной звезды моделируется импульсом $\delta(x - x_0, y - y_0)$. Изображение в целом

$$f(x, y) = K \delta(x - x_0, y - y_0),$$

где K — освещенность изображения.

В соответствии со схемой гомоморфной фильтрации

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \ln f(x, y) = \ln K + \ln \delta(x - x_0, y - y_0) = \\ &= K' + \delta'(x - x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[z(x, y)] &= \mathfrak{F}[K'] + \mathfrak{F}[\delta'(x - x_0, y - y_0)] = \\ &= \delta(0, 0) + e^{-2\pi i\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)}.\end{aligned}$$

Для удаления общей освещенности можно применить фильтр-пробку

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = (0, 0), \\ 1, & (u, v) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Обратное преобразование Фурье и потенцирование выделяют исследуемую звезду.

□

Список литературы

- [1] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера. 2005. 1066 с.
- [2] Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. — 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 768 с.: ил.
- [3] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Изд. 2-е, испр. М.: Техносфера, 2007. — 856 с. ISBN 978-5-94836-135-2
- [4] Стивен Смит. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. Додэка XXI, 2008. — 720 с. ISBN 978-5-94120-145- 7, ISBN 0-750674-44-X

Учебное издание

Воропаева Наталия Владимировна,
Новиков Сергей Яковлевич,
Федина Мария Ефимовна

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет М. Е. Фединой

Подписано в печать 26.10.2015.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16.
Typeset by Л^AT_EX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ № 2663.

Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Отпечатано на УОП СамГУ