

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математического моделирования в механике

И.С.Загузов

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Допущено учебно-методическим советом по прикладной математике и информатике для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010200 «Прикладная математика и информатика» и по направлению 510200 «Прикладная математика и информатика»

Самара
Издательство «Универс групп»
2006

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета*

УДК 532.517

ББК 22.253

3 14

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф., проректор по научной работе Самарского государственного аэрокосмического университета **Е.В.Шахматов**;
д-р физ.-мат. наук, проф., декан механико-математического факультета Самарского государственного университета **В.И.Астафьев**.

Загузов, И.С.

3 14

Введение в математическое моделирование процессов аэрогидромеханики. Ч. II. [Текст] : учеб. пособие / И.С. Загузов. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2006. – 96 с.
ISBN 5-467-00093-4

В учебном пособии к спецкурсам «Введение в математическое моделирование в механике» и «Математическое моделирование в аэрогидромеханике» даны основные сведения о законах термодинамики и математических моделях термодинамических процессов. Приведены выводы уравнения энергии, КПД цикла Карно и циклов двигателей внутреннего сгорания и газотурбинных установок. Получены уравнения стационарного и нестационарного движений идеальной среды. Рассмотрены основы моделирования в опытах и теории подобия, приведены числа подобия, используемые в аэрогидромеханике.

Пособие предназначено для студентов механико-математических факультетов университетов (специальности «прикладная математика») и может быть полезно научным работникам в области аэрогидромеханики.

ISBN 5-467-00093-4

© Загузов И.С., 2006

© Самарский государственный университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ	4
1.1. Первый закон термодинамики	9
1.2. Уравнение энергии	29
1.3. Второй закон термодинамики. Цикл Карно	34
1.4. Энтропия. Теорема Карно	38
1.5. Основные соотношения, связывающие первый и второй законы термодинамики	46
1.6. Третий закон термодинамики	47
1.7. Циклы двигателей внутреннего сгорания и газотурбинных установок	49
1.8. Различные формы тепломассопереноса	56
II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЕ	59
2.1. Интеграл Бернулли уравнения движения	61
2.2. Теорема Бернулли	66
2.3. Интеграл Коши-Лагранжа для нестационарного движения идеальной среды	69
2.4. Интеграл Бернулли уравнения энергии	71
III. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОПЫТАХ. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ	72
3.1. Подобие аэрогидромеханических процессов	73
3.2. Первая теорема подобия	79
3.3. Физический смысл некоторых чисел подобия	85
3.4. Определяющие и определяемые числа подобия. Вторая и третья теоремы подобия	91
3.5. Перечень основных чисел подобия, используемых в аэрогидромеханике	94
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	96

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Теоретическая термодинамика – это наука о наиболее общих свойствах макроскопических физических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и о процессах перехода между этими состояниями. Теоретическая термодинамика строится на основе фундаментальных принципов (начал), которые являются обобщением многочисленных наблюдений и выполняются независимо от конкретной природы образующих систему тел. Поэтому закономерности и соотношения между физическими величинами, которыми оперирует термодинамика, имеют универсальный характер [1].

У теоретической термодинамики и теоретической механики есть определенная аналогия. Математическая основа теоретической механики: 3 закона Ньютона. Теоретическая термодинамика также базируется на 3-х законах или началах: *первое начало* или I-ый закон – закон сохранения и превращения энергии; *второе начало* или II-ой закон термодинамики – это закон, устанавливающий переход теплоты от тела с более высокой температурой к менее нагретому телу; *третье начало* или III-ий закон термодинамики – это тепловая теорема Нернста – о невозможности достижения абсолютного нуля.

Теоретическая термодинамика, так же, как и теоретическая механика, не принимает во внимание поведение и свойства отдельных молекул, т.е. молекулярное строение вещества. Поэтому общие термодинамические уравнения можно применять для описания поведения любых веществ – твердых тел, жидкостей, газов, паров и т.д. Термодинамическими величинами могут служить такие *параметры состояния*, как температура, давление, плотность, которые характеризуют свойства макроскопических тел.

Введем понятие термодинамической системы и термодинамического процесса. Под *термодинамической системой* понимают выделенное тело или совокупность тел, являющихся объектом термодинамического исследования. Изменение состояния термодинамической системы в результате влияния внешних воздействий (например, обмена энергией с окружающей средой) называют *термодинамическим процессом*.

Одной из основных физических величин, играющих важную роль не только в термодинамике, но и в механике в целом, является температура.

Температура – это термодинамический параметр (параметр состояния), характеризующий состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. При этом важно отметить, что температура как мера нагретости термодинамически равновесной системы определяет не только тепловое равновесие между телами, находящимся в тепловом контакте, что соответствует равенству температур этих тел, но и направление перехода теплоты от одного тела к другому.

Температуру нельзя измерить непосредственно, ее значение находят по изменению какого-либо свойства вещества, например, по увеличению объема тела с ростом его температуры. На этом свойстве теплового расширения жидкостей и газов основано действие ртутных, спиртовых и иных подобных термометров. Можно измерять температуру по изменению электрического сопротивления, давления, излучения и т.п. Так, например, в технике наиболее часто применяются термометры сопротивления, в которых при нагревании увеличивается электрическое сопротивление металлической нити, а также термопары, в которых измеряется напряжение термоэлектродвижущей силы, развивающегося при нагревании спая двух разнородных металлов.

Английский ученый Р. Гук и нидерландский естествоиспытатель Х. Гюйгенс установили две постоянные точки термометра: точку таяния льда и точку кипения воды. В 1742 году А. Цельсий предложил стоградусную шкалу термометра, на которой точка кипения воды отмечалась нулем, а точка таяния льда – числом 100. Сейчас мы часто пользуемся этой, но как бы перевернутой шкалой, которая по-прежнему носит имя шведского ученого.

Помимо шкалы Цельсия существует еще шкала Кельвина, где в качестве нижней постоянной точки термометра принят абсолютный нуль (0 К). Понятие абсолютного нуля было введено в 1848 году английским ученым У. Томсоном (Кельвином). Оно вытекает из второго начала термодинамики, а из третьего начала следует, что абсолютный нуль недостижим. Его значение – минус $273,15^{\circ}\text{C}$. С приближением температуры к абсолютному нулю стремятся к нулю все тепловые характеристики вещества: энтропия, теплоемкость и т.д.

Наш соотечественник М.В. Ломоносов также вплотную подошел к понятию абсолютного нуля. Он утверждал: «...невозможна высшая и последняя степень теплоты как движения. Наоборот, то же самое движение может настолько уменьшиться, что тело достигает, наконец, состояния совершенного покоя и никакое дальнейшее уменьшение движения невозможно. Следовательно, по необходимости должна существовать наибольшая и последняя ступень холода, которая должна состоять в полном прекращении... движения частиц».

В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960 год) в настоящее время можно применять только две температурные шкалы: *термодинамическую* (шкалу Кельвина) и *Международную практическую* (шкала Цельсия), градуированные соответственно в Кельвинах (K) и в градусах Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). В Международной практической шкале температура замерзания и кипения воды при давлении $1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ равна соответственно 0°C и 100°C (реперные точки).

Термодинамическая шкала определяется по одной реперной точке, в качестве которой взята *тройная точка воды* (температура, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодина-

мическом равновесии). Температура этой точки по термодинамической шкале равна $273,16\text{ K}$. Градус Цельсия равен Кельвину.

В термодинамической шкале температура замерзания воды равна $273,15\text{ K}$ (при том же давлении $1,013 \cdot 10^5\text{ Па}$, что и в Международной практической шкале).

Таким образом, по определению, температуры по термодинамической шкале ($^{\circ}\text{C}$) и по Международной практической шкале (K) связаны между собой следующим соотношением: $T, \text{K} = 273,15 + t, ^{\circ}\text{C}$.

Единицей температуры в Международной системе единиц (СИ) является $1\text{ K} = \frac{1}{273,16}$ части температуры тройной точки воды.

В Англии, США и некоторых других странах для измерения температуры принята шкала Фаренгейта ($^{\circ}\text{F}$), в которой за 0° принята температура таяния смеси льда с поваренной солью, а температура кипения воды равна 212°F ; при этом температура таяния льда по этой шкале получается равной 32°F и, следовательно, разность температур кипения воды и таяния льда по шкале Фаренгейта равна $212^{\circ} - 32^{\circ} = 180^{\circ}\text{F}$. Таким образом, 1°F равен $100/180 = 5/9^{\circ}\text{C}$.

Соотношение между шкалами Фаренгейта, Цельсия и Кельвина представлено на диаграмме 1.

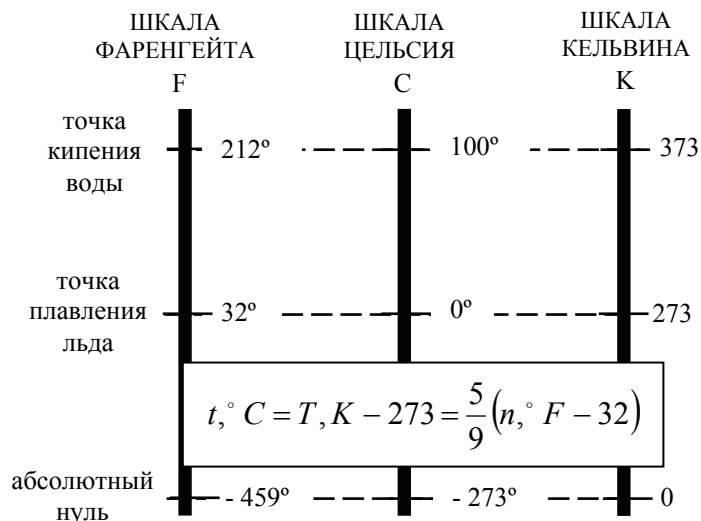


Диаграмма № 1

На диаграмме № 2 представлены температуры, встречающиеся в природе и технике. Левая шкала диаграммы логарифмическая. Это означает, что два соседних деления отличаются друг от друга по величине на порядок (т.е. в 10 раз). Права шкала – линейная, охватывает лишь небольшую, но наиболее интересную в практическом отношении часть верхней шкалы.

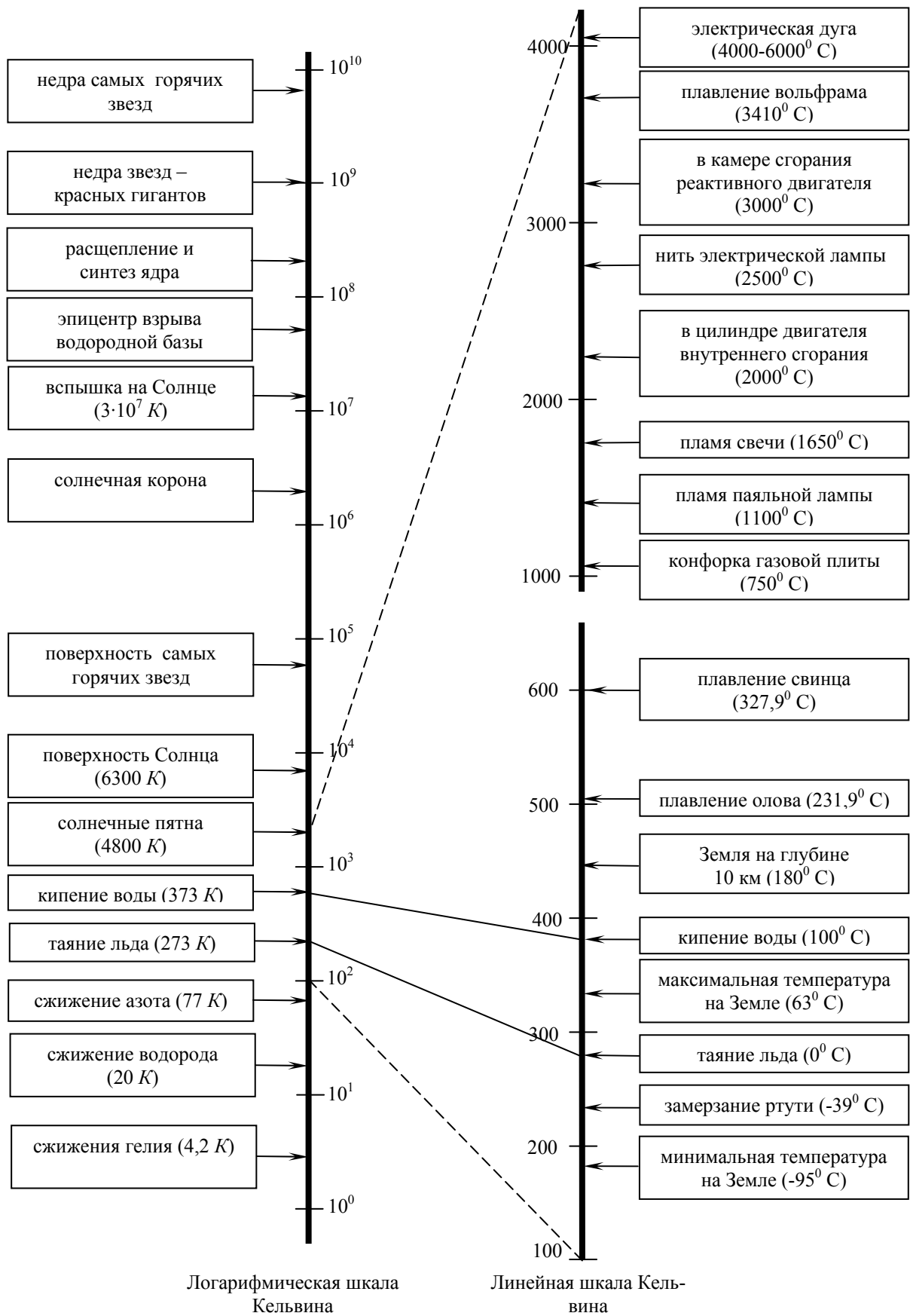


Диаграмма № 2

Другим важным параметром состояния является давление. Давлением p называется величина, численно равная силе, действующей по нормали к поверхности тела, отнесенной к единице площади этой поверхности.

Согласно молекулярно-кинетической теории идеальных газов давление является результатом упругих ударов о стенки сосуда хаотически и непрерывно движущихся молекул, число взаимных столкновений между которыми пренебрежимо мало по сравнению с числом соударений о стенки сосуда. В соответствии с этой теорией давление определяется по формуле

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}_{кв.}^2 = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \bar{v}_{кв.}^2}{2} = \frac{2}{3} n E_0 = \frac{2}{3} E_k.$$

Это уравнение называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов.

Здесь $n = \frac{N_A}{\mathbf{v}_\mu}$ – количество молекул в единице объема газа, $\frac{1}{\text{м}^3}$; N_A

– количество молекул в одном киломоле газа, $\frac{1}{\text{кмоль}}$ (число Авогадро),

$N_A = 6,022 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{кмоль}}$; \mathbf{v}_μ – объем одного киломоля газа, $\frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}$; m_0 – масса одной молекулы, кг; $\bar{v}_{кв.}$ – средняя квадратичная скорость молекул, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; E_0 – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа; $E_k = n E_0$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул.

Киломоль (кмоль) определяется как количество вещества, в котором содержится столько молекул, сколько содержится атомов в 12 кг изотопа углерода ^{12}C .

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов устанавливает связь между молекулярными величинами, такими, как масса и скорость молекул, и давлением, характеризующим газ как целое и непосредственно измеряемое в опыте. Так как давление газа определяется средней кинетической энергией его молекул в поступательном движении и их числом в единице объема, то давление можно рассматривать как статистическую величину.

Это уравнение получено для простой модели, где молекулы газа можно рассматривать как твердые упругие шарики незначительного размера, силы притяжения между которыми отсутствуют, а силы отталкивания появляются только при непосредственном столкновении молекул друг с другом или молекулами стенок сосуда. Движение молекул подчиняется законам классической механики Ньютона. Значительно разреженный газ, молекулы которого обладают перечисленными свойствами модели, называют

в молекулярно-кинетической теории *идеальным газом*. Единица давления в системе СИ – Паскаль. Паскаль равен давлению, вызываемому силой 1 Н , равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м^2 , перпендикулярной направлению силы: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

Вследствие большого диапазона давлений, применяемых в технике, от самых малых (давление в конденсаторах паровых турбин, в вакуумной технике и т.п.) до весьма больших (давление в прессах и т.п.), необходимо использовать десятичные кратные и дольные единицы СИ: $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$; $1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$; $1 \text{ мПа} = 10^{-3} \text{ Па}$ и т.д.

Третьим параметром состояния является плотность.

Плотностью ρ (кг/м^3) называется количество вещества, заключенное в единице объема. Следовательно, если m кг вещества занимают объем V м^3 , то плотность его $\rho = \frac{m}{V}$.

Величина, обратная плотности, называется удельным объемом V ($\text{м}^3/\text{кг}$):

$$V = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}.$$

Как удельный объем, так и плотность широко используются в теплотехнических расчетах; их значения, характеризующие теплофизические свойства веществ, приводятся в справочниках.

1.1. Первый закон термодинамики

Это закон сохранения и превращения энергии для произвольной массы газа, записываемый в виде: $dQ = dU + dL$, где Q – теплота, U – внутренняя энергия, L – механическая работа.

Для единицы массы (1 кг) газа закон сохранения энергии записывается так:

$$dq = du + dl. \quad (1.1)$$

Это уравнение называют также *уравнением притока тепла* [2].

Первый закон термодинамики формулируется следующим образом:

Подведенное тепло идет на изменение внутренней энергии и производство механической работы.

Внутренняя энергия – это энергия физической системы, зависящая от ее внутреннего состояния. Внутренняя энергия включает энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц (молекул, атомов, ионов и т.д.) и энергию взаимодействия этих частиц. В термодинамике и ее приложениях представляет практический интерес не само значение внутренней энергии, а ее приращение при изменении состояния системы, т.к. оно не

зависит от характера процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями системы.

Если в процессе происходит химическое превращение, то добавляется еще энергия химических превращений.

Механическую работу в термодинамическом процессе можно представить как работу расширения газа:

$$dl = p dv, \quad (1.2)$$

где p – давление, v – здесь и далее удельный объем (объем единицы массы газа); $v = \frac{1}{\rho}$, ρ – плотность.

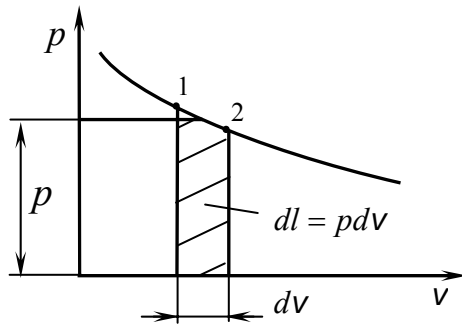


Рис. 1

В силу того, что в теории машин главная роль отводится работе, то термодинамические процессы удобно рассматривать в системе координат " $p-v$ ", называемой $p-v$ -диаграммой, где заштрихованная площадка dl на диаграмме под кривой процесса означает величину производимой работы.

Введем понятие термодинамических потенциалов.

Термодинамические потенциалы – это определенные функции объема, давления, температуры и других макроскопических параметров, характеризующих состояние термодинамической системы. К ним относятся внутренняя энергия U , энтальпия H , свободная энергия F и т.д. Термодинамические потенциалы широко применяются для получения общих соотношений между физическими свойствами макроскопических тел и анализа термодинамических процессов.

Уравнение первого закона теоретической термодинамики в первой форме с учетом (1.1) и (1.2) можно записать в виде:

$$dq = du + p dv, \quad (1.3)$$

где количество тепла dq , участвующее в физическом процессе расширения или сжатия, идет на изменение внутренней энергии du и производство работы $p dv$.

Для записи первого закона термодинамики во второй форме рассмотрим **энтальпию** единицы массы газа h (от греческого – нагреваю) или теплосодержание системы. Это термодинамический потенциал, характеризующий состояние макроскопической системы в термодинамическом равновесии. Внутренняя энергия и энтальпия являются **функциями состоя-**

ния термодинамической системы, а изменения внутренней энергии и энтальпии являются полными дифференциалами.

Энтальпия (тепловая функция Гиббса) равна сумме внутренней энергии u и потенциальной энергии положения тела pV , т.е.

$$h = u + pV; \quad dh = du + d(pV), \text{ откуда } du = dh - d(pV).$$

Так как $d(pV) = pdV + Vdp$, то $du = dh - pdV - Vdp$ и тогда, обращаясь к первой форме записи первого закона термодинамики (1.3), получим:

$$dq = du + pdV = dh - pdV - Vdp + pdV.$$

Окончательно:

$$dq = dh - Vdp. \quad (1.4)$$

Это вторая форма записи первого закона теоретической термодинамики.

Рассмотрим конкретные термодинамические процессы, совершаемые с единицей массы рабочего тела.

1) Пусть $dq \neq 0$, $du \neq 0$, $dl = 0$ – внешняя работа не совершается, тогда $dl = pdV = 0$ или $dV = 0$, следовательно $V = const$.

Такой процесс, протекающий при постоянном удельном объеме, называется **изохорным**, для него $dq = du$, т.е. вся теплота идет на увеличение внутренней энергии тела.

2) Пусть $dq \neq 0$, $du \neq 0$, $dl \neq 0$, давление в процессе постоянно $p = const$, тогда $Vdp = 0$ (т.к. $dp = 0$).

Такой процесс, протекающий при постоянном давлении, называется **изобарным**, для него $dq = dh$, т.е. вся теплота идет на увеличение энтальпии рабочего тела.

Для рассмотрения следующего процесса введем понятие теплоемкости.

Теплоемкость C – это количество теплоты, поглощаемой телом при нагревании на один градус, а точнее – это отношение количества теплоты, поглощаемой телом при бесконечно малом изменении его температуры, к

этому изменению, т.е. $C = \frac{dq}{dT}$. Теплоемкость единицы массы вещества (кг)

называют удельной теплоемкостью, l моля вещества – молярной теплоемкостью.

$$\text{Размерность } C \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}; \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \text{ и т.д.} \right].$$

Количество теплоты, поглощенной телом при изменении его состояния, зависит не только от начального и конечного состояний (например, от их температуры), но и от способа, которым был осуществлен процесс пе-

перехода между ними. Соответственно от способа нагревания тела зависит и его теплоемкость. Обычно различают удельную теплоемкость при постоянном объеме (C_V) и удельную теплоемкость при постоянном давлении (C_p), если в процессе нагревания 1 кг газа поддерживаются постоянными соответственно его объем или давление.

$$C_V = \left(\frac{dq}{dT} \right)_{V=const} ; C_p = \left(\frac{dq}{dT} \right)_{p=const} ; dq = du + dA = du + pdv ;$$

$$C_V = \left(\frac{du + pdv}{dT} \right)_{V=const} = \frac{du}{dT}, \text{ т.к. } dv=0.$$

$$C_p = \left(\frac{du + pdv}{dT} \right)_{p=const} = \frac{dh}{dT}, \text{ т.к. } h=u+pV, dh=du+pdv+vdP, \text{ но } dp=0. \text{ Сле-}$$

довательно: $dh=du+pdv$ при $p=const$.

Отсюда видно, что при нагревании при постоянном давлении часть теплоты идет на производство работы расширения тела, а часть – на увеличение его внутренней энергии, тогда как при нагревании при постоянном объеме вся теплота расходуется на увеличение внутренней энергии,

поэтому $C_V = \frac{du}{dT}$, $C_p = \frac{dh}{dT}$. В связи с этим C_p всегда больше, чем C_V . От-

ношение $\frac{C_p}{C_V} = k > 1$ (для воздуха $k = 1,4$, для нагретых газов $k = 1,33$).

1) Пусть $dq \neq 0$, $dl \neq 0$, $du = 0$, т.е. процесс происходит без изменения внутренней энергии тела.

Так как $du = C_V dT$, что следует из определения теплоемкости при $V = const$, то $T = const$.

Это **изотермический** процесс, протекающий при постоянной температуре, для которого $dq = dl$, т.е. вся теплота превращается в работу расширения газа.

2) Пусть $du \neq 0$, $dl \neq 0$, $dq = 0$ – процесс без теплообмена с окружающей средой.

Это **адиабатный** процесс. Для него $du = -pdv$, т.е. работа газа адиабатного расширения (сжатия) идет за счет уменьшения (расходуется на увеличение) внутренней энергии газа.

Введем понятие **равновесных обратимых процессов**.

Если состояние термодинамической системы не меняется с течением времени, т.е. если свойства системы, а следовательно, и термодинамические параметры ее, сравниваемые в два различных момента времени, одинаковы, значит система находится в **равновесном** состоянии.

Состояние равновесия отличается от стационарного состояния системы (когда значения термодинамических параметров поддерживаются неизменными во времени за счет внешнего воздействия) тем, что при прекращении внешнего воздействия в системе, находящейся до этого в стационарном состоянии, некоторые из термодинамических процессов будут изменяться, тогда как в системе, находящейся в равновесии, все без исключения термодинамические параметры сохраняют постоянное значение.

Обратимым называют процесс, который может происходить в прямом и противоположном направлениях и притом так, что при обратном процессе (т.е. при возвращении к исходному состоянию) система проходит через те же равновесные состояния, что и в случае прямого процесса, но только в обратном порядке, *без появления* в системе *остаточных конечных изменений*.

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **необратимыми**.

Рассмотрим теперь математические модели *всех вышеназванных тепловых равновесных обратимых процессов*.

Изохорный процесс (при $V = const$)

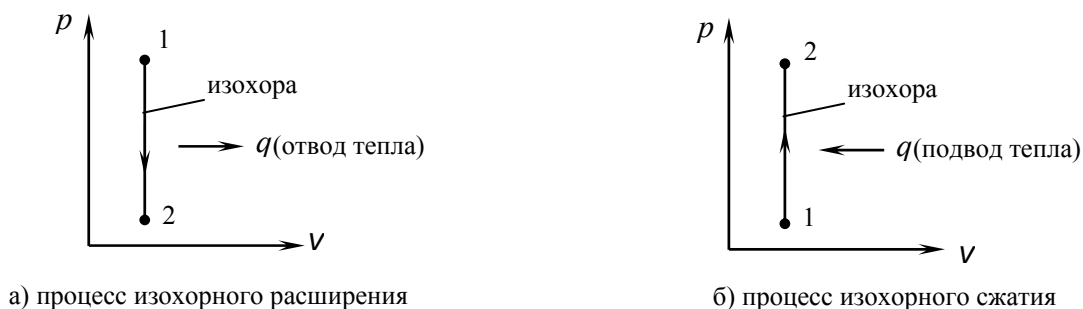


Рис. 2

На $p - V$ -диаграмме изохорный процесс изображается прямой, параллельной оси p . Если к рабочему телу подводится тепловая энергия, то происходит процесс изохорного сжатия и вся теплота q расходуется на увеличение внутренней энергии u . Если же изохорный процесс сопровождается отводом тепла, которое связано с уменьшением давления, то такой процесс называется процессом изохорного расширения.

Уравнение энергии в первой форме для изохорного процесса имеет вид:

$$dq = du = C_V dT, \quad (1.5)$$

где теплоемкость при постоянном объеме $C_V = C_V(T)$ является в общем случае функцией температуры.

Интегрируя это уравнение, будем иметь следующее количество тепла, участвующее в процессе:

$$q = \int_{T_1}^{T_2} C_V(T) dT.$$

В теоретической термодинамике в первую очередь рассматриваются процессы, когда теплоемкость при постоянном объеме является постоянной величиной $C_V = const$, не зависящей от температуры.

Тогда количество тепла $q = C_V (T_2 - T_1)$.

Если же $C_V = f(T)$, то вычисление этого интеграла связано с табличными значениями теплоемкости C_V , имеющей разные значения для различных газов при различной температуре.

В этом случае можно ввести понятие средней теплоемкости:

$$q = \int_{T_1}^{T_2} C_V(T) dT = \frac{\int_{T_1}^{T_2} C_V(T) dT}{T_2 - T_1} (T_2 - T_1).$$

Выражение $\frac{\int_{T_1}^{T_2} C_V(T) dT}{T_2 - T_1} = \bar{C}_V$ — называют **средней теплоемкостью**

при изменении температуры газа от T_1 до T_2 .

Тогда: $q = \bar{C}_V (T_2 - T_1)$.

Если T_1 и T_2 заведомо заданные пределы изменения температур, то $\bar{C}_V = const$.

Но если, например, верхний предел T является переменной величиной, то необходимо пользоваться следующей формулой для определения средней теплоемкости:

$$\frac{\int_{T_1}^T C_V(T) dT}{T - T_1} = \bar{C}_V(T).$$

Изучение процессов горения в камерах сгорания, имеющих постоянный объем, производят посредством аналогии им изохорного процесса.

Для вывода уравнения изохорного процесса используют уравнение состояния, которое для 1 кг идеального газа имеет вид $pV = RT$ и называется уравнением Клапейрона. Запишем это уравнение для двух состояний газа, начального (1) и конечного (2): $p_1V_1 = RT_1$; $p_2V_2 = RT_2$.

Так как $R = const$ – газовая постоянная, и $V_1 = V_2 = V$, то, деля одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.6)$$

Следовательно, для идеального газа при изохорном процессе изменение давлений прямо пропорционально изменению температур (закон Ж. Шарля).

Интересно отметить, что впервые универсальную газовую постоянную R_μ $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} \right]$ ввел в уравнение состояния одного киломоля идеального газа наш соотечественник, известный химик и механик Д.И. Менделеев. Это уравнение называется уравнением Клапейрона-Менделеева:

$pV_\mu = R_\mu T$, где V_μ – молярный объем газа $\left[\frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}} \right]$, т.е. объем, занимаемый одним киломолем газа.

Из физики известно, что при нормальных атмосферных условиях ($T = 273 \text{ К}$, $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$) молярный объем любого газа

$V_\mu = 22,41 \frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}$. Отсюда легко находится универсальная газовая постоянная, имеющая одинаковую величину для всех газов: $R_\mu = \frac{pV_\mu}{T}$;

$$\begin{aligned} R_\mu &= \frac{1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} 22,41 \frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}}{273 \text{ К}} = 8314 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = \\ &= 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 8,314 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = 1,987 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}. \end{aligned}$$

Здесь использован механический эквивалент теплоты как количества работы, эквивалентного единице количества теплоты (*кал* или *ккал*). В международной системе единиц (СИ) принято следующее соответствие: $1 \text{ Дж} = 0,239 \text{ кал}$.

Газовая постоянная R , отнесенная к 1 кг газа, равна: $R = \frac{R_\mu}{\mu} = \frac{8314}{\mu} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, где μ – масса газа, содержащаяся в одном киломоле или молярная масса газа, $\left[\frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \right]$.

Так, например:

для кислорода $\mu = 32 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$,

$$\text{тогда } R_{O_2} = \frac{8314}{32} \approx 260 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \approx 0,26 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

для углекислого газа $\mu = 44 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$,

$$\text{тогда } R_{CO_2} = \frac{8314}{44} \approx 189 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \approx 0,189 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для произвольной массы газа "m" уравнение состояния имеет вид:

$$p\mathbf{V} = \frac{m}{\mu} R_{\mu} T \text{ или } p\mathbf{V} = mRT, \text{ где } \mathbf{V} - \text{объем газа массы } m, \frac{m}{\mu} - \text{количество}$$

киломолей газа.

В наиболее же общем виде уравнение состояния записывается следующим образом: $\frac{p\mathbf{V}}{T} = const$.

Решим задачи:

1) Найти плотность кислорода при температуре 27°C и давлении $1,6 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Вычислить массу 200 м^3 кислорода при этих условиях.

Решение:

Задачу можно решить двумя способами:

а) Применим уравнение состояния газов для произвольного объема:

$$\frac{p\mathbf{V}}{T} = const \text{ или } \frac{p\mathbf{V}}{T} = \frac{p_0\mathbf{V}_0}{T_0}. \text{ Используя формулу для плотности среды}$$

$$\rho = \frac{m}{\mathbf{V}}, \text{ найдем } \mathbf{V} = \frac{m}{\rho} \text{ и } \mathbf{V}_0 = \frac{m}{\rho_0}. \text{ Подставляя } \mathbf{V} \text{ и } \mathbf{V}_0 \text{ в уравнение состоя-$$

$$\text{ния газов, получим: } \frac{pm}{\rho T} = \frac{p_0 m}{\rho_0 T_0}, \text{ откуда } \rho = \rho_0 \frac{T_0 p}{T p_0} \text{ и } m = \rho \mathbf{V}.$$

Для нормальных атмосферных условий: $p_0 = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$; $\rho_0 = 1,43 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
 $T_0 = 273 \text{ К}$.

Подставляя числовые значения, получим:

$$\rho = \frac{273 \cdot 1,6 \cdot 10^5 \cdot 1,43}{300 \cdot 10^5} \approx 2,1 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]; m = 2,1 \cdot 200 = 420 [\text{кг}].$$

б) Применим уравнение состояния для 1 кг идеального газа (уравнение Клапейрона): $\frac{p}{\rho} = RT$, откуда $\rho = \frac{p}{RT}$. Универсальная газовая постоянная $R_\mu = 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$.

Для кислорода $\mu_{O_2} = 32 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$, тогда: $R = \frac{8314}{32} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = 260 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

$$\rho = \frac{1,6 \cdot 10^5}{260 \cdot 300} \approx 2,1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad m = \rho V = 2,1 \cdot 200 = 420 \text{ кг}.$$

2) В закрытом сосуде, имеющем объем $V = 0,8 \text{ м}^3$, находится углекислый газ при давлении $p_1 = 22 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ и температуре $t_1 = 20^\circ \text{C}$. Газу сообщается $q_V = 1100 \text{ ккал}$ тепла. Определить температуру и давление углекислого газа в конце процесса. (Универсальная газовая постоянная $R_\mu = 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$; $\mu_{CO_2} = 44 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$; $C_V = 0,11 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$).

Решение:

Так как объем газа при нагревании не меняется, то процесс будет изохорным, для которого количество подведенного тепла, выраженное через теплоемкость и разность температур, равно: $q_V = mC_V(T_2 - T_1)$, откуда

$$T_2 = \frac{q_V}{mC_V} + T_1.$$

Уравнение состояния для произвольной массы газа имеет вид: $pV = mRT$, где V – объем газа, m – масса этого объема газа.

Масса газа из уравнения состояния: $m = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$ [кг],

где $R = \frac{R_\mu}{\mu} = \frac{8314}{\mu_{CO_2}} = \frac{8314}{44} = 190 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Подставляя все значения в формулу для T_2 , получим:

$$T_2 = \frac{q_V RT_1}{p_1 V_1 C_V} + T_1; \quad T_2 = \frac{1100 \cdot 190 \cdot 293}{22 \cdot 10^5 \cdot 0,8 \cdot 0,11} + 293 = 316 + 293 = 609 \text{ К}.$$

Уравнение изохорного процесса: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$, откуда давление p_2 в конечном состоянии определяется как $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$, $p_2 = 22 \cdot 10^5 \frac{609}{293} = 45,7 \cdot 10^5 \frac{H}{м^2}$.

Изобарный процесс (при $p = const$)

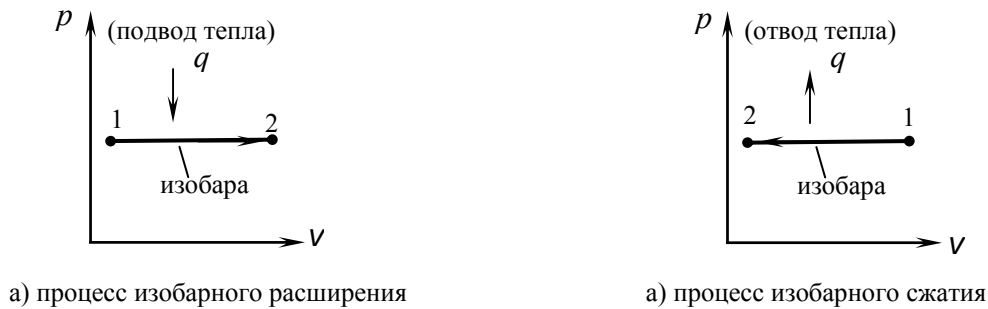


Рис. 3

На $p - V$ -диаграмме – это прямая, параллельная оси V в системе координат $p - V$. Если процесс идет с подводом тепла, то имеем случай изобарного расширения. Если же процесс протекает с отводом тепла от рабочего тела, то происходит процесс изобарного сжатия.

На основании условий существования изобарного процесса имеем:

$$dq = dh \quad (1.7)$$

Это следует из второй формы записи первого закона термодинамики: $dq = dh - vdp$. Но так как в процессе $p = const$, следовательно: $dp = 0$ и тогда $dq = dh$.

Поскольку теплоемкость при постоянном давлении $C_p = \frac{dh}{dT}$, то $dq = C_p dT$.

С другой стороны, из первой формы записи первого закона термодинамики: $dq = du + pdv = C_v dT + pdv$. Дифференцируя уравнение Клапейрона при $p = const$ и $R = const$, получим: $pdv = RdT$. Тогда $dq = C_v dT + RdT$.

Следовательно: $C_p dT = C_v dT + RdT$, откуда получаем важное соотношение в теоретической термодинамике:

$$C_p - C_v = R \quad (1.8)$$

Соотношение (1.8) впервые было дано в работах Роберта Майера, немецкого теплофизика, и получило название уравнения Майера, которое читается следующим образом: *Разность между удельными теплоемко-*

стями при постоянном давлении и постоянном объеме одного килограмма идеального газа равна газовой постоянной.

Если правую и левую части в уравнении Майера (1.8) умножить на молярную массу μ , то получим соотношение для молярных теплоемкостей:

$$\mu C_p - \mu C_V = \mu R = R_\mu = 8,314 \left[\frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} \right],$$

которое является константой для одного киломоля любого газа. Отметим, что теплоемкость при постоянном давлении и теплоемкость при постоянном объеме являются теплофизическими характеристиками рабочего тела.

Найдем количество тепла, участвующее в изобарном процессе.

$$\text{Так как } dq = C_p(T)dT, \text{ то } q = \int_{T_1}^{T_2} C_p(T)dT.$$

Видно, что для вычисления этого интеграла необходимо иметь характеристику $C_p = f(T)$, которая находится в процессе опыта.

Упрощенно можно записать по аналогии с изохорным процессом: $q = C_p(T_2 - T_1)$, если $C_p = \text{const}$ или $q = \bar{C}_p(T_2 - T_1)$, где \bar{C}_p – средняя теплоемкость газа при изменении температуры от T_1 до T_2 ,

$$\bar{C}_p = \frac{\int_{T_1}^{T_2} C_p(T)dT}{T_2 - T_1}.$$

Если $T_2 = T$ – текущая температура, то

$$\bar{C}_p(T) = \frac{\int_{T_1}^T C_p(T)dT}{T - T_1}.$$

Для вывода уравнения изобарного процесса используем уравнение состояния единицы массы идеального газа, которое запишем для двух состояний:

$$\begin{cases} p_1 v_1 = RT_1; \\ p_2 v_2 = RT_2. \end{cases}$$

Так как $p_1 = p_2 = p$, то деля одно уравнение на второе, получим:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (1.9)$$

Следовательно, при изобарном процессе изменение удельных объемов газа пропорционально изменению температур (закон Ж. Гей-Люссака).

Подведенное (или отведенное) в процессе тепло: $dq = dh = du + pdv = du + RdT$, и тогда $q = h_2 - h_1$ или $q = (u_2 - u_1) + R(T_2 - T_1)$.

Изобарный процесс в чистом виде в технических задачах получить нельзя, так как все реальные процессы происходят с падением давления. Но если представить себе тепловой двигатель, в камере сгорания которого скорость течения мала, т.е. объем велик и потерями давления можно пренебречь, тогда изобарный процесс возможен. При больших же скоростях движения реального газа процесс происходит с падением давления и изобарного процесса в технических системах быть не может.

Изотермический процесс ($T = const$)

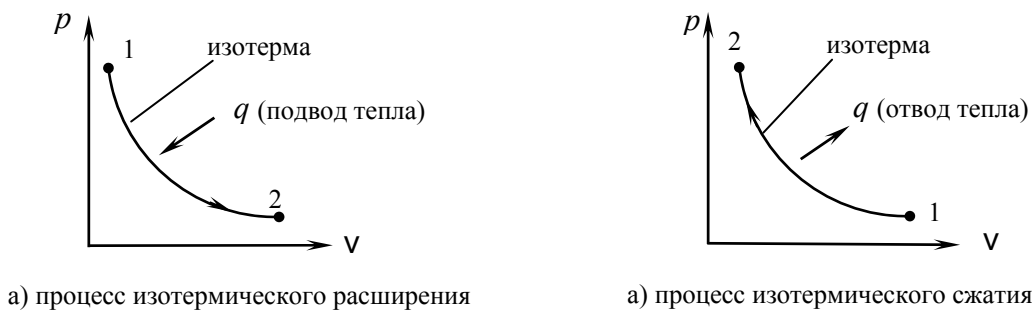


Рис. 4

Запишем уравнение Клапейрона для двух состояний газа в изотермическом процессе:
$$\begin{cases} p_1 v_1 = RT_1; \\ p_2 v_2 = RT_2. \end{cases}$$

Так как $T_1 = T_2 = T$, тогда $p_1 v_1 = p_2 v_2$ или $p v = const$ или

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (1.10)$$

Следовательно, при изотермическом процессе произведение объема газа на давление есть величина постоянная (закон Р.Бойля-Мариотта). Или: Изменение давлений при постоянной температуре обратно пропорционально изменению объемов.

Таким образом, изотермический процесс представляет на диаграмме $p - v$ равнобочную гиперболу.

Если изотермический процесс протекает с подводом тепла, то имеет место изотермическое расширение, если процесс протекает с отводом тепла, то имеет место изотермическое сжатие.

Рассматриваемый процесс изотермический, поэтому для него справедлив закон Бойля-Мариотта для 1 кг газа: $pV = const$ или $p_1V_1 = p_2V_2$ или для произвольной массы газа: $p_1V_1 = p_2V_2$, где $V = mV \left[\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \right] = \left[\text{м}^3 \right]$.

За " n " рабочих ходов насос заберет из атмосферы объем воздуха $(n \cdot V_H)$ при давлении $p_0 = 10^5 \frac{H}{\text{м}^2}$. Эта масса воздуха вместится в объем V_C при давлении p_n . По закону Бойля-Мариотта: $p_n V_C = p_0 \cdot n \cdot V_H$, откуда $p_n = \frac{V_H}{V_C} n p_0$.

а) Если сосуд сначала был бы пустым (например, автомобильная камера или камера футбольного мяча), то это и будет искомое давление:

$$p_n = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 20 \cdot 10^5 = 3,3 \cdot 10^5 \left[\frac{H}{\text{м}^2} \right].$$

б) Если сосуд содержал воздух при нормальном атмосферном давлении, то: $p'_n = \frac{V_H}{V_C} n p_0 + p_0 = p_n + p_0 = 3,3 \cdot 10^5 + 10^5 = 4,3 \cdot 10^5 \left[\frac{H}{\text{м}^2} \right]$.

Адиабатный процесс

В каждой точке адиабатного процесса $dq = 0$, следовательно, этот процесс происходит без передачи тепла от окружающей среды телу и обратно, т.е. без теплообмена с окружающей средой.

Из первого закона термодинамики: $dq = du + dl$, но так как при адиабатном процессе $dq = 0$, то $du + dl = 0$ и, следовательно,

$$dl = -du. \quad (1.13)$$

Таким образом, при адиабатном процессе работа совершается за счет изменения внутренней энергии тела.

Отсюда следует характерная особенность адиабатного процесса расширения или сжатия: накопление внутренней энергии и превращение ее затем в работу.

Так как работа $dl = pdv$, то $du + pdv = 0$; $du = C_v dT$, тогда:

$$C_v dT + pdv = 0. \quad (1.14)$$

Взяв уравнение Клапейрона $p\nu = RT$ и продифференцировав его, получим: $d(p\nu) = RdT$, откуда $dT = \frac{1}{R}d(p\nu)$. Подставив это выражение в формулу (1.14), получим: $\frac{C_V}{R}d(p\nu) + pd\nu = 0$.

Из уравнения Майера $R = C_p - C_V$, тогда $\frac{C_V}{C_p - C_V}d(p\nu) + pd\nu = 0$. Обозначим через показатель адиабаты отношение $\frac{C_p}{C_V} = k$, тогда коэффициент:

$$\frac{C_V}{C_p - C_V} = \frac{1}{\frac{C_p}{C_V} - 1} = \frac{1}{k - 1}; \quad \frac{1}{k - 1}d(p\nu) + pd\nu = 0.$$

Так как $d(p\nu) = pd\nu + \nu dp$, то $\left(1 + \frac{1}{k - 1}\right)pd\nu + \frac{1}{k - 1}\nu dp = 0$.

$\frac{k}{k - 1}pd\nu + \frac{1}{k - 1}\nu dp = 0$ или $kpd\nu + \nu dp = 0$. Разделив последнее выражение

на $p\nu$, получим: $k\frac{d\nu}{\nu} + \frac{dp}{p} = 0$. Проинтегрируем это выражение:

$k \ln \nu + \ln p = \ln C$; $\ln \nu^k + \ln p = \ln C$; $\ln(p\nu^k) = \ln C$, откуда:

$$p\nu^k = const. \quad (1.15)$$

Это первая форма записи уравнения адиабатного процесса, где $k = \frac{C_p}{C_V} = const$ является вторым после уравнения Майера важным соотношением между теплоемкостями при $p = const$ и $\nu = const$.

К первой форме записи уравнения адиабатного процесса относятся и такие виды этого уравнения: $p^{\frac{1}{k}}\nu = const$ или $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}$, $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^k$.

Для получения уравнения во второй форме используем уравнение Клапейрона $p\nu = RT$, из которого имеем: $p = \frac{RT}{\nu}$. Подставив это соотношение в первую форму записи уравнения адиабатного процесса (1.15), получим:

$$\nu^{\kappa-1}T = const. \quad (1.16)$$

или $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$, $\sqrt{T}^{\frac{1}{\kappa-1}} = const$, $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$. Все это вторая форма записи адиабатного процесса.

Для получения третьей формы записи уравнения адиабатного процесса найдем из уравнения состояния $v = \frac{RT}{p}$ и подставим в уравнение (1.15).

Тогда получим:

$$p^{1-k} T^k = const, \quad (1.17)$$

откуда очевидны и другие виды этого уравнения: $p^{\frac{1-k}{k}} T = const$ или $p T^{\frac{k}{1-k}} = const$, а также: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-k}{k}}$ или $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{1-k}}$.

Вычислим работу идеального газа в адиабатном процессе с учетом формулы (1.13): $l = -\int_1^2 du = u_1 - u_2 = C_V(T_1 - T_2)$.

Выполним следующие преобразования: из соотношения $\frac{C_V}{R} = \frac{C_V}{C_p - C_V} = \frac{1}{k-1}$ найдем $C_V = \frac{R}{k-1}$. Тогда:

$$l = \frac{R}{k-1}(T_1 - T_2). \quad (1.18)$$

Далее: из уравнения $p_1 V_1 = RT_1$ найдем $T_1 = \frac{p_1 V_1}{R}$; а из уравнения $p_2 V_2 = RT_2$ найдем $T_2 = \frac{p_2 V_2}{R}$.

Подставляя T_1 и T_2 в (1.18), получим следующее уравнение для работы газа в адиабатном процессе: $l = \frac{1}{k-1}(p_1 V_1 - p_2 V_2)$. Умножив и разделив последнее выражение на $p_1 V_1$, получим: $l = \frac{p_1 V_1}{k-1} \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}\right)$. Так как из пер-

вой формы записи уравнения адиабатного процесса: $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$, то

$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ и, следовательно, работа

$$l = \frac{p_1 V_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \quad (1.19)$$

Политропный процесс

Политропным процессом называют процесс, при котором сохраняется постоянной его теплоемкость. Уравнение политропного процесса идеального газа включает в себя, как частные случаи, уравнения всех типовых термодинамических процессов. Поэтому можно записать обобщенное уравнение политропного процесса, аналогичное адиабатному:

$$pV^n = const, \quad (1.20)$$

где n – показатель политропы (в частном случае адиабатного процесса $n = k$).

Чтобы определить вид политропы, нужно исходить из уравнения первого закона термодинамики, записываемого в общем виде: $dq = du + pdv$. Здесь $dq = CdT$, где C – теплоемкость политропного процесса, которая принципиально отличается от теплоемкостей C_p и C_v , так как является функцией не только температуры, но и самого процесса. Тогда $CdT = C_v dT + pdv$ или

$$(C_v - C)dT + pdv = 0. \quad (1.21)$$

Продифференцируем уравнение Клапейрона $pV = RT$, получим $dT = \frac{1}{R} d(pV)$. Подставив это выражение в (1.21), получим:

$$\frac{C_v - C}{R} d(pV) + pdv = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение: $\frac{C_v - C}{R} (pdv + vdp) + pdv = 0$,

$$\frac{C_v - C + R}{R} pdv + \frac{C_v - C}{R} vdp = 0.$$

Так как $C_p - C_v = R$, то $C_v + R = C_p$ и следовательно: $\frac{C_p - C}{R} pdv + \frac{C_v - C}{R} vdp = 0$. Разделим обе части равенства на $\frac{C_v - C}{R} pV$, тогда:

$$\frac{C_p - C}{C_v - C} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 \text{ или}$$

$$n \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0, \quad (1.22)$$

где

$$n = \frac{C_p - C}{C_v - C}, \quad (1.23)$$

n – показатель политропы. Отсюда: $nC_v - nC = C_p - C$ или $C - nC = C_p - nC_v$, $C(1 - n) = kC_v - nC_v = C_v(k - n)$ и тогда теплоемкость политропного процесса будет равна:

$$C = C_v \frac{k - n}{1 - n}. \quad (1.24)$$

Проинтегрировав уравнение (1.22), получим: $n \ln v + \ln p = \ln const$, $\ln(pv^n) = \ln const$, следовательно: $pv^n = const$ или $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n$.

Получили уравнение политропного процесса, которое вначале в таком же виде записали по аналогии с адиабатным.

Количество теплоты, полученной 1 кг идеального газа при политропном изменении его состояния: $dq = CdT$, тогда:

$$q = C(T_2 - T_1) = \frac{k - n}{1 - n} C_v (T_2 - T_1) = \frac{k - n}{1 - n} C_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Заменяв T через $\frac{pV}{R}$ из уравнения Клапейрона, получим:

$$q = \frac{(k - n) C_v}{(1 - n) R} p_1 V_1 \left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1\right).$$

Так как $\frac{C_v}{R} = \frac{1}{k - 1}$; а $\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ – по аналогии с адиабатным процессом, то, следовательно:

$$q = -\frac{(k - n) C_v}{(1 - n) R} p_1 V_1 \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}\right) = -\frac{(k - n)}{(1 - n)(k - 1)} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right].$$

Работа изменения объема, совершаемая идеальным газом при политропном процессе (по аналогии с работой (1.18) при адиабатном процессе):

$$l = \frac{R}{n-1}(T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{n-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \text{ Заменяя с помощью уравнения Клапейрона}$$

$$T \text{ через } \frac{pV}{R}, \text{ получаем: } l = \frac{p_1V_1}{n-1} \left(1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right), \text{ так как } \frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \text{ то}$$

$$l = \frac{p_1V_1}{n-1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Изменение внутренней энергии при политропном процессе:
 $du = u_2 - u_1 = C_V(T_2 - T_1).$

Покажем, что все известные типовые термодинамические процессы являются частными случаями политропного процесса, при этом теплоемкость политропного процесса C и показатель политропы n изменяются от нуля до бесконечности.

Действительно:

1) Если рассмотреть изохорный процесс, то его можно воспроизвести, если в уравнении политропного процесса вида $p^n v = \text{const}$ показатель политропы будет $n = \infty$. Тогда получим $v = \text{const}$.

Следовательно, для изохорного процесса: $n = \infty$, $C = C_V$.

2) В случае изобарного процесса ($p = \text{const}$) показатель политропы $n = 0$ в уравнении вида: $p v^n = \text{const}$, а $C = C_P$.

3) При изотермическом процессе ($T = \text{const}$) показатель политропы $n = 1$ в уравнении вида: $v^{n-1} T = \text{const}$, а $C = \infty$ из формулы (1.24).

4) В случае адиабатного процесса показатель политропы $n = k$ в уравнении вида: $p v^n = \text{const}$, а $C = 0$ из формулы (1.24).

p-v - диаграмма

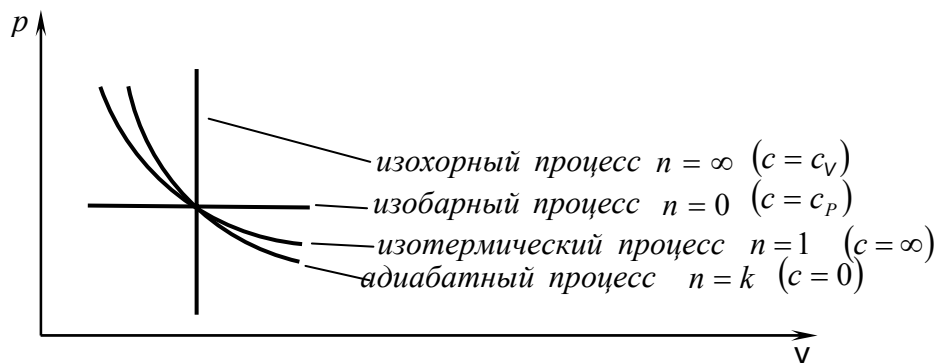


Рис. 6. Различные политропные процессы изменения состояния идеального газа.

На p - V -диаграмме совмещены все рассмотренные термодинамические процессы.

Решим задачу:

1 кг азота N_2 в начальном состоянии имеет параметры $p_1 = 25 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ и $t_1 = 700^\circ \text{C}$. После политропного расширения (показатель политропы $n = 1,18$) давление его становится равным $p_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Определить работу политропного расширения l и количество тепла q_{1-2} , сообщенное газу. Показатель адиабаты для азота $k = 1,36$.

Решение:

Возьмем уравнение политропного процесса в виде $\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = const$, или

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad \text{откуда} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}; \quad T_1 = 273 + 700^\circ \text{C} = 973 \text{ K}; \quad T_2 = 973 \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{0,18}{1,18}} = 596 \text{ K}.$$

Определим величину работы политропного расширения. Работа, производимая 1 кг газа в политропном процессе, в общем случае находится как $l = \int_1^2 p dv$. Для политропного процесса $pV^n = const$ или $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V}\right)^n$, отку-

да $p = p_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^n$. Подставляя полученное выражение в формулу для работы,

получим: $l = \int_1^2 \frac{p_1 V_1^n}{V^n} = p_1 V_1^n \int_1^2 V^{-n}; \quad l = p_1 V_1^n \frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n}$. Так как $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$, то

$l = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n}$. Используя уравнение Клапейрона $pV = RT$, получим

$l = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-n}$ или $l = \frac{R}{n-1}(T_1 - T_2)$. В тексте пособия эта формула была за-

писана по аналогии с адиабатным процессом.

$$l_{1-2} = \frac{R}{n-1}(T_1 - T_2). \quad \text{Для нашего случая} \quad R = R_{N_2} = \frac{R_\mu}{\mu_{N_2}} = \frac{8314}{28} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

$$l_{1-2} = \frac{8314}{28 \cdot 0,18} (973 - 596) = 1,65 \cdot 10^3 \cdot 3,77 \cdot 10^2 = 6,22 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 622 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Количество тепла, сообщенное газу в процессе: $dq = CdT$, где C – политропная теплоемкость. $q_{1-2} = C(T_2 - T_1)$, т.к. $C = C_V \frac{k-n}{1-n} = C_V \frac{n-k}{n-1}$, тогда $q_{1-2} = C_V \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1)$; $C_V = \frac{R}{n-1} = \frac{8314}{28 \cdot 0,18} \approx 1650 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \approx 394,3 \frac{\text{кал}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, так как $1 \text{ Дж} = 0,239 \text{ кал}$.

$$\text{Тогда: } q_{1-2} = 394 \cdot \frac{1,18 - 1,36}{1,18 - 1} (-377) = 1,486 \cdot 10^5 \frac{\text{кал}}{\text{кг}} = 148,6 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

1.2. Уравнение энергии

В общем виде скалярное уравнение сохранения энергии для конечных масс сплошной вязкой среды можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{V} = \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} d\mathbf{V} + \int_S \vec{p}_n \cdot \vec{v} ds + q_{\text{сек.}}. \quad (1.25)$$

Это **уравнение баланса энергии**, вытекаемое из общего *термодинамического закона сохранения энергии* (первого закона термодинамики), которое применительно к сплошной среде формулируется так: *Индивидуальная производная по времени от полной энергии данного движущегося объема среды равна сумме мощностей приложенных к выделенному объему и его поверхности внешних массовых и поверхностных сил и отнесенного к единице времени количества тепловой энергии, подведенной извне к объему.*

Здесь: $q_{\text{сек.}} = \frac{d}{dt} \int_V \rho q d\mathbf{V}$, где q – количество выделяемой (поглощаемой) тепловой энергии в единице массы (объема), т.е. $q \left[\frac{\text{ккал}}{\text{кг}} \right]$, \vec{p}_n – вектор

единичной поверхностной силы или вектор напряжений, \vec{F} – вектор единичной массовой силы.

Рассмотрим интеграл в левой части уравнения (1.25). Введем производную под знак интеграла и продифференцируем подынтегральное выражение:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{V} = \int_V \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \rho d\mathbf{V} + \int_V \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \frac{d}{dt} (\rho d\mathbf{V}).$$

Так как изменения массы в силу неразрывности движения сплошной среды нет, то $\frac{d}{dt} (\rho d\mathbf{V}) = \frac{dm}{dt} = 0$.

Следовательно, второй $\int = 0$ и из рассмотрения выпадает, тогда:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{V} = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{V}.$$

Рассмотрим интеграл $\int_S \vec{p}_n \cdot \vec{v} \, ds$ в правой части уравнения (1.25). Так как вектор напряжений $\vec{p}_n = \mathbf{P}\vec{n} = \vec{n}\mathbf{P}$, где \mathbf{P} – тензор напряжений, являющийся симметричным, то

$$\int_S \vec{p}_n \cdot \vec{v} \, ds = \int_S (\vec{n}\mathbf{P}) \cdot \vec{v} \, ds = \int_S \vec{n} \cdot (\mathbf{P}\vec{v}) \, ds = \int_V \text{div}(\mathbf{P}\vec{v}) \, d\mathbf{V}.$$

Здесь применили теорему Остроградского-Гаусса: *Поток вектора сквозь поверхность, ограничивающую данный объем, равен интегралу по этому объему от дивергенции этого вектора.*

Отметим, что $(\mathbf{P}\vec{v})$ – это скалярное произведение тензора напряжений \mathbf{P} на вектор скорости \vec{v} , являющееся вектором, а $\text{div}(\mathbf{P}\vec{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{P}\vec{v})$ – это скалярное произведение вектора ∇ (оператора Гамильтона) на вектор $(\mathbf{P}\vec{v})$, являющееся скаляром.

Подставим полученные соотношения в уравнение баланса энергии (1.25):

$$\int_V \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{V} = \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\mathbf{V} + \int_V \text{div}(\mathbf{P}\vec{v}) \, d\mathbf{V} + \frac{d}{dt} \int_V \rho q \, d\mathbf{V}. \quad (1.26)$$

Это и есть уравнение энергии для конечных масс сплошной среды.

Если перенести влево все члены уравнения (1.26) и применить к полученному интегралу теорему о среднем, то получим следующее уравнение:

$$\left[\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \text{div}(\mathbf{P}\vec{v}) - \rho \frac{dq}{dt} \right] \Delta \mathbf{V} = 0.$$

Так как рассматриваемый малый объем среды конечен, т.е. $\Delta \mathbf{V} \neq 0$, то равным нулю будет выражение в квадратных скобках. Оставив в левой части его производную по времени от полной энергии, получим:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \text{div}(\mathbf{P}\vec{v}) + \rho \frac{dq}{dt}. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27) является уравнением энергии для элементарного объема сплошной среды. Оно выражает равенство между изменением полной энергии (кинетической и внутренней) элементарного объема движущейся жидкости, с одной стороны, и работой массовых сил, работой напряжений в жидкости на границах элементарного объема и переданным теплом, с другой.

Это уравнение является первой формой дифференциального уравнения энергии.

Преобразуем уравнение (1.27). Возьмем известное уравнение движения в напряжениях в виде: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{div} \mathbf{P}$. Здесь $\text{div} \mathbf{P}$ или $\nabla \mathbf{P}$ – это скалярное произведение вектора ∇ на тензор \mathbf{P} , являющееся вектором. Умножим скалярно обе части этого векторного уравнения на вектор скорости \vec{v} и преобразуем левую часть уравнения, тогда получим:

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{div} \mathbf{P}.$$

Полученный результат вычтем из дифференциального уравнения энергии в первой форме (1.27) и после сокращения получим:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{v} \cdot \text{div} \mathbf{P} + \text{div}(\mathbf{P} \vec{v}) + \rho \frac{dq}{dt}.$$

Рассмотрим операцию $\text{div}(\mathbf{P} \vec{v})$. Из векторного анализа известно, что:

$\text{div}(\mathbf{P} \vec{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{P} \vec{v}) = \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \mathbf{P})$. Здесь $\nabla \vec{v}$ – дифференциальный тензор векторного поля скоростей или тензорное произведение векторов ∇ и \vec{v} ; $\mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v})$ – это скалярное произведение двух тензоров: тензора напряжений \mathbf{P} и дифференциального тензора векторного поля скоростей; $\vec{v} \cdot (\nabla \mathbf{P})$ – скалярное произведение двух векторов: вектора скорости \vec{v} и вектора $\nabla \mathbf{P}$ или $\text{div} \mathbf{P}$. Скалярное произведение как двух тензоров $\mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v})$, так и двух векторов $\vec{v} \cdot (\nabla \mathbf{P})$ – является скаляром. Это очевидно, поскольку $\text{div}(\mathbf{P} \vec{v})$ или скалярное произведение векторов ∇ и $(\mathbf{P} \vec{v})$ также является скаляром.

Итак, можно записать: $\text{div}(\mathbf{P} \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{div} \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v})$. Подставляя полученное выражение в уравнение для $\rho \frac{du}{dt}$, получим:

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) + \rho \frac{dq}{dt}. \quad (1.28)$$

Это другой вид первой формы дифференциального уравнения энергии.

Перейдем к энтальпии. Энтальпия связана с внутренней энергией соотношением: $h = u + p\nu$ или $h = u + \frac{p}{\rho}$, $\frac{dh}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right)$. Умножим обе части этого уравнения на ρ и тогда с учетом первой формы дифференциального уравнения энергии (1.28), получим:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{du}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) + \rho \frac{dq}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

Так как $\left(\frac{p}{\rho} \right)' = \frac{\rho p' - p \rho'}{\rho^2} = \frac{p'}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \rho'$, то:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v}.$$

Второе слагаемое в последнем выражении следует из уравнения неразрывности вида: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$, откуда $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}$, а $-\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = p \operatorname{div} \vec{v}$.

Итак:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) + p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dq}{dt}. \quad (1.29)$$

Это дифференциальное уравнение энергии во второй форме.

Рассмотрим скалярное произведение тензора напряжений \mathbf{P} и дифференциального тензора векторного поля скоростей $\nabla \vec{v}$ как свертку (скалярное произведение двух тензоров $T \cdot Q = t_{ij} q_{ij}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) &= p_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ &+ p_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + p_{xz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + p_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что тензор \mathbf{P} симметричный, т. е. $p_{ij} = p_{ji}$.

Распишем скалярные составляющие тензора напряжений, имеющего вид $\mathbf{P} = -pE + 2\mu S - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v}$, где E – тензорная единица, $E_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$, S – симметричная часть тензора $(\nabla \vec{v})$ или тензор скоростей деформаций, $S = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, μ – динамический коэффициент вязкости.

$$p_{xx} = -p + 2\mu s_{xx} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v};$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu s_{yy} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v};$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu s_{zz} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v};$$

$$p_{xy} = 2\mu s_{xy} \quad ; \quad p_{xz} = 2\mu s_{xz} \quad ; \quad p_{yz} = 2\mu s_{yz} .$$

Здесь учтено, что: $s_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$; $s_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$; $s_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$; $s_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$;

$$s_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad s_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) = & \left(-p + 2\mu s_{xx} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) s_{xx} + \left(-p + 2\mu s_{yy} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) s_{yy} + \\ & + \left(-p + 2\mu s_{zz} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) s_{zz} + 2\mu s_{xy} \cdot 2s_{xy} + 2\mu s_{xz} \cdot 2s_{xz} + 2\mu s_{yz} \cdot 2s_{yz} . \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) = & -p(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu(s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + \\ & + 4\mu(s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2); \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) = -p \operatorname{div} \vec{v} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 + Dissv ,$$

поскольку $(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}$. Здесь $Dissv$ - диссипативная функция, имеющая вид:

$$Dissv = 2\mu(s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 + 2s_{xy}^2 + 2s_{xz}^2 + 2s_{yz}^2) .$$

Проведя операцию свертки, можно записать: $Dissv = 2\mu S^2$.

$$\text{Тогда } \mathbf{P} \cdot (\nabla \vec{v}) = -p \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu S^2 - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 .$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.29), получим:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + 2\mu S^2 - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \rho \frac{dq}{dt} . \quad (1.30)$$

Это другой вид дифференциального уравнения энергии во второй форме, являющегося одним из основных уравнений в газовой динамике. Если рассмотреть последнее уравнение для идеальной несжимаемой жидкости, для которой коэффициент вязкости $\mu = 0$ и условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 , \text{ то это уравнение также получит вид: } \rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dq}{dt} .$$

1.3. Второй закон термодинамики. Цикл Карно

Поскольку уравнение энергии является скалярным, то одного его, чтобы изучить процесс передачи тепла, недостаточно.

Поэтому в середине XIX века ученые интенсивно искали условия, позволяющие определять направление теплового процесса. Появились работы Больцмана, Томсона, Клаузиуса и др., что позволило прояснить вопросы теплопередачи от одних тел к другим. Эти поиски и привели к открытию второго закона термодинамики.

В результате исследований к уравнению энергии было добавлено 2-ое фундаментальное начало термодинамики, утверждающее, что теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретых тел к более нагретым (формулировка Клаузиуса).

Второе начало термодинамики имеет в науке о закономерностях теплового движения такое же основополагающее значение, какое в механике имеет закон сохранения и превращения энергии. Именно благодаря ему была твердо доказана невозможность создания вечного двигателя второго рода. Ведь, согласно этому закону, нельзя бесконечно черпать тепловую энергию от какого-либо тела: охладившись до температуры окружающей среды, оно перестанет отдавать свое тепло. А чтобы понизить температуру этого тела еще больше, придется затратить некоторое количество какой-либо энергии (механической, электрической, химической и т.д.). Именно поэтому в холодильнике может поддерживаться температура ниже, чем у окружающей среды (за счет использования и преобразования электрической энергии). Второй закон термодинамики, говоря о том, что тепловые процессы могут идти не в любом направлении, по существу дополняет фундаментальный закон сохранения и превращения энергии.

Французский ученый и инженер Сади Карно впервые ввел понятие термодинамического коэффициента полезного действия (КПД), которое и позволило сформулировать математически 2-ой закон термодинамики.

Начнем рассмотрение второго закона термодинамики с изучения цикла Карно.

Цикл Карно (рис. 7) состоит из последовательно чередующихся двух изотермических и двух адиабатных процессов. Круговой цикл Карно является обратимым, а рабочим телом идеальной тепловой машины является 1 кг идеального газа. В цикле Карно совершается превращение теплоты в работу (или наоборот). Этот цикл впервые был рассмотрен Карно в 1824 году как идеальный рабочий цикл теплового двигателя, совершающего работу за счет теплоты, подводимой к рабочему телу в изотермическом процессе.

По изотерме T_1 подводится тепло q_1 , по изотерме T_2 отводится тепло q_2 . Чтобы получить механическую энергию из тепловой, надо иметь два источника тепла T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$. Отсюда следует важный вывод:

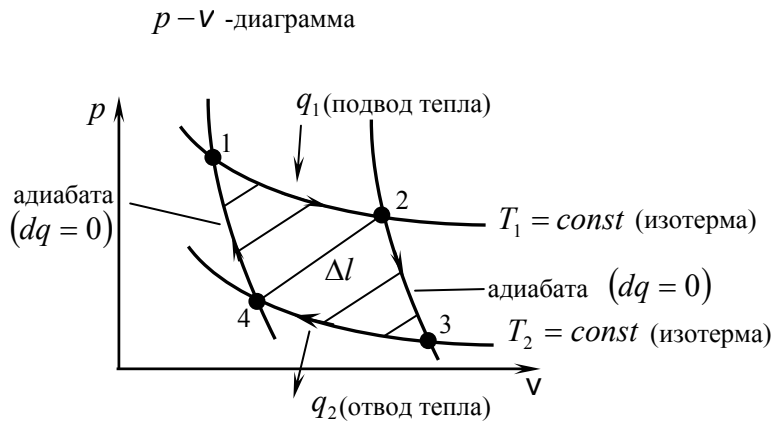


Рис. 7.

Если не будет второго источника тепла с более низкой температурой, то никакой работы производиться не будет.

Следовательно, если ставится задача о преобразовании тепловой энергии в механическую, то нужно непременно иметь два источника тепла

(с более высокой и более низкой температурами). Это явление носит название исключенного перпетуум-мобиле (вечного двигателя).

Таким образом, в цикле Карно рабочее тело последовательно находится в тепловом контакте с двумя тепловыми резервуарами (имеющими постоянные температуры) – нагревателем (с температурой T_1) и холодильником (с температурой $T_2 < T_1$). Превращение теплоты в работу сопровождается переносом рабочим телом определенного количества теплоты от нагревателя к холодильнику.

Чтобы отразить это условие появления работы, Карно ввел понятие термодинамического коэффициента полезного действия (КПД) в виде:

$$\eta_t = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = \frac{\Delta l}{q_1}, \quad (1.31)$$

где Δl – заштрихованная площадка на $p - V$ диаграмме.

Из формулы (1.31) видно, что разность между подводимым и отводимым теплом означает получаемую работу Δl за один цикл. Если Δl поделить на q_1 , то получим работу в % от количества подведенного тепла.

Рассмотрим процессы, происходящие в цикле Карно:

изотерма 1-2 (при $T_1 = const$) – процесс изотермического расширения при постоянной температуре, который можно получить только в том случае, если к газу подвести тепло, при этом совершается работа;

адиабата 2-3 – процесс адиабатного расширения, при этом газ охлаждается до температуры T_2 ;

изотерма 3-4 (при $T_2 = const$) – процесс изотермического сжатия, при этом тепло отдается газом холодильнику;

адиабата 4-1 – процесс адиабатного сжатия, при этом рабочее тело возвращается в исходное термодинамическое состояние.

Напишем уравнения процессов:

для изотермы 1-2: $q_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$;

для изотермы 3-4: $q_2 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$.

Здесь удельные объемы V_3 и V_4 поменяли местами с тем, чтобы не ставить знак «-» у отведенного тепла q_2 .

Следовательно, термодинамический коэффициент КПД цикла Карно:

$$\eta_t = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (1.32)$$

Для процесса адиабатного расширения 2-3 можно записать уравнение адиабатного процесса в виде: $V^{k-1}T = const$ или $T_1V_2^{k-1} = T_2V_3^{k-1}$.

Для процесса адиабатного сжатия 4-1 очевидным будет следующее равенство: $T_1V_1^{k-1} = T_2V_4^{k-1}$.

Поделим взаимно друг на друга два последних соотношения:

$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1}$ или $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Тогда $\ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{V_3}{V_4}$. Подставляя это соотноше-

ние в уравнение (1.32), получим: $\eta_t = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Следовательно:

$$\eta_t = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1.32)$$

Это и есть выражение для термодинамического КПД цикла Карно. Это наибольший КПД среди всех возможных циклов, осуществляемых в одном и том же температурном перепаде, который служит мерой эффективности других рабочих циклов.

Выражение (1.32) позволяет оценить все существующие направления в области развития энергетики. Запишем термодинамический КПД в виде:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (1.33)$$

Из этого выражения следует, что для получения максимального коэффициента полезного действия T_1 должно быть по возможности больше, а T_2 – по возможности меньше.

К примеру, на ракетном двигателе температура выхлопных газов T_1 достигает 2500 K , T_2 – температура окружающей среды. Отсюда видно, что КПД ракетного двигателя может быть весьма большим.

На пароводяных электростанциях максимальная температура перегрева $T_1 \leq 700\text{ K}$ (т.к. при больших температурах вода разлагается, происходит расщепление на O_2 и H_2 , кислород быстро разрушает стенки труб и котлов). Температура воды в конденсаторах T_2 сравнима с температурой окружающей среды. Следовательно, КПД пароводяных электростанций невысоки.

Исследования современных энергетиков направлены на повышение η_i – это проблема современной экономики. Сейчас на пароводяных электростанциях используют сверхвысокие давления и максимальные перегревы, но все равно КПД таких станций малы. Следовательно, неизбежен переход к атомной энергетике. Один атомный котел может дать до 1 млн. кВт электроэнергии, один блок – 3 млн. кВт, а в Саратовской АЭС к примеру, 5 блоков. Для сравнения: Волжская ГЭС производит 2,4 млн. кВт электроэнергии, т.е. налицо малая мощность гидростанций по сравнению с атомными электростанциями. Атомные станции при правильной эксплуатации могут работать десятки лет от одного капитального ремонта до другого, причем эти станции – технически *не сложнее* обычных гидро- или пароводяных электростанций. Две аварии: в г.Копейске Челябинской области и в Чернобыле – произошли по вине обслуживающего персонала.

В настоящее время большое внимание уделяется созданию газотурбинных электростанций, у которых термодинамический КПД η_i несколько выше, чем у пароводяных электрических станций. Их можно устанавливать в любом населенном пункте, любом микрорайоне, так как они легки по массе и мобильны. У таких станций единственный недостаток – сравнительно малая мощность, не более 100 тыс. кВт .

Можно добиваться повышения η_i за счет понижения температуры холодильника ($T_2 \rightarrow 0$). К сожалению, нельзя достигнуть абсолютного нуля, так как при приближении к абсолютному нулю адиабатный процесс приближается к изотермическому при $T = const$, и дальнейшее понижение температуры T_2 становится невозможным. Это содержание тепловой теоремы Нернста или третьего закона термодинамики. Теоретики XVIII века рассуждали, что абсолютный нуль можно получить следующим образом: приблизиться к абсолютному нулю, а затем дать адиабатный процесс расширения, при котором T падает. Но дальнейшие исследования показали, что этому мешает одно обстоятельство, а именно то, что в окрестности абсолютного нуля *адиабатный процесс* приближается к *изотермическому*, следовательно температура не упадет.

Поэтому увлечение достижением абсолютного нуля прошло, но формула для термодинамического КПД цикла Карно помогает наметить пути повышения КПД различных энергетических установок.

Решим задачи:

1) У какого из двух циклов Карно больший КПД, если в первом начальная температура газа была 327°C , а конечная 27°C . Во втором цикле начальная температура газа была 527°C , а конечная 127°C .

Решение:

$$\text{КПД цикла Карно } \eta_t = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

$$\text{В первом случае: } \begin{cases} T_1 = 327 + 273 = 600 \text{ K} \\ T_2 = 27 + 273 = 300 \text{ K} \end{cases} \Rightarrow \eta_t = 1 - \frac{300}{600} = 0,5.$$

$$\text{Во втором случае: } \begin{cases} T_1 = 527 + 273 = 800 \text{ K} \\ T_2 = 127 + 273 = 400 \text{ K} \end{cases} \Rightarrow \eta_t = 1 - \frac{400}{800} = 0,5.$$

Следовательно, КПД в обоих циклах Карно одинаковы.

2) КПД цикла Карно равен 0,5. Начальная температура газа была равна 327°C . Какова будет температура в конце цикла?

Решение:

$$\text{КПД цикла Карно } \eta_t = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta_t, \text{ откуда } T_2 = T_1(1 - \eta_t).$$

$$\text{Следовательно: } T_2 = (327 + 273) \cdot 0,5 = 300 \text{ K} = 27^\circ \text{C}.$$

1.4. Энтропия. Теорема Карно

Перейдем к понятию *энтропии*, введенному в 1854 году немецким физиком Рудольфом Клаузиусом. Для обратимого цикла Карно на основании формулы (1.33) можно написать:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ или } \frac{q_1}{T_1} = \frac{q_2}{T_2}.$$

Поскольку q_2 означает отвод тепла, т.е. имеет отрицательный знак ($q_2 < 0$), то можно за-

$$\text{писать: } \frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} = 0.$$

Рассмотрим усложненную задачу: Представим себе произвольный круговой цикл и применим для этого цикла последнее уравнение. С этой целью разобьем весь процесс изотермами и адиабатами на ряд элементар-

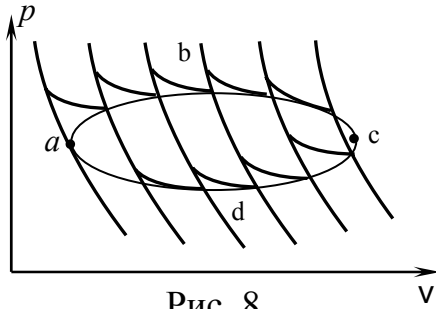


Рис. 8.

ных циклов Карно (рис.8). Тогда можно записать, что $\sum_1^n \frac{\Delta q}{T} = 0$ при $n \rightarrow \infty$. Вдоль верхней ветки abc тело, совершающее цикл по часовой стрелке, получает теплоту от источников тепла, а вдоль нижней ветки cda оно отдает теплоту, т.е.

$$\int_{abc} \frac{dq}{T} + \int_{cda} \frac{dq}{T} = 0, \quad \text{и следовательно,}$$

$\oint_c \frac{dq}{T} = 0$, т.е. интеграл по замкнутому контуру от $\frac{dq}{T}$ равен нулю.

Если цикл необратимый, для которого $\eta_i^{\text{необрат.}} < \eta_i^{\text{обрат.}}$, то $\frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} < 0$, так как $\frac{q_1}{T_1} < \frac{q_2}{T_2}$. Тогда для необратимого процесса будет $\sum_1^n \frac{\Delta q}{T} < 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\oint_c \frac{dq}{T} < 0$. Оба интеграла свяжем знаком равенства-неравенства:

$$\oint_c \frac{dq}{T} \leq 0, \quad (1.34)$$

где данный интеграл будет равен нулю для обратимых процессов и будет меньше нуля для необратимых процессов.

Эти равенства-неравенства являются особыми. Если интеграл $\oint_c \frac{dq}{T} = 0$ можно взять без затруднений, то интеграл $\oint_c \frac{dq}{T} < 0$ вычислить непросто. Немецкий физик Планк (создатель квантовой механики) впервые встретился с этой задачей: взять $\oint_c \frac{dq}{T}$ от необратимого процесса.

Эти равенства-неравенства имеют определенный физический смысл в тепловых машинах.

Известно, что если интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то подынтегральная функция представляет собой полный дифференциал. Если с этой точки зрения рассмотреть ранее выведенный контурный интеграл для обратимого процесса $\oint_c \frac{dq}{T} = 0$, то отсюда следует, что $\frac{dq}{T} = ds$ является полным дифференциалом некоторой функции состояния тела, которую называют энтропией s . Поскольку dq не является дифференциалом, а

лишь бесконечно малой величиной, то величина $\frac{1}{T}$ есть множитель, пре-
 вращающий ее в полный дифференциал (так называемый интегрирующий
 множитель). Тогда ds – есть *изменение* энтропии. Таким образом:

$$\oint_C \frac{dq}{T} = \oint_C ds = 0 \text{ для обратимого процесса.}$$

Здесь и далее рассматриваем эн-
 тропию как функцию состояния единицы массы газа.

Впервые Клаузиус ввел понятие энтропии для определения меры не-
 обратимого рассеяния энергии.

Энтропия по Клаузиусу характеризует тепловое состояние тела или
 системы тел и показывает, в какой степени различные виды энергии в сис-
 теме превратились в тепловую, которая уже не может перейти в другие ви-
 ды энергии, что эквивалентно определению потерь тепловой энергии в
 системе.

Клаузиус установил, что в обратимых процессах энтропия не изменя-
 ется, а в необратимых, т.е. во всех реально происходящих процессах, воз-
 растает. При этом важно отметить, что это утверждение верно только для
замкнутых систем. Когда Клаузиус пришел к идее тепловой смерти Все-
 ленной, то считал ее замкнутой системой, и был не прав.

Рассмотрим понятие энтропии подробнее. Клаузиус показал, что про-
 цесс превращения теплоты в работу подчиняется определенной физиче-
 ской закономерности – второму началу термодинамики, которое можно
 сформулировать строго математически, если ввести особую функцию со-
 стояния – энтропию s . Так, для термодинамической системы, совершаю-
 щей квазистатический (бесконечно медленно) циклический процесс, в ко-
 тором система последовательно получает малые количества теплоты dq
 при соответствующих значениях абсолютной температуры T , интеграл от
 $\frac{dq}{T}$ по всему циклу будет равен нулю: $\oint_C \frac{dq}{T} = 0$ – это так называемое ра-
 венство Клаузиуса.

Это равенство, эквивалентное второму началу термодинамики для
 равновесных процессов, Клаузиус получил, рассматривая произвольный
 циклический процесс как сумму очень большого числа элементарных цик-
 лов Карно. Математически равенство Клаузиуса необходимо и достаточно
 для того, чтобы выражение $ds = \frac{dq}{T}$ представляло собой полный диффе-
 ренциал функции состояния s (это так называемое дифференциальное оп-
 ределение энтропии). Разность энтропий системы в двух произвольных со-
 стояниях A и B (заданных, например, значениями p и ρ) равна:

$s_B - s_A = \int_A^B \frac{dq}{T}$ (это так называемое интегральное определение s). Интегрирование здесь ведется вдоль пути любого квазистатического процесса, связывающего состояния A и B , при этом, согласно равенству Клаузиуса, приращение энтропии $\Delta s = s_B - s_A$ не зависит от пути интегрирования. Таким образом, из второго начала термодинамики следует, что существует однозначная функция состояния s , которая при квазистатических адиабатных процессах ($dq = 0$) остается постоянной.

Процессы, в которых $s = const$, называются изоэнтропийными.

Важность понятия энтропии для анализа необратимых (неравновесных) процессов также была впервые показана Клаузиусом. Для необратимых процессов интеграл от $\frac{dq}{T}$ по замкнутому контуру всегда отрицателен:

$\oint_C \frac{dq}{T} < 0$ – так называемое неравенство Клаузиуса. Это неравенство является следствием теоремы Карно: КПД частично или полностью необратимого циклического процесса всегда меньше, чем КПД обратимого цикла.

Из неравенства Клаузиуса вытекает, что $s_B - s_A > \int_A^B \frac{dq}{T}$, поэтому энтропия изолированной системы при необратимых процессах может только возрастать. Таким образом, энтропия определяет характер процессов: возможны только такие процессы, при которых энтропия либо остается постоянной (обратимые процессы), либо возрастает (необратимые процессы).

Энтропия является *функцией состояния*, она не определяется опытным путем, а вычисляется через измеренные физические величины (температуру, давление, плотность). Физические измеряемые величины являются *параметрами состояния*. Энтропия же непосредственно не измеряется, она определяется как функция параметров состояния, поэтому и называется функцией состояния.

Рассмотрим основные методы вычисления энтропии для *обратимых процессов*. Согласно первому закону термодинамики (см. уравнение (1.3)) $dq = du + pdv$, тогда изменение энтропии:

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{du}{T} + \frac{pdv}{T}. \quad (1.35)$$

Используем уравнение Клапейрона: $p\nu = RT$, откуда $T = \frac{1}{R}(p\nu)$; $dT = \frac{1}{R}d(p\nu)$. Известно, что $du = C_V dT = \frac{C_V}{R}d(p\nu)$. Тогда, внося выраже-

ние для T и du в уравнение (1.35), получим: $ds = \frac{C_V d(pv)}{pv} + R \frac{dv}{v}$ или

$$ds = R \left(\frac{C_V}{R} \frac{d(pv)}{pv} + \frac{dv}{v} \right).$$

Так как $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$; $R = C_p - C_V$, тогда: $\frac{C_V}{R} = \frac{C_V}{C_p - C_V} = \frac{1}{\frac{C_p}{C_V} - 1} = \frac{1}{\kappa - 1}$. Пре-

образуем последнее выражение: $ds = \frac{R}{\kappa - 1} \left(\frac{d(pv)}{pv} + (\kappa - 1) \frac{dv}{v} \right)$.

Поскольку $\frac{d(pv)}{pv} = \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p}$, то $ds = \frac{R}{\kappa - 1} \left(\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dv}{v} \right)$, тогда:

$$ds = \frac{R}{\kappa - 1} d \ln(pv^\kappa), \quad (1.36)$$

так как $d \ln(pv^\kappa) = \frac{d(pv^\kappa)}{pv^\kappa} = \frac{dp}{p} + \frac{dv^\kappa}{v^\kappa} = \frac{dp}{p} + \kappa \frac{v^{\kappa-1} dv}{v^\kappa} = \frac{dp}{p} + \kappa \frac{dv}{v}$.

Интегрируя (1.36), получим:

$$s = \frac{R}{\kappa - 1} \ln(pv^\kappa) + const. \quad (1.37)$$

Если учесть, что $v = \frac{1}{\rho}$, то

$$s = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \left(\frac{1}{\rho^\kappa} \right) + const. \quad (1.38)$$

Выражения (1.37) и (1.38) являются фундаментальными уравнениями для вычисления энтропии при обратимом процессе.

Рассмотрим конкретные термодинамические процессы:

а) Если обратимый процесс изотермический, то в этом случае $T = const$ и тогда $s = \frac{q}{T} + const$ или $\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{\Delta q}{T}$, т.е. изменение энтропии при обратимом изотермическом процессе равно приведенной (т.е. поделенной на температуру T) теплоте процесса.

Так как для изотермического процесса подведенное или отведенное тепло $\Delta q = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$, то $\Delta s = s_2 - s_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{p_1}{p_2}$.

б) Если обратимый процесс изохорный, т.е. происходит без изменения объема жидкости, то в этом случае $ds = \frac{dq}{T}$, где $dq = du = C_V dT$ и тогда

$ds = C_V \frac{dT}{T}$, что после интегрирования дает: $s = C_V \ln T + const$ или

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

в) Если обратимый процесс изобарный (при $p = const$), то для него $dq = dh$, где $dh = C_p dT$, следовательно в этом случае $ds = \frac{dq}{T} = C_p \frac{dT}{T}$, т.е.

$$s = C_p \ln T + const \text{ или } \Delta s = s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

г) Если обратимый процесс адиабатный с уравнением $pV^k = const$, то, используя формулу (1.37), получим $s = const$ или $s_2 - s_1 = 0$, т.е. энтропия сохраняет настоящее значение (см. диаграмму $T-s$ для цикла Карно). Поэтому обратимый адиабатный процесс называют также изоэнтропийным. К этому же результату можно прийти, если использовать свойство адиабатного процесса протекать без теплообмена с окружающей средой, т.е. $dq = 0$, и, следовательно, $ds = \frac{dq}{T} = 0$, $s = const$.

Решим задачу:

1) Определить изменение энтропии 1 кг CO_2 в процессе сжатия. Начальные параметры углекислоты $t_1 = 40^\circ C$, $p_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}$, конечные $t_2 = 253^\circ C$, $p_2 = 45 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}$, теплоемкость $C_p = 0,66 \frac{кДж}{кг \cdot K}$.

Решение:

Выведем общую формулу для вычисления энтропии через параметры T и p : $ds = \frac{dq}{T}$; $dq = dh - vdp$; $ds = \frac{dh}{T} - \frac{vdp}{T}$. Учтем, что $dh = C_p dT$. Из уравнения состояния $pV = RT$ находим $\frac{v}{T} = \frac{R}{p}$. Тогда: $ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$. Интегрируя, получаем: $s = C_p \ln T - R \ln p + const$ или $\Delta s = s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} -$

$$-R \ln \frac{p_2}{p_1} = 2,303 \left(C_p \lg \frac{T_2}{T_1} - R \lg \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Если в задаче будут заданы не давления, а удельные объемы или плотности газа, то изменение энтропии можно найти следующим образом:

$dq = du + pdv$; $ds = \frac{du}{T} - \frac{pdv}{T}$. Здесь $du = C_V dT$. Из уравнения состояния $pV = RT$ находим $\frac{p}{T} = \frac{R}{V}$. Тогда: $ds = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$. Интегрируя, получаем: $s = C_V \ln T + R \ln V + const$ или

$$\Delta s = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = 2,303 \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right).$$

В нашем случае: $T_2 = 526 \text{ K}$, $T_1 = 313 \text{ K}$.

Универсальная газовая постоянная $R_\mu = 8,314 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{K}}$, для CO_2 :

$$\mu = 44 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \text{ и тогда } R = \frac{R_\mu}{\mu} = 0,189 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}.$$

Будем искать изменение энтропии в $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$:

$$\begin{aligned} \Delta s = s_2 - s_1 &= 2,303 \left(C_p \lg \frac{T_2}{T_1} - R \lg \frac{p_2}{p_1} \right) = \\ &= 2,303 \left(0,661 \lg \frac{526}{313} - 0,189 \lg \frac{45}{2} \right) = -0,245 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим содержание теоремы Карно применительно к 1 кг идеального газа, участвующего в цикле Карно.

Термодинамический коэффициент полезного действия цикла Карно $\eta_t = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. Найдем количество тепла, участвующее в этом процессе.

Так как $dq = Tds$, то $q = \int Tds$. Следовательно, для нахождения количества тепла непосредственно с графика возникает необходимость введения новой системы координат $T-s$ ($T-s$ -диаграммы).

В этой системе координат (рис. 9) площадь, ограниченная линией процесса 1-2 и осью s , дает количество тепла, участвующее в процессе.

Напомним отличие диаграммы « $p-v$ » от диаграммы « $T-s$ »: система координат « $p-v$ » позволяет непосредственно с диаграммы определять механическую работу; система координат

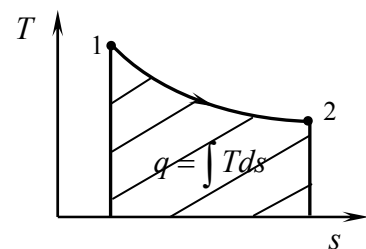


Рис. 9.

« $T - s$ » позволяет с диаграммы определять количество тепла, участвующего в процессе.

Изобразим *Цикл Карно* в новой системе координат, учитывая, что процессы $1-2$; $3-4$ – изотермические соответственно при $T_1 = const$ и

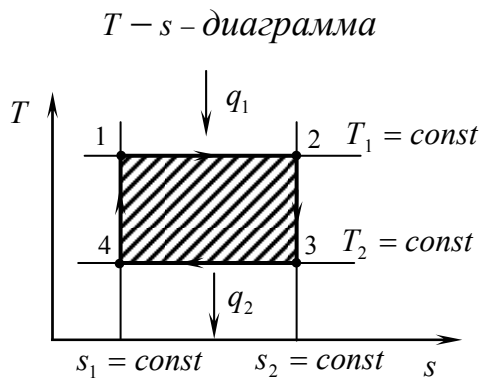


Рис. 10.

$T_2 = const$, а процессы $2-3$; $4-1$ адиабатные (изоэнтропийные) соответственно при $s_1 = const$ и $s_2 = const$.

Поскольку эффективность цикла Карно не зависит от рабочего тела, а определяется только температурами тепловых источников, то проводим на $T - s$ -диаграмме две изотермы T_1 и T_2 и две изоэнтропы s_1 и s_2 (рис 10). Заштрихованная площадь дает количество тепла, участвующее в цикле Карно.

Внутри прямоугольника $1-2-3-4$ (рис. 11), определяющего цикл Карно, поместим круговой реальный цикл с теми же значениями температур (T_1, T_2). Реальный цикл оказывается вписанным в цикл Карно и его площадь будет меньше площади цикла Карно. Это значит, что при тех же температурах T_1 и T_2 количество тепла, участвующее в реальном процессе, будет меньше количества тепла, участвующего в цикле Карно. Следовательно, любой процесс имеет КПД η_i меньший, чем у цикла Карно, так как цикл Карно имеет заштрихованные добавки к любому реальному процессу. Цикл Карно – есть идеальный теоретический цикл всякого теплового двигателя. Отсюда можно сформулировать теорему Карно: *Невозможно построить при заданных температурах T_1 и T_2 цикл или двигатель, имеющий больший КПД, чем у цикла Карно.*

Это видно из диаграммы « $T - s$ » для произвольного цикла и цикла Карно. Проведя из крайних точек a, b, c, d реального цикла (рис. 11) две горизонтальные линии T_1 и T_2 и две вертикальные линии s_1 и s_2 , получаем цикл Карно, больший по площади любого цикла на величину заштрихованных площадок. Чем меньше величина заштрихованных площадок, тем ближе КПД η_i реального цикла приближается к η_i цикла Карно.

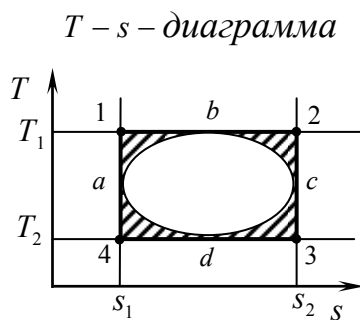


Рис. 11.

Приведем еще одну формулировку теоремы Карно: *Максимальный КПД обратимого цикла не зависит от природы рабочего тела и конструкции теплового двигателя, а является функцией только температур источника тепла и холодильника.*

1.5. Основные соотношения, связывающие первый и второй законы термодинамики

Рассмотрим основные термодинамические функции.

а) Первая функция состояния – внутренняя энергия u , которая входит в уравнение первого закона термодинамики в первой форме для единицы массы газа (1 кг): $dq = du + pdv$, откуда $du = dq - pdv = Tds - pdv$. Здесь соотношение $dq = Tds$ или $ds = \frac{dq}{T}$ является выражением второго начала термодинамики.

Так как $u = u(s, v)$, то du как полный дифференциал равен $du = \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial v} dv$. Тогда, сравнивая полученные выражения, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = T; \quad \frac{\partial u}{\partial v} = -p.$$

Продифференцируем первое уравнение по v : $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} = \frac{\partial T}{\partial v}$, продифференцируем второе уравнение по s : $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s}$.

Так как левые части обоих выражений одинаковы, то $\frac{\partial T}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial s}$.

Это первое соотношение, связывающее первый и второй законы термодинамики.

б) Вторая функция состояния – энтальпия h , которая входит в уравнение первого закона термодинамики во второй форме для единицы массы газа: $dq = dh - vdp$, откуда $dh = dq + vdp$; $dh = Tds + vdp$.

Так как $h = h(s, p)$, то dh как полный дифференциал равен $dh = \frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial p} dp$.

Сравнивая полученные выражения, получим: $\frac{\partial h}{\partial s} = T$ $\frac{\partial h}{\partial p} = v$.

Если продифференцировать первое уравнение по p , а второе по s , то получим: $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial p} = \frac{\partial T}{\partial p}$; $\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial s} = \frac{\partial v}{\partial s}$ и, следовательно: $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial s}$.

Это второе соотношение, связывающее первый и второй законы термодинамики.

в) Третьей функцией состояния является свободная энергия, которая для единицы массы газа записывается так: $f = u - Ts$. Эта функция состояния впервые введена немецким физиком Г. Гельмгольцем, поэтому свободную энергию называют еще Гельмгольца энергией. Она положена в основу доказательства тепловой теоремы Нернста, из которой вытекает третье начало термодинамики: *При температуре абсолютного нуля энтропия вещества в состоянии равновесия равна нулю.* В дифференциальной форме это выражение имеет вид: $df = du - d(Ts) = du - Tds - sdT$.

Так как $du = dq - pdv = Tds - pdv$, то $df = Tds - pdv - Tds - sdT$; $df = -pdv - sdT$. Следовательно $f = f(v, T)$, и тогда $df = \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial T} dT$.

Сравнивая полученные выражения, получим: $\frac{\partial f}{\partial v} = -p$, $\frac{\partial f}{\partial T} = -s$. Отсюда: $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial T} = -\frac{\partial p}{\partial T}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial v} = -\frac{\partial s}{\partial v}$ и тогда $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial s}{\partial v}$.

Это третье соотношение, связывающее первый и второй законы термодинамики.

Если процесс изотермический, то $T = const$ и $dT = 0$. Следовательно, свободная энергия для изотермического процесса будет равна: $df = -pdv = -dl$.

Отсюда следует, что свободная энергия является частью общей энергии, которая при изотермическом процессе переходит во внешнюю работу.

Но изотермический процесс в чистом виде получить нельзя (за исключением процесса конденсации пара в конденсированных системах), в реальности к нему можно только приблизиться. Следовательно, вышеприведенное заключение – из категории философских.

Теоретически обратимый процесс можно себе представить как процесс, протекающий бесконечно долго. Все реальные, конечные во времени процессы – необратимые, они сопровождаются определенными потерями энергии, следовательно, все тепло не может превратиться в механическую работу.

1.6. Третий закон термодинамики

Содержанием этого закона является тепловая теорема Нернста. Эта теорема также близка к философским категориям. В основу тепловой теоремы положено дифференциальное уравнение Гиббса-Гельмгольца. Оно связывает изменение свободной энергии с изменением температуры. Если взять уравнение для свободной энергии $f = u - Ts$ и вспомнить из вывода

третьего соотношения, что $-s = \frac{\partial f}{\partial T}$, то приходим к уравнению Гиббса-Гельмгольца:

$$f = u + T \frac{\partial f}{\partial T}.$$

Видно, что при $T \rightarrow 0$ $f \rightarrow u$.

Из этого следует, что в окрестности абсолютного нуля изотермические процессы идут как адиабатные за счет внутренней энергии (для адиабаты $du = -dl = -pdv$). Следовательно, изотермический процесс, у которого $df = -dl = -pdv$, около абсолютного нуля является одновременно и адиабатным (так как $f \rightarrow u$). Отсюда следует вывод, что нельзя достичь абсолютного нуля, используя адиабатный процесс расширения, хотя рассуждая теоретически, это должно выглядеть таким образом (рис. 12): При низких температурах T_1 начинаем процесс адиабатного расширения $1-2$ до T_2 , близкого к нулю; и затем осуществляем дальше процесс адиабатного расширения $2-2'$. Если бы адиабатный процесс $2-2'$ удалось осуществить, то можно было бы достичь абсолютного нуля. Однако этот процесс осуществить нельзя, поскольку в окрестности абсолютного нуля свободная энергия ведет себя как внутренняя энергия и адиабатный процесс ведет себя как изотермический, то есть процесс пойдет по прямой $2-2''$ и температура $T_2 = T_2''$ так и останется близкой к нулю, но недостижимой.

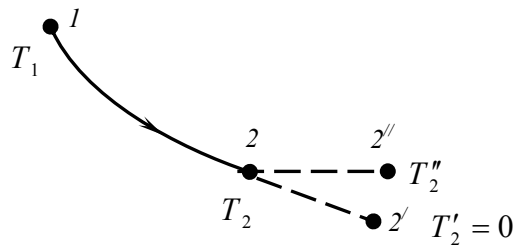


Рис. 12

Тепловая теорема Нернста формулируется следующим образом: *Нельзя получить температуру, равную абсолютному нулю, у системы путем адиабатного расширения, так как около абсолютного нуля адиабатный и изотермический процессы близки друг к другу, и температура вблизи абсолютного нуля далее снижаться не будет.*

Или тепловую теорему Нернста можно сформулировать по-другому: *В окрестности абсолютного нуля нельзя добиться процесса адиабатного расширения $2-2'$, процесс пойдет по изотерме $2-2''$.*

1.7. Циклы двигателей внутреннего сгорания и газотурбинных установок

Рассмотрим реальные основные циклы двигателей внутреннего сгорания и газотурбинных установок, применяемые в настоящее время в технике [3].

а) Цикл Отто

В конце девятнадцатого века на Парижской выставке немецкий ученый Отто предложил проект двигателя внутреннего сгорания при постоянном объеме горения. Цикл этого двигателя включает в себя (рис. 13):

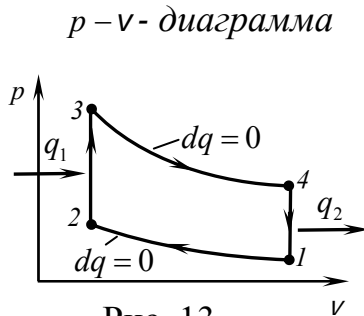


Рис. 13.

1-2 – процесс адиабатного сжатия;
3-4 – процесс адиабатного расширения.
Подвод тепла осуществляется по изохорному процессу 2-3, отвод тепла – по изохорному процессу 4-1.

Смесь топлива и воздуха сжимается в двигателе по адиабате 1-2. В точке 2 осуществляется искрообразование, смесь загорается (т.т.2-3). Затем следуют адиабатное расширение 3-4 и изохорный отвод тепла 4-1 (в атмосферу).

Особенность цикла Отто – сжатие смеси топлива и воздуха (используется высококачественное топливо). Применение – в автомобильном транспорте, в легких спортивных самолетах и т.д.

Выведем значение термодинамического КПД цикла Отто

$$\eta_t = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1}.$$

Здесь $q_1 = C_V (T_3 - T_2)$; $q_2 = C_V (T_4 - T_1)$, где C_V – теплоемкость при постоянном объеме, которую принимают постоянной. Подставив выражения для q_1 и q_2 в формулу для η_t , получим:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \quad (1.39)$$

Найдем значения T_2 , T_3 и T_4 через T_1 . Воспользуемся для этого уравнениями термодинамических процессов, осуществляемых в цикле Отто.

Для процесса адиабатного сжатия 1-2: $T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1}$, отсюда

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1}.$$

Обозначим $\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon$ – степень сжатия, тогда $T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}$

Для процесса изохорного сжатия 2-3: $\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2}$, где $\frac{p_3}{p_2} = \lambda$ – предварительное изохорное сжатие, тогда $\frac{T_3}{T_2} = \lambda$, $T_3 = T_2 \lambda = T_1 \lambda \varepsilon^{k-1}$.

Для процесса адиабатного расширения 3-4: $T_3 V_3^{k-1} = T_4 V_4^{k-1}$;
 $T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{k-1} = \frac{T_3}{\varepsilon^{k-1}}$, так как $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\varepsilon}$ и тогда окончательно:
 $T_4 = \frac{T_1 \lambda \varepsilon^{k-1}}{\varepsilon^{k-1}} = T_1 \lambda$.

Подставив полученные выражения для температур в (1.39), получим:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1 \lambda - T_1}{T_1 \lambda \varepsilon^{k-1} - T_1 \varepsilon^{k-1}} = 1 - \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1) \varepsilon^{k-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}. \quad (1.40)$$

Из этой формулы видно, что КПД η_t при постоянном объеме горения будет тем больше, чем больше степень сжатия ε . Однако ε в двигателях произвольно назначать нельзя: при очень больших ε температура T_2 станет очень большой и смесь воспламенится преждевременно (до искры). Поэтому степень сжатия ε не превышает 6 для легких топлив. Следовательно, данная степень сжатия определяет максимальную величину термодинамического КПД и это является существенным недостатком для двигателей, работающих по циклу Отто.

Дальнейшие поиски велись другим немецким ученым Дизелем, который предложил цикл при постоянном давлении горения со степенью сжатия ε до 25 и достаточно большим η_t .

б) Цикл Дизеля

Этот цикл включает в себя (рис.14):

1-2 – процесс адиабатного сжатия;

3-4 – процесс адиабатного расширения.

Воздух засасывается и сжимается по адиабате 1-2. Происходит процесс воспламенения и затем процесс изобарного горения 2-3, после чего идет расширение газа по адиабате 3-4 и наконец изохорный отвод тепла 4-1 в окружающую среду.

В цикле Дизеля используется дешевое топливо (солярка, мазут). Для этих машин не нужно высокоэффективное топливо. Поэтому степень

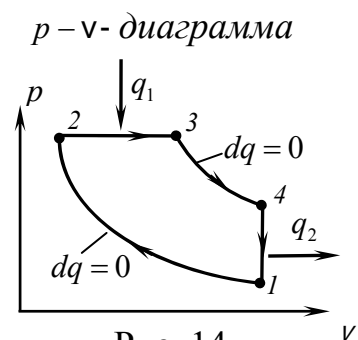


Рис. 14.

сжатия ε может быть до 25 (давление до 90 атм), но получается громоздкая конструкция, нужны компрессоры на высокое давление, передача на коленвал осуществляется с малым КПД (не превышающим 0,7).

Использование циклов Отто или Дизеля в авиации не дают возможность развития скорости самолета более 600 км/ч., поэтому перешли в дальнейшем к газотурбинным двигателям, а поршневая техника используется только в легкомоторной авиации.

Получим термодинамический КПД цикла Дизеля: $\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1}$.

Процесс 2-3: изобарный подвод тепла $q_1 = C_p(T_3 - T_2)$.

Процесс 4-1: изохорный отвод тепла $q_2 = C_v(T_4 - T_1)$.

$$\eta_t = 1 - \frac{C_v(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{k(T_3 - T_2)}, \quad (1.41)$$

где $k = \frac{C_p}{C_v}$.

Для адиабаты 1-2: $T_2 V_2^{k-1} = T_1 V_1^{k-1}$ – уравнение адиабатного процесса.

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1};$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right) = \varepsilon;$$

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}.$$

Для изобары 2-3: $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \rho$ – предварительное изобарное расширение.

Следовательно: $T_3 = T_2 \rho = T_1 \rho \varepsilon^{k-1}$.

Для адиабаты 3-4: $T_3 V_3^{k-1} = T_4 V_4^{k-1}$;

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{k-1} = T_3 \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_4} \right)^{k-1}.$$

Обозначим: $\frac{V_3}{V_2} = \rho$; $\frac{V_2}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\varepsilon}$.

Тогда: $T_4 = T_3 \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{k-1}$;

$$T_4 = T_1 \rho \varepsilon^{k-1} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{k-1} = T_1 \rho^k.$$

Подставим температуры T_2, T_3, T_4 выраженные через T_1 , в формулу (1.41):

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1 \rho^k - T_1}{k(T_1 \rho \varepsilon^{k-1} - T_1 \varepsilon^{k-1})} = 1 - \frac{\rho^k - 1}{k(\rho \varepsilon^{k-1} - \varepsilon^{k-1})} = 1 - \frac{\rho^k - 1}{k \varepsilon^{k-1} (\rho - 1)}. \quad (1.42)$$

Проведем сравнение термодинамических КПД η_t циклов с постоянным объемом горения и постоянным давлением горения.

Имеют место два случая:

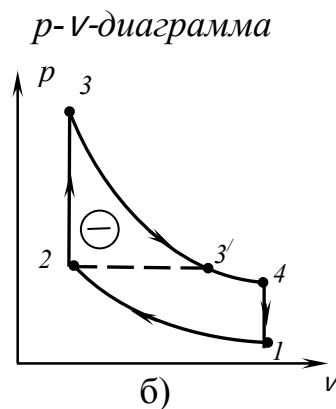
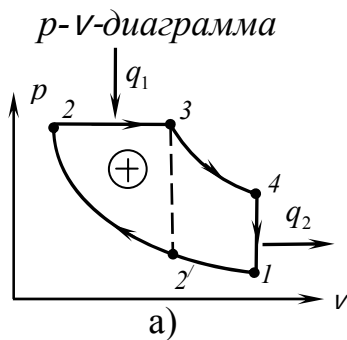


Рис. 15.

При максимально возможных степенях сжатия ε : $\eta_t \text{ дизеля} > \eta_t \text{ отто}$, так как цикл Дизеля реализует бóльшие ε . На рис.15 а:

1-2-3-4 – цикл Дизеля;

1-2'-3-4 – цикл Отто.

При одинаковых степенях сжатия ε (малых), цикл Отто имеет бóльший η_t , чем цикл Дизеля, так как использует более качественные топлива.

На рис. 15 б:

1-2-3-4 – цикл Отто;

1-2-3'-4 – цикл Дизеля.

Выбор цикла для двигателя внутреннего сгорания сопряжен со всесторонним анализом. Малые ε требуют более легкого (дорогого) топлива (для цикла Отто). Для цикла Дизеля не требуется легких топлив, следовательно, с этой точки зрения цикл Дизеля выгоднее (как использующий недорогие топлива). Но для получения высоких значений ε для цикла Дизеля нужны как минимум двухступенчатые компрессоры для сжатия рабочего тела и его распыла – это недостаток с точки зрения сложности конструкции.

Есть еще один цикл (двигатель немецкого инженера Сабате) – средний между циклами Отто и Дизеля. Сабате исключил компрессор, заменив его насосом, сжимающим воздух до 250 атм , и распыл происходил за счет энергии сжатой смеси. Двигатели Сабате применяют в морском транспорте, в тепловозах.

в) Смешанный цикл (цикл Сабате)

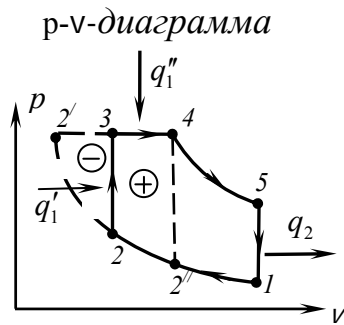


Рис. 16.

Этот цикл (рис.16) осуществляется следующим образом: сначала по адиабате 1-2 сжимается воздух; при достижении точки 2 по изохоре 2-3 производится распыл смеси и горение при постоянном объеме. В точках 3 и 4 продолжается процесс горения, но при постоянном давлении, затем по адиабате 4-5 происходит расширение и потом по изохоре 5-1 – выброс отработанных газов в окружающую среду.

Итак, в цикле Сабате процесс горения разбит на две самостоятельные части 2-3 и 3-4.

Если процесс сжатия идет по 1-2' – то смешанный цикл (1-2-3-4-5-1) по сравнению с циклом Дизеля (1-2'-4-5-1) имеет меньший КПД;

если процесс сжатия идет по 1-2'' – то смешанный цикл (1-2-3-4-5-1) по сравнению с циклом Отто (1-2''-4-5-1) имеет больший КПД.

Найдем выражение для термодинамического КПД цикла Сабате:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1}; \quad q_1 = q_1' + q_1''; \quad q_1' = C_V (T_3 - T_2) \text{ – для процесса изохорного горения;}$$

$$q_1'' = C_P (T_4 - T_3) \text{ – для процесса изобарного горения, тогда}$$

$$q_1 = C_V (T_3 - T_2) + C_P (T_4 - T_3); \quad q_2 = C_V (T_5 - T_1) \text{ – для процесса изохорного расширения.}$$

Подставляя полученные выражения для q_1 и q_2 в формулу для η_t , получим:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_5 - T_1}{(T_3 - T_2) + k(T_4 - T_3)}. \quad (1.43)$$

Для процесса адиабатного сжатия 1-2: $T_2 V_2^{k-1} = T_1 V_1^{k-1}$;

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1} = T_1 \varepsilon^{k-1}, \text{ где } \varepsilon = \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \text{ – степень сжатия.}$$

Для процесса изохорного горения 2-3: $T_3 = T_2 \cdot \lambda = T_1 \cdot \lambda \cdot \varepsilon^{k-1}$, где

$$\lambda = \frac{P_3}{P_2} = \frac{T_3}{T_2} \text{ – предварительное изохорное сжатие.}$$

Для процесса изобарного горения 3-4: $\frac{T_4}{T_3} = \frac{V_4}{V_3}$, $T_4 = T_3 \rho$, где $\rho = \frac{V_4}{V_3}$ –

предварительное изобарное расширение. Тогда $T_4 = T_1 \lambda \varepsilon^{k-1} \rho$.

Для процесса адиабатного расширения 4-5: $T_4 V_4^{k-1} = T_5 V_5^{k-1}$;

$$T_5 = T_4 \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{k-1} = T_4 \left(\frac{V_4}{V_3} \cdot \frac{V_3}{V_5} \right)^{k-1};$$

здесь $\frac{V_3}{V_5} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $T_5 = T_4 \frac{\rho^{k-1}}{\varepsilon^{k-1}} = T_1 \lambda \rho^k$.

Подставляя найденные значения всех температур в формулу (1.43), получим:

$$\begin{aligned} \eta_t &= 1 - \frac{T_1 \lambda \rho^k - T_1}{(T_1 \lambda \varepsilon^{k-1} - T_1 \varepsilon^{k-1}) + k(T_1 \lambda \varepsilon^{k-1} \rho - T_1 \lambda \varepsilon^{k-1})} = \\ &= 1 - \frac{\lambda \rho^k - 1}{\varepsilon^{k-1} [(\lambda - 1) + k \lambda (\rho - 1)]}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

г) Газотурбинные установки (ГТУ)

Газотурбинные установки позволяют при высоких тепловых нагрузках использовать так называемое промежуточное охлаждение, что позволяет приблизить политропные процессы сжатия и расширения к адиабатным.

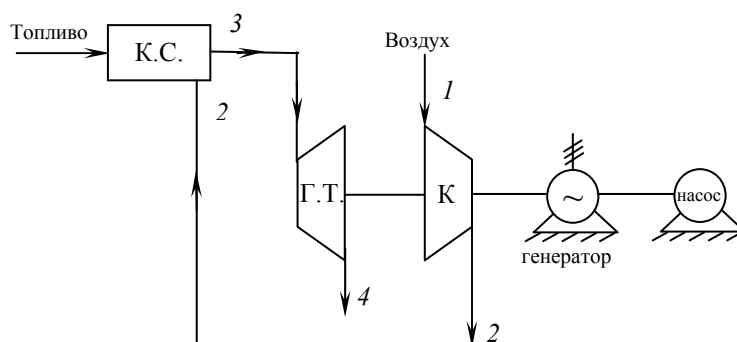


Рис. 17.

Газотурбинная установка (рис. 17) состоит из камеры сгорания (К.С.), газовой турбины (Г.Т.), которая приводит в действие компрессор (К) и электрогенератор переменного тока (или насос для перекачки газа). Компрессор служит для сжатия воздуха, камера сгорания – для сжигания топлива и подогрева газов, поступающих на газовую турбину.

На рис. 18 приведен цикл ГТУ.

В компрессоре происходит процесс адиабатного сжатия 1-2; в камере сгорания: процесс изобарного горения 2-3 при подаче топлива к сжатому воздуху; в газовой турбине осуществляется процесс адиабатного расширения 3-4 и, наконец, выхлоп отработанных газов в атмосферу по изобаре 4-1.

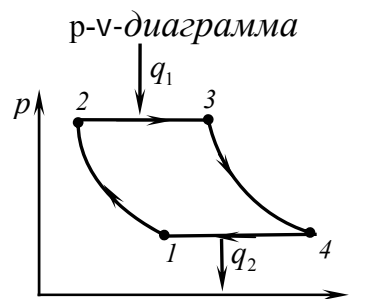


Рис. 18.

Найдем термодинамический КПД цикла газотурбинной установки.

$\eta_t = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1}$, где $q_1 = C_p(T_3 - T_2)$ – для процесса изобарного горения;

$q_2 = C_p(T_4 - T_1)$ – для изобарного отвода тепла.

Вместо степени сжатия ε вводится степень повышения давления

$$\pi = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4}.$$

Подставляя значения q_1 и q_2 в формулу для η_t , получим

$$\eta_t = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \quad (1.45)$$

Найдем выражения для всех температур, используя уравнения процессов, входящих в цикл ГТУ.

Для процесса адиабатного сжатия 1-2: $\frac{T_1}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_2}{p_2^{\frac{k-1}{k}}}$, откуда

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = T_1 \pi^{\frac{k-1}{k}}.$$

Для процесса изобарного горения 2-3: $T_3 = T_2 \rho$, где $\rho = \frac{V_3}{V_2}$ – степень предварительного изобарного расширения. Тогда $T_3 = T_1 \rho \pi^{\frac{k-1}{k}}$.

Для процесса адиабатного расширения 3-4: $\frac{T_3}{p_3^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_4}{p_4^{\frac{k-1}{k}}}$, откуда

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} = T_1 \rho \pi^{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} = T_1 \rho.$$

Тогда термодинамический коэффициент полезного действия ГТУ с учетом (1.45):

$$\eta_t = 1 - \frac{\rho - 1}{\pi^{\frac{k-1}{k}} (\rho - 1)} = 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (1.46)$$

Из этой формулы можно сделать следующий важный для практики вывод:

Машины, работающие с высоким значением степени повышения давления π , имеют более высокий КПД газотурбинной установки.

1.8. Различные формы теплопереноса

При сверхзвуковых скоростях движения, а также при теплообмене большое значение имеют теплофизические процессы. Во всех современных энергетических машинах в той или иной степени присутствует теплообмен. Понятие «теплообмен» заключается в переносе некоторого количества теплоты из одной области пространства в другую.

Существует три способа передачи тепла: путем теплопроводности, конвекции и излучения.

Теплопроводность – это передача тепла от одних частиц среды к другим под влиянием перепада температур без заметного *перемещения* частиц. В твердых непрозрачных телах теплопроводность представляет собой передачу кинетической энергии от одних молекул к другим соседним молекулам. В таких телах, как стекло и кварц, часть энергии наряду с теплопроводностью передается путем излучения. В газах и жидкостях передача тепла теплопроводностью может дополняться передачей конвекцией и излучением. В ламинарно текущей жидкости тепло передается теплопроводностью в направлении, перпендикулярном направлению движения жидкости.

Второй формой теплообмена является перенос тепла посредством **конвекции**. Этот перенос осуществляется в тех случаях, когда частицы тела меняют свое местоположение в пространстве и при этом выполняют роль носителей тепла. Такой процесс происходит в движущихся жидкостях и газах и всегда сопровождается передачей тепла от частицы к частице при условии, что вся масса текущей жидкости не обладает одинаковой температурой.

Если не рассматривать процессы, происходящие на твердых поверхностях, ограничивающих поток, можно обе формы переноса объединить одним понятием – *теплопроводностью в движущихся средах*. Если же рассматриваются и твердые стенки, то в общем случае между стенками и движущейся средой наблюдается теплообмен, который обусловлен тем, что частицы среды, соприкасающейся со стенкой, воспринимают от нее тепло и уносят его с собой. Теплообмен между средой и стенкой называют *теплоотдачей*.

Конвекция представляет собой передачу тепла путем перемешивания одних порций жидкости (или газа) с другими. Движение жидкости при этом может быть либо результатом разности плотностей, возникающей при разности температур (случай естественной или свободной конвекции), либо результатом механического воздействия (вынужденная конвекция).

Третья форма теплообмена – перенос тепла посредством **излучения**. Эта форма характеризуется тем, что некоторая часть внутренней энергии тел преобразуется в энергию излучения (энергию электромагнитных колебаний) и уже в такой форме передается через пространство. Встречая на

своем пути другое тело, лучистая энергия полностью или частично вновь превращается в теплоту.

Различные формы переноса тепла редко встречаются в отдельности. Наоборот, в большинстве случаев они как-то сопутствуют друг другу. При этом в соответствующих случаях даже целесообразно при количественном исследовании рассматривать всю совокупность явлений как одно целое.

Аналитическая теория теплопроводности полностью отвлекается от молекулярного строения вещества. Отсюда следует, что при всех выводах считают рассматриваемые области пространства большими по сравнению с размерами молекул или расстояниями между двумя молекулами. Если не делается специальной оговорки, то тела рассматриваются как однородные и изотропные.

Механизм передачи тепла при стационарном процессе теплопроводности, идущего только в одном направлении, определяется простым соотношением Фурье:

$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda S \operatorname{grad}_x T,$$

где Q – тепловой поток вдоль оси X ; S – площадь поперечного сечения, через которое проходит тепло; $\frac{dT}{dx}$ – температурный градиент вдоль оси X ,

за положительное направление которого считается направление в сторону роста температуры; λ – коэффициент теплопроводности, характеризующий физические свойства вещества $\left[\frac{Вт}{м \cdot К} \right]$. Так как теплота распространяется в сторону понижения температуры, а градиент направлен в сторону ее возрастания, то в формуле ставится знак «-».

При изучении процессов переноса тепла конвекцией наибольший интерес представляет вопрос о количестве тепла, передаваемого от твердой стенки к жидкости (газу) или наоборот, воспринимаемой ею при обратном процессе.

Теплообмен между стенкой и средой характеризуется уравнением, которое соответствует *ньютонову закону охлаждения*: $Q = \alpha S (T_w - T)$, где T_w – температура стенки, T – температура жидкости, α – коэффициент теплообмена $\left[\frac{Вт}{м^2 \cdot К} \right]$.

Для удельного теплового потока (на единицу поверхности) можно записать: $q = \frac{Q}{S} = \alpha (T_w - T) = \alpha \theta$, где $\theta = T_w - T$.

Из теории пограничного слоя известно, что при движении вязкой жидкости вдоль стенки существует тонкий слой потока, «прилипший» к

твердой стенке. В этом неподвижном слое жидкости тепло может передаваться только путем теплопроводности, так что для удельного теплового потока у стенки можно записать: $q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_w$, где \vec{n} – направление нормали к стенке, $\left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_w$ – температурный градиент у поверхности стенки.

Таким образом, при оценке теплообмена тел, обтекаемых потоком, можно установить следующее тождество: $\alpha \theta = -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_w$.

Явления теплопроводности и конвекции определяются главным образом разностью температур θ и незначительно самим температурным уровнем, тогда как доля лучистого теплообмена быстро возрастает с повышением этого уровня. Отсюда следует, что при низких температурах теплопроводность и конвекция играют основную роль в общей теплопередаче, а при высоких температурах основным видом теплопередачи является излучение. Идеальным излучателем, поглощательная способность поверхности которого равна 1, а отражательная способность равна 0, является абсолютно черное тело.

Закон излучения абсолютного черного тела (закон Стефана-Больцмана) записывается следующим образом: Тепловая энергия $W = \sigma \cdot T^4$, где σ – постоянная Стефана-Больцмана; W – есть функция только температуры T .

II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Задачи динамики идеальной среды [4, 5] решаются на основе следующей системы уравнений:

– уравнение движения:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p . \quad (2.1)$$

Здесь ρ – плотность газа; \vec{v} – вектор скорости; \vec{F} – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы газа; p – давление в данной точке потока;

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ – индивидуальная (полная) производная по времени от

вектора скорости или полное ускорение, состоящее из локального $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ и

конвективного $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ ускорений.

– уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 . \quad (2.2)$$

– уравнение энергии для единицы массы идеального газа:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dq}{dt} , \quad (2.3)$$

где h – энтальпия, q – подведенное (отведенное) тепло. Это уравнение получается из второй формы записи первого закона термодинамики:

$dq = dh - v dp$ или $dq = dh - \frac{dp}{\rho}$, так как $v = \frac{1}{\rho}$. Тогда $dh = dq + \frac{dp}{\rho}$ или

$\rho dh = \rho dq + dp$. Дифференцируя по t , получим: $\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dq}{dt}$.

– уравнение состояния в общем виде:

$$f(p, \rho, T) = 0 , \quad (2.4)$$

где T – температура среды.

Уравнение состояния и уравнение энергии можно заменить одним уравнением процесса.

Так, например, для адиабатного ($dq = 0$) стационарного процесса

уравнение энергии приобретает вид: $\rho dh = dp$, откуда $dh = \frac{dp}{\rho}$.

Энтальпия $h = C_p T$. Из **уравнения состояния** $\frac{p}{\rho} = RT$ найдем

$T = \frac{1}{R} \frac{p}{\rho}$. Тогда $h = \frac{C_p}{R} \frac{p}{\rho}$. Используем уравнение Майера $C_p - C_v = R$, по-

лучим $h = \frac{C_p}{C_p - C_v} \frac{p}{\rho}$. Разделим числитель и знаменатель полученного вы-

ражения на C_v . Тогда $h = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$, так как отношение теплоемкостей

$\frac{C_p}{C_v} = k$, где k – показатель адиабаты.

Продифференцируем последнее выражение: $dh = \frac{k}{k-1} d\left(\frac{p}{\rho}\right)$. Исполь-

зуя выражение $dh = \frac{dp}{\rho}$, получим:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} d\left(\frac{p}{\rho}\right); \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{dp}{\rho} - p \frac{d\rho}{\rho^2}\right).$$

Перенесем все члены полученного уравнения в правую часть и сгруппируем: $\left(\frac{k}{k-1} - 1\right) \frac{dp}{\rho} - \frac{kp}{k-1} \frac{d\rho}{\rho^2} = 0; \frac{1}{k-1} \frac{dp}{\rho} - \frac{kp}{k-1} \frac{d\rho}{\rho^2} = 0$.

Преобразуем последнее выражение: $\frac{dp}{\rho} - kp \frac{d\rho}{\rho^2} = 0; \frac{dp}{p} - k \frac{d\rho}{\rho} = 0$.

Интегрируя, получим: $\ln p - k \ln \rho = \ln c; \ln \frac{p}{\rho^k} = \ln c$ или $\frac{p}{\rho^k} = const$.

Это и есть **уравнение адиабатного процесса**.

Очевидно, что данная система уравнений является нелинейной, поскольку член $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ в уравнении движения является нелинейным, поэтому задача решения вышеприведенной системы уравнений является довольно сложной. Поэтому, если возможно, надо избавляться от нелинейного члена $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, как это сделал, например, в свое время Даниил Бернулли, швейцарский математик и механик, действительный член Петербургской академии наук.

2.1. Интеграл Бернулли уравнения движения

Если массовые силы имеют потенциал, то существует такая функция Π , которая удовлетворяет условию: $\vec{F} = -grad\Pi$, где Π – потенциал массовых сил \vec{F} (знак «-» по условию).

Бернулли рассмотрел случай, когда под действием потенциального поля массовых сил с потенциалом Π идеальная жидкость совершает *стационарное* баротропное движение (т.е. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$). Кроме того, он предположил, что изменение плотности тоже имеет стационарный характер (т.е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

В этом случае уравнение движения имеет вид: $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \rho\vec{F} - gradp$ или

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp. \quad (2.5)$$

В общем случае плотность среды есть функция давления и температуры $\rho = \rho(p, T)$, и такой процесс называют *бароклиным*. При баротропном же процессе (баротропном равновесии газа) плотность газа есть функция только давления: $\rho = \rho(p)$.

В этом случае можно ввести *функцию давления* \mathcal{P} : $\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$.

Продифференцируем эту функцию давления: $d\mathcal{P} = \frac{dp}{\rho}$.

Поскольку это полные дифференциалы, можно записать:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right).$$

Отсюда видно: $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$; $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$.

Тогда: $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \vec{k} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right)$.

Здесь: $grad\mathcal{P} = \nabla\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \vec{k}$; $gradp = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$.

Таким образом, градиент функции давления равен: $grad\mathcal{P} = \frac{1}{\rho} gradp$.

Поскольку величина $(\frac{1}{\rho} grad p)$ в уравнении движения является главным вектором сил давлений в данной точке (отнесенным к единице массы), то функция давления \mathcal{P} представляет собой потенциал сил давления, для которого $grad \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} grad p$.

Таким образом, можно отметить, что при математическом моделировании процессов аэрогидромеханики задействованы следующие потенциалы:

- скорости φ : $\vec{v} = grad \varphi$;
- сил давления \mathcal{P} : $\frac{1}{\rho} grad p = grad \mathcal{P}$;
- массовых сил Π : $\vec{F} = -grad \Pi$.

Продолжим далее вывод интеграла Бернулли.

Из векторного анализа известно, что член $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = rot \vec{v} \times \vec{v} + grad \frac{v^2}{2}$.

Тогда уравнение (2.5) примет вид: $rot \vec{v} \times \vec{v} = -grad \left(\Pi + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} \right)$ или

$$rot \vec{v} \times \vec{v} = -grad H, \quad (2.6)$$

где

$$H = \Pi + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P}. \quad (2.7)$$

Если скалярно умножить обе части уравнения (2.6) на единичный вектор \vec{e} , касательный к линии тока, то $(grad H) \cdot \vec{e} = 0$, так как $(rot \vec{v} \times \vec{v}) \cdot \vec{e} \equiv 0$. Это видно из следующих рассуждений.

Вектор \vec{v} направлен по касательной к линии тока, вектор $rot \vec{v}$ – по касательной к вихревой линии. Векторное произведение двух векторов – это третий вектор, перпендикулярный к первым двум, следовательно, вектор $(rot \vec{v} \times \vec{v})$ направлен перпендикулярно к линии тока. Таким образом, вектор \vec{e} , направленный по касательной к линии тока, будет перпендикулярен вектору $(rot \vec{v} \times \vec{v})$, а скалярное произведение двух векторов, перпендикулярных друг к другу, равно нулю, следовательно $(rot \vec{v} \times \vec{v}) \cdot \vec{e} \equiv 0$.

Кроме того, $(rot \vec{v} \times \vec{v}) = 0$:

- а) для безвихревого или потенциального потока, для которого $rot \vec{v} = 0$;
- б) для скорости потока $\vec{v} = 0$;

в) когда векторы $rot \vec{v}$ и \vec{v} параллельны и поэтому их векторное произведение равно нулю – это случай так называемого винтового движения (редко встречающегося в практике).

Из вышесказанного можно заключить, что $gradH = 0$, так как $\vec{e} \neq 0$, или $\frac{\partial H}{\partial l} = 0$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ - производная, взятая вдоль линии тока. Следовательно: $H = const$. Тогда, с учетом (2.7) имеем:

$$\Pi + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = const = C_e \quad (2.8)$$

Это и есть интеграл Бернулли. Он действителен для течения идеального газа в стационарных условиях, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

Интеграл Бернулли выражает закон сохранения полной механической энергии $\Pi + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = C_e$, который формулируется следующим образом:

сумма потенциальной энергии (Π), кинетической энергии $\left(\frac{v^2}{2}\right)$ и функции давления (\mathcal{P}), отнесенных к единице массы газа – есть для данной линии тока величина постоянная.

Рассмотрим виды функции давления \mathcal{P} для основных частных случаев баротропного равновесия:

а) газ несжимаем, т.е. имеет повсюду одинаковую плотность $\rho = \rho_0 = const$, тогда

$$\mathcal{P} = \frac{p - p_0}{\rho}; \quad (2.9)$$

б) изотермический процесс (изотермическое течение) при постоянной температуре $T = T_0 = const$. Тогда из уравнения Клапейрона следует: $\frac{p}{\rho} = RT_0 = const$, откуда $\rho = \frac{p}{RT_0}$.

С другой стороны, для нулевых условий: $\frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$, следовательно $\frac{1}{RT_0} = \frac{\rho_0}{p_0}$. С учетом этого выражения имеем $\rho = p \frac{\rho_0}{p_0}$.

Подставляя выражение для плотности ρ в формулу для функции давления, получим:

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln p \Big|_{p_0}^p = \frac{p_0}{\rho_0} (\ln p - \ln p_0) = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}; \quad (2.10)$$

в) адиабатный процесс с уравнением $\frac{p}{\rho^k} = const$, или $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$. Тогда $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$, откуда $dp = \frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-1} d\rho$.

Внесем выражение для dp в формулу для функции давления:

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = k \frac{p_0}{\rho_0^k} \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{k-2} d\rho = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0^k} (\rho^{k-1} - \rho_0^{k-1}) = -\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} \right].$$

Так как $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$, то $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}$ и тогда

$$\mathcal{P} = -\frac{k-1}{k} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \quad (2.11)$$

Решим задачи:

1) Найти функцию давления $\mathcal{P}(p)$ при баротропном течении идеальной жидкости с уравнением состояния $\frac{p}{\rho^k} = \lambda$, где λ и k – постоянные.

Решение:

По определению функция давления: $\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$.

а) Найдем ρ из уравнения состояния: $\rho = \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}}$ и подставим в предыдущее уравнение:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p) &= \int_{p_0}^p \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{k}} dp = \lambda^{\frac{1}{k}} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = \\ &= \frac{k-1}{k} \lambda^{\frac{1}{k}} \left[p^{\frac{k-1}{k}} \right]_{p_0}^p = \frac{k-1}{k} \lambda^{\frac{1}{k}} \left(p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} \right). \end{aligned}$$

Учтем, что $\lambda^{1/k} p^{k-1/k} = \frac{p}{p^{1/k}} \lambda^{1/k} = \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$, так как $\rho = \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{1/k}$ из заданного в

задаче уравнения состояния. Тогда получаем окончательно:

$$\mathcal{P}(p) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Этот же результат можно получить другим путем:

б) Из уравнения состояния $p = \lambda \rho^k$ получаем: $dp = \lambda k \rho^{k-1} d\rho$. Тогда:

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \lambda k \rho^{k-2} d\rho = \frac{\lambda k}{k-1} [\rho^{k-1}] \Big|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{\lambda k}{k-1} (\rho^{k-1} - \rho_0^{k-1}).$$

Учитывая, что: $\lambda \rho^{k-1} = \frac{\lambda \rho^k}{\rho} = \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$, получаем: $\mathcal{P}(p) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right)$.

2) Идеальная жидкость, удовлетворяющая уравнению $\frac{p}{\rho^k} = \lambda$ (где λ и

k – постоянные), вытекает из большого закрытого резервуара через сливное отверстие небольшого диаметра, течение стационарное и баротропное. Определить скорость истечения, если давление в резервуаре равно p_1 , а давление в струе на выходе из резервуара равно p_2 . Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Интеграл Бернулли для установившегося баротропного течения идеальной жидкости в поле сил тяжести (вдоль оси z) имеет вид:

$$\Pi + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = const.$$

В нашем случае: $\Pi=0$ и интеграл Бернулли можно записать в виде:

$$\frac{v_1^2}{2} + \mathcal{P}_1 = \frac{v_2^2}{2} + \mathcal{P}_2. \text{ Скоростью течения на свободной поверхности жидкости}$$

в резервуаре можно пренебречь $v_1=0$ и тогда: $\frac{v_2^2}{2} + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$ или $v_2^2 = 2(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)$.

Функция давления $\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$. В нашем случае $p = \lambda \rho^k$,

$dp = \lambda k \rho^{k-1} d\rho$, тогда:

$$\mathcal{P}(p) = \int_{\rho_0}^{\rho} \lambda k \rho^{k-2} d\rho = \frac{\lambda k}{k-1} [\rho^{k-1}] \Big|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{k}{k-1} (\lambda \rho^{k-1} - \lambda \rho_0^{k-1}).$$

Так как по условию $\lambda = \frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$, то $\mathcal{P}(p) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right)$. Используя это выражение в формуле для выходной скорости, получим:

$$v_2^2 = 2(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right).$$

Тогда искомая скорость истечения струи $v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)}$.

2.2. Теорема Бернулли

Если в частном случае взять несжимаемую жидкость ($\rho = const$), для которой функция давления $\mathcal{P} = \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + const$, а также ограничиться среди массовых сил только силами тяжести (тогда $\Pi = gz + const$, ось z — направлена вертикально вверх), то интеграл Бернулли приобретает вид:

$$H = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const = c_e.$$

Если от плотности ρ перейти к удельному весу $\gamma = \rho g$, то получим уравнение Бернулли:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = const \quad (2.12)$$

или

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Это выражение приводит к классической формулировке теоремы Бернулли: **Сумма геометрического напора (высоты), пьезометрического напора и скоростного напора для данной линии тока есть величина постоянная.**

Или формулировка, более близкая к авторской: *При стационарном движении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости гидравлическая высота (H), равная сумме скоростной, пьезометрической и нивелирной высот, сохраняют постоянное значение вдоль линии тока (траектории).*

Эта математическая запись теоремы Бернулли используется в гидравлике и называется *уравнением Бернулли*. Это интеграл уравнения движения в частном случае стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости.

Если пренебречь массовыми силами (силами тяжести) по сравнению с поверхностными (силами давления), то уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости примет более простой вид: $p + \frac{\rho v^2}{2} = const = p_0$, где p – пьезометрический напор; $\frac{\rho v^2}{2}$ – скоростной напор (динамический напор); p_0 – полный напор. Тогда теорема Бернулли формулируется так:

При стационарном движении идеальной несжимаемой жидкости в отсутствии массовых (объемных) сил, полный напор, равный сумме пьезометрического и скоростного напоров, сохраняет свою величину вдоль линии тока (траектории).

Упоминание о траектории в формулировках теоремы Бернулли уместно потому, что при стационарном движении жидкости или газа уравнения линий тока и траекторий совпадают.

Учитывая выражения для функций давления \mathcal{P} (2.10) и (2.11), получим следующие формы интеграла Бернулли (2.8) для несжимаемой жидкости (при $\rho = \rho_0 = const$ и $\Pi=0$):

а) для изотермического движения

$$\left(T = const, \frac{p}{\rho} = const, \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \right):$$

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = const = \frac{v_0^2}{2},$$

так как $\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln 1 = 0$.

б) для адиабатного движения $\left(\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k; \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/k} \right):$

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \frac{v^2}{2} - \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{v^2}{2} - \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right] = const = \frac{v_0^2}{2},$$

где $\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right] = 0$, так как $\frac{\rho}{\rho_0} = 1$.

Таким образом, как для изотермического, так и для адиабатного течения интеграл Бернулли имеет вид: $\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \frac{v_0^2}{2} = const$.

Решим задачи:

1) Из большого закрытого резервуара вытекает несжимаемая жидкость через отверстие небольшого диаметра. Течение баротропное и стационарное. Найти скорость истечения жидкости из резервуара, если давление в резервуаре равно p , давление в струе равно атмосферному, в случаях: а) высота столба жидкости равна h ; б) силой тяжести пренебречь.

Решение:

Для установившегося баротропного течения несжимаемой жидкости уравнение Бернулли имеет вид: $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$ или

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2.$$

В нашем случае будем считать: $p_1 = p$; $p_2 = p_{атм.}$; $z_1 - z_2 = h$; скорость жидкости на свободной поверхности в резервуаре $v_1 = 0$. Тогда для нашего случая уравнение Бернулли будет иметь вид: $\frac{v^2}{2} + \frac{p_{атм.}}{\rho} = \frac{p}{\rho} + gh$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_{атм.})}{\rho} + 2gh} \text{ (случай «а»)}.$$

Условие равенства силы тяжести нулю (для случая «б») означает, что $h = 0$, тогда $v = \sqrt{\frac{2(p - p_{атм.})}{\rho}}$.

2) Определить давление p_1 в сечении 1 горизонтально расположенного сопла гидромонитора, необходимое для придания воде в выходном сечении 2 скорости $v_2 = 40$ м/с, если скорость движения воды в сечении 1 $v_1 = 3$ м/с (плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³).

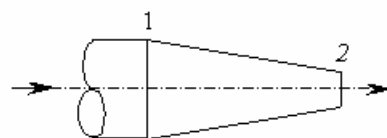


Рис. 19

Решение:

Уравнение Бернулли для потока жидкости без учета потерь энергии, т.е. для идеальной (невязкой) жидкости, составленное для двух расчетных сечений 1 и 2 относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения, записывается в следующем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Если плоскость сравнения провести через ось сопла, то удельные энергии положения $z_1 = z_2 = 0$ и уравнение Бернулли будет иметь вид:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Из условия задачи очевидно, что жидкость является несжимаемой ($\rho = const$), тогда с учетом $\gamma = \rho g$, получим: $\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$.

Найдем отсюда выражение для давления воды на входе в сопло:

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Давление p_2 равно атмосферному: $p_2 = 10^5 \text{ Па}$.

Тогда $p_1 = 10^5 + \frac{1000}{2}(40^2 - 3^2) \approx 9 \cdot 10^5 \text{ Па} \approx 0,9 \text{ МПа}$.

Здесь учтено, что $1[H] = 1\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right]$, $1\left[\frac{H}{\text{м}^2}\right] = 1[\text{Па}]$

2.3. Интеграл Коши-Лагранжа для нестационарного движения идеальной среды

Вопрос об интегрировании уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера): $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$ при наличии уравнения неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ для нестационарных движений был впервые поставлен Коши. Он проинтегрировал это уравнение, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$. Получим этот интеграл.

Так как $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad} \frac{v^2}{2}$, то подставив это выражение в уравнение Эйлера, получим: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \frac{v^2}{2}$.

Это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = -\text{grad} \Pi - \text{grad} \mathcal{P} - \text{grad} \frac{v^2}{2},$$

так как $\vec{F} = -\text{grad} \Pi$, $\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} \mathcal{P}$. Тогда:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = -\text{grad} H, \quad (2.13)$$

где $H = \Pi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2}$.

Очевидно, что $\text{rot} \vec{v} \times \vec{v}$ – нелинейный член. Этот член $\text{rot} \vec{v} \times \vec{v}$ может быть равным нулю, когда скоростное поле является потенциальным, т.е. $\vec{v} = \text{grad} \varphi$, и тогда: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi = \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

В этом случае вектор вихря скорости $\text{rot} \vec{v} = \text{rot} \text{grad} \varphi \equiv 0$, так как потенциальное течение – безвихревое. С учетом этого уравнение (2.13) переписывается в виде: $\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{grad} H$ или $\text{grad} H' = 0$, где

$$H' = H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Pi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тогда $\frac{\partial H'}{\partial l} = 0$ и интегрируя, получим $H' = H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C_i = \text{const}$. Здесь $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ – инерционный напор или инерционное давление.

Необходимо отметить, что $C_i = \text{const}$ для данного (конкретного) интервала времени.

В общем случае нестационарного движения идеальной жидкости получаем следующее выражение:

$$\Pi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t). \quad (2.14)$$

Это и есть интеграл Коши-Лагранжа, где $f(t)$ – функция времени, определяемая из граничных условий.

При $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ функция $f(t) = \text{const}$ и интеграл Коши-Лагранжа превращается в обычный интеграл Бернулли: $\Pi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} = \text{const}$.

Интеграл Коши-Лагранжа в теории нестационарного движения идеальной жидкости играет такую же роль, что и интеграл Бернулли при стационарном движении.

2.4. Интеграл Бернулли уравнения энергии

В случае адиабатного процесса (при $dq = 0$) уравнение энергии (2.3) будет иметь вид: $\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt}$, и тогда для стационарного процесса $dh = \frac{dp}{\rho}$

или $dh = d\mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$.

Интегрируя, будем иметь:

$$h = \mathcal{P} + const. \quad (2.15)$$

Используем интеграл Бернулли уравнения движения

$$\Pi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} = const = C_e.$$

Выразив отсюда \mathcal{P} и подставив в уравнение (2.15), получим:

$$h + \Pi + \frac{v^2}{2} = C_e. \quad (2.16)$$

Это и есть интеграл Бернулли уравнения энергии, который гласит:
Сумма энтальпии, потенциала массовых сил и кинетической энергии единицы массы газа равна постоянной величине для данной линии тока.

III. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОПЫТАХ. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Необходимость моделирования явлений и использования теории подобия обусловлены сложным характером многих аэрогидромеханических процессов, происходящих в современных энергетических и механических установках. До настоящего времени не представляется возможным либо создания достоверных математических моделей из-за сложности протекаемых в них процессов, либо возможности проведения вычислительного эксперимента на современных ЭВМ за приемлемое время. К таким процессам можно отнести тепловые процессы, происходящие, например, в камерах сгорания жидкостных ракетных двигателей, ядерные процессы в реакторах атомных электростанций, трехмерные течения вязких сжимаемых жидкостей и газов в трактах машин и т.д. В этом случае для изучения таких явлений и приходит на помощь теория подобия, основанная на моделировании аэрогидромеханических процессов, наблюдаемых в технике.

Моделирование в опытах – это замена изучения реального (натурного) процесса изучением аналогичного процесса на модели, воспроизводимого исследователями, как правило, в специально оборудованных лабораториях (в экспериментальных условиях). Основная цель моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов на моделях давать ответы о характере процессов, происходящих в натуральных условиях.

Однако результаты опытов на модели могут быть использованы для решения задач практики только в том случае, если при проведении опытов соблюдаются определенные законы моделирования [6].

Моделирование является весьма большой и ответственной научной задачей. Иногда исследование с помощью моделей является единственно возможным способом экспериментального изучения некоторых практически важных процессов. Так, процессы, которые длятся в течение многих лет или даже тысячелетий, нельзя исследовать в натуре, но можно в течение короткого промежутка времени (часы, дни) изучать на моделях. К таким процессам можно отнести фильтрацию нефти в земле, образование русел рек и пр. Могут быть и обратные случаи, когда быстро протекающие во времени процессы изучаются на моделях в течение более длительного времени, например, ядерный взрыв.

Моделирование различных физических процессов исходит из подобия рассматриваемых явлений.

Два явления называются подобными, если по характеристикам одного можно получить характеристики другого путем простого пересчета, аналогичного переходу от одной системы единиц к другой. Условиями подобия двух явлений являются равенства некоторых безразмерных параметров, называемых числами подобия.

Определение чисел подобия при моделировании изучаемых процессов требует глубокого знания механизма этих процессов и в общем случае яв-

ляется сложной задачей. При решении этой задачи следует все изучаемые процессы разделять на две существенно отличные группы. К первой надо отнести процессы и явления, которые можно описать уравнениями. Ко второй, представляющей наибольший интерес, относятся процессы и явления, еще не имеющие математического описания.

В случаях, когда уравнения исследуемых процессов неизвестны, единственной теорией, позволяющей найти числа подобия, является теория размерностей. При наличии дифференциальных уравнений исследуемых процессов числа подобия легко определяются как коэффициенты уравнений, представленных в безразмерном виде. Заметим, что степень сложности уравнений при этом не имеет никакого значения, так как для нахождения чисел подобия процесса, описываемого данным уравнением, его решения не требуется. Естественно, что получение чисел подобия при наличии уравнений значительно проще, чем при отсутствии их. Поэтому теорию размерностей следует применять при получении чисел подобия лишь для процессов, не имеющих математического описания.

Изучение любого процесса сводится к тому, что по заданным величинам находятся неизвестные численные характеристики, определяющие этот процесс. Числа подобия, полученные из величин, заданных для данного процесса, обычно называют критериями подобия.

3.1. Подобие аэрогидромеханических процессов

В аэрогидромеханике теория подобия потоков имеет особо важное значение, так как она устанавливает законы перенесения экспериментальных данных, полученных на модели при имитации условий движения, на натуральный объект (самолет, ракету, топливные магистрали и т.д.).

Процесс изучения объекта (или физического явления) при помощи математической или физической модели называется *моделированием*. Отсюда различают два вида моделирования: физическое и математическое. Если физика явлений в исследуемом объекте и его модели одинакова, то такое моделирование называется *физическим*. Основное достоинство физического моделирования состоит в том, что оно позволяет непосредственно наблюдать характер протекания физического процесса на модели.

В мировой практике самолетостроения при оптимизации параметров и доводке вновь разрабатываемого самолета на современном уровне науки и техники согласно опубликованным данным изготавливается значительное число моделей, превышающее 40-50 шт., а суммарное время испытаний различных моделей одного и того же самолета доходит до 17000 ч. в специальной аэродинамической трубе, воспроизводящей условия полета. Так, при создании сверхзвукового самолета «Конкорд» в Англии и Франции были проведены испытания моделей, изготовленных в разных масштабах

1:8, 1:30; 1:60, при сверхзвуковых скоростях, которые проводились более чем в десяти аэродинамических трубах.

Из этого примера видно, что несмотря на высокий уровень развития современной теории, далеко не все задачи могут быть решены теоретически с достаточной для практических целей точностью. Поэтому многие задачи приходится решать экспериментально. При создании современных гидравлических и газодинамических машин, летательных аппаратов, технических сооружений и установок аэродинамический и гидродинамический расчеты являются важнейшими и обязательными этапами проектирования, но все же результирующая оценка качеств и характеристик создаваемой машины или сооружения производится на основе экспериментальных испытаний модели или натурального объекта. Роль аэрогидродинамического эксперимента велика, и существует обширный раздел аэрогидромеханики, составляющий в значительной степени самостоятельную дисциплину – экспериментальную гидродинамику, где проводят опыты с жидкой средой (или экспериментальную аэродинамику, если речь идет об опытах с воздушной средой).

При постановке аэрогидродинамического эксперимента одним из основных является вопрос о том, по каким правилам должна быть изготовлена модель испытываемого объекта и по каким зависимостям следует пересчитать данные опытов, чтобы получить достоверное описание натурального аэрогидродинамического явления. На этот вопрос дает ответ теория подобия, которая по существу является теоретической основой эксперимента.

В теории подобия два явления называются *физически подобными*, если для них можно установить соответственные точки пространства и соответственные моменты времени так, чтобы в этих точках пространства и в эти моменты времени все физические параметры, характерные для данных явлений, были пропорциональны. Физическое моделирование в аэрогидромеханических исследованиях базируется на понятии физического (в нашем случае механического) подобия, под которым понимается комплекс условий, обеспечивающих одновременно различные виды подобия. В теории подобия различают геометрическое, кинематическое и динамическое подобия.

Геометрическое подобие – подобие формы или границ областей течений (расстояний или координат). Тела или системы называются геометрически подобными, если отношения их сходственных линейных размеров одинаковы.

Следует отметить, что к числу линейных размеров относятся и размеры, определяющие положение геометрически подобных тел в пространстве (например, пропорциональность и коллинеарность радиусов-векторов сходственных точек относительно начала координат модели и натуре).

В геометрически подобных телах и системах соответствующие углы равны.

Кинематическое подобие – подобие движения или подобие полей скоростей. Движения двух систем кинематически подобны, если при соблюдении геометрического подобия во всех сходственных точках этих систем в сходственные моменты времени векторы скоростей имеют одинаковые направления, а отношения модулей скоростей постоянны. В частности, кинематически подобные потоки жидкости имеют линии тока одинаковой формы с подобными граничными условиями.

Динамическое подобие – подобие сил. Две системы динамически подобны, если при выполнении геометрического подобия выполняются следующие три условия:

- в сходственных точках этих систем в сходственные моменты времени (для стационарных процессов любые моменты времени являются сходственными) действуют одноименные силы (одной и той же природы);
- отношения между всеми одноименными силами во всех сходственных точках систем одинаковы;
- движения систем должны подчиняться одинаковым дифференциальным уравнениям, а также одинаковым начальным и подобным граничным условиям.

Таким образом, теория подобия дает возможность правильно обобщить экспериментальные или расчетные данные и по результатам исследования модели сделать заключения о характеристиках натурального объекта.

Дадим более полное определение видов подобий. Пусть имеется натуральный объект (поток), подлежащий аэро- или гидродинамическому исследованию, и его модель. Все параметры натурального потока будем отмечать индексом «*n*», а модельного – индексом «*m*». Чтобы получить область течения, геометрически подобную натурному потоку, разделим все линейные размеры последнего на некоторое число m_l – линейный масштаб и полученные результаты примем за соответствующие линейные размеры модельного потока. Число m_l выбирают из практических соображений, которые диктуются, например, производственными возможностями лаборатории.

Таким образом, получаем связь между геометрическими параметрами l_n и l_m натурального и модельного потоков: $l_n / l_m = m_l$. Линейные размеры, связанные этим соотношением, называют *соответственными* или *сходственными*. Точки, координаты которых удовлетворяют этому соотношению, называют сходственными точками.

Модельный поток, геометрические параметры которого удовлетворяют вышеприведенному условию, назовем геометрически подобным натурному потоку. Иначе можно сказать, что два потока будут геометрически подобными, если любой линейный размер одного из них можно получить из линейного размера другого путем умножения на постоянный множитель.

Допустим теперь, что натуральный и модельный потоки геометрически подобны. Обозначим через u_n и u_m скорости в их сходственных точках, а через u_{ni} и u_{mi} их одноименные проекции на i -ую ось координат. Если отношение $\frac{u_{ni}}{u_{mi}} = m_u$ ($i=x, y, z$) одинаково для любой пары сходственных точек, то натуральный и модельный потоки будут кинематически подобными. Из кинематического подобия двух потоков вытекает геометрическое подобие их линий тока. Действительно, уравнения линий тока натурального и модельного потоков будут:

$$\frac{dx_n}{u_{nx}} = \frac{dy_n}{u_{ny}}; \quad \frac{dx_m}{u_{mx}} = \frac{dy_m}{u_{my}}.$$

Из этих уравнений: $u_{nx} = u_{ny} \frac{dx_n}{dy_n}$; $u_{mx} = u_{my} \frac{dx_m}{dy_m}$. Тогда отношение проекций скоростей $\frac{u_{nx}}{u_{mx}} = \frac{u_{ny}}{u_{my}} \frac{dx_n}{dy_n} \frac{dy_m}{dx_m}$.

Если имеет место кинематическое подобие, то $\frac{u_{nx}}{u_{mx}} = \frac{u_{ny}}{u_{my}} = m_u$, откуда

$$\frac{dy_m}{dx_m} \cdot \frac{dx_n}{dy_n} = 1 \text{ и, следовательно } \frac{dy_m}{dx_m} = \frac{dy_n}{dx_n}.$$

Это соотношение означает, что углы наклона касательных к линиям тока в сходственных точках одинаковы для обоих потоков, а это и есть геометрическое подобие линий тока. Для установившихся потоков это будет одновременно и геометрическим подобием траекторий жидких частиц.

Рассмотрим далее какую-либо пару сходственных точек и обозначим проекции на координатные оси равнодействующих сил в натурном и модельном потоках через F_{ni} и F_{mi} ($i=x, y, z$). Если $\frac{F_{ni}}{F_{mi}} = m_F$ есть величина постоянная для любой пары сходственных точек, то натуральный и модельный потоки называют *динамически подобными*.

Не обязательно под F_{ni} и F_{mi} подразумевать равнодействующие сил, это могут быть силы какой-либо определенной физической природы (тяжести, вязкости, упругости и др.). Тогда приведенное определение будет выражать подобие данной категории сил и означать, что безразмерные значения этих сил в динамически подобных потоках одинаковы.

Важно отметить, что кинематическое и динамическое подобия могут существовать только при наличии геометрического подобия. Поэтому дальше речь пойдет только о потоках, в которых геометрическое подобие заведомо обеспечено.

Если для какой-либо группы аэрогидромеханических явлений имеет место кинематическое и динамическое подобие, то их называют механически подобными. Сформулируем условия, необходимые и достаточные для существования механического подобия. Из определения кинематического и динамического подобий следует, что если они обеспечены, то безразмерные координаты сходственных точек, скорости и силы одинаковы. Нетрудно убедиться, что безразмерные ускорения и плотности также равны в сходственных точках. Иначе, все физические параметры механически подобных потоков, представленные в безразмерном виде для сходственных точек, одинаковы. Можно, наконец, сделать вывод, что безразмерные поля физических параметров таких потоков одинаковы. Одинаковость безразмерных значений физических параметров можно принять за определение механического подобия.

Физические параметры в любом потоке связаны системой дифференциальных уравнений, описывающих движение. Но если речь идет о механически подобных потоках, для которых безразмерные параметры одинаковы, то сами уравнения, представленные в безразмерном виде, тоже должны быть одинаковыми. Действительно, дифференциальные уравнения движения связывают между собой мгновенные значения физических параметров движения (сил, ускорений и др.). Но если безразмерные выражения этих параметров одинаковы в подобных потоках, то и связывающие их уравнения также одинаковы, поскольку имеют общий характер, т.е. выполняются для произвольных пространственно-временных точек. Заметим, что для существования механического подобия необходимо, чтобы рассматриваемые процессы были качественно одинаковыми. Можно, например, рассмотреть движение в одном и том же канале несжимаемой жидкости и газа при сверхзвуковых скоростях. Эти течения качественно различны потому, что при движении газа существенно проявляется его сжимаемость, и описывающие его уравнения будут содержать члены, которых не будет в уравнениях движения несжимаемой жидкости. Поэтому дифференциальные уравнения этих двух процессов различны, даже после приведения к безразмерному виду. Необходимо, однако, отметить, что наряду с этим существуют качественно различные явления, описываемые одинаковыми по форме уравнениями. Такие явления называют *аналогиями*.

Совокупность параметров, определяющих какой-либо аэрогидромеханический процесс, можно рассматривать как конкретное решение дифференциальных уравнений этого процесса. Ему соответствуют вполне определенные начальные и граничные условия. Они представляют собой зависимости или константы, определяющие физические параметры в начальный момент и на границах во время движения. Следовательно, не только уравнения процесса, но также безразмерные формы начальных и граничных условий (условий однозначности) в механически подобных потоках должны быть одинаковы.

Подобие называется *полным*, если во всем пространстве, окружающем натуральный объект и соответствующую модель, геометрическое подобие и подобие картин движения соблюдается полностью, т.е. если подобны многоугольники скоростей, ускорений, действующих сил, и все однородные геометрические и физические величины, определяющие процесс, находятся в определенном постоянном отношении в сходственных точках пространства в сходственные моменты времени. Если это условие хотя бы частично не соблюдается, т.е. если не все геометрические и физические величины, характеризующие процесс в модели и в натурном объекте, находятся в определенном постоянном отношении, то подобие называется *неполным* или *частичным*. Полное подобие – редко достигаемый предел. Например, при моделировании газодинамических процессов, происходящих в турбокомпрессорах современных авиационных двигателей, практически не удается смоделировать толщины их лопаток, так как и в натуральных условиях эти толщины, особенно на последних ступенях турбокомпрессоров, не превышают нескольких миллиметров. Аналогичные трудности возникают при моделировании толщин топливных трубопроводов ракетных и авиационных двигателей. Поэтому наиболее часто экспериментальные исследования приходится проводить лишь в условиях частичного подобия.

Для обеспечения механического подобия двух явлений, которые определяются имеющими единственное решение системами дифференциальных, алгебраических или функциональных уравнений, необходима и достаточна тождественность основных уравнений и тождественность безразмерных граничных и начальных условий. Механическое подобие в общем случае включает в себя критерии гидродинамического, газодинамического, теплового, акустического и других видов пособий.

Вся важность теории подобия или науки о моделировании в опытах заключается в том, что еще на этапах проектирования новейших образцов техники необходима информация о параметрах и характеристиках протекаемых в них процессов для того, чтобы иметь возможность создавать совершенные конструкции с точки зрения коэффициентов полезного действия, экономичности, массы, экологических характеристик и т.д. Например, при создании летательных аппаратов нужно заранее знать уровни шума, генерируемые наиболее шумными их узлами (силовой установкой самолетов, вертолетов и т.д.). Дело в том, что Россия является страной, входящей в Международную организацию гражданской авиации (ИКАО), и производимые в нашей стране самолеты должны соответствовать международным нормам, в том числе и по шуму пассажирских самолетов. Поэтому, чтобы не было неприятностей с зарубежными полетами, необходимо, чтобы уровни шума создаваемых самолетов укладывались в соответствующие требования ИКАО. Для этого необходимы разработка и внедрение в конструкцию самолета, в первую очередь, в конструкцию силовой установки (авиационного двигателя) акустических мероприятий, направленных на

снижение уровней шума его основных источников. Разработка таких мероприятий – сложный, трудоемкий процесс, требующий значительного времени, в то же время результаты акустических испытаний должны быть получены еще до создания самого самолета, иначе они запоздадут. Вот почему так важны модельные акустические испытания, а также акустические испытания силовых установок в наземных условиях, которые позволяют на основе аэрогидромеханических критериев подобия, в том числе и акустических, получить своевременно информацию об эффективности акустических мероприятий, которые необходимо будет внедрить в конструкцию создаваемого малошумного самолета с тем, чтобы он мог беспрепятственно летать в любую страну, участницу ИКАО.

В данном разделе будут изложены элементы теории подобия. Из основных уравнений аэрогидромеханики будут получены критерии подобия и дан их физический (механический) смысл. Необходимо, однако, иметь в виду, что не всегда имеются уравнения, описывающие исследуемый процесс. В этом случае полезным является метод анализа размерностей, который также позволяет определить критерии подобия.

3.2. Первая теорема подобия

Эта теорема дает ответ на главный вопрос: какие условия нужно выполнить, чтобы течения, то есть их кинематические характеристики, а также характеристики сопротивления и теплообмена в сходственных точках для двух потоков были бы подобными. Она формулируется так: *Подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия.*

Для нахождения критериев подобия используем линейные преобразования. Запишем с этой целью выражения для параметров потока в виде следующих произведений:

- время $t = t_{\infty} t_1$;
- длина $l = l_{\infty} l_1$;
- скорость $v = v_{\infty} v_1$;
- давление $p = p_{\infty} p_1$;
- массовая сила $F = F_{\infty} F_1$;
- плотность $\rho = \rho_{\infty} \rho_1$;
- вязкость $\mu = \mu_{\infty} \mu_1$;
- энтальпия $h = h_{\infty} h_1$ и др.

Здесь l_1, t_1 и т.д. – безразмерные величины; t_{∞}, l_{∞} и т.д. – масштабные величины, имеющие размерность параметров (постоянные величины). Например, v_1 – безразмерная скорость; v_{∞} – масштабная величина, отнесенная к скорости потока.

Продemonстрируем вывод критериев подобия на примере какого-нибудь уравнения, например, уравнения движения вязкой среды в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{F} - \text{grad} p - \frac{2}{3} \text{grad} \mu \text{ div} \vec{v} + 2 \text{div} (\mu S), \quad (3.1)$$

где $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ – локальная производная вектора скорости или локальное ускорение; $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ – конвективная производная вектора скорости или конвективное ускорение; S – симметричная часть дифференциального тензора векторного поля скоростей $(\nabla \vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}$.

Внося в уравнение (3.1) выражения для параметров через безразмерные величины и вышеперечисленные масштабы, будем иметь:

1) для левой части уравнения движения

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\rho_\infty v_\infty}{t_\infty} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{l_\infty} \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_1. \quad (3.2)$$

Параметры с индексом « ∞ » можно выносить за знак производной, так как они являются константами.

Рассмотрим подробнее линейное преобразование конвективного ускорения $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$.

Будем использовать метод подобных преобразований, в котором существует один собственный масштаб по всем координатам (в отличие от метода аффинных преобразований, где собственные масштабы по разным координатам будут различными).

$$\begin{aligned} \text{В этом случае} \quad v_x &= v_\infty v_{x_1}; & v_y &= v_\infty v_{y_1}; & v_z &= v_\infty v_{z_1}; \\ x &= l_\infty x_1; & y &= l_\infty y_1; & z &= l_\infty z_1 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Выражение $(\vec{v} \cdot \nabla)$ является скалярным произведением вектора скорости и вектора ∇ (оператора Гамильтона): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$;

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{При скалярном перемножении векторов: } \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } (\vec{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Для составляющей конвективного ускорения вдоль оси X :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Внесем в уравнение (3.3) выражения для параметров потока через безразмерные величины и масштабы:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)v_x = \frac{v_\infty^2}{l_\infty} \left(v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial z_1} \right).$$

Сворачивая выражение в скобках, получим: $(\vec{v} \cdot \nabla)v_x = \frac{v_\infty^2}{l_\infty} (v_1 \cdot \nabla)v_{x_1}$.

Аналогичные выражения будут для осей Y и Z .

$$(\vec{v} \cdot \nabla)v_y = \frac{v_\infty^2}{l_\infty} (v_1 \cdot \nabla)v_{y_1}; \quad (\vec{v} \cdot \nabla)v_z = \frac{v_\infty^2}{l_\infty} (v_1 \cdot \nabla)v_{z_1}.$$

Объединяя три последних равенства, можно записать следующее выражение для конвективного ускорения: $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{v_\infty^2}{l_\infty} (v_1 \cdot \nabla)v_1$.

Тогда $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{l_\infty} \rho_1 (v_1 \cdot \nabla)v_1$, как и записано в уравнении (3.2).

2) для правой части уравнения движения (3.1):

$$\begin{aligned} \rho \vec{F} - \text{grad} p - \frac{2}{3} \text{grad} \mu \text{ div} \vec{v} + 2 \text{div}(\mu S) = \rho_\infty F_\infty \rho_1 F_1 - \frac{p_\infty}{l_\infty} \text{grad} p_1 - \\ - \frac{2}{3} \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty^2} \text{grad} \mu_1 \text{ div} v_1 + \frac{2 \mu_\infty v_\infty}{l_\infty^2} \text{div}(\mu_1 S_1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим подробный вывод некоторых слагаемых этого выражения:

а) $\text{grad} p$

$$\text{grad} p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}.$$

Введем линейные преобразования:

$$\text{grad} p = \frac{p_\infty}{l_\infty} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{p_\infty}{l_\infty} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \vec{j} + \frac{p_\infty}{l_\infty} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} \vec{k} = \frac{p_\infty}{l_\infty} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \vec{j} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} \vec{k} \right).$$

Свернув выражение в скобках, получим: $\text{grad} p = \frac{p_\infty}{l_\infty} \text{grad} p_1$.

б) $grad \mu \quad div \vec{v}$

По аналогии с предыдущим выражением: $grad \mu = \frac{\mu_\infty}{l_\infty} grad \mu_1$.

$$div \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_\infty}{l_\infty} \left(\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} \right) = \frac{v_\infty}{l_\infty} div v_1.$$

Тогда $grad \mu div \vec{v} = \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty^2} grad \mu_1 div v_1$.

в) $div(\mu S)$

$$div(\mu S) = \frac{\partial(\mu S)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\mu S)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\mu S)_z}{\partial z}.$$

Учтем, что тензор $S = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = x, y, z$.

Так, например, скалярные компоненты этого тензора равны: $s_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$;

$$s_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \text{ и т.д.}$$

С учетом линейных преобразований $s_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_\infty}{l_\infty} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{v_\infty}{l_\infty} s_{xx_1}$;

$$s_{xy} = \frac{1}{2} \frac{v_\infty}{l_\infty} \left(\frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} \right) = \frac{v_\infty}{l_\infty} s_{xy_1} \text{ и т.д.}$$

Следовательно: $S = \frac{v_\infty}{l_\infty} S_1$, $\mu S = \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty} \mu_1 S_1$.

Тогда $div(\mu S) = \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty^2} div(\mu_1 S_1)$.

Таким образом, в результате линейных преобразований уравнения (3.1) получили с учетом (3.2) и (3.4) следующее уравнение движения вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty v_\infty}{t_\infty} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{l_\infty} \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_1 = \rho_\infty F_\infty \rho_1 F_1 - \\ - \frac{\rho_\infty}{l_\infty} grad p_1 - \frac{2}{3} \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty^2} grad \mu_1 div v_1 + 2 \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty^2} div(\mu_1 S_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В результате выполненных преобразований оказалось возможным каждый член уравнения (3.5) представить в виде двух частей: части, состав-

ленной из масштабных величин, которая имеет размерность, и безразмерной части.

В 1848 году французский ученый Жозеф Бертран опубликовал свою знаменитую работу, где сформулировал следующий вывод: *Если любое уравнение описывает тот или иной физический процесс, то размерности правой и левой частей уравнения одинаковы.*

Используя правило Бертрана, можно уравнение движения записать в безразмерном виде: для этого достаточно каждый член уравнения разделить на какой-нибудь размерный комплекс при любом члене, например на

$\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{l_\infty}$ (при втором члене в левой части уравнения). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{l_\infty}{v_\infty t_\infty} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_1 = \frac{F_\infty l_\infty}{v_\infty^2} \rho_1 F_1 - \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \text{grad} p_1 - \\ - \frac{2}{3} \frac{\mu_\infty}{l_\infty \rho_\infty v_\infty} \text{grad} \mu_1 \text{div} v_1 + \frac{2\mu_\infty}{l_\infty \rho_\infty v_\infty} \text{div} (\mu_1 S_1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение движения привели к безразмерному виду, так как комплексы с индексом «∞» стали безразмерными в процессе преобразования, а комплексы с индексом «1» и до этого были безразмерными. Чтобы придать выкладкам современный вид, выполним следующее: обозначим безразмерные комплексы с индексом «∞», содержащиеся в уравнении (3.6), начальными буквами фамилий ученых, получивших их:

$\frac{l_\infty}{v_\infty t_\infty} = Sh_\infty$ – число Струхаля (Струхаль – английский физик и математик);

$\frac{v_\infty^2}{F_\infty l_\infty} = Fr_\infty$ – число Фруда (Фруд – французский математик).

В основном, в качестве массовой силы используются силы тяжести

или гравитационные силы и тогда число Фруда $Fr_\infty = \frac{v_\infty^2}{g_\infty l_\infty}$;

$\frac{\rho_\infty v_\infty l_\infty}{\mu_\infty} = \frac{v_\infty l_\infty}{\nu_\infty} = Re_\infty$ – число Рейнольдса (Рейнольдс – английский механик и математик), здесь $\nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$ – коэффициент кинематической вязкости;

$\frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} = Eu_\infty$ – число Эйлера. Это число впервые использовано швей-

царским математиком и механиком Эйлером, который был действительным членом Петербургской академии наук.

царским математиком и механиком Эйлером, который был действительным членом Петербургской академии наук.

Эти безразмерные величины называются *критериями подобия*. Тогда с учетом выражений для критериев подобия уравнение движения (3.6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Sh_{\infty} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_1 = \frac{1}{Fr_{\infty}} \rho_1 F_1 - Eu_{\infty} grad p_1 - \\ - \frac{2}{3} \frac{1}{Re_{\infty}} grad \mu_1 div v_1 + \frac{2}{Re_{\infty}} div(\mu_1 S_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, в результате линейных преобразований уравнение движения можно записать в безразмерном виде через критерии подобия.

Если привести к безразмерному виду уравнение неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{v}) = 0$, то получим:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\infty}}{t_{\infty}} \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\rho_{\infty} v_{\infty}}{l_{\infty}} div(\rho_1 v_1) = 0; \\ \frac{l_{\infty}}{v_{\infty} t_{\infty}} \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + div(\rho_1 v_1) = 0; \\ Sh_{\infty} \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + div(\rho_1 v_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Некоторые критерии подобия можно выражать через другие. Например, число Эйлера можно выразить через число Маха, имеющее следующий вид: $M_{\infty} = \frac{v_{\infty}}{a_{\infty}}$. Здесь $a_{\infty} = \sqrt{\frac{kp_{\infty}}{\rho_{\infty}}}$ – скорость звука. Тогда

$$M_{\infty}^2 = \frac{v_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} = \frac{\rho_{\infty} v_{\infty}^2}{kp_{\infty}}.$$

Так как число Эйлера: $Eu_{\infty} = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2}$, то $M_{\infty}^2 = \frac{1}{kEu_{\infty}}$, откуда

$$Eu_{\infty} = \frac{1}{kM_{\infty}^2}.$$

Если рассмотреть внешнюю задачу обтекания тел, то с учетом критериев подобия формулируется уже более конкретно **первая теорема Ньютона**: *Явления при обтекании тел потоком сплошной среды будут подобными в гидродинамическом и термодинамическом отношениях, если для них существуют следующие условия: числа Sh_{∞} ; Re_{∞} ; M_{∞} ; Pr_{∞} ; $Fr_{\infty} = idem$, т.е. эти явления имеют одинаковые критерии подобия (это функциональные выражения).*

Здесь число Прандтля: $Pr_{\infty} = \frac{C_{p\infty} \cdot \mu_{\infty}}{\lambda_{\infty}}$, где λ_{∞} – коэффициент тепло-

проводности.

Следовательно, если рассматривать задачу обтекания твердых тел, то для гидродинамического и энергетического подобия необходимо, чтобы числа подобия были одинаковы.

Можно расширить первую теорему подобия, если записать выражения безразмерных параметров без индексов ∞ , т.е. Sh ; Re ; M ; Pr ; Fr , тогда будет подобие в точке, а не на бесконечности.

Отсюда следует другая формулировка первой теоремы подобия: *Для того, чтобы существовало подобие в любой точке поля, необходимо, чтобы числа подобия, составленные из мгновенных величин, были бы одинаковы.*

На практике важным является вопрос:

Какие условия нужно наложить, чтобы выбрать собственные масштабы ν_{∞} , h_{∞} , p_{∞} , ρ_{∞} , μ_{∞} , a_{∞} и др. Теория подобия позволяет без решения системы дифференциальных уравнений высказать основные моменты физической задачи.

При решении конкретной задачи нужно, в первую очередь, учитывать вид течения (дозвуковое ($M \leq 1$) или сверхзвуковое ($M \geq 1$)). Нужно четко представлять *порядок* величин, участвующих в процессе. При дозвуковом течении, например, скорость в модельном эксперименте можно брать такой, какой она ожидается в натурном процессе. Надо иметь ввиду главное: *выбор масштабов* характеризуется *физической постановкой задачи*, нужно исходить из *реальных условий* возможности проведения эксперимента и его соответствия с исследуемой физической задачей.

3.3. Физический смысл некоторых чисел подобия

Число Рейнольдса

а) в точке: $Re = \frac{\nu l}{\nu} = \frac{\nu l \rho}{\mu}$;

б) на бесконечности: $Re_{\infty} = \frac{\nu_{\infty} l_{\infty} \rho_{\infty}}{\mu_{\infty}}$.

Число Re является важнейшей гидродинамической характеристикой потока. Оно представляет собой отношение инерционных сил к силам внутреннего трения (силам вязкости). Число Re показывает, имеет ли место ламинарное или турбулентное движение. Например: если при течении жидкости в трубах с гладкими стенками число $Re < 2000-2300$, то движение жидкости в трубе спокойное, линии тока расположены параллельно стенкам трубы – это *ламинарное движение*. При $Re \geq 2300$ наступает переме-

шивание отдельных струек, движение жидкости в трубе перестает быть ламинарным и становится беспорядочным – возникает *турбулентное движение*. В этом движении гидродинамические параметры $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$, ρ , p , T начинают флуктуировать около своих средних значений, возникает перемешивание жидкости и ее течение приобретает случайный характер. Движение воздуха в атмосфере и воды в океане, когда числа Re велики (а они могут достигать в определенных условиях 10^8), практически всегда турбулентно. В технических задачах аэро- и гидромеханики также часто приходится встречаться с таким движением. По этой причине исследованию турбулентности уделялось всегда большое внимание. Однако, хотя турбулентное движение, начиная с работ Рейнольдса, изучается около столетия и к настоящему времени мы уже много знаем об особенностях и закономерностях этого движения, нельзя сказать, что есть полное понимание этого сложного физического явления.

Итак, упорядоченное течение является ламинарным, беспорядочное (хаотичное) течение – турбулентным. Исследования показали, что при внешнем обтекании тел режим будет ламинарным, если $Re_\infty < 10^5$ и турбулентным при $Re_\infty > 10^7$, следовательно, при $10^5 < Re < 10^7$ будет наблюдаться режим перехода ламинарного движения в турбулентный.

Введем в рассмотрение тензор напряжений

$$\mathbf{P} = 2\mu S - \left(\mathbf{p} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{v} \right) E, \quad (3.9)$$

где E – тензорная единица.

Выполним линейные преобразования в этой формуле.

Тензор \mathbf{P} в тензорной записи можно представить в виде \mathbf{p}_{ij} , где $i, j = x, y, z$. Тогда скалярные компоненты тензора напряжений будут $\mathbf{p}_{xx}, \mathbf{p}_{xy}, \mathbf{p}_{xz}, \mathbf{p}_{yy}$ и т.д.

С учетом линейных преобразований можно записать: $\mathbf{p}_{xx} = \mathbf{p}_\infty \mathbf{p}_{xx_1}$; $\mathbf{p}_{xy} = \mathbf{p}_\infty \mathbf{p}_{xy_1}$ и т.д.

Следовательно, тензор $\mathbf{P} = \mathbf{p}_\infty \mathbf{P}_1$.

Преобразуем формулу (3.9), представив, как и ранее, каждый параметр в виде произведения безразмерных величин с индексом «1» и собственных масштабов с индексом «∞»:

$$\mathbf{p}_\infty \mathbf{P}_1 = 2\mu_\infty \frac{v_\infty}{l_\infty} \mu_1 S_1 - \left(\mathbf{p}_\infty \mathbf{p}_1 + \frac{2}{3} \mu_\infty \frac{v_\infty}{l_\infty} \mu_1 \operatorname{div} v_1 \right) E. \quad (3.10)$$

Разделим каждый член последнего уравнения на \mathbf{p}_∞ , приведя таким образом это выражение к безразмерному виду

$$\mathbf{P}_1 = 2 \frac{\mu_\infty v_\infty}{\rho_\infty l_\infty} \mu_1 S_1 - \left(\mathbf{p}_1 + \frac{2}{3} \frac{\mu_\infty v_\infty}{\rho_\infty l_\infty} \mu_1 \operatorname{div} v_1 \right) E. \quad (3.11)$$

Преобразуем безразмерное выражение $\frac{\mu_\infty v_\infty}{\rho_\infty l_\infty}$:

$$\frac{\mu_\infty v_\infty}{\rho_\infty l_\infty} = \frac{\rho_\infty v_\infty v_\infty}{\rho_\infty l_\infty} \cdot \frac{v_\infty}{v_\infty} = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{\rho_\infty} \cdot \frac{v_\infty}{v_\infty l_\infty} = \frac{1}{Eu_\infty Re_\infty}.$$

Подставим последнее выражение в (3.11):

$$\mathbf{P}_1 = \frac{2}{Eu_\infty Re_\infty} \mu_1 S_1 - \left(\mathbf{p}_1 + \frac{2}{3 Eu_\infty Re_\infty} \mu_1 \operatorname{div} v_1 \right) E. \quad (3.12)$$

Интересен случай, когда коэффициент динамической вязкости $\mu_\infty \rightarrow 0$, тогда число $Re_\infty \rightarrow \infty$ и в этом случае $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{p}_1 E$.

Переходя обратно к размерным величинам, получим $\mathbf{P} = -\rho \mathbf{E}$, так как $\mathbf{P}_1 = \frac{\mathbf{P}}{\rho_\infty}$; $\mathbf{p}_1 = \frac{\rho}{\rho_\infty}$.

Этот случай соответствует движению сплошной идеальной среды, когда существуют только нормальные силы (давления), касательные же силы (силы внутреннего трения), характерные для вязкой жидкости, отсутствуют. Таким образом, среда, у которой коэффициент вязкости равен нулю, является *идеальной сплошной средой*, и у этой среды $Re_\infty \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда характерный размер задачи $l_\infty \rightarrow \infty$, тогда $Re_\infty \rightarrow \infty$ при $\mu_\infty \neq 0$. Это означает, что при очень больших расстояниях рассматриваемой точки вязкой среды от обтекаемого тела среду можно также считать идеальной. Следовательно, при движении реальной среды, находящейся на большом удалении от тела, ее вязкость не оказывает никакого влияния на характеристики течения.

Таким образом, реальная среда при больших расстояниях от поверхности обтекаемого тела *ведет себя как идеальная*, хотя среда сама по себе вязкая. Это упрощает решение ряда прикладных задач, например атмосферной метеорологии.

Число Прандтля

а) в точке: $Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{\lambda}$;

б) на бесконечности: $Pr_\infty = \frac{C_{p_\infty} \cdot \mu_\infty}{\lambda_\infty}$.

Критерий Прандтля характеризует теплофизические свойства жидкости и является мерой подобия тепловых и скоростных потоков. Этот критерий представляет собой отношение касательных напряжений к тепловому потоку у стенки. Покажем это.

Запишем согласно закону Фурье: $q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w$, где q – количество тепловой энергии в единице объема или плотность теплового потока; $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w$ – температурный градиент у стенки. Знак «-» ставится потому, что теплота распространяется в сторону понижения температуры, а градиент $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w$ считается положительным в направлении роста температуры.

Напряжение сдвига (касательное напряжение): $\tau = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_w$ - определяется по формуле Ньютона, где $\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_w$ – градиент скорости потока у стенки.

Выполняя линейные преобразования, получим:

$$q = -\frac{\lambda_\infty T_\infty}{l_\infty} \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right)_w = -q_\infty \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right)_w ;$$

$$\tau = \frac{\mu_\infty v_\infty}{l_\infty} \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial n_1} \right)_w = \tau_\infty \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial n_1} \right)_w .$$

Тогда $\frac{q_\infty}{\tau_\infty} = \frac{\lambda_\infty T_\infty}{l_\infty} \frac{l_\infty}{\mu_\infty v_\infty} = \frac{\lambda_\infty C_{p_\infty} T_\infty}{\mu_\infty C_{p_\infty} v_\infty} = \frac{1}{Pr_\infty} \frac{C_{p_\infty} T_\infty}{v_\infty}$ или

$$\frac{\tau_\infty}{q_\infty} = Pr_\infty \cdot \frac{v_\infty}{C_{p_\infty} T_\infty} . \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) представляет собой фундаментальный результат гидродинамической теории теплообмена.

Если число $Pr_\infty = 1$, то $\frac{q_\infty}{\tau_\infty} = \frac{C_{p_\infty} T_\infty}{v_\infty}$.

Таким образом, из полученного соотношения между тепловыми потоками у стенки и касательными напряжениями следует вывод: *Если известен тепловой поток, то можно найти касательные напряжения, а следовательно и сопротивление.*

Число Маха

Число Маха – это отношение скорости набегающего потока к скорости звука.

а) в точке: $M = \frac{v}{a}$;

б) на бесконечности: $M_{\infty} = \frac{v_{\infty}}{a_{\infty}}$.

Здесь a – местная скорость звука; a_{∞} – скорость звука на бесконечности.

Число Маха является важнейшей газодинамической характеристикой потока.

Если $M < 1$, то $v < a$ – дозвуковое течение;

Если $M > 1$, то $v > a$ – сверхзвуковое течение;

Если $M = 1$, то $v = a$ – звуковое течение.

Дозвуковое течение имеет характеристики, определяемые уравнением *эллиптического вида*. Сверхзвуковое течение определяется уравнением *гиперболического вида* и характеризуется появлением разрывов в виде ударных волн или скачков уплотнения.

Следовательно, дозвуковые и сверхзвуковые течения – как с точки зрения физики, так и математики – совершенно разные. При дозвуковом обтекании тел возмущения распространяются со звуковой скоростью во все стороны. При сверхзвуковом обтекании возмущения возникают только в некоторой области за телом, образуя газодинамический след.

При решении этих задач газовая динамика с помощью методов конформных отображений позволяет получить картину обтекания в различных практически важных случаях. При этом эталоном служит задача обтекания профиля бесконечной длины дозвуковым потоком (так называемая задача Жуковского), решаемая аналитически.

Числа Фруда, Галилея, Грасгофа

а) Число Фруда в точке: $Fr = \frac{v^2}{gl}$;

б) Число Фруда на бесконечности: $Fr_{\infty} = \frac{v_{\infty}^2}{g_0 l_0}$, где g – объемная (массовая) сила; l – характерная длина.

Число Фруда – гидродинамический критерий подобия. Это отношение сил инерции к силам тяжести, или гравитационным силам.

Иногда используется соотношение: $\frac{Re^2}{Fr} = \frac{gl}{v^2} \cdot \frac{v^2 l^2}{v^2} = \frac{gl^3}{v^2} = Ga$ – число

Галилея.

При изучении процессов конвективного теплообмена число Галилея не устраивает, поэтому вводится *число Грасгофа*, равное $Gr = Ga \cdot Ar$, где Ar – *число Архимеда*: $Ar = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \beta \Delta T$.

Тогда число Грасгофа (или тепловое число Архимеда) равно:
 $Gr = \frac{\beta \Delta T g l^3}{\nu^2}$.

Число Грасгофа характеризует влияние на процесс конвективного теплообмена подъемной силы, возникающей за счет разности плотностей жидкости.

При изотермическом течении число $Gr=0$, так как $\Delta T = 0$.

Числа Gr и Ga являются характеристиками передачи тепла при свободной конвекции.

В зависимости от величины числа Gr могут быть течения в пристенной области либо ламинарными, либо турбулентными. Таким образом, если число Re – это характеристика турбулентности I рода, то число Gr – характеристика турбулентности II рода, характеризуемая отношением работы массовых сил к кинетической энергии набегающего потока.

Число Струхали

а) в точке: $Sh = \frac{l}{\nu t}$;

б) на бесконечности: $Sh_{\infty} = \frac{l_0}{\nu_{\infty} t_0}$, где t – характерное время.

Число Струхали представляет собой характеристику влияния нестационарности на аэрогидромеханические процессы.

Часто вместо числа Sh используется *число гомохронности*, которое представляет собой величину $Ho = \frac{1}{Sh}$, т.е. число Ho – величина, обратная числу Sh .

Наиболее часто число Струхали используется в акустике: $Sh = \frac{f \cdot l}{\nu}$,

где $f = \frac{1}{T}$ – частота колебаний; T – характерный период.

Число Струхали в акустике называют безразмерной частотой и используют для нахождения частоты звука, излучаемого натурным объектом (n), по результатам модельных испытаний (m). Для этого необходимо, чтобы числа подобия у модели и у природы были одинаковы, т.е. $Sh_n = Sh_m$.

Тогда: $\frac{f_n \cdot l_n}{v_n} = \frac{f_m \cdot l_m}{v_m}$, откуда $f_n = f_m \left(\frac{v_n}{v_m} \right) \left(\frac{l_m}{l_n} \right)$. В частности, если скорости потоков натурального и модельного течений совпадают $v_n = v_m$, то $f_n = f_m \left(\frac{l_m}{l_n} \right)$. Поскольку, как правило, размеры модельных объектов меньше натуральных, т.е. $l_m < l_n$, то $f_n < f_m$. Число Струхалия широко используют при изучении шума, генерируемого перспективными энергетическими и силовыми установками, которые еще не созданы, но для которых есть результаты проектировочных расчетов. По этим данным создаются модельные установки, и результаты их акустических испытаний пересчитывают на натурные условия с помощью критериев подобия, в том числе и числа Струхалия.

3.4. Определяющие и определяемые числа подобия. Вторая и третья теоремы подобия

В аэрогидромеханике решение практических задач не ограничивается описанием полей скоростей, давлений и температур. Кроме этого, требуется вычисление потерь давлений, а также переносов энергии в процессе тепломассообмена между потоком и обтекаемым телом. С этой точки зрения определение полей v, p, T представляет собой только первый шаг для получения из расчета аэродинамических и тепловых потерь. В качестве характеристики определения потерь давления вводится безразмерный коэффициент давления $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2}$.

В качестве характеристики тепломассообмена вводится значение коэффициента теплообмена, которое находится из объединения законов Ньютона и Фурье у поверхности обтекаемого тела. Согласно закону Ньютона, плотность теплового потока у стенки $q_w = \alpha(T_w - T)$, где T_w – температура поверхности обтекаемого тела; T – температура потока, обтекающего тело; α – коэффициент теплоотдачи.

С другой стороны, при переносе тепла с поверхности тела по закону Фурье имеет место плотность теплового потока $q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w$.

Приравнивая эти потоки, получим:

$$\alpha(T_w - T) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \quad (3.14)$$

Введем линейные преобразования в равенство (3.14):

$$\alpha_{\infty} T_{\infty} \alpha_1 (T_{w1} - T_1) = -\frac{\lambda_{\infty} T_{\infty}}{l_{\infty}} \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right)_w. \quad (3.15)$$

Здесь $n = l_{\infty} n_1$; $\alpha = \alpha_{\infty} \alpha_1$; $\lambda = \lambda_{\infty} \lambda_1$.

Разделим обе части равенства (3.15) на выражение $\left(\frac{\lambda_{\infty} T_{\infty}}{l_{\infty}} \right)_w$. Тогда

$$\frac{\alpha_{\infty} l_{\infty}}{\lambda_{\infty}} \alpha_1 (T_{w1} - T_1) = -\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right)_w. \quad (3.16)$$

Получили безразмерное уравнение, в левой части которого безразмерный комплекс с индексом « ∞ » называется числом Нуссельта:

$$Nu_{\infty} = \frac{\alpha_{\infty} l_{\infty}}{\lambda_{\infty}}.$$

Это число характеризует конвективный теплообмен между средой и поверхностью твердого тела. Оно является искомой величиной. Числа Рейнольдса Re_{∞} , Прандтля Pr_{∞} , Фруда Fr_{∞} , Маха M_{∞} , Струхалья Sh_{∞} – это числа, определяющие процесс.

Таким образом, те числа, которые получены в результате линейных преобразований исходной системы дифференциальных уравнений механики называются *определяющими числами*. Числа Cp , Nu – *определяемые* числа подобия (или аналитически или в процессе экспериментов), т.е. это такие критерии, которые содержат в себе неизвестную величину, подлежащую определению.

Уравнения связи между определяющими и определяемыми числами подобия называются критериальными уравнениями. Следовательно, можно записать: $Cp = Cp(Re, Pr, M, Fr, Sh, k)$;

$$Nu = Nu(Re, Pr, M, Fr, Sh, k),$$

где k – показатель адиабаты, также безразмерное число.

Отсюда вытекает формулировка второй теоремы подобия: *Всегда существует возможность представить уравнения, описывающие физические явления, в виде критериальных уравнений.*

В большинстве случаев аналитическая запись уравнений является лишь введением, главное же – функциональная связь посредством критериальных уравнений. Критериальные зависимости для подобных между собой явлений одинаковы.

Для многофазных систем (это не сплошная среда), где нельзя использовать дифференциальные уравнения законов сохранения массы, импульса

и энергии, но можно использовать критерии подобия – критериальные уравнения являются основным методом исследования.

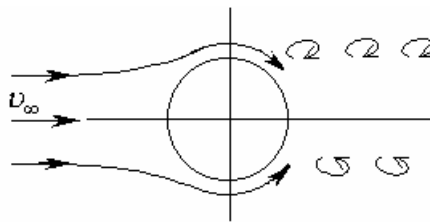
Современная литература предлагает для функциональных связей следующие зависимости:

$$Cp = A Re^{n1} Pr^{n2} M^{n3} Fr^{n4} Sh^{n5} k^{n6};$$

$$Nu = B Re^{m1} Pr^{m2} M^{m3} Fr^{m4} Sh^{m5} k^{m6}.$$

Они характеризуются тем, что любой член этих выражений можно разложить в ряд. В опыте только нужно найти константы A , B и показатели степеней чисел подобия.

Связь шести величин представить практически невозможно, можно найти связи трех, максимум четырех величин. Поэтому по возможности надо упрощать связи. Возьмем задачу обтекания тела (кругового цилиндра)



дозвуковым несжимаемым вязким потоком. У поверхности обтекаемого тела возникает пограничный слой, который в районе миделя отрывается, образуя движущуюся цепочку вихрей, называемую вихревой дорожкой Кáрманна. Если задача стационарная,

то для случая установившегося течения можно записать уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \rho\vec{F} - gradp + \mu\nabla^2\vec{v}; \\ div\vec{v} = 0. \end{cases}$$

Если распишем эти уравнения, используя линейные преобразования через числа подобия, то увидим, что в уравнениях нет числа Sh . Надо посмотреть физически, правильно ли это?

Частота отрыва вихрей f влияет на число Струхала, записанное в виде $Sh = \frac{f \cdot l}{v}$. Значит, если число Sh отнести к вихрям, то оно существует.

Однако, в уравнения оно не войдет и вполне справедливо. При изменении скорости потока v меняется число Re , однако таким же образом меняется и частота отрыва вихрей, а значит число $Sh = Sh(Re)$, следовательно число Sh выпадает, как зависимое от числа Re . Аналогично можно исключить все остальные критерии, кроме числа Fr , и в результате получаем, что $Cp = Cp(Fr)$, $Nu = Nu(Fr)$. Так надо поступать в любом конкретном случае.

Отсюда вытекает формулировка третьей теоремы подобия: Для получения подобных физических явлений необходимо и достаточно, чтобы ус-

ловия однозначности явлений были между собой подобны, а их одноименные определяющие критерии были численно одинаковы.

Дифференциальные уравнения описывают физическое явление в общем виде. Чтобы получить уравнения, описывающие какие-либо частные процессы, необходимо к общим уравнениям добавить математическое описание всех частных особенностей, которые конкретизировали бы общее явление и сделали бы его частным.

Тогда общие уравнения примут вид частных уравнений для данного процесса. Такие частные условия рассматриваемого явления называются *краевыми и начальными условиями* или *условиями однозначности*.

Таким образом, если первая и вторая теорема описывают свойства и признаки существующих подобных явлений, то третья теорема подобия, наоборот, устанавливает условия, которые нужно соблюсти, чтобы рассматриваемые явления были подобны между собой.

В том случае, когда уравнения, определяющие задачу, неизвестны, вместо теории подобия применяется анализ размерностей. При анализе размерностей число определяющих чисел подобия определяется следующей формулой $m=i-z$, где i - число независимых переменных данного процесса; z - число размерностей, из которых составлены независимые переменные.

3.5. Перечень основных чисел подобия, используемых в аэрогидромеханике

- 1) число Рейнольдса $Re = \frac{\nu l}{\nu} = \frac{\rho \nu l}{\mu}$;
- 2) число Прандтля $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$, где $a = \frac{\lambda}{C_p \rho}$;
- 3) число Эйлера $Eu = \frac{p}{\rho \nu^2}$;
- 4) число Нуссельта $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$;
- 5) число Пекле $Pe = \frac{\nu l}{a} = Re \cdot Pr$;
- 6) число Маха $M = \frac{\nu}{c}$;
- 7) число Струхаля $Sh = \frac{l}{\nu t} = \frac{fl}{\nu}$;
- 8) число гомохронности $Ho = \frac{1}{Sh} = \frac{t\nu}{l}$;

- 9) число Био $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_w}$;
- 10) число Фурье $Fo = \frac{at}{l^2}$;
- 11) число Фруда $Fr = \frac{v^2}{gl}$;
- 12) число Галилея $Ga = \frac{gl^3}{\nu^2} = \frac{Re^2}{Fr}$;
- 13) число Архимеда $Ar = \beta \Delta T$;
- 14) число Грасгофа $Gr = g \beta \Delta T \frac{l^3}{\nu^2} = Ga \cdot Ar$;
- 15) число Рэлея $Ra = g \beta \Delta T \frac{l^3}{\nu a} = Gr \cdot Pr$.

Здесь: v – скорость, $м/с$;

l – длина, $м$;

ν – кинематический коэффициент вязкости, $м^2/с$;

μ – динамический коэффициент вязкости, $Па \cdot с$;

C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\frac{Дж}{кг \cdot K}$;

a – коэффициент температуропроводности, $м^2/с$;

λ – коэффициент теплопроводности среды, $\frac{Вт}{м \cdot K}$;

λ_w – коэффициент теплопроводности у стенки;

P – давление, $Па$;

ρ – плотность, $\frac{кг}{м^3}$;

α – коэффициент теплоотдачи, $\frac{Вт}{м^2 \cdot K}$;

β – температурный коэффициент объемного расширения, $\frac{1}{K}$;

ΔT – разность температур, K ;

t – время, $с$; $f = \frac{1}{\tau}$ – частота колебаний, $Гц$ (τ – период колебаний, $с$);

c – скорость звука, $м/с$; g – ускорение свободного падения, $м/с^2$ (массовая сила).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вукалович М.П., Новиков И.И. Термодинамика. – М.: Машиностроение, 1972. 672 с.
2. Механика сплошных сред в задачах. Т.1, 2. – М.: «Московский лицей», 1996. I – 396 с., II – 394 с.
3. Мухачев Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и теплопередача. – М.: «Высшая школа», 1991. 480 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1, 2. – М.: Наука, 1994. I – 528 с., II – 560 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. 840 с.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1964. 814 с.

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет В.И. Никонов

Подписано в печать 13.09.06

Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 5,23. Тираж 150 экз. Заказ № 520

Издательство «Универс групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс групп»