ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра функционального анализа и теории функций

В. А. Алякин, Р. Ф. Узбеков

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Самара
Издательство «Самарский университет»
2009

УДК 517
ББК 22.161
А 60

Рецензент канд. физ.-мат. наук, профессор А.А. Андреев

Алякин, В. А.

А 60 **Введение в математический анализ :** учебное пособие / В. А. Алякин, Р. Ф. Узбеков. – Самара : Изд-во «Самарский университет», 2009. – 60 с.

Данное учебное пособие состоит из теоретических сведений и практических заданий по курсу «Введение в математический анализ». На занятиях по этой дисциплине студенты актуализируют знания из школьной математики и некоторым разделам математического анализа. Каждый параграф соответствует примерно одному-двум занятиям. Для типичных и трудных задач приводятся схемы решений или указания к решениям.

Предназначено для студентов I курса специальностей «Математика», «Механика» и «Компьютерная безопасность».

УДК 517
ББК 22.161

Введение

Опыт работы со студентами I курса показывает, что ряд важнейших тем школьной программы по элементарной математике недостаточно хорошо усвоен значительным числом абитуриентов, что серьезно мешает им осваивать курс математического анализа.

Данное учебное пособие направлено на устранение пробелов в подготовке студентов I курса математических специальностей. По содержанию оно ориентировано на повторение и более глубокое изучение большей части курса элементарной математики.

При написании настоящего пособия авторы уделили особое внимание вопросам, представляющим определенные трудности для понимания. К ним относятся такие темы: «Неравенства», «Системы и совокупности неравенств», «Тригонометрические неравенства», «Преобразования графиков функций», «Задачи с параметрами».

По важнейшим темам приводятся краткие теоретические сведения. Каждая тема соответствует примерно одному – двум занятиям. Авторы надеются, что эта особенность учебного пособия сделает проведение занятий более легким и удобным и будет по достоинству оценена преподавателями. Большое внимание было уделено качеству и разнообразию подобранных задач по каждой теме. В зависимости от степени подготовленности аудитории имеются как простые, стандартные задачи, так и более сложные, интересные задания.

Для контроля знаний в пособии предусмотрены две контрольные работы, первая — после блока тем по алгебре, а вторая — итоговая.

Тема 1. Метод математической индукции (2 часа)

Докажите следующие равенства (1-4).

1.
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2.
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3\ldots+n)^2.$$

4.
$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. Докажите, что для любого $n\geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей вида $\frac{1}{n}$.
Указание: Используйте следующие равенства: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ *и* $\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}+$ $+\frac{1}{k(k+1)}$.

Докажите, что выполняются следующие неравенства (6-8).

6.
$$2^{n+2}>2n+5,\ \ \forall n.$$

7.
$$2^n\geq n^2,\ \forall n\geq 4.$$

8.
$$2^n>n^3,\ \forall n\geq 9.$$

9. Докажите, что
$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2,\ \forall n.$$

10. Докажите, что
$$(1+x)^n\geq 1+nx\ \ (\forall n>1,\ \forall x>-1),$$

причем знак равенства имеет место быть лишь при $x=0$.

11. Докажите неравенство Бернулли
$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \dots x_n$ – числа одного и того же знака, большие -1.
Убедитесь в справедливости следующих неравенств (12-15).

12.
$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \ \ (\forall n \geq 3)$$

13.
$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \ \ (\forall n)$$

14.
$$n! < (\frac{n+1}{2})^n \ \ (n > 1)$$

15.
$$n^{n+1} > (n+1)^n \ \ (\forall n \geq 3).$$

Тема 2. Рациональные уравнения (2 часа)

Одним из способов решения уравнений высших степеней является способ разложения на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Этот способ основан на применении теоремы Безу.

Если число a является корнем многочлена $P(x)$, имеющего степень n, то этот многочлен можно представить в виде $P(x) = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$— частное от деления $P(x)$ на $x - a$, многочлен степени $n - 1$.

Если уравнение имеет целые коэффициенты, то можно отыскать рациональные корни с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем старшего коэффициента a_0.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен единице, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, целые числа.

1. Докажите, что число 1 является корнем многочлена тогда и только тогда, когда его сумма коэффициентов равна нулю.

2. Разложите на множители с целыми коэффициентами:
$a)\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; $b)\ 2x^3 + 5x^2 + x - 2$; $c)\ x^3 - 2x + 1$;
$d)\ x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$; $e)\ x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

3. Решите уравнения:
$a)\ x^3 - 5x + 4 = 0$; $b)\ x^3 - 7x - 6 = 0$; $c)\ 8x^3 - 4x + 1 = 0$;
$d)\ 16x^3 - 6x + 1 = 0$; $e)\ 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$;
$f)\ x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$; $g)\ 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$.

4. Найдите a и решите уравнение, если известен один из его корней:

$$a)\ 2x^3 - (a+4)x^2 + 2(a-1)x + a = 0, \quad x_1 = 0,5;$$

$$b)\ 6x^3 + 2(a-9)x^2 - 3(2a-1)x + a = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}.$$

5. Решите уравнения:

$$a)\ \frac{4(x+3)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} - \frac{5}{2x^2 - 3x - 2} = 1;$$

$$b)\ \frac{x^2 - 5x - 6}{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3} = \frac{4x^2 - 20}{2x^2 + x - 3}.$$

6. Решите уравнения:
$a)\ (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9$; $b)\ (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 20) = 4$;
$c)\ (x-1)(x-5)^2(x-9) = -39$; $d)\ (x^2 - 2x)(2x-3)(2x-1) = 2,5$;
$e)\ x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; $f)\ x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$.

7. Многочлен $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ при делении на $x + 1$ дает остаток 18, а на $x - 2$ делится без остатка. Найдите корни многочлена.

8. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ при делении на $x + 1$ и на $x + 2$ дает остаток 12. Один из корней многочлена равен 1. Найдите остальные корни многочлена.

Считая, что величины a и b постоянные, решите уравнения (9-14).

9. $\frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23.$

10. $\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2.$

11. $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0.$

12. $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$.
Указание: сделайте замену $x + \frac{1}{x} = t$.
13. $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.
14. $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.

15. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a+b+c) < 0$. Верно ли обратное утверждение?
Указание: обратное неверно, например, для уравнения $y = x^2 + 2x$.

16. Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2 - y^2 = k^{1993}$ разрешимо в целых числах.
Указание: положите $x - y = k$, $x + y = k^{1992}$.
17. Решите уравнение

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+4} = \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+4}.$$

Указание: разделите числитель и знаменатель каждой дроби на x.
18. Решите уравнение

$$(y-x^2)^2 + (1+y)^2 = \frac{1}{2}.$$

Указание: 1-й способ. Приведите к виду $A^2 + B^2 = 1$ *и сделайте замену* $A = \cos\phi$, $B = \sin\phi$.
2-й способ. Примените неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.
3-й способ. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно переменной y.
4-й способ. Примените формулу расстояния между двумя точками на плоскости.

19. Решите уравнения:

$$a)\ \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)^2};$$

$$b^*)^1\ \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)^2}.$$

[1]Символом * обозначаются задачи повышенной сложности.

Тема 3. Системы рациональных уравнений (4 часа)

Решите системы уравнений (1-14, 16, 17).

1.
$$\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120. \end{cases}$$

Указание: разделите второе уравнение на первое.

2.
$$\begin{cases} x^3+y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2,5 - y, \\ 6(x-y)^2 + x = 0,125 + y. \end{cases}$$

Указание: сделайте замену $x + y = t, \ \ x - y = s.$

4.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x^3+y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x^2+y^4 = 20, \\ x^4 + y^2 = 20. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Указание: перемножьте уравнения системы и решите квадратное уравнение относительно переменной xy.

10.

$$\begin{cases} \frac{3}{uv} + \frac{15}{vw} = 2, \\ \frac{15}{vw} + \frac{5}{wu} = 2, \\ \frac{5}{wu} + \frac{3}{uv} = 2. \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y) = 60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x) = 105. \end{cases}$$

Указание: разделите одно уравнение на другое, раскройте скобки и сделайте замену $\frac{x}{y} = t$.

12.

$$\begin{cases} x+y+z = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.5, \\ xyz = 8. \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} x+y+z = 2, \\ x^2+y^2+z^2 = 6, \\ x^3+y^3+z^3 = 8. \end{cases}$$

Указание: запишите первое уравнение системы в виде $y+z = 2-x$ *и возведите в квадрат, а далее воспользуйтесь вторым уравнением. Получим,* $yz = x^2 - 2x - 1$. *Теперь то же самое уравнение возведем в куб и воспользуемся третьим уравнением системы.*

14.

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

Указание: сложив все три уравнения системы, мы получим $xy + yz + zx = 11$. *Затем вычтем из этого уравнения каждое из уравнений системы и перемножим их.*

15. Покажите, что корни уравнения $x + \frac{1}{x} = 2\cos 40^0$ являются также корнями уравнения $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2\cos 160^0$.

Указание: возведите первое уравнение в квадрат последовательно два раза.

16.

$$\begin{cases} (x^2+x+1)(y^2+y+1) = 3, \\ (1-x)(1-y) = 6. \end{cases}$$

Указание: система — симметрическая, поэтому нужно сделать замену $x + y = a, \quad xy = b$.

17.

$$\begin{cases} x = y^3 - 3y, \\ y = x^3 - 3x. \end{cases}$$

Указание: 1-й способ. Система

$$\begin{cases} x + 3y = y^3, \\ y + 3x = x^3 \end{cases}$$

является однородной. Умножьте первое уравнение на x^3, *а второе на* $-y^3$ *и сложите.*

2-й способ. Сложите и вычтите уравнения системы, а затем разложите на множители полученные уравнения.

Тема 4. Рациональные неравенства. Метод интервалов (2 часа)

Решите неравенства с помощью метода интервалов (1-5, 7-8, 11, 12).

1. $a^4 + a^3 - a - 1 < 0$.
2. $m^3 + m^2 - m - 1 > 0$.
3. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.
4. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$.
5. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$.

Найдите целые неотрицательные числа x, удовлетворяющие неравенству (6-8).

6.

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x - x^2}.$$

7.

$$(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0.$$

8.

$$\frac{1}{x^2-4} + \frac{4}{2x^2+7x+6} \leq \frac{1}{2x+3} + \frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}.$$

9. Дана функция $f(x) = x^3 - 6x$. Решите неравенство

$$\frac{f(x) - 40}{f(x-1)} \leq 0.$$

10. Дана функция $f(x) = x^3 - 9x$. Решите неравенство

$$\frac{f(x) - 80}{f(x+2)} \geq 0.$$

11.

$$\frac{4}{(x-1)^2} \geq \frac{5}{x^2} - 4$$

12.

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5$$

Указание: после стандартных преобразований получаем неравенство

$$\frac{(x^2 - x - 2)(x^2 + 5x + 10)}{(x+2)^2} \geq 0.$$

В следующих задачах полезно воспользоваться известными неравенствами.

Неравенство Коши. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_k$ — неотрицательные числа. Тогда имеет место

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}, \tag{1}$$

где $k \geq 2$. В частности, если $k = 2$, то (1) примет вид

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}. \tag{2}$$

Если положить $a_1 = a$ и $a_2 = \frac{1}{a}$, то из (2) получаем

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \tag{3}$$

где $a > 0$. Если же $a < 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \leq -2. \tag{4}$$

13. Докажите, если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}.$$

Указание: обозначьте $a = x_2 + x_3$, $b = x_3 + x_1$, $c = x_1 + x_2$ *и выразите* x_1, x_2, x_3 *через* a, b, c, *а затем перепишите левую часть неравенства согласно новым обозначениям. Далее нужно воспользоваться неравенством (3).*

14. Докажите, что если $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, то

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3.$$

Указание: прибавьте к обеим частям неравенства число 6 и преобразуйте его к следующему виду: $2(a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) \geq 9$. *Далее переобозначьте переменные* $r = a+b$, $s = a+c$, $t = b+c$ *и дважды к левой части примените неравенство (1) для* $k = 3$.

15. Докажите, что для $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ выполнено

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}.$$

Указание: представьте выражение $\frac{a}{1+a^2}$ *в виде* $\frac{1}{\frac{1}{a}+a}$ *и к знаменателю дроби примените неравенство (3).*

16. Докажите, если $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ и $a + b + c \leq 3$, то

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leq \frac{3}{2}.$$

Указание: данное неравенство равносильно $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2}$. *Из условия следует, что* $(a+1)+(b+1)+(c+1) \leq 6$. *Последнее неравенство разделите последовательно на* $a+1$, *затем на* $b+1$ *и* $c+1$. *Тогда получим систему неравенств. Складывая все неравенства системы, придем к* $6(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}) \geq 3 + \frac{b+1}{a+1} + \frac{c+1}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{c+1}{b+1} + \frac{a+1}{c+1} + \frac{b+1}{c+1}$. *Остается применить неравенство Коши (3).*

Решите неравенства (17-18).

17.

$$(x-3)\sqrt{x^2+3} \leq x^2 - 9.$$

Указание: примените обобщенный метод интервалов.

18.

$$x^2 \leq x^4.$$

Тема 5. Системы и совокупности рациональных неравенств (2 часа)

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству:
a) $x^2y + xy^2 \leq 2xy$;
b) $x + \frac{1}{y} \geq 0$;
c) $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x-y}$;
d) $1 \geq \frac{y}{x}$;
e) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$;
f) $xy + 1 \leq x + y$;
g) $x^2y + y^3 \geq y$;
h) $\frac{x-y}{x^2+y^2-1} \geq \frac{1}{2}$.
Указание: перенесите все переменные в одну часть неравенства и сведите его к равносильной системе неравенств. Изобразите на плоскости множество, удовлетворяющее каждому из неравенств системы и возьмите пересечение этих множеств (или их общую часть).

2. Найдите все b, при которых система неравенств
a) $\begin{cases} y \geq (x-b)^2, \\ x \geq (y-b)^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + x^2 \leq b, \\ x + y^2 \leq b. \end{cases}$
имеет единственное решение.
Указание: a) первое из неравенств системы задает множество точек, лежащих не ниже параболы $y = (x-b)^2$, второе — множество точек, лежащих не левее симметричной ей относительно прямой $y = x$ параболы $x = (y-b)^2$. Остается выяснить, при каком b эти множества имеют единственную общую точку.

3. Решите неравенство

$$(x^2 + 13x - 49)(x^2 + 14x - 50) > 0$$

4. Найдите целые решения системы неравенств:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x+5}{2}; \quad 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4}.$$

5. При каком a всякое число x является решением хотя бы одного из неравенств

$$2x^2 - 3ax - 9 \geq 0; \quad x^2 + ax - 2 > 0?$$

Указание: значение a удовлетворяет условию задачи, если всякое решение неравенства $f(x) = 2x^2 - 3ax - 9 < 0$ является решением неравенства $g(x) = 2x^2 + 2ax - 4 > 0$. Так как $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные корни, то приходим к следующей задаче: при каких значениях a интервал (x_2, x_1) решений неравенства $f(x) < 0$ целиком входит в объединение лучей $(-\infty, x_4) \bigcup (x_3, \infty)$, являющееся множеством решений неравенства $g(x) > 0$?

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств имеет решение:

$$a) \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}; \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2; \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3, \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2a-1}{2a+5}; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geq \frac{3a+1}{a+2}, \\ 3x^2 + xy + y^2 \leq 1; \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x^2 - 8xy - 8y^2 > 2, \\ x^2 - 4xy + 2y^2 \leq \frac{a+1}{1+2a}. \end{cases}$$

Указание: a) преобразуем первое неравенство системы $-x^2-2xy+7y^2 \leq$ $\leq 1-\frac{2}{a+1}$. Умножим первое на 2 и прибавим ко второму: $(x+3y)^2 \leq \frac{-4}{a+1}$. Отсюда вытекает, что $\frac{-4}{a+1} \geq 0$, то есть $a < -1$. Остается доказать, что для каждого такого a система имеет решение. Так как $-1 > \frac{1-a}{1+a}$, то достаточно доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

имеет решение.

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^{2006} + y^{2006} \leq x^{2002} + y^{2002}, \\ x^2y^2 + xy \geq 2. \end{cases}$$

Указание: сделав замену $x^2 = a$, $y^2 = b$, получите систему неравенств

$$\begin{cases} a^3 + b^3 \leq a + b, \\ ab \geq 1, \end{cases}$$

откуда $ab = 1$.

Тема 6. Уравнения с модулем (2 часа)

Решите уравнения (1-3, 11-13).

1. $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$.

2. $|x+1| + |x-1| = 2x^3$.

Указание: решите уравнение на интервалах $(-\infty, 1)$, $[-1, 1)$, $[1, \infty)$.

3. $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$.

4. Решите уравнение $|x^2 + 1,5x + 1| = m$. При каких значениях m оно имеет единственное решение?

5. Найти целые корни уравнения

$$x^3 - |x-1| = 1.$$

6. Решите графически уравнение

$$|x-1| + 2x + 5 = 0.$$

7. Докажите тождества:

$$|a| + |b| = \max\{|a+b|,\ |a-b|\};$$

$$|x-y| + |x+y| = 2\max\{|x|,\ |y|\}.$$

8. Найдите все такие a, чтобы при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имело решение.

Указание: воспользуйтесь геометрическим подходом к решению задачи.

9. Найдите все такие b, чтобы при любом a уравнение $ax + b = |x|$ имело решение.

10. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-1994| = a?$$

Указание: функция $f(x) = \sum_{k=1}^{1994} |x-k|$ *убывает на луче* $(-\infty,\ 997]$, *возрастает на* $[998,\ \infty)$ *и* $f(x) = 996 * 997 + 997 = 997^2$ *при любом* $x \in [997, 998]$.

11. $x^4 - 7x^2 + 2x + 2 = |4x-1| - |2x^2 - 3|$.

Указание: обозначим $y = |4x-1|$, $z = |2x^2 - 3|$, *тогда в новых переменных уравнение примет вид* $z^2 - y^2 = 4(y-z)$.

12. $|x-1| + |6-2x| = 5$.

13. $|x^2 + x| + |x^2 - x| = 2|x|$.

Указание: равенство $|a| + |b| = |a+b|$ *равносильно неравенству* $ab \geq 0$.

Тема 7. Неравенства с модулем (2 часа)

1. Решите неравенство при всех значениях параметра a

$$-2x^2+2ax-1>|2x-a|$$

Указание: геометрическая идея — вершина параболы имеет координаты $(\frac{a}{2},\frac{a^2}{2}-1)$, *поэтому решение неравенства существует при* $a^2>2$.

2. Решите неравенства:

$$a)\ |\frac{x^2-x+1}{x-1}|<|x|+\frac{1}{|x-1|};$$

$$b)\ |\frac{x^2+2x+2}{x+2}|\geq|x|+\frac{2}{|x+2|}.$$

Указание: примените схему $|a+b|=|a|+|b|\ \Leftrightarrow ab\geq 0$.

3. При всех значениях b решите неравенства:
a) $|x^2+b|\leq b+1$;
b) $|x^2-b|\leq b-1$.

Решите следующие неравенства (4-11).

4. $|x-1|+|x-2|>x+3$.
5. $x^2-4|x|+3>0$.
6. $x^2-5|x|+6<0$.

Указание к задачам 5,6: сделайте замену $|x|=t,\ t\geq 0$.

7. $\frac{3|x|-14}{x-3}\leq 4$.
8. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.
9. $|\frac{2}{x-4}|>1$.
10. $|x+1|>2|x+2|$.

Указание: примените схему $|f(x)|>|g(x)|\ \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$.

11.

$$a)\ |x-4|\geq x^3+x+4,$$

$$b)\ |x^3-x+4|\leq x+4.$$

Указание: примените схемы:

$$|f(x)|\leq g(x)\ \Leftrightarrow f(x)\leq g(x),\ f(x)\geq -g(x);$$

$$|f(x)|\geq g(x)\ \Leftrightarrow f(x)\geq g(x)\ \textit{или}\ f(x)\leq -g(x).$$

Тема 8. Иррациональные уравнения (2 часа)

Решите уравнения (1-13, 15-18).

1. $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.
2. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.
3. $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

Указание: так как $x=5$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$ и потом сделать замену $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=t$, которая приведет исходное уравнение к квадратному $t^2-5t+4=0$.

4. $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3$.

Указание: сделайте замену $\sqrt{2x^2-3x+2}=u$ и сведите уравнение к равносильной системе $u^2-2u+1=0,\ u\geq 0$.

5. $\sqrt{y+3-4\sqrt{y-1}}+\sqrt{y+8-6\sqrt{y-1}}=1$.

Указание: после замены $x=\sqrt{y-1},\ x\geq 0$ данное уравнение сводится к следующему: $|x-2|+|x-3|=1$.

6. $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$.

7. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$.

Указание: примените к каждому из слагаемых левой части уравнения неравенство Коши $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ и сведите данное уравнение к неравенству $x^2-x+2\leq x+1$.

8. $\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$.

Указание: примените к каждому из слагаемых левой части уравнения неравенство Бернулли: если $0<p<1$, то $(1+x)^p\leq 1+px$, где $x>-1$.

9. $\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})}=1$.

Указание: после замены $\sqrt{9-x^2}=y,\ y\geq 0$ примените к левой части уравнения $\frac{9-y^2}{3+y}+\frac{1}{4(3-y)}=1$ неравенство Коши и учтите, что неравенство Коши превращается в равенство лишь в том случае, если слагаемые левой части неравенства равны друг другу.

10. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

11. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$
Указание: возведите в куб обе части уравнения.

12. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0.$
13. $\frac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1+x.$
14. Покажите, что уравнение $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ имеет единственный положительный корень и найдите этот корень.
Указание: сделайте замену $\sqrt[4]{x^4+x-2}=v,\ v\geq 0$ *и после этого сведите к квадратному уравнению.*

15. $\sqrt{x^3+3x^2-3}=x.$
Указание: примените схему $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ *и* $f(x)=g^2(x).$

16. $\sqrt{2x^2+2x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}=x+4.$
Указание: умножьте обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части.

17. $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}.$
Указание: возведите обе части уравнения в куб и примените формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, *не забудьте сделать проверку полученных значений!*
18. $\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}=2+2x-x^2.$
Указание: выделите полные квадраты и докажите, что левая часть уравнения не меньше 3, а правая часть не больше 3.

Тема 9. Иррациональные неравенства (2 часа)

Решите неравенства (1-11,18).
1.
$$x-3<\sqrt{x-2}.$$
Указание: примените схему
$$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x)\geq 0,\\ f(x)>g^2(x)\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} g(x)<0,\\ f(x)\geq 0.\end{array}\right.$$

2.
$$\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0.$$

3.

$$\sqrt{3x - x^2} < 4 - x.$$

Указание: примените схему

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0; \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

4.

$$\sqrt{9x - 20} < x.$$

5.

$$\frac{4}{\sqrt{2 - x}} - \sqrt{2 - x} < 2.$$

6.

$$\sqrt{x + 3} < \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2}.$$

7.

$$(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9.$$

Указание: приведите неравенство к виду $(x-3)(\sqrt{x^2+4}-(x+3)) \leq 0$.

8.

$$\sqrt{x^3 + 3x + 4} > -2.$$

9.

$$\frac{2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x^2}} > \frac{1}{x}.$$

10.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{5}{\sqrt{x - 3}}.$$

11.

$$\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x.$$

12. Докажите неравенство

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}} < \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2},$$

где $a > 0$.

Решение: очевидно, что

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}} < \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}\ .$$

Обозначьте $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}$ *и возведите обе части уравнения в квадрат, тогда получите*

$$x^2 = a + x \text{ или } x^2 - x - a = 0.$$

Тогда последнее уравнение имеет единственный положительный корень $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

13. Докажите, что если $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, то

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Указание: проведите доказательство методом от противного.

14. Решите неравенство

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1.$$

Указание: таким образом, $x \geq y^2+1$, *поэтому* $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1} \geq 1$. *Следовательно, имеет место равенство.*

15. Покажите, что

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$$

при $x, y \geq 0$.

16. Докажите неравенство

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} > \frac{1}{4},$$

где в числителе дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе — 1993.

Указание: сделайте замену $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$ *(1993 корня) и учтите то, что* $\frac{2-\sqrt{x+2}}{2-x} = \frac{1}{2+\sqrt{x+2}}$.

17. Найдите область определения функции:

a)

$$y(x) = \sqrt{\frac{\{x\} - 1}{x^3 - 25x}} + \frac{1}{[x] - 2},$$

здесь $\{x\}$ — дробная, $[x]$ — целая часть числа x;

b)

$$y(x) = \sqrt{\frac{1 - \{x\}}{x^3 - 36x}} + \frac{1}{[x] + 3}.$$

Указание к пункту а: так как $\{x\} < 1$, *то* $x^3 - 25x < 0$.

18.
$$\frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1).$$

Указание: умножьте обе части неравенства на $\sqrt{1+x} + 1$.

Тема 10. Системы иррациональных уравнений и неравенств (2 часа)

Решите системы неравенств (1, 2).

1.
$$\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2 - 13}.$$

2.
$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$$

Решите системы уравнений (3-12).

3.
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2\sqrt{yz}, \\ y^2 - 1 = 2xz\sqrt{1 - 4yz}. \end{cases}$$

Указание: из первого уравнения системы следует, что $4yz \geq 1$, *а из второго — что* $4yz \leq 1$.

4.
$$\begin{cases} zx = x + 2, \\ x + z = 2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}). \end{cases}$$

Указание: преобразуем второе уравнение системы к виду $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 = 0$. *Откуда получаем, что* $x = y = z$.

5.
$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1, \\ y - \sqrt{z} = 1, \\ z - \sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

Указание: очевидно, что $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$. *Покажем, что* $x = y$. *Пусть* $x \geq y$, $x \geq z$. *Так как* $y = (x-1)^2$, $z = (y-1)^2$, $x = (z-1)^2$ *и* $x \geq y$, *то* $(z-1)^2 \geq (x-1)^2$. *Поскольку* $x \geq 1$, $z \geq 1$, *то* $z \geq x$. *Мы предполагали, что* $x \geq z$, *поэтому* $x = z$. *Аналогично можно доказать, что* $x = y$.

6.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{u} - \sqrt[4]{v} = 1, \\ \sqrt{u} + \sqrt{v} = 5. \end{cases}$$

Указание: возведите первое уравнение в квадрат и воспользуйтесь вторым.

8.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 91, \\ x + \sqrt{xy} + y = 13. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$$

Указание: сделайте замену $\sqrt{\frac{y}{x}} = z$ и выразите y через x после решения квадратного уравнения.

10.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = 1,5. \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$$

Указание: сложите все уравнения системы, тогда получите $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 6$. Теперь вычтите из этого уравнения каждое из уравнений данной системы.

12.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$$

Тема 11. Преобразование тригонометрических выражений (2 часа)

Докажите тождества (1-9).

1.
$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

2.
$$\sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21\alpha}{2}.$$

3.
$$2\sin^2(3\pi - 2\alpha)\cos^2(5\pi + 2\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha).$$

4.
$$\frac{\cos(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = tg\alpha.$$

5.
$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = -4\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}\cos(\alpha + \beta).$$

6.
$$tg\alpha + \cos^{-1}\alpha - 1 = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}.$$

7.
$$1 + ctg\alpha + \sin^{-1}\alpha = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}.$$

8.
$$\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha - \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) = \sin^2\alpha.$$

9.
$$\frac{\sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha + \sin 9\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = tg\frac{15\alpha}{2}.$$

Упростите выражения (10-17).

10.
$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha - 2\pi)ctg(\alpha - \frac{5\pi}{4})} + \cos^2\alpha.$$

11.
$$\cos\alpha(1 + \cos^{-1}\alpha + tg\alpha)(1 - \cos^{-1}\alpha + tg\alpha).$$

12.
$$\sin^2\alpha(1 + \sin^{-1}\alpha + ctg\alpha)(1 - \sin^{-1}\alpha + ctg\alpha).$$

13.
$$\frac{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + tg^2\alpha - 1}.$$
14.
$$\frac{1+\cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha - \frac{\pi}{2})}{1+\cos(4\alpha+\pi) + \cos(4\alpha + \frac{3\pi}{2})}.$$
15.
$$\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}.$$
16.
$$\frac{\sin(80^o + 4\alpha)}{4\sin(20^o+\alpha)\sin(70^o - \alpha)}.$$
17.
$$(tg255^o - tg555^o)(tg795^o + tg195^o).$$
18. Найдите такую функцию g, что при всех x справедливо равенство:
a) $g(\cos x + \sin x) + g(\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})) = -3$;
b) $g(\cos x - \sin x) + g(\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})) = 1$.

19. Дана функция $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$. Докажите, что $f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} + 1$.
Указание: домножьте числитель и знаменатель дроби на $\cos x + \sin x$ *и учтите, что полученное равенство не является тождеством.*
20. Дана функция $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$. Докажите, что $f(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Докажите тождества (21-23).
21.
$$1 + tgx + tg^2x + tg^3x = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos^3 x}.$$
22.
$$ctg\alpha - tg\alpha - 2tg2\alpha - 4tg4\alpha = 8ctg8\alpha.$$
23.
$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}} = ctg(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}),\ \pi < \alpha < 2\pi.$$
Докажите равенства (24-26).
24.
$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$
25.
$$arctg\frac{1}{7} + 2arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}.$$

26.
$$\frac{1}{\sin 10^o} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^o} = 4.$$

Докажите, что если α, β, γ – углы треугольника, то выполняется равенство (27, 28).

27.
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

28.
$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Тема 12. Тригонометрические уравнения (4 часа)

Решите уравнения (1-19).

1.
$$\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2}\sin 3z.$$

2.
$$tg2x\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0.$$

3.
$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

4.
$$\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x).$$

5.
$$\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$$

6.
$$(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x.$$

7.
$$6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$$

8.
$$25\sin^2 x + 100\cos x = 89.$$

9.
$$\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25.$$

10.

$$(\sin x - \cos x)^2 + tgx = 2\sin^2 x.$$

11.

$$(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0,5\sin 4x.$$

12.

$$\frac{40(\sin^3\frac{t}{2} - \cos^3\frac{t}{2})}{16\sin\frac{t}{2} - 25\cos\frac{t}{2}} = \sin t.$$

13.

$$\frac{\cos^2 z(1 + ctgz) - 3}{\sin z - \cos z} = 3\cos z.$$

14.

$$tg^2 t - \frac{2\sin 2t + \sin 4t}{2\sin 2t - \sin 4t} = 2ctg2t.$$

Указание: преобразуйте дробь до выражения $ctg^2 t$.

15.

$$\cos 6x + \sin\frac{5}{2}x = 2.$$

Указание: оба слагаемых должны быть равны 1.

16.

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}.$$

17.

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

Решение: примените формулу разности синусов двух углов, тогда получите $2\sin 2x - 2\sin x\cos 2x = 3$ *или*

$$\sin 2x - \sin x\cos 2x = \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Преобразуйте теперь левую часть уравнения (*) следующим образом:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} - \frac{\sin x\cos 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right).$$

Так как при любом x *справедливо*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2 + \left(\frac{-\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2 = 1,$$

то существует угол $\varphi(x)$ такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \cos\varphi(x), \quad -\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \sin\varphi(x).$$

Следовательно, уравнение (*) перепишется в виде

$$\sqrt{1+\sin^2 x}\sin(2x+\varphi(x)) = \frac{3}{2}. \qquad (**)$$

Левая часть уравнения (**) не превосходит $\sqrt{2}$, поэтому уравнение корней не имеет.

18.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 4x.$$

Указание: к левой части уравнения примените формулу суммы кубов $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ и сведите его к виду $\frac{5+3\cos 4x}{8}$.

19.

$$1+\cos^2 x + 2\cos x\cos^2 5x = \sin^2 5x.$$

Указание: рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно $\cos x$.

Тема 13. Тригонометрические неравенства (2 часа)

Решите неравенства (1-4).

1.

$$\sqrt{3}\cos^{-2} x < 4\, tgx.$$

2.

$$\sin 4x + \cos 4x\, ctg2x > 1.$$

3.

$$2 + tg2x + ctg2x < 0.$$

4.

$$2\cos x(\cos x - \sqrt{8}\, tgx) < 5.$$

5. Изобразите на плоскости множество точек $A(a, b)$, для которых при всех x верно неравенство

$$\sin(x+a) \geq \sin x + b.$$

6. Дана функция $f(x) = tg(x - \frac{\pi}{3}) + tg(x + \frac{\pi}{3})$. Решите неравенство $f(x) < 0$.

7. Дана функция $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$. Решите неравенство $f(x)\geq 2\ tg2x$.
Указание: примените решение задачи 19 из темы 11.

8. Докажите, что при всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство:
a)

$$2^n|\sin(2^{-n}x)|\geq \sin x,\quad x\in\mathbb{R};$$

b)

$$\sin(2^n x)\leq 2^n|\sin x|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Решение задачи 8а: доказательство проведем по индукции. Сделаем замену $t=2^{-n}x$ и докажем неравенство

$$\sin(2^n t)\leq 2^n|\sin t|.$$

Действительно, $\sin(2^n t)=2\sin(2^{n-1}t)\cos(2^{n-1}t)\leq 2|\sin(2^{n-1}t)|\leq 2^n|\sin t|\ldots$

9. Дана функция $y=\cos 2x+\cos x-4\cos^2\frac{x}{2}$. Докажите, что при всех значениях x выполняется неравенство $y\leq 0$.
Указание: воспользуйтесь тем, что $y=2\cos^2 x-1+\cos x-2(1+$ $+\cos x)=2\cos^2 x-\cos x-3$.

10. Покажите, что $\frac{1}{8}<\cos 20^o\cos 40^o\cos 70^o<\frac{1}{4}$.
Указание: воспользуйтесь тем, что $\cos 70^o=\sin 20^o$.

11. Покажите, что $tg40^o+tg45^o+tg50^o>3$.

12. Покажите, что $\frac{1}{8}<\sin 20^o\sin 50^o\sin 70^o<\frac{1}{4}$.

13. Докажите, что для любых x $(x\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z})$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\geq 9.$$

Указание: представьте выражение в левой части неравенства в следующем виде: $(2+ctg^2x)(2+tg^2x)$.

14. Докажите, что для любого $x\in\mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$(\sin^2 x)^{\cos^2 x}+(\cos^2 x)^{\sin^2 x}\leq 1+\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Указание: воспользуйтесь тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *и неравенством Бернулли: если* $0 < p < 1$, *то* $(1+x)^p \le 1 + px$.

Тема 14. Показательные уравнения и неравенства (2 часа)

Решите уравнения (1-4).

1.
$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}.$$

2.
$$3 * 5^{2x-1} - 2 * 5^{x-1} = 0,2.$$

3.
$$8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0.$$

4.
$$3^{2x+4} + 45 * 6^x - 9 * 2^{2x+2} = 0.$$

Решите неравенства (5-9).

5.
$$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}.$$

6.
$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \le 0.$$

7.
$$\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}.$$

8.
$$x^2 * 3^x - 3^{x+1} \le 0.$$

9.
$$2x * 2^{\sqrt{3-x}} + 3 * 2^{x-1} > x * 2^x + 3 * 2^{\sqrt{3-x}}.$$

10. Докажите, что уравнения имеют ровно два решения:
a) $1 + 9^{9x} + 5^x = 4x + 3$;
b) $8^x + 4^x + 2^x = 2x + 3$.
Указание к пункту 10b: учтите то, что $(8^x + 4^x + 2^x)'|_{x=0} = \ln 64 > 2$ *и постройте графики левой и правой частей уравнения.*

11. Определите число решений уравнения $|14^x - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a.

12. Решите неравенства:

a)

$$8^x - 3 * 4^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+3} > 0;$$

b)

$$\frac{5 * 3^{x-2}}{3^x - 2^x} \geq 1 + (\frac{2}{3})^x;$$

c)

$$a^2 - 2 * 4^{x+1} - a * 2^{x+1} > 0, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Указание к пункту 12b: сделайте замену $t = (\frac{3}{2})^x$, а в неравенстве пункта 12c — замену $z = \frac{2^{x+1}}{a}$.

Решите уравнения (13-16).

13.

$$(0,6)^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3.$$

14.

$$\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \, 0,125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}.$$

15.

$$(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4.$$

16.

$$16^x + 36^x = 2 * 81^x.$$

Тема 15. Логарифмические уравнения (2 часа)

Упростите, указав допустимые значения параметров (1-2).

1.

$$\frac{\log_a \sqrt{a^2-1} \ \log^2_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \ \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}.$$

2.

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a ab - \log_{ab} b) \log_b a - 1.$$

3. Найти $\lg \sqrt{x}$, если известно, что $\log_x 100 = a$.

4. Найти $\log_9 2,97$, если известно, что $\lg 3 = a$, $\lg 11 = b$.

Решите уравнения (5-14).

5.
$$\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20).$$

6.
$$\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4.$$

7.
$$\log_x \sqrt{2} - \log_x^2 \sqrt{2} = \log_3 27 - \log_x(2x).$$

8.
$$\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3).$$

9.
$$7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 * 5^{\lg x-1} - 13 * 7^{\lg x-1}.$$

10.
$$(16 * 5^{2x-1} - 2 * 5^{x-1} - 0,048)\lg(x^3 + 2x + 1) = 0.$$

11.
$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$$

12.
$$\log_{x+1}(x - 0,5) = \log_{x-0,5}(x+1).$$

13.
$$\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2,5.$$

14.
$$|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2.$$

Решите системы уравнений (15-18).

15.
$$\begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3. \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} 2(\log_{\frac{1}{y}} x - 2\log_{x^2} y) + 5 = 0, \\ x * y^2 = 32. \end{cases}$$

Указание: в первом уравнении положите $\log_x y = z$ *и решите его относительно* z.

Решите уравнения (19-23).

19.

$$\log_{2x} x = \log_{4x} x.$$

20.

$$16^{\frac{x-1}{x}} * 5^x = 100.$$

21.

$$x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}.$$

22.

$$10^{\sqrt{\lg x}} + x^{\sqrt{\log_x 10}} = 200.$$

23.

$$\log_3 \log_{\sqrt{2}} x + 2\log_{\frac{1}{9}} \log_2(2x - \frac{5}{9}) = 0.$$

Тема 16. Логарифмические неравенства (2 часа)

Найдите область определения функций (1-4).

1. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$. 2. $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$.

3. $y = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3 |x-4|}$. 4. $y = \log_3(2^{\log_{x-3} 0,5} - 1) + \frac{1}{\log_3(2x-6)}$.

Решите неравенства (5-14).

5.

$$\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5.$$

6.

$$\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2 - 16x} < 0.$$

7.

$$\log_x \log_9(3^x - 9) < 1.$$

8.

$$\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \le 0.$$

9.

$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0.$$

10.

$$\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \le -4.$$

11.

$$\log^2_2 (x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5.$$

12.

$$\frac{\log_2(\sqrt{4x+5} - 1)}{\log_2(\sqrt{4x+5} + 11)} > \frac{1}{2}.$$

Указание: сделайте замену $y = \sqrt{4x+5}$.

13.

$$\log_x \frac{3}{8 - 2x} \ge -2$$

Указание: к задаче 13 — примените схему:

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) - g(x)) \le 0, \\ a,\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

14.

$$\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x).$$

15. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых являются решениями системы неравенств

$$|y| \le \log_2(|x| + 1) \le 1.$$

16. Функция f задана формулой $f(x) = \log_a(x+3) + \log_a(x-1)$, где $a \in \mathbb{R}$.

a) Пусть $a = 4$. Решите неравенство $f(x) \le 2 - \log_4 8$.

b) При том же a решите неравенство $\frac{f(x) - 2 + \log_4 8}{\log_{0,19} 92 - \lg^2(5-x)} \le 0$.

c) Найдите множество значений a, для которых при $x \in (1; 2)$ верно неравенство $f(x) < 2$.

Решение задачи 16 c: перепишем условие в равносильной форме: $\log_a(x^2 + 2x - 3) < 2$ *при всех* $x \in (1; 2)$. *Пусть* $a > 1$, *тогда функция в левой части неравенства возрастающая и оно верно при всех* $x \in (1; 2)$ *тогда* *и только тогда, когда ее значение при $x = 2$ не превосходит двух, то есть $\log_a 5 \leq 2$, или $a \geq \sqrt{5}$. Если $0 < a < 1$, то, так как выражение $x^2 + 2x - 3$ при x, близких к единице, сколь угодно близко к нулю, то $\log_a(x^2+2x-3)$ может быть сколько угодно большим числом. Поэтому при таких a неравенство не может выполняться.*

17. Функция f задана формулой $f(x) = \log_a(x-2)+\log_a(x+4)$, $a \in \mathbb{R}$.
a) Пусть $a = 3$. Решите неравенство $f(x) \leq \log_3 1,8 + \log_3 15$.
b) При том же a решите неравенство $\frac{f(x)-\log_3 1,8-\log_3 15}{\log_{92} 19+\lg^2(7-x)} > 0$.
c) Найдите множество значений a, для которых при всех $x > 3$ верно неравенство $f(x) > 2$.

18. Дана функция $f(x) = \log_2 \frac{x-\frac{1}{x}}{3}$.
a) Решите неравенство $f(x) < -1$.
b) Решите уравнение $\sqrt{3 - f(x)} = 1 - f(x)$.
c) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x) = \log_2(a-x)$?
d) Докажите, что функция $f(x)$ монотонна на $(-1;0)$, и найдите формулу для функции $g(x)$, обратной к ней на этом интервале.
Указание: к 18d — решите уравнение $f(x) = a$.

19. Решите неравенство

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 1.$$

Тема 17. Уравнения и неравенства смешанного типа (2 часа)

Решите уравнения (1-3, 6, 10).

1.
$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

2.
$$\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 1 + \cos x.$$

3.
$$|ctg\ (2x - \frac{\pi}{2})| = \frac{1}{\cos^2 2x} - 1.$$

Решите неравенства (4-5, 7-9).

4.
$$4^{\sin^2 \pi x} + 3 * 4^{\cos^2 \pi x} \leq 8.$$

5.
$$\log_{tg\, x} \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < -1.$$

6.
$$|\log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x)| + |\log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x)| = 1.$$

7.
$$\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1.$$

8.
$$x^{\lg \sin x} \geq 1.$$

9.
$$3^{|x+2|} + 3^{|x-1|} \geq 28.$$

10.
$$\log_{\sin x} 2 + \log_{\cos x} 2 + \log_{\sin x} 2 \log_{\cos x} 2 = 0.$$

Контрольная работа (2 часа)

Решите уравнения (1-3, 6, 10).

1.
$$\sqrt{-\cos x} = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}.$$

2.
$$\sqrt{1 - 2\sin 4x} + \sqrt{6}\cos 2x = 0.$$

3.
$$|\cos x| = \cos x - 2\sin x.$$

Решите неравенства (4-5, 7-9).

4.
$$9^{1+\sin^2 \pi x} + 30 * 9^{\cos^2 \pi x} \leq 117.$$

5.
$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 + 2\cos 2x} < 1.$$

6.
$$|\log_3(1 + \cos 2x)| + |\log_3(1 - \cos 2x)| = 1.$$

7.

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

8.

$$x^{2\sin x - \cos 2x} < \frac{1}{x}.$$

9.

$$|3^x - 2| \le 1.$$

10.

$$(\sin x)^{-\sin x} - 1 = ctg^2\, x.$$

Тема 18. Графики функций. Преобразование графиков функций (2 часа)

Постройте графики функций (1-9).

1.

$$a)\ y = x^2 + 5x + 6;\quad b)\ y = x^2 + 5|x| + 6;$$
$$c)\ y = |x^2 + 5x + 6|;\quad d)\ y = |x^2 + 5|x| + 6|.$$

2.

$$a)\ y = -x^2 + 4x - 5;\quad b)\ y = -x^2 + 4|x| - 5;$$
$$c)\ y = |-x^2 + 4x - 5|;\quad d)\ y = |-x^2 + 4|x| - 5|.$$

3.

$$y = x|x| + 1.$$

4.

$$y = |x + 1| - x.$$

5.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}(x^2 - 4).$$

6.

$$y = \frac{x-1}{|x-3|}(x^2 - 9).$$

7.

$$a)\ y = \log_2 x;\quad b)\ y = \log_2 |x|;$$
$$c)\ y = \log_2(-x);\quad d)\ y = |\log_2 x|;\quad e)\ y = |\log_2 |x||.$$

8.
$$y = -2^{-|x|}.$$
9.
$$y = \log_2 \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$
10. Решите графически уравнение: $|x - 1| + 2x - 5 = 0$.

11. Отличаются ли один от другого графики функций $y = \lg x^2$ и $y = 2\lg x$?

Изобразите в координатной плоскости xOy заданные соотношения между переменными x и y (12-13).
12.
$$|y| = |\sin x|.$$
13.
$$|y| = \frac{|\sin x|}{\sin x}.$$
14. Построить эскиз кривой:
$$a)\ y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2};\quad b)\ y = (x+2)e^{\frac{1}{x}};$$
$$c)\ y = x^4 - 10x^2 + 9;\quad d)\ y = \frac{2}{1 + x^2}.$$
Решение задачи 14а: Проведем полное исследование функции.
1) Область определения: $D = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Исследование функции в граничных точках области D.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = -\infty,\ \lim_{x\to1-0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty.$$

3) Установление четности и периодичности функции.
Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к. ее область определения D *несимметрична относительно точки* $x = 0$*. Функция не является периодической, т. к. она имеет конечное число нулей* $(x = -1)$.

4) Нули и область постоянства знака функции.
Единственный нуль $x = -1$*; в* $(-\infty; -1)$ *функция отрицательна, в* $(-1; 1)$ *и* $(1; +\infty)$*— положительна.*

5) Нули и интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$.
$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$*, следовательно,* $x = -1$ *и* $x = 5$ *— нули* $f'(x)$*, в интервалах* $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(5; +\infty)$ *производная* $f'(x) > 0$*, в интервале* $(1; 5)$ $f'(x) < 0$.

6) Нули и интервалы знакопостоянства второй производной $f''(x)$.
$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$*, следовательно,* $x = -1$*— единственный нуль* $f''(x)$*, в интервалах* $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ $y'' > 0$*, а в интервале* $(-\infty; -1)$ $y'' < 0$.

7) Асимптоты.
Так как $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = \infty$*, прямая* $x = 1$ *является вертикальной асимптотой. Определим наклонные асимптоты.*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} (y(x) - x) = 5.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ *имеется наклонная асимптота* $y = x+5$*. Аналогично убеждаемся, что прямая* $y = x + 5$ *является наклонной асимптотой и при* $x \to +\infty$.

Учитывая эти сведения, чертим эскиз графика функции.

15. a) Решите уравнение $x^2 - x = |2x - 1|$.
b) Придумайте уравнение вида $P(x) = Q(x)$, не имеющее решений, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены ненулевой степени.

16. a) Решите неравенство $\sqrt{x+1} + x > 1$.
b) Придумайте иррациональное неравенство, множеством решений которого является вся его область определения.

Постройте график функции (17-19).
17.

$$y = \sqrt{(\sin x - \cos x)\cos\frac{x}{2} sec\frac{x}{2}}.$$

18.

$$y = \max_{t \in [x; x+\frac{\pi}{2}]} \sin t.$$

19.

$$y = \min_{t \in [x; x+\frac{\pi}{2}]} \cos t.$$

Тема 19. Задачи с параметрами (2 часа)

1. При каких значениях параметра уравнение

$$2\sqrt{1 - m(x+2)} = x + 4$$

имеет один корень?
Указание: сделать замену $\sqrt{1 - m(x+2)} = y \geq 0$, *решить уравнение графически.*

2. При каких значениях параметра уравнение

$$\sqrt{k(2x+1) + 16} - x = x - 3$$

не имеет корней?

3. При каком значении m система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (m-1)y = 3, \\ (m+1)x + 4y = -3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?
Указание: система уравнений имеет бесконечное множество решений (не имеет решений), если коэффициенты при x и y пропорциональны.
4. При каких значениях m система

$$\begin{cases} x + my = 3m, \\ mx + 9y = 6 \end{cases}$$

имеет решение, которое удовлетворяет неравенствам $x \geq 0$, $y \geq 0$?

5. При каких значениях a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два решения?

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$$

не имеет решений на отрезке $[0; \pi]$.

Решение задачи 6: для удобства введем обозначение $b = \sin a + \cos a$ и выясним, при каких b уравнение $\sin x + \cos x = b$ не имеет решений на $[0; \pi]$. Это уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда число b не принадлежит образу отрезка $[0; \pi]$ функции $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$. Очевидно, что это выполняется при $b \notin [-1; \sqrt{2}]$. Теперь остается решить неравенство $\sin a + \cos a < -1$.

7. При каких значениях a выражение $x^2 + 2ax + a - 2$ положительно на отрезке $[1; 2]$?

Решение задачи 7: положим $f(x) = x^2 + 2ax + a - 2$. По условию, $f(1) = 3a - 1 > 0$, то есть $a > \frac{1}{3}$. При указанных значениях параметра a функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$, поэтому если $f(1) > 0$, то $f(x) \geq 0$ при $x \in [1; 2]$. Таким образом, $a > \frac{1}{3}$.

8. Определите (в зависимости от a) число решений уравнения:

$$a)\ 2|x - a| = x + 1; \quad b)\ |x + a| = 2 - x^2.$$

Указание: решите графически каждое из уравнений.

9. Нарисуйте множество, заданное уравнением

$$\sqrt{2xy + a} = x + y + 1.$$

При каких a оно непусто?

10. При каких a следующие уравнения имеют единственное решение:

$$a)\ 2\lg(x + 1) = \lg ax; \quad b)\ \lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(a - 3x)?$$

11. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2 - 1)$.

a) Пусть $a = 0$. Решите уравнение $f(x) = 1$.

b) Пусть $a = -1$. Решите неравенство $f(x) \geq -1$.

c) Изобразите на плоскости множество всех таких пар $(x;a)$, что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?
d) Найдите все такие положительные a, при которых для любого натурального n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.

Указание к пункту 11c: уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1) = 1$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} x^2 - 1 = a + 2x, \\ |x| > 1, \\ a + 2x > 0, \\ a + 2x \neq 1. \end{cases}$$

Теперь ничего не стоит получить ответ на второй вопрос, имеющий такую геометрическую переформулировку: при каких a *на изображенном множестве существует точка с равной* a *второй координатой?*
Указание к пункту 11d: перейдите к уравнению $x^2 - 1 = (a+2x)^n$

12. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение:
$a)$ $e^x = ax$, $\quad b)$ $1 + ax = \sqrt{x+3}$?

13. Найдите все такие m, что при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения в указанной области:

$$a)\ f(x) = \sin mx, \quad x \in [-\frac{\pi}{4}; 0];$$
$$b)\ f(x) = m^2 + mx - x^2, \quad x \leq -2;$$
$$c)\ f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + (2 - m^2)x + 4, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$d)\ f(x) = \cos mx, \quad x \in [0; \frac{\pi}{4}];$$
$$e)\ f(x) = x^2 + mx - m^2, \quad x \geq 1;$$
$$f)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + (m^2 + 2)x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение задачи 13d: так как функция f *четна, то достаточно рассматривать случай* $m > 0$. *Уравнение* $f(x) = b$ *имеет не более одного решения, если функция* f *обратима на указанном множестве. Таким образом, в данном случае нужно, чтобы* $[0; \frac{m\pi}{4}] \subset [0; \pi]$.

Решение задачи 13е: вершина параболы должна лежать левее прямой $x = 1$.

Решение задачи 13f: в данном случае функция должна быть монотонна, значит, при всех $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 0$, *что верно, если* $9m^2 - 4(m^2 + 2) \leq 0$.

Тема 20. Бином Ньютона (2 часа)

1. Докажите следующие равенства:

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

2. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две из них встречаются между собой один раз?

3. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников, 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать команду, которая состоит из 1 вратаря, 2 защитников и 3 нападающих?

4. Докажите формулу (бином Ньютона):

$$(a+b)^n = \sum_{k=o}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad \forall a, b \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, возведите данный двучлен в указанную степень (5-8).

5.
$$(x+1)^7.$$

6.
$$(x-y)^5.$$

7.
$$(x^2-y)^6.$$

8.
$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7.$$

9. Вычислите, применяя формулу бинома Ньютона:

$$(1+i)^6, \quad i^2=-1; \quad (\sqrt{2}-\sqrt{3})^5; \quad (1+i\sqrt{3})^6.$$

10. Докажите, что
a) $1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$;
b) $1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots-C_n^{n-1}+1=0$.

11. Рассмотрите связь между биномом Ньютона и треугольником Паскаля.

12. Найдите разложение для $(3x+a)^n$.

13. При какой степени x коэффициент будет наибольшим в биноме $(4+ +x)^{10}$?

14. Докажите, что

$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2.$$

15. Найдите девятый член разложения для степени бинома $(\frac{1}{x}+x)^{12}$.

16. Найдите четвертый член разложения для степени бинома $(\sqrt[3]{a}+ +(\sqrt[3]{a})^{-1})^9$.

17. Найдите номер члена разложения степени бинома, который не зависит от t: a) $(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t})^{20}$; b) $(t^2-\frac{1}{t})^6$; c) $(\frac{1}{t}+\sqrt{t})$.

18. Докажите, что число

$$c=5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$$

делится на 11 для любого n.
Указание: используйте равенство $c=5(11*284+1)^n+16(11*93+ +1)^n+(11*22+1)^n$ *и примените формулу бинома Ньютона.*

Тема 21. Арифметическая и геометрическая прогрессии (2 часа)

1. Арифметическая прогрессия. Основные формулы.

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k = \overline{2, n-1}.$$

$$a_k + a_m = a_n + a_p, \text{ где } \quad k + m = n + p.$$

2. Геометрическая прогрессия. Основные формулы.

$$b_n = b_1\, q^{(n-1)}.$$

$$S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}, \qquad q \neq 1.$$

$$S_n = nb_1, \qquad q = 1.$$

$$b_k{}^2 = b_{k-1}\, b_{k+1}, \qquad k = \overline{2, n-1}.$$

$$b_k b_m = b_n b_p, \qquad \text{где} \quad k + m = n + p.$$

1. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.

2. Найдите четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

3. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $a_4 - a_2 = -\frac{45}{32}$, $\quad a_6 - a_4 = -\frac{45}{512}$.

4. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами и со знаменателем $|q| < 1$ сумма трех первых членов равна 10,5, а сумма прогрессии — 12. Найдите прогрессию.

5. Найдите четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних — 18.

6. Найдите сумму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

7. Покажите, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k- сумма k-первых членов прогрессии).

8. Сумма трех чисел равна $\frac{11}{18}$, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

9. Числа $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что:

a)

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}};$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

10. Докажите утверждение: для того чтобы три числа $\frac{1}{b+c}$ $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

11. Найдите сумму:

a) $1+2*3+3*7+\ldots+n(2^n-1)$,

b) $1*3+3*9+5*27+\ldots+(2n-1)*3^n$,

c) $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ единиц}}$,

d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$,

e) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

Тема 22. Текстовые задачи (2 часа)

1. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18% . Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

2. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист. Проехав 2/3 расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B. При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найдите скорость мотоциклиста, считая,что она больше скорости велосипедиста.

3. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 часа. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на 4 часа больше, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельности?

4. Зарплату повысили на p%. Затем новую зарплату повысили на 2p%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

5. Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

6. Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг содержит 20% меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40% олова?

7. Расстояние между пристанями A и B по реке равно 36 км. Из A в B отплыл плот, а из B в A спустя 8 ч отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки 12 км/ч?

8. Свежие ягоды содержат 92% воды, а сухие — 8%. Сколько получится сухих ягод из 23 кг свежих?

9. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

Итоговая контрольная работа

1. Решите уравнение

$$-x^2 + 2x - 1 = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}-1}(x-2) > \log_{3-2\sqrt{2}} 25.$$

4. Решите уравнение

$$3 + |5{,}4x - 3\cos x| = 3\sin x + \cos x.$$

5. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0$$

и укажите, при каких a оно имеет единственное решение.

6. Равнобедренная трапеция ABCD с большим основанием AB описана около окружности, которая касается стороны BC в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение $\frac{AB}{CD}$, если $\frac{MN}{AN} = K$.

7. Решите уравнение

$$x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

8. Определите, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x+a} \geq x$$

образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

9. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2+xy=42x, \\ 6x^2+6xy=7y. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

Тема 2

9) $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{55}{16}$.
10) $x_1 = a + b$; $x_2 = \frac{a+b}{2}$.
11) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$.
12) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
13) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$.
14) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
17) $x = 0$.
18) $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$.

Тема 3

1) $(5;3)$.
2) $(2;-1)$, $(-1;2)$.
3) $(\frac{1}{4};\frac{1}{6})$, $(\frac{1}{12};\frac{1}{3})$, $(-\frac{5}{24};-\frac{7}{24})$, $(-\frac{3}{8};-\frac{1}{8})$.
4) $(2;3)$, $(3;2)$.
5) $(1;4)$, $(4;1)$.
6) $(2;-1;1)$.
7) $(1;2;3)$.
8) $(2;2)$, $(-2;-2)$, $(-2;2)$, $(2;-2)$.
9) $(2;3)$, $(-2;-3)$.
10) $(1;3;5), (-1;-3;-5)$.
11) $(2;1)$, $(\frac{19\sqrt[3]{4}}{4};\frac{-17\sqrt[3]{4}}{4})$.
12) $(2;2;2)$.
13) $(1;-1;2)$, $(1;2;-1)$, $(-1;1;2)$.
14) $(1;2;3)$, $(-1;-2;3)$.
16) $(-1;-2)$, $(-2;-1)$.
17) $(0;0)$, $(\pm\sqrt{2};\mp\sqrt{2})$, $(\pm2;\pm2)$, $(\frac{\pm1+\sqrt{5}}{2};\frac{\pm1-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{\pm1-\sqrt{5}}{2};\frac{\pm1+\sqrt{5}}{2})$.

Тема 4

1) $(-1;1)$.
2) $(-1;+\infty)$.
3) $(1;3)\bigcup(3;5)$.
4) $(-\infty;-2)\bigcup(1;0]$.
5) $(-\infty;-3)\bigcup(-2;-1)$.

6) $x = 1$.
7) $(-3; -1)$.
8) $(-2; -1.5) \bigcup [1; 2) \bigcup [5; +\infty)$.
9) $(1 - \sqrt{6}; 1) \bigcup (1 + \sqrt{6}; 4]$.
10) $(-\infty; -5) \bigcup (-2; 1) \bigcup [5; +\infty)$.
11) $(-\infty; -1] \bigcup [\frac{1}{2}; 1) \bigcup (1; +\infty)$.
12) $(-\infty; -2) \bigcup (-2; -1] \bigcup [2; +\infty)$.
17) $(-\infty; -1] \bigcup [3; +\infty)$.

Тема 5

2) $b = -\frac{1}{4}$.
3) $(-\infty; -7 - 3\sqrt{11}) \bigcup (-\frac{13+\sqrt{365}}{2}; -7 + 3\sqrt{11}) \bigcup (\frac{-13+\sqrt{365}}{2}; +\infty)$.
5) $\varnothing$.
6) a) $a < -1$; b) $a < -\frac{5}{2}$; c) $a > -2$; d) $a > -\frac{1}{2}$.
7) $(1; 1)$, $(-1; 1)$.

Тема 6

1) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.
2) $x = 1$.
3) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2$, $x_{5,6} = \pm 1$, $x_7 = 0$.
4) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{16m-7}}{4}$, при $m > \frac{7}{16}$; $x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$, при $m = \frac{7}{16}$.
5) $x = 1$.
6) $x = 2$.
8) $|a| > 1$.
10) Два решения при $a > 997^2$, бесконечно много решений при $a = 997^2$ и ни одного решения при $a < 997^2$.
11) $1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm \sqrt{3}$.
12) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{2}{3}$.
13) $(-\infty; -1] \bigcup \{0\} \bigcup [1; +\infty)$.

Тема 7

1) $(\frac{1}{2}(a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}); \frac{1}{2}(a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}))$ при $|a| > \sqrt{2}$; при остальных a решений нет.
2) a) $(0; 1)$; b) $(-\infty; -2) \bigcup [0; +\infty)$.

3) a) $x \in [-1; -\sqrt{-2b-1}] \bigcup [\sqrt{-2b-1}; 1]$ при $b \in [-1; -0.5]$; $x \in [-1; 1]$ при $b > -\frac{1}{2}$; решений нет при $b < -1$.
b) $[-\sqrt{2b-1}; -1] \bigcup [1; \sqrt{2b-1}]$ при $b \geq 1$, при $b < 1$ решений нет.
4) $x > 6$ или $x < 0$.
5) $(-\infty; -3) \bigcup (-1; 1) \bigcup (3; +\infty)$.
6) $(-3; 2) \bigcup (2; 3)$.
7) $(-\infty; -\frac{2}{7}] \bigcup (3; +\infty)$.
8) $(2; 3)$.
9) $(2; 4) \bigcup (4; 6)$.
10) $(-3; -\frac{5}{3})$.
11) $a)$ $x \in \mathbb{R}$; $b)$ $\{-2\} \bigcup [0; 2]$.

Тема 8

1) $x = -2$.
2) $x = -1$.
3) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{63}{13}$.
4) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$.
5) $5 \leq x \leq 10$.
6) $x = 5$.
7) $x = 1$.
8) $x = \pm 1$.
9) $x = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$.
10) $x = 12$.
11),12),13) $x = 0$.
14) $x = 2$.
15) $x = 1$.
16) $\{-1; -\frac{5}{7}\}$.
18) $x = 1$.

Тема 9

1) $2 \leq x \leq \frac{7+\sqrt{5}}{2}$.
2) $(-\infty; 0.75) \bigcup (4; 7)$.
3) $[0; 3]$.
4) $[\frac{20}{9}; 4) \bigcup (5; +\infty)$.
5) $(-\infty; 2\sqrt{5} - 4)$.

6) $(\frac{2}{3}\sqrt{21}; +\infty)$.
7) $(-\infty; -\frac{5}{6}] \bigcup [3; +\infty)$.
8) $[-1; +\infty)$.
9) $[-2; 0) \bigcup (0; 2]$.
10) $(5; +\infty)$.
11) $(-\infty; -2) \bigcup (0; 1) \bigcup (1; +\infty)$.
14) $x = 1,\ y = 0$.
17) a) $(-\infty; -5) \bigcup (0; 2) \bigcup [3; 5)$;
b) $(-6; -3) \bigcup [-2; 0) \bigcup (6; +\infty)$.
18) $[-1; 0)$.

Тема 10

1) $4 \bigcup [5; 7]$.
2) $[1.75; 4)$.
3) $(0; 1; \frac{1}{4})$, $(0; -1; -\frac{1}{4})$.
4) $x = y = z = 2$.
5) $x = y = z = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
6) $x = y = 0$.
7) $(16; 1)$.
8) $(1; 9)$, $(9; 1)$.
9) $(1; 4)$.
10) $(11; 1)$.
11) $(3; -2; 6)$.
12) $(1; 4)$, $(4; 1)$, $(-1; -4)$, $(-4; -1)$.

Тема 11

10) $-\sin^2\alpha$.
11) $2\sin\alpha$.
12) $\sin 2\alpha$.
13) $ctg^2\alpha$.
14) $ctg 2\alpha$.
15) $2\cos\alpha$.
16) $\cos(40^o + 2\alpha)$.
17) $8\sqrt{3}$.
18) a) $g(u) = -\frac{3}{2}u^2$; b) $g(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Тема 12

1) $z_1 = \frac{\pi}{4}(8k+1)$; $z_2 = \frac{\pi}{20}(8k+3)$.
2) $x_1 = \frac{\pi k}{5}$; $x_2 = \frac{\pi}{8}(8k \pm 3)$.
3) $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.
4) $x_1 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$; $x_2 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$.
5) $x_1 = \frac{\pi k}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$.
6) $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1); x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.
7) $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.
8) $x = \pm arccos\, 0,8 + 2\pi k$.
9) $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$.
10) $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.
11) $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.
12) $t = arctg\, \frac{4}{5} + 2\pi k$.
13) $z_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$; $z_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$.
14) $t = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.
15) $x = \pi(4t+1)$, $t \in \mathbb{Z}$.
16) $x = \frac{\pi}{7}(2n+1)$, $n \neq 7t+3$; $n, t \in \mathbb{Z}$.
18) $x = \frac{(-1)^n}{4}\, arcsin\, \frac{5}{\sqrt{64a^2+9}} + \frac{1}{4}\, arccos\, \frac{8a}{\sqrt{64a^2+9}} + \frac{\pi n}{4}$, $|a| \geq \frac{1}{2}$.
19) $\pi + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Тема 13

1) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
2) $\left(\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8}(4n+1)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
3) $\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \bigcup \left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
4) $\left(2\pi n - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
5) $b \leq -2|\sin\frac{a}{2}|$.
6) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k, \pi k\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
7) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тема 14

1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.
2) $x = 0$.
3) $x_1 = 3$; $x_2 = 2\log_6 2$.
4) $x = -2$.
5) $0 < x < 1$.

6) $(-\infty;0)\bigcup[\frac{1}{2};+\infty)$.
7) $(-1;1)$.
8) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.
9) $(\frac{3}{2};2)$.
11) корней нет при $a<0$, один корень при $0<a<1$.
12) $a)$ $(1;2)$; $b)$ $(0;1]$; $c)$ $(-\infty;\log_2\frac{a}{4})$ при $a>0$, $(-\infty;\log_2(-\frac{a}{2}))$ при $a<0$, при $a=0$ решений нет.
13) $\{-\frac{5}{2};3\}$.
14) $\{-\frac{1}{5};3\}$.
15) $x=\pm1$.
16) $x=0$.

Тема 15

1) $\log_a\sqrt{a^2-1}$, где $a>1$ и $a\neq\sqrt{2}$.
2) $\log_a b$, где $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$ и $ab\neq1$.
3) $\frac{1}{c^2}$.
4) $\frac{b+3a-2}{2a}$.
5) $x_1=10$; $x_2=1,5$.
6) $x=3$.
7) $x_1=\sqrt[4]{2}$; $x_2=\sqrt{2}$.
8) $x_1=2$; $x_2=4$.
9),11) $x=100$.
10) $x=0$.
12) $x=1$.
13) $x_1=\sqrt{5}$; $x_2=25$; $x_3=\frac{1}{25}$; $x_4=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
14) $x_1=\frac{1}{9}$; $x_2=9$.
15) $(6;2)$.
16) $(2;4)$.
17) $(8;4)$.
18) $(2;4)$, $(4\sqrt{2};2\sqrt[4]{2})$.
19) $x=1$.
20) $-2\log_5 2$; 2.
21) $x_1=10^{-4}$; $x_2=10$.
22) $x=10^4$.
23) $x=\frac{5}{3}$.

Тема 16

1) $[2;\infty)$.
2) $(1;+\infty)$.
3) $[0;3)\bigcup(3;4)$.
4) $(3;3.5)\bigcup(3.5;4)$.
5) $(2;3)$.
6) $(0;4)$.
7) $(\frac{1}{\lg 3};\infty)$.
8) $[0.5;4]$.
9) $(-4;-3)\bigcup(8;\infty)$.
10) $(0;\sqrt[4]{2}]$.
11) $(1;1+2^{-\frac{5}{4}})\bigcup(3;\infty)$.
12) $x>5$.
13) $(0;1)\bigcup[\frac{4}{3};4)$.
14) $(0;1)\bigcup(\frac{\sqrt{5}+1}{2};2)$.
16) $a)$ $(1;\sqrt{6}-1]$; $b)$ $[\sqrt{6}-1;5)$; $c)$ $a\geq\sqrt{5}$.
17) $a)$ $(2;5)$; $b)$ $(5;7)$; $c)$ $(1;\sqrt{7}]$.
18) $a)$ $(-1;-\frac{1}{2})\bigcup(1;2)$; $b)$ $-\frac{1}{2},2$; $c)$ решений нет при $a\leq-1$, одно решение при $-1<a\leq1$ и два решения при $a>1$. Заметим, что исходное уравнение равносильно $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{x})=a-x$ при условии, что $x-\frac{1}{x}>0$. Решить его можно графически; $d)$ $g(x)=\frac{1}{2}(3*2^x-\sqrt{9*2^{2x}+4})$.
19) $1<x<10$.

Тема 17

1) $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$.
2) $x_1=\ arccos\ (\sqrt{5}-2)+2\pi k$; $x_2=\pi+2\pi k$.
3) $x_1=\frac{\pi}{2}k$; $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$.
4) $\frac{1}{4}+k\leq x\leq\frac{3}{4}+k$.
5) $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$.
6) $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$.
7) $-\frac{7}{6}\pi+2\pi k\leq x\leq\frac{\pi}{6}+2\pi k$.
8) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k=0,1,2,\ldots)$; $0<x<1$.
9) $x\leq-2$, $x\geq1$.
10) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Ответы на контрольную работу

1) $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 4\pi k$.
2) $x_1 = \frac{3}{8}\pi + \pi k$; $x_2 = -\frac{1}{2}arctg\, 5 + \frac{\pi}{2} + \pi k$.
3) $x_1 = 2\pi k$; $x_2 = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$.
4) $\frac{1}{4} + k \le x \le \frac{3}{4} + k$.
5) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < arccos\,\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi k$, $-arccos\,\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.
6) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k$.
7) $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
8) $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $x \ne \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$.
9) $x \in [0; 1]$.
10) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Тема 18

15) a) Меньший корень уравнения $x^2 - x = 1 - 2x$ и больший корень уравнения $x^2 - x = 2x - 1$; b) например, $\frac{1}{2}|x-1| - |x| = 1$.
16) a) $(0; \infty)$; b) например, $\sqrt{2x-1} \ge \sqrt{x - \sqrt{2}}$.
18) Если $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\pi}{2} \in [x; x + \frac{\pi}{2}]$, следовательно, $\max\limits_{t \in [x; x+\frac{\pi}{2}]} \sin t = 1$. Синус убывает на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi]$, поэтому $y = \max\limits_{t \in [x; x+\frac{\pi}{2}]} \sin t = \sin x$ при $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. Нетрудно видеть, что $y = \sin x$, если $x \in [\pi; \frac{5}{4}\pi]$. Наконец, $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, при $x \in [\frac{5}{4}\pi; 2\pi]$.

Тема 19

1) $m = -1$, $-\frac{1}{2} < m < \infty$.
2) $-\infty < k < -4$.
3) $m = \pm 3$.
4) $m \in (-\infty; -3) \bigcup [0; \sqrt{2}]$.
5) $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.
6) $a \in (\pi + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
7) $a > \frac{1}{3}$.
8) a) два корня при $a > -1$, один корень при $a = -1$ и не имеет корней при $a < -1$; b) один корень при $a = \pm\frac{9}{4}$, два корня при $a \in (-\frac{9}{4}; \frac{9}{4})$.
9) $\sqrt{a+1} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(a \ge -\frac{1}{2})$.
11) a) $x = 1 + \sqrt{2}$; b) $x \in [\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty)$; c) $a \in (-2; 1 - 2\sqrt{2}) \bigcup (1 - 2\sqrt{2}; +\infty)$; d) $a \in (2; 1 + 2\sqrt{2}) \bigcup (1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

12) $b)$ два решения при $0 < a \leq \frac{1}{3}$, одно решение при $a \leq 0,\ a > \frac{1}{3}$.
13) $a)$ $|m| \leq 2,\ m \neq 0$; $b)$ $m \geq -4$; $c)$ $|m| \geq 2\sqrt{2}$; $d)$ $|m| \leq 4,\ m \neq = 0$; $e)$ $m \geq -2$; $f)$ $|m| \leq 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Тема 21

1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1.
2) 1) $7, -28, 112, -448$; 2) $-11\frac{2}{3}, -46\frac{2}{3}, -186\frac{2}{3}, -746\frac{2}{3}$.
3) 1) $b_1 = 6, q = \frac{1}{4}$; 2) $b_1 = -6, q = -\frac{1}{4}$.
4) $6, 3, \frac{3}{2}, \ldots$.
5) 1) $3, 6, 12, 18$; 2) $18.75, 11.25, 6.75, 2.25$.
6) $2n + \frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3*4^n}$.
8) $x = \frac{1}{9},\ y = \frac{1}{6},\ z = \frac{1}{3}$.
11) $a)$ $2^{n+1}(n-1) + 2 - 0,5n(n+1)$; $b)$ $3^{n+1}(n-1) + 3$; $c)$ $1234\ldots n$; $d)$ $3 - \frac{3+2n}{2^n}$.

Тема 22

1) 410 кг.
2) 80 км/ч.
3) 16 ч, 16/3 ч.
4) 20.
5) 40 кг.
6) 15 кг.
7) 3 км/ч.
8) 2 кг.
9) 60 км/ч.

Список литературы

[1] Алякин В.А. *Задачи повышенной сложности по математике. Выпуск 1.* Самара: СамГУ, 2006. 24 с.

[2] *Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика*/Л.О. Денищева [и др.] М.: Интеллект-Центр, 2004. 174 с.

[3] Иванов О.А. *Практикум по элементарной математике. Алгебро-аналитические методы.* М.: МЦНМО, 2001. 319 с.

[4] *Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Алгебра*:учебное пособие под редакцией М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1994. 528 с.

[5] Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. *Задачи вступительных экзаменов по математике.* М.: Наука, 1981. 320 с.

[6] Супрун В.П. *Избранные задачи повышенной сложности по математике.* Мн.: Полымя, 1998. 108 с.

[7] *Единый государственный экзамен. Математика: Контрол. измерит. материалы*/Л.О. Денищева [и др.]. М.: Просвещение, 2003.

[8] Готман Э.Г. *Задачи по планиметрии и методы их решения.* М.: Просвещение, АО «Учебная литература», 1996. 240 с.

[9] Шарыгин И.Ф. *Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 класс.* М.: Просвещение, 1989. 252 с.

[10] Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. *Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс.* М.: Просвещение, 1991. 384 с.

[11] Литвиненко В.И., Мордкович А.Г. *Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия.* М.: Просвещение, 1991. 352 с.

СОДЕРЖАНИЕ