ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра функционального анализа и теории функций

В.А. Алякин, Р.Ф. Узбеков

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Самара
Издательство «Универс групп»
2007

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 517.983
ББК 22.162
В 24

В 24 **Введение в математический анализ. Практикум:** учебное пособие / авторы-составители В.А. Алякин, Р.Ф. Узбеков. – Самара: Изд-во «Универс групп», 2007. – 60 с.

ISBN 978-5-467-00127-2

Данное пособие представляет собой подборку задач на первый семестр практических занятий по курсу Введение в математический анализ. В этом семестре студенты актуализируют знания по школьной математике и некоторым разделам математического анализа. Каждый параграф соответствует примерно одному-двум занятиям. Для типичных и трудных задач приводятся схемы решений или указания к решениям.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса специальностей «Математика. Механика» по курсу «Введение в математический анализ».

УДК 517.983
ББК 22.162

Авторы-составители: канд. физ-мат. наук, доц. В.А. Алякин,
канд. физ-мат. наук Р.Ф. Узбеков;
Рецензент: канд. физ-мат. наук, проф. Андреев А.А.

ISBN 978-5-467-00127-2

§1. Преобразование алгебраических выражений (2часа)

Упростить следующие выражения (1-2).

1.
$$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$$

2.
$$\frac{(x^{\frac{2}{m}}-9x^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}})^2-12x^{\frac{m+n}{mn}}}$$

Указание: применить формулы квадрата суммы и разности.

3. Проверить справедливость равенств:

a)
$$\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8;$$

b)
$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

4. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$a)\ \frac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{2}};\quad b)\ \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}};\quad c)\ \frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}};\quad d)\ \frac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}.$$

Упростить выражения и вычислить их при данных значениях параметров (5-8).

5.
$$\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\frac{b+2}{b-2}},\quad b=3$$

Указание: разложить на множители числитель и знаменатель, представив $3b=b+2b$ и вынося общий множитель за скобки.

6.
$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}},\quad x=2$$

Указание:

1 способ. Применить формулу $\sqrt{A\pm B}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}$, *где* $A\geq B$ *к выражениям* $\sqrt{x\pm\sqrt{3}}$ *для* $x=2$.

2 способ. Использовать равенство $4\pm2\sqrt{3}=(\sqrt{3}\pm1)^2$.

3 способ. Найти представление $2\pm\sqrt{3}=(a\pm b\sqrt{3})^2$ *методом неопределенных коэффициентов.*

7.
$$\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}, \quad x=6$$
Указание: представить подкоренное выражение в виде $x-4\sqrt{x-4}= =x-4-4\sqrt{x-4}+4=(\sqrt{x-4}-2)^2$.

8.
$$\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x=\frac{a^3+1}{a^3-1}$$
9. При каком целом положительном x значение выражения
$$\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}\,\frac{x^2+(2-x)\sqrt{x^2-3x-10}-4}{x^2-(x+5)\sqrt{x^2-3x-10}-25}$$
ближе всего к -0,7 ?

Указание: разложить числитель и знаменатель дроби на множители, получив выражение $\frac{2-x}{x+5}=-1+\frac{7}{x+5}$.

10. Известно, что
$$\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}}\,\frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{b^2(a-b)^{\frac{1}{3}}}=7.$$
Во сколько раз a больше b, если оба числа положительны ?

11. При каком целом значении $x\in[1,99]$ значение выражения
$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$
ближе всего к 73?

Указание: преобразовать выражение до вида $1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}$ *и применить неравенства* $x^2<x(x+2)<(x+1)^2$.

Замечание: рассуждения с неравенствами можно заменить более привычным исследованием функции $f(x)=1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}$. *Ее производная положительна, значит, функция возрастает. Останется решить уравнение* $f(x)=73$, *после чего выбирать между целыми числами, ближайшими к корню уравнения. Технически это более громоздкий путь.*

12. Известно, что
$$\frac{\sqrt{c}-c^{-\frac{1}{2}}}{c-1}+\frac{c^{-\frac{1}{2}}-1}{1+\sqrt{c}}=\frac{1}{28}.$$
Найти c.

13. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\,\frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9}$$

ближе всего к 0,66?

§2. Рациональные уравнения (2 часа)

Одним из способов решения уравнений высших степеней является способ разложения на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Этот способ основан на применении теоремы Безу.

Если число a является корнем многочлена $P(x)$, имеющего степень n, то этот многочлен можно представить в виде $P(x) = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ — частное от деления $P(x)$ на $x-a$, многочлен степени $n-1$.

Если уравнение имеет целые коэффициенты, то можно отыскать рациональные корни с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем старшего коэффициента a_0.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен единице, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, целые числа.

1. Докажите, что число 1 является корнем многочлена тогда и только тогда, когда его сумма коэффициентов равна нулю.

2. Разложите на множители с целыми коэффициентами:
$a)$ x^3-2x^2-5x+6; $b)$ $2x^3+5x^2+x-2$; $c)$ x^3-2x+1;
$d)$ $x^4+4x^3-25x^2-16x+84$; $e)$ $x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72$.

3. Решите уравнения:
$a)$ $x^3-5x+4=0$; $b)$ $x^3-7x-6=0$; $c)$ $8x^3-4x+1=0$;
$d)$ $16x^3-6x+1=0$; $e)$ $2x^4-7x^3-7x^2+3x+1=0$;
$f)$ $x^3-5x^2+3x+1=0$; $g)$ $2x^4-5x^3+5x^2-2=0$.

4. Найдите a и решите уравнение, если известен один из его корней:

$$a)\ 2x^3-(a+4)x^2+2(a-1)x+a=0, \quad x_1=0,5;$$

$b)\ 6x^3 + 2(a-9)x^2 - 3(2a-1)x + a = 0, \quad x_1 = \dfrac{1}{3}.$

5. Решите уравнения:

$$a)\ \frac{4(x+3)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} - \frac{5}{2x^2 - 3x - 2} = 1;$$

$$b)\ \frac{x^2 - 5x - 6}{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3} = \frac{4x^2 - 20}{2x^2 + x - 3}.$$

6. Решите уравнения:
$a)$ $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9$; $b)$ $(x^2+3x+2)(x^2+9x+20) = 4$;
$c)$ $(x-1)(x-5)^2(x-9) = -39$; $d)$ $(x^2-2x)(2x-3)(2x-1) = 2,5$;
$e)$ $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; $f)$ $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$.

7. Многочлен $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ при делении на $x+1$ дает остаток 18, а на $x-2$ делится без остатка. Найдите корни многочлена.

8. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ при делении на $x+1$ и на $x+2$ дает остаток 12. Один из корней многочлена равен 1. Найдите остальные корни многочлена.

Считая, что величины a и b постоянные, решите уравнения (9-14).
9. $\frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23$
10. $\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2$
11. $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$
12. $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$
Указание: сделать замену $x + \frac{1}{x} = t$.
13. $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$
14. $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$

15. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a+b+c) < 0$. Верно ли обратное утверждение?
Указание: обратное неверно, например, для уравнения $y = x^2 + 2x$.

16. Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2 - y^2 = k^{1993}$ разрешимо в целых числах.
Указание: положить $x - y = k,\ x + y = k^{1992}$.
17. Решите уравнение

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+4}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+4}$$

Указание: разделите числитель и знаменатель каждой дроби на x.

18. Решите уравнение

$$(y-x^2)^2+(1+y)^2=\frac{1}{2}$$

Указание: 1 способ. Приведите к виду $A^2+B^2=1$ и сделайте замену $A=\cos\phi,\ \ B=\sin\phi$.

2 способ. Примените неравенство $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$.

3 способ. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно переменной y.

4 способ. Примените формулу расстояния между двумя точками на плоскости.

19. Решите уравнения:

$$a)\ \frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}=\frac{1}{(b-a)^2};$$

$$b^*)\ \frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{(x+b)^2}=\frac{1}{(b-a)^2}.$$

§3. Системы рациональных уравнений (4 часа)

Решите системы уравнений (1-14, 16-17).

1.

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\(x+y)xy=120.\end{cases}$$

Указание: разделить второе уравнение на первое.

2.

$$\begin{cases}x^3+y^3=7,\\xy(x+y)=-2.\end{cases}$$

3.

$$\begin{cases}12(x+y)^2+x=2,5-y,\\6(x-y)^2+x=0,125+y.\end{cases}$$

Указание: сделать замену $x+y=t,\ \ x-y=s$.

4.

$$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\\x+y=5.\end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=\frac{16}{3}, \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}. \end{cases}$$
Указание: перемножьте уравнения системы и решите квадратное уравнение относительно переменной xy.

10.
$$\begin{cases} \frac{3}{uv}+\frac{15}{vw}=2, \\ \frac{15}{vw}+\frac{5}{wu}=2, \\ \frac{5}{wu}+\frac{3}{uv}=2. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y)=60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x)=105. \end{cases}$$
Указание: разделите одно уравнение на другое, раскройте скобки и сделайте замену $\frac{x}{y}=t$.

12.
$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.5, \\ xyz=8. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$$
Указание: запишите первое уравнение системы в виде $y+z=2-x$ *и возвести в квадрат, а далее, воспользоваться вторым уравнением. Получим,* $yz=x^2-2x-1$. *Теперь, то же самое уравнение возведем в куб и воспользуемся третьим уравнением системы.*

14.

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

Указание: сложив все три уравнения системы, мы получим $xy + yz + zx = 1$. Затем, вычтем из этого уравнения каждое из уравнений системы и перемножим их.

15. Показать, что корни уравнения $x + \frac{1}{x} = 2\cos 40^0$ являются также корнями уравнения $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2\cos 160^0$

Указание: возвести первое уравнение в квадрат последовательно два раза.

16.

$$\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3, \\ (1 - x)(1 - y) = 6. \end{cases}$$

Указание: система - симметрическая, поэтому нужно сделать замену $x + y = a, \ \ xy = b$.

17.

$$\begin{cases} x = y^3 - 3y, \\ y = x^3 - 3x. \end{cases}$$

Указание: 1 способ. Система

$$\begin{cases} x + 3y = y^3, \\ y + 3x = x^3 \end{cases}$$

является однородной. Умножьте первое уравнение на x^3, а второе на $-y^3$ и сложите.

2 способ. Сложите и вычтите уравнения системы, а затем разложите на множители полученные уравнения.

§4. Рациональные неравенства. Метод интервалов (2 часа)

Решите неравенства с помощью метода интервалов (1-5, 7-8, 11-12).

1. $a^4 + a^3 - a - 1 < 0$
2. $m^3 + m^2 - m - 1 > 0$
3. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$
4. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$
5. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$
6. Найти целые неотрицательные числа x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x - x^2}.$$

7.
$$(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0$$

8.
$$\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}\le\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$$

9. Дана функция $f(x)=x^3-6x$. Решите неравенство
$$\frac{f(x)-40}{f(x-1)}\le 0.$$

10. Дана функция $f(x)=x^3-9x$. Решите неравенство
$$\frac{f(x)-80}{f(x+2)}\ge 0.$$

11.
$$\frac{4}{(x-1)^2}\ge\frac{5}{x^2}-4$$

12.
$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}\ge 5$$

Указание: после стандартных преобразований получаем неравенство
$$\frac{(x^2-x-2)(x^2+5x+10)}{(x+2)^2}\ge 0.$$

В следующих задачах полезно воспользоваться известными неравенствами.

Неравенство Коши. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_k$— неотрицательные числа. Тогда имеет место
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\ge\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}, \tag{1}$$
где $k\ge 2$. В частности, если $k=2$, то (1) примет вид
$$\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2}. \tag{2}$$
Если положить $a_1=a$ и $a_2=\frac{1}{a}$, то из (2) получаем
$$a+\frac{1}{a}\ge 2, \tag{3}$$

где $a > 0$. Если же $a < 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \leq -2. \tag{4}$$

13. Докажите, если x_1, x_2, x_3— положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}.$$

Указание: обозначьте $a = x_2 + x_3$, $b = x_3 + x_1$, $c = x_1 + x_2$ и выразите x_1, x_2, x_3 через a, b, c, а затем перепишите левую часть неравенства согласно новым обозначениям. Далее нужно воспользоваться неравенством (3).

14. Доказать, что если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то

$$\frac{2a}{b + c} + \frac{2b}{c + a} + \frac{2c}{a + b} \geq 3.$$

Указание: прибавьте к обеим частям неравенства число 6 и преобразуйте его к следующему виду $2(a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) \geq 9$. Далее, переобозначьте переменные $r = a + b$, $s = a + c$, $t = b + c$ и дважды к левой части примените неравенство (1) для $k = 3$.

15. Докажите, что для $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ выполнено

$$\frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} + \frac{c}{1 + c^2} \leq \frac{3}{2}.$$

Указание: представьте выражение $\frac{a}{1+a^2}$ в следующем виде $\frac{1}{\frac{1}{a}+a}$ и к знаменателю дроби примените неравенство (3).

16. Докажите, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ и $a + b + c \leq 3$, то

$$\frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c} \leq \frac{3}{2}.$$

Указание: данное неравенство равносильно $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2}$. Из условия следует, что $(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) \leq 6$. Последнее неравенство разделите последовательно на $a + 1$, затем на $b + 1$ и $c + 1$. Тогда получим систему неравенств. Складывая все неравенства системы, придем к $6(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}) \geq 3 + \frac{b+1}{a+1} + \frac{c+1}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{c+1}{b+1} + \frac{a+1}{c+1} + \frac{b+1}{c+1}$. Остается применить неравенство Коши (3).

Решите неравенства (17-18).

17.

$$(x-3)\sqrt{x^2+3} \le x^2 - 9$$

Указание: примените обобщенный метод интервалов.

18.

$$x^2 \le x^4.$$

§5. Системы и совокупности рациональных неравенств (2часа)

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству:

a) $x^2y + xy^2 \le 2xy$;

b) $x + \frac{1}{y} \ge 0$;

c) $\frac{1}{2x} \le \frac{1}{x-y}$;

d) $1 \ge \frac{y}{x}$;

e) $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$;

f) $xy + 1 \le x + y$;

g) $x^2y + y^3 \ge y$;

h) $\frac{x-y}{x^2+y^2-1} \ge \frac{1}{2}$;

Указание: перенести все переменные в одну часть неравенства и свести его к равносильной системе неравенств. Изобразить на плоскости множество, удовлетворяющее каждому из неравенств системы и взять пересечение этих множеств (или их общую часть).

2. Найдите все b, при которых система неравенств

a) $\begin{cases} y \ge (x-b)^2, \\ x \ge (y-b)^2. \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} y + x^2 \le b, \\ x + y^2 \le b. \end{cases}$

имеет единственное решение.

Указание: а) первое из неравенств системы задает множество точек, лежащих не ниже параболы $y = (x-b)^2$, второе — множество точек, лежащих, не левее симметричной ей относительно прямой $y = x$ параболы $x = (y-b)^2$. Остается выяснить, при каком b эти множества имеют единственную общую точку.

3. Решите неравенство

$$(x^2 + 13x - 49)(x^2 + 14x - 50) > 0$$

4. Найти целые решения системы неравенств:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x+5}{2}; \quad 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4}.$$

5. При каком a всякое число x является решением хотя бы одного из неравенств

$$2x^2 - 3ax - 9 \geq 0; \quad x^2 + ax - 2 > 0?$$

Указание: значение a удовлетворяет условию задачи, если всякое решение неравенства $f(x) = 2x^2 - 3ax - 9 < 0$ является решением неравенства $g(x) = 2x^2 + 2ax - 4 > 0$. Так как $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные корни, то приходим к следующей задаче: при каких значениях a интервал (x_2, x_1) решений неравенства $f(x) < 0$ целиком входит в объединение лучей $(-\infty, x_4) \bigcup (x_3, \infty)$, являющееся множеством решений неравенства $g(x) > 0$?

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств имеет решение:

$$a) \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3, \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2a-1}{2a+5}. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geq \frac{3a+1}{a+2}, \\ 3x^2 + xy + y^2 \leq 1. \end{cases} \qquad d) \begin{cases} 3x^2 - 8xy - 8y^2 > 2, \\ x^2 - 4xy + 2y^2 \leq \frac{a+1}{1+2a}. \end{cases}$$

Указание: a) преобразуем первое неравенство системы $-x^2 - 2xy + 7y^2 \leq 1 - \frac{2}{a+1}$. Умножим первое на 2 и прибавим ко второму: $(x+3y)^2 \leq \frac{-4}{a+1}$. Отсюда вытекает, что $\frac{-4}{a+1} \geq 0$, то есть $a < -1$. Остается доказать, что для каждого такого a система имеет решение. Так как $-1 > \frac{1-a}{1+a}$, то достаточно доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2. \end{cases}$$

имеет решение.

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^{2006} + y^{2006} \leq x^{2002} + y^{2002}, \\ x^2y^2 + xy \geq 2. \end{cases}$$

Указание: сделав замену $x^2 = a, \ y^2 = b$, получите систему неравенств

$$\begin{cases} a^3 + b^3 \leq a + b, \\ ab \geq 1. \end{cases}$$

откуда $ab = 1$.

§6. Уравнения с модулем (2 часа)

Решите уравнения (1-3, 11-13).

1. $x^2+2x-3|x+1|+3=0$
2. $|x+1|+|x-1|=2x^3$

Указание: решите уравнение на интервалах $(-\infty,1)$, $[-1,1)$, $[1,\infty)$.

3. $|x^2-3|x|+1|=1$
4. Решите уравнение $|x^2+1,5x+1|=m$. При каких значениях m оно имеет единственное решение?
5. Найти целые корни уравнения

$$x^3-|x-1|=1.$$

6. Решить графически уравнение

$$|x-1|+2x+5=0.$$

7. Докажите тождества

$$|a|+|b|=\max\{|a+b|,\ |a-b|\};$$

$$|x-y|+|x+y|=2\max\{|x|,\ |y|\}.$$

8. Найдите все такие a, что при любом b уравнение $ax+b=|x|$ имеет решение.

Указание: воспользоваться геометрическим подходом к решению задачи.

9. Найдите все такие b, что при любом a уравнение $ax+b=|x|$ имеет решение.
10. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-1994|=a?$$

Указание: функция $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{1994}|x-k|$ *убывает на луче* $(-\infty,\ 997]$, *возрастает на* $[998,\ \infty)$ *и* $f(x)=996*997+997=997^2$ *при любом* $x\in[997,998]$.

11. $x^4-7x^2+2x+2=|4x-1|-|2x^2-3|$

Указание: обозначим $y=|4x-1|$, $z=|2x^2-3|$, *тогда в новых переменных уравнение примет вид* $z^2-y^2=4(y-z)$.

12. $|x-1|+|6-2x|=5$
13. $|x^2+x|+|x^2-x|=2|x|$

Указание: равенство $|a|+|b|=|a+b|$ *равносильно неравенству* $ab\geq 0$.

§7. Неравенства с модулем (2часа)

1. Решите неравенство при всех значениях параметра a:

$$-2x^2 + 2ax - 1 > |2x - a|$$

Указание: геометрическая идея — вершина параболы имеет координаты $(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} - 1)$, *поэтому решение неравенства существует при* $a^2 > 2$.

2. Решите неравенства:

$$a)\ |\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}| < |x| + \frac{1}{|x-1|};$$

$$b)\ |\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}| \geq |x| + \frac{2}{|x+2|}.$$

Указание: примените схему $|a + b| \geq |a| + |b| \quad \Leftrightarrow ab \geq 0$.

3. При всех значениях b решите неравенства:
a) $|x^2 + b| \leq b + 1$;
b) $|x^2 - b| \leq b - 1$.

Решите следующие неравенства (4-11).

4. $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$
5. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$
6. $x^2 - 5|x| + 6 < 0$

Указание к задачам 5,6: сделайте замену $|x| = t,\ t \geq 0$.

7. $\frac{3|x|-14}{x-3} \leq 4$
8. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$
9. $|\frac{2}{x-4}| > 1$
10. $|x + 1| > 2|x + 2|$

Указание: примените схему $|f(x)| > |g(x)| \ \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$.

11.

$$a)\ |x - 4| \geq x^3 + x + 4,$$

$$b)\ |x^3 - x + 4| \leq x + 4.$$

Указание: примените схемы:

$$|f(x)| \leq g(x) \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{array} \right.$$

$$|f(x)| \geq g(x) \ \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \text{ или } f(x) \leq -g(x).$$

§8. Иррациональные уравнения (2часа)

Решите уравнения (1-13, 15-18).

1. $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$

2. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$

3. $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$

Указание: так как $x=5$ *не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на* $\sqrt[3]{(5-x)^2}$ *и потом сделать замену* $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=t$, *которая приведет исходное уравнение к квадратному* t^2-5t+ $+4=0$.

4. $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3$

Указание: сделать замену $\sqrt{2x^2-3x+2}=u$ *и свести уравнение к равносильной системе* $u^2-2u+1=0,\ u\geq 0$.

5. $\sqrt{y+3-4\sqrt{y-1}}+\sqrt{y+8-6\sqrt{y-1}}=1$

Указание: после замены $x=\sqrt{y-1},\ x\geq 0$, *данное уравнение сводится к следующему* $|x-2|+|x-3|=1$.

6. $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$

7. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

Указание: примените к каждому из слагаемых левой части уравнения неравенство Коши $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ *и сведите данное уравнение к неравенству* $x^2-x+2\leq x+1$.

8. $\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$

Указание: примените к каждому из слагаемых левой части уравнения неравенство Бернулли: если $0<p<1$, *то* $(1+x)^p\leq 1+px$, *где* $x>-1$.

9. $\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})}=1$

Указание: после замены $\sqrt{9-x^2}=y,\ y\geq 0$ *примените к левой части уравнения* $\frac{9-y^2}{3+y}+\frac{1}{4(3-y)}=1$ *неравенство Коши и учтите, что неравенство Коши превращается в равенство лишь в том случае, если слагаемые левой части неравенства равны друг другу.*

10. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$

11. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$

Указание: возвести в куб обе части уравнения.

12. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$
13. $\frac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1+x$
14. Показать, что уравнение $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ имеет единственный положительный корень, и найти этот корень.
Указание: сделать замену $\sqrt[4]{x^4+x-2}=v$, $v\geq 0$ и после этого свести к квадратному уравнению.

15. $\sqrt{x^3+3x^2-3}=x$
Указание: примените схему $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ и $f(x)=g^2(x)$.

16. $\sqrt{2x^2+2x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}=x+4$
Указание: умножьте обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части.

17. $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}$.
Указание: возведите обе части уравнения в куб и примените формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, не забудьте сделать проверку полученных значений!
18. $\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}=2+2x-x^2$
Указание: выделите полные квадраты и докажите, что левая часть уравнения не меньше 3, а правая часть не больше 3.

§9. Иррациональные неравенства (2часа)

Решите неравенства (1-11,18).

1.
$$x-3<\sqrt{x-2}$$

Указание: примените схему

$$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x)\geq 0, \\ f(x)>g^2(x) \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} g(x)<0, \\ f(x)\geq 0. \end{array}\right.$$

2.
$$\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$$

3
$$\sqrt{3x-x^2}<4-x$$

Указание: примените схему

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0; \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

4.

$$\sqrt{9x-20} < x$$

5.

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

6.

$$\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$$

7.

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$$

Указание: привести неравенство к виду $(x-3)(\sqrt{x^2+4} - (x+3)) \leq 0$.

8.

$$\sqrt{x^3+3x+4} > -2$$

9.

$$\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \frac{1}{x}$$

10.

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

11.

$$\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$$

12. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2},$$

где $a > 0$.

Решение: очевидно, что

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}} < \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}.$$

Обозначьте $x = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}$ *и возведите обе части уравнения в квадрат, тогда получите*

$$x^2 = a + x \text{ или } x^2 - x - a = 0.$$

Тогда последнее уравнение имеет единственный положительный корень $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

13. Докажите, что если $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, то

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Указание: провести доказательство методом от противного.

14. Решите неравенство

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1.$$

Указание: таким образом, $x \geq y^2+1$, *поэтому* $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1} \geq 1$. *Следовательно, имеет место равенство.*

15. Покажите, что

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$$

при $x, y \geq 0$.

16. Докажите неравенство

$$\frac{2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}{2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}} > \frac{1}{4},$$

где в числители дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе 1993.

Указание: сделать замену $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ *(1993 корня) и учесть то, что* $\frac{2-\sqrt{x+2}}{2-x} = \frac{1}{2+\sqrt{x+2}}$.

17. Найдите область определения функции:

a)

$$y(x) = \sqrt{\frac{\{x\}-1}{x^3-25x}} + \frac{1}{[x]-2},$$

здесь $\{x\}$— дробная, $[x]$— целая часть числа x;

b)

$$y(x) = \sqrt{\frac{1-\{x\}}{x^3-36x}} + \frac{1}{[x]+3};$$

Указание к пункту а): так как $\{x\} < 1$, *то* $x^3 - 25x < 0$.

18.

$$\frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1).$$

Указание: умножьте обе части неравенства на $\sqrt{1+x}+1$.

§10. Системы иррациональных уравнений и неравенств (2часа)

Решите системы неравенств (1-2).

1.
$$\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}$$

2.
$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$$

Решите системы уравнений (3-12).

3.
$$\begin{cases} x^2+1 = 2\sqrt{yz}, \\ y^2-1 = 2xz\sqrt{1-4yz}. \end{cases}$$

Указание: из первого уравнения системы следует, что $4yz \ge 1$, *а из второго — что* $4yz \le 1$.

4.
$$\begin{cases} zx = x+2, \\ x+z = 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}). \end{cases}$$

Указание: преобразуем второе уравнение системы к виду $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 = 0$. *Откуда получаем, что* $x = y = z$.

5.
$$\begin{cases} x-\sqrt{y} = 1, \\ y-\sqrt{z} = 1, \\ z-\sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

Указание: очевидно, что $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$. *Покажем, что* $x = y$. *Пусть* $x \ge y$, $x \ge z$. *Так как* $y = (x-1)^2$, $z = (y-1)^2$, $x = (z-1)^2$ *и* $x \ge y$, *то* $(z-1)^2 \ge (x-1)^2$. *Поскольку* $x \ge 1$, $z \ge 1$, *то* $z \ge x$. *Мы предполагали, что* $x \ge z$, *поэтому* $x = z$. *Аналогично можно доказать, что* $x = y$.

6.
$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v} = 1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v} = 5. \end{cases}$$

Указание: возведите первое уравнение в квадрат и воспользуйтесь вторым.

8.
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 91, \\ x+\sqrt{xy}+y = 13. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$$

Указание: сделайте замену $\sqrt{\frac{y}{x}} = z$ *и выразите* y *через* x *после решения квадратного уравнения.*

10.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = 1,5. \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$$

Указание: сложите все уравнения системы, тогда получите $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 6$. *Теперь вычтем из этого уравнения каждое из уравнений данной системы.*

12.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$$

§11. Преобразование тригонометрических выражений (2часа)

Докажите тождества (1-9).

1.

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$$

2.

$$\sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21\alpha}{2}$$

3.

$$2\sin^2(3\pi - 2\alpha)\cos^2(5\pi + 2\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha)$$

4.

$$\frac{\cos(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = tg\alpha$$

5.

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = -4\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

6.
$$tg\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$$
7.
$$1+ctg\alpha+\sin^{-1}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$$
8.
$$\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha$$
9.
$$\frac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=tg\frac{15\alpha}{2}$$
Упростите выражения (10-17).

10.
$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)ctg(\alpha-\frac{5\pi}{4})}+\cos^2\alpha$$
11.
$$\cos\alpha(1+\cos^{-1}\alpha+tg\alpha)(1-\cos^{-1}\alpha+tg\alpha)$$
12.
$$\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+ctg\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+ctg\alpha)$$
13.
$$\frac{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+tg^2\alpha-1}$$
14.
$$\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha-\frac{\pi}{2})}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos(4\alpha+\frac{3\pi}{2})}$$
15.
$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$$
16.
$$\frac{\sin(80^o+4\alpha)}{4\sin(20^o+\alpha)\sin(70^o-\alpha)}$$
17.
$$(tg255^o-tg555^o)(tg795^o+tg195^o)$$

18. Найдите такую функцию g, что при всех x справедливо равенство:
a) $g(\cos x+\sin x)+g(\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}))=-3$;
b) $g(\cos x-\sin x)+g(\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}))=1$.

19. Дана функция $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$. Докажите, что $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}+1$.
Указание: домножьте числитель и знаменатель дроби на $\cos x+\sin x$

и учтите, что полученное равенство не является тождеством.

20. Дана функция $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$. Докажите, что $f(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Докажите тождества (21-23).

21.
$$1 + tgx + tg^2x + tg^3x = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos^3 x}$$

22.
$$ctg\alpha - tg\alpha - 2tg2\alpha - 4tg4\alpha = 8ctg8\alpha$$

23.
$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}} = ctg(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}),\ \pi < \alpha < 2\pi$$

Докажите равенства (24-26).

24.
$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

25.
$$arctg\frac{1}{7} + 2arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$$

26.
$$\frac{1}{\sin 10^o} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^o} = 4.$$

Докажите, что если $\alpha,\ \beta,\ \gamma$— углы треугольника, то выполняется равенство (27-28).

27.
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

28.
$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

§12. Тригонометрические уравнения (4часа)

Решите уравнения (1-19).

1.
$$\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2}\sin 3z$$

2.
$$tg2x\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$$

3.

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x$$

4.

$$\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$$

5.

$$\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$$

6.

$$(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$$

7.

$$6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$$

8.

$$25\sin^2 x + 100\cos x = 89$$

9.

$$\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25$$

10.

$$(\sin x - \cos x)^2 + tgx = 2\sin^2 x$$

11.

$$(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0,5\sin 4x$$

12.

$$\frac{40(\sin^3\frac{t}{2} - \cos^3\frac{t}{2})}{16\sin\frac{t}{2} - 25\cos\frac{t}{2}} = \sin t$$

13.

$$\frac{\cos^2 z(1 + ctgz) - 3}{\sin z - \cos z} = 3\cos z$$

14.

$$tg^2 t - \frac{2\sin 2t + \sin 4t}{2\sin 2t - \sin 4t} = 2ctg2t$$

Указание: преобразовать дробь до выражения $ctg^2 t$.

15.

$$\cos 6x + \sin\frac{5}{2}x = 2$$

Указание: оба слагаемых должны быть равны 1.

16.

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}$$

17.

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$$

Решение: примените формулу разности синусов двух углов, тогда получите $2\sin 2x - 2\sin x\cos 2x = 3$ *или*

$$\sin 2x - \sin x\cos 2x = \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Преобразуйте теперь левую часть уравнения (*) следующим образом:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} - \frac{\sin x\cos 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right).$$

Так как при любом x *справедливо*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2 + \left(\frac{-\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2 = 1,$$

то существует угол $\varphi(x)$ *такой, что*

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \cos\varphi(x), \quad -\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \sin\varphi(x).$$

Следовательно, уравнение (*) перепишется в виде

$$\sqrt{1+\sin^2 x}\,\sin(2x+\varphi(x)) = \frac{3}{2}. \qquad (**)$$

Левая часть уравнения (**) не превосходит $\sqrt{2}$*, поэтому уравнение корней не имеет.*

18.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 4x$$

Указание: к левой части уравнения примените формулу суммы кубов $\sin^2 x$ *и* $\cos^2 x$ *и сведите его к виду* $\frac{5+3\cos 4x}{8}$;

19.

$$1+\cos^2 x + 2\cos x\cos^2 5x = \sin^2 5x.$$

Указание: рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно $\cos x$.

§13. Тригонометрические неравенства (2часа)

Решите неравенства (1-4).

1.

$$\sqrt{3}\cos^{-2} x < 4\ tgx$$

2.

$$\sin 4x + \cos 4x\ ctg 2x > 1$$

3.

$$2+\ tg2x+\ ctg2x<0$$

4.

$$2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\ tgx)<5$$

5. Изобразите на плоскости множество точек $A(a,b)$, для которых при всех x верно неравенство

$$\sin(x+a)\geq\sin x+b.$$

6. Дана функция $f(x)=\ tg(x-\frac{\pi}{3})+tg(x+\frac{\pi}{3})$. Решите неравенство $f(x)<0$.

7. Дана функция $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$. Решите неравенство $f(x)\geq 2\ tg2x$.
Указание: примените решение задачи 19 из §11.

8. Докажите, что при всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство:
a)

$$2^n|\sin(2^{-n}x)|\geq\sin x,\quad x\in\mathbb{R};$$

b)

$$\sin(2^nx)\leq 2^n|\sin x|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Решение задачи 8а): доказательство проведем по индукции. Сделаем замену $t=2^{-n}x$ *и докажем неравенство*

$$\sin(2^nt)\leq 2^n|\sin t|.$$

Действительно, $\sin(2^nt)=2\sin(2^{n-1}t)\cos(2^{n-1}t)\leq 2|\sin(2^{n-1}t)|\leq 2^n|\sin t|$.

9. Дана функция $y=\cos 2x+\cos x-4\cos^2\frac{x}{2}$. Докажите, что при всех значениях x выполняется неравенство $y\leq 0$.
Указание: воспользоваться тем, что $y=2\cos^2 x-1+\cos x-2(1+$ $+\cos x)=2\cos^2 x-\cos x-3$.

10. Показать, что $\frac{1}{8}<\cos 20^o\cos 40^o\cos 70^o<\frac{1}{4}$.
Указание: воспользоваться тем, что $\cos 70^o=\sin 20^o$.

11. Показать, что $tg40^o+tg45^o+tg50^o>3$.

12. Показать, что $\frac{1}{8}<\sin 20^o\sin 50^o\sin 70^o<\frac{1}{4}$.

13. Доказать, что для любых x $(x \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z})$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) \geq 9.$$

Указание: представить выражение в левой части неравенства в следующем виде $(2+ctg^2x)(2+tg^2x)$.

14. Доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$(\sin^2 x)^{\cos^2 x} + (\cos^2 x)^{\sin^2 x} \leq 1 + \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Указание: воспользоваться тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *и неравенством Бернулли: если* $0 < p < 1$, *то* $(1+x)^p \leq 1 + px$.

§14. Показательные уравнения и неравенства (2часа)

Решите уравнения (1-4).

1.
$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

2.
$$3 * 5^{2x-1} - 2 * 5^{x-1} = 0,2$$

3.
$$8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$$

4.
$$3^{2x+4} + 45 * 6^x - 9 * 2^{2x+2} = 0$$

Решите неравенства (5-9).

5.
$$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$$

6.
$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$$

7.
$$\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$$

8.
$$x^2 * 3^x - 3^{x+1} \leq 0$$

9.
$$2x * 2^{\sqrt{3-x}} + 3 * 2^{x-1} > x * 2^x + 3 * 2^{\sqrt{3-x}}$$

10. Докажите, что уравнения имеют ровно два решения:
a) $1 + 9^{9x} + 5^x = 4x + 3$;
b) $8^x + 4^x + 2^x = 2x + 3$.
Указание к пункту 10b: учесть то, что $(8^x + 4^x + 2^x)'|_{x=0} = \ln 64 > 2$ *и построить графики левой и правой частей уравнения.*

11. Определите число решений уравнения $|14^x - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a.

12. Решите неравенства:
a)
$$8^x - 3 * 4^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+3} > 0;$$
b)
$$\frac{5 * 3^{x-2}}{3^x - 2^x} \geq 1 + (\frac{2}{3})^x;$$
c)
$$a^2 - 2 * 4^{x+1} - a * 2^{x+1} > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$
Указание к пункту 12b: сделать замену $t = (\frac{3}{2})^x$, *а в неравенстве 12c—* $z = \frac{2^{x+1}}{a}$.

Решите уравнения (13-16).

13.
$$(0,6)^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$$
14.
$$\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x\, 0,125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$$
15.
$$(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$$
16.
$$16^x + 36^x = 2 * 81^x$$

§15. Логарифмические уравнения (2часа)

Упростите, указав допустимые значения параметров (1-2).

1.
$$\frac{\log_a \sqrt{a^2-1}\ \log^2_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\ \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$$

2.

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a ab - \log_{ab} b)\log_b a - 1$$

3. Найти $\lg\sqrt{x}$, если известно, что $\log_x 100 = a$.

4. Найти $\log_9 2,97$, если известно, что $\lg 3 = a,\ \ \lg 11 = b$.

Решите уравнения (5-14).

5.

$$\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$$

6.

$$\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$$

7.

$$\log_x \sqrt{2} - \log_x^2 \sqrt{2} = \log_3 27 - \log_x(2x)$$

8.

$$\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$$

9.

$$7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 * 5^{\lg x-1} - 13 * 7^{\lg x-1}$$

10.

$$(16 * 5^{2x-1} - 2 * 5^{x-1} - 0,048)\lg(x^3+2x+1) = 0$$

11.

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$$

12.

$$\log_{x+1}(x-0,5) = \log_{x-0,5}(x+1)$$

13.

$$\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2,5$$

14.

$$|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$$

Решите системы уравнений (15-18).

15.

$$\begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 2(\log_{\frac{1}{y}} x - 2\log_{x^2} y) + 5 = 0, \\ x * y^2 = 32. \end{cases}$$

Указание: в первом уравнении положить $\log_x y = z$ *и решить его относительно* z.

Решите уравнения (19-23).

19.
$$\log_{2x} x = \log_{4x} x$$

20.
$$16^{\frac{x-1}{x}} * 5^x = 100$$

21.
$$x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}$$

22.
$$10^{\sqrt{\lg x}} + x^{\sqrt{\log_x 10}} = 200$$

23.
$$\log_3 \log_{\sqrt{2}} x + 2\log_{\frac{1}{9}} \log_2(2x - \frac{5}{9}) = 0$$

§16. Логарифмические неравенства (2часа)

Найдите область определения функций (1-4).

1. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$ 2. $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$

3. $y = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3 |x-4|}$ 4. $y = \log_3(2^{\log_{x-3} 0,5} - 1) + \frac{1}{\log_3(2x-6)}$

Решите неравенства (5-14).

5.
$$\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5$$

6.
$$\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0$$

7.
$$\log_x \log_9(3^x - 9) < 1$$

8.

$$\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$$

9.

$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$$

10.

$$\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \le -4$$

11.

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5$$

12.

$$\frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2}$$

Указание: сделать замену $y = \sqrt{4x+5}$.

13.

$$\log_x \frac{3}{8-2x} \ge -2$$

Указание к задаче 13: примените схему:

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x)-g(x)) \le 0, \\ a,\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

14.

$$\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$$

15. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых являются решениями системы неравенств

$$|y| \le \log_2(|x|+1) \le 1.$$

16. Функция f задана формулой $f(x) = \log_a(x+3) + \log_a(x-1)$, где $a \in \mathbb{R}$.

a) Пусть $a = 4$. Решите неравенство $f(x) \le 2 - \log_4 8$.

b) При том же a решите неравенство $\frac{f(x)-2+\log_4 8}{\log_{0,19} 92 - \lg^2(5-x)} \le 0$.

c) Найдите множество значений a, для которых при $x \in (1;2)$ верно неравенство $f(x) < 2$.

Решение задачи 16 c: перепишем условие в равносильной форме: $\log_a(x^2 + 2x - 3) < 2$ *при всех* $x \in (1;2)$. *Пусть* $a > 1$, *тогда функция в левой части неравенства возрастающая и оно верно при всех* $x \in (1;2)$ *тогда и только тогда, когда ее значение при* $x = 2$ *не превосходит двух, то есть* $\log_a 5 \le 2$, *или* $a > \sqrt{5}$. *Если* $0 < a < 1$, *то, как так выражение*

x^2+2x-3 при x, близких к единице, сколь угодно близко к нулю, то $\log_a(x^2+2x-3)$ может быть сколько угодно большим числом. Поэтому, при таких a неравенство не может выполняться.

17. Функция f задана формулой $f(x)=\log_a(x-2)+\log_a(x+4)$, $a\in\mathbb{R}$.
a) Пусть $a=3$. Решите неравенство $f(x)\le\log_3 1,8+\log_3 15$.
b) При том же a решите неравенство $\frac{f(x)-\log_3 1,8-\log_3 15}{\log_{92}19+\lg^2(7-x)}>0$.
c) Найдите множество значений a, для которых при всех $x>3$ верно неравенство $f(x)>2$.

18. Дана функция $f(x)=\log_2\frac{x-\frac{1}{x}}{3}$.
a) Решите неравенство $f(x)<-1$.
b) Решите уравнение $\sqrt{3-f(x)}=1-f(x)$.
c) Сколько решений (в зависимости от a) имеет уравнение $f(x)=\log_2(a-x)$?
d) Докажите, что функция $f(x)$ монотонна на $(-1;0)$, и найдите формулу для функции $g(x)$, обратной к ней на этом интервале.
Указание к 18d: решите уравнение $f(x)=a$.

19. Решите неравенство:

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>1.$$

§17. Уравнения и неравенства смешанного типа (2часа)

Решите уравнения (1-3, 6, 10).

1.
$$\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

2.
$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x$$

3.
$$|ctg\ (2x-\frac{\pi}{2})|=\frac{1}{\cos^2 2x}-1$$

Решите неравенства (4-5, 7-9).

4.
$$4^{\sin^2\pi x}+3*4^{\cos^2\pi x}\le 8$$

5.

$$\log_{tg\,x}\sqrt{\sin^2 x-\frac{5}{12}}<-1$$

6.

$$|\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)|+|\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)|=1$$

7.

$$\sqrt{5-2\sin x}\geq 6\sin x-1$$

8.

$$x^{\lg\sin x}\geq 1$$

9.

$$3^{|x+2|}+3^{|x-1|}\geq 28$$

10.

$$\log_{\sin x}2+\log_{\cos x}2+\log_{\sin x}2\log_{\cos x}2=0$$

§18. Контрольная работа (2часа)

Решите уравнения (1-3, 6, 10).

1.

$$\sqrt{-\cos x}=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

2.

$$\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$$

3.

$$|\cos x|=\cos x-2\sin x$$

Решите неравенства (4-5, 7-9).

4.

$$9^{1+\sin^2\pi x}+30*9^{\cos^2\pi x}\leq 117$$

5.

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1$$

6.

$$|\log_3(1+\cos 2x)|+|\log_3(1-\cos 2x)|=1$$

7.

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$$

8.

$$x^{2\sin x-\cos 2x}<\frac{1}{x}$$

9.

$$|3^x - 2| \leq 1$$

10.

$$(\sin x)^{-\sin x} - 1 = ctg^2\, x$$

§19. Графики функций. Преобразование графиков функций (2часа)

Постройте графики функций (1-9).

1.

$$a)\ y = x^2 + 5x + 6; \quad b)\ y = x^2 + 5|x| + 6;$$
$$c)\ y = |x^2 + 5x + 6|; \quad d)\ y = |x^2 + 5|x| + 6|.$$

2.

$$a)\ y = -x^2 + 4x - 5; \quad b)\ y = -x^2 + 4|x| - 5;$$
$$c)\ y = |-x^2 + 4x - 5|; \quad d)\ y = |-x^2 + 4|x| - 5|.$$

3.

$$y = x|x| + 1$$

4.

$$y = |x + 1| - x$$

5.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}(x^2 - 4)$$

6.

$$y = \frac{x-1}{|x-3|}(x^2 - 9)$$

7.

$$a)\ y = \log_2 x; \quad b)\ y = \log_2 |x|$$
$$c)\ y = \log_2(-x); \quad d)\ y = |\log_2 x|; \quad e)\ y = |\log_2 |x||.$$

8.

$$y = -2^{-|x|}$$

9.

$$y = \log_2 \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

10. Решите графически уравнение: $|x - 1| + 2x - 5 = 0$.

11. Отличаются ли один от другого графики функций $y = \lg x^2$ и $y = 2\lg x$?

Изобразите в координатной плоскости xOy заданные соотношения между переменными x и y (12-13).

12.

$$|y| = |\sin x|$$

13.

$$|y| = \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

14. Построить эскиз кривой:

$$a)\ y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2};\quad b)\ y = (x+2)e^{\frac{1}{x}};$$

$$c)\ y = x^4 - 10x^2 + 9;\quad d)\ y = \frac{2}{1+x^2}.$$

Решение задачи 14а): Проведем полное исследование функции.

1) Область определения: $D = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Исследование функции в граничных точках области D.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = -\infty,\ \lim_{x\to1-0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty.$$

3) Установление четности и периодичности функции.

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к. ее область определения D несимметрична относительно точки x=0. Функция не является периодической, т.к. она имеет конечное число нулей $(x = -1)$.

4) Нули и область постоянства знака функции.

Единственный нуль $x = -1$; *в* $(-\infty; -1)$ *функция отрицательна, в* $(-1; 1)$ *и* $(1; +\infty)$ *— положительна.*

5) Нули и интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$.

$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, *следовательно,* $x = -1$ *и* $x = 5$ *— нули* $f'(x)$, *в интервалах* $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(5; +\infty)$ *производная* $f'(x) > 0$, *в интервале*

$(1;5)$ $f'(x) < 0$.

6) Нули и интервалы знакопостоянства второй производной $f''(x)$. $y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, *следовательно,* $x = -1$*— единственный нуль* $f''(x)$, *в интервалах* $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ $y'' > 0$, *а в интервале* $(-\infty;-1)$ $y'' < 0$.

7) Асимптоты.
Так как $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = \infty$, *прямая* $x = 1$ *является вертикальной асимптотой. Определим наклонные асимптоты.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty}(y(x) - x) = 5.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ *имеется наклонная асимптота* $y = x + +5$. *Аналогично убеждаемся, что прямая* $y = x+5$ *является наклонной асимптотой и при* $x \to +\infty$.

Учитывая эти сведения, чертим эскиз графика функции.

15. a) Решите уравнение $x^2 - x = |2x - 1|$.
b) Придумайте уравнение вида $P(x) = Q(x)$, не имеющее решений, где $P(x)$, $Q(x)$— многочлены ненулевой степени.

16. a) Решите неравенство $\sqrt{x+1} + x > 1$.
b) Придумайте иррациональное неравенство, множеством решений которого является вся его область определения.

Постройте график функции (17-19).

17.
$$y = \sqrt{(\sin x - \cos x)\cos\frac{x}{2}sec\frac{x}{2}}$$

18.
$$y = \max_{t\in[x;x+\frac{\pi}{2}]}\sin t$$

19.
$$y = \min_{t\in[x;x+\frac{\pi}{2}]}\cos t$$

§20. Задачи с параметрами (2часа)

1. При каких значениях параметра уравнение

$$2\sqrt{1-m(x+2)} = x+4$$

имеет один корень?

Указание: сделать замену $\sqrt{1-m(x+2)} = y \geq 0$, *решить уравнение графически.*

2. При каких значениях параметра уравнение

$$\sqrt{k(2x+1)+16} - x = x-3$$

не имеет корней?

3. При каком значении m система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(m-1)y = 3, \\ (m+1)x+4y = -3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?

Указание: система уравнений имеет бесконечное множество решений (не имеет решений), если коэффициенты при x и y пропорциональны.

4. При каких значениях m система

$$\begin{cases} x+my = 3m, \\ mx+9y = 6 \end{cases}$$

имеет решение, которое удовлетворяет неравенствам $x \geq 0$, $y \geq 0$?

5. При каких значениях a уравнение

$$\log_3(9^x + 9a^3) = x$$

имеет два решения?

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$$

не имеет решений на отрезке $[0;\pi]$.

Решение задачи 6: для удобства введем обозначение $b = \sin a + \cos a$ *и выясним, при каких b уравнение* $\sin x + \cos x = b$ *не имеет решений на* $[0;\pi]$. *Это уравнение не имеет решений тогда и только тогда,* *когда число b не принадлежит образу отрезка $[0;\pi]$ функции $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$. Очевидно, что это выполняется при $b \notin [-1;\sqrt{2}]$. Теперь остается решить неравенство $\sin a + \cos a < -1$.*

7. При каких значениях a выражение $x^2 + 2ax + a - 2$ положительно на отрезке $[1;2]$?
Решение задачи 7: положим $f(x) = x^2 + 2ax + a - 2$. По условию, $f(1) = 3a - 1 > 0$, то есть $a > \frac{1}{3}$. При указанных значениях параметра a функция f монотонна на луче $[0;+\infty)$, поэтому если $f(1) > 0$, то $f(x) \geq 0$ при $x \in [1;2]$. Таким образом, $a > \frac{1}{3}$.

8. Определите (в зависимости от a) число решений уравнения:

$$a)\ 2|x-a| = x+1; \quad b)\ |x+a| = 2 - x^2.$$

Указание: решите графически каждое из уравнений.

9. Нарисуйте множество заданное уравнением

$$\sqrt{2xy+a} = x + y + 1.$$

При каких a оно непусто?

10. При каких a следующие уравнения имеют единственное решение:

$$a)\ 2\lg(x+1) = \lg ax; \quad b)\ \lg(x^2+6x+8) = \lg(a-3x)?$$

11. Дана функция $f(x) = \log_{a+2x}(x^2-1)$.
a) Пусть $a = 0$. Решите уравнение $f(x) = 1$.
b) Пусть $a = -1$. Решите неравенство $f(x) \geq -1$.
c) Изобразите на плоскости множество всех таких пар $(x;a)$, что $f(x) = 1$. При каких a это уравнение имеет решение?
d) Найдите все такие положительные a, при которых для любого натурального n уравнение $f(x) = n$ имеет решение.

Указание к пункту 11c): уравнение $\log_{a+2x}(x^2-1) = 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 1 = a + 2x, \\ |x| > 1, \\ a + 2x > 0, \\ a + 2x \neq 1. \end{cases}$$

Теперь ничего не стоит получить ответ на второй вопрос, имеющий такую геометрическую переформулировку: при каких a на изображенном множестве существует точка с равной a второй координатой? *Указание к пункту 11d): перейти к уравнению $x^2 - 1 = (a + 2x)^n$.*

12. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение:
$a)$ $e^x = ax$, $\quad b)$ $1 + ax = \sqrt{x+3}$?

13. Найти все такие m, что при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения в указанной области:

$$a)\ f(x) = \sin mx, \quad x \in [-\frac{\pi}{4}; 0];$$
$$b)\ f(x) = m^2 + mx - x^2, \quad x \leq -2;$$
$$c)\ f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + (2 - m^2)x + 4, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$d)\ f(x) = \cos mx, \quad x \in [0; \frac{\pi}{4}];$$
$$e)\ f(x) = x^2 + mx - m^2, \quad x \geq 1;$$
$$f)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + (m^2 + 2)x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение пункта 13d): так как функция f четна, то достаточно рассматривать случай $m > 0$. Уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного решения, если функция f обратима на указанном множестве. Таким образом, в данном случае нужно, чтобы $[0; \frac{m\pi}{4}] \subset [0; \pi]$.

Решение пункта 13e): вершина параболы должна лежать левее прямой $x = 1$.

Решение пункта 13f): в данном случае, функция должна быть монотонна, значит, при всех $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 0$, что верно, если $9m^2 - 4(m^2 + 2) \leq 0$.

§21. Планиметрия. Треугольник (2часа)

1. Найти площадь прямоугольного треугольника, один катет которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

2. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8, а

медиана, заключенная между ними, равна 5.

3. Пусть a и b— две стороны треугольника, α— угол между ними. Найдите длину биссектрисы угла α.

4. Пусть AM— биссектриса треугольника ABC. Докажите, что BM:CM= =AB:AC.

5. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

6. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α.

7. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки D и E соответственно так, что CD— биссектриса треугольника ABC, EC=ED=$\frac{4}{9}$, BC=1. Найдите CD и площадь треугольника ABC.

8. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если BC=4, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{5}{2}$.

§22. Планиметрия. Трапеция (2часа)

1. Найдите площадь трапеции с основаниями 7 и 11 и боковыми сторонами 3 и 5.

2. Найдите площадь трапеции с основаниями 6 и 7 и диагоналями 5 и 12.

3. Найти площадь трапеции, если площади треугольников, образованных диагоналями трапеции и примыкающих к ее основаниям, равны S_1 и S_2.

4. Основания трапеции a и b. Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

5. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

6. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найдите периметр этой трапеции.

7. Отношение радиуса круга описанного около трапеции, к радиусу круга, вписанного в нее, равно к. Найти углы трапеции и допустимые значения к.

8. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции, делящего площадь трапеции пополам.

§23. Вписанные и описанные четырехугольники

1. Во вписанном четырехугольнике ABCD, в котором AB=BC, K— точка пересечения диагоналей. Найдите AB, если BK=b, KD=d.
2. ABCD — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, AB=CD=a, AC=BD=b, BC=c, M—произвольная точка дуги BC окружности, описанной около ABCD. Найдите отношение $\frac{BM+MC}{AM+MD}$.
3. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник ABCDEF. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACD.
4. В окружность радиуса 10 вписан четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны 12 и $10\sqrt{3}$. Найдите стороны четырехугольника.
5. Около окружности радиуса R описана прямоугольная трапеция с острым углом β . Найдите площадь трапеции.
6. Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой при продолжении пересекаются под углом α. Основания трапеции равны a и b (a>b). Найдите радиус окружности.
7. Окружность, вписанная в квадрат ABCD, касается его стороны BC в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение $\frac{MN}{AN}$.
8. a). Известны стороны четырехугольника ABCD, вписанного в окружность: AB=a, BC=b, CD=c, DA=d.Вычислите его диагонали AC и BD.

b). В четырехугольнике ABCD, вписанном в окружность, диагональ BD является биссектрисой угла B. Докажите, что $BD^2 = ab+c^2$.

§24. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Арифметическая прогрессия.Основные формулы.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} * n$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \qquad k = \overline{2, n-1}$$

$$a_k + a_m = a_n + a_p, \qquad \text{где} \quad k + m = n + p$$

2. Геометрическая прогрессия.Основные формулы.

$$b_n = b_1 * q^{(n-1)}$$

$$S_n = \frac{b_1 * (1 - q^n)}{1 - q}, \qquad q \neq 1$$

$$S_n = nb_1 \quad , \qquad q = 1$$

$${b_k}^2 = b_{k-1} * b_{k+1}, \qquad k = \overline{2, n-1}$$

$$b_k b_m = b_n b_p, \qquad \text{где} \quad k + m = n + p$$

1. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найти эти числа.

2. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

3. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $a_4 - a_2 = -\frac{45}{32}$, $a_6 - a_4 = -\frac{45}{512}$.

4. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами и со знаменателем $|q| < 1$ сумма трех первых членов равна 10,5, а сумма прогрессии 12. Найти прогрессию.

5. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три - арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

6. Найти сумму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

7. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n}=S_n+\frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k- сумма k-первых членов прогрессии).

8. Сумма трех чисел равна $\frac{11}{18}$, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найти эти числа.

9. Числа $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что:

   a).
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}},$$

   b).
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

10. Докажите утверждение : для того,чтобы три числа $\frac{1}{b+c}$ $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

11. Найти сумму:

   a). $1+2*3+3*7+\ldots+n\left(2^n-1\right)$,

   b). $1*3+3*9+5*27+\ldots+(2n-1)*3^n$,

   c). $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ единиц}}$,

   d). $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$,

   e). $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

§25. Текстовые задачи

1. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18 % . Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

2. Из пункта А в пункт В доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав 2/3 расстояния от пункта А до пункта В, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт В. При этом почта была доставлена из пункта А в пункт В за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта А до пункта В со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта А до пункта В со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая,что она больше скорости велосипедиста.

3. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 часа. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на 4 часа больше, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельности?

4. Зарплату повысили на p%. Затем новую зарплату повысили на 2p%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

5. Собрали 140 кг. грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

6. Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг. содержит 20% меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40% олова?

7. Расстояние между пристанями А и В по реке равно 36 км. Из А в В отплыл плот, а из В в А спустя 8 ч. отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки 12км/ч.?

8. Свежие ягоды содержат 92% воды, а сухие — 8%. Сколько получится сухих ягод из 23кг. свежих?

9. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м. меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км. он затратил времени на 2 ч. больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

§26. Итоговая контрольная работа

1. Решите уравнение
$$-x^2+2x-1=\sqrt{x^2-3x+2}.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2.$$

3. Решите неравенство
$$\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\log_{3-2\sqrt{2}}25.$$

4. Решите уравнение
$$3+|\sin x-3\cos x|=3\sin x+\cos x.$$

5. При всех значениях параметра a решите уравнение
$$25^x-(a-1)5^x+2a+3=0$$
и укажите, при каких a оно имеет единственное решение.

6. Равнобедренная трапеция ABCD с большим основанием AB описана около окружности, которая касается стороны BC в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение $\frac{AB}{CD}$, если $\frac{MN}{AN}=K$.

7. Решите уравнение
$$x^{2\log_4 x}=\frac{8}{x^2}.$$

8. Определите, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x+a} \geq x$$

образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

9. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right) * \left(\sqrt{\frac{b}{4a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + xy = 42x, \\ 6x^2 + 6xy = 7y. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

§1

1) $\frac{1}{ab}$.
2) $\frac{x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}}{x}$.
4) a) $2(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})(3+\sqrt{2})$, b) $\frac{-(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}{2}$, c) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$,
d) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a}$.
5) $\frac{1-b}{1+b}$.
6) $\sqrt{2}$.
7) $\frac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, если $x \in (4,8)$; 1, если $x \geq 8$.
8) $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$, если $a \in (0,1)$; $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$, если $a > 1$.
9) 18.
10) 2.
11) 72.
12) 49.
13) 6.

§2

9) $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{55}{16}$.
10) $x_1 = a+b$; $x_2 = \frac{a+b}{2}$.
11) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$.
12) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
13) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$.
14) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
17) $x = 0$.
18) $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$.

§3

1) $(5;3)$.
2) $(2;-1)$, $(-1;2)$.
3) $(\frac{1}{4};\frac{1}{6})$, $(\frac{1}{12};\frac{1}{3})$, $(-\frac{5}{24};-\frac{7}{24})$, $(-\frac{3}{8};-\frac{1}{8})$.
4) $(2;3)$, $(3;2)$.
5) $(1;4)$, $(4;1)$.
6) $(2;-1;1)$.
7) $(1;2;3)$.
8) $(2;2)$, $(-2;-2)$, $(-2;2)$, $(2;-2)$.
9) $(2;3)$, $(-2;-3)$.
10) $(1;3;5), (-1;-3;-5)$.

11) $(2;1)$, $(\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}; \frac{-17\sqrt[3]{4}}{4})$.
12) $(2;2;2)$.
13) $(1;-1;2)$, $(1;2;-1)$, $(-1;1;2)$.
14) $(1;2;3)$, $(-1;-2;3)$.
16) $(-1;-2)$, $(-2;-1)$.
17) $(0;0)$, $(\pm\sqrt{2};\mp\sqrt{2})$, $(\pm 2;\pm 2)$, $(\frac{\pm 1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\pm 1-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{\pm 1-\sqrt{5}}{2}; \frac{\pm 1+\sqrt{5}}{2})$.

§4

1) $(-1;1)$.
2) $(-1;+\infty)$.
3) $(1;3)\bigcup(3;5)$.
4) $(-\infty;-2)\bigcup(1;0]$.
5) $(-\infty;-3)\bigcup(-2;-1)$.
6) $x=1$.
7) $(-3;-1)$.
8) $(-2;-1.5)\bigcup[1;2)\bigcup[5;+\infty)$.
9) $(1-\sqrt{6};1)\bigcup(1+\sqrt{6};4]$.
10) $(-\infty;-5)\bigcup(-2;1)\bigcup[5;+\infty)$.
11) $(-\infty;-1]\bigcup[\frac{1}{2};1)\bigcup(1;+\infty)$.
12) $(-\infty;-2)\bigcup(-2;-1]\bigcup[2;+\infty)$.
17) $(-\infty;-1]\bigcup[3;+\infty)$.

§5

2) $b=-\frac{1}{4}$.
3) $(-\infty;-7-3\sqrt{11})\bigcup(-\frac{13+\sqrt{365}}{2};-7+3\sqrt{11})\bigcup(\frac{-13+\sqrt{365}}{2};+\infty)$.
5) $\varnothing$.
6) a) $a<-1$; b) $a<-\frac{5}{2}$; c) $a>-2$; d) $a>-\frac{1}{2}$.
7) $(1;1)$, $(-1;1)$.

§6

1) $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=1$.
2) $x=1$.
3) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 2$, $x_{5,6}=\pm 1$, $x_7=0$.
4) $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{16m-7}}{4}$, при $m>\frac{7}{16}$; $x_1=x_2=-\frac{3}{4}$, при $m=\frac{7}{16}$.
5) $x=1$.
6) $x=2$.

8) $|a| > 1$.

10) Два решения при $a > 997^2$, бесконечно много решений при $a = 997^2$ и ни одного решения при $a < 997^2$.

11) $1 \pm \sqrt{2},\ -1 \pm \sqrt{3}$.

12) $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{2}{3}$.

13) $(-\infty; -1] \bigcup \{0\} \bigcup [1; +\infty)$.

§7

1) $(\frac{1}{2}(a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}); \frac{1}{2}(a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}))$ при $|a| > \sqrt{2}$; при остальных a решений нет.

2) a) $(0; 1)$; b) $(-\infty; -2) \bigcup [0; +\infty)$.

3) a) $x \in [-1; -\sqrt{-2b - 1}] \bigcup [\sqrt{-2b - 1}; 1]$ при $b \in [-1; -0.5]$; $x \in [-1; 1]$ при $b > -\frac{1}{2}$; решений нет при $b < -1$.

b) $[-\sqrt{2b - 1}; -1] \bigcup [1; \sqrt{2b - 1}]$ при $b \geq 1$, при $b < 1$ решений нет.

4) $x > 6$ или $x < 0$.

5) $(-\infty; -3) \bigcup (-1; 1) \bigcup (3; +\infty)$.

6) $(-3; 2) \bigcup (2; 3)$.

7) $(-\infty; -\frac{2}{7}] \bigcup (3; +\infty)$.

8) $(2; 3)$.

9) $(2; 4) \bigcup (4; 6)$.

10) $(-3; -\frac{5}{3})$.

11) *a)* $x \in \mathbb{R}$; *b)* $\{-2\} \bigcup [0; 2]$.

§8

1) $x = -2$.

2) $x = -1$.

3) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{63}{13}$.

4) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$.

5) $5 \leq x \leq 10$.

6) $x = 5$.

7) $x = 1$.

8) $x = \pm 1$.

9) $x = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$.

10) $x = 12$.

11),12),13) $x = 0$.

14) $x = 2$.

15) $x = 1$.

16) $\{-1; -\frac{5}{7}\}$.
18) $x = 1$.

§9

1) $2 \leq x \leq \frac{7+\sqrt{5}}{2}$.
2) $(-\infty; 0.75) \bigcup (4; 7)$.
3) $[0; 3]$.
4) $[\frac{20}{9}; 4) \bigcup (5; +\infty)$.
5) $(-\infty; 2\sqrt{5} - 4)$.
6) $(\frac{2}{3}\sqrt{21}; +\infty)$.
7) $(-\infty; -\frac{5}{6}] \bigcup [3; +\infty)$.
8) $[-1; +\infty)$.
9) $[-2; 0) \bigcup (0; 2]$.
10) $(5; +\infty)$.
11) $(-\infty; -2) \bigcup (0; 1) \bigcup (1; +\infty)$.
14) $x = 1,\ y = 0$.
17) a) $(-\infty; -5) \bigcup (0; 2) \bigcup [3; 5)$;
b) $(-6; -3) \bigcup [-2; 0) \bigcup (6; +\infty)$.
18) $[-1; 0)$.

§10

1) $4 \bigcup [5; 7]$.
2) $[1.75; 4)$.
3) $(0; 1; \frac{1}{4})$, $(0; -1; -\frac{1}{4})$.
4) $x = y = z = 2$.
5) $x = y = z = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
6) $x = y = 0$.
7) $(16; 1)$.
8) $(1; 9)$, $(9; 1)$.
9) $(1; 4)$.
10) $(11; 1)$.
11) $(3; -2; 6)$.
12) $(1; 4)$, $(4; 1)$, $(-1; -4)$, $(-4; -1)$.

§11

10) $-\sin^2 \alpha$.
11) $2 \sin \alpha$.

12) $\sin 2\alpha$.
13) $ctg^2\alpha$.
14) $ctg 2\alpha$.
15) $2\cos\alpha$.
16) $\cos(40^o + 2\alpha)$.
17) $8\sqrt{3}$.
18) a) $g(u) = -\frac{3}{2}u^2$; b) $g(t) = \frac{1}{2}t^2$.

§12

1) $z_1 = \frac{\pi}{4}(8k+1)$; $z_2 = \frac{\pi}{20}(8k+3)$.
2) $x_1 = \frac{\pi k}{5}$; $x_2 = \frac{\pi}{8}(8k \pm 3)$.
3) $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_3 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.
4) $x_1 = \frac{\pi}{12}(2k+1)$; $x_2 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$.
5) $x_1 = \frac{\pi k}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$.
6) $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.
7) $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.
8) $x = \pm arccos\, 0,8 + 2\pi k$.
9) $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$.
10) $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.
11) $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.
12) $t = arctg\, \frac{4}{5} + 2\pi k$.
13) $z_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$; $z_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$.
14) $t = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.
15) $x = \pi(4t+1)$, $t \in \mathbb{Z}$.
16) $x = \frac{\pi}{7}(2n+1)$, $n \neq 7t+3$; $n, t \in \mathbb{Z}$.
18) $x = \frac{(-1)^n}{4}\, arcsin\, \frac{5}{\sqrt{64a^2+9}} + \frac{1}{4}\, arccos\, \frac{8a}{\sqrt{64a^2+9}} + \frac{\pi n}{4}$, $|a| \geq \frac{1}{2}$.
19) $\pi + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

§13

1) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
2) $\left(\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8}(4n+1)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
3) $\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \bigcup \left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
4) $\left(2\pi n - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
5) $b \leq -2|\sin\frac{a}{2}|$.
6) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k, \pi k\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
7) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

§14

1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.
2) $x = 0$.
3) $x_1 = 3$; $x_2 = 2\log_6 2$.
4) $x = -2$.
5) $0 < x < 1$.
6) $(-\infty; 0) \bigcup [\frac{1}{2}; +\infty)$.
7) $(-1; 1)$.
8) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.
9) $(\frac{3}{2}; 2)$.
11) корней нет при $a < 0$, один корень при $0 < a < 1$.
12) $a)$ $(1; 2)$; $b)$ $(0; 1]$; $c)$ $(-\infty; \log_2 \frac{a}{4})$ при $a > 0$, $(-\infty; \log_2(-\frac{a}{2}))$ при $a < 0$, при $a = 0$ решений нет.
13) $\{-\frac{5}{2}; 3\}$.
14) $\{-\frac{1}{5}; 3\}$.
15) $x = \pm 1$.
16) $x = 0$.

§15

1) $\log_a \sqrt{a^2 - 1}$, где $a > 1$ и $a \neq \sqrt{2}$.
2) $\log_a b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ и $ab \neq 1$.
3) $\frac{1}{a^2}$.
4) $\frac{b+3a-2}{2a}$.
5) $x_1 = 10$; $x_2 = 1,5$.
6) $x = 3$.
7) $x_1 = \sqrt[4]{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$.
8) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.
9),11) $x = 100$.
10) $x = 0$.
12) $x = 1$.
13) $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = 25$; $x_3 = \frac{1}{25}$; $x_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
14) $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = 9$.
15) $(6; 2)$.
16) $(2; 4)$.
17) $(8; 4)$.
18) $(2; 4)$, $(4\sqrt{2}; 2\sqrt[4]{2})$.
19) $x = 1$.
20) $-2\log_5 2$; 2.

21) $x_1 = 10^{-4}$; $x_2 = 10$.
22) $x = 10^4$.
23) $x = \frac{5}{3}$.

§16

1) $[2; \infty)$.
2) $(1; +\infty)$.
3) $[0; 3) \bigcup (3; 4)$.
4) $(3; 3.5) \bigcup (3.5; 4)$.
5) $(2; 3)$.
6) $(0; 4)$.
7) $(\frac{1}{\lg 3}; \infty)$.
8) $[0.5; 4]$.
9) $(-4; -3) \bigcup (8; \infty)$.
10) $(0; \sqrt[4]{2}]$.
11) $(1; 1 + 2^{-\frac{5}{4}}) \bigcup (3; \infty)$.
12) $x > 5$.
13) $(0; 1) \bigcup [\frac{4}{3}; 4)$.
14) $(0; 1) \bigcup (\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 2)$.
16) $a)$ $(1; \sqrt{6} - 1]$; $b)$ $[\sqrt{6} - 1; 5)$; $c)$ $a \geq \sqrt{5}$.
17) $a)$ $(2; 5)$; $b)$ $(5; 7)$; $c)$ $(1; \sqrt{7}]$.
18) $a)$ $(-1; -\frac{1}{2}) \bigcup (1; 2)$; $b)$ $-\frac{1}{2}, 2$; $c)$ решений нет при $a \leq -1$, одно решение при $-1 < a \leq 1$ и два решения при $a > 1$. Заметим, что исходное уравнение равносильно $\frac{1}{3}(x - \frac{1}{x}) = a - x$ при условии, что $x - \frac{1}{x} > 0$. Решить его можно графически; $d)$ $g(x) = \frac{1}{2}(3 * 2^x - \sqrt{9 * 2^{2x} + 4})$.
19) $1 < x < 10$.

§17

1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.
2) $x_1 = \ arccos\ (\sqrt{5} - 2) + 2\pi k$; $x_2 = \pi + 2\pi k$.
3) $x_1 = \frac{\pi}{2} k$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$.
4) $\frac{1}{4} + k \leq x \leq \frac{3}{4} + k$.
5) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$.
6) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k$.
7) $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.
8) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; $0 < x < 1$.
9) $x \leq -2$, $x \geq 1$.

10) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

§18

1) $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 4\pi k$.
2) $x_1 = \frac{3}{8}\pi + \pi k$; $x_2 = -\frac{1}{2} arctg\, 5 + \frac{\pi}{2} + \pi k$.
3) $x_1 = 2\pi k$; $x_2 = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$.
4) $\frac{1}{4} + k \le x \le \frac{3}{4} + k$.
5) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < arccos\, \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi k$, $-arccos\, \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.
6) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k$.
7) $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
8) $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $x \ne \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$.
9) $x \in [0; 1]$.
10) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

§19

15) $a)$ Меньший корень уравнения $x^2 - x = 1 - 2x$ и больший корень уравнения $x^2 - x = 2x - 1$; $b)$ например, $\frac{1}{2}|x - 1| - |x| = 1$.
16) $a)$ $(0; \infty)$; $b)$ например, $\sqrt{2x - 1} \ge \sqrt{x - \sqrt{2}}$.
18) Если $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\pi}{2} \in [x; x + \frac{\pi}{2}]$, следовательно $\max\limits_{t \in [x; x + \frac{\pi}{2}]} \sin t = 1$. Синус убывает на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi]$, поэтому $y = \max\limits_{t \in [x; x + \frac{\pi}{2}]} \sin t = \sin x$ при $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. Нетрудно видеть, что $y = \sin x$, если $x \in [\pi; \frac{5}{4}\pi]$. Наконец, $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, при $x \in [\frac{5}{4}\pi; 2\pi]$.

§20

1) $m = -1$, $-\frac{1}{2} < m < \infty$.
2) $-\infty < k < -4$.
3) $m = \pm 3$.
4) $m \in (-\infty; -3) \bigcup [0; \sqrt{2}]$.
5) $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.
6) $a \in (\pi + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
7) $a > \frac{1}{3}$.
8) $a)$ два корня при $a > -1$, один корень при $a = -1$ и не имеет корней при $a < -1$; $b)$ один корень при $a = \pm\frac{9}{4}$, два корня при $a \in (-\frac{9}{4}; \frac{9}{4})$.
9) $\sqrt{a + 1} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(a \ge -\frac{1}{2})$.
11) $a)$ $x = 1 + \sqrt{2}$; $b)$ $x \in [\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; +\infty)$; $c)$ $a \in (-2; 1 - 2\sqrt{2}) \bigcup (1 - 2\sqrt{2}; +\infty)$; $d)$ $a \in (2; 1 + 2\sqrt{2}) \bigcup (1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

12) b) Два решения при $0 < a \le \frac{1}{3}$, одно решение при $a \le 0,\ a > \frac{1}{3}$.
13) a) $|m| \le 2,\ m \ne 0$; b) $m \ge -4$; c) $|m| \ge 2\sqrt{2}$; d) $|m| \le 4,\ m \ne = 0$; e) $m \ge -2$; f) $|m| \le 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

§21

1) 202, 8.
2) 24.
3) $\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}$.
5) $\sin 2\alpha\ tg\ \frac{\alpha}{2}$.
6) $arctg\ \frac{tg\ \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}$.
7) $CD = \frac{2}{3},\ S = \frac{3\sqrt{7}}{20}$.
8) $\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

§22

1) 27.
2) 30.
3) $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.
4) $\frac{1}{2}|a - b|$.
5) a^2.
6) $\frac{8R}{\sin\alpha}$.
7) $arcsin\ \left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right),\ \pi - arcsin\ \left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right);\ k > \sqrt{2}$.
8) $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$.

§23

1) $\sqrt{b^2 + bd}$.
2) $\frac{c}{a+b}$.
3) $\frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$.
4) $\sqrt{240} \pm \sqrt{20};\quad \sqrt{80} \pm \sqrt{60}$.
5) $2(1 + \frac{1}{\sin\beta})R^2$.
6) $\frac{ab}{a-b}\ tg\ \frac{\alpha}{2}$.
7) 4.
8) $AC^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd};\quad BD^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$.

§24

1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1.
2) 1) $7, -28, 112, -448$; 2) $-11\frac{2}{3}, -46\frac{2}{3}, -186\frac{2}{3}, -746\frac{2}{3}$.
3) 1) $b_1 = 6, q = \frac{1}{4}$; 2) $b_1 = -6, q = -\frac{1}{4}$.
4) $6, 3, \frac{3}{2}, \ldots$.
5) 1) $3, 6, 12, 18$; 2) $18.75, 11.25, 6.75, 2.25$.
6) $2n + \frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3*4^n}$.
8) $x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{1}{6}$, $z = \frac{1}{3}$.
11) *a*) $2^{n+1}(n-1)+2-0,5n(n+1)$; *b*) $3^{n+1}(n-1)+3$; *c*) $1234\ldots n$; *d*) $3-$ $-\frac{3+2n}{2^n}$.

§25

1) 410 кг.
2) 80 км/ч.
3) 16 ч., 16/3 ч.
4) 20.
5) 40 кг.
6) 15 кг.
7) 3 км/ч.
8) 2 кг.
9) 60 км/ч.

Список литературы

[1] Алякин, В.А. Задачи повышенной сложности по математике. Выпуск 1 / В.А. Алякин. – Самара: СамГУ. – 2006. – 24 с.

[2] Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика / Денищева Л.О. [и др.] – М.: Интеллект-Центр. – 2004. – 174 с.

[3] Иванов, О.А. Практикум по элементарной математике / Иванов О.А. Алгеброаналитические методы. М.: МЦНМО. 2001. – 319 с.

[4] Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Алгебра: учеб. пособие; под редакцией М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1994. – 528 с.

[5] Нестеренко, Ю.В. Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов. – М.: Наука, 1981. – 320 с.

[6] Супрун, В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике / В.П. Супрун Мн.: Полымя, 1998. – 108 с.

[7] Единый государственный экзамен: Математика: Контрол. измерит. материалы / Денищева Л.О. [и др.] – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

[8] Готман, Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения / Э.Г. Готман. – М.: Просвещение, АО «Учебная литература», 1996. – 240 с.

[9] Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 класс / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение. 1989. – 252 с.

[10] Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

[11] Литвиненко, В.И. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В.И. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ