

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*А.А. ХРАМОВ*

# ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация

САМАРА

Издательство Самарского университета

2022

УДК 629.7(075) + 629.76(075)

ББК 39.53я7 + 39.62я7

X895

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов;  
д-р техн. наук, проф. И. А. Тимбай

*Храмов, Андрей Александрович*

**X895 Возмущённое движение летательных аппаратов:** учебное пособие / *А.А. Храмов.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 64 с.

**ISBN 978-5-7883-1760-1**

Учебное пособие содержит первую часть конспекта лекций по дисциплине «Возмущённое движение летательных аппаратов» и включает два раздела, в которых рассматриваются вопросы, связанные с расчётом возмущённых траекторий, а также устойчивостью движения и управляемостью летательных аппаратов.

Предназначено для обеспечения учебной подготовки магистров института авиационной и ракетно-космической техники по профилю «Динамика и управление движением космических систем» образовательной программы по направлению подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация. Пособие может использоваться при выполнении практических заданий, научно-исследовательской и выпускной квалификационной работы.

Подготовлено на кафедре динамики полёта и систем управления.

УДК 629.7(075) + 629.76(075)

ББК 39.53я7 + 39.62я7

ISBN 978-5-7883-1760-1

© Самарский университет, 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>1. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЁТА ВОЗМУЩЁННЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ</b> .....	6
1.1. Понятия о возмущённом движении и возмущающих факторах	6
1.2. Методы исследования возмущённого движения.....	7
1.3. Основные положения теории поправок. Поправочные формулы внешней баллистики .....	9
1.4. Уравнения движения ЛА в траекторной системе координат .....	15
1.5. Качественное влияние определяющих траекторию параметров и знаки поправочных коэффициентов.....	24
1.6. Определение изменений элементов траектории и поправочных коэффициентов интегрированием систем уравнений движения .....	27
1.7. Определение поправочных коэффициентов интегрированием дифференциальных уравнений в отклонениях .....	31
<b>2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ</b> .....	36
2.1. Основные понятия.....	36
2.2. Устойчивость движения по Ляпунову.....	38
2.3. Математические методы исследования динамики возмущённого движения ЛА.....	42
2.3.1. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами классическим методом.....	45
2.3.2. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом операционного исчисления.....	50
2.3.3. Исследование управляемого движения ЛА с помощью передаточных функций.....	52
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	62
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b> .....	63

## ВВЕДЕНИЕ

Невозмущённое движение – движение механической системы, соответствующее заданным (известным) силам и начальным условиям. Траектория невозмущённого движения называется номинальной или опорной.

Возмущённое движение – любое движение механической системы, отличающееся от рассматриваемого невозмущённого движения вследствие изменения начальных условий и действующих сил. Отличия параметров траектории возмущённого движения от параметров номинальной траектории называются отклонениями.

В реальных условиях движение летательного аппарата (ЛА) происходит при дополнительных возмущающих факторах, которые обычно при расчёте номинальных траекторий не учитываются (разбросе начальных условий движения, отклонения температуры воздуха от нормального закона, ветре и его порывах, пульсации тяги двигателя и т.п.). Их действие приводит к тому, что ЛА будет двигаться не по опорной траектории, а отклоняясь от неё более или менее значительно в зависимости от величины и направления возмущений.

Возмущающие факторы могут существенно отклонить траекторию ЛА, а в некоторых случаях целиком изменить характер его движения. Это происходит либо при значительных отклонениях начальных условий, либо тогда, когда возмущающие силы соизмеримы с силами, заданными при расчёте номинальной траектории. Существенное изменение траектории ЛА возможно и при малых возмущающих силах при длительном и систематическом их воздействии.

Однако в ряде случаев отклонения траектории от номинальной являются сравнительно небольшими и при их изучении можно

воспользоваться различными упрощёнными методами (линеаризация, усреднение, метод малого параметра и другие).

В пособии рассмотрены некоторые вопросы, связанные с возмущённым движением ЛА. Разнообразие существующих и разрабатываемых летательных аппаратов исключает возможность полного изложения данной темы в учебном пособии. Мы ограничимся изучением упрощённых моделей возмущённого движения, методов расчёта отклонений параметров возмущённой траектории от номинальной, а также методов оценки устойчивости движения и управляемости ЛА.

Материал пособия основывается на «классических» учебниках по динамике полёта летательных аппаратов, которые рекомендуются обучающимся при освоении дисциплины «Возмущённое движение летательных аппаратов» [1-4].

# 1. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЁТА ВОЗМУЩЁННЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

## 1.1. Понятия о возмущённом движении и возмущающих факторах

Математическая модель, описывающая движение ЛА, и результаты расчёта параметров траектории всегда отличаются от характеристик реального полёта.

Траекторию движения ЛА, рассчитанную при определённых условиях (допущениях), называют *невозмущённой* или *опорной*; соответствующая ей реальная траектория называется *возмущённой*. Возмущённое движение может быть также рассчитано математически с той или иной степенью точности.

Причины, вызывающие отклонения движения от номинального, принято называть *возмущающими факторами* (возмущениями).

Возмущения можно разделить по характерным признакам на несколько групп.

Первая группа определяется отклонениями конструктивных и технологических характеристик от их номинальных значений. Примерами могут служить:

- изменение внешних размеров в пределах допусков, приводящее к некоторым отклонениям аэродинамических и массовых характеристик;
- перекося отсеков корпуса ракеты (в частности, известны эффекты «перекоса тяги» и «эксцентриситета тяги», определяемые несоосностью оси сопла двигателя с продольной осью ракеты);
- отклонения размеров рабочей части сопла двигателя от номинала, что приводит к изменению секундного расхода рабочего тела;
- отклонение от расчётного количества заправленного топлива.

Ко второй группе следует отнести ошибки, определяемые системой управления. Например, инструментальные ошибки: ошибки ухода гироскопов, ошибки, накапливаемые системой управления в процессе движения за счёт отклонения поля притяжения Земли от расчётного, помех в системе управления и другие.

Третья группа ошибок определяется отклонением реальных метеорологических условий от стандартных расчётных.

Четвёртая группа ошибок охватывает отклонение начальных условий полёта от расчётных. Примером служат ошибки в определении местоположения пусковой установки и цели, ошибки прицеливания ракеты, ошибки установки программного угла тангажа и времени выключения двигателя, ошибки формирования полётного задания.

Следует иметь в виду, что полный перечень возмущений и доля каждой из названных групп в общей ошибке расчёта траектории полёта существенно зависят от используемой системы управления.

При исследовании сложного процесса полёта ЛА математическими средствами для упрощения расчётов часть действующих факторов не учитывается, а некоторые из них берутся по номинальным (средним) значениям. Система уравнений, в которой учитывается большое число действующих факторов, может считаться возмущённой по отношению к системе, учитывающей меньшее число факторов. Например, система уравнений, учитывающая действие ветра, может считаться возмущённой по отношению к системе, не учитывающей действие ветра. В данном случае возмущающий фактор – ветер.

## **1.2. Методы исследования возмущённого движения**

При баллистических расчётах влияние возмущений можно оценивать с использованием двух различных подходов – методом заданных возмущений и методом малых отклонений.

В первом случае, для оценки влияния на траекторию какого-либо фактора, ранее не рассматриваемого, необходимо составить новую систему дифференциальных уравнений, включающую интересующую нас величину. Сравнивая результаты расчёта по «невозмущённой» и «возмущённой» системе уравнений определяют влияние возмущающего фактора на результаты расчёта для фиксированного момента времени. Также следует поступить, если возмущающий фактор уже учтён в основной системе уравнений, но его изменение существенно. Влияние этого изменения на результаты расчёта характеристик движения и элементов траектории следует находить, решая основную систему дифференциальных уравнений при новых изменённых данных. Сравнения результатов решений, найденных при изменениях и «номинальных» данных, даёт величину искомого отклонения.

Описанный путь учёта влияния возмущений хотя и является теоретически строгим, однако не всегда используется на практике из-за невозможности получения исчерпывающих данных обо всех возмущающих факторах, которые могут носить случайный характер (например, действии порывов ветра, эксцентриситета тяги и другие).

На практике, как правило, приходится встречаться с небольшими отклонениями определяющих параметров от их номинальных значений. В большинстве случаев малые отклонения параметров приводят к малым изменениям элементов траектории, что позволяет устанавливать влияние возмущающих факторов на характеристики невозмущённой траектории с помощью метода малых отклонений, соответствующего второму случаю. При таком подходе предполагается, что интересующие нас факторы учтены в основных дифференциальных уравнениях. Сами возмущающие силы, моменты сил и механизм их действия на ЛА при этом не рассматриваются. Изучается только отклонения характеристик



движения уже после действия возмущающих факторов в предположении, что эти отклонения незначительны по величине. Метод малых возмущений позволяет уравнения возмущённого движения ЛА свести к линейным дифференциальным уравнениям (уравнениям в отклонениях), решаемых относительно просто.

### 1.3. Основные положения теории поправок. Поправочные формулы внешней баллистики

*Поправками* называют взятые с обратным знаком изменения параметров движения или элементов траектории, соответствующие отклонениям определяющих её факторов. Поправки к параметрам движения центра масс ЛА могут определяться для любой фиксированной точки траектории.

На рисунке 1.1 показаны активные участки невозмущённой и возмущённой траекторий летательного аппарата. Изменения параметров, соответствующие моменту окончания работы двигателя, обусловлены отклонением какого-либо определяющего фактора или группы факторов:  $\delta x_k$  – изменение координаты  $x_k$ ,  $\delta y_k$  – изменение координаты  $y_k$ ,  $\delta V_k$  – изменение скорости движения центра масс ЛА,  $\delta t_k$  – изменение времени работы двигателя и т.д.

Изменения параметров могут также определяться для точки, заданной какой-либо характеристикой движения (временем, скоростью, абсциссой, ординатой), одинаковой для основной и возмущённой траектории. Пусть точка  $b$  невозмущённой траектории и точка  $e$  траектории возмущённого движения соответствуют одному и тому же моменту времени  $t$ . Тогда возмущениями для траектории в точке  $b$  будут величины  $\delta x_t$ ,  $\delta y_t$ ,  $\delta V_t$  и т.д. При задании условия  $y = const$  точке  $a$  соответствует точка  $c$ , и для траектории в точке  $a$  получим возмущения  $\delta x_y$ ,  $\delta V_y$ ,  $\delta \theta_y$ . Если принять условие

$x = const$ , то точке  $a$  будет соответствовать точка  $d$ , и изменения элементов траектории в точке  $a$  равны  $\delta y_x$ ,  $\delta V_x$ ,  $\delta t_x$  и т.д.

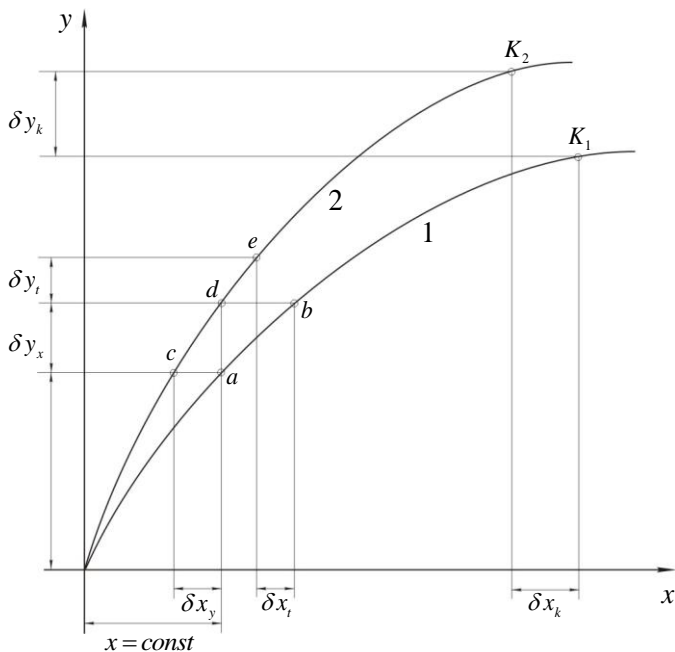


Рисунок 1.1 – Изменения параметров траектории ЛА  
(1 – невозмущённая траектория; 2 – возмущённая траектория)

Для артиллерийских снарядов и ракет класса «земля-земля» обычно определяют поправки к полной дальности и направлению полёта. При подготовке запуска поправки вносят в начальные условия движения, рассчитанные при нормальных условиях полёта.

В общем виде для элемента траектории или характеристики движения можно записать:

$$A = f(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (1.1)$$

где  $A$  – элемент траектории или характеристика движения;  $z_i$  – определяющий параметр.

Разложим функцию многих переменных (1.1) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
 f(z_1, z_2, \dots, z_n) &= f(z_{1*} + \delta z_1, z_{2*} + \delta z_2, \dots, z_{n*} + \delta z_n) = \\
 &= f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}) + \\
 &+ \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial z_{1*}} \delta z_1 + \frac{\partial}{\partial z_{2*}} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial z_{n*}} \delta z_n \right) f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}) + \quad (1.2) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial z_{1*}} \delta z_1 + \frac{\partial}{\partial z_{2*}} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial z_{n*}} \delta z_n \right)^2 f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}) + \dots = \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{T^k f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*})}{k!} + R_m,
 \end{aligned}$$

где  $z_{i*}$  – номинальные значения определяющих параметров,  $\delta z_i$  – отклонения параметров от номинальных значений,  $T$  – дифференциальный оператор,  $R_m$  – остаточный член ряда порядка  $(m+1)$ . Знак «\*» показывает, что соответствующая величина относится к номинальному движению, рассчитанному на нелинейной модели.

Следует отметить, что операторы  $\frac{\partial}{\partial z_{i*}}$  в (1.2) действуют только на функцию  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , но не на отклонения  $\delta z_i$ .

Отклонение функции  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , вызванное отклонениями параметров от номинальных значений  $\delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_n$ , будет равно:

$$\begin{aligned}
 \delta f(z_1, z_2, \dots, z_n) &= f(z_{1*} + \delta z_1, z_{2*} + \delta z_2, \dots, z_{n*} + \delta z_n) - \\
 &- f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}), \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

или, с учётом (1.2):

$$\begin{aligned}
\delta f(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \\
&= \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial z_{1*}} \delta z_1 + \frac{\partial}{\partial z_{2*}} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial z_{n*}} \delta z_n \right) f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}) + \\
&+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial z_{1*}} \delta z_1 + \frac{\partial}{\partial z_{2*}} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial z_{n*}} \delta z_n \right)^2 f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}) + \dots = \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{T^k f(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*})}{k!} + R_m.
\end{aligned}$$

Число членов разложения, сохраняемые в расчётах, зависит от требуемой точности определения отклонения. Чаще всего при решении практических задач в теории поправок удерживают линейные члены разложения:

$$\delta f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_* \delta z_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z_2} \right)_* \delta z_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_* \delta z_n. \quad (1.4)$$

Полученная формула соответствует формуле полного дифференциала функциональной зависимости (1.1). Таким образом, в предположении, что параметры, объединённые функциональной зависимостью (1.1), не зависят друг от друга, т.е. удовлетворяют принципу суперпозиции, и если в формуле полного дифференциала бесконечно малые приращения заменить конечно малыми, то изменение элемента траектории равно:

$$\delta A = \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n. \quad (1.5)$$

Здесь и далее знак «\*» у частных производных опущен, но необходимо не забывать, что они определяются для номинального движения.

В последней формуле, называемой *основной формулой теории поправок*, не учитываются члены разложения более высоких порядков, чем первый. Ошибка в расчётах, зависящая от пренебрежения остаточными членами разложения, определяются специаль-

ными исследованиями. В некоторых случаях, приходится учитывать поправки не только линейного, но и нелинейного характера.

*Поправочные формулы* типа (1.5) называются дифференциальными, а определяемые по ним значения  $\delta A$  – изменениями элементов траектории, вычисленными по методу дифференциалов.

Баллистические производные  $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial A}{\partial z_i}$  в теории поправок называются *поправочными коэффициентами* для элемента  $A$  траектории на отклонение параметра  $z_i$ . Поправочный коэффициент численно равен изменению рассматриваемого элемента траектории при увеличении соответствующего определяющего параметра на принятую единицу его измерения. Например, можно использовать поправочные коэффициенты, характеризующие изменения дальности при отклонениях баллистического коэффициента  $\partial x / \partial \sigma$ , начальной скорости  $\partial x / \partial V_0$ , начального угла наклона траектории  $\partial x / \partial \theta_0$  и т.п.

Рассмотрим пример получения поправочных коэффициентов для полной горизонтальной дальности полёта ракеты в плоскопараллельном гравитационном поле и условиях безвоздушного пространства. Здесь полная дальность определяется зависимостью:

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = f(V_0, \theta_0). \quad (1.6)$$

Получим поправочную формулу с учётом членов разложения первого и второго порядка. Поскольку в последней формуле только два аргумента  $V_0$  и  $\theta_0$ , в общих обозначениях будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta x = & \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} \delta z_2 \right) f(z_1, z_2) + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} (\delta z_1)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \delta z_1 \delta z_2 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} (\delta z_2)^2 \right) f(z_1, z_2). \end{aligned}$$

В обозначениях формулы (1.6), определяющей полную дальность полёта в параболической теории, получим:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial x}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial V_0^2} (\delta V_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial V_0 \partial \theta_0} \delta V_0 \delta \theta_0 + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_0^2} (\delta \theta_0)^2 \right).$$

Подставляя значения частных производных, будем иметь:

$$\delta x = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} \delta V_0 + \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g} \delta \theta_0 + \frac{\sin 2\theta_0}{g} (\delta V_0)^2 + \frac{4V_0 \cos 2\theta_0}{g} \delta V_0 \delta \theta_0 - \frac{2V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} (\delta \theta_0)^2.$$

Последние три слагаемых являются величинами более высокого порядка малости, чем два первых, определяемых линейными членами разложения.

В большинстве случаев используют только линейные члены. В этом случае поправочные коэффициенты равны:

$$\frac{\partial x}{\partial V_0} = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g}, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_0} = \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g}. \quad (1.7)$$

Имея величину поправочного коэффициента, легко найти изменение элемента траектории:

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial z_i} \delta z_i.$$

Если предположить, что изменяется только начальная скорость, то:

$$\delta x_v = \frac{\partial x}{\partial V_0} \delta V_0.$$

Используя формулу полной дальности (1.6) и первую формулу (1.7), получим:

$$\frac{\delta x_v}{x} = \frac{2\delta V_0}{V_0},$$

т.е. при допущениях, соответствующих параболической теории, малое относительное отклонение начальной скорости вызывает удвоенное относительное изменение дальности. Поступая подобным образом, можно получить поправочные коэффициенты и для других элементов траектории.

Более точное определение изменений параметров траекторий летательных аппаратов и поправочных коэффициентов значительно сложнее, чем в показанном простом примере, и проводится по результатам математического моделирования с использованием дифференциальных уравнений движения.

#### **1.4. Уравнения движения ЛА в траекторной системе координат**

Метод математического моделирования с использованием электронно-вычислительных машин является одним из самых эффективных способов исследования, применяемых в динамике полёта. При этом для моделирования пространственного движения летательного аппарата и исследования особенностей его динамики используются различные математические модели как самого ЛА, так и форм его движения.

В зависимости от цели решаемой задачи детализация описания может быть различной. В каждом конкретном случае осуществляется выбор:

- механической модели ЛА (жёсткое тело или упругое, наличие подвижных масс жидкого топлива и т.д.);
- систем координат и параметров состояния ЛА (положения в пространстве, угловой ориентации и т.д.);
- математического описания аэродинамических и гравитационных сил и моментов, возникающих в процессе полёта;

- описания силового и моментного воздействия двигателей, их зависимость от режима полёта, и взаимовлияние с аэродинамическим обтеканием ЛА;
- описания элементов автоматических систем управления и законов их функционирования.

При рассмотрении отдельных форм движения могут использоваться упрощённые подсистемы уравнений, которые наиболее эффективны для выявления особенностей динамики полёта. Так, например, приближённо рассматриваются раздельно продольное и боковое движение ЛА, движение центра масс и движение относительно центра масс. Формы движения могут быть разделены на длиннопериодическое (траекторное) и короткопериодическое (угловое) движение и т.д. В каждом таком случае выделяются приближённые системы уравнений различной размерности.

На начальном этапе исследования движения ЛА можно рассматривать как управляемую материальную точку с массой, равной массе аппарата, которая совершает движение под действием сил, приложенных ко всему ЛА. Это позволяет рассчитывать траектории, проводить оптимизацию параметров траекторного управления, изучать различные режимы полёта. К примеру, при проектировании самолёта рассматриваются такие режимы как горизонтальный полёт, набор высоты, снижение, взлёт, посадка, манёвры и т.п. На этом этапе определяются лётно-технические характеристики самолёта: диапазоны высот и скоростей, в которых возможен безопасный полёт с учётом ограничения допустимых режимов полёта, дальность и продолжительность полёта, манёвренные характеристики, взлётно-посадочные характеристики.

Будем полагать, что летательный аппарат движется в атмосфере под действием тяги двигателей  $\bar{P}$ , аэродинамической силы  $\bar{R}_a$  и силы тяжести  $\bar{G}$ . Уравнение движения центра масс ЛА в



векторном виде относительно инерциальной системы координат можно записать следующим образом:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{P} + \bar{G} + \bar{R}_a,$$

где  $m$  – масса аппарата,  $\bar{V}$  – вектор скорости ЛА.

Положение и движение ЛА в полёте определяют относительно поверхности Земли. Поэтому при исследовании траекторий движения часто используют неинерциальные системы отсчёта, связанные с поверхностью Земли и совершающие вместе с ней суточное вращение вокруг своей оси.

Положение центра масс летательного аппарата относительно Земли принято определять в *нормальной земной* системе координат (СК). Начало нормальной земной СК  $O X_g Y_g Z_g$  располагается на поверхности Земли в произвольно обусловленной точке, например, в точке старта (рисунок 1.2). Ось  $O X_g$  является касательной к поверхности Земли в этой точке, проведённой в произвольном направлении в зависимости от решаемой задачи (например, по касательной к меридиану или параллели). Ось  $O Y_g$  перпендикулярна поверхности Земли и направлена по местной вертикали вверх. Ось  $O Z_g$  перпендикулярна вертикальной плоскости  $O X_g Y_g$  и образует правую ортогональную СК, т. е. направлена вправо от избранного положительного направления  $O X_g$ . Ось  $O Z_g$ , как и ось  $O X_g$ , лежит в плоскости местного горизонта.

Если начало координат нормальной земной системы поместить в центре масс ЛА, то получим *нормальную* систему координат. Оси нормальной СК также обозначаются индексом «g», а их направление совпадает с направлением осей нормальной земной СК в момент старта.

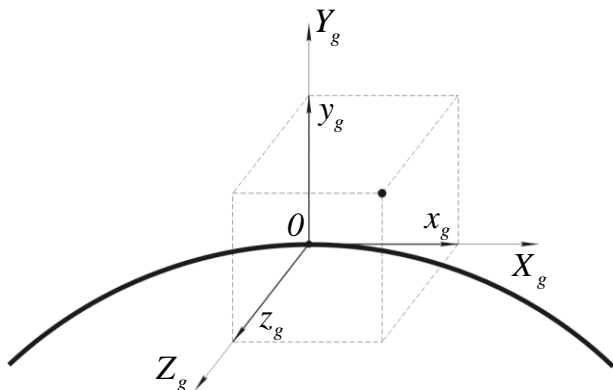


Рисунок 1.2 – Положение тела в нормальной земной системе координат

Поступательное движение летательного аппарата характеризуется его скоростью. Под скоростью ЛА понимается скорость его центра масс относительно воздуха. Эта скорость называется *воздушной* скоростью и обозначается  $\bar{V}$ . Воздушная скорость определяет аэродинамические силы, действующие на ЛА.

Помимо воздушной скорости, есть понятие *земной* скорости  $\bar{V}_k$  – скорости центра масс аппарата относительно Земли (земной системы координат). Проекция земной скорости  $\bar{V}_k$  на горизонтальную плоскость  $OX_gZ_g$  нормальной земной системы координат определяет путевую скорость, которая используется при расчёте дальности полёта. Если ветер отсутствует, то воздушная и земная скорости равны  $\bar{V} = \bar{V}_k$ .

Под направлением движения летательного аппарата (считаем, что ветер отсутствует) понимается ориентация вектора скорости  $\bar{V}$  центра масс ЛА относительно осей земной СК. При исследовании движения ЛА как материальной точки наибольшее применение нашли две СК, оси  $OX$  которых совпадают с вектором скорости аппарата: *скоростная* и *траекторная*. Таким образом, задать

направление движения ЛА (другими словами, ориентировать вектор скорости) можно путём ориентации осей траекторной или скоростной СК.

Начало *скоростной* СК  $OX_a Y_a Z_a$  совпадает с центром масс ЛА, ось  $OX_a$  направлена по вектору скорости  $\bar{V}$  и называется скоростной осью. Ось  $OY_a$  перпендикулярна вектору скорости и лежит в плоскости симметрии ЛА, направлена вверх и называется осью подъёмной силы. Ось  $OZ_a$  образует правую тройку; она также перпендикулярна вектору скорости, но направлена вправо от неё и называется боковой осью.

*Траекторная* СК  $OX_k Y_k Z_k$  – система координат, начало отсчёта которой находится в центре масс ЛА, ось  $OX_k$  совпадает с вектором скорости  $\bar{V}_k$ . Ось  $OY_k$  перпендикулярна  $\bar{V}_k$ , но лежит в вертикальной плоскости, содержащей вектор скорости, и направлена вверх. Ось  $OZ_k$  перпендикулярна вектору скорости, лежит в горизонтальной плоскости и дополняет систему до правой.

Взаимная ориентация нормальной, скоростной и траекторной систем координат представлена на рисунке 1.3. Траекторная и скоростная СК связаны скоростным углом крена  $\gamma_a$ . Траекторная и нормальная СК связаны между собой двумя углами – углом наклона траектории  $\theta$  и углом пути  $\Psi$ .

Рассмотрим движение ЛА в траекторной системе координат. Движение центра масс аппарата в неинерциальной траекторной СК описывается векторным уравнением:

$$m \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{P} + \bar{G} + \bar{R}_a + \bar{F}^e + \bar{F}^k, \quad (1.8)$$

где  $\bar{F}^e$  и  $\bar{F}^k$  – переносная и кориолисова сила инерции, связанные с суточным вращением Земли, определяемые известными из теоретической механики выражениями:

$$\bar{F}^e = -m\bar{W}^e = -m\left[\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})\right],$$

$$\bar{F}^k = -m\bar{W}^k = -2m(\bar{\Omega} \times \bar{V}_k).$$

Здесь  $\bar{W}^e$  и  $\bar{W}^k$  – переносное и кориолисово ускорение ЛА,  $\bar{\Omega}$  – вектор угловой скорости суточного вращения Земли,  $\bar{r}$  – радиус-вектор ЛА.

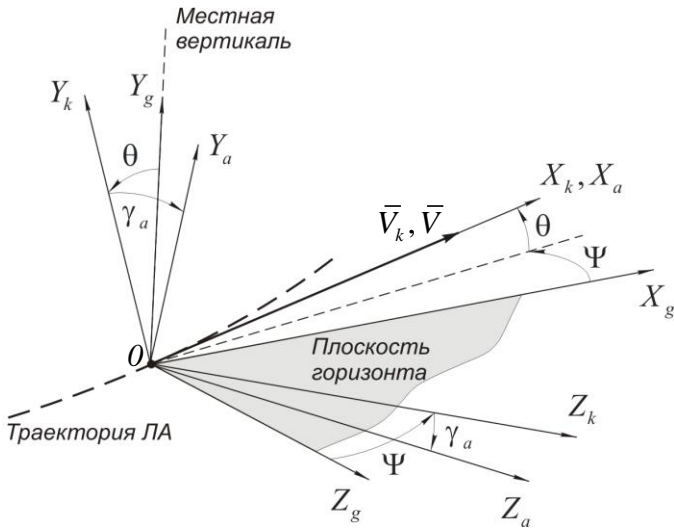


Рисунок 1.3 – Взаимная ориентация нормальной, скоростной и траекторной систем координат

Переносное ускорение, достигающее максимальной величины на экваторе, пропорционально величине радиус-вектора ЛА и на высоте 1000 км составляет ~ 0,5 % от гравитационного ускорения. Кориолисово ускорение пропорционально скорости полёта и достигает максимального значения, когда вектор скорости направлен по нормали к оси вращения Земли. При скорости полёта 2000 м/с оно может составить величину ~ 0,3 % от гравитационного уско-

рения на уровне моря и  $\sim 0,4\%$  от гравитационного ускорения на высоте 1000 км. При расчёте траекторий ЛА, движущихся на высотах до 1000 км со скоростями до 2000 м/с, силы инерции, связанные с вращением Земли, обычно не учитывают.

В практических исследованиях векторное уравнение движения заменяют эквивалентной системой дифференциальных уравнений, являющихся проекциями векторного уравнения на оси выбранной системы координат. Наиболее простую и удобную форму система динамических уравнений движения центра масс ЛА примет, если векторное уравнение (1.8) спроектировать на оси траекторной системы координат.

Будем рассматривать движение ЛА в вертикальной плоскости при отсутствии составляющих сил по оси  $OZ_k$ . Если не учитывать суточное вращение Земли, то для проекций исходного уравнения (1.8) на оси  $OX_k$  и  $OY_k$  траекторной СК можно записать:

$$\begin{aligned} ma_x &= P_x - X_a - mg \sin \theta, \\ ma_y &= P_y + Y_a - mg \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $P_x$  и  $P_y$  – проекции силы тяги двигателей,  $X_a$  – проекция аэродинамической силы  $\bar{R}_a$  на ось  $OX_k$ , называемая силой лобового сопротивления,  $Y_a$  – проекция  $\bar{R}_a$  на ось  $OY_k$  – аэродинамическая подъёмная сила,  $g$  – гравитационное ускорение.

Проекции ускорения ЛА на ось  $OX_k$ , касательную к траектории, и на ось  $OY_k$ , нормальную к траектории, определяются как:

$$a_x = a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_y = a_n = \frac{V^2}{R_{кр}} = \omega V, \quad (1.10)$$

где  $R_{кр}$  – радиус кривизны траектории,  $\omega$  – угловая скорость касательной к траектории, характеризующая поворот вектора скорости относительно неподвижной в инерциальном пространстве

плоскости. Угловая скорость  $\omega$  обусловлена как изменением угла наклона траектории  $\theta$  (угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью), так и поворотом горизонтальной плоскости вследствие кривизны поверхности Земли (рисунок 1.4).

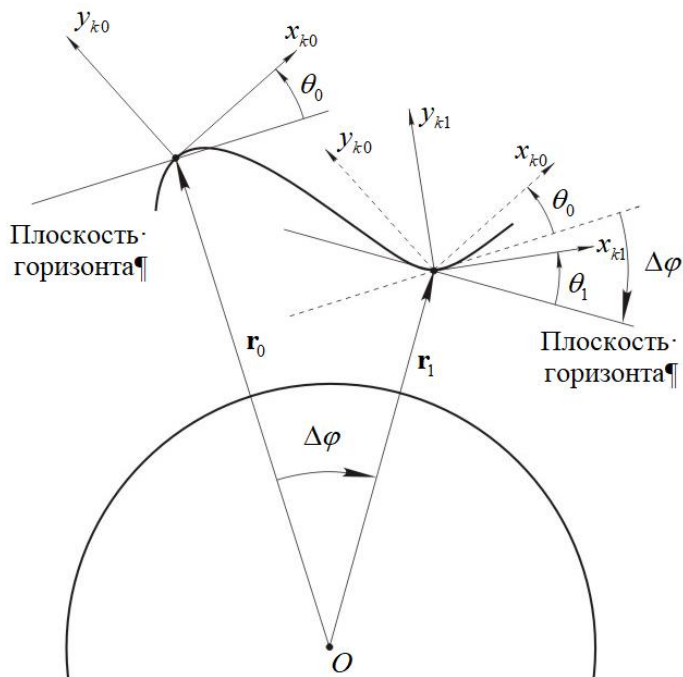


Рисунок 1.4 – К определению угловой скорости касательной к траектории

Угол поворота горизонтальной плоскости  $\Delta\varphi$  равен углу поворота радиус-вектора ЛА. Направление поворота  $\Delta\varphi$  противоположно положительному направлению отсчёта угла наклона траектории, а скорость поворота равна:

$$\omega_r = -\frac{V \cos \theta}{r}.$$

Таким образом, угловая скорость касательной к траектории определяется соотношением:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V \cos \theta}{r}. \quad (1.11)$$

Подставляя соотношения (1.10) в систему (1.9) с учётом (1.11), получаем:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P_x - X_a - mg \sin \theta, \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P_y + Y_a - mg \cos \theta + \frac{mV^2 \cos \theta}{r}, \end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P_x - X_a}{m} - g \sin \theta, \\ V \frac{d\theta}{dt} &= \frac{P_y + Y_a}{m} + \left( \frac{V^2}{r} - g \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Проекции вектора силы тяги двигателей жёстко закреплённых и ориентированных вдоль продольной оси аппарата, вычисляются по формулам:

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол атаки (в случае плоского движения угол между продольной осью и вектором скорости ЛА).

Аэродинамические проекции равны:

$$\begin{aligned} X_a &= c_{xa} q S = c_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S, \\ Y_a &= c_{ya} q S = c_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S. \end{aligned}$$

Здесь  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$  – соответственно коэффициенты силы лобового сопротивления и аэродинамической подъёмной силы,  $q$  – скоростной напор,  $S$  – характерная площадь ЛА,  $\rho$  – плотность атмосферы.

Введём следующие обозначения:

$$\sigma_x = \frac{c_{xa}S}{2m}, \quad \sigma_y = \frac{c_{ya}S}{2m},$$

где  $\sigma_x$  – баллистический коэффициент ЛА, характеризующий его тормозящие свойства,  $\sigma_y$  – коэффициент планирования ЛА, характеризующий несущую способность аэродинамической формы аппарата.

Тогда систему (1.12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P}{m} \cos \alpha - \sigma_x \rho V^2 - g \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{P}{mV} \sin \alpha + \sigma_y \rho V + \left( \frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для полного описания движения ЛА необходимо добавить кинематические уравнения, описывающие изменение координат в нормальной земной СК:

$$\begin{aligned} \frac{dx_g}{dt} &= V \cos \theta, \\ \frac{dy_g}{dt} &= V \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Соотношения (1.13) и (1.14) образуют систему дифференциальных уравнений движения летательного аппарата в вертикальной плоскости.

### 1.5. Качественное влияние определяющих траекторию параметров и знаки поправочных коэффициентов

Одной из основных характеристик траектории полёта ракеты является полётная дальность. Знак поправочного коэффициента для полной полётной дальности устанавливается в зависимости от воздействия увеличения определяющего параметра на дальность. Если увеличение параметра приводит к увеличению дальности, то



поправочный коэффициент положительный; если дальность уменьшается с ростом определяющего параметра, то – отрицательный. Во многих случаях знак поправочного коэффициента можно установить до выполнения расчётов исходя из качественного влияния параметра на дальность.

Проведём качественный анализ по определению знаков основных поправочных коэффициентов летательного аппарата, движущегося по баллистической траектории.

1. *Начальная скорость* неуправляемого ЛА постоянной массы и скорость головной части ракеты в начале пассивного участка траектории  $V_0$  являются одними из основных параметров, определяющих дальность полёта. С увеличением начальной скорости дальность растёт, поэтому поправочный коэффициент имеет положительное значение (в параболической теории  $\frac{\partial x}{\partial V_0} = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g}$ ).

Таким образом, при прочих равных условиях увеличение начальной скорости приводит к увеличению дальности, следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial V_0} > 0.$$

2. *Аэродинамические свойства* ЛА влияют на дальность полёта через характерную площадь  $S$  и коэффициент лобового сопротивления  $c_{xa}(M)$ , зависящий от числа Маха  $M$ . Увеличение характерной площади и среднего значения коэффициента лобового сопротивления  $c_{xa\text{ ср}}(M)$  за время движения по траектории приведёт к увеличению баллистического коэффициента ЛА и уменьшению дальности, то есть  $\frac{\partial x}{\partial S} < 0$ ,  $\frac{\partial x}{\partial c_{xa\text{ ср}}} < 0$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \sigma_x} < 0$ .

3. *Угол наклона траектории*  $\theta_0$  в начале пассивного участка полёта ракеты также существенно влияет на дальность. На рисунке 1.5

показана зависимость полной дальности полёта  $x$  и поправочного коэффициента  $\partial x / \partial \theta_0$  от начального угла  $\theta_0$  для полёта ракеты в параболической теории ( $\frac{\partial x}{\partial \theta_0} = \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g}$ ).

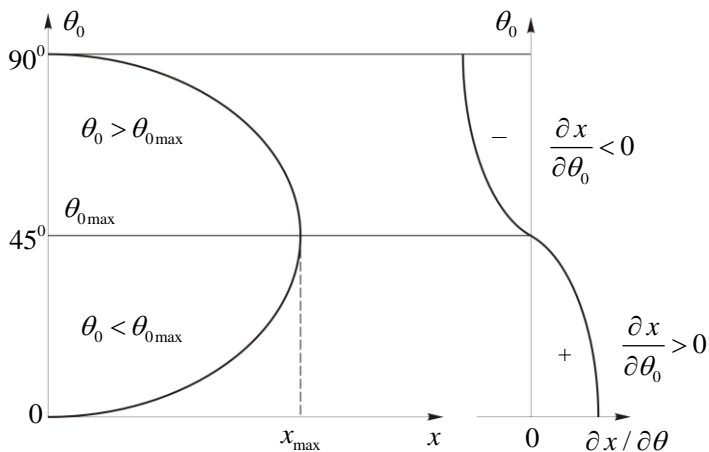


Рисунок 1.5 – Зависимость полной дальности полёта  $x$  и поправочного коэффициента  $\partial x / \partial \theta_0$  от начального угла  $\theta_0$

Знак поправочного коэффициента изменяется в зависимости от соотношения  $\theta_0$  и угла наибольшей дальности  $\theta_{0\max}$ . Если  $\theta_0$  меньше угла наибольшей дальности, то поправочный коэффициент  $\partial x / \partial \theta_0 > 0$ , а если  $\theta_0$  больше угла  $\theta_{0\max}$ , то  $\partial x / \partial \theta_0 < 0$ . При фиксированной начальной скорости  $V_0$  поправочный коэффициент  $\partial x / \partial \theta_0 = 0$  соответствует максимальной дальности и начальному углу  $\theta_0$ , при котором эта дальность получена. При  $\theta_0 \approx \theta_{0\max}$  малые изменения угла  $\theta_0$  практически не влияют на дальность полёта.

4. Изменение массы ЛА влияет различным образом на дальность полёта.

Для неуправляемого ЛА из первого уравнения (1.12) имеем:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{X_a}{m} - g \sin \theta.$$

Видно, что с увеличением массы уменьшается ускорение ЛА от силы сопротивления атмосферы  $X_a / m$ , скорость аппарата уменьшается медленнее и дальность полёта увеличивается. Следовательно, при прочих равных условиях:  $\partial x / \partial m > 0$ .

Движение ракет на активном участке траектории при нулевом угле атаки описывается уравнением:  $\frac{dV}{dt} = \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta$ . При  $P > X_a$  определяющим знак поправочного коэффициента фактором является сила тяги. С увеличением массы ускорение уменьшается, что приведёт к меньшей конечной скорости, а, следовательно, и к меньшей дальности. Таким образом, поправочный коэффициент  $\partial x / \partial m < 0$ . В противном случае, при  $P < X_a$ :  $\partial x / \partial m > 0$ .

За самостоятельные параметры, определяющие дальность полёта, могут быть приняты плотность и температура воздуха, барометрическое давление и другие.

### **1.6. Определение изменений элементов траектории и поправочных коэффициентов интегрированием систем уравнений движения**

Метод применяется:

- при существенном изменении параметра, определяющего исследуемый элемент траектории;
- при необходимости определить изменение элемента траектории от отклонения параметра, не содержащегося в основной системе уравнений, составленной для невозмущённой траектории.

Далее приведены примеры использования метода.

*Пример 1.* В результате конструктивных изменений внешней формы ракеты-носителя или её управляющих органов изменились

зависимости аэродинамических коэффициентов. Обозначим функциональные зависимости для невозмущённой траектории:

$$c_{xa} (M, \alpha, Re), c_{ya} (M, \alpha, Re),$$

и для траектории ракеты-носителя изменённой формы:

$$c_{xai} (M, \alpha, Re), c_{yai} (M, \alpha, Re).$$

Здесь  $M$  – число Маха,  $\alpha$  – угол атаки,  $Re$  – число Рейнольдса.

Для определения влияния изменения формы ракеты-носителя на элементы траектории в конце активного участка воспользуемся стандартной системой уравнений, приняв, что тяга направлена по оси ракеты, и опустив управляющие силы. Для невозмущённой траектории система может быть решена при значениях аэродинамических сил, равных:

$$X_a = qSc_{xa} (M, \alpha, Re), \quad Y_a = qSc_{ya} (M, \alpha, Re).$$

Для ракеты, форма которой изменилась:

$$X_{ai} = qSc_{xai} (M, \alpha, Re), \quad Y_{ai} = qSc_{yai} (M, \alpha, Re),$$

и система уравнений движения будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P \cos \alpha - X_{ai}}{m} - g \sin \theta, \\ V \frac{d\theta}{dt} &= \frac{P \sin \alpha + Y_{ai}}{m} - g \cos \theta, \\ \frac{dx_g}{dt} &= V \cos \theta, \quad \frac{dy_g}{dt} = V \sin \theta, \\ m &= m(t), \quad \alpha = \mathcal{G}_{np}(t) - \theta, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{G}_{np}(t)$  – программа управления по углу тангажа.

Сравнение результатов решений для невозмущённой и возмущённой траекторий даст величины изменений элементов траектории в зависимости от изменения формы ракеты (аэродинамических характеристик).

*Пример 2.* При запуске неуправляемой ракеты изменился начальный угол наклона траектории  $\theta_0$ . В этом случае система уравнений движения решается необходимое число раз при изменённых значениях  $\theta_{0i}$ . Количество решений определяется границами изменения и характером изменения исследуемой величины в зависимости от начального угла наклона траектории.

Если, например, зависимость полётной дальности  $x = f(\theta_0)$  изменяется плавно и в пределах исследуемого участка от  $\theta_{0i}$  до  $\theta_{0i+1}$  эту зависимость можно принять линейной, то достаточно двух решений при граничных значениях  $\theta_0$ . Если третье решение, соответствующее примерно середине исследуемого интервала, даст заметное отклонение от прямой, то число решений необходимо увеличить.

Достоинством описанного метода является возможность учёта как прямого влияния отклонения параметра на элементы траектории, так и косвенного влияния отклонения параметра через изменения величин, от него зависящих. Кроме того, метод позволяет определять изменения каждой вычисляемой характеристики движения в любой заданной точке траектории.

#### *Определение поправочных коэффициентов.*

В общем случае, отыскание поправочных коэффициентов по результатам решения дифференциальных уравнений движения ЛА целесообразно тогда, когда зависимость исследуемой величины от определяющего параметра может быть принята линейной в пределах ожидаемого изменения этого параметра. При этом вначале система уравнений интегрируется при нормальных условиях, а затем вторично при близком изменённом значении параметра, влияние которого исследуется. Затем подсчитывается искомый поправочный коэффициент. Например, если исследуется влияние приращения начальной скорости  $\delta V_0$ , то поправочный коэффициент можно рассчитать по формуле:

$$\frac{\partial A}{\partial V_0} \approx \frac{\delta A}{\delta V_0} = \frac{A_{V_{01}} - A_{V_0}}{\delta V_0},$$

где  $A_{V_{01}}$  – значение исследуемого элемента траектории при начальной скорости  $V_{01} = V_0 + \delta V_0$ ,  $A_{V_0}$  – значение исследуемого элемента траектории при начальной скорости  $V_0$ .

Описанный метод требует проведения расчётов с высокой точностью (т.е. обеспечения большого количества верных значащих цифр), так как при малом  $\delta V_0$  возможны большие ошибки в определении разности  $A_{V_{01}} - A_{V_0}$  и, следовательно, поправочного коэффициента.

На рисунке 1.6 приведён пример зависимостей поправочного коэффициента дальности стрельбы по отклонению начальной скорости  $\partial x / \partial V_0$  от начальной скорости  $V_0$ . Видно, что величина поправочного коэффициента может существенно зависеть от определяющего параметра, поэтому использование дискретных значений поправочных коэффициентов допустимо лишь в узком пределе изменения определяющего параметра.

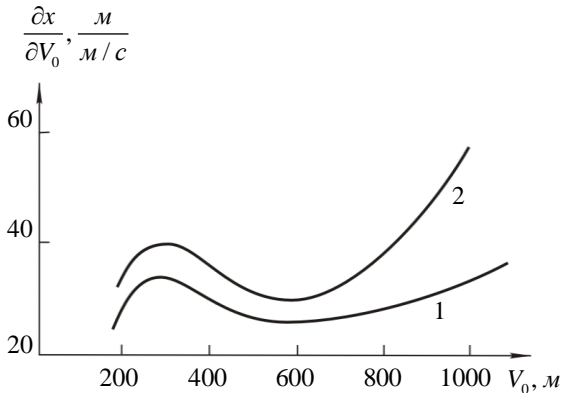


Рисунок 1.6 – Зависимости  $\partial x / \partial V_0$  от  $V_0$  для артиллерийской системы

(1 – при  $\theta_0 = 25^\circ$ , 2 – при  $\theta_0 = 55^\circ$ )

## 1.7. Определение поправочных коэффициентов интегрированием дифференциальных уравнений в отклонениях

В случае малых отклонений определяющих траекторию параметров поправочные коэффициенты могут быть найдены при решении дифференциальных уравнений движения в отклонениях. Для составления уравнений воспользуемся общим методом линеаризации дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс ЛА. Метод линеаризации состоит в том, что искомое отклонение элемента траектории от номинального значения находится посредством разложения соответствующих функций в правых частях уравнений движения в ряд Тейлора по степеням отклонений параметров функций с сохранением только линейных членов разложения.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений движения, определяющих изменение элементов траектории при невозмущённом движении как функцию  $n$  параметров:

$$\frac{dz_{i*}}{dt} = f_i(z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.15)$$

Тогда возмущённое движение, вызванное отклонениями параметров от номинальных значений, будет описываться уравнениями:

$$\frac{d(z_{i*} + \delta z_i)}{dt} = f_i(z_{1*} + \delta z_1, z_{2*} + \delta z_2, \dots, z_{n*} + \delta z_n). \quad (1.16)$$

Вычитая уравнения (1.15) из (1.16) с учётом (1.3) получаем:

$$\frac{d}{dt} \delta z_i = \delta f_i(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Таким образом, производные отклонений элементов траектории равны приращению соответствующих функций  $\delta f_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , вызванных отклонениями параметров от номи-

нальных значений. После разложения  $\delta f_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$  в ряд Тейлора и удержания линейных членов в соответствии с (1.4) получаем систему линейных уравнений в отклонениях:

$$\frac{d}{dt} \delta z_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_1} \right)_* \delta z_1 + \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_2} \right)_* \delta z_2 + \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_3} \right)_* \delta z_3 + \dots \quad (1.17)$$

Если номинальное движение известно, т.е. элементы траектории  $z_{1*}(t)$ ,  $z_{2*}(t)$ ,  $z_{3*}(t)$  и другие заданы, то также будут известны и частные производные вида  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial z_i} \right)_*$  как функции времени, стоящие в системе (1.17) при отклонениях параметров  $\delta z_i$ .

Исходная система дифференциальных уравнений движения ЛА выбирается в зависимости от конкретной задачи. В качестве примера получим дифференциальные уравнения в отклонениях для активного участка траектории неуправляемой ракеты при полёте с нулевым углом атаки. Уравнения движения летательного аппарата в вертикальной плоскости без учёта кривизны поверхности Земли запишется в виде (см. раздел 1.2):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta, & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g}{V} \cos \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta, & \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta. \end{aligned}$$

Обозначим правую часть первого уравнения через  $a_v$  и раскроем входящие в неё величины. Будем считать, что коэффициент лобового сопротивления зависит только от числа Маха  $M$  и не изменяется с высотой. Будем также полагать, что для данной расчётной точки траектории изменение тяги  $P$  не зависит от изменения высоты  $y$ . Тогда:



$$a_v = \frac{1}{m_0 - \dot{m}t} \left[ \dot{m}c - \frac{S\rho(y)V^2}{2} c_{xa}(\mathbf{M}) \right] - g \sin \theta,$$

где  $m_0$  – начальная масса ракеты,  $\dot{m}$  – секундный расход топлива,  $c$  – эффективная скорость истечения рабочего тела. Это равенство может быть переписано в виде функциональной зависимости:

$$a_v = f_1(V, \theta, y, c, \rho(y), c_{xa}(\mathbf{M}), m_0, \dot{m}).$$

Обозначая правую часть второго уравнения системы через  $a_\theta$ , запишем функциональную зависимость:

$$a_\theta = f_2(V, \theta).$$

Поступая подобным образом, для третьего и четвертого уравнений можем записать:

$$a_y = f_3(V, \theta) \text{ и } a_x = f_4(V, \theta).$$

Используя формулу линеаризации (1.17), получим систему дифференциальных уравнений в отклонениях:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta V) &= \frac{\partial a_v}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_v}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial a_v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial a_v}{\partial c} \delta c + \\ &+ \frac{\partial a_v}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial a_v}{\partial c_{xa}} \delta c_{xa} + \frac{\partial a_v}{\partial m_0} \delta m_0 + \frac{\partial a_v}{\partial \dot{m}} \delta \dot{m}, \\ \frac{d}{dt}(\delta \theta) &= \frac{\partial a_\theta}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \delta \theta, \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= \frac{\partial a_y}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_y}{\partial \theta} \delta \theta, \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= \frac{\partial a_x}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_x}{\partial \theta} \delta \theta. \end{aligned}$$

Нахождение баллистических производных  $\partial a_i / \partial j$  во многих случаях представляет, хотя и не сложную, но трудоёмкую задачу. Для принятой нами системы получим:

$$\begin{aligned}
a_{VV} &= \frac{\partial a_V}{\partial V} = -\frac{S\rho(y)}{2m} \left[ 2Vc_{xa}(M) + V^2 \frac{\partial c_{xa}(M)}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial V} \right] = \\
&= -\frac{S\rho(y)V}{m} \left[ c_{xa}(M) + \frac{M}{2} \frac{\partial c_{xa}(M)}{\partial M} \right], \\
a_{V\theta} &= \frac{\partial a_V}{\partial \theta} = -g \cos \theta, \quad a_{Vy} = \frac{\partial a_V}{\partial y} = -\frac{SV^2}{2m} c_{xa}(M) \frac{\partial \rho(y)}{\partial y}, \\
a_{Vc} &= \frac{\partial a_V}{\partial c} = \frac{\dot{m}}{m}, \quad a_{V\rho} = \frac{\partial a_V}{\partial \rho} = -\frac{X_a}{m} \frac{1}{\rho(y)}, \\
a_{Vc_{xa}} &= \frac{\partial a_V}{\partial c_{xa}} = -\frac{X_a}{m} \frac{1}{c_{xa}(M)}, \quad a_{Vm_0} = \frac{\partial a_V}{\partial m_0} = -\frac{P - X_a}{m^2}, \\
a_{V\dot{m}} &= \frac{\partial a_V}{\partial \dot{m}} = \left( \frac{P}{m} + \frac{\dot{m}t}{m} \frac{P - X_a}{m} \right) \frac{1}{\dot{m}}, \quad a_{\theta V} = \frac{\partial a_\theta}{\partial V} = \frac{g \cos \theta}{V^2}, \\
a_{\theta\theta} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} = \frac{g \sin \theta}{V}, \quad a_{yV} = \frac{\partial a_y}{\partial V} = \sin \theta, \\
a_{y\theta} &= \frac{\partial a_y}{\partial \theta} = V \cos \theta, \quad a_{xV} = \frac{\partial a_x}{\partial V} = \cos \theta, \\
a_{x\theta} &= \frac{\partial a_x}{\partial \theta} = -V \sin \theta.
\end{aligned}$$

Теперь систему дифференциальных уравнений в отклонениях запишем в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta V) &= a_{VV}\delta V + a_{V\theta}\delta\theta + a_{Vy}\delta y + a_{Vc}\delta c + \\
&+ a_{V\rho}\delta\rho + a_{c_{xa}}\delta c_{xa} + a_{Vm_0}\delta m_0 + a_{V\dot{m}}\delta\dot{m}, \\
\frac{d}{dt}(\delta\theta) &= a_{\theta V}\delta V + a_{\theta\theta}\delta\theta, \\
\frac{d}{dt}(\delta y) &= a_{yV}\delta V + a_{y\theta}\delta\theta, \\
\frac{d}{dt}(\delta x) &= a_{xV}\delta V + a_{x\theta}\delta\theta.
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  вычисляются по данным невозмущённой траектории, поэтому их значения зависят от выбранного невозмущённого движения, относительно которого рассматриваются отклонения. В общем случае  $a_{ij}$  являются функциями времени. *Если в качестве невозмущённого движения рассматривать неустановившийся полёт, то коэффициенты  $a_{ij}$  будут переменными, а в случае установившегося – постоянными.*

Интегрирование уравнений в отклонениях позволяет получить поправочные коэффициенты и изменения характеристик движения, представленных в левых частях уравнений, для любой фиксированной точки траектории. Без дополнительных упрощений система уравнений в общем случае решается только численным интегрированием. Однако полученная система является линейной, для которой существуют надёжные методы исследования. К ним относятся так называемый классический метод и метод, основанный на операционном исчислении. Уравнения в отклонениях используются при исследовании устойчивости и управляемости ЛА.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

### 2.1. Основные понятия

Движение ЛА в атмосфере происходит под действием аэродинамической силы, силы тяги двигателей и силы тяжести. Для обеспечения полёта и выполнения целевой задачи ЛА должен адекватно реагировать на управляющие воздействия – целенаправленные изменения аэродинамической силы и силы тяги, т.е. быть *управляемым*.

Небольшие не связанные с управлением заранее неизвестные отклонения (возмущения) аэродинамической силы и силы тяги от расчётных значений также изменяют движение аппарата. Для выполнения полёта ЛА должен противостоять этим возмущениям, обеспечивая *устойчивость* движения.

Устойчивость и управляемость являются важными свойствами летательного аппарата, определяющими возможность выполнения целевой задачи полёта.

Существует условное деление устойчивости движения ЛА на статическую и динамическую.

*Статическая устойчивость* ЛА характеризует равновесие сил и моментов в опорном установившемся движении, при котором кинематические параметры остаются постоянными.

Статически устойчивым по тому или иному параметру движения называют ЛА, у которого отклонение этого параметра от опорного значения сразу же после прекращения действия возмущений приводит к появлению силы (в поступательном движении) или момента (в угловом), направленных на уменьшение этого отклонения. Если силы и моменты направлены на увеличение начального отклонения, то ЛА статически неустойчив.

Статическая устойчивость является важным фактором при оценке *динамической устойчивости* ЛА, однако её не гарантирует, поскольку при определении динамической устойчивости оценивается не начальная тенденция к устранению возмущения, а конечное состояние – наличие асимптотической устойчивости или неустойчивости в смысле Ляпунова. При оценке динамической устойчивости важно не только конечное состояние, но и показатели процесса затухания отклонений от невозмущённого движения:

- время затухания отклонений параметров движения;
- характер возмущенного движения (колебательный, аperiodический);
- максимальные значения отклонений;
- период (частота) колебаний (если процесс колебательный) и другие.

Управляемостью называется свойство ЛА отвечать соответствующими линейными и угловыми перемещениями в пространстве на отклонение органов управления. Управление ЛА существенно упрощается, если опорное движение устойчиво.

Управляемость ЛА делится на статическую и динамическую.

*Статическая управляемость* связана с балансировкой (обеспечением равновесия) ЛА в установившихся режимах полёта. Основными количественными показателями статической управляемости являются производные отклонений органов управления и усилий, прикладываемых к ним, по параметрам движения, характеризующим реакцию ЛА на действия пилота и автоматики; максимальные значения отклонения органов управления и усилий на них; возможность балансировки на предельных режимах полёта и т.п.

При оценке *динамической управляемости* рассматривается характер изменения параметров движения ЛА на отклонение органов управления от их балансировочных значений для перехода от

одного установившегося движения к другому, для выполнения неустановившихся манёвров и для парирования возмущений.

При исследовании устойчивости и управляемости ЛА рассматривается как материальное тело, и его движение описывается уравнениями движения центра масс и вращения вокруг центра масс. Движение центра масс и вращение ЛА относительно центра масс связаны. Однако совместное изучение этих движений весьма затруднительно ввиду большой размерности системы уравнений, описывающих общее движение.

В реальном движении, как правило, выполняются следующие условия: во-первых, отклонение органов управления практически мгновенно приводит к изменению аэродинамических сил, действующих на ЛА; во-вторых, возникающие при этом управляющие силы существенно меньше основных аэродинамических сил.

Эти условия позволяют считать, что угловое движение ЛА, в отличие от движения его центра масс, можно изменить достаточно быстро и, следовательно, движение ЛА относительно центра масс и движение центра масс по траектории можно рассматривать раздельно.

## **2.2. Устойчивость движения по Ляпунову**

В отличие от линейных систем, ЛА как нелинейная динамическая система может быть устойчивой при одних режимах полёта и неустойчивой при других. Поэтому нельзя говорить об устойчивости или неустойчивости ЛА как нелинейной системы вообще, а можно – только об устойчивости или неустойчивости различных режимов движения. В связи с этим, давая определение устойчивости, это понятие относят не к системе, а к некоторому движению системы, называя его по терминологии А.М. Ляпунова невозмущённым.

В баллистике невозмущённым движением называют такое, которое совершала бы ракета или снаряд в стандартной атмосфере или в безвоздушном пространстве при действии на них заранее известных сил. На практике за невозмущённое движение принимают такое, которое желательно осуществить, т.е. опорное.

Движение ЛА принято называть устойчивым, если оно обладает свойством возвращаться после прекращения действия возмущающих факторов к невозмущённому движению. Такое представление соответствует *асимптотической устойчивости по Ляпунову*.

С практической точки зрения требование асимптотической устойчивости может быть слишком жёстким. К примеру, если рассматривается движение неуправляемой ракеты или снаряда, то обеспечить такого рода устойчивость невозможно. Какими бы ни были возмущения, уводящие центр масс ракеты от номинальной траектории, им не находится прямого противодействия. Можно считать, что движение ракеты устойчиво, если малые возмущения приводят к малым отклонениям от номинальной траектории. Если отклонения остаются малыми при  $t \rightarrow \infty$ , то такое представление об устойчивости формализуется с помощью определения *устойчивости по Ляпунову*.

Практически оправданным следует считать, что движение ракеты будет устойчивым, если отклонение реальной траектории от невозмущённой не будет превышать допустимого предела за время её полёта, а не на бесконечном интервале времени. Такой подход определяет понятие *технической устойчивости*.

Рассмотрим возмущённое движение произвольной динамической системы, которое может быть описано системой дифференциальных уравнений нормального вида:

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1)$$

где  $z_i$  – параметры, определяющие возмущённое движение (координаты, скорости или некоторые функции этих величин),  $f_i$  – аналитические функции величин  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Для исследования устойчивости удобно рассматривать не сами параметры возмущённого движения  $z_i$ , а их малые отклонения от параметров невозмущённого движения  $z_{i*}$ , т. е.  $\delta z_i = z_i - z_{i*}$ . Преобразуем систему уравнений (2.1) к переменным  $\delta z_i$ :

$$\frac{d}{dt} \delta z_i = \delta f_i(t, \delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_n), \quad (2.2)$$

где

$$\delta f_i(t, \delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_n) = f_i(t, z_{1*} + \delta z_1, z_{2*} + \delta z_2, \dots, z_{n*} + \delta z_n) - f_i(t, z_{1*}, \delta z_{2*}, \dots, \delta z_{n*}).$$

Каждому движению рассматриваемой динамической системы будет соответствовать частное решение уравнения (2.2). Невозмущённому движению соответствует решение  $\delta z_1 = \delta z_2 = \dots = \delta z_n = 0$ .

Определение устойчивости по Ляпунову в переменных  $\delta z_i$  формулируется следующим образом. Если для любого заданного сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  можно подобрать другое положительное число  $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ , такое, что для всех возмущённых движений, для которых в начальный момент времени  $t_0$  начальные отклонения удовлетворяют условиям:

$$|\delta z_i(t_0)| \leq \delta(\varepsilon), \quad (2.3)$$

а в любой момент времени  $t > t_0$  выполняются неравенства:

$$|\delta z_i(t)| < \varepsilon,$$

то невозмущённое движение устойчиво; в противном случае – неустойчиво.



Если невозмущённое движение устойчиво и при этом любое возмущённое движение при достаточно малых начальных отклонениях, удовлетворяющих неравенствам (2.3), стремится к невозмущённому движению, т. е., если:

$$|\delta z_i(t)| \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то невозмущённое движение называется асимптотически устойчивым.

Схематически определение устойчивости по Ляпунову показано на рисунке 2.1. Любое возмущённое решение  $z_i(t)$ , начинающееся при  $t = t_0$  в окрестности невозмущённого движения, определяемой величиной  $\delta$ , при  $t \rightarrow \infty$  не покидает окрестность невозмущённого решения  $z_{i*}(t)$ , определяемой величиной  $\varepsilon$ .

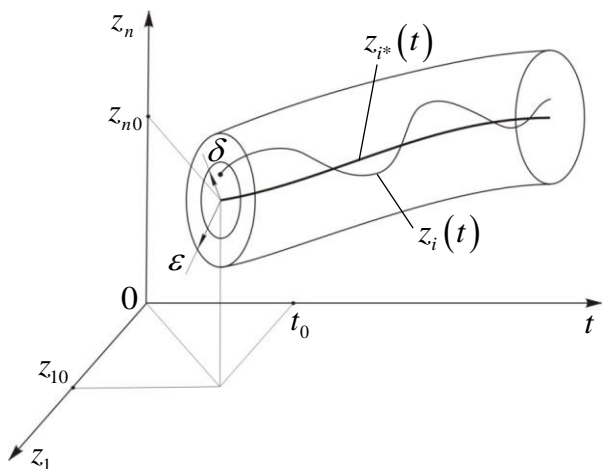


Рисунок 2.1 – К определению устойчивости движения по Ляпунову

В приведённом определении рассматривается устойчивость движения по отношению к возмущениям начальных условий, когда причина возмущений действует мгновенно. В более поздних

работах было дано определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях, которое является обобщением устойчивости по Ляпунову.

### **2.3. Математические методы исследования динамики возмущённого движения ЛА**

Уравнения движения ЛА представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, аналитические методы решения которых не разработаны. Их решение производится методами численного интегрирования с использованием вычислительной техники. Такими способами можно решить частную задачу, но нельзя получить решение задачи в общем виде. В то же время для оценки устойчивости и управляемости ЛА такое решение необходимо, например, при формировании контура управления и стабилизации, в процессе которого необходимо проследить, как влияют конструктивные или аэродинамические параметры на поведение аппарата. Поэтому наряду с исходными нелинейными уравнениями, которые назовём условно «точными», необходимы приближённые уравнения, позволяющие применять аналитические методы исследования.

Для получения приближённых решений, позволяющих решать многие задачи устойчивости и управляемости ЛА, широко используется линеаризация уравнений движения при помощи метода малых возмущений. Суть допущений, положенных в основу метода малых возмущений, заключается в том, что все параметры возмущённого движения предполагаются мало отличающимися от параметров номинального движения в одни и те же моменты времени. Если это условие удовлетворяется, то в уравнениях движения в первом приближении можно пренебречь членами, содержащими отклонения параметров движения в степенях выше первой как ма-

лыми высшего порядка. При этом уравнения движения становятся линейными дифференциальными уравнениями относительно отклонений, методы решения которых сравнительно просты.

Методика линеаризации уравнений возмущённого движения рассмотрена в разделе 1.5 при выводе уравнений движения ЛА в отклонениях.

Если в качестве невозмущённого движения рассматривать установившейся полёт, то коэффициенты системы линеаризованных уравнений будут постоянными, а систему называют стационарной в первом приближении.

В случае неустановившегося опорного движения системы коэффициенты линеаризованных дифференциальных уравнений будут переменными. В этом случае для получения аналитического решения задачи в инженерной практике иногда пользуются приближенным методом «замороженных коэффициентов». Сущность этого метода состоит в том, что отрезок времени, в течение которого происходит исследуемое движение, разбивается на отдельные интервалы. На этих интервалах коэффициенты уравнений принимаются постоянными и равными их значениям в начале интервала. Тогда математически задача будет описываться совокупностью систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Число таких систем равно числу интервалов времени. Однако о допустимости этого метода с достаточной для практики достоверностью можно судить только после анализа конкретных характеристик ЛА и систем стабилизации на основании численного интегрирования уравнений с переменными коэффициентами с помощью вычислительной техники.

Таким образом, при исследовании возмущённого движения ЛА рассматриваются системы однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с постоянными коэффициентами.

Система однородных ЛДУ, правые части которых равны нулю, описывают собственное возмущённое движение ЛА. Такое движение можно получить, если находящемуся в равновесии ЛА мгновенно сообщить некоторые начальные возмущения, а затем предоставить самому себе.

Если в полёте аппарат будет подвергаться постоянно действующим возмущениям, то его возмущённое движение будет описываться системой неоднородных уравнений, правые части которых представляют собой некоторые известные функции времени. Такими функциями могут быть внешние силы, вызванные управляющими воздействиями или какими-либо возмущениями, например ветровыми.

Известно, что общее решение системы неоднородных ЛДУ состоит из общего решения соответствующей системы однородных уравнений и частного решения полной (неоднородной) системы. Общему решению однородной системы соответствует собственное возмущённое движение ЛА, а частному – вынужденное. Таким образом, система неоднородных ЛДУ описывает движение, которое можно представить как сумму собственного и вынужденного движений.

При исследовании собственного возмущённого движения ЛА выясняется *устойчивость* опорного движения. Анализ вынужденного движения позволяет определить реакцию ЛА на управляющие воздействия и сделать оценку его *управляемости*.

Для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеются методы решения, которые приводятся в курсах высшей математики. К ним относятся так называемый «классический метод» и метод, основанный на операционном исчислении.

**2.3.1. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами классическим методом**

Рассмотрим однородную систему из четырёх ЛДУ:

$$\frac{d}{dt} \delta z_i - a_{i1} \delta z_1 - a_{i2} \delta z_2 - a_{i3} \delta z_3 - a_{i4} \delta z_4 = 0 \quad (i=1..4). \quad (2.4)$$

Как известно, общее решение есть линейная комбинация частных решений. Ищем частные решения в виде:

$$\delta z_i = A_i \cdot e^{\lambda t}. \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (2.4) и сократив на множитель  $e^{\lambda t}$ , получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_i$ :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 + a_{14}A_4 &= 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 + a_{23}A_3 + a_{24}A_4 &= 0 \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + (a_{33} - \lambda)A_3 + a_{34}A_4 &= 0 \\ a_{41}A_1 + a_{42}A_2 + a_{43}A_3 + (a_{44} - \lambda)A_4 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Для получения нетривиальных решений определитель системы уравнений (2.6) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda) + a_{23} + a_{24} \\ a_{31} + a_{32} + (a_{33} - \lambda) + a_{34} \\ a_{41} + a_{42} + a_{43} + (a_{44} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Раскрывая его, получим характеристическое уравнение системы (2.4):

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (2.8)$$

где  $a_0, a_2, a_3, a_4$  – коэффициенты характеристического уравнения, которые выражаются через известные постоянные коэффициенты уравнений (2.4).

Корни характеристического уравнения могут быть действительными или мнимыми.

Пусть корни действительные. Тогда общее решение системы примет вид:

$$\begin{aligned}
 \delta z_1 &= C_1 A_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 A_{12} e^{\lambda_2 t} + C_3 A_{13} e^{\lambda_3 t} + C_4 A_{14} e^{\lambda_4 t}, \\
 \delta z_2 &= C_1 A_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 A_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 A_{23} e^{\lambda_3 t} + C_4 A_{24} e^{\lambda_4 t}, \\
 \delta z_3 &= C_1 A_{31} e^{\lambda_1 t} + C_2 A_{32} e^{\lambda_2 t} + C_3 A_{33} e^{\lambda_3 t} + C_4 A_{34} e^{\lambda_4 t}, \\
 \delta z_4 &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные, определяемые из начальных условий.

Из общего решения (2.9) видно, что если все  $\lambda_k$  действительные, то отклонения  $\delta z_i$  изменяются во времени по аperiodическому закону и будут возрастать или убывать в зависимости от знаков корней характеристического уравнения  $\lambda_k$ . Если все  $\lambda_k$  будут отрицательными, то при  $t \rightarrow \infty$  все  $\delta z_i \rightarrow 0$ , и, следовательно, невозмущённое движение будет асимптотически устойчивым. Если среди корней найдётся хотя бы один положительный, то при  $t \rightarrow \infty$  все  $\delta z_i$  будут неограниченно возрастать, и, следовательно, невозмущённое движение будет неустойчивым.

Если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексно сопряжённых, то соответствующее им частное движение будет колебательным. При этом амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать, если вещественная часть комплексного числа положительная, и затухать, если вещественная часть комплексного числа отрицательная.

Обобщая, можно сделать вывод, что для устойчивости невозмущённого установившегося движения необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части.

Этот вывод получен на основании анализа линейных дифференциальных уравнений (уравнений первого приближения). Допустимость суждения об устойчивости и неустойчивости невозмущённого движения по уравнениям первого приближения была обоснована А. М. Ляпуновым. Приведём без доказательства теоремы Ляпунова.

*Первая теорема.* Если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения отрицательны, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости в дифференциальных уравнениях возмущённого движения.

*Вторая теорема.* Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущённое движение неустойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости в дифференциальных уравнениях возмущённого движения.

Возможны случаи, когда среди корней характеристического уравнения имеются такие, вещественная часть которых равна нулю, а остальные корни имеют отрицательную вещественную часть. Во всех этих критических случаях устойчивость (неустойчивость) невозмущённого движения определяется членами выше первого порядка малости. При этом задача будет тем сложнее, чем больше число критических случаев. Ряд задач был решён Ляпуновым и другими учёными.

Непосредственное исследование устойчивости невозмущённого движения по корням характеристического уравнения является простым лишь для уравнений первого и второго порядка. Для характеристических уравнений третьего и четвертого порядков получаются сложные и часто непригодные для практического использования формулы определения корней. Для уравнений более высоких порядков задача определения корней в виде аналитических выражений неразрешима; корни могут быть определены лишь численно.

Однако для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости невозмущённого движения можно не определять корни характеристического уравнения, а надо лишь определить знак вещественной части всех корней. Поэтому можно не решать характеристическое уравнение, а только определить знак вещественной части всех его корней.

Косвенные признаки, по которым можно судить о знаке вещественной части корней характеристического уравнения линейных систем с постоянными коэффициентами, минуя вычисления самих корней, называются *критериями устойчивости*. По критериям устойчивости можно судить об устойчивости линейной системы, определять границы устойчивости и выбирать параметры устойчивой системы. Критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные.

Алгебраические критерии позволяют судить об устойчивости систем по коэффициентам характеристического уравнения. Имеются различные формы критериев. Наибольшее применение получил критерий Гурвица.

Пусть характеристическое уравнение  $n$ -й степени имеет вид:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (2.10)$$

в котором все коэффициенты  $a_k$  – вещественные числа и  $a_n > 0$ .

Построим из коэффициентов  $a_k$  матрицу Гурвица из  $n$  строк и  $n$  столбцов:

$$\begin{array}{l|cccccc} \Delta_1 & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \Delta_2 & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdot & 0 \\ \Delta_3 & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdot & 0 \\ \Delta_4 & a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \Delta_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_0 \end{array} \quad (2.11)$$



По главной диагонали матрицы выписываются все коэффициенты характеристического уравнения с последовательно убывающими индексами, начиная с  $a_{n-1}$ . Все строки справа от коэффициентов, стоящих на главной диагонали, заполняются коэффициентами с возрастающими индексами, а слева – с убывающими индексами. На место коэффициентов, индексы которых меньше нуля или больше  $n$ , ставятся нули.

*Теорема Гурвица.* Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (2.10) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы (2.11) были положительными:

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} > 0.$$

В частности, если для уравнения четвёртой степени (2.8) выполняются неравенства:

$$\Delta_1 = a_3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \Delta_4 = a_0 \Delta_3 > 0,$$

то вещественные части всех корней будут отрицательными.

Найдём границы устойчивости. На границе устойчивости будут равны нулю действительный корень ( $\lambda = 0$ ) или вещественная часть комплексных сопряжённых корней ( $\lambda = i\nu$ ). Если в характеристическое уравнение подставить  $\lambda = 0$ , то получим границу аperiodической устойчивости  $a_0 = 0$  или  $\Delta_n = 0$  (при всех остальных положительных минорах Гурвица). Подставляя в характеристическое уравнение  $\lambda = i\nu$ , получим границу колебательной устойчивости:  $\Delta_{n-1} = 0$  (при всех остальных положительных минорах Гурвица). Третья граница устойчивости соответствует кор-

ню  $\lambda = \infty$ , что соответствует  $a_n = 0$ , но этот случай в динамике полёта не встречается.

Найденные таким образом границы устойчивости формируют область устойчивости.

### ***2.3.2. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом операционного исчисления***

Сущность этого метода состоит в том, что с помощью интегрального преобразования переходят от исходной системы ЛДУ к вспомогательной системе алгебраических уравнений. Решив вспомогательную систему уравнений, с помощью обратного преобразования получают решение исходной системы.

В качестве интегрального преобразования обычно используют преобразование Лапласа:

$$Y(s) = L[y(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} y(t) dt,$$

где  $Y(s)$  – изображение оригинала,  $s$  – комплексная переменная,  $y(t)$  – кусочно-непрерывная и ограниченная функция (оригинал).

Существует также обратное преобразование Лапласа, позволяющее по изображению  $Y(s)$  находить оригинал  $y(t)$ . Такое преобразование записывается как:

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t).$$

Если оригинал  $y(t)$ , имеющий изображение  $Y(s)$ , подвергается какой-либо математической операции (сложению, дифференцированию и т.п.), то для нового оригинала можно найти изображение по формулам, приведённым таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Основные свойства преобразования Лапласа

Математическая операция	Оригинал	Изображение
Исходное преобразование	$y(t)$	$Y(s)$
Сложение оригинала	$y_1(t) + y_2(t)$	$Y_1(s) + Y_2(s)$
Умножение на постоянное число	$ay(t)$	$aY(s)$
Дифференцирование	$dy/dt$ $dy/dt, y_0 = 0$	$sY(s) - y_0$ $sY(s)$
$n$ -кратное дифференцирование	$d^n y / dt^n$ $d^n y / dt^n$ при нулевых начальных условиях	$s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} y_0^{(k)}$ $s^n Y(s)$
Интегрирование	$\int_0^t y(t) dt$	$\frac{1}{s} Y(s)$
Сдвиг оригинала на $\tau$	$y(t - \tau)$	$e^{-s\tau} Y(s)$

При анализе возмущённого движения ЛА иногда возникает необходимость определить предельные значения решения дифференциального уравнения по виду этого уравнения, не решая его. К примеру, необходимо оценить поведение функции  $y(t)$  вблизи  $t = 0$  (в начале движения) и при  $t = \infty$ , т.е. после длительного интервала времени. Эту задачу можно решить с помощью двух теорем о предельном переходе:

1) если существует предел функции  $\lim_{t \rightarrow 0} [y(t)]$ , то:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)];$$

2) если существует предел функции  $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)]$ , то:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)].$$

Достоинство операторного метода заключается том, что объём и сложность вычислений получаются меньшими по сравнению с классическим методом. При операторном методе отсутствует трудоёмкая операция определения произвольных постоянных по начальным условиям, поскольку сразу находится решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

### ***2.3.3. Исследование управляемого движения ЛА с помощью передаточных функций***

Операционное исчисление используется и при исследовании управляемого движения ЛА как линейной системы, т.е. механической системы, описываемой ЛДУ с постоянными коэффициентами. Линейную систему любой сложности можно свести к одному из так называемых типовых звеньев или к некоторой их комбинации. Под типовым линейным звеном понимается совокупность элементов, переходный процесс в которой описывается обыкновенными ЛДУ не выше второго порядка.

Управление ЛА формируется на основе получения и обработки информации о характере движения аппарата и заданной программы полёта и осуществляется отклонениями органов управления и двигателя. Результат управления зависит от реакции ЛА на управляющие воздействия, которая определяется его статическими и динамическими характеристиками и законом управления. Для оценки управляемости ЛА принято рассматривать его реакцию на

скачкообразное (ступенчатое) отклонение органов управления и на отклонение по гармоническому закону. При ступенчатом отклонении органов управления изучаются *переходные характеристики* ЛА, а при гармоническом – *частотные*.

При изучении переходных характеристик любой динамической системы удобно пользоваться передаточными функциями. *Передаточной функцией* называют отношение изображения выходной величины к изображению входной при нулевых начальных условиях:

$$W_{yx}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

где  $Y(s)$  и  $X(s)$  – изображение по Лапласу выходной и входной величины, соответственно. Двойной индекс  $W_{yx}(s)$  указывает, что выходной величиной является  $y(t)$ , а входной –  $x(t)$ .

Для ЛА выходными величинами могут быть управляемые параметры движения (скорость, перегрузки, углы атаки, тангажа и т. п.), а входными – управляющие или возмущающие воздействия. Передаточную функцию можно рассматривать как удобную форму записи ЛДУ с постоянными коэффициентами, которая позволяет сравнительно просто исследовать динамические процессы.

Рассмотрим пример определения переходной характеристики звена с помощью его передаточной функции. Пусть звено описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\Delta \ddot{y}(t) + 2h \Delta \dot{y}(t) + \omega^2 \Delta y(t) = K \Delta x(t). \quad (2.12)$$

Найдём передаточную функцию, соответствующую этому уравнению. Для этого определим изображению по Лапласу выходной

$\Delta y(t)$  и входной  $\Delta x(t)$  величин при нулевых начальных условиях.

Переходя от оригиналов  $\Delta y(t)$  и  $\Delta x(t)$  к их изображениям по формулам таблицы 2.1, получим вспомогательное алгебраическое уравнение:

$$(s^2 + 2hs + \omega^2)\Delta Y(s) = K \Delta X(s).$$

Откуда  $\Delta Y(s) = \frac{K \Delta X(s)}{s^2 + 2hs + \omega^2}$ , а передаточная функция равна:

$$W_{yx}(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta X(s)} = \frac{K}{s^2 + 2hs + \omega^2}. \quad (2.13)$$

Поскольку знаменатель передаточной функции составляется по левой части уравнения, то он является характеристическим полиномом дифференциального уравнения (2.12) с той лишь разницей, что вместо  $\lambda$  стоит параметр  $s$ .

Приравняв нулю знаменатель передаточной функции (2.13), получим:

$$s^2 + 2hs + \omega^2 = 0.$$

Корни этого уравнения называются полюсами передаточной функции или корнями характеристического уравнения для системы (2.12).

Если  $(\omega^2 - h^2) > 0$ , то корни будут комплексными сопряжёнными  $s_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2}$ . В этом случае процесс изменения выходной величины будет иметь колебательный характер, а звено называться колебательным.

Если  $(\omega^2 - h^2) < 0$ , то оба корня будут действительными  $s_{1,2} = -h \pm \sqrt{\omega^2 - h^2}$ ; процесс будет аperiodическим, а звено – аperiodическим второго порядка.

Выражая  $\Delta Y(s)$  через передаточную функцию (2.13), получим:

$$\Delta Y(s) = W_{yx}(s) \Delta X(s) = \frac{K}{s^2 + 2hs + \omega^2} \Delta X(s).$$

Для определения переходной характеристики необходимо за входное воздействие принять единичную ступенчатую функцию  $x(t) = 1(t)$ , изображение которой  $X(s) = \frac{1}{s}$ . Следовательно:

$$Y(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2hs + \omega^2)}.$$

Переходя при помощи таблиц от изображения к оригиналу для случая  $(\omega^2 - h^2) > 0$ , получим переходную характеристику колебательного звена:

$$y(t) = K \left[ 1 - e^{-ht} \frac{\sin(\sqrt{\omega^2 - h^2} t + \varphi)}{\sin \varphi} \right], \quad (2.14)$$

где  $K$  – передаточный коэффициент,  $h$  – коэффициент демпфирования,  $\nu = \sqrt{\omega^2 - h^2}$  – круговая частота колебаний,  $\omega$  – опорная частота или частота недемпфированных колебаний, сдвиг по фазе:

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\sqrt{\omega^2 - h^2}}{h}.$$

В (2.14) первое слагаемое определяет вынужденное движение, а второе – собственное (свободное) колебательное движение, определяющее переходный процесс.

Рассмотрим пример построения передаточной функции ЛА в продольном движении по отклонению руля высоты. Дифференциальные уравнения движения ЛА в вертикальной плоскости (1.9) дополненные уравнением углового движения будут иметь вид (по-

воротом горизонтальной плоскости вследствие кривизны поверхности Земли будем пренебрегать):

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - X_a - mg \sin \theta, \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha + Y_a - mg \cos \theta, \\ I_z \frac{d^2 \mathcal{G}}{dt^2} &= M_z, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\mathcal{G} = \theta + \alpha$  – угол тангажа,  $M_z, I_z$  – момент аэродинамической силы и момент инерции относительно поперечной оси  $OZ_1$  связанной СК.

Данная система является нелинейной, так как силы и момент аэродинамической силы описываются нелинейными функциями:

$$\begin{aligned} Y_a &= Y_a(\alpha, V, H, \delta_B), \quad X_a = X_a(\alpha, V, H, \delta_B), \\ P &= P(V, H), \quad M_z = M_z(\alpha, \delta_B, \dot{\alpha}, \dot{\delta}_B, \omega_z, V, H), \end{aligned}$$

где  $\delta_B$  – угол отклонения руля высоты,  $\omega_z = \frac{d\mathcal{G}}{dt}$  – угловая скорость по тангажу.

Приближённо будем считать, что влияние приращения высоты  $H$  в возмущённом движении на аэродинамическую силу и момент, а также на силу тяги двигателей мало, и учитывать его не будем. Линеаризуем систему (2.15) при малых углах атаки ( $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$ ):



$$m \frac{d\Delta V}{dt} = (P^V - X_a^V) \Delta V - (P\alpha_0 + X_a^\alpha) \Delta\alpha - X_a^{\delta_B} \delta_B - mg \cos \theta_0 \Delta\theta,$$

$$mV_0 \frac{d\Delta\theta}{dt} = (P^V \alpha_0 + Y_a^V) \Delta V + (P + Y_a^\alpha) \Delta\alpha + Y_a^{\delta_B} \delta_B + mg \sin \theta_0 \Delta\theta,$$

$$I_z \frac{d^2 \mathcal{G}}{dt^2} = M_z^V \Delta V + M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + M_z^{\delta_B} \delta_B + M_z^{\dot{\delta}_B} \dot{\delta}_B + M_z^{\omega_z} \Delta\omega_z,$$

$$\Delta\mathcal{G} = \Delta\theta + \Delta\alpha,$$

Здесь  $P^V, X_a^V, \dots, M_z^{\omega_z}$  – частные производные сил и момента по соответствующим параметрам.

Рассмотрим канал управления угловым движением ЛА. При этом будем пренебрегать демпфирующими моментами  $M_z^{\dot{\alpha}}, M_z^{\dot{\delta}_B}$ . В качестве опорного движения примем установившийся горизонтальный полёт. В этом движении  $V_0 = const, \Delta V = 0, \theta = 0$ . Тогда:

$$mV_0 (\Delta\dot{\mathcal{G}} - \Delta\dot{\alpha}) = (P + Y_a^\alpha) \Delta\alpha + Y_a^{\delta_B} \delta_B,$$

$$I_z \Delta\dot{\omega}_z = M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\delta_B} \delta_B + M_z^{\omega_z} \Delta\omega_z,$$

$$\Delta\dot{\mathcal{G}} = \Delta\omega_z.$$

Перепишем данную систему в следующем виде:

$$\Delta\dot{\alpha} + a_{12} \Delta\alpha + a_{13} \Delta\omega_z = b_{11} \delta_B,$$

$$a_{22} \Delta\alpha + \Delta\dot{\omega}_z + a_{23} \Delta\omega_z = b_{21} \delta_B,$$

$$a_{33} \Delta\omega_z + \Delta\dot{\mathcal{G}} = 0,$$

где 
$$a_{12} = \frac{P + Y_a^\alpha}{mV_0}, a_{13} = -1, b_{11} = -\frac{Y_a^{\delta_B}}{mV_0}, a_{22} = -\frac{M_z^\alpha}{I_z}, a_{23} = -\frac{M_z^{\omega_z}}{I_z},$$

$$b_{21} = \frac{M_z^{\delta_B}}{I_z}, a_{33} = -1.$$

Осуществляя преобразование Лапласа, получим:

$$\begin{aligned}
(s + a_{12})\Delta\alpha(s) + a_{13}\Delta\omega_z(s) &= b_{11}\delta_B(s), \\
a_{22}\Delta\alpha(s) + (s + a_{23})\Delta\omega_z(s) &= b_{21}\delta_B(s), \\
a_{33}\Delta\omega_z(s) + s\Delta\mathcal{G}(s) &= 0.
\end{aligned}$$

Выходными (управляемыми) параметрами являются отклонения угла атаки  $\Delta\alpha(s)$ , угловой скорости  $\Delta\omega_z(s)$  и угла тангажа  $\Delta\mathcal{G}(s)$ , входным (управляющим) параметром – углом отклонения руля высоты  $\delta_B(s)$ .

Запишем полученную систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{aligned}
A(s)X(s) &= B(s)G(s), \\
A(s) &= \begin{bmatrix} s + a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & s + a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} & s \end{bmatrix}, \quad X(s) = \begin{bmatrix} \Delta\alpha(s) \\ \Delta\omega_z(s) \\ \Delta\mathcal{G}(s) \end{bmatrix}, \\
B(s) &= \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G(s) = \delta_B(s).
\end{aligned}$$

Здесь  $X(s)$  – вектор состояния,  $A(s)$  – матрица коэффициентов объекта управления,  $G(s)$  – скалярная величина, характеризующая входное воздействие,  $B(s)$  – матрица управления.

Решая данную систему уравнений относительно выходных параметров  $\Delta\alpha(s)$ ,  $\Delta\omega_z(s)$ ,  $\Delta\mathcal{G}(s)$  можно получить передаточные функции ЛА, характеризующие его реакцию на отклонение руля высоты. Для определения передаточной функции для какого-либо параметра состояния по входному воздействию необходимо:

- рассчитать определитель матрицы  $A(s)$ :  $\Delta = \det A(s)$ ;

- в матрице  $A(s)$  заменить столбец искомого параметра состояния на столбец матрицы управления  $B(s)$  и найти определитель полученной матрицы:  $\Delta_R = \det R$ ;
- найти передаточную функцию объекта по искомому параметру:  $W(s) = \frac{\Delta_R}{\Delta}$ .

Найдём передаточную функцию для отклонения угла тангажа:  
 $\Delta \mathcal{G}(s) = W(s) \delta_B(s)$ ,

$$W(s) = \frac{\Delta_g}{\Delta},$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} s + a_{12} & a_{13} & b_{11} \\ a_{22} & s + a_{23} & b_{21} \\ 0 & a_{33} & 0 \end{vmatrix} = -a_{33} \{b_{21}(s + a_{12}) - a_{22}b_{11}\},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & s + a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} & s \end{vmatrix} = s \{s^2 + (a_{12} + a_{23})s + a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\}.$$

Приводя передаточную функцию к стандартному виду, получаем:

$$\begin{aligned} W(s) &= -\frac{a_{33} \{b_{21}s + b_{21}a_{12} - a_{22}b_{11}\}}{s \{s^2 + (a_{12} + a_{23})s + a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\}} = \\ &= -\frac{a_{33} (b_{21}a_{12} - a_{22}b_{11}) \left( \frac{b_{21}}{b_{21}a_{12} - a_{22}b_{11}} s + 1 \right)}{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) s \left( \frac{s^2}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}} + \frac{(a_{12} + a_{23})}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}} s + 1 \right)} = \\ &= \frac{K(T_1 s + 1)}{s(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)}, \end{aligned}$$

$$\text{где } T_1 = \frac{b_{21}}{b_{21}a_{12} - a_{22}b_{11}}, \quad K = \frac{a_{33}(a_{22}b_{11} - b_{21}a_{12})}{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}, \quad T = \sqrt{\frac{1}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}},$$

$$\zeta = \frac{1}{2T} \frac{a_{12} + a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}.$$

*Частотными характеристиками* системы называют зависимость отношения амплитуды выходной величины к амплитуде входного сигнала и сдвига по фазе выходной величины по отношению к входному сигналу от частоты входного воздействия.

Для определения реакции ЛА на гармоническое воздействие рассматриваются неоднородные ЛДУ с постоянными коэффициентами, правые части которых изменяются по гармоническому закону. Входное гармоническое воздействие вызовет выходной процесс (возмущённое движение), состоящий из собственной и вынужденной составляющих. В устойчивой системе собственная составляющая, определяемая из решения однородных уравнений, с течением времени затухает. Поэтому при изучении выходных процессов, вызванных гармоническим воздействием, ограничиваются только вынужденной составляющей, предполагая, что система устойчива.

Вынужденная составляющая определяется как частное решение неоднородной системы уравнений. Если на вход системы подаётся гармонический сигнал  $\Delta x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ , то на выходе вынужденная составляющая будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой  $\omega$ , но с другой амплитудой и со смещением по фазе:

$$\Delta y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A_2$  и  $\omega$  – амплитуда и частота вынужденных колебаний выходной величины,  $\varphi$  – сдвиг по фазе.

Значения  $A_2$  и  $\varphi$  определяются по частотной функции  $W(i\omega)$ , представляющей собою комплексную величину и получаемой из передаточной функции  $W(s)$  путём простой замены  $s = i\omega$ . Частотную функцию можно представить в виде:

$$W(i\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + i\operatorname{Im}(\omega) = A(\omega)\exp(i\varphi(\omega)),$$

где  $\operatorname{Re}(\omega), \operatorname{Im}(\omega)$  – вещественная и мнимая часть частотной функции, соответственно,  $A(\omega) = A_2 / A_1 = |W(i\omega)|$  – модуль частотной функции, называемый амплитудной частотной характеристикой (АЧХ),  $\varphi(\omega) = \arg W(i\omega)$  – аргумент частотной функции, называемый фазовой частотной характеристикой (ФЧХ).

АЧХ и ФЧХ определяются выражениями:

$$A(\omega) = \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}.$$

С помощью этих выражений можно построить амплитудную и фазовую частотные характеристики системы при изменении частоты вынужденных колебаний  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ .

Кроме этих характеристик используется амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), представляющая собой кривую на комплексной плоскости, по которой перемещается конец вектора частотной функции  $W(i\omega)$  при изменении частоты входного сигнала от 0 до  $+\infty$ .

Более подробно описанные подходы к исследованию характеристик движения ЛА как объекта управления рассматриваются в рамках дисциплины «Теория автоматического управления».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие содержит базовые сведения о моделях и методах расчёта возмущённого движения, оценки устойчивости и управляемости летательных аппаратов.

В первом разделе приведены основные положения теории поправок, системы координат, используемые в динамике полёта ЛА, и их взаимная ориентация, получены уравнения движения центра масс ЛА в проекциях на оси траекторной системы координат, система уравнений движения в отклонениях, рассмотрены методика линеаризации уравнений возмущённого движения и методы расчёта поправочных коэффициентов.

Во втором разделе приведены основные понятия устойчивости движения и управляемости ЛА, определение устойчивости по Ляпунову, сведения о математических методах исследования динамики возмущённого движения ЛА, критериях устойчивости, исследовании управляемого движения с помощью передаточных функций.

Более полное изложение рассмотренных в пособии вопросов содержится в учебниках [1-4], которые могут быть использованы для углубленного изучения дисциплины.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дмитриевский, А. А. Внешняя баллистика: учебник для студентов вузов / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Машиностроение, 2005. – 608 с.

2. Остославский, И. В. Динамика полёта. Траектории летательных аппаратов / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – Москва: Оборонгиз, 1963. – 430 с.

3. Остославский, И. В. Динамика полёта. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов: учебник для авиац. вузов / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – Москва: Машиностроение, 1965. – 467 с.

4. Аэромеханика самолета: Динамика полета: учебник для вузов / А. Ф. Бочкарев, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов [и др.]; под ред. А. Ф. Бочкарева и В. В. Андреевского – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Машиностроение, 1985. – 360 с.

Учебное издание

*Храмов Андрей Александрович*

**ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

*Учебное пособие*

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой  
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 24.06.2022. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,0.

Тираж 120 экз. (1 з-д 1-25). Заказ № . Арт. – 22(Р1У)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.