

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. А. ХРАМОВ

ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация

Самара
Издательство Самарского университета
2022

УДК 629.78(075)

ББК 39.62я7

X895

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов,
д-р техн. наук, проф. И. А. Тимбай

Храмов, Андрей Александрович

X895 Возмущённое движение космических аппаратов: учебное пособие / *А. А. Храмов.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 75 с.

ISBN 978-5-7883-1823-3

Учебное пособие содержит вторую часть конспекта лекций по дисциплине «Возмущённое движение летательных аппаратов», в которой рассматриваются методы расчёта возмущённых траекторий космических аппаратов.

Предназначено для обеспечения учебной подготовки магистров института авиационной и ракетно-космической техники по профилю «Динамика и управление движением космических систем» образовательной программы по направлению подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация. Пособие может использоваться при выполнении практических заданий, научно-исследовательской и выпускной квалификационной работы.

Подготовлено на кафедре динамики полёта и систем управления.

УДК 629.78(075)

ББК 39.62я7

ISBN 978-5-7883-1823-3

© Самарский университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ	6
1.1. Вывод уравнений движения в оскулирующих элементах.....	6
1.2. Реальное поле тяготения Земли	15
1.3. Возмущения орбит, вызванные сжатием земного эллипсоида	20
1.4. Возмущения орбиты, вызванные сопротивлением атмосферы	27
1.5. Время существования спутника Земли	36
1.6. Влияние притяжения небесных тел на движение КА.....	37
2. ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ	42
2.1. Математические модели движения	42
2.2. Метод усреднения в динамике полёта с малой тягой.....	46
2.3. Перелёты между околосферными компланарными орбитами	50
2.3.1. Определение оптимального управления на витке	51
2.3.2. Построение усреднённой модели движения	54
2.3.3. Программы управления при формировании и коррекции орбит	56
2.4. Перелёты между круговыми некомпланарными орбитами	62
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	73
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	74

ВВЕДЕНИЕ

Движение космического аппарата (КА) происходит в сложном силовом поле, характеризуемом большим числом сил различной физической природы. Основной внешней силой является ньютоновская сила гравитационного притяжения, соответствующая сферической модели Земли с равномерным по радиусу распределением массы. Движение под действием этой силы называется *невозмущённым* движением, характеризуемым постоянством элементов орбиты.

Дополнительные внешние силы, действующие на КА, вызваны нецентральнойностью поля тяготения из-за несферичности Земли и неравномерности распределения масс внутри неё, сопротивлением атмосферы, гравитационными полями Луны, Солнца, планет, давлением солнечного света, электромагнитными и другими явлениями. Эти силы приводят к появлению периодических и вековых отклонений в движении космического аппарата, которое называется *возмущённым*.

При проектировании космических аппаратов обычно учитывают вековые возмущения, которые нарастают монотонно от витка к витку. Вековые возмущения вычисляются по приближенной методике за один виток космического аппарата вокруг Земли.

В связи с перспективой использования электроракетных двигателей для космических перелётов представляет интерес управляемое движение КА под действием малой тяги. В ряде случаев силу тяги электроракетного двигателя можно считать малой по сравнению с ньютоновской силой и рассматривать её как возмущение. Это обстоятельство позволяет использовать классические методы теории возмущений небесной механики или другие асимптотические методы. Их применение даёт возможность получить приближённое аналитическое решение некоторых задач, а

во многих случаях даёт наглядные физические предпосылки для численного решения.

В конспекте лекций рассматриваются модели и методы расчёта возмущённого движения космических аппаратов, обусловленного нецентральностью гравитационного поля притяжения, сопротивлением атмосферы, притяжением небесных тел, а также действием малой тяги. При изложении отдельных тем предполагалось, что обучающиеся знают основы теории невозмущённого движения КА.

Материал пособия основывается на учебной литературе [1-8], которая рекомендуется обучающимся при освоении дисциплины.

1. ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

1.1. Вывод уравнений движения в оскулирующих элементах

Запишем уравнение возмущённого движения космического аппарата в векторном виде:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = -m \frac{\mu \bar{r}}{r^3} + \bar{F}_B,$$

или после деления на массу:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\mu \frac{\bar{r}}{r^3} + \bar{f}_B, \quad (1.1)$$

Здесь \bar{V} , \bar{r} – вектор скорости и радиус-вектор КА массой m , μ – гравитационный параметр небесного тела, \bar{F}_B – равнодействующая всех возмущающих сил, \bar{f}_B – возмущающее ускорение.

Проектируя уравнение (1.1) на оси геоцентрической инерциальной системы координат (СК) $OXYZ$, получим систему уравнений возмущённого движения в координатной форме:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x = f_{Bx}, \quad \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y = f_{By}, \quad \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z = f_{Bz}. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) аналитически не интегрируются. Применение методов численного интегрирования даёт частные результаты и не позволяет провести качественный анализ движения.

Плодотворным для исследования возмущённого движения оказался метод вариации произвольных постоянных Лагранжа, который в приложении к рассматриваемой задаче получил название *метода оскулирующих элементов*. Основная идея метода заключается в следующем. Решение уравнений возмущённого движения определяется теми же формулами, что и решение уравнений невозмущённого движения, но элементы орбиты $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ рассматриваются в этих формулах как функции времени так, чтобы уравнение возмущённого движения удовлетворялось.

Невозмущённая орбита, соприкасающаяся с возмущённой орбитой в момент времени t_1 , по которой начал бы двигаться спутник после устранения возмущающей силы, называется *оскулирующей орбитой*. Момент времени t_1 называется моментом оскуляции, а элементы оскулирующей орбиты, которые станут функциями времени, называются *оскулирующими элементами*. Если оскулирующие элементы определены для любого момента оскуляции, то возмущённое движение станет известным. Траекторию возмущённого движения можно представить как огибающую семейства оскулирующих орбит (рисунок 1.1).

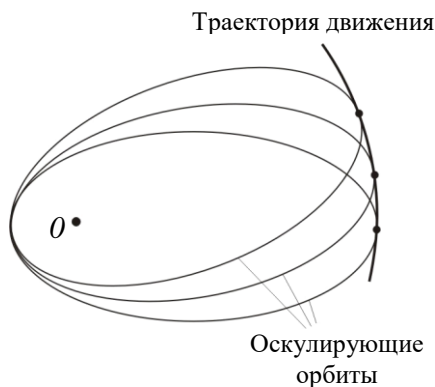


Рисунок 1.1 – Траектория возмущённого движения

Определить уравнения движения в оскулирующих элементах (уравнения Ньютона-Лагранжа) можно путём преобразования переменных в уравнениях (1.2) с помощью формул невозмущённого движения. При выводе уравнений будем использовать следующие интегралы невозмущённого движения:

– интеграл энергии $h = V^2 - \frac{2\mu}{r}$;

– интеграл площадей $\bar{C} = \bar{r} \times \bar{V}$;

– интеграл Лапласа $\vec{f} = (\vec{V} \times \vec{C}) - \mu \frac{\vec{r}}{r}$;

а также формул:

– связи между константами интегралов Лапласа, площадей и энергии:

$$e^2 = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} h; \quad (1.3)$$

– константы интеграла площадей:

$$C = \sqrt{\mu p}; \quad (1.4)$$

– трансверсальной V_n , радиальной V_r составляющих и полной скорости V :

$$\begin{aligned} V_n &= \sqrt{\mu / p} (1 + e \cos \vartheta); \\ V_r &= \sqrt{\mu / p} e \sin \vartheta; \\ V &= \sqrt{\mu / p} (1 + 2e \cos \vartheta + e^2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Рассмотрим изменения долготы восходящего узла Ω , накло-
нения i и фокального параметра орбиты p .

Константа интеграла площадей \vec{C} оскулирующей орбиты
есть кинетический момент единицы массы КА и при воздействии
возмущающего ускорения \vec{f}_B является функцией времени. При-
меним теорему об изменении кинетического момента $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_B$.

После деления на массу КА это уравнение примет вид:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{r} \times \vec{f}_B. \quad (1.6)$$

Рассмотрим подвижную прямоугольную систему координат
 $Oxyz$, ось Ox которой совпадает с линией узлов, а ось Oz
направлена по вектору \vec{C} (рисунок 1.2). Угловая скорость её вра-
щения относительно инерциальной СК $Ox_{II}y_{II}z_{II}$ равна:

$$\bar{\omega} = \frac{di}{dt} \bar{x}^0 + \left(\frac{d\Omega}{dt} \sin i \right) \bar{y}^0 + \left(\frac{d\Omega}{dt} \cos i \right) \bar{z}^0.$$

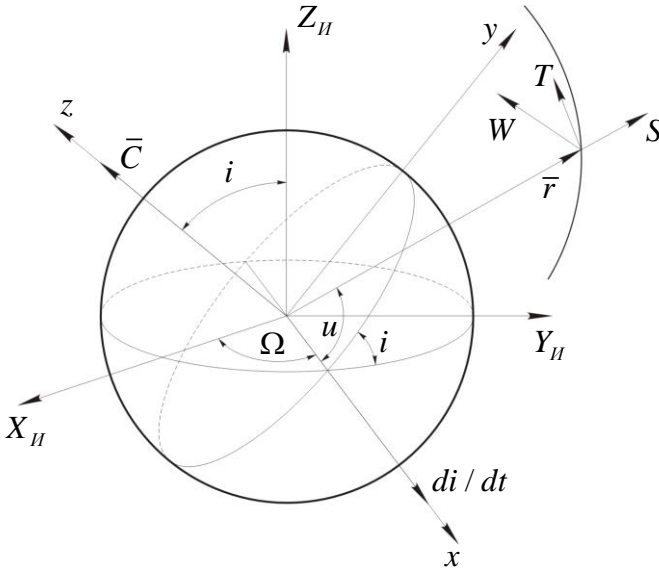


Рисунок 1.2 – К выводу уравнений движения в оскулирующих элементах

Определим проекции векторной производной $d\bar{C}/dt$ на оси подвижной системы координат $Oxyz$, используя формулу Бура:

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \frac{d'\bar{C}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{C},$$

где $\frac{d'\bar{C}}{dt}$ – относительная производная, определяющая изменение

вектора \bar{C} в подвижной системе координат, $\frac{d\bar{C}}{dt}$ – абсолютная производная в неподвижной системе координат.

Имеем:

$$\left(\frac{d\bar{C}}{dt} \right)_x = \left(\frac{d'\bar{C}}{dt} \right)_x + \omega_y C_z - \omega_z C_y = \omega_y C_z = C \frac{d\Omega}{dt} \sin i,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_y &= \left(\frac{d'\bar{C}}{dt}\right)_y + \omega_z C_x - \omega_x C_z = -\omega_x C_z = -C \frac{di}{dt}, \\ \left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_z &= \left(\frac{d'\bar{C}}{dt}\right)_z + \omega_x C_y - \omega_y C_x = \left(\frac{d'\bar{C}}{dt}\right)_z = \frac{dC}{dt}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Определим проекции момента возмущающих сил $\bar{r} \times \bar{f}_B$ на оси Ox , Oy и Oz . Векторы \bar{r} и \bar{f}_B в рассматриваемой системе координат определяются как:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (r \cos u, r \sin u, 0), \\ \bar{f}_B &= (S \cos u - T \sin u, S \sin u + T \cos u, W). \end{aligned}$$

Здесь S, T, W – проекции возмущающего ускорения на радиальное, трансверсальное и нормальное направления.

Тогда:

$$\begin{aligned} \bar{r} \times \bar{f}_B &= \begin{vmatrix} \bar{x}^0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0 \\ r \cos u & r \sin u & 0 \\ (S \cos u - T \sin u) & (S \sin u + T \cos u) & W \end{vmatrix} = \\ &= (Wr \sin u, -Wr \cos u, rT). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Приравнявая на основании исходного соотношения (1.6) соответствующие проекции производной вектора \bar{C} (1.7) и проекции момента возмущающих сил $\bar{r} \times \bar{f}_B$ (1.8), получим:

$$C \frac{d\Omega}{dt} \sin i = Wr \sin u, \quad C \frac{di}{dt} = Wr \cos u, \quad \frac{dC}{dt} = rT.$$

С учётом формулы (1.4) получим уравнения для рассматриваемых оскулирующих элементов:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \frac{\sin u}{\sin i}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \cos u, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} rT. \quad (1.9)$$

Заметим, что изменения долготы восходящего узла и наклона орбиты зависят только от составляющей возмущающей си-

лы, нормальной к плоскости орбиты. Изменение фокального параметра определяется только трансверсальной составляющей возмущающей силы.

Найдём теперь уравнения для эксцентриситета e и аргумента перигея орбиты ω . Производную de/dt найдём из формулы связи (1.3):

$$e^2 = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} h = 1 + \frac{p}{\mu} h. \quad (1.10)$$

Дифференцируя по времени последнее выражение, получим:

$$2e \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu} \frac{dh}{dt} + \frac{h}{\mu} \frac{dp}{dt}. \quad (1.11)$$

Производную dh/dt определим дифференцированием интеграла энергии. Учитывая уравнение возмущённого движения (1.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= 2\bar{V} \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} + \frac{2\mu}{r^2} = 2\bar{V} \cdot \left(-\frac{\mu\bar{r}}{r^3} + \bar{f}_B \right) + \frac{2\mu}{r^2} = \\ &= 2(V_r S + V_n T), \end{aligned} \quad (1.12)$$

поскольку:

$$-\frac{2\mu}{r^3} \bar{V} \cdot \bar{r} + \frac{2\mu}{r^2} = 0, \quad \bar{V} \cdot \bar{f}_B = V_r S + V_n T.$$

После подстановки (1.10), (1.12) в выражение (1.11) с учётом третьего уравнения (1.9) получим:

$$\frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \left[S \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta + T \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \right] + \frac{h}{\mu e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} r T,$$

откуда после несложных преобразований приходим к окончательному выражению:

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ S \sin \vartheta + T \left[e \frac{r}{p} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right] \right\}, \quad (1.13)$$

из которого видно, что изменение эксцентриситета вызывается радиальной и трансверсальной составляющими возмущающей силы.

Производную $d\omega/dt$ находим дифференцированием геометрического соотношения $u = \omega + \vartheta$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (1.14)$$

Найдём выражение для производной аргумента широты du/dt , которая включает две составляющие:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\psi}{dt} + \frac{du_{\Omega}}{dt}, \quad (1.15)$$

первая из которых появляется вследствие движения спутника в плоскости оскулирующей орбиты, а вторая обусловлена поворотом плоскости орбиты, который приводит к смещению восходящего узла – точки отсчёта аргумента широты (рисунок 1.3).

Угловая скорость радиус-вектора в плоскости оскулирующей орбиты определяется трансверсальной составляющей скорости $V_n = C/r$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{V_n}{r} = \frac{C}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}. \quad (1.16)$$

Для определения изменения аргумента широты вследствие смещения восходящего узла орбиты рассмотрим сферический треугольник ABC на рисунке 1.3. Здесь изображено пересечение плоскостей оскулирующих орбит, соответствующих моментам времени t и $t + dt$, со сферой произвольного радиуса, описанной вокруг притягивающего центра. Из теоремы косинусов сферического треугольника имеем:

$$\cos(u + du_{\Omega}) = \cos u \cos d\Omega + \sin u \sin d\Omega \cos i.$$

Считая величины du_{Ω} и $d\Omega$ малыми, можно записать:

$$du_{\Omega} = -d\Omega \cos i,$$

откуда:

$$\frac{du_{\Omega}}{dt} = -\frac{d\Omega}{dt} \cos i. \quad (1.17)$$

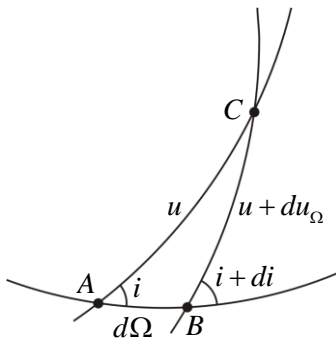


Рисунок 1.3 – К вычислению производной аргумента широты

Из выражения (1.15), с учётом формул (1.16), (1.17) и первого уравнения (1.9), получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \sin u \operatorname{ctg} i. \quad (1.18)$$

Для вычисления производной угла истинной аномалии $d\vartheta/dt$ продифференцируем уравнение орбиты в полярной системе координат:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta},$$

откуда имеем:

$$e \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \cos \vartheta \frac{de}{dt} + \frac{p}{r^2} \frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \frac{dp}{dt}.$$

Подставляя полученные ранее производную (1.13), третье уравнение (1.9) и соотношение для радиальной составляющей скорости, после преобразований получим:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{\mu}{r^2} + S \frac{\cos \vartheta}{e} - T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} \right]. \quad (1.19)$$

После подстановки производных (1.18) и (1.19) в выражение (1.14) получаем уравнение для аргумента перицентра оскулирующей орбиты:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctgi} \sin u \right], \quad (1.20)$$

из которого видно, что изменение ω зависит от всех трёх составляющих возмущающих силы.

Уравнение для шестого оскулирующего элемента – момента времени τ прохождения спутника через перицентр – приведём без вывода:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{e\mu} \left[(eN \sin \vartheta - \cos \vartheta) S + \frac{p}{r} NT \right],$$

где $N = 2 \left(\frac{p}{r} \right)^2 \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3} d\vartheta$.

Из-за сложности правой части последнее уравнение не имеет практического применения, поэтому его заменяют уравнением для медленно изменяющегося отклонения возмущённого аргумента широты от его невозмущённого значения:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{du_{HB}}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \sin u \operatorname{ctgi} - \frac{\sqrt{\mu p_{HB}}}{r_{HB}^2}, \quad (1.21)$$

где $\bar{u} = u - u_{HB}$, $r_{HB} = p_{HB} / (1 + e_{HB} \cos \vartheta_{HB})$. Индексом «нв» отмечены значения невозмущённых величин.

Совокупность уравнений (1.9), (1.13), (1.20) и (1.21) образуют систему уравнений в оскулирующих элементах, которая является системой точных уравнений возмущённого движения КА без ограничения на величины возмущающих ускорений. Система уравнений в оскулирующих элементах является более громоздкой по сравнению с исходной системой уравнений в координатной

форме и является также неинтегрируемой. Однако система имеет важные преимущества:

– при малых возмущающих ускорениях оскулирующие элементы медленно изменяются вдоль орбиты, поэтому для приближённого интегрирования может быть применён метод малого параметра, а для численного интегрирования можно использовать большой шаг;

– оскулирующие элементы, полученные в результате решения системы, имеют наглядный кинематический смысл, что позволяет сделать качественный анализ возмущённого движения.

Система уравнений движения спутника в оскулирующих элементах может быть записана в компактной форме:

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, \dots, q_6, S, T, W), \quad i = \overline{1, 6},$$

где переменными q_i обозначены оскулирующие элементы:

$$q_1 = \Omega; \quad q_2 = i; \quad q_3 = p; \quad q_4 = e; \quad q_5 = \omega; \quad q_6 = \bar{u}.$$

1.2. Реальное поле тяготения Земли

Поле тяготения Земли характеризуется потенциалом силы притяжения. Потенциалом силы притяжения называется функция, частные производные которой по координатам равны проекциям силы притяжения на соответствующие оси. Для сферической модели Земли, когда плотность является функцией только расстояния от центра, потенциал силы притяжения на единицу массы КА (потенциал ускорения силы притяжения) можно выразить как:

$$U_0 = \frac{\mu}{r},$$

где $\mu = 3,98602 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^3$ – гравитационный параметр Земли, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – величина радиус-вектора КА. Соответственно, проекции ускорения силы притяжения выражаются как:

$$g_x = \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\mu}{r^3} x, \quad g_y = \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{\mu}{r^3} y, \quad g_z = \frac{\partial U_0}{\partial z} = -\frac{\mu}{r^3} z.$$

Вторым приближением к действительной форме Земли является эллипсоид вращения, называемый земным эллипсоидом. Форма земного эллипсоида характеризуется сжатием

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,3} \text{ и эксцентриситетом } e = \frac{c}{a} \text{ (рисунок 1.4). Потенциал земного эллипсоида называется нормальным потенциалом Земли:}$$

$$U_H = \frac{\mu}{r} \left[1 + C_{20} \left(\frac{R_3}{r} \right)^2 P_2(\sin \varphi) \right],$$

где $C_{20} = -1098,08 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент при второй зональной гармонике в разложении потенциала по сферическим функциям, $R_3 = 6378,16 \text{ км}$ – экваториальный радиус Земли, φ – геоцентрическая широта, $P_2(\sin \varphi) = \frac{1}{2}(3\sin^2 \varphi - 1)$ – полином Лежандра второй степени.

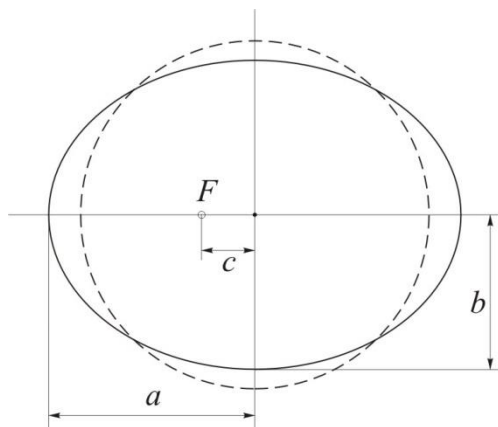


Рисунок 1.4 – Земной эллипсоид

В качестве наиболее приближающейся к действительной поверхности Земли принимается геоид – гипотетическая поверхность потенциала ускорения силы тяжести, совпадающая с уровнем спокойного океана. Потенциал геоида можно представить в виде разложения по сферическим функциям, рекомендованного Международным астрономическим союзом:

$$U_G = \frac{\mu}{r} \left\{ \begin{aligned} &1 + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n0} \left(\frac{R_2}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R_2}{r} \right)^n P_{n,k}(\sin \varphi) [C_{n,k} \cos k\lambda + D_{n,k} \sin k\lambda] \end{aligned} \right\},$$

где C_{n0} – коэффициенты при зональных гармониках, $P_n(\sin \varphi)$ – полином Лежандра порядка n , $P_{n,k}(\sin \varphi)$ – присоединённая функция Лежандра степени n и порядка k , $C_{n,k}$, $D_{n,k}$ – коэффициенты разложения потенциала Земли при тессеральных и секториальных гармониках, λ – долгота.

Потенциал земного геоида включает три типа сферических функций:

- $P_n(\sin \varphi)$ – зональные гармоники, равные нулю на n симметричных относительно экватора параллелях. Значения изменяются только с широтой; сфера разделится на $n+1$ широтную зону (рисунок 1.5). Внутри одной зоны, отделённой от других с севера и с юга параллелями, зональная гармоника сохраняет свой знак;

- $P_{n,n}(\sin \varphi) \cos n\lambda$, $P_{n,n}(\sin \varphi) \sin n\lambda$ при $k = n$ – секториальные гармоники, равные нулю на меридианах и делящие сферу на $2n$ сферических сектора (рисунок 1.6). Знак может изменяться только с долготой. Сфера оказывается расчленённой на сектора – полосы, которые соединяют северный и южный полюса;

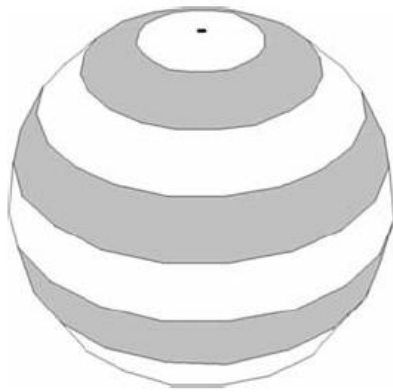


Рисунок 1.5 – Положительные и отрицательные значения зональных гармоник для $n = 8$



Рисунок 1.6 – Положительные и отрицательные значения секториальных гармоник для $n = 10$

- $P_{n,k}(\sin \varphi) \cos k\lambda, P_{n,k}(\sin \varphi) \sin k\lambda$ при $0 < k < n$ – тессеральные гармоники, равные нулю на $n-k$ параллелях и $2k$ меридианах. Гармоники на поверхности сферы образуют мозаичную картину, подобно шахматной доске и называются тессеральными от латинского «*tessera*» – мозаичный кубик (рисунок 1.7).

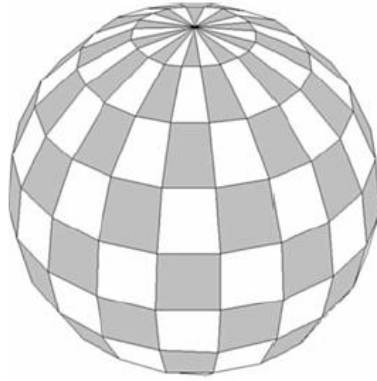


Рисунок 1.7 – Положительные и отрицательные значения тессеральных гармоник

Физический смысл различных слагаемых в потенциале земного геоида:

– первое слагаемое представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности;

– вторая зональная гармоника характеризует полярное сжатие Земли и является самой существенной поправкой при переходе к нецентральному полю притяжения (C_{20} имеет порядок 10^{-3} , в то время как остальные коэффициенты зональных гармоник C_{n0} и коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник – порядок 10^{-6} и ниже);

– тессеральные и секторальные гармоники характеризуют отклонение Земли от тела, симметричного относительно оси вращения. Зональные гармоники, для которых n нечётно, и тессеральные гармоники, для которых $(n-k)$ нечётно, определяют асимметрию Земли относительно экватора.

Потенциал земного геоида можно представить в виде суммы нормального потенциала Земли U_H и потенциала аномалий земного притяжения ΔU :

$$U_G = U_H + \Delta U ,$$

$$\text{где } \Delta U = \frac{\mu}{r} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=3}^{\infty} C_{n0} \left(\frac{R_3}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R_3}{r} \right)^n P_{n,k}(\sin \varphi) [C_{n,k} \cos k\lambda + D_{n,k} \sin k\lambda] \end{array} \right\}.$$

Числовые коэффициенты разложения потенциала Земли определяются как путём геодезических и гравиметрических измерений, так и с помощью наблюдений искусственных спутников Земли.

1.3. Возмущения орбит, вызванные сжатием земного эллипсоида

Рассмотрим возмущения орбит, вызванные второй зональной гармоникой, для чего используем нормальный потенциал Земли:

$$U_H = U_0 + \Delta U_{CЖ}, \quad \Delta U_{CЖ} = \frac{\mu}{r} C_{20} \left(\frac{R_3}{r} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1).$$

Найдём проекции возмущающего ускорения на радиальное и меридиональное направления (рисунок 1.8):

$$g_r^{(2)} = \frac{\partial \Delta U_{CЖ}}{\partial r} = -\frac{3C_{20}R_3^2\mu}{2r^4} (3 \sin^2 \varphi - 1) = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 \varphi - 1),$$

$$g_m^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_{CЖ}}{\partial \varphi} = \frac{3C_{20}R_3^2\mu}{2r^4} 2 \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2\varphi,$$

$$\text{где } \varepsilon = -\frac{3C_{20}R_3^2\mu}{2} = 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5 / \text{с}^2.$$

Радиальная, трансверсальная и нормальная составляющие возмущающего ускорения определяются соотношениями:

$$S = g_r^{(2)}, \quad T = g_m^{(2)} \cos \delta, \quad W = g_m^{(2)} \sin \delta.$$

Здесь δ – азимут движения КА.

Выразим азимут движения δ и широту φ через аргумент широты u и наклонение i из сферического треугольника ABC (см. рисунок 1.8):

- по формуле синусов углов сферических треугольников:

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad (1.22)$$

- по формуле косинусов:

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b,$$

$$\cos i = -\cos \delta \cos 90^0 + \sin \delta \sin 90^0 \cos \varphi,$$

откуда:

$$\sin \delta = \frac{\cos i}{\cos \varphi}, \quad (1.23)$$

и далее:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cos 90^0 = -\cos i \cos \delta + \sin i \sin \delta \cos u,$$

$$\cos \delta = \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi}, \quad (1.24)$$

где $a = u$, $b = \varphi$ – стороны сферического треугольника.

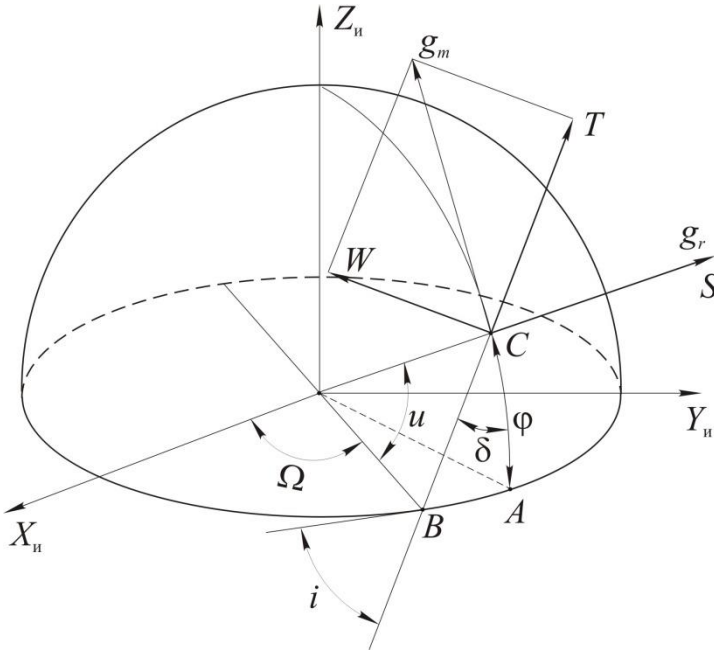


Рисунок 1.8 – К определению проекций возмущающих ускорений

С учётом полученных соотношений (1.22)-(1.24) для проекций возмущающего ускорения получаем:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1), \\
 T &= -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2\varphi \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi} = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u, \\
 W &= -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2\varphi \frac{\cos i}{\cos \varphi} = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Действие возмущающей силы, вызванной сжатием земного эллипсоида, приводит к появлению периодических и вековых возмущений в движении космического аппарата. При анализе космического полёта обычно учитывают только вековые возмущения, которые нарастают монотонно от витка к витку.

Для определения вековых возмущений элементов орбиты за один оборот спутника в уравнениях (1.9), (1.13) и (1.20) перейдём к независимой переменной ϑ – углу истинной аномалии – по формуле:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt}, \quad i = 1..5.$$

Учитывая соотношение для приращения истинной аномалии (1.19), получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{d\vartheta} &= FW \frac{r \sin u}{p \sin i}, \quad \frac{di}{d\vartheta} = FW \frac{r}{p} \cos u, \quad \frac{dp}{d\vartheta} = 2rFT, \\
 \frac{de}{d\vartheta} &= F \left\{ S \sin \vartheta + T \left[e \frac{r}{p} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right] \right\}, \\
 \frac{d\omega}{d\vartheta} &= F \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctgi} \sin u \right],
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

где
$$F = \frac{\sqrt{p/\mu}}{d\mathcal{G}/dt} = \frac{r^2}{\mu} \left[1 + \frac{S}{g_r} \frac{\cos \mathcal{G}}{e} - \frac{T}{g_r} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \mathcal{G}}{e} \right]^{-1}, \quad g_r = \frac{\mu}{r^2} -$$

ускорение свободного падения в центральном гравитационном поле. При малых проекциях возмущающего ускорения относительно гравитационного S/g_r , T/g_r , W/g_r можно принять:

$$F \approx \frac{r^2}{\mu}.$$

Приращения оскулирующих элементов за виток малы и для качественного анализа вековых возмущений достаточно проинтегрировать систему (1.26) в первом приближении, считая элементы орбиты в правых частях уравнений постоянными величинами, соответствующими точке оскуляции $\mathcal{G}=0$. После подстановки проекций возмущающего ускорения (1.25) в уравнения для приращений оскулирующих элементов (1.26) и интегрирования за один оборот спутника получим вековые возмущения.

Возмущения долготы восходящего узла определим по формуле:

$$\delta\Omega = \int_0^{2\pi} F W \frac{r \sin u}{p \sin i} d\mathcal{G}.$$

Подставляя нормальную составляющую возмущающего ускорения W в соответствии с (1.25) и выполняя интегрирование, получаем вековое возмущение:

$$\delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} \cos i.$$

Таким образом, под влиянием полярного сжатия Земли плоскость орбиты прецессирует на угол $\delta\Omega$ за один оборот в направлении, противоположном направлению движения спутника по орбите. Для спутников прямого вращения ($i < 90^\circ$) узел движется к западу, для спутников обратного вращения ($i > 90^\circ$) – на восток.

Полярные орбиты ($i = 90^\circ$) не прецессируют. Вращение линии узлов тем больше, чем ближе плоскость орбиты к экватору.

В связи с прецессией плоскости орбиты введём понятие солнечно-синхронной орбиты. Орбита, плоскость которой имеет постоянную ориентацию относительно Солнца, называется солнечно-синхронной (рисунок 1.9).

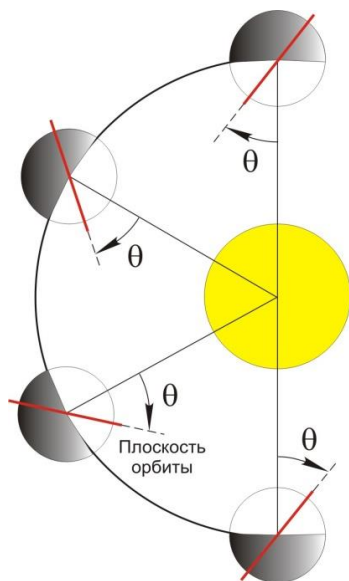


Рисунок 1.9 – Прецессия солнечно-синхронной орбиты

Для солнечно-синхронной орбиты местное среднесолнечное время прохождения спутника над точками трассы неизменно. Такие орбиты позволяют в одно и то же местное время обеспечивать через спутник радиосвязь между районами, расположенными вдоль трассы. Для достижения этого эффекта орбита должна прецессировать в восточном направлении на 360° в год, чтобы компенсировать вращение Земли вокруг Солнца.

Наклонение солнечно-синхронной орбиты (рисунок 1.10) определяется формулой:

$$\cos i = \frac{\mu p^2 (2\pi - T_{\text{сн}} \omega_3)}{2\pi \varepsilon N},$$

где $T_{\text{сн}}$ – солнечные сутки (86400 с), ω_3 – угловая скорость суточного вращения Земли, N – число витков спутника за солнечные сутки.

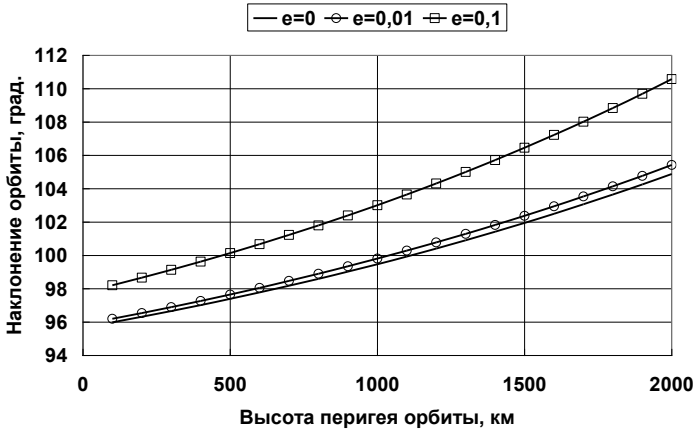


Рисунок 1.10 – Наклонение солнечно-синхронных орбит

Вековое возмущение аргумента перицентра вычислим по формуле:

$$\delta\omega = \int_0^{2\pi} F \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right] d\vartheta.$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$\delta\omega = \frac{\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} (5 \cos^2 i - 1).$$

Вращение линии апсид под влиянием сжатия Земли происходит в том же направлении, что и движение КА, если наклонение орбиты меньше $63,4^\circ$, и в обратном направлении, если наклонение орбиты больше $63,4^\circ$, но меньше $116,6^\circ$. При критических значе-

ниях наклоения $i_{кр1} = 63,4^0$ и $i_{кр2} = 180^0 - i_{кр1} = 116,6^0$ аргумент перицентра не изменяется.

Максимальная скорость векового смещения перигея соответствует экваториальной орбите и составляет $\delta\omega_{\max} = 4 \frac{\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu}$. Для низковысотных спутников $\delta\omega_{\max} \approx 1,2^0$, с увеличением размеров орбиты $\delta\omega_{\max}$ убывает обратно пропорционально квадрату фокального параметра p .

Смещения восходящего узла $\delta\Omega$ (числитель) и аргумента перигея $\delta\omega$ (знаменатель) в градусах за сутки представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Прецессия элементов орбиты за сутки

Наклонение	Высота орбиты, км			
	200	500	1000	85800
30°	$\frac{-7,6}{+12,07}$	$\frac{-6,5}{+10,3}$	$\frac{-5,1}{+8,1}$	$\frac{-0,012}{+0,019}$
50°	$\frac{-5,7}{+4,7}$	$\frac{-4,8}{+4,0}$	$\frac{-3,8}{+3,2}$	$\frac{-0,009}{+0,007}$
63,4°	$\frac{-3,9}{0}$	$\frac{-3,4}{0}$	$\frac{-2,5}{0}$	$\frac{-0,005}{0}$
80°	$\frac{-1,5}{-3,7}$	$\frac{-1,3}{-3,2}$	$\frac{-1,0}{-2,4}$	$\frac{-0,002}{-0,05}$
90°	$\frac{0}{-4,4}$	$\frac{0}{-3,8}$	$\frac{0}{-2,8}$	$\frac{0}{-0,007}$
100°	$\frac{+1,5}{-3,7}$	$\frac{+1,3}{-3,2}$	$\frac{+1,0}{-2,4}$	$\frac{+0,002}{-0,05}$

Вековые возмущения наклоения, фокального параметра и эксцентриситета орбиты в первом приближении равны нулю:

$$\delta i = \int_0^{2\pi} FW \frac{r}{p} \cos u d\vartheta = 0,$$

$$\delta p = \int_0^{2\pi} 2rFT d\vartheta = 0,$$

$$\delta e = \int_0^{2\pi} F \left\{ S \sin \vartheta + T \left[e \frac{r}{p} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta \right] \right\} d\vartheta = 0.$$

1.4. Возмущения орбиты, вызванные сопротивлением атмосферы

Основные участки орбит искусственных спутников Земли проходят на высотах $h > 150 - 200$ км, где атмосфера крайне разрежена ($\rho_{240} \approx 10^{-10} \rho_0$). Однако, малое сопротивление атмосферы является постоянно действующей силой и на больших интервалах времени может существенно изменить элементы орбиты.

Сила лобового сопротивления противоположна по направлению скорости движения КА относительно воздуха и определяется по формуле:

$$\vec{R}_a = c_{xa} S_M \frac{\rho V^2}{2} \left(-\frac{\vec{V}}{V} \right),$$

где c_{xa} – коэффициент лобового сопротивления, S_M – площадь мишени (наибольшего из сечений КА, перпендикулярных к направлению движения), ρ – плотность атмосферы, V – скорость аппарата относительно атмосферы.

Поделив на массу КА m , получаем ускорение возмущающей силы сопротивления:

$$\vec{j}_a = \sigma \rho V^2 \left(-\frac{\vec{V}}{V} \right). \quad (1.27)$$

Здесь $\sigma = \frac{c_{xa} S_M}{2m}$ – баллистический коэффициент КА.

В свободномолекулярном потоке коэффициент c_{xa} слабо зависит от формы спутника и определяется в основном характером

отражения молекул воздуха от поверхности и его можно принять равным $c_{ха} \approx 2...2,5$. При ориентированном полёте КА площадь миделя S_M известна, при неориентированном полёте его движение относительно центра масс принимают хаотическим. Тогда:

$$S_M \approx 0,25 \cdot S_{полн},$$

где $S_{полн}$ – площадь поверхности КА.

Наибольшая сложность при определении возмущений от сопротивления атмосферы заключается в вычислении плотности атмосферы. Запишем условие вертикального равновесия атмосферы (основное уравнение статики атмосферы):

$$dp = -\rho g dh, \quad (1.28)$$

где dp – изменение давления воздуха при изменении высоты h на величину dh , g – ускорение силы тяжести. Согласно уравнению состояния идеального газа:

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (1.29)$$

Здесь M – молярная масса воздуха, R – универсальная газовая постоянная, T – термодинамическая температура. После подстановки (1.29) в (1.28) получим:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gM}{RT} dh.$$

Интегрируя это уравнение от начальной (опорной) высоты h_0 до текущей высоты h , найдём:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\int_{h_0}^h \frac{gM}{RT} dh\right),$$

где $p_0 = p(h_0)$, а затем с учётом (1.29):

$$\rho(h) = \rho_0 \frac{MT_0}{M_0 T} \exp\left(-\int_{h_0}^h \frac{gM}{RT} dh\right). \quad (1.30)$$

Здесь ρ_0, M_0, T_0 соответствует высоте h_0 .

Изменение параметров M и T – это функции времени и геофизических факторов изменения состояния атмосферы, зависящих от активности Солнца. Именно поэтому в изменении параметров атмосферы наблюдается периодичность, связанная с обращением Земли вокруг Солнца, с обращением Солнца вокруг своей оси, с изменением солнечной активности в течение одиннадцатилетнего цикла и др.

Существуют различные модели атмосферы:

– модели атмосферы, учитывающие зависимость её параметров не только от высоты, но и от перечисленных выше факторов, принято называть *динамическими* (например, ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полётов искусственных спутников Земли). Поскольку построение этих моделей – процесс трудоёмкий, на практике пользуются различными упрощёнными моделями;

– *статические* модели атмосферы, которые дают возможность определять плотность как функцию высоты и не учитывают зависимость плотности от времени (например, ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная);

– большое распространение в практике имеют также *локальные* модели атмосферы, пригодные лишь для заданного диапазона высот и в течение определенного интервала времени. Если в уравнении (1.30) пренебречь изменением g, M, T по высоте, то получим:

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h-h_0}{H}\right), \quad (1.31)$$

где $H = \frac{RT}{gM}$ – высота однородной атмосферы (высота столба однородной атмосферы, имеющей плотность ρ_0 , который при $h = h_0$

имеет такое же давление, что и рассматриваемая атмосфера). Такая модель атмосферы называется изотермической, так как $T = const$.

Согласно формуле (1.31), при изменении высоты h на величину H плотность уменьшается в $e \approx 2,7$ раз. Эта формула может быть использована для расчёта плотности в некотором диапазоне высот. Величина однородной атмосферы H существенно зависит от расстояния до поверхности Земли, а также от уровня солнечной активности и местного времени (рисунок 1.11).

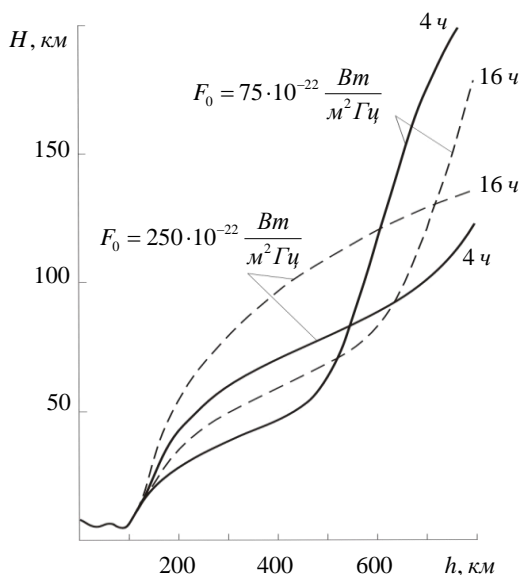


Рисунок 1.11 – Высота однородной атмосферы для различных уровней солнечной активности F_0 и времени суток

Используя векторное уравнение (1.27), найдём проекции возмущающего ускорения на радиальное, трансверсальное и нормальное направления. Если не учитывать захват атмосферы вращением Земли, то можно записать:

$$S = -\sigma\rho VV_r, \quad T = -\sigma\rho VV_n, \quad W = 0, \quad (1.32)$$

где V_r, V_n – радиальная и трансверсальная составляющие скорости.

Таким образом, рассматриваемое возмущающее ускорение не имеет составляющей, нормальной к плоскости орбиты и поэтому в соответствии с (1.9) не может изменить её положение ($\delta\Omega = \delta i = 0$).

На основании зависимостей (1.5) выражения (1.32) можно записать в виде:

$$S = -\sigma\rho\frac{\mu}{p}e\sin\vartheta\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2},$$

$$T = -\sigma\rho\frac{\mu}{p}(1+e\cos\vartheta)\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}, \quad W = 0,$$

и далее с учётом (1.9), (1.13) и (1.20) для вековых изменений элементов, определяющих движение КА в плоскости орбиты:

$$\delta p = -2\sigma p^2 \int_0^{2\pi} \rho \frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} d\vartheta,$$

$$\delta e = -2\sigma p \int_0^{2\pi} \rho \frac{(e+\cos\vartheta)\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} d\vartheta,$$

$$\delta\omega = -\frac{2\sigma p}{e} \int_0^{2\pi} \rho \frac{\sin\vartheta\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} d\vartheta.$$

Рассмотрим подробнее третье из полученных выражений. Для статической модели атмосферы плотность является функцией высоты:

$$\rho = \rho(h) = \rho\left(\frac{p}{1+e\cos\vartheta} - R_3\right),$$

где $R_3 = 6371$ км – средний радиус Земли. В таком случае подынтегральное выражение оказывается нечётной функцией истинной аномалии, интеграл от которой равен нулю.

Таким образом, вековое возмущение аргумента перигея ω для случая статической модели атмосферы отсутствует ($\delta\omega = 0$).

Вековые возмущения испытывают фокальный параметр p и эксцентриситет орбиты e , соотношения для расчёта которых приведены ниже.

Для эллиптических орбит с малым начальным эксцентриситетом в интервале $0 \leq e \leq \frac{2H}{A}$:

$$\delta p = -4\pi\sigma\rho_{cp}p^2(1 + \nu^2/4 + \nu^2/64 + \nu^6/2304 + \dots),$$

$$\delta e = -2\pi\sigma\rho_{cp}p \left[\begin{array}{l} \nu(1 + \nu^2/8 + \nu^4/192 + \dots) + \\ + e(1 + 3\nu^2/8 + 5\nu^4/192 + \dots) \end{array} \right],$$

где $\rho_{cp} = \rho_\pi \exp(-\nu)$ – средняя плотность атмосферы для околокруговой орбиты, ρ_π – плотность атмосферы в перигее орбиты,

$\nu = \frac{Ae}{H}$, H – высота однородной атмосферы в перигее,

$A = \frac{P}{(1 - e^2)}$ – большая полуось орбиты.

Для эллиптических орбит со средним начальным эксцентриситетом $\frac{1,5H}{A} < e \leq 0,5$ ($\nu > 1,5$):

$$\delta p = -\frac{2\sigma\rho_\pi p^2}{1 - e^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \left(f_0 - \frac{e^2}{2} f_2 - \frac{e^4}{8} f_4 - \dots \right),$$

$$\delta e = -2\sigma\rho_\pi p \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \left(f_1 + e f_2 + \frac{e^2}{2} f_3 + \frac{e^3}{2} f_4 + \dots \right),$$

где:

$$f_0 = 1 + \frac{1}{8\nu} + \frac{9}{128\nu^2} + \frac{75}{1024\nu^3} + \dots; \quad f_1 = 1 - \frac{3}{8\nu} - \frac{15}{128\nu^2} - \frac{105}{1024\nu^3} - \dots;$$

$$f_2 = f_0 - \frac{f_1}{\nu}; \quad f_3 = f_1 \left(1 + \frac{2}{\nu^2} \right) - \frac{f_0}{\nu}; \quad f_4 = \left(1 + \frac{3}{\nu^2} \right) \left(f_0 - \frac{2f_1}{\nu} \right).$$

Для эллиптических орбит с большим начальным эксцентриситетом в интервале $0,5 < e < 1$:

$$\begin{aligned}\delta p &= -2f_0\sigma\rho_\pi\sqrt{\frac{2\pi p^3 H}{e}}, \\ \delta e &= -2f_1\sigma\rho_\pi(1+e)\sqrt{\frac{2\pi p H}{e}}.\end{aligned}$$

Под влиянием сопротивления атмосферы эллиптическая орбита спутника с течением времени всё более приближается к круговой. Период обращения монотонно убывает, а средняя скорость полёта возрастает. Максимальная скорость снижения высоты орбиты приходится на район апогея, минимальная – на район перигея орбиты.

При движении КА по круговой орбите $V_n = V$, $V_r = 0$. Тогда в соответствии с (1.32):

$$T = -\sigma\rho V^2 = -\sigma\rho\frac{\mu}{r}, \quad S = W = 0.$$

Приближённые значения вековых возмущений некоторых параметров круговой орбиты за один виток определяются интегрированием линеаризованной системы уравнений движения в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\delta r &= -4\pi\sigma\rho r^2, \quad \delta V_n = 2\pi\sigma\rho\sqrt{\mu r}, \quad \delta V_r = -2\sigma\rho\sqrt{\mu r}, \\ \delta l &= 12\pi^2\sigma\rho r^2, \quad \delta T = -12\pi^2\sigma\rho\sqrt{\frac{r^5}{\mu}},\end{aligned}\tag{1.33}$$

где δl , δT – вековые возмущения смещения вдоль орбиты и периода обращения, соответственно.

Приведённое соотношение для приращения трансверсальной составляющей скорости выражает аэродинамический “парадокс спутника”: вследствие торможения атмосферой линейная скорость спутника, движущегося по орбите, близкой к круговой, возрастает.

При этом ускорение в направлении движения оказывается таким же, каким бы оно было, если бы сила лобового сопротивления изменила своё направление на противоположное и толкала спутник вперёд:

$$\frac{dV_n}{dt} = \sigma \rho V^2.$$

Энергетическое объяснение этого “парадокса” заключается в следующем. При торможении в атмосфере КА снижается по пологой спиралевидной траектории и с каждым витком оказывается на всё более низкой почти круговой орбите с большей орбитальной скоростью. Хотя кинетическая энергия аппарата и возрастает, полная механическая энергия в результате сопротивления атмосферы убывает (как и всегда при сопротивлении), так как потенциальная энергия уменьшается быстрее, чем увеличивается кинетическая.

Можно показать, что угол наклона траектории спутника при снижении по спирали под действием гравитационной силы G и силы сопротивления атмосферы R_{xa} оценивается как:

$$\sin \theta = 2 \frac{R_{xa}}{G}. \quad (1.34)$$

Из приведённого соотношения следует, что проекция гравитационной силы на касательную к траектории в два раза превышает силу сопротивления атмосферы. Таким образом, с точки зрения действующих на КА сил ускоряет падающий спутник земное притяжение, а не сила сопротивления.

Для расчёта изменений траекторных параметров за n витков используются соотношения:

$$\Delta r = n \delta r, \quad \Delta V_n = n \delta V_n, \quad \Delta l = \frac{n^2}{2} \delta l, \quad \Delta T = \frac{2n-1}{2} \delta T.$$

Возмущения круговой орбиты под влиянием сопротивления воздуха для $\sigma = 0,1$ представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Приращения параметров круговой орбиты за один виток

$h, \text{ км}$	$\delta T, \text{ с}$	$\delta l, \text{ км}$	$\delta r, \text{ км}$	$\delta V_n, \text{ м/с}$	$\delta V_r, \text{ м/с}$
120	-158	1240	-132	79	-25
150	-11	87	-9,22	5,5	-1,8
200	-2,4	19	-2,0	1,2	-0,37
300	-0,23	1,8	-0,19	0,11	-0,035
400	-0,037	0,28	-0,03	0,017	$-5,4 \cdot 10^{-3}$

Если учесть захват атмосферы вращением Земли, то при движении КА по круговой орбите радиуса r возмущающее ускорение, нормальное к плоскости орбиты, вызывает вековое вращение её плоскости вокруг линии узлов. При этом узел орбиты не смещается, а наклонение изменяется за один виток на величину:

$$\delta i = -\pi k' \sigma r \frac{\omega_3 r^2}{V} \sin i = \frac{k' \omega_3 \sin i}{12\pi} \delta T,$$

где k' – коэффициент, характеризующий степень захвата атмосферы, $0 \leq k' \leq 1$, $\omega_3 = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость суточного вращения Земли, δT – изменение периода обращения за один виток, определяемое без учёта захвата атмосферы.

Под влиянием захвата атмосферы вращением Земли плоскость круговой наклонной орбиты стремится совпасть с плоскостью экватора. Отметим, что поворот орбиты к этому положению совершается чрезвычайно медленно. Максимальное изменение наклона составляет $|\delta i| \approx 1''$ для орбиты высотой 200 км и $|\delta i| \approx 1,5'' \cdot 10^{-4}$ для орбиты высотой 800 км. Таким образом, в большинстве случаев $|\delta i| \ll 1''$.

1.5. Время существования спутника Земли

По мере уменьшения высоты полёта резко усиливается влияние сопротивления воздуха (см. таблицу 1.2), конечным результатом воздействия которого является падение спутника на Землю. При проектировании космических аппаратов, движущихся по низким орбитам, важнейшей характеристикой является время существования на орбите, то есть время пассивного движения с момента выхода КА на целевую орбиту до момента входа в плотные слои атмосферы и прекращения его существования.

Найдём изменение высоты круговой орбиты под влиянием сопротивления воздуха, для чего воспользуемся формулой возмущения радиальной скорости (1.33):

$$\frac{dh}{dt} = \delta V_r = -2\sigma\rho\sqrt{\mu r},$$

откуда:

$$dt = -\frac{dh}{2\sigma\rho\sqrt{\mu r}}, \quad t - t_1 = -\frac{1}{2\sigma\sqrt{\mu}} \int_{h_1}^h \frac{dh}{\rho(h)\sqrt{r}}.$$

Здесь h_1 – высота орбиты в начальный момент времени t_1 .

Введём функцию высоты:

$$F(h) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_0^h \frac{dh}{\rho(h)\sqrt{r}},$$

тогда время спуска КА с начальной высоты h_1 до высоты h определится как:

$$t - t_1 = \frac{F(h_1) - F(h)}{\sigma}. \quad (1.35)$$

Найдём приближённое значение функции $F(h)$ для изотермической модели атмосферы следующим образом:

$$\rho(h) = \rho_1 \exp\left(-\frac{h - h_1}{H}\right), \quad \sqrt{r} \approx const,$$

$$\begin{aligned}
 F(h) &= \frac{1}{2\sqrt{\mu r} \rho_1} \int_0^h \exp\left(\frac{h-h_1}{h}\right) dh = \\
 &= \frac{h}{2\sqrt{\mu r} \rho_1} \left[\exp\left(\frac{h-h_1}{H}\right) - \exp\left(-\frac{h_1}{H}\right) \right] = \frac{H}{2\sqrt{\mu r}} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right),
 \end{aligned}$$

где ρ_0 – плотность атмосферы при $h=0$. Так как $\rho \ll \rho_0$, то:

$$F(h) \approx \frac{H}{2\rho\sqrt{\mu r}}.$$

Найдём время существования КА на круговой орбите. К моменту прекращения существования спутника при $h \rightarrow 0$: $F(h) \rightarrow 0$. Используя формулу (1.35), получаем:

$$t_{\text{сущ}} = \frac{F(h_1)}{\sigma}.$$

Критической называется такая орбита, на которой спутник может сделать только один полный оборот вокруг Земли. Из условия равенства периода обращения по критической орбите и времени существования КА получаем трансцендентное уравнение для определения высоты критической орбиты $h_{\text{крит}}$:

$$2\pi \sqrt{\frac{(R_3 + h_{\text{крит}})^3}{\mu}} = \frac{F(h_{\text{крит}})}{\sigma}.$$

Для большинства космических аппаратов $h_{\text{крит}}$ лежит в диапазоне от 90 до 110 км.

1.6. Влияние притяжения небесных тел на движение КА

Рассмотрим КА массой m , который движется вокруг основного притягивающего тела (Земли) массой m_0 . Будем учитывать влияние других небесных тел массой m_i , $i=1..n$, гравитационные поля которых считаем центральными вследствие их удалённости.

Выберем в качестве системы отсчёта некоторую инерциальную систему координат $OX_{II}Y_{II}Z_{II}$ (рисунок 1.12). Напишем уравнение движения КА относительно этой инерциальной системы отсчёта:

$$\ddot{\bar{\rho}} = \sum_{i=0}^n \mu_i \frac{\bar{\rho}_i - \bar{\rho}}{|\bar{\rho}_i - \bar{\rho}|^3} + \frac{\bar{F}_B}{m}, \quad (1.36)$$

где $(\bar{\rho}_i - \bar{\rho})$ – радиус-вектор небесного тела i относительно КА, \bar{F}_B – равнодействующая возмущающих сил, обусловленных нецентральностью поля тяготения Земли, сопротивления атмосферы и прочими факторами.

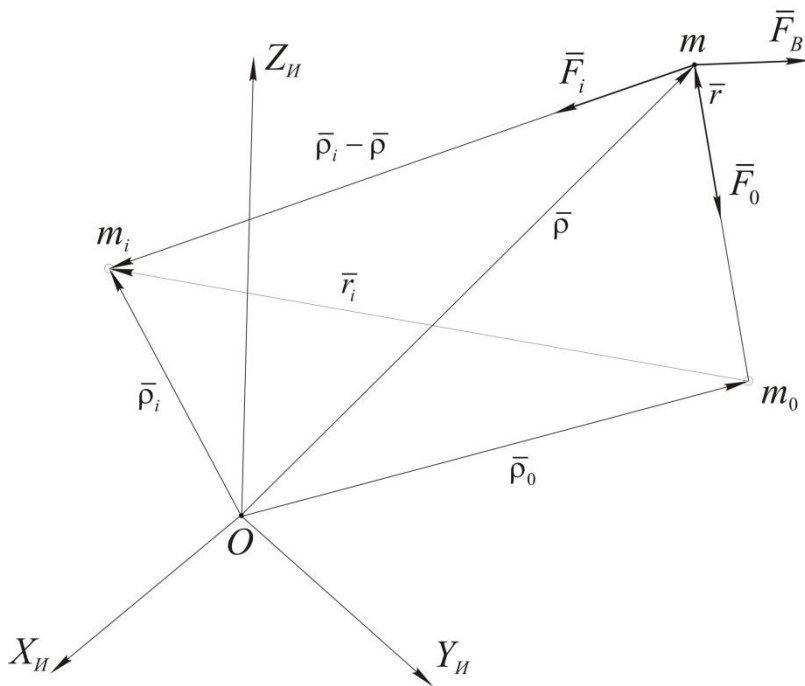


Рисунок 1.12 – Влияние притяжения небесных тел

Запишем также уравнение движения основного небесного тела относительно инерциальной системы отсчёта, пренебрегая влиянием спутника:

$$\ddot{\bar{\rho}}_0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_0}{|\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_0|^3}. \quad (1.37)$$

Составим теперь уравнение движения спутника относительно основного небесного тела, для чего вычтем уравнение (1.37) из (1.36):

$$\ddot{\bar{\rho}} - \ddot{\bar{\rho}}_0 = \mu_0 \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}}{|\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}|^3} + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\bar{\rho}_i - \bar{\rho}}{|\bar{\rho}_i - \bar{\rho}|^3} - \frac{\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_0}{|\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_0|^3} \right) + \bar{f}_B.$$

Замечая из рисунка 1.12, что $\bar{\rho} - \bar{\rho}_0 = \bar{r}$, $\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_0 = \bar{r}_i$, перепишем полученное уравнение в виде:

$$\ddot{\bar{r}} = -\mu_0 \frac{\bar{r}}{r^3} + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\bar{r}_i - \bar{r}}{|\bar{r}_i - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right) + \bar{f}_B.$$

В правой части этого уравнения первый член представляет собой ускорение центральной силы притяжения Земли, второй член в виде суммы есть малое возмущающее ускорение спутника, вызванное совокупностью сил притяжения всех остальных небесных тел, кроме Земли.

Для КА с высотой полёта над поверхностью Земли $h < 100000$ км возмущающие влияния всех небесных тел, за исключением Луны и Солнца, являются пренебрежимо малыми величинами. Возмущающие ускорения, вызванные притяжением Луны и Солнца, можно определять как:

$$\bar{f}_L = \mu_L \left(\frac{\bar{r}_L - \bar{r}}{|\bar{r}_L - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_L}{r_L^3} \right), \quad \bar{f}_C = \mu_C \left(\frac{\bar{r}_C - \bar{r}}{|\bar{r}_C - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_C}{r_C^3} \right),$$

где \bar{r}_L , \bar{r}_C , \bar{r} – радиус-векторы Луны, Солнца и КА относительно центра Земли, соответственно.

Приведём оценки возмущающего влияния притяжения Луны и Солнца на движение спутника. В таблице 1.3 приведены максимальные значения возмущающих ускорений \bar{f}_L и \bar{f}_C , а также отношения этих ускорений к ускорению g центрального поля притяжения Земли.

Таблица 1.3 – Максимальные значения возмущающих ускорений, вызванных притяжением Луны и Солнца

Высота орбиты, км	Максимальное возмущающее ускорение, $m/c^2 \cdot 10^{-6}$		Отношение максимального возмущающего ускорения к g , 10^{-6}			
	от Солнца	от Луны	от Солнца	от Луны	от 2-й зональной гармоники	от аномалий силы тяжести
0	0,50	1.1	0,051	0,11	3400	60
2000	0,66	1,4	0,12	0,25	1900	35
20000	2,1	4,5	3,6	7,9	200	3,5
50000	4,4	9,8	35	77	43	0,78
100000	8,3	18	240	520	12	0,22

Для сравнения приведены отношения максимальных ускорений, вызываемых сжатием Земли (второй зональной гармоникой гравитационного потенциала) и аномалиями гравитационного поля Земли, к величине g .

Анализируя данные таблицы, можно сделать следующие выводы:

– возмущающее ускорение, вызываемое притяжением Луны, примерно в 2,2 раза больше возмущающего ускорения от притяжения Солнца;

– для спутников с высотами орбит менее 10000 км можно не учитывать возмущения от Луны и Солнца, так как они значительно меньше аномалий силы тяжести Земли;

– на высотах $h > 20000$ км возмущающие ускорения от Луны и Солнца превосходят аномалии силы тяжести, а на $h > 50000$ км превосходят возмущения от сжатия Земли.

2. ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ

В данном разделе приведены решения траекторных задач в предположении, что космический аппарат рассматривается как материальная точка и движется в гравитационном поле одного тела. Ограничимся рассмотрением движения КА под действием малой тяги электроракетного двигателя (ЭРД) с нерегулируемыми характеристиками. Такой двигатель может находиться в двух режимах: включённом, и тогда тяга P , скорость истечения c и массовый расход \dot{m} рабочего тела постоянны, либо выключенном, и тогда эти параметры принимают нулевые значения.

2.1. Математические модели движения

Для описания орбитального движения КА с ЭРД традиционно используется математическая модель в оскулирующих элементах. Для орбит со значительным эксцентриситетом положение аппарата можно описать вектором:

$$\mathbf{x} = \{A, e, \omega, i, \Omega, \vartheta\}^T, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

где A – большая полуось орбиты, e – эксцентриситет орбиты, ω – аргумент перигея, i – наклонение плоскости орбиты, Ω – долгота восходящего узла, ϑ – угол истинной аномалии, \mathbf{X} – область допустимых значений параметров орбиты, определяемая классом исследуемых межорбитальных перелётов.

Уравнения движения центра масс КА, записанные для компонентов вектора состояния \mathbf{x} , будут иметь вид:

$$\frac{dA}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2A}{1-e^2} \left[Se \sin \vartheta + T \frac{p}{r} \right],$$
$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ S \sin \vartheta + T \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + \frac{T}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - W \frac{r}{p} \operatorname{ctgi} \sin u \right], \\
\frac{di}{dt} &= W \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} \cos u, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= W \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r \sin u}{p \sin i}, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{\mu}{r^2} + S \frac{\cos \vartheta}{e} - \frac{T}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \right],
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$, $u = \omega + \vartheta$ – аргумент широты, μ – гравитационный параметр Земли, S, T, W – компоненты вектора возмущающего ускорения вдоль радиального, трансверсального и нормального направлений, соответственно, $p = A(1 - e^2)$ – фокальный параметр орбиты.

Использование модели (2.1) при расчёте движения по орбитам с малым эксцентриситетом может привести к большой погрешности определения аргумента перигея. В этом случае целесообразно использовать систему, где вместо эксцентриситета и аргумента перигея используются компоненты вектора Лапласа. Кроме того, в качестве параметра, определяющего положение КА, в векторе состояния вместо угла истинной аномалии ϑ используется аргумент широты u :

$$\mathbf{x} = \{A, q, k, i, \Omega, u\}^T, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

где $q = e \cos \omega$, $k = e \sin \omega$ – компоненты вектора Лапласа. Система уравнений движения в оскулирующих элементах примет вид:

$$\frac{dA}{dt} = 2 \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \frac{R}{\sqrt{1 - e^2}} \left[S \frac{q \sin u - k \cos u}{R} + T \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{dq}{dt} &= \sqrt{\frac{A}{\mu}} \sqrt{1-e^2} \left\{ \begin{aligned} &S \sin u + T \left(1 + \frac{1}{R}\right) \cos u + \\ &+ \frac{1}{R} (qT + kWctgi \sin u) \end{aligned} \right\}, \\
\frac{dk}{dt} &= \sqrt{\frac{A}{\mu}} \sqrt{1-e^2} \left\{ \begin{aligned} &-S \cos u + T \left(1 + \frac{1}{R}\right) \sin u + \\ &+ \frac{1}{R} (kT - qWctgi \sin u) \end{aligned} \right\}, \\
\frac{di}{dt} &= W \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{R} \cos u, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= W \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{R} \frac{\sin u}{\sin i}, \\
\frac{du}{dt} &= \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{R} \left[\frac{\mu}{A^2} \frac{R^3}{(1-e^2)^2} - Wctgi \sin u \right],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $R = 1 + q \cos u + k \sin u$, $e^2 = q^2 + k^2$.

Для двигательных систем с нерегулируемой тягой управление осуществляется включением-выключением двигательной установки и отклонением вектора тяги в двух плоскостях. В этом случае управление можно задать вектором:

$$\mathbf{u} = \{\delta, \theta, \nu\}^T, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}.$$

Здесь \mathbf{U} – область допустимых управлений, определяемая классом рассматриваемых двигательных установок, $\delta = \{0, 1\}$ – функция включения-выключения, принимающая значения 0 и 1, θ – угол между проекцией вектора тяги на орбитальную плоскость и трансверсалью, ν – угол между вектором тяги и плоскостью орбиты. Для компонентов вектора реактивного ускорения можно записать:

$$a_s = a\delta \sin \theta \cos \nu, \quad a_T = a\delta \cos \theta \cos \nu, \quad a_W = a\delta \sin \nu,$$

где a – реактивное ускорение от тяги двигателя в текущий момент времени.

Для исследования траекторий движения низкоорбитальных КА в векторе возмущающего ускорения необходимо учитывать влияние нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы.

Для учёта влияния гравитационных возмущений используется разложение потенциала притяжения Земли по сферическим функциям. Влияние несферичности Земли на эволюцию орбиты КА в основном описывается вторым членом разложения потенциала (см. раздел 1.2). Если в разложении геопотенциала учесть только вторую зональную гармонику, то проекции возмущающего ускорения определяются соотношениями:

$$S_g = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1),$$

$$T_g = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u,$$

$$W_g = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u.$$

Вековые изменения будут испытывать элементы орбиты q , k , ω и Ω , скорость смещения которых приближённо описываются производными:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dq}{dt}\right)_g &\approx -\frac{B}{A^{3,5}} k, & \left(\frac{dk}{dt}\right)_g &\approx \frac{B}{A^{3,5}} q, \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_g &\approx \frac{B}{A^{3,5}}, & \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_g &\approx -\frac{\varepsilon \cos i}{A^{3,5} \sqrt{\mu}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $B = \frac{\varepsilon(5 \cos^2 i - 1)}{2\sqrt{\mu}}$.

Для расчёта проекций возмущающего ускорения от силы аэродинамического сопротивления (без учёта захвата атмосферы вращением Земли) используются уравнения:

$$T_a = -\sigma\rho V \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta),$$

$$S_a = -\sigma\rho V \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad W_a = 0,$$

где σ – баллистический коэффициент КА, ρ – плотность атмосферы на заданной высоте, V – скорость КА, определяемая по соотношению:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}.$$

2.2. Метод усреднения в динамике полёта с малой тягой

Метод усреднения – один из асимптотических методов теории оптимального управления, которые широко используются при изучении свойств динамических колебательных систем с медленно и быстро меняющимися переменными. Такие системы содержат малые в некотором смысле воздействия (параметры), слабо влияющие на характер движения. Однако на большом интервале времени результат этих воздействий может накапливаться и приводить к существенному изменению характеристик системы. Метод усреднения позволяет разделить быстрые и медленные переменные и исследовать эволюцию последних на упрощённой модели.

Рассматриваемый метод используется при решении некоторых видов динамических задач оптимизации в механике полёта с малой тягой. Это обуславливается, во-первых, наличием в явном виде малого параметра – реактивного ускорения от тяги, которое меньше гравитационного на несколько порядков, во вторых, присутствием циклической переменной – угловой координаты.

Модель движения КА в оскулирующих элементах является типичной для колебательных систем, содержащих как медленно, так и быстро меняющиеся переменные, а так же малый параметр. В соответствии с терминологией, используемой в дисциплинах системного анализа, такая система носит название системы с вращающейся фазой, под которой понимается быстро меняющаяся циклическая переменная. В качестве вращающейся фазы выступает угловая координата, характеризующая положение КА на орбите. Это может быть истинная или эксцентрическая аномалия, аргумент широты и другие углы. Роль малого параметра выполняет реактивное ускорение.

Запишем уравнения движения КА с малой тягой в форме, используемой в подобного рода задачах, не учитывая влияния внешних возмущающих сил:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= aZ(\mathbf{z}, y, \mathbf{u}(t)), \\ \dot{y} &= \omega(\mathbf{z}, y) + aY(\mathbf{z}, y, \mathbf{u}(t)),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где \mathbf{z} – вектор медленных переменных, a – малый параметр – текущее реактивное ускорение, $\mathbf{u}(t)$ – вектор управления – неизвестная функция времени, y – быстрая переменная. Компонентами вектора медленных переменных \mathbf{z} являются элементы орбиты КА и характеристическая скорость перелёта: $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, V_x\}^T$.

Так как реактивное ускорение a на несколько порядков меньше гравитационного, то правомерно записать:

$$\omega(\mathbf{z}, y) \gg wY.$$

Тогда исходную систему (2.4) можно упростить, отбросив второй член уравнения для быстрой переменной, что позволяет перейти в рассматриваемой системе от времени к быстрой переменной y :

$$\frac{d\mathbf{z}}{dy} = aZ(\mathbf{z}, y, \mathbf{u}(t)) \cdot \omega^{-1}(\mathbf{z}, y),\tag{2.5}$$

Для выполнения усреднения нужно найти управление, позволяющее исключить из правых частей уравнений (2.5) время t – также быструю переменную.

Траектории перелётов КА с малой тягой, имеющих значительную продолжительность, носят многовитковый характер. При этом параметры оскулирующей орбиты и параметры управления изменяются как в пределах одного витка (периодические изменения), так и в течение всего перелёта (вековые изменения). Малое изменение медленных переменных за виток позволяет управление в виде программы $\mathbf{u}(t)$ заменить на управление – функцию быстрых и медленных переменных $\mathbf{u}(\mathbf{z}, y)$. При этом процесс поиска оптимального управления \mathbf{u}_{opt} разделяется на определение оптимальной структуры управления на витке и поиск оптимального управления вековыми изменениями орбиты на значительных интервалах времени.

Оптимальную структуру управления на витке можно найти с помощью принципа максимума Понтрягина, условно считая, что параметры орбиты в пределах витка неизменны. Использование алгоритма принципа максимума приводит к тому, что оптимальное управление на витке будет функцией не только y и \mathbf{z} , но также вектора сопряжённых множителей $\boldsymbol{\psi}$:

$$\mathbf{u}_{opt}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\psi}, y).$$

Применение различных приёмов (переход к “медленному” времени, введение ограничений и др.) позволяет представить $\boldsymbol{\psi}$ в виде медленной переменной. Таким образом, в правых частях уравнений (2.5) будет содержаться единственная быстрая переменная y , и эти уравнения могут быть усреднены по схеме:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dy} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[Z(\mathbf{z}, y, \mathbf{u}_{opt}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\psi}, y)) \cdot \omega^{-1}(\mathbf{z}, y) \right] dy.$$

Символом « \wedge » обозначен вектор медленных переменных после усреднения.

Полученная в результате усреднения упрощённая динамическая модель, будет включать систему уравнений, в правых частях которых будет отсутствовать быстрая переменная y . Для данной системы, все переменные которой – медленные функции, формулируется задача оптимального управления в соответствии со стандартной процедурой принципа максимума. Результатом решения является оптимальная программа управления $\mathbf{u}_{opt}(t)$.

Отсутствие быстрых переменных даёт возможность численно интегрировать усреднённую систему с большим шагом. При решении краевой задачи устраняются трудности вызванные наличием быстрых переменных, характерные для исходной модели. Уравнения усреднённой системы, как правило, более просты по сравнению с исходными, что позволяет использовать их для вывода аналитических и полуаналитических выражений для расчёта многовитковых траекторий.

Усреднённые уравнения дают достаточно высокую точность решения на асимптотически большом интервале времени порядка $1/a$, а погрешность вычисления на таком интервале будет порядка малого параметра a . В связи с этим, область применения усреднённой модели ограничена, с одной стороны, задачами малых изменений компонентов \mathbf{x} , когда они одного порядка с малым параметром, с другой стороны – задачами, требующими длительного времени реализации.

В частности, метод усреднения неприменим для расчёта:

– прецизионной коррекции орбиты, когда периодические изменения элементов орбиты могут быть сопоставимы с вековыми или даже превышать их;

– движения на больших высотах (в районе нескольких сотен тысяч километров), так как с ростом геометрических размеров орбиты гравитационное и реактивное ускорения становятся сравнимыми по величине, и реактивное ускорение уже не может рассматриваться как малый параметр.

2.3. Перелёты между околосферными компланарными орбитами

Рассматриваются компланарные межорбитальные манёвры КА с двигателем малой тяги между низкими околосферными орбитами высотой до 2000 км. Траектория манёвра в общем случае содержит активные и пассивные участки. Необходимо определить оптимальную программу управления и траекторию при фиксированном времени перелёта. В качестве критерия оптимальности принимаются затраты характеристической скорости.

Для электроракетных двигателей характерен малый расход рабочего тела, вследствие чего изменением массы КА часто пренебрегают. Таким образом, можно принять, что ускорение, сообщаемое аппарату двигателем постоянно.

При решении задачи вводятся следующие ограничения на управление и параметры орбиты:

– ускорение от тяги на активных участках считается постоянным $a = \delta a_0$, где $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ – функция включения тяги, a_0 – ускорение от тяги в начальный момент времени;

– вектор ускорения ориентируется вдоль трансверсали $a_T = a$, $a_S = 0$, $a_W = 0$;

– эксцентриситет начальной и конечной, а также переходных орбит лежит в диапазоне $0 \leq e \leq 1$;

– изменения параметров орбиты за виток незначительны по сравнению с требуемыми, а траектория перехода является многовитковой.

Принятые предположения позволяют упростить математическую модель движения с помощью метода усреднения. Указанный метод предполагает разделение движения КА на периодическую (быстро меняющуюся) и вековую (медленно меняющуюся) составляющие и отдельную их оптимизацию. Таким образом, поиск оптимального управления состоит из двух этапов. Первый этап – определение оптимального управления в пределах витка (локальная оптимизация), второй – построение усреднённой модели движения и определение оптимального управления вековым изменением параметров орбиты.

2.3.1. Определение оптимального управления на витке

Для описания орбитального движения КА в плоскости орбиты в центральном гравитационном поле используется математическая модель в оскулирующих элементах (2.2) без учёта радиальной и нормальной составляющих управляющего ускорения:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 2\sqrt{\frac{A^3}{\mu}}\delta a_0 \frac{R}{\sqrt{1-q^2-k^2}}, \\ \frac{dq}{dt} &= \sqrt{\frac{A}{\mu}}\sqrt{1-q^2-k^2}\delta a_0 \left(\frac{q+\cos u}{R} + \cos u \right), \\ \frac{dk}{dt} &= \sqrt{\frac{A}{\mu}}\sqrt{1-q^2-k^2}\delta a_0 \left(\frac{k+\sin u}{R} + \sin u \right), \\ \frac{du}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}R^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Характеристическая скорость перелёта определяется уравнением:

$$\frac{dV_x}{dt} = |\delta|a_0.\tag{2.7}$$

Предполагается, что эксцентриситет начальной и конечной, а также переходных орбит лежит в диапазоне: $0 \leq e \leq 0,1$. Это позволяет пренебречь компонентами вектора Лапласа в правых частях

уравнений (2.6). После перехода к независимой переменной u с учётом введённых ограничений уравнения (2.6) и (2.7) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{du} &= 2 \frac{A^3}{\mu} \delta a_0, \\ \frac{dq}{du} &= 2 \frac{A^2}{\mu} \delta a_0 \cos u, \\ \frac{dk}{du} &= 2 \frac{A^2}{\mu} \delta a_0 \sin u, \\ \frac{dV_x}{du} &= \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} |\delta| a_0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

Для определения оптимального управления на витке воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Оптимальное управление соответствует минимуму затрат характеристической скорости ($V_x \rightarrow \min$) при фиксированной продолжительности манёвра, равной одному витку. Гамильтониан для неавтономной системы (2.8) и принятого критерия оптимальности записывается в виде:

$$\begin{aligned}H^* &= H + \psi_u \rightarrow \max, \\ H &= -\frac{dV_x}{du} + \frac{dA}{du} \psi_A + \frac{dq}{du} \psi_q + \frac{dk}{du} \psi_k,\end{aligned}$$

где $\psi_A, \psi_q, \psi_k, \psi_u$ – сопряжённые множители. После преобразования получаем:

$$H = 2a_0 \frac{A^2}{\mu} \delta \{ A\psi_A + \psi_q \cos u + \psi_k \sin u \} - a_0 \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} |\delta|.$$

Запишем соотношения для сопряжённых множителей:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_A}{du} = -\frac{\partial H}{\partial A} &= -4a_0 \frac{A}{\mu} \delta \left\{ \frac{3}{2} A\psi_A + \psi_q \cos u + \psi_k \sin u \right\} + \frac{3}{2} a_0 \sqrt{\frac{A}{\mu}} |\delta|, \\ \frac{d\psi_q}{du} = \frac{d\psi_k}{du} &= 0,\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_u}{du} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -2a_0 \frac{A^2}{\mu} \delta \{ \psi_k \cos u - \psi_q \sin u \}.$$

В силу допущения о незначительном изменении орбитальных параметров за виток и, как следствие, сопряжённого множителя ψ_A , они принимаются постоянными в пределах витка. Оптимальное управление δ_{opt} находится из условия максимума гамильтониана как релейная функция аргумента широты u . Точки включения и выключения двигателя определяются функцией:

$$F(u) = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} |A\psi_A + \psi_{q0} \cos u + \psi_{k0} \sin u| - 1 = 0,$$

а направление ускорения от тяги на активных участках знаком функции:

$$f(u) = \sqrt{\frac{A}{\mu}} (A\psi_A + \psi_{q0} \cos u + \psi_{k0} \sin u).$$

С учётом введённых функций оптимальное управление на витке записывается в виде:

$$\delta_{opt} = \frac{1 + \text{sign}(F(u))}{2} \text{sign}(f(u)),$$

или:

$$\delta_{opt} = \begin{cases} +1, & f(u) > 0,5; \\ 0, & |f(u)| \leq 0,5; \\ -1, & f(u) < -0,5. \end{cases}$$

На рисунке 2.1 представлена графическая интерпретация полученного решения, анализ которого показывает, что в общем случае структура оптимального управления на витке будет включать два активных участка с разными знаками тяги, центры которых разнесены по аргументу широты на 180° и разделены двумя оди-

наковыми пассивными участками. В частном случае один из активных участков может отсутствовать.

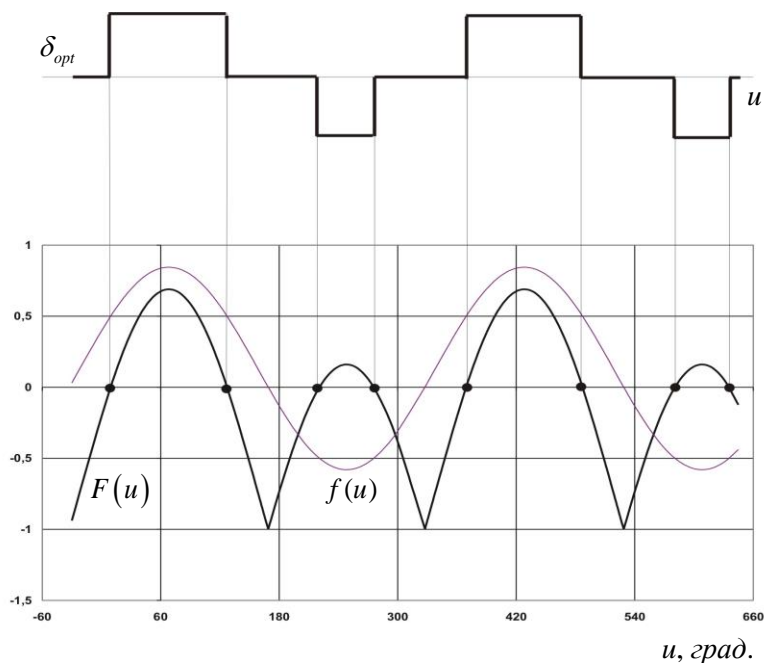


Рисунок 2.1 – Оптимальное управление на витке

2.3.2. Построение усреднённой модели движения

Используя полученную структуру управления на витке, перейдём к построению модели векового изменения параметров орбиты. В качестве параметров управления вводятся следующие величины (рисунок 2.2): ξ – половина ширины разгонного участка с аргументом широты его центра η , α – длительность пассивного участка по аргументу широты.

Определение оптимального управления на витке позволяет провести процедуру усреднения системы уравнений движения (2.8).

В предположении малости изменения параметров орбиты $\mathbf{x} = \{A, q, k\}^T$ за виток, используя метод усреднения, допустимо записать:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{du} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{x}}{du} du,$$

где \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}}$ – соответственно исходный и усреднённый вектор параметров орбиты. С учётом введённых параметров управления:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{du} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\eta-\xi}^{\eta+\xi} \frac{d\mathbf{x}}{du} du - \int_{\eta+\xi+\alpha}^{2\pi+\eta-\xi-\alpha} \frac{d\mathbf{x}}{du} du \right).$$

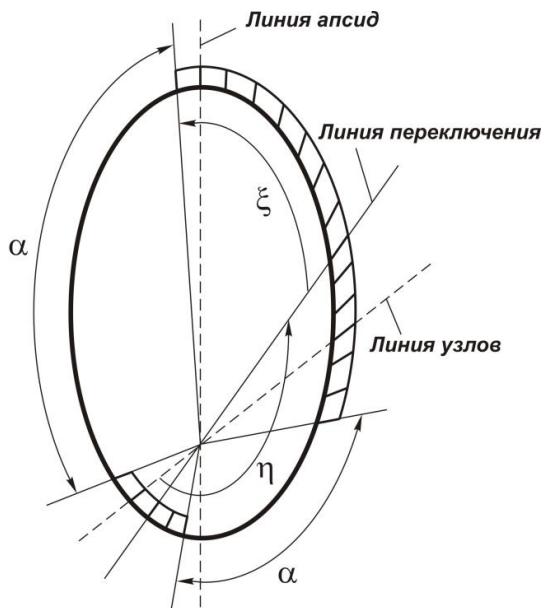


Рисунок 2.2 – Параметры управления

После преобразований и перехода к независимой переменной t получаем усреднённую систему:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 2\sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} [2\xi - (\pi - \alpha)], \\ \frac{dq}{dt} &= 4\sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \sin\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\eta), \\ \frac{dk}{dt} &= 4\sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \sin\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\eta), \\ \frac{dV_x}{dt} &= \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) a_0.\end{aligned}$$

Известно, что на изменение параметров низкой околоземной орбиты сильное влияние оказывает нецентральность гравитационного поля Земли. Если в разложении геопотенциала учесть только вторую зональную гармонику, то с учётом (2.3) математическая модель движения КА в поле земного эллипсоида представляется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 2\sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} [2\xi - (\pi - \alpha)], \\ \frac{dq}{dt} &= 4\sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \sin\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\eta) - \frac{B}{A^{3,5}} k, \\ \frac{dk}{dt} &= 4\sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \sin\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\eta) + \frac{B}{A^{3,5}} q, \\ \frac{dV_x}{dt} &= \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) a_0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

2.3.3. Программы управления при формировании и коррекции орбит

Для определения оптимального управления по критерию минимума затрат характеристической скорости воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Гамильтониан для системы (2.9) представляется в виде:

$$H = -a_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) + 4 \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \left\{ A \psi_A \left(\xi - \frac{\pi - \alpha}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sin \left(\xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} (\psi_q \cos \eta + \psi_k \sin \eta) \right\} + \\ + \frac{B}{A^{3.5}} (q \psi_k - k \psi_q).$$

Уравнения для сопряжённых множителей запишутся следующим образом:

$$\frac{d\psi_A}{dt} = -2 \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \left\{ 3\psi_A \left(\xi - \frac{\pi - \alpha}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{A} \sin \left(\xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} (\psi_q \cos \eta + \psi_k \sin \eta) \right\} + \\ + 3,5 \frac{B}{A^{4.5}} (q \psi_k - k \psi_q), \quad (2.10)$$

$$\frac{d\psi_q}{dt} = -\frac{B}{A^{3.5}} \psi_k, \quad \frac{d\psi_k}{dt} = \frac{B}{A^{3.5}} \psi_q.$$

Законы изменения параметров управления определяются из необходимых условий максимума гамильтониана:

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{a_0}{\pi} + 2 \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \left\{ A \psi_A + \cos \left(\xi + \frac{\alpha}{2} \right) (\psi_q \cos \eta + \psi_k \sin \eta) \right\} = 0,$$

$$\frac{dH}{d\xi} = 4 \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \left[A \psi_A + \cos \left(\xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) (\psi_q \cos \eta + \psi_k \sin \eta) \right] = 0,$$

$$\frac{dH}{d\eta} = 4 \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a_0}{\pi} \sin \left(\xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) (-\psi_q \sin \eta + \psi_k \cos \eta) = 0.$$

После преобразований для параметров оптимального управления получаем:

$$\left(\xi + \alpha \right)_{opt} = \pi - \arccos y, \quad |y| \leq 1, \\ \xi_{opt} = \pi - \arccos z, \quad |z| \leq 1, \quad \eta_{opt} = \arctg \frac{\psi_k}{\psi_q}, \quad (2.11)$$

$$\text{где } y = \frac{A\psi_A + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{A}}}{\sqrt{\psi_q^2 + \psi_k^2}}, \quad z = \frac{A\psi_A - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{A}}}{\sqrt{\psi_q^2 + \psi_k^2}}.$$

Система (2.9) и сопряжённая с ней система (2.10) с полученным управлением (2.11) при заданных граничных условиях и времени перелёта образуют краевую задачу. Неизвестными являются начальные значения сопряжённых множителей $\psi_{A0}, \psi_{q0}, \psi_{k0}$. В качестве невязок краевой задачи используются отклонения конечных значений параметров орбиты от требуемых.

Анализ решений краевой задачи при различных граничных условиях перелёта позволил выявить следующее. Для малого ускорения от тяги, характерного при использовании ЭРД, управление в течение манёвра содержит разгонный и тормозной участки на витке, длительности которых изменяются незначительно. При перелётах в центральном гравитационном поле Земли расположение активных участков постоянно; в нецентральной поле – изменяется по закону, близкому к линейному. Длительность пассивных участков на витке меняется в пределах нескольких градусов.

Решение задачи перелёта значительно упрощается при допущении о постоянстве длительности пассивных и активных участков на витке:

$$\alpha = \text{const}, \quad \xi = \text{const}.$$

Система уравнений движения (2.9) при введённых допущениях решается в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_0}{(1 - \varphi t)^2}, \\ q &= e_0 \cos(\omega_0 + bt) - \psi \ln(1 - \varphi t) \cos \eta, \\ k &= e_0 \sin(\omega_0 + bt) - \psi \ln(1 - \varphi t) \sin \eta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$V_x = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) a_0 t,$$

где A_0, q_0, k_0 – параметры орбиты в начальный момент времени, A, q, k, V_x, t – текущие значения параметров орбиты, характеристической скорости и времени, $\eta = \eta_0 + bt$ – аргумент широты линии переключения, η_0 – начальное положение линии переключения, $b = \frac{B}{A_{cp}^{3,5}}$, $A_{cp} = \frac{A_0 + A_k}{2}$ – среднее значение большой полуоси

$$\text{орбиты, } \varphi = 2 \frac{a_0}{\pi} \sqrt{\frac{A_0}{\mu}} \left[\xi - \frac{(\pi - \alpha)}{2} \right], \quad \psi = 2 \frac{\sin(\xi + \alpha/2)}{\xi - (\pi - \alpha)/2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

После преобразования системы (2.12) при заданных граничных условиях и времени перелёта, ускорении от тяги двигателя, уровне возмущающего ускорения от нецентральной гравитационного поля Земли параметры приближённо-оптимального управления и затраты характеристической скорости определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\pi - \alpha}{2} + \lambda \sin \left(\xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2}, \\ \eta_0 &= \arctg \frac{e_k \sin(\omega_k - bT) - e_0 \sin \omega_0}{e_k \cos(\omega_k - bT) - e_0 \cos \omega_0}, \\ \alpha &= 2 \arccos \left(\frac{\beta}{\lambda \cos \beta} \right), \\ V_{xk} &= \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) a_0 T, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\lambda = \ln(A_k / A_0) / \sqrt{e_k^2 - 2e_k e_0 \cos \Delta\omega_a + e_0^2}$, $\Delta\omega_a = \omega_k - \omega_0 - bT$ – изменение аргумента перигея под действием тяги, T – время манёвра, $\beta = \pi \tilde{V}_x / (2a_0 T)$, $\tilde{V}_x = \sqrt{\mu / A_0} - \sqrt{\mu / A_k}$.

Таким образом, начальное положение линии переключения η_0 , длительность пассивного участка α и затраты характеристической скорости V_{xk} определяются в явном виде. Для вычисления длительности разгонного участка ξ необходимо решить трансцендентное уравнение.

На рисунках 2.3 и 2.4 представлены многовитковые траектории перелёта КА при ускорении от тяги $a_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$ с начальной ($A_0 = 6978,2 \text{ км}$, $e_0 = 0,014$, $\omega_0 = 0$) на конечную орбиту ($A_k = 7038,2 \text{ км}$, $e_k = 0,002$, $\omega_k = 36^0$) в центральном и нецентральном гравитационном поле Земли. Перелёт в нецентральном поле соответствует наклонению начальной и конечной орбиты равному 98^0 . Решение для модели центрального поля соответствует манёврам между орбитами с наклонениями, близкими к критическим ($63,4^0$ и $116,6^0$). Здесь используются следующие обозначения: p_0 , p_k – положения перигея начальной и конечной орбиты; a_0 , a_k – положения апогея начальной и конечной орбиты; знаками «плюс» и «минус» обозначены расположения разгонных и тормозных участков.

При наличии пассивных участков на витке приведённые приближённо-оптимальные программы управления (2.13) обеспечивают ограниченную область существования перелётов. Эта область определяется манёврами с одним активным участком на витке (разгонным или тормозным) максимальной длительностью $2(\pi - \alpha)$:

$$\frac{\pi - \alpha}{\sin \alpha} \geq |\lambda|.$$

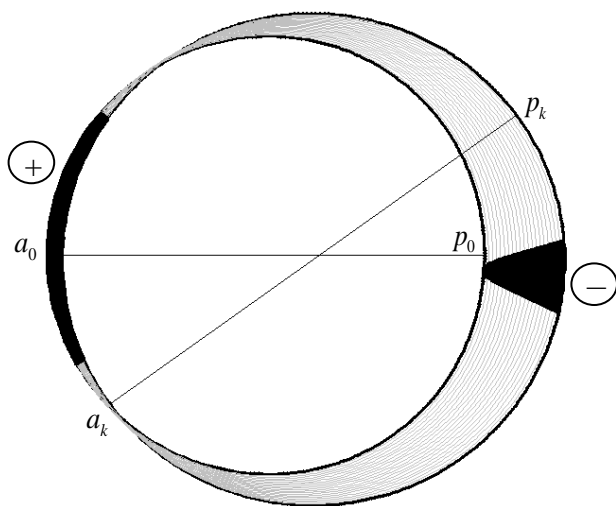


Рисунок 2.3 – Траектория перелёта в центральном гравитационном поле Земли

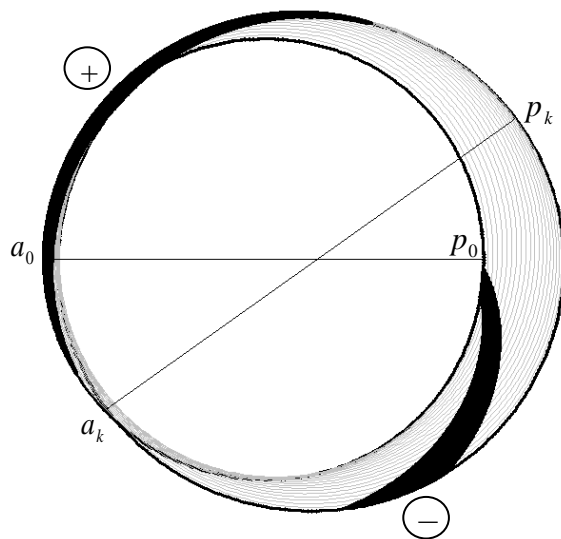


Рисунок 2.4 – Траектория перелёта в нецентральной гравитационном поле Земли

Программа управления для перелётов, не входящих в данную область, содержит два этапа с максимальным разгонным или тормозным участком на витке с переключением в определённый момент времени t_1 аргумента широты центра его приложения на 180° . Параметры управления, время переключения t_1 и затраты характеристической скорости рассчитываются по аналитическим соотношениям:

$$\begin{aligned}\xi &= (\pi - \alpha)(1 + \text{sign}\Delta A) / 2, \\ \eta_0 &= \arctg(\Delta\tilde{k} / \Delta\tilde{q}) - bT, \\ \alpha &= \pi(1 - \tilde{V}_x \text{sign}\Delta A / a_0 / T), \\ t_1 &= \left[1 - \sqrt{(1 - \varphi T) \exp\left(-\sqrt{\Delta\tilde{k}^2 + \Delta\tilde{q}^2} / \psi\right)} \right] / \varphi, \\ V_x &= \tilde{V}_x \text{sign}\Delta A,\end{aligned}$$

где $\Delta\tilde{k} = e_k \sin \omega_k - e_0 \sin(\omega_0 + bT)$, $\Delta\tilde{q} = e_k \cos \omega_k - e_0 \cos(\omega_0 + bT)$,

$$\varphi = a_0 \sqrt{\frac{A_0}{\mu}} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \text{sign}\Delta A, \quad \psi = 2 \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} \text{sign}\Delta A, \quad \Delta A = A_k - A_0.$$

2.4. Перелёты между круговыми некомпланарными орбитами

Пространственное движение космического аппарата можно представить как результат сложения двух независимых движений: перемещения центра масс в мгновенной плоскости орбиты и вращения этой плоскости вокруг центра притяжения. Систему уравнений движения КА под действием малой тяги в безразмерных переменных удобно записывать в следующей форме:

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{2A^3(1-e^2)}{R_\varphi} \left(a_s \frac{q \sin \varphi - k \cos \varphi}{R_\varphi} + a_T \right), \quad (2.14)$$

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{A^2(1-e^2)^2}{R_\varphi^2} \left(\begin{array}{l} a_s \sin \varphi + \\ + a_T \frac{2 \cos \varphi + q \cos^2 \varphi + k \sin \varphi \cos \varphi + q}{R_\varphi} \end{array} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{A^2(1-e^2)^2}{R_\varphi^2} \left(\begin{array}{l} -a_s \cos \varphi + \\ + a_T \frac{2 \sin \varphi + k \sin^2 \varphi + q \sin \varphi \cos \varphi + k}{R_\varphi} \end{array} \right), \quad (2.16)$$

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{a_w A^2 (1-e^2)^2 \cos(\varphi + \psi)}{R_\varphi^3}, \quad (2.17)$$

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{a_w A^2 (1-e^2)^2 \sin(\varphi + \psi)}{R_\varphi^3 \sin i}, \quad (2.18)$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{a_w A^2 (1-e^2)^2 \sin(\varphi + \psi) \operatorname{ctg} i}{R_\varphi^3}, \quad (2.19)$$

где $R_\varphi = 1 + q \cos \varphi + k \sin \varphi$, $e^2 = q^2 + k^2$.

Характеристическая скорость V_x связана с углом φ уравнением:

$$\frac{dV_x}{d\varphi} = \frac{[A(1-e^2)]^{3/2}}{R_\varphi^2} a. \quad (2.20)$$

В уравнениях (2.14)-(2.20) A – большая полуось орбиты, q и k – компоненты вектора Лапласа, i – наклонение орбиты, Ω – долгота восходящего угла, a_s, a_T, a_w – проекции реактивного ускорения на направление радиус-вектора, на перпендикулярное к нему в плоскости орбиты и на перпендикулярное к плоскости орбиты, φ – угол между осью $O\xi$ орбитальной системы координат и радиус-вектором, ψ – угол между линией узлов и осью $O\xi$ орбитальной системы координат, $u = \varphi + \psi$ – аргумент широты (рисунок 2.5). В качестве масштабов для безразмерных переменных приняты: для большой полуоси орбиты – её начальное значение

A_0 , для реактивного ускорения – гравитационное ускорение на начальной орбите $g_0 = \mu / A_0^2$, для времени – продолжительность движения по дуге круговой орбиты радиусом A_0 с углом в 1 радиан – $\sqrt{A_0^3 / \mu}$.

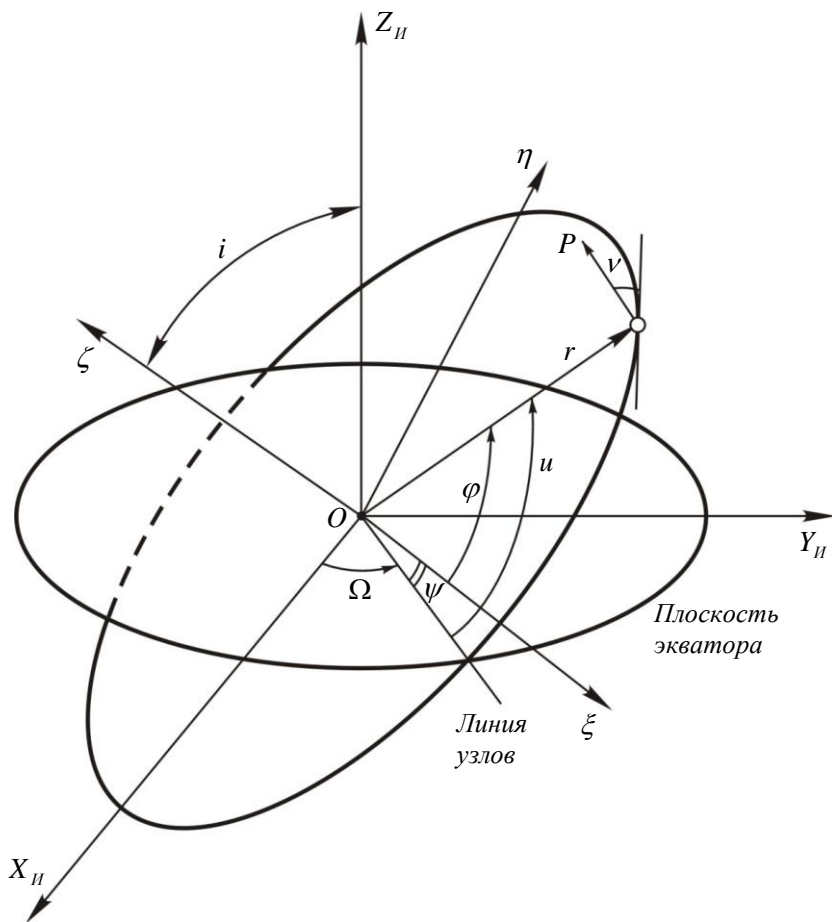


Рисунок 2.5 – Системы координат, используемые при составлении уравнений пространственного движения

Оси $O\xi$ и $O\eta$ орбитальной системы координат лежат в мгновенной орбитальной плоскости, которая в каждый момент времени содержит в себе радиус-вектор КА и вектор его скорости. Ось $O\xi$ вращается относительно линии узлов со скоростью, равной скорости изменения аргумента широты в возмущённом движении вследствие поворота плоскости орбиты (см. соотношение (1.17)). Такой выбор оси $O\xi$, от которой отсчитывается угол φ , приводит к тому, что уравнения (2.14)-(2.16) по своей структуре совпадают с уравнениями некоторого плоского движения, в котором φ выполняет роль полярного угла.

Пусть двигатель работает без выключений, его тяга постоянна и направлена так, что её радиальная составляющая равна нулю. Тогда направление вектора тяги можно задать одной величиной – углом ν между вектором тяги P и плоскостью оскулирующей орбиты (см. рисунок 2.5). Составляющие реактивного ускорения можно записать в виде:

$$a_s = 0,$$

$$a_T = a \cos \nu = \frac{a_0 \cos \nu}{1 - \frac{a_0}{c} t} = a_0 \cos \nu \exp \frac{V_x}{c},$$

$$a_W = a \sin \nu = \frac{a_0 \sin \nu}{1 - \frac{a_0}{c} t} = a_0 \sin \nu \exp \frac{V_x}{c}.$$

Здесь a_0 – реактивное ускорение от двигателя в начальный момент времени, c – скорость истечения рабочего тела, V_x – характеристическая скорость перелёта.

При помощи составляющей реактивного ускорения a_W , нормальной к мгновенной плоскости орбиты, можно изменять наклонение орбиты i . Если в точках, где аргумент широты $u = \varphi + \psi$ принимает значение $\pi/2$, направление тяги изменять на симмет-

ричное относительно плоскости орбиты, то, как следует из уравнения (2.17), наклонение орбиты будет монотонно изменяться. При этом трансверсальная составляющая реактивного ускорения a_T изменяться не будет.

Таким образом, при помощи управления:

$$\begin{aligned} a_s &= 0, \\ a_T &= a_0 \cos \nu \exp \frac{V_x}{c}, \\ a_W &= a_0 \sin |\nu| \exp \frac{V_x}{c} \text{sign} \cos(\varphi + \psi), \\ |\nu| &= \text{const}, \quad (-\pi \leq \nu \leq \pi), \end{aligned} \quad (2.21)$$

можно осуществить перелёт с круговой орбиты на орбиту, близкую к другой заданной круговой орбите.

Управление (2.21) обеспечивает монотонное увеличение наклонения орбиты. Если выполнение манёвра требует уменьшения наклонения, то знак a_W должен быть изменён на обратный:

$$a_W = -a_0 \sin |\nu| \exp \frac{V_x}{c} \text{sign} \cos(\varphi + \psi).$$

Подставляя значения составляющих реактивного ускорения (2.21) в уравнения (2.14)-(2.20) после процедуры усреднения по быстрой переменной φ , можно получить:

$$\frac{dA}{d\varphi} = 2a_0 \cos \nu \cdot A^3 \sqrt{1 - q^2 - k^2} \exp \frac{V_x}{c}, \quad (2.22)$$

$$\frac{dq}{d\varphi} = -\frac{3}{2} a_0 \cos \nu \cdot A^2 q \sqrt{1 - q^2 - k^2} \exp \frac{V_x}{c}, \quad (2.23)$$

$$\frac{dk}{d\varphi} = -\frac{3}{2} a_0 \cos \nu \cdot A^2 k \sqrt{1 - q^2 - k^2} \exp \frac{V_x}{c}, \quad (2.24)$$

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{a_0 \sin |\nu| \cdot A^2 (1 - q^2 - k^2)^2 \exp \frac{V_x}{c}}{2\pi} J_1, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{a_0 \sin|\nu| \cdot A^2(1-q^2-k^2)^2 \exp \frac{V_x}{c}}{2\pi \sin i} J_2, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{a_0 \sin|\nu| \cdot A^2(1-q^2-k^2)^2 \operatorname{ctgi} \exp \frac{V_x}{c}}{2\pi} J_2, \quad (2.27)$$

$$\frac{dV_x}{d\varphi} = a_0 A^{3/2} \exp \frac{V_x}{c}, \quad (2.28)$$

где $J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi + \psi) \operatorname{sign} \cos(\varphi + \psi)}{(1 + q \cos \varphi + k \sin \varphi)^3} d\varphi,$

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi + \psi) \operatorname{sign} \cos(\varphi + \psi)}{(1 + q \cos \varphi + k \sin \varphi)^3} d\varphi.$$

Интегралы J_1 и J_2 вычисляются аналитически, однако в силу громоздкости получаемых соотношений они здесь не приводятся.

Если начальная орбита круговая, то $q = k = 0$, и согласно уравнениям (2.23), (2.24) орбита в течение всего времени перелёта остается круговой. В этом случае интегралы равны $J_1 = 4$, $J_2 = 0$ и уравнения (2.25)-(2.27) принимают простой вид:

$$\frac{di}{d\varphi} = 2 \frac{a_0}{\pi} \sin|\nu| r^2 \exp \frac{V_x}{c}, \quad \frac{d\Omega}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = 0,$$

где r – текущий радиус орбиты. Из последних двух уравнений следует, что положение линии узлов не изменяется, положение оси $O\xi$ орбитальной системы координат относительно линии узлов в плоскости орбиты также остаётся постоянным.

Таким образом, в случае, когда эксцентриситет начальной орбиты равен нулю, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi} &= 2a_0 \cos \nu r^3 \exp \frac{V_x}{c}, \quad q=0, \quad k=0, \\ \frac{di}{d\varphi} &= 2 \frac{a_0}{\pi} \sin |\nu| r^2 \exp \frac{V_x}{c}, \quad \Omega = const, \quad \psi = const, \quad (2.29) \\ \frac{dV_x}{d\varphi} &= a_0 r^{3/2} \exp \frac{V_x}{c}.\end{aligned}$$

Полученные уравнения представляют собой систему усреднённых уравнений, описывающую движение космического аппарата под действием рассматриваемого управления. Погрешность в значениях параметров конечной орбиты, вызванная применением усреднённых уравнений, будет тем меньше, чем меньше тяга двигателя и чем ближе конечная орбита к начальной.

Для исключения угла φ поделим первое и четвёртое уравнения системы (2.29) на последнее:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dV_x} &= 2r\sqrt{r} \cos \nu, \\ \frac{di}{dV_x} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{r} \sin |\nu|.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Если $\nu=0$, то при радиусе начальной орбиты равном единице:

$$r = 1/(1 - V_x)^2, \quad i = const,$$

т.е. плоскость орбиты не изменяется, радиус орбиты возрастает.

Из системы (2.30) также следует, что:

$$\frac{di}{dr} = \frac{tg |\nu|}{\pi} \frac{1}{r}.$$

При перелёте с начальной орбиты с наклоном $i_0 = 0$ и радиусом $r_0 = 1$ решение этого уравнения имеет вид:

$$i = \frac{tg |\nu|}{\pi} \ln r,$$

откуда следует, что манёвр на конечную орбиту радиуса r_k и наклонения i_k можно осуществить, если:

$$|\nu| = \operatorname{arctg} \frac{\pi \cdot i_k}{\ln r_k}.$$

Это соотношение определяет управление, с помощью которого можно осуществить перелёт между двумя круговыми некопланарными орбитами.

Из решения системы уравнений (2.30):

$$r = \frac{1}{(1 - V_x \cos \nu)^2},$$

$$i = \frac{2tg|\nu|}{\pi} \ln \frac{1}{1 - V_x \cos \nu},$$

можно определить характеристическую скорость манёвра:

$$V_{xk} = \frac{1 - 1/\sqrt{r_k}}{\cos \nu}, \quad (2.31)$$

или:

$$V_{xk} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\pi \cdot i_k}{2tg|\nu|}\right)}{\cos \nu}. \quad (2.32)$$

В частном случае, когда радиус начальной орбиты равен радиусу конечной $r_k = 1$, имеем:

$$|\nu| = \pi/2, \quad i_k = \frac{2}{\pi} V_x,$$

$$V_{xk} = \frac{\pi \cdot i_k}{2}. \quad (2.33)$$

Для определения размерной характеристической скорости результат вычислений по формулам (2.31)-(2.33) необходимо умножить на масштаб $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$, где r_0 – радиус начальной орбиты.

Рассмотрим вариационную задачу о перелёте КА между круговыми некомпланарными орбитами. При усреднении уравнений (2.14)-(2.19) с управлением (2.21) предполагалось, что модуль угла ν – величина постоянная. Однако полученные усреднённые уравнения (2.30) справедливы и в том случае, если $|\nu|$ – медленно меняющаяся функция угла φ . Среди этих функций можно попытаться найти такие, которые позволяют осуществить рассматриваемый манёвр с меньшим, чем в случае $|\nu| = const$, расходом топлива.

После решения краевой задачи оптимального управления зависимость модуля угла $|\nu|$ от V_x выражается соотношением:

$$|\nu| = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} \left[1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} - \sqrt{1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}} \right]^{-1} \right. \\ \left. - V_x \sqrt{1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}} \right\}. \quad (2.34)$$

Приведённый закон управления обеспечивает переход из точки $r=1$, $i=0$ в точку $r=r_k$, $i=i_k$ с минимальным значением характеристической скорости V_{xk} .

Уравнения (2.30) при управлении (2.34) решаются аналитически:

$$r = \left[1 - 2V_x \left(1 - \frac{\cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} \right) / \sqrt{1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}} + V_x^2 \right]^{-1}, \quad (2.35)$$

$$i = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} V_x \left[\sqrt{1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}} - \left(1 - \frac{\cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} \right) V_x \right]^{-1} \right\}.$$

Характеристическая скорость манёвра равна:

$$V_{xk} = \sqrt{1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}}.$$

Из выражения (2.35) следует, что зависимость r от V_x может быть немонотонной. В случае, когда радиус конечной орбиты больше радиуса начальной, эта зависимость будет немонотонной, если параметры конечной орбиты удовлетворяют неравенству:

$$\cos \frac{\pi \cdot i_k}{2} < \frac{1}{\sqrt{r_k}}.$$

При этом радиус r сначала возрастает, достигая максимума при:

$$V_x = \left(1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}} \right)^{-1},$$

а затем убывает до заданного значения r_k . Максимальное значение радиуса:

$$r_{\max} = \left(1 - \frac{2 \cos \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k} \right) \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi \cdot i_k}{2}}{r_k} \right)^{-1}.$$

На рисунке 2.6 представлены зависимости параметров траектории и управления при перелёте с круговой орбиты высотой 200 км и наклоном $51,6^\circ$ на геостационарную орбиту. Видно, что при оптимальном управлении модуль угла отклонения тяги из-

меняется от меньших значений, обеспечивая на начальном участке перелёта более интенсивный рост радиуса орбиты, к большим значениям, обеспечивающим эффективное изменение наклона вследствие меньшей орбитальной скорости КА. Зависимость радиуса орбиты немонотонна с максимумом, соответствующим перпендикулярному направлению вектора тяги относительно мгновенной плоскости орбиты. Выигрыш оптимального управления в затратах характеристической скорости составляет более 8%.

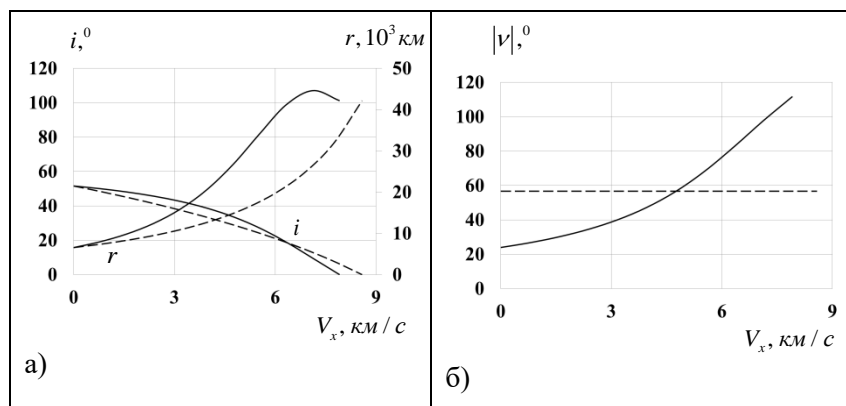


Рисунок 2.6 – Зависимости параметров траектории (а) и управления (б) от характеристической скорости перелёта при оптимальных (сплошные линии) и постоянном (штриховые линии) значениях модуля угла отклонения тяги

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие содержит базовые сведения о моделях и методах расчёта возмущённого движения космических аппаратов.

В первом разделе приведены основные положения метода оскулирующих элементов, сведения о моделях поля тяготения и плотности атмосферы Земли, получены уравнения движения КА в оскулирующих элементах, соотношения для расчёта вековых возмущений элементов орбиты, обусловленных нецентральностью гравитационного поля и сопротивлением атмосферы, векторное уравнение движения КА с учётом притяжения небесных тел.

Во втором разделе рассмотрены математические модели движения и метод усреднения в динамике полёта с малой тягой, программы управления и траектории движения при перелётах КА с малой тягой между околосферными компланарными и некомпланарными орбитами.

Более полное изложение рассмотренных в пособии вопросов содержится в учебной литературе [1-8], которая может использоваться для углубленного изучения дисциплины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аксенов, Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли / Е. П. Аксенов. – М.: Наука, 1977. – 360 с.
2. Балк, М. Б. Элементы динамики космического полета. Механика космического полета / М. Б. Балк. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
3. Лебедев, В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. № 5 / В. Н. Лебедев. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 108 с.
4. Левантовский, В. И. Механика космического полета в элементарном изложении / В. И. Левантовский. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
5. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
6. Охоцимский, Д. Е. Основы механики космического полета: учебное пособие / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
7. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
8. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли / П. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1965 – 540 с.

Учебное издание

Храмов Андрей Александрович

**ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 05.12.2022. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,75.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.