МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА

В.М. Безменов
Л.Н. Прокофьев

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

САМАРА 2001

УДК 516.8

Векторная алгебра: Учеб. пособие/ В.М.Безменов, Л.Н.Прокофьев. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001. 60 с.

ISBN-5-7883-0161-0

Содержит теоретические сведения, типовые задачи и варианты индивидуальных заданий по разделу "Векторная алгебра" для курса "Линейная алгебра".

Предназначено для студентов специальностей 01.02 и 22.02 в качестве руководства при проведении практических занятий и для самостоятельной работы. Выполнено на кафедре прикладной математики.

Ил.: 45. Библиогр.: 4 назв.

Печатается по решению редакционно–издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева

Рецензенты: А.Ф.Федечев, А.А.Калентьев

ISBN-5-7883-0161-0

П Р Е Д И С Л О В И Е

При рассмотрении многих явлений в различных областях физики (например, в механике, динамике, теории электричества и магнетизма) важную роль играют направленные величины. Изучение таких явлений методами векторной алгебры оказывается наиболее естественным и обладает исключительной простотой и наглядностью. Это же относится и к решению многих геометрических задач.

В настоящем пособии в краткой форме излагаются все необходимые теоретические сведения по векторной алгебре, вполне достаточные для глубокого изучения этого раздела математики. Большое количество задач и примеров геометрического и механического характера несомненно должно помочь лучшему усвоению понятий и методов векторного исчисления.

Все задачи и примеры снабжены *краткими* решениями, которые станут понятными каждому, кто проявит твердое желание в них разобраться. Следует заметить, что задачи, приведенные в тексте пособия, в отличие от примеров, имеют самостоятельное теоретическое значение: их *решения* часто используются при решении многих других задач и примеров. Поэтому задачи следует особенно тщательно проработать.

При работе над пособием образцом для авторов послужила замечательная книга Н.Е.Кочина "Векторное исчисление и начала тензорного исчисления", в которой содержится классическое изложение материала, относящегося к векторной алгебре.

В конце пособия приведены примеры для устного решения, задачи повышенной трудности, а также 25 вариантов индивидуальных заданий (по 8 задач в каждом варианте). Примеры для устного решения рассчитаны на то, что после достаточной работы над пособием, когда будут прочно усвоены теоретические положения и приобретены необходимые навыки в решении задач, действительно могут быть решены устно.

Авторы надеются, что пособие окажется полезным для всех, кто по нему будет самостоятельно изучать векторную алгебру. Это относится в первую очередь к студентам технических вузов . Однако оно может быть использовано и школьниками старших классов.

В заключение авторы обращаются к читателям с просьбой направлять свои отзывы о пособии на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при последующих изданиях пособия.

Скалярные и векторные величины

В математике и физике рассматриваются величины двух типов: *скалярные и векторные.*

Скалярная величина при выбранной единице меры полностью определяется числом, ее измеряющим.

Типичный пример скалярной величины — *отвлеченное число*, являющееся отношением любых двух однородных величин. Например:

α — угол, измеренный в радианах;
η — коэффициент полезного действия машины;
μ — коэффициент трения и т.д.

Примеры скалярных величин, имеющих размерность:

m — масса [*кг*]; ℓ — длина [*м*]; t — время [*с*];
p — давление [$н/м^2$]; ρ — плотность [$кг/м^3$];
A — работа [$н \cdot м$]; W — энергия [*дж*];
N — мощность [*дж/с*];
φ — потенциал электростатического поля [*в*] и т.д.

♦ Сравнивать скалярные величины можно только в том случае, когда они имеют одинаковые размерность и природу.

Векторная величина характеризуется положительным числом, измеряющим ее в определенных единицах меры, а также направлением в пространстве.

Простейшими векторными величинами являются так называемые *геометрические* векторы — направленные отрезки.

Обозначения векторов:

$$\mathbf{a}; \qquad \vec{a}; \qquad \overline{AB}.$$

Численное значение называется величиной (*модулем* или *длиной*) вектора и обозначается так:

$$a; \qquad |\vec{a}|; \qquad |\overline{AB}|.$$

Единичный вектор имеет длину, равную единице:

$$\mathbf{a}^0; \qquad a^0 = 1.$$

Считается, что *нулевой вектор* Θ имеет нулевую длину и не имеет определенного направления.

Каждому физическому вектору может быть поставлен в соответствие геометрический вектор, длина которого равна численному значению данного вектора, а их направления в пространстве совпадают.

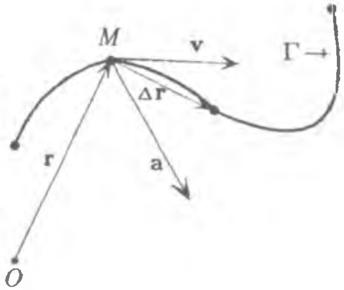
На чертежах (или рисунках) векторы изображают стрелками, имеющими определенные длины и направления:

Рис. 1

♦ Начальную точку вектора называют точкой его приложения.

Простейшим вектором является направленный отрезок $\overline{AB}$:
A — начало, B — конец вектора.

Рассмотрим движение материальной точки M вдоль кривой Г (рис. 2).



$\mathbf{r} = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M;

$\Delta\mathbf{r}$ — перемещение точки M за промежуток времени Δt;

$\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ — скорость и ускорение точки M соответственно.

Рис. 2

Другие примеры векторных величин:

B — вектор электромагнитной индукции;
E — напряженность электростатического поля и т.д..

Различают три типа векторов:

Закрепленный вектор — точка приложения такого вектора фиксирована.

Скользящий вектор — точка приложения вектора может перемещаться вдоль линии его действия; при этом направление вектора должно оставаться неизменным.

Свободный вектор — точка приложения вектора может быть перемещена в любую точку пространства; направление вектора при этом должно оставаться неизменным.

В векторной алгебре изучаются свободные векторы и операции над ними.

Равенство векторов

Сравнивать можно только векторы одинаковой размерности и природы .

Равенство векторов **a** и **b** :

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

означает, что эти векторы имеют равные модули ($a = b$) и одинаковые направления в пространстве.

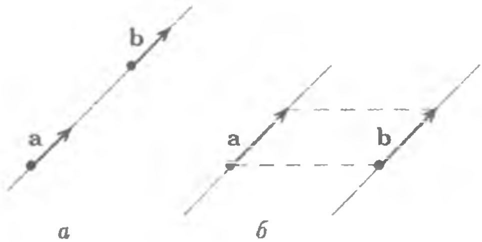


Рис.3

Равные векторы лежат либо на одной и той же прямой, либо на двух параллельных прямых (рис.3).

Заметим, что в последнем случае на равных векторах можно построить параллелограмм.

Основные свойства равных векторов:

1. Если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ — симметричность.
2. Если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, а $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ — транзитивность.
3. Если $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ — равенство третьему.

Сложение векторов

Векторы **a** и **b** (одинаковой размерности и природы) складываются по правилу параллелограмма.

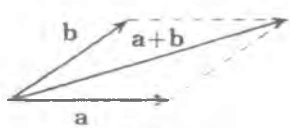


Рис.4

А именно, вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ по величине и направлению совпадает с диагональю параллелограмма, смежными сторонами которого являются слагаемые векторы **a** и **b** (рис.4).

При сложении векторов можно также воспользоваться правилом многоугольника, которое иллюстрирует рис.5.

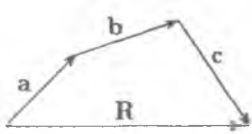


Рис.5

$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где

R — результирующий вектор.

Очевидно, что указанные выше правила сложения векторов эквивалентны: они всегда приводят к одному и тому же результату. Однако суммирование трех и более векторов удобнее выполнять по правилу многоугольника.

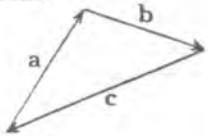
Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ — коммутативность;
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ — ассоциативность;
3. $\mathbf{a}+\Theta=\mathbf{a}$ — свойство нулевого вектора.

<u>Задача 1</u>

Выяснить, какому условию должны удовлетворять три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник.

Решение:



Из рисунка видно, что

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\Theta .$$

Противоположный вектор. Вычитание векторов

Вектором, противоположным вектору $\mathbf{a}$ называется вектор $-\mathbf{a}$, модуль которого $|-\mathbf{a}|=a$, а направление — противоположно направлению вектора $\mathbf{a}$ (рис.6).

Рис.6

Свойства противоположных векторов:

1. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\Theta$;
2. $-(-\mathbf{a})=\mathbf{a}$.

С помощью противоположных векторов может быть введена операция вычитания векторов. А именно, *разность* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется равенством

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

В параллелограмме $ABCD$ (рис. 7) имеем:

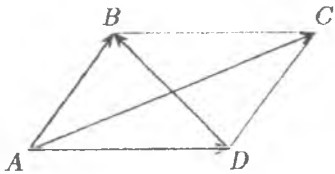


Рис. 7

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC};$$
$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

Умножение вектора на число

Пусть $\mathbf{a}$ — вектор, λ — действительное число.

По определению считаем

$$\mathbf{a}\lambda = \lambda\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

При этом $|\mathbf{b}| = |\lambda| a$, а направление вектора $\mathbf{b}$:

либо совпадает с направлением $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$,

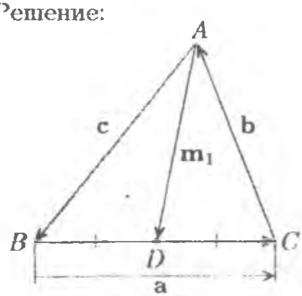
либо противоположно направлению $\mathbf{a}$, если $\lambda < 0$.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;
2. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;
3. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;
4. $0 \cdot \mathbf{a} = \Theta$; $\quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

П р и м е р 1. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

Решение:



$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \Theta$; $\qquad BD = DC$.

Из рисунка видно, что

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}.$$

Циклической перестановкой находим

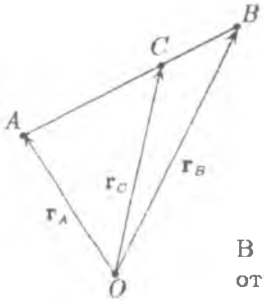
$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}, \qquad \mathbf{m}_3 = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}.$$

Имеем $\quad \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 = \Theta.$

З а д а ч а   2

Найти $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор точки C, делящий отрезок AB на части в отношении $AC : CB = m : n$, если известны $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ — радиусы-векторы начала и конца данного отрезка.

Решение:



$$\overline{AC} = \mu\,\overline{AB}; \qquad \overline{CB} = (1-\mu)\overline{AB};$$

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{m}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = \frac{m}{m+n};$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \overline{AC} = (1-\mu)\mathbf{r}_A + \mu\,\mathbf{r}_B$$

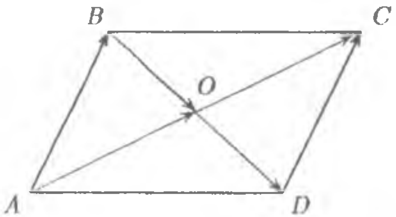
$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{r}_C = \frac{n\,\mathbf{r}_A + m\,\mathbf{r}_B}{m+n}. \qquad (1)$$

В частном случае, когда точка C — середина отрезка AB, имеем

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}\big(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B\big). \qquad (2)$$

П р и м е р 2. Доказать, что если диагонали четырехугольника делят друг друга пополам, то *четырехугольник* есть параллелограмм.

Решение:



$$\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO};$$

$$\overline{DC} = -\overline{OD} + \overline{OC};$$

$$\overline{AO} = \overline{OC}, \qquad \overline{BO} = \overline{OD};$$

$$\Longrightarrow \qquad \overline{AB} = \overline{DC}.$$

Коллинеарные векторы

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой.

Нулевой вектор Θ следует считать коллинеарным любому вектору $\mathbf{a}$.

Если коллинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не нулевые, то существует единственное отличное от нуля число λ такое, что выполняется равенство

$$\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{b} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{a}\,. \tag{3}$$

Коллинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ лежат на одной и той же прямой или на двух параллельных прямых; направления этих векторов одинаковые, если $(\lambda > 0)$, или противоположные при $(\lambda < 0)$ (рис. 8).

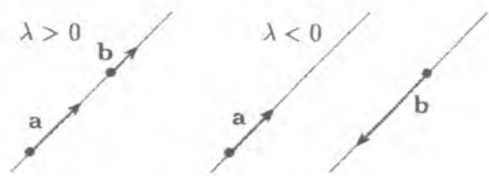


Рис. 8

Условие (3) коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно записать в следующем симметричном относительно обоих векторов виде:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} = \Theta\,. \tag{4}$$

Здесь α и β — некоторые действительные числа, не равные нулю одновременно.

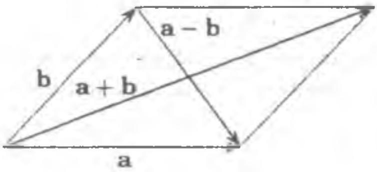
Частные случаи коллинеарных векторов.

1. Вектор $\mathbf{a}$ и противоположный ему вектор $-\mathbf{a}$.
   Имеем в этом случае:
   $$\mathbf{a} = (-1)\,(-\mathbf{a})\,; \qquad -\mathbf{a} = (-1)\,\mathbf{a}\,.$$
2. Вектор $\mathbf{a}$ и единичный вектор $\mathbf{a}^0$ того же направления, что и вектор $\mathbf{a}$. Очевидно, что
   $$\mathbf{a} = a\,\mathbf{a}^0; \qquad \mathbf{a}^0 = \frac{1}{a}\,\mathbf{a}\,.$$

Полезное замечание. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то равенство вида (4) может быть выполнено только в том случае, когда $\alpha = \beta = 0$. Этот факт используется при решении многих задач векторной алгебры.

Пример 3. Доказать, что диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам.

Решение:



$$\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mu(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 - \lambda = \mu, \quad \lambda = \mu$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

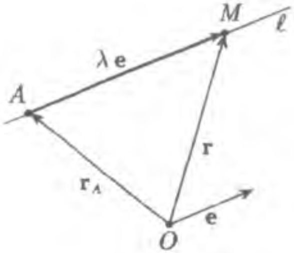
Задача 3

Выяснить геометрический смысл уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \lambda\,\mathbf{e}, \tag{5}$$

где λ — параметр, принимающий любое действительное значение; $\mathbf{e}$ — заданный вектор; $\mathbf{r}$ — переменный радиус-вектор текущей точки M.

Решение:



Из рисунка видно, что уравнение (5) есть уравнение прямой ℓ, проходящей через данную точку A и параллельной вектору $\mathbf{e}$.

Задача 4

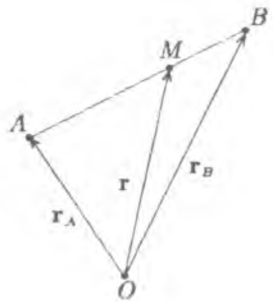
Пусть $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы точек A, B и M соответственно, связаны между собой соотношением

$$\mathbf{r} = \mu\,\mathbf{r}_A + \nu\,\mathbf{r}_B\,.$$

Доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы A, B и M лежали на одной прямой, является выполнение равенства

$$\mu + \nu = 1.$$

Решение:



Радиусы-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ считаем неколлинеарными, ибо в противном случае числа μ и ν, как нетрудно убедиться, могут быть произвольными.

А. Пусть точки A, B и M лежат на одной прямой. Тогда

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \nu(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$
$$\Longrightarrow \quad \mathbf{r} = (1-\nu)\mathbf{r}_A + \nu\mathbf{r}_B .$$

Б. Пусть $\mathbf{r} = \mu\mathbf{r}_A + \nu\mathbf{r}_B$, $\mu + \nu = 1$. Тогда

$$\mu = 1 - \nu, \qquad \mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \nu(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

Откуда следует, что векторы $\overline{MA}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны.

Компланарные векторы. Разложение вектора на составляющие

Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — неколлинеарные векторы (рис. 9).

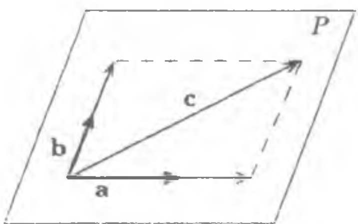


Рис. 9

Эти векторы определяют некоторую плоскость P, которой они оба параллельны.

Любой вектор $\mathbf{c}$, параллельный плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть представлен, и, притом, единственным образом, в виде следующей суммы:

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \tag{6}$$

где α и β — некоторые определенные числа.

Правую часть формулы (6) принято называть *разложением* вектора $\mathbf{c}$ на две составляющие, параллельные соответственно векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 9).

Условие компланарности трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ может быть записано в следующем симметричном относительно данных векторов виде:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \Theta. \tag{7}$$

Здесь α, β, γ — некоторые числа, одновременно не равные нулю.

♦ Заметим, что из выполнения равенства (7) для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ следует, что

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Если рассматриваются задачи на плоскости, в которых неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считаются фиксированными, а все остальные векторы представлены в виде разложений по этим векторам, то принимается следующая терминология:

Совокупность векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ называют *базисом*, а сами векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *базисными*.

Формула (6) — разложение вектора $\mathbf{c}$ по данному базису.

Числа α и β — координаты вектора $\mathbf{c}$ в данном базисе.

Базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ называют *ортогональным*, если его векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны.

Единичные базисные векторы называют *ортами*.

Базис из единичных ортогональных векторов называют *ортонормированным*.

Векторы ортонормированного базиса на плоскости обозначают $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

Изучение векторов в трехмерном пространстве приводит к результатам, аналогичным рассмотренным выше.

Например, справедливо следующее утверждение:

Если $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — некомпланарные векторы, то любой вектор $\mathbf{d}$ может быть представлен, и, притом, единственным образом, в виде следующей суммы:

$$\mathbf{d} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}, \tag{8}$$

где α, β, γ — некоторые определенные числа — координаты вектора $\mathbf{d}$ в данном базисе $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Векторы ортонормированного базиса в трехмерном пространстве обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Задача 5

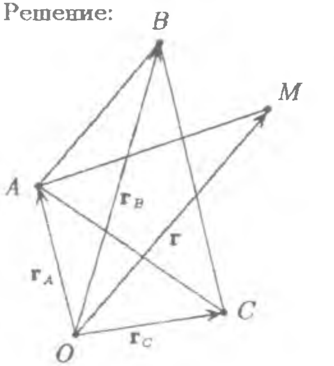
Показать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы четыре точки A, B, C и M, радиусы-векторы которых связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{r}_A + \mu\,\mathbf{r}_B + \nu\,\mathbf{r}_C,$$

лежали в одной плоскости, состоит в том, чтобы

$$\lambda + \mu + \nu = 1.$$

Решение:



Считаем, что точки A, B и C не лежат на одной прямой.

$\overline{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, $\quad \overline{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A$, $\quad \overline{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$.

А. Пусть точка M лежит в плоскости точек A, B и C. Тогда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AM}$ компланарны:

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \mu(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + \nu(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A);$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{r} = (1 - \mu - \nu)\,\mathbf{r}_A + \mu\,\mathbf{r}_B + \nu\,\mathbf{r}_C.$$

Б. Пусть выполняются условия:

$$\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{r}_A + \mu\,\mathbf{r}_B + \nu\,\mathbf{r}_C; \qquad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

Тогда $\quad \lambda = 1 - \mu - \nu, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \mu(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + \nu(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)$.

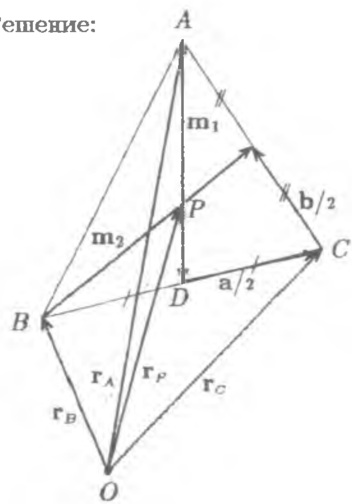
Отсюда следует, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AM}$ компланарны.

Задача 6

Доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них на отрезки в отношении 2:1, считая от вершины.

Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника, если известны радиусы-векторы его вершин.

Решение:



$$\mathbf{m}_1 = -\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2}; \qquad \mathbf{m}_2 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2};$$

$$\alpha\,\mathbf{m}_1 + \beta\,\mathbf{m}_2 + \frac{\mathbf{b}}{2} = \Theta$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} + \beta = 0, \\ -\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad AP : PD = 2 : 1;$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \frac{2}{3}\,\mathbf{m}_1,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C$$

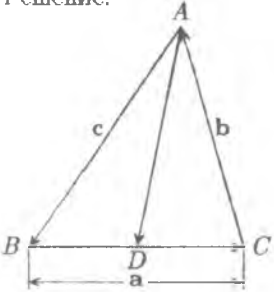
$$\Longrightarrow \quad \mathbf{r}_P = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C).$$

Полезно заметить, что выражение для $\mathbf{r}_P$ оказалось, как и следовало ожидать, симметричным относительно $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_C$.

<u>З а д а ч а   7</u>

В треугольнике ABC известны его стороны $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найти длины отрезков BD и DC, на которые биссектриса AD делит сторону BC.

Решение:



$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\Theta\,;$$

$$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AD}\qquad\Longrightarrow$$

$$\mathbf{c}+\lambda\,\mathbf{a}=\mu\left(\frac{\mathbf{c}}{c}-\frac{\mathbf{b}}{b}\right)=\mu\left(\frac{\mathbf{c}}{c}+\frac{\mathbf{c}}{b}+\frac{\mathbf{a}}{b}\right)$$

$$\Longrightarrow\qquad \mu=\frac{bc}{b+c}\qquad\Longrightarrow$$

$$BD=\frac{ac}{b+c}\,,\qquad DC=\frac{ab}{b+c}\,. \tag{9}$$

♦ Заметим, что отрезки BD и DC пропорциональны прилежащим сторонам треугольника:

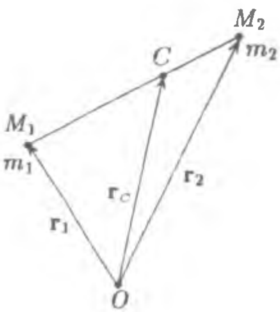
$$BD:DC=c:b\,.$$

<u>З а д а ч а   8</u>

Центр тяжести двух материальных точек M_1 и M_2, в которых сосредоточены массы m_1 и m_2, находится в точке C, которая лежит на отрезке M_1M_2 и делит его на части в отношении, обратно пропорциональном массам.

Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_C$, если известны $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы точек M_1 и M_2.

Решение:



$$M_1C:M_2C=m_2:m_1,$$

(см. задачу 2) $\Longrightarrow$

$$\mathbf{r}_C=\frac{m_1\,\mathbf{r}_1+m_2\,\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}\,. \tag{10}$$

♦ Решение задачи 8 легко обобщается на систему из n материальных точек. В этом случае имеем

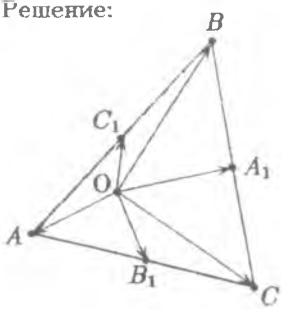
$$\mathbf{r}_C=\frac{m_1\,\mathbf{r}_1+m_2\,\mathbf{r}_2+\cdots+m_n\,\mathbf{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\,. \tag{11}$$

П р и м е р 4. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, противолежащих его вершинам A, B, C соответственно. Доказать равенство

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC},$$

где O — произвольная точка в плоскости данного треугольника.

Решение:



$$\overline{OB_1} + \overline{B_1A} = \overline{OA};$$

$$\overline{OC_1} + \overline{C_1B} = \overline{OB};$$

$$\overline{OA_1} + \overline{A_1C} = \overline{OC}.$$

Складывая эти равенства и принимая во внимание, что

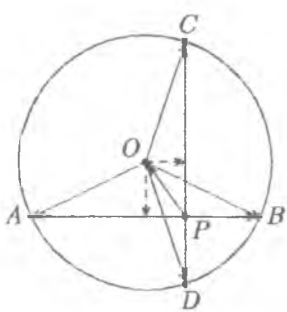
$$\overline{A_1C} + \overline{B_1A} + \overline{C_1B} = \Theta,$$

получаем требуемое равенство.

П р и м е р 5. Хорды APB и CPD круга с центром O пересекаются в точке P под прямым углом. Доказать равенство

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\,\overline{PO}.$$

Решение:



$$\overline{PO} + \overline{OA} = \overline{PA};$$

$$\overline{PO} + \overline{OB} = \overline{PB};$$

$$\overline{PO} + \overline{OC} = \overline{PC};$$

$$\overline{PO} + \overline{OD} = \overline{PD} \quad \Longrightarrow$$

$$4\,\overline{PO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} =$$

$$= \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}.$$

Но $\quad \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = -2\,\overline{PO}.$

(В этом нетрудно убедиться, если использовать векторы, изображенные на рисунке пунктиром.)

Проекция вектора

Проекцией вектора **a** на направление, определяемое вектором $\vec{\ell}$, называется число

$$\mathbf{a}_\ell = a\cos\varphi\,, \tag{12}$$

где φ — угол между векторами **a** и $\vec{\ell}$ (рис. 10).

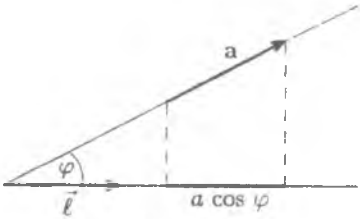


Рис. 10

Иногда проекцией вектора **a** на $\vec{\ell}$ удобно считать вектор

$$\mathbf{a}_\ell = a\cos\varphi\cdot\vec{\ell}^{\,0}. \tag{13}$$

<u>Основное свойство</u> проекций векторов:

Проекция суммы векторов (на некоторое направление) равна сумме проекций слагаемых векторов (на это же направление):

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})_\ell = \mathbf{a}_\ell + \mathbf{b}_\ell\,. \tag{14}$$

Справедливость этого свойства непосредственно видна из рис. 11.

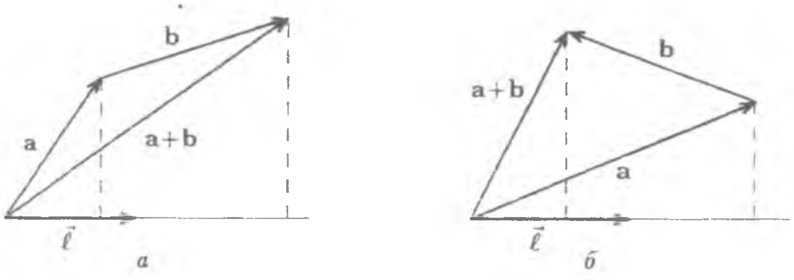


Рис. 11

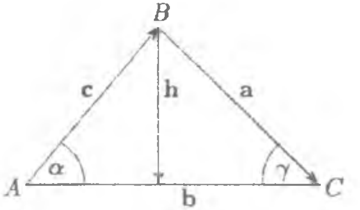
Формула (14) легко обобщается на случай суммы любого конечного числа слагаемых векторов.

<u>Задача 9</u>

Доказать теорему синусов для треугольника:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,. \tag{15}$$

Решение:



$$\mathbf{c}_h + \mathbf{a}_h = \Theta$$

$$\Longrightarrow \qquad c \sin\alpha = a \sin\gamma$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}\,.$$

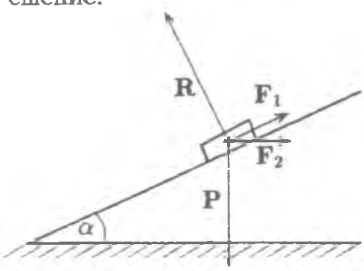
Циклической перестановкой находим:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

П р и м е р 6. Тело веса $\mathbf{P}$ находится в равновесии на гладкой наклонной плоскости под действием двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, которые по величине равны $\mathbf{P}/2$; сила $\mathbf{F}_1$ направлена вдоль наклонной плоскости, а сила $\mathbf{F}_2$ — горизонтально, как показано на рисунке.

Найти угол α наклона плоскости к горизонту.

Решение:



$\mathbf{R}$ — реакция плоскости.

Условие равновесия тел:

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{R} = \Theta.$$

Проектируем все силы на направление силы $\mathbf{F}_1$:

$$\frac{\mathbf{P}}{2} + \frac{\mathbf{P}}{2}\cos\alpha - \mathbf{P}\sin\alpha = \Theta$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 + \cos\alpha = 2\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\,.$$

Прямоугольные координаты вектора

Пусть на плоскости фиксирована декартова прямоугольная система координат Oxy;

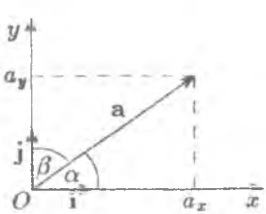


Рис. 12

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей Ox и Oy соответственно (рис. 12).

Разложение вектора $\mathbf{a}$ по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j}\,. \qquad (16)$$

Здесь a_x, a_y — проекции вектора $\mathbf{a}$ на направления соответствующих осей — прямоугольные координаты вектора $\mathbf{a}$.

♦ Координаты вектора часто называют также его компонентами или составляющими.

Если α и β — углы, образованные вектором **a** с осями Ox и Oy соответственно, то

$$a_x = a\cos\alpha, \qquad a_y = a\cos\beta. \tag{17}$$

Величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называют направляющими косинусами вектора **a**.

Из (17) имеем

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a}. \tag{18}$$

Модуль вектора **a** определяется равенством

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \tag{20}$$

Аналогичные результаты имеют место и для трехмерного пространства, в котором задана прямоугольная система координат $Oxyz$ (рис. 13).

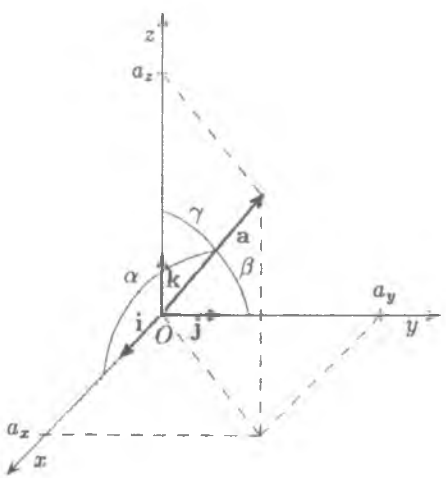


Рис. 13

Например, имеем в данном случае

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{21}$$

Заметим, что эта формула является следствием очевидного обобщения теоремы Пифагора на случай трехмерного пространства.

Направляющие косинусы вектора **a** связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{22}$$

Основные операции над векторами в координатной форме записываются следующим образом.

Равенство векторов:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \implies a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Сложение векторов:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c} \quad \Longrightarrow \quad a_x+b_x=c_x, \quad a_y+b_y=c_y, \quad a_z+b_z=c_z\,.$$

Умножение вектора на число:

$$\lambda\mathbf{a}=\mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \lambda a_x=b_x, \quad \lambda a_y=b_y, \quad \lambda a_z=b_z\,.$$

П р и м е р 7. Точка $M(\mathbf{r})$ притягивается неподвижными точками $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $\dots, M_n(\mathbf{r}_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \dots, m_n$, причем силы притяжения пропорциональны расстояниям до этих точек и их массам.

Найти результирующую силу и положение равновесия точки M.

Решение:

$$\mathbf{R}=k\big(m_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})+m_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})+\dots+m_n(\mathbf{r}_n-\mathbf{r})\big)=$$

$$=k\big((m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\dots+m_n\mathbf{r}_n)-(m_1+m_2+\dots+m_n)\mathbf{r}\big)$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{R}=km\big(\mathbf{r}_C-\mathbf{r}\big)\,,$$

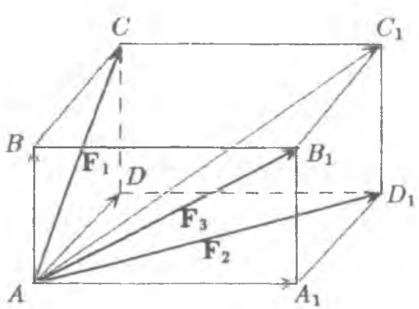
где $m=m_1+m_2+\dots+m_n$; $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра тяжести системы материальных точек (см. задачу 8).

Положение равновесия точки M: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_C$.

П р и м е р 8. К вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ приложены три силы, изображенные векторами $\mathbf{F}_1=\overline{AC}$, $\mathbf{F}_2=\overline{AD}_1$ и $\mathbf{F}_3=\overline{AB}_1$.

Найти равнодействующую $\mathbf{R}$ этих сил.

Решение:



$$\mathbf{R}=\overline{AC}+\overline{AD}_1+\overline{AB}_1=$$

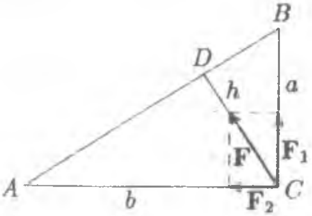
$$=2\big(\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA}_1\big)=$$

$$=2\,\overline{AC}_1\,.$$

Пример 9. К вершине C прямого угла прямоугольного треугольника ABC, катеты которого равны $BC = a$, $AC = b$, приложены две силы: сила $\mathbf{F}_1$ направлена вдоль CA и равна $1/a$; сила $\mathbf{F}_2$ направлена вдоль CB и равна $1/b$.

Доказать, что результирующая $\mathbf{F}$ этих сил направлена вдоль CD — перпендикуляра, опущенного из C на гипотенузу AB, и равна $1/h$, где h — высота треугольника.

Решение:



$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, обозначаемое $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ и равное $ab\cos\varphi$, где φ — угол между данными векторами:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi. \tag{23}$$

♦ Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначают также $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ или просто $\mathbf{ab}$.

Произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ называют *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{a}$ и обозначают $\mathbf{a}^2$. Очевидно, что $\mathbf{a}^2 = a^2$ и поэтому

$$a = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}. \tag{24}$$

Из формул (23) и (12) следует:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}_\mathbf{b}\, b = a\,\mathbf{b}_\mathbf{a}. \tag{25}$$

Примером скалярного произведения является элементарная работа ΔA, совершаемая силой $\mathbf{F}$ на элементарном перемещении $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}. \tag{26}$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$;
3. $\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;
4. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2 \geqslant 0$; $\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0 \implies \mathbf{a} = \Theta$.

Угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть выражен через скалярное произведение этих векторов:

$$\varphi = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} \,. \tag{27}$$

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, то $\cos\varphi = 0$ и потому скалярное произведение таких векторов равно нулю.
Обратное утверждение следует записать так:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} = \Theta \quad \text{или} \quad \mathbf{b} = \Theta \quad \text{или} \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается через их прямоугольные координаты по формуле

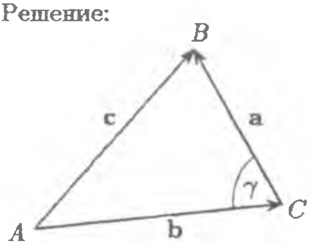
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \,. \tag{28}$$

Задача 10

Доказать, что для произвольного треугольника имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\,ab\cos\gamma \,. \tag{29}$$

Это — теорема косинусов.
Решение:



$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

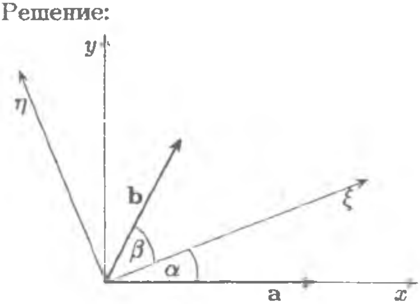
но $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -ab\cos\gamma \,.$

Задача 11

Вывести формулу косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \,. \tag{30}$$

Решение:



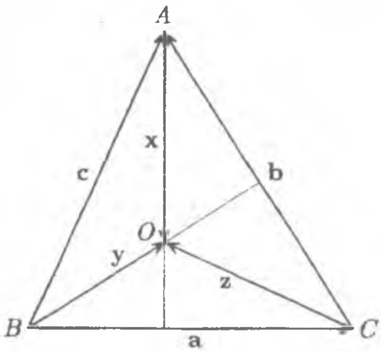
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= a_\xi b_\xi + a_\eta b_\eta =$$

$$= ab\big(\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\big) \,.$$

Пример 10. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Решение:



$$\mathbf{x} \perp \mathbf{a}; \qquad \mathbf{y} \perp \mathbf{b};$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c};$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{b};$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{a} \qquad \Longrightarrow$$

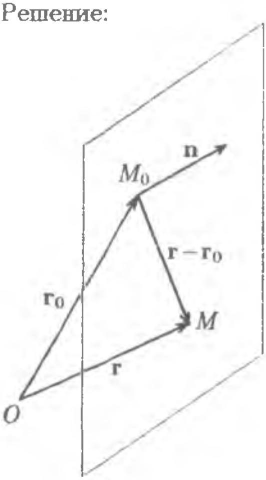
$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{z} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Задача 12

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и перпендикулярную данному вектору $\mathbf{n}$.

Решение:



Из рисунка видно, что

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (31)$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

В скалярной форме уравнение (31) запишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Здесь A, B, C — координаты вектора нормали $\mathbf{n}$ в декартовой прямоугольной системе координат.

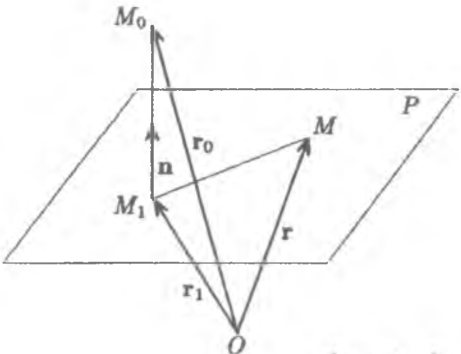
Задача 13

Найти расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до плоскости P, заданной уравнением

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = a,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки M плоскости, $\mathbf{n}$ — заданный вектор, a — заданное число.

Решение:



Вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен плоскости P (см. задачу 12).

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной плоскости P:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{n}\,.$$

M_1 — точка пересечения этой прямой с плоскостью P — определяется из условия

$$(\mathbf{r}_0 + \lambda_1 \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = a$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{a - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad d_1 = \left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\right| = \frac{|a - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}\,. \tag{32}$$

В частности, расстояние от начала координат до плоскости P равно:

$$d_0 = \frac{|a|}{|\mathbf{n}|}\,. \tag{33}$$

Пример 11. Точка $M(\mathbf{r})$ движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. В начальный момент времени она находилась в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$. В какой момент времени точка M встретит плоскость P, заданную уравнением

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = a\,?$$

Решение:

Закон движения точки M:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t\,.$$

t_1 — момент встречи точки M с плоскостью P определяется условием:

$$(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_1) \cdot \mathbf{n} = a \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{a - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}\,.$$

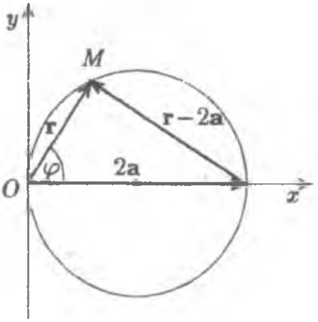
Задача 14

Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M на плоскости. Какая кривая определяется уравнением

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - 2\,\mathbf{a}) = 0\,, \tag{34}$$

где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор ?

Решение:



Имеем:

$$2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{r}^2 \qquad \Longrightarrow$$

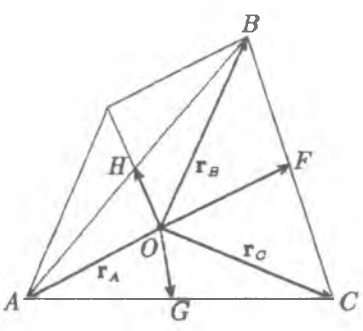
$$r = 2a\cos\varphi\,.$$

Уравнение (34) есть уравнение окружности радиуса a с центром в точке $(a,0)$.

Пример 12. Пусть F, G, H — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, O — какая-либо точка. Доказать равенство

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4\left(OA^2 + OB^2 + OC^2 - OF^2 - OG^2 - OH^2\right).$$

Решение:



$$\overline{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \qquad \overline{BC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B,$$

$$\overline{CA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C \qquad \Longrightarrow$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2\left(\mathbf{r}_A^2 + \mathbf{r}_B^2 + \mathbf{r}_C^2\right) -$$

$$-2\left(\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_B\cdot\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_C\cdot\mathbf{r}_A\right);$$

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B = 2\,\mathbf{r}_H, \qquad \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C = 2\,\mathbf{r}_F,$$

$$\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_A = 2\,\mathbf{r}_G \qquad \Longrightarrow$$

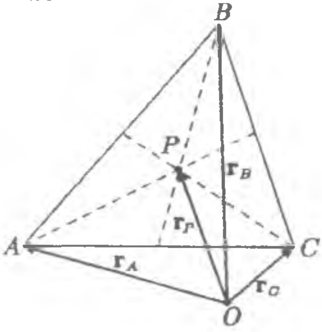
$$2\left(\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_B\cdot\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_C\cdot\mathbf{r}_A\right) =$$

$$= 4\left(\mathbf{r}_F^2 + \mathbf{r}_G^2 + \mathbf{r}_H^2\right) - 2\left(\mathbf{r}_A^2 + \mathbf{r}_B^2 + \mathbf{r}_C^2\right).$$

Пример 13. Пусть P — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — какая-либо точка. Доказать, что справедливо следующее равенство:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 + 9\cdot OP^2 = 3\left(OA^2 + OB^2 + OC^2\right).$$

Решение:



Имеем (см. задачу 6):

$$3\,\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C \quad \Longrightarrow$$

$$9\,\mathbf{r}_P^2 = \mathbf{r}_A^2 + \mathbf{r}_B^2 + \mathbf{r}_C^2 +$$

$$+2\left(\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_B\cdot\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_C\cdot\mathbf{r}_A\right);$$

$$\overline{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \qquad \overline{BC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B,$$

$$\overline{CA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2\left(\mathbf{r}_A^2 + \mathbf{r}_B^2 + \mathbf{r}_C^2\right) -$$

$$-2\left(\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_B\cdot\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_C\cdot\mathbf{r}_A\right).$$

Пример 14. Найти вектор, лежащий в плоскости yz, имеющий длину, равную 10, и перпендикулярный вектору

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Решение:

$$\mathbf{R} = (0, y, z) \quad \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= 100 \\ 4y &= 3z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{R} = \pm\left(6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\right).$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, обозначаемый $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и равный по модулю $ab\sin\varphi$, где φ — угол между данными векторами; этот вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направлен так, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют (в указанном порядке) правую тройку векторов (рис. 14).

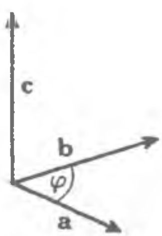


Рис. 14

♦ Векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначают также $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

<u>Полезное замечание</u>. Величина векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

Свойства векторного произведения:

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c}$;
3. $\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

♦ Векторное произведение векторов *не коммутативно.*

Векторное произведение двух параллельных векторов равно нулевому вектору.
В частности, имеем
$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \Theta.$$

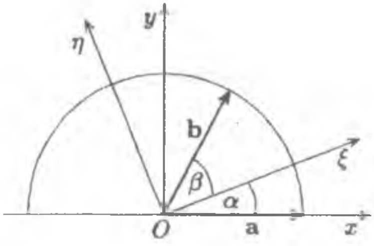
В прямоугольной системе декартовых координат xyz векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается формулой
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}\,. \qquad (35)$$

Эту формулу можно записать в более компактном виде:
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (36)$$

Задача 15

Вывести формулу синуса суммы двух углов:
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha\,. \qquad (37)$$

Решение:

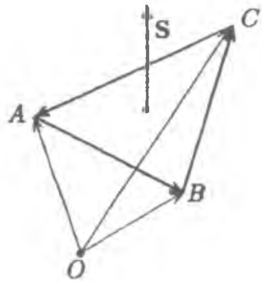


Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — единичные векторы.

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)_z = \sin(\alpha+\beta) =$$
$$= a_\xi b_\eta - a_\eta b_\xi\,.$$

Пример 15. Вершины треугольника ABC заданы своими радиусами-векторами $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$. Найти выражение для вектора $\mathbf{S}$, представляющего треугольную площадку ABC, на которой задано направление обхода контура от A против часовой стрелки.

Решение:



$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right) \times \left(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_B \times \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_A\right).$$

П р и м е р 16. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a} = (1, -2, 4)$ и $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$.

Решение:

$$S = \left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = \left|(0, 14, 7)\right| = 7\sqrt{5}.$$

О природе векторов

Векторы бывают двух типов:

> *Полярные* векторы (иначе *истинные*) и *аксиальные* или *осевые* векторы (так называемые *псевдовекторы*).

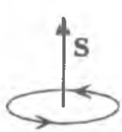


Рис. 15

К аксиальным векторам относятся:

а) векторное произведение двух полярных векторов;

б) вектор, представляющий площадку, для которой указано направление обхода по контуру, ограничивающему эту площадку (рис. 15);

в) угловая скорость вращения тела.

При переходе от правой системы прямоугольных координат к левой или наоборот, а также при смене направления обхода на противоположное:

полярные векторы остаются неизменными;

аксиальные векторы меняют свое направление на противоположное.

Векторно-скалярное произведение

Векторно-скалярное произведение трех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ записывается так:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Это произведение имеет простой геометрический смысл, который раскрывается равенством

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \pm V. \tag{38}$$

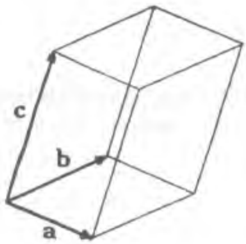


Рис. 16

Здесь V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (рис. 16). Знаки + или − в формуле (38) ставятся в зависимости от того, образуют ли векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (в указанном порядке) правую или левую тройку векторов.

Равенство

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \Theta \tag{39}$$

можно рассматривать как условие компланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Свойство векторно-скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \tag{40}$$

Иначе говоря, векторно-скалярное произведение *не меняется* при циклической перестановке входящих в его состав векторов, что вполне согласуется с геометрическим смыслом этого произведения.

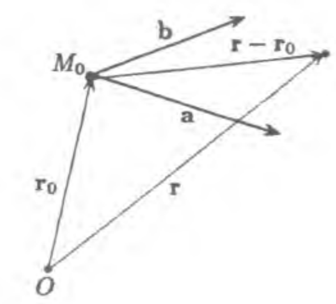
В декартовой прямоугольной системе координат для вычисления векторно-скалярного произведения имеем формулу

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{41}$$

<u>З а д а ч а 16</u>

Построить плоскость, проходящую через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и параллельную неколлинеарным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Решение:



Из рисунка видно, что

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0\,. \qquad (42)$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

В скалярной форме уравнение (42) запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0\,. \qquad (43)$$

Двойное векторное произведение

Двойное векторное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ по определению есть

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,.$$

♦ Заметим, что вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ компланарен векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Отсюда, например, ясно, что

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\,.$$

Справедлива следующая формула:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,. \qquad (44)$$

<u>Полезное замечание.</u> Для запоминания этой формулы пользуются фразой:

АБЦ = БАЦ − ЦАБ.

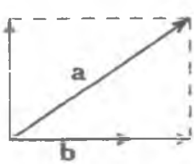


Рис. 17

Формула (44) может быть применена при разложении вектора $\mathbf{a}$ на две составляющие, одна из которых параллельна вектору $\mathbf{b}$, а другая — перпендикулярна ему (рис. 17).

Имеем в таком случае:

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{b^2}\,\mathbf{b}+\frac{1}{a^2}\,\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,. \qquad (45)$$

Пример 17. Вычислить

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}).$$

Решение:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\big(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big)=$$

$$=\mathbf{a}\cdot\big(\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\big)\quad=\quad\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}.$$

П р и м е р 18. Вычислить

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}).$$

Решение: см. пример 17.

Ответ: $a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$.

П р и м е р 19. Произведение

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$$

разложить по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Решение:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=-(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\big(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big)-\mathbf{a}\big(\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big).$$

П р и м е р 20. Векторное произведение

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$$

разложить по векторам $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$.

Решение:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{c}\big(\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big)-\mathbf{d}\big(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big).$$

П р и м е р 21. Вычислить

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

Решение: см. пример 20.

Ответ: $\mathbf{a}\big(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\big)$.

П р и м е р ы для устного решения

1. Найти вектор, направление которого совпадает с биссектрисой угла между двумя данными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ точки C — середины отрезка AB, если известны радиусы-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$— концов этого отрезка.

3. На материальную точку действуют три силы, заданные проекциями на оси прямоугольной системы координат:
$$\mathbf{F}_1 = (1,2,3), \qquad \mathbf{F}_2 = (-2,3,-4), \qquad \mathbf{F}_3 = (3,-4,5).$$
Найти величину и направление результирующей силы $\mathbf{F}$.

4. К точке A правильного шестиугольника $ABCDEF$ приложены силы:
$$\mathbf{F}_1 = \overline{\mathrm{AB}}, \qquad \mathbf{F}_2 = \overline{\mathrm{AC}}, \qquad \mathbf{F}_3 = \overline{\mathrm{AD}}, \qquad \mathbf{F}_4 = \overline{\mathrm{AE}}, \qquad \mathbf{F}_5 = \overline{\mathrm{AF}}.$$
Найти равнодействующую всех этих сил.

5. Доказать компланарность векторов
$$\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{b}, \qquad \gamma\mathbf{a} - \alpha\mathbf{c}, \qquad \alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}.$$

6. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

7. Доказать, что диагонали параллелограмма тогда и только тогда перпендикулярны, когда параллелограмм есть ромб.

8. Доказать, что работа равнодействующей $\mathbf{F}$ нескольких сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ $\ldots$,$\mathbf{F}_n$, приложенных к материальной точке M, на перемещении $\mathbf{S}$ этой точки равна алгебраической сумме работ составляющих сил.

9. Доказать, что вектор
$$\mathbf{d} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$
перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$.

10. Найти уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка, соединяющего две точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$, и перпендикулярной к этому отрезку.

11. Найти уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат, а также уравнение касательной плоскости к сфере в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$.

12. Какой угол составляют между собой два вектора

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\,\mathbf{k} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}\;?$$

13. Доказать тождество

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\,\mathbf{b}^2\,.$$

14. Вычислить выражение

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})\,.$$

В чем состоит геометрический смысл полученного в результате равенства ?

15. Найти уравнение кругового цилиндра радиуса R, ось которого проходит через начало координат и имеет направление, заданное единичным вектором $\mathbf{e}$.

16. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = \Theta\,.$$

17. Каким вектором $\mathbf{d}$ изображается перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = \Theta$.

18. Найти линию пересечения двух плоскостей

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha \qquad \text{и} \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \beta\,.$$

Задачи повышенной трудности

1. Какой угол составляют между собой два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что вектор $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, а вектор $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$?

2. Доказать тождество

$$\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\varphi+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\varphi+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0\,.$$

3. Доказать, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

   Найти радиус-вектор точки пересечения биссектрис треугольника, если известны радиусы-векторы вершин треугольника.

4. В треугольнике ABC проведены прямые AF, BG, CH, которые пересекаются в одной точке P. Найти соотношение между отрезками AH, BF, CG, AG, BH, CF.

5. Найти объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известны стороны его основания $AB=3p$, $AD=4p$ и расстояние d между диагоналями A_1B и AD_1 смежных боковых граней.

6. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_P$ ортоцентра треугольника ABC, если известны радиусы-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_C$ его вершин.

7. Вычислить $\qquad (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\big((\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big)\,.$

ОТВЕТЫ

А. К примерам для устного решения:

1. $\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{b}}{b}$.

2. $\mathbf{r}_C=\frac{\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B}{2}$.

3. $\mathbf{F}=(2,1,4)$; $F=\sqrt{21}$;

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}};\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}};\quad \cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

4. $\mathbf{F}=3\overline{AD}$.

10. $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_2^2-\mathbf{r}_1^2\right)$.

11. Уравнение сферы: $|\mathbf{r}|=R$.

    Уравнение касательной плоскости: $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0=R^2$.

12. $\varphi=135°$.

14. $2(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

15. $(\mathbf{e}\times\mathbf{r})^2=R^2$.

16. $h=\frac{|\mathbf{r}_0\times\mathbf{a}|}{a}$.

17. $\mathbf{d}=\frac{\mathbf{a}\times(\mathbf{r}_0\times\mathbf{a})}{a^2}$.

18. $\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\beta\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}$.

Б. К задачам повышенной трудности:

1. $\varphi=60°$.

4. $AH\cdot BF\cdot CG=AG\cdot BH\cdot CF$.

5. $V=\frac{144a^3d}{\sqrt{144a^2-25d^2}}$.

6. $$\mathbf{r}_P=\frac{\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{r}_A+\operatorname{tg}\beta\,\mathbf{r}_B+\operatorname{tg}\gamma\,\mathbf{r}_C}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}.$$

7. $\left(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\right)^2$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача №1 (25 вариантов)

1. Векторы $\overline{AC} = \mathbf{a}$ и $\overline{BD} = \mathbf{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2. В трапеции $ABCD$ отношение основания AD к основанию BC равно λ. Полагая $\overline{AC} = \mathbf{a}$, $\overline{BD} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

3. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Представить векторы $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

4. В $\triangle ABC$ проведены медианы AD, BE, CF. Найти сумму векторов $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.

5. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что
$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} + \overline{AD}\right).$$
Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

6. Точки E и F служат серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что
$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{CB}\right).$$

7. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ через векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AL}$.

8. В плоскости $\triangle ABC$ найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна $\overline{0}$.

9. Дан четырехугольник $ABCD$.
Найти такую (·)M, чтобы $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \Theta$.

10. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = (1/5)AD$, а на диагонали AC — отрезок $AL = (1/6)AC$. Доказать, что векторы $\overline{KL}$ и $\overline{LB}$ коллинеарны и найти отношение $\overline{KL}/\overline{LB}$.

11. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки пространства в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

12. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ вектор $\overline{EF}$, началом которого служит середина E ребра OA, а концом — середина F ребра BC.

13. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ вектор $\overline{EF}$ с началом в середине E ребра OA и концом в точке F пересечения медиан $\triangle ABC$.

14. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Выразить вектор $\overline{MM'}$, соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников, через векторы $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$.

15. Из точки O выходят два вектора $\overline{OA}=\mathbf{a}$, $\overline{OB}=\mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overline{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

16. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базис векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$.

17. В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ. Принимая за базис векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

18. Пусть A, B, C, D — некоторые точки пространства или плоскости, M — середина AB, N — середина CD, O — середина MN. Доказать, что:

   1) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\Theta$;

   2) $\overline{MN}+\overline{MN}=\overline{BC}+\overline{AD}$;

   3) $|\overline{MN}| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\overline{BC}|+|\overline{AD}|\right)$.

19. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны. При каком x векторы $\mathbf{c}=(x-1)\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}=(2+3x)\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ коллинеарны.

20. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD внутреннего угла C. Выразить вектор $\overline{CD}$ через векторы $\mathbf{a}=\overline{CA}$, $\mathbf{b}=\overline{CB}$ и их длины.

21. Дан $\triangle ABC$. На прямых AB, BC, CA выбраны соответственно точки M, N, P так, что $\overline{AM}=\alpha\,\overline{AB}$, $\overline{BN}=\beta\,\overline{BC}$, $\overline{CP}=\gamma\,\overline{CA}$, где α, β, γ — действительные числа. При каком необходимом и достаточном условии векторы $\overline{CM}$, $\overline{AN}$ и $\overline{BP}$ образуют треугольник, т.е. $\overline{CM}+\overline{AN}+\overline{BP}=\Theta$?

22. В $\triangle ABC$ точки M, N и P — основания биссектрис соответственно CM, AN и BP внутренних углов треугольника. Известно, что $\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BP} = \Theta$. Доказать, что $\triangle ABC$ — правильный.

23. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взять точки F и E так, что $BF : FC = \mu$, $DE : EC = \lambda$, где λ и μ — заданные положительные числа. Прямые (FD) и (AE) пресекаются в $(\cdot)O$. Найти отношение $FO : OD$.

24. Две медианы AK и BL треугольника ABC пересекаются в $(\cdot)O$. Доказать, что $AO : OK = BO : OL = 2 : 1$.

25. Вершина D параллелограмма $ABCD$ соединена с точкой K отрезка BC так, что $BK : KC = 2 : 3$. Вершина B соединена с точкой L отрезка CD так, что $DL : LC = 3 : 5$. В каком отношении точка M пересечения прямых DK и BL делит отрезки DK и BL ?

Задача №2 (25 вариантов)

1. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

2. Прямая AK проходит через вершину A прямоугольника $ABCD$ и через точку K, лежащую на стороне BC. Найти отношение $BK : KC$, если известно, что прямые AK и BD перпендикулярны, а $AD = 3AB$.

3. *a)* Медианы $\triangle ABC$ пересекаются в $(\cdot)M$. Доказать, что для произвольной $(\cdot)O$ плоскости выполняется равенство
$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}),$$
в частности, если $(\cdot)O$ совпадает с $(\cdot)M$, получим
$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \Theta.$$
b) Дан $\triangle ABC$. Доказать, что если для некоторой $(\cdot)M$ выполняется равенство $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \Theta$, то $(\cdot)M$ — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

4. *a)* Пусть в $(\cdot\cdot\cdot)A, B, C$ находятся точечные массы m_1, m_2, m_3 соответственно. Для нахождения центра тяжести M этой системы из трех материальных точек сначала рассматривается $(\cdot)D$ с массой $m_1 + m_2$, расположенная в центре тяжести системы точек A, B, а затем находится центр тяжести системы материальных точек D, C. Доказать, что для произвольной точки O плоскости
$$\overline{OM} = \frac{m_1\overline{OA} + m_2\overline{OB} + m_3\overline{OC}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

b) Доказать, что центр тяжести системы трех материальных точек A, B, C одинаковой массы совпадает с точкой пересечения медиан $\triangle ABC$.

5. Вектор $\mathbf{a}$ имеет в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координаты $(-1; 2)$, вектор $\mathbf{b}$ — координаты $(3; 1)$, вектор $\mathbf{c}$ — координаты $(7; 7)$, вектор $\mathbf{d}$ — координаты $(-4; 1)$. Доказать, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ образуют базис и найти координаты вектора $\mathbf{c} + 2\mathbf{d}$ в этом базисе.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка K является серединой стороны BC, точка L — середина стороны CD. Доказать, что $(\cdot)$ пересечения медиан $\triangle AKL$ совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

7. Точка K лежит на стороне BC $\triangle ABC$, точка L — на стороне AC, причем $BK : KC = CL : LA = 2 : 1$. Прямые AK и BL пересекаются в $(\cdot) O$. В каком отношении $(\cdot) O$ делит отрезки AK и BL .

8. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Пользуясь определениями линейной зависимости и линейной независимости системы векторов, доказать, что векторы $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $3\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ линейно зависимы.

9. Пользуясь определениями линейной зависимости и линейной независимости системы векторов, доказать, что для любых заданных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ линейно зависимы.

10. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в $(\cdot) O$, точка K — середина стороны AD, точка P — середина отрезка OD, Q лежит на диагонали AC. Найти длину отрезка PQ, если известно, что $PQ \| KB$, $AD = 2$, $AB = \sqrt{2}$, $\angle BAD = 135°$.

11. *a)* Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три вектора пространства, связанные соотношением $\mathbf{c} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b}$, где x и y — некоторые действительные числа. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны.

    b) Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — не компланарны.
    Доказать, что $x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c} = \Theta \iff x = y = z = 0$.

12. В правильной усеченной шестиугольной пирамиде $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ точки O и O_1 — центры оснований соответственно $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
    Разложить:

    a) вектор $\overline{AD}$ по базису $(\overline{AB}, \overline{AF})$;

    b) вектор $\overline{OO_1}$ по базису $(\overline{EE_1}, \overline{BB_1})$.

13. В параллелограмме $ABCD$: $\mathbf{a}=\overline{AB}$, $\mathbf{b}=\overline{AD}$, $\mathbf{c}=\overline{AC}$, E — середина стороны CD. Разложить вектор $\overline{BE}$ по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$. Представить тремя способами вектор $\overline{BE}$ в виде
$$\overline{BE} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c}.$$

14. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Разложить вектор $\overline{AA_1}$ по базису $(\overline{AC_1}, \overline{CB_1}, \overline{BA_1})$.

15. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L — соответственно середины ребер AC и BD, O — точка пересечения медиан грани ACD.
Разложить:
a) вектор $\overline{BO}$ по базису $(\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD})$;
b) вектор $\overline{KL}$ по каждому из базисов $(\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD})$, $(\overline{BO}, \overline{OD}, \overline{AC})$ и $(\overline{DA}, \overline{BC}, \overline{BO})$.

16. В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$. Разложить вектор $\overline{SO}$ тремя различными способами по векторам $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$.

17. Даны четыре вектора:
$\mathbf{a}(1,5,3)$, $\mathbf{b}(6,-4,-2)$, $\mathbf{c}(0,-5,7)$, $\mathbf{d}(-20,27,-35)$.
Выбрать числа α, β, γ так, чтобы векторы $\alpha\,\mathbf{a}$, $\beta\,\mathbf{b}$, $\gamma\,\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ образовали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

18. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\mathbf{c}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:
1) $\mathbf{a}(5,2,1)$, $\mathbf{b}(-1,4,2)$, $\mathbf{c}(-1,-1,6)$;
2) $\mathbf{a}(6,4,2)$, $\mathbf{b}(-9,6,3)$, $\mathbf{c}(-3,6,3)$;
3) $\mathbf{a}(6,-18,12)$, $\mathbf{b}(-8,24,-16)$, $\mathbf{c}(8,7,3)$.

19. Показать, что, каковы бы ни были три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и три числа α, β, γ, векторы $\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}$, $\gamma\,\mathbf{b} - \alpha\,\mathbf{c}$, $\beta\,\mathbf{c} - \gamma\,\mathbf{a}$ компланарны.

20. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин $\triangle ABC$. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения его медиан.

21. В $\triangle ABC$ проведена биссектриса AD внутреннего угла A. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

22. В прямоугольном $\triangle ABC$ опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overline{CH}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ и длины катетов $|\overline{BC}| = a$ и $|\overline{CA}| = b$.

23. Вершина O тетраэдра $OABC$ принята за начало координат, а векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ — за базисные векторы. Найти в этой системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.

24. Из одной $(\cdot)$ пространства отложены три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Доказать, что конец вектора $\mathbf{c}$ тогда и только тогда лежит на отрезке, соединяющем концы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, когда выполнено равенство

$$\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}, \qquad \text{где} \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

В каком отношении конец вектора $\mathbf{c}$ делит этот отрезок ?

25. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, найти:

1) координаты вектора $\overline{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $AM{:}BM = m{:}n$;

2) координаты вектора $\overline{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $AN{:}BN = m{:}n$.

Задача №3 (25 вариантов)

1. В $\triangle ABC$ проведена высота AH. Найти координаты вектора AH в базисе, образованном векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

2. Доказать, что для произвольного прямоугольника $ABCD$ и для произвольной $(\cdot)M$ (лежащей или не лежащей в плоскости прямоугольника) имеют место равенства:

1) $(\overline{MA}, \overline{MC}) = (\overline{MB}, \overline{MD})$;

2) $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{MB}|^2 + |\overline{MD}|^2$.

3. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований $AD : BC$ равно 3. Выразить через $\mathbf{b} = \overline{AB}$ и $\mathbf{c} = \overline{AC}$:

1) длины сторон и углы трапеции;

2) длину отрезка SM, где S — точка пересечения боковых сторон трапеции, M — точка пересечения диагоналей.

4. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно $\sqrt{2}$ и 1, а угол между ними равен 45°. Вычислить длины диагоналей и углы параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $(2; 2)$ и $(-1; 4)$.

5. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 4 и 2, а угол между ба-

зисными векторами равен 120°. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника $A(-2;2)$, $B(-2;-1)$, $C(-1;0)$. Найти длины сторон и углы треугольника.

6. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ равны соответственно 3, $\sqrt{2}$, 4, а углы между ними —
$(\widehat{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}) = (\widehat{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}) = 45°, \quad (\widehat{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3}) = 60°.$
Вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $(-1,3,0)$ и $(-1,2,1)$.

7. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ равны соответственно 1,1,2; углы между ними —
$(\widehat{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}) = 90°, \quad (\widehat{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3}) = (\widehat{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}) = 60°.$
Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}(-1;0;2)$ и $\mathbf{b}(2;-1;1)$.

8. Из одной точки отложены три вектора $\mathbf{a}(0;-3;4)$, $\mathbf{b}(4;+1;-8)$ и $\mathbf{c}$. Вектор $\mathbf{c}$ имеет длину 1 и делит пополам угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Вычислить координаты вектора $\mathbf{c}$.

9. Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем $\mathbf{a} \neq \Theta$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$.

10. Доказать:

a) если $\mathbf{a} \neq \Theta$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$ — любой вектор) компланарны;

b) если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то ни один из них не является нулевым и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не компланарны.

11. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

12. Даны два вектора $\mathbf{a}(3;-1)$ и $\mathbf{b}(-1;1)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\mathbf{x},\mathbf{a}) = 13$, $(\mathbf{x},\mathbf{b}) = -3$.

13. Даны три вектора $\mathbf{a}(4;1;5)$, $\mathbf{b}(0;5;2)$ и $\mathbf{c}(-6;2;3;)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений:
$(\mathbf{x},\mathbf{a}) = 18, \quad (\mathbf{x},\mathbf{b}) = 1, \quad (\mathbf{x},\mathbf{c}) = 1.$

14. Даны ненулевой вектор $\mathbf{a}$ и скаляр p. Выразить через $\mathbf{a}$ и p какой-нибудь вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий уравнению $(\mathbf{x},\mathbf{a}) = p$. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения $(\mathbf{x},\mathbf{a}) = p$, а также его частного решения, коллинеарного вектору $\mathbf{a}$ (в плоском и пространственном случаях).

15. Даны два вектора $\mathbf{a}(1;-1;1)$ и $\mathbf{b}(5;1;1)$. Вычислить координаты вектора $\mathbf{c}$, который имеет длину 1 и ортогонален векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Сколько решений имеет задача ?

16. Даны два вектора $\mathbf{a}(1;-1;1)$ и $\mathbf{b}(5;1;1)$. Вектор $\mathbf{c}$ имеет длину 1, ортогонален вектору $\mathbf{a}$ и образует с вектором $\mathbf{b}$ угол $\arccos\sqrt{2/27}$. Вычислить координаты вектора $\mathbf{c}$.
Сколько решений имеет задача ?

17. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти углы треугольника.

18. Длины соседних сторон параллелограмма относятся как $m : n$, а угол между этими сторонами равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

19. В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон. Найти угол между диагоналями четырехугольника.

20. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а отношение длин оснований равно $m : n$ $(m > n)$. Найти:
1) отношение длин боковых сторон;
2) отношение длин диагоналей;
3) величину острого угла трапеции.

21. Доказать, что, если в треугольнике равны длины двух медиан, или длины двух высот, или длины двух биссектрис, то этот треугольник равнобедренный.

22. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Доказать, что, если перпендикулярны ребра AB и CD и ребра AC и BD, то ребра BC и AD также перпендикулярны.

23. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и P — середины ребер AD и CD соответственно, точки N и Q — центры граней BCD и ABC соответственно. Найти угол между прямыми MN и PQ.

24. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

25. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F являются серединами ребер AD и BC соответственно. На ребре CD взята точка N, на отрезке EF — точка M так, что $\angle MNC = 45^\circ$, $\angle NME = \arccos(\frac{2}{3})$. В каком отношении точки M и N делят отрезки EF и CD ?

Задача №4 (25 вариантов)

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве равны соответственно 1, 2, $\sqrt{2}$, а углы между ними —
$(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = 120°$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = 45°$, $(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = 135°$.
Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $(-1,0,2)$, $(1,1,3)$ и $(2,-1,1)$.

2. Доказать, что $\Big([\mathbf{a},\mathbf{b}], [\mathbf{b},\mathbf{c}], [\mathbf{c},\mathbf{a}]\Big) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$.

3. Доказать, что, если векторы $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$, $[\mathbf{c},\mathbf{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

4. Доказать, что, если $[\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}] + [\mathbf{c},\mathbf{a}] = \bar{0}$, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны.

5. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,
$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{a},\mathbf{b}) & (\mathbf{a},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{a}) & (\mathbf{b},\mathbf{b}) & (\mathbf{b},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{c},\mathbf{a}) & (\mathbf{c},\mathbf{b}) & (\mathbf{c},\mathbf{c}) \end{vmatrix}}.$$

6. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$,
$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{a}) & (\mathbf{b},\mathbf{b}) \end{vmatrix}}.$$

7. Доказать тождество
$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{a}) & (\mathbf{x},\mathbf{b}) & (\mathbf{x},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{y},\mathbf{a}) & (\mathbf{y},\mathbf{b}) & (\mathbf{y},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{z},\mathbf{a}) & (\mathbf{z},\mathbf{b}) & (\mathbf{z},\mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

8. Даны три некомпланарных вектора $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, $\overline{OC} = \mathbf{c}$, отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overline{OD} = \mathbf{d}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ равные между собой острые углы.

9. Три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ связаны соотношениями $\mathbf{a} = [\mathbf{b},\mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c},\mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

10. Даны два луча. Первый луч составляет с осями координат углы $\pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/3$, а второй — равные между собой тупые углы. Найти

направляющие косинусы третьего луча, перпендикулярного к двум данным лучам и образующего с ними правую тройку.

11. Даны три вектора: $\mathbf{a}(8,4,1)$, $\mathbf{b}(2,-2,1)$, $\mathbf{c}(1,1,1)$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ и $\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c}$ имели противоположную ориентацию.

12. Даны три вектора: $\mathbf{a}(8,4,1)$, $\mathbf{b}(2,2,1)$, $\mathbf{c}(1,1,1)$. Найти вектор $\mathbf{d}$ длины 1, образующий с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равные углы, перпендикулярный к вектору $\mathbf{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ и $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию.

13. Даны два вектора $\mathbf{a}(1,1,1)$ и $\mathbf{b}(1,0,0)$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\pi/3$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b},\mathbf{c}$ была правой.

14. Даны два вектора $\mathbf{a}(0,1,1)$ и $\mathbf{b}(1,1,0)$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\pi/4$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b},\mathbf{c}$ была правой.

15. Доказать, что площадь выпуклого 4-угольника $ABCD$ равна половине длины векторного произведения $[\overline{AC},\overline{BD}]$.

16. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 3 и 2, а угол между ними равен 30°. В этой системе координат даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма: $(1,3)$, $(1,0)$ и $(-1,2)$. Найти площадь параллелограмма.

17. Из одной точки отложены 4 вектора: $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$. Вектор $\mathbf{d}$ имеет длину 1 и образует с некомпланарными векторами $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$:

1) равные острые углы;

2) равные тупые углы.

Выразить вектор $\mathbf{d}$ через векторы $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.

18. Из одной точки отложены 4 вектора:
$\mathbf{a}(-1,1,-1)$, $\mathbf{b}(-1,1,1)$, $\mathbf{c}(5,-1,-1)$ и $\mathbf{d}$.
Вектор $\mathbf{d}$ имеет длину 1 и образует с векторами $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ равные острые углы. Вычислить координаты вектора $\mathbf{d}$.

19. Доказать, что площадь трапеции $ABCD$ $(AD\|BC)$ равна

$$\frac{1+k}{2}\,\left|[\overline{AB},\overline{AD}]\right|, \qquad \text{где} \quad k=\left|\overline{BC}\right|:\left|\overline{AD}\right|.$$

20. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого 4-угольника $ABCD$ площади S расположены соответственно точки M, N, P, Q так, что $AM : AB = BN : BC = CP : CD = DQ : DA = \alpha$. Найти площадь $\sigma(\alpha)$ 4-угольника $MNPQ$. При каком значении α эта площадь минимальна?

21. Дан $\triangle ABC$. На прямых AB, BC, CA выбраны соответственно точки M, N, P так, что $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$, $\overline{BM} = \alpha\overline{BC}$, $\overline{CP} = \alpha\overline{CA}$. При каком значении α площадь $S(\alpha)$ треугольника, векторы сторон которого есть $\overline{CM}$, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$, наименьшая ?

22. Треугольники ABC и ACD расположены в одной плоскости так, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Доказать, что площадь S 4^x-угольника $ABCD$ равна
$$S = \frac{1}{2}\left|[\overline{AC}, \overline{BD}]\right|.$$

23. Доказать, что площадь S треугольника, векторы сторон которого равны векторам медиан $\triangle ABC$, составляют 3/4 площади σ $\triangle ABC$.

24. Доказать, что, если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ попарно не коллинеарны, то условия
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \Theta$ эквивалентны.

25. Даны два вектора $\mathbf{a}(8, 4, 1)$ и $\mathbf{b}(2, -2, 1)$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол.

Задача № 5 (25 вариантов)

1. Доказать, что для любых трех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в пространстве $\left[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\right] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. При каком необходимом и достаточном условии справедливо равенство
$\left[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}\right] = \left[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\right]$?

3. Проверить справедливость равенства
$\left[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}\right] + \left[[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}\right] + \left[[\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{b}\right] = \Theta$.

4. Показать, что, если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, то $\left[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}\right] = \Theta$.

5. Доказать тождество:
$\left[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]\right] = \mathbf{c}(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$.

6. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ не компланарны. Доказать, что векторы
$\mathbf{f}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $\mathbf{f}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$, $\mathbf{f}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$
в таком порядке образуют правый базис.

7. Доказать тождество
$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]\,(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - [\mathbf{a}, \mathbf{d}]\,(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

8. Доказать тождество
$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]] = (\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\,[\mathbf{c}, \mathbf{d}].$$

9. Доказать тождество
$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \cdot [[\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] \cdot [[\mathbf{c}, \mathbf{a}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})^4.$$

10. Три некомпланарных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ приведены к общему началу. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

11. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, лежит ромб с острым углом A, равным $60°$. Точка K лежит на продолжении ребра AB за точку B, причем угол ADK — прямой. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат K, $\overline{KA}$, $\overline{KD}$, $\overline{KC_1}$.

12. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2)$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

13. Найти косинус, синус и тангенс угла φ между векторами $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2)$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

14. Зная длины базисных векторов $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$ и угол между ними $\omega = \pi/3$, найти длину вектора $\mathbf{a}(-4; 6)$.

15. Выразить через метрические коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ длины базисных векторов, углы $\omega_{ij} = (\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j})$ между ними и объем V параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

16. Найти скалярное произведение векторов
$\mathbf{a}(x^1, x^2, x^3)$ и $\mathbf{b}(y^1, y^2, y^3)$,
зная метрические коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

17. Найти длину вектора $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ в базисе с метрическими коэффициентами g_{ij}.

18. Найти косинусы углов α_1, α_2, α_3, которые вектор $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ образует с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, зная метрические коэффициенты g_{ij} этого базиса.

19. В $\triangle ABC$ точка D лежит на стороне BC, а точка E лежит на продолжении стороны AC за точку C, причем
$BD : DC = 1 : 2$, $AC : CE = 3 : 1$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат D, $\overline{AD}$, $\overline{DE}$.

20. Убедившись, что векторы
$\mathbf{a}=7\,\mathbf{i}+6\,\mathbf{j}-6\,\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=6\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+9\,\mathbf{k}$
можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро.

21. Найти длину высоты AD $\triangle ABC$, если
$\overline{AB}=2\,\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\overline{AC}=3\,\mathbf{i}-4\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

22. Даны две точки $A(1,2,3)$ и $B(7,2,5)$. На прямой AB найти такую точку M, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и отрезок AM был в два раза длиннее отрезка AB.

23. На плоскости даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(1;3)$, а векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе, считая угол φ равным:

1) $60°$; *2)* $135°$; *3)* $30°$; *4)* $180°$.

24. Даны разложения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:
$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{b} = b_x\mathbf{e}_1 + b_y\mathbf{e}_2 + b_z\mathbf{e}_3$.
Разложить вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ по векторам:
$\mathbf{f}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $\mathbf{f}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$, $\mathbf{f}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$.

25. Дан треугольник с вершинами в точках
$A(4,2,5)$, $B(0,7,2)$, $C(0,2,7)$.
Вычислить длину его высоты BD.

Задача №6 (25 вариантов)

1. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.
   Точки O и O' различны, а концы векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}'_i$, отложенных соответственно из точек O и O', совпадают ($i = 1, 2, 3$). Найти координаты точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе.

2. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.
   Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты: $(-1, 3, 5)$. Вектор $\mathbf{e}'_1$ образует углы, равные $60°$, с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и острый угол с вектором $\mathbf{e}_3$. Вектор $\mathbf{e}'_2$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образует с вектором $\mathbf{e}_2$ острый угол. Тройки $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ одинаково ориентированы. Найти координаты точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе.

3. В прямоугольном треугольнике ABC, длины катетов которого равны $AB = 3$ и $BC = 4$, точка D является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ имеют длину 1, причем
   $\mathbf{e}_1 \uparrow\uparrow \overline{BA}$, $\mathbf{e}_2 \uparrow\uparrow \overline{BC}$, $\mathbf{e}'_1 \uparrow\uparrow \overline{AC}$, $\mathbf{e}'_2 \uparrow\uparrow \overline{DB}$.
   Найти координаты точки плоскости в системе координат B, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, если известны ее координаты x', y' в системе D, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$.

4. Координаты x, y, z каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты x', y', z' этой же точки во второй системе координат соотношениями:
   $$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10},$$
   $$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20},$$
   $$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30}.$$
   1) Пусть первая система координат является прямоугольной. При каком необходимом и достаточном условии вторая система также является прямоугольной ?

   2) При каком необходимом и достаточном условии ориентация базисов первой и второй систем одинакова ?

5. В тетраэдре $ABCD$ точка M — точка пересечения медиан грани BCD. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе M, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MA}$.

6. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат A_1, $\overline{A_1B}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{A_1M}$.

7. В трапеции $ABCD$ длины оснований BC и AD относятся как $3:4$, точка E является серединой основания AD, а продолжения боковых сторон пресекаются в точке F. Найти координаты точки плоскости в системе координат E,$\overline{EB}$, $\overline{EC}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат F, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$.

8. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований BC и AD относятся как $2:3$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overline{EA}$, $\overline{EB}$.

9. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат C, $\overline{CB}$, $\overline{CE}$.

10. В $\triangle ABC$ точка D лежит на стороне AC, а точка E — на отрезке BD, причем $AD : AC = 1 : 3$, $\quad BE : ED = 2 : 3$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат C, $\overline{CB}$, $\overline{CE}$.

11. Выразить через метрические коэффициенты
$g_{11} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \quad g_{12} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad g_{22} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$
длины базисных векторов, угол ω между ними и площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AA_1}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат D_1, $\overline{D_1D}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{D_1B}$.

13. Координаты x, y каждой точки плоскости в первой системе координат выражаются через координаты x', y' этой же точки во второй системе координат соотношениями
$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}, \qquad y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}.$

    Первая система координат является прямоугольной. При каком необходимом и достаточном условии вторая система также является прямоугольной ?

14. На плоскости даны две прямоугольные системы координат
O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты x_0, y_0, а векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ получаются

из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

1) Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе.

2) Найти координаты точки во второй системе координат, если известны ее координаты x, y в первой системе.

3) Найти координаты $(\cdot)O$ во второй системе координат.

15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является центром основания. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, $\overline{AS}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат S, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$, $\overline{SM}$.

16. Найти координаты точки в системе координат
$O(1,3,3)$, $\mathbf{e}_1(3,3,1)$, $\mathbf{e}_2(3,5,2)$, $\mathbf{e}_3(1,2,1)$
в пространстве, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат:
$O'(-1,0,2)$, $\mathbf{e}'_1(1,-2,1)$, $\mathbf{e}'_2(4,2,1)$, $\mathbf{e}'_3(2,-1,3)$.

17. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на диагонали BD, причем $BE : ED = 1 : 2$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$.

18. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на стороне BC, а точка F — на стороне AB, причем $BE:BC = 1:4$, $BF:AF = 2:5$. Найти координаты точки плоскости в системе C, $\overline{CE}$, $\overline{CD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overline{EF}$, $\overline{ED}$.

19. Даны четыре вектора
$\mathbf{a}(1,2,3)$, $\mathbf{b}(2,-2,1)$, $\mathbf{c}(4,0,3)$, $\mathbf{d}(16,10,18)$.
Найти вектор $\mathbf{x}$, являющийся проекцией вектора $\mathbf{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{c}$.

20. Найти координаты вектора в базисе
$\mathbf{e}_1(1,3,2)$, $\mathbf{e}_2(-1,1,0)$ $\mathbf{e}_3(2,-1,1)$ в пространстве,
если известны его координаты $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ в базисе
$\mathbf{e}'_1(-1,0,2)$, $\mathbf{e}'_2(1,1,1)$ $\mathbf{e}'_3(4,3,-1)$.

21. Найти координаты точки в системе координат
$O(2,-1)$, $\mathbf{e}_1(1,5)$, $\mathbf{e}_2(-1,4)$ на плоскости,
если известны ее координаты x', y' в системе координат
$O'(3,2)$, $\mathbf{e}'_1(1,-1)$, $\mathbf{e}'_2(4,2)$.

22. Найти координаты вектора в базисе $\mathbf{e}_1(2,3)$, $\mathbf{e}_2(3,4)$ на плоскости, если известны его координаты α'_1, α'_2 в базисе $\mathbf{e}'_1(1,-1)$, $\mathbf{e}'_2(2,-3)$.

23. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

24. Координаты x, y, z каждой точки пространства в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ выражаются через координаты x', y', z' этой же точки в системе O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ формулами
$x = x' + y' + z' - 1, \qquad y = -x' + z' + 3, \qquad z = -x' - y' - 2.$

    1) Выразить координаты x', y', z' через координаты x, y, z.

    2) Найти координаты начала O и базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы координат во второй системе.

    3) Найти координаты начала O' и базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ второй системы в первой системе.

25. На плоскости даны два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты $(-1,3)$ и $(2,-7)$ соответственно.

    1) Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты α'_1, α'_2 во втором базисе.

    2) Найти координаты вектора во втором базисе, если известны его координаты α_1, α_2 в первом базисе.

    3) Найти координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ во втором базисе.

Задача №7 (25 вариантов)

1. Точка M делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении λ. В каком отношении делит отрезок $\overline{AB}$ точка M', симметричная точке M, относительно середины отрезка $\overline{AB}$.

2. Пусть точка C делит направленный отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda \neq 1$, точка D делит тот же отрезок в отношении $-\lambda$, а точка E является серединой отрезка $\overline{CD}$.

    1) Найти отношение, в котором точка E делит отрезок $\overline{AB}$.

    2) Доказать, что при любом $\lambda \neq 1$ точка E лежит вне отрезка $\overline{AB}$.

3. На прямой даны три точки. Точка C делит направленный отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda \neq 0$. Найти отношение, в котором каждая из точек A, B, C делит направленный отрезок, определяемый двумя другими.

4. Пусть

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda, \qquad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \mu, \qquad \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = \nu.$$

Найти отношение, в котором точка R делит отрезок $\overline{AB}$.

5. Пусть

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda, \qquad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \mu, \qquad \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \nu \quad (\mu \neq \nu).$$

Найти отношение, в котором точка R делит отрезок $\overline{PQ}$.

6. Найти центр M и радиус r круга, вписанного в треугольник с вершинами $(9,2)$, $(0,20)$, $(-15,-10)$. Система координат прямоугольная.

7. Даны три последовательные вершины трапеции $A(-1,-2)$, $B(1,3)$, $C(9,9)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон, зная, что длина ее основания $\overline{AD}$ равна 15. Система координат прямоугольная.

8. Найти координаты центра тяжести проволочного треугольника, длины сторон которого 3, 4 и 5, направляя ось абсцисс по меньшему, а ось ординат по большему катету треугольника.

9. Доказать, что 4-угольник $ABCD$ с вершинами:
$A(1,2)$, $B(-3,1)$, $C(-1,-5)$, $D(3,-1)$
выпуклый. Система координат: общая декартова.

10. Проверить, что 4-угольник $ABCD$ с вершинами:
$A(4,4)$, $B(5,7)$, $C(10,10)$, $D(12,4)$
является выпуклым, и найти центр тяжести 4-угольной однородной пластины с вершинами в точках A, B, C, D.

11. Даны две точки $A(8,-6,7)$ и $B(-20,15,10)$. Установить, пересекает ли прямая AB какую-нибудь из осей координат.

12. Три последовательные вершины трапеции находятся в точках:
$A(-3,-2,-1)$, $B(1,2,3)$, $C(9,6,4)$.
Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон, зная, что длина основания $\overline{AD}$ равна 15. Система координат прямоугольная.

13. В трех точках $A(7,3/2)$, $B(6,7)$ и $C(2,4)$ помещены массы, соответственно равные 3, 5, 2. Определить центр тяжести этой системы точек. Система координат: общая декартова.

14. Найти координаты центра тяжести однородного стержня, согнутого под прямым углом, если длины его частей $OA = 2$, $OB = 5$, принимая за начало координат точку O, а за положительные направления осей OX и OY — соответствующие направления $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

15. Даны четыре точки:
$A(-3,5,15)$, $B(0,0,7)$, $C(2,-1,4)$, $D(4,-3,0)$.
Установить, пересекаются ли прямые AB и CD и, если пересекаются, — найти точку их пересечения. Система координат — общая декартова.

16. Даны две вершины треугольника: $A(-4,-1,2)$ и $B(3,5,-16)$. Найти третью вершину C, если середина стороны AC лежит на оси OY, а середина стороны BC — на плоскости OXZ. Система координат — общая декартова.

17. Найти отношение, в котором плоскость OYZ делит отрезок $\overline{AB}$: $A(2,-1,7)$ и $B(4,5,-2)$. Система координат — общая декартова.

18. Даны вершины однородной треугольной пластинки:
$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.
Если соединить середины ее сторон, то образуется новая однородная треугольная пластинка. Доказать, что центры масс обеих пластинок совпадают.

19. Доказать, что центр тяжести системы трех материальных точек A, B, C одинаковой массы совпадает с точкой пересечения медиан $\triangle ABC$.

20. Доказать, что для любого конечного набора точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (в пространстве или на плоскости) найдется, и притом единственная точка, такая, что
$\overline{MA}_1 + \overline{MA}_2 + \cdots + \overline{MA}_n = \Theta$.
Указать положение точки M в следующих частных случаях:
   1) $A_1 A_2 A_3$ — треугольник;
   2) $A_1 A_2 A_3 A_4$ — пространственный или плоский 4-угольник;
   3) $A_1 A_2 \ldots A_n$ — правильный (плоский) n-угольник;

21. Пусть $ABCD$ — произвольный 4-угольник, K, L, M, N — центры тяжести соответственно треугольников ABC, BCD, CDA и DAB. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон 4-угольника $ABCD$, пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон 4-угольника $KLMN$.

22. Две тройки векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ называются взаимными, если $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = 0$ при $i \neq j$, $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = 1$.

   1) Доказать, что для существования тройки $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, взаимной к $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ были не компланарны.

   2) Выразить в этом случае векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ через векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

   3) Доказать, что если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют базис, то векторы взаимной тройки образуют базис той же ориентации (базис взаимный к базису $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$).

23. Решить систему векторных уравнений в пространстве:
   $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = q$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = s$ (векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не компланарны).
   Дать геометрическую интерпретацию решения.

24. Доказать тождество
   $\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$.

25. Две тройки векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ называются взаимными, если $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = 1$.
   Для тройки векторов: $\mathbf{a}_1(3,0,1)$, $\mathbf{a}_2(-1,1,2)$, $\mathbf{a}_3(1,2,1)$
   найти взаимную тройку.

Задача №8 (25 вариантов)

Даны вершины пирамиды A, B, C, D. Вычислить:

a) площадь указанной грани;

b) площадь сечения, проходящего через середину указанного ребра и две указанные вершины;

c) объем пирамиды.

1. Вершины: $A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$;
   a) грань: ACD;
   b) ребро и вершины: AD, B и C.

2. Вершины: $A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$;
   a) грань: ABD;
   b) ребро и вершины: BD, A и C.

3. Вершины: $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$;
   a) грань: ACD;
   b) ребро и вершины: BC, A и D.

4. Вершины: $A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$;
   a) грань: BCD;
   b) ребро и вершины: BC, A и D.
5. Вершины: $A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$;
   a) грань: ABD;
   b) ребро и вершины: AB, C и D.
6. Вершины: $A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$;
   a) грань: ACD;
   b) ребро и вершины: BD, A и C.
7. Вершины: $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$;
   a) грань: BCD;
   b) ребро и вершины: AD, B и C.
8. Вершины: $A(5,-4,4)$, $B(-4,-6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$;
   a) грань: ABD;
   b) ребро и вершины: BD, A и C.
9. Вершины: $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,4)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$;
   a) грань: BCD;
   b) ребро и вершины: BC, A и D.
10. Вершины: $A(-6,4,5)$, $B(5,-7,3)$, $C(4,2,-8)$, $D(2,8,-3)$;
   a) грань: ACD;
   b) ребро и вершины: AD, B и C.
11. Вершины: $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$;
   a) грань: ABD;
   b) ребро и вершины: BD, A и C.
12. Вершины: $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$;
   a) грань: ACD;
   b) ребро и вершины: BC, A и D.
13. Вершины: $A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$;
   a) грань: BCD;
   b) ребро и вершины: BC, A и D.
14. Вершины: $A(7,4,9)$, $B(1,-2,-3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$;
   a) грань: ABD;
   b) ребро и вершины: AB, C и D.
15. Вершины: $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$;
   a) грань: ACD;
   b) ребро и вершины: BD, A и C.

16. Вершины: $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$;
a) грань: BCD;
b) ребро и вершины: AD, B и C.

17. Вершины: $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$;
a) грань: ABD;
b) ребро и вершины: BD, A и C.

18. Вершины: $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$;
a) грань: BCD;
b) ребро и вершины: BC, A и D.

19. Вершины: $A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$;
a) грань: ACD;
b) ребро и вершины: AD, B и C.

20. Вершины: $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$;
a) грань: ABD;
b) ребро и вершины: BD, A и C.

21. Вершины: $A(-5,-3,-4)$, $B(1,4,6)$, $C(3,2-2)$, $D(8,-2,4)$;
a) грань: ACD;
b) ребро и вершины: BC, A и D.

22. Вершины: $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$;
a) грань: ABD;
b) ребро и вершины: AC, B и D.

23. Вершины: $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$;
a) грань: ACD;
b) ребро и вершины: BC, A и D.

24. Вершины: $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$;
a) грань: BCD;
b) ребро и вершины: CD, A и B.

25. Вершины: $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$;
a) грань: ACD;
b) ребро и вершины: AB, C и D.

Библиографический список

1. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.

2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.

3. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.

СОДЕРЖАНИЕ