

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ МАЛОРАЗМЕРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ПЛОСКОСТИ ПОЛЕТА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.01, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 629.78(075)

ББК 39.62я7

У677

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю. М. З а б о л о т н о в,
канд. техн. наук М. В. Б о р и с о в

У677 Управление угловым движением малоразмерного космического аппарата в плоскости полета / И.В. Белоконов, А.В. Крамлих, И.А. Ломака, П.Н. Николаев. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 52 с.

ISBN 978-5-7883-1840-0

Рассмотрены вопросы углового движения малоразмерного космического аппарата под действием внешних (аэродинамического, гравитационного) и внутренних (управляющих) моментов. Для объяснения основных закономерностей углового движения рассмотрена плоская задача. Проиллюстрировано решение наиболее часто встречающихся задач применительно к наноспутникам формата CubeSat.

Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика (уровень бакалавриата), 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов (уровень специалитета), 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика (уровень магистратуры), 03.04.01 Прикладные математика и физика (уровень магистратуры, профиль «Космические информационные системы и наноспутники»), 24.04.02 Системы управления и навигации.

Подготовлено на межвузовской кафедре космических исследований.

УДК 629.78(075)

ББК 39.62я7

ISBN 978-5-7883-1840-0

© Самарский университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 МОДЕЛЬ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА.....	6
1.1 Характеристика типовых режимов углового движения, используемых в миссиях МКА	6
1.2 Описание угловой ориентации МКА.....	7
1.3 Динамические и кинематические уравнения углового движения	11
1.4 Математическая модель углового движения МКА под действием аэродинамического и гравитационного момента в плоскости полёта.....	14
ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНОГО ДВИЖЕНИЯ МКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ.....	16
2.1 Основные типы ориентации МКА	16
2.2 Пассивное движение МКА на высоких орбитах (в отсутствии аэродинамического момента).....	17
2.3 Пассивное движение МКА на низких орбитах (с учётом аэродинамического момента).....	19
2.4 Движение МКА при наличии демпфирования	21
2.4.1 Колебательное движение наноспутника на высоких орбитах при наличии демпфирования	21
2.4.2 Колебательное движение наноспутника на низких орбитах при наличии демпфирования	24
ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА	27

3.1 Задача стабилизации углового движения МКА с использованием магнитной системы	27
3.2 Исследование процесса ориентации и стабилизации МКА с использованием релейного закона управления	29
3.3 Выбор номинальной программы переориентации МКА на основе решения обратной задачи динамики	35
3.4 Выбор оптимальной номинальной программы управления ориентацией МКА	37
3.4.1 Решение задачи переориентации при помощи принципа максимума Понтрягина по критерию быстродействие	37
3.4.2 Решение задачи переориентации при помощи принципа максимума Понтрягина по критерию минимальных затрат на управление	40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	47
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	48
Приложение А	49
Приложение Б	51

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены вопросы углового движения малоразмерного космического аппарата (МКА) под действием внешних (аэродинамического, гравитационного) и внутренних (управляющих) моментов. В настоящее время МКА класса кубсат являются общепризнанным объектом образовательного и научного процесса в вузах по программам космических наук и технологий. Такие МКА разрабатываются и создаются силами учащихся в передовых университетах всего мира. Данное учебное пособие направлено на расширение знания учащихся в области обеспечения требуемого движения МКА на орбите.

В первой главе даётся характеристика основных режимов поведения МКА во время космической миссии и приводится математическая модель углового движения.

Во второй главе делается акцент на исследовании пассивного (неуправляемого) движения МКА на высоких и низких орбитах в малой окрестности положения равновесия.

В третьей главе рассмотрены задачи стабилизации МКА с использованием магнитной системы, а также стабилизации и ориентации МКА с использованием закона П-регулирования. Кроме того, рассмотрены вопросы выбора оптимальной программы управления ориентацией МКА.

ГЛАВА 1 МОДЕЛЬ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА

1.1 Характеристика типовых режимов углового движения, используемых в миссиях МКА

Наиболее простые миссии МКА не предполагают использования специальных бортовых средств для поддержания заданной пространственной ориентации. В этом случае МКА совершает пассивное (неуправляемое) угловое движение: вращательное, если при его отделении на орбите он приобретал существенный начальный кинетический момент, величина и ориентация которого зависела от его размещения на космической платформе и технических характеристик собственно устройства отделения (пускового контейнера). Если был выполнен ряд условий, например, закрутка МКА приобреталась крайне небольшая и восстанавливающий внешний момент доминировал над возмущающим внешним моментом, то МКА мог совершать колебательное движение в окрестности положения равновесия. При этом, если движение происходит в малой окрестности положения равновесия, то уравнения движения могут быть упрощены и возможно получение аналитических решений.

Для более сложных миссий, не допускающих наличие существенных угловых скоростей и требующих неподвижность ориентации связанной системы координат в пространстве, бортовые средства управления (а это как правило магнитные катушки) обеспечивают гашение угловых скоростей, приобретённых МКА после отделения. В результате МКА занимает в пространстве заранее неизвестную ориентацию.

При реализации современных космических миссий всё чаще требуется обеспечение требуемой ориентации и стабилизации МКА и даже в отдельных случаях периодической его переориентации.

В настоящее время наиболее популярными исполнительными устройствами управления на МКА нанокласса являются магнитные катушки, которые хорошо зарекомендовали себя при гашении приобретённого начального кинетического момента и обеспечении ориентации и стабилизации с невысокой точностью. Такие наноспутники широко используются для решения научных задач, например, исследование геофизических полей (магнитосферы, ионосферы, радиационной обстановки и т.п.). Для большинства этих задач допустимо обеспечивать ориентацию связанных осей с погрешностью до 5 град, при этом остаточная угловая скорость допускается до 0,1 град/с. Это позволяет использовать недорогие низкоточностные измерительные средства.

Следует также иметь в виду, что при использовании коммерческих транспортно-пусковых контейнеров, допускающих существенную закрутку МКА нанокласса при отделении от платформы (до 10 град/с), потребуется длительное время, чтобы задемпфировать угловое движение и перевести МКА в рабочее положение.

1.2 Описание угловой ориентации МКА

Для описания угловой ориентации МКА введём следующие системы координат (СК) [1].

Орбитальная система координат (ОСК) $OXYZ$ – центр которой находится в центре масс МКА, ось OZ направлена от притягивающего центра O_z по направлению радиуса-вектора \vec{r} , ось OY совпадает с направлением вектора производной истинной аномалии $\vec{\vartheta}$ (направлена по бинормали к траектории центра масс в ту сторону, откуда его движение видно совершающимся против часовой стрелки), ось OX дополняет систему до правой (рис. 1.1).

Траекторная система координат (ТСК) $O X_k Y_k Z_k$ – центр O находится в центре масс МКА, ось $O X_k$ совпадает с вектором скорости МКА \vec{V} , ось $O Z_k$ располагается в местной вертикальной плоскости и направлена вверх от поверхности планеты, а ось $O Y_k$ дополняет систему до правой. Угол наклона траектории θ_m – угол между осями $O X_k$ и $O X$ (рис. 1.1).

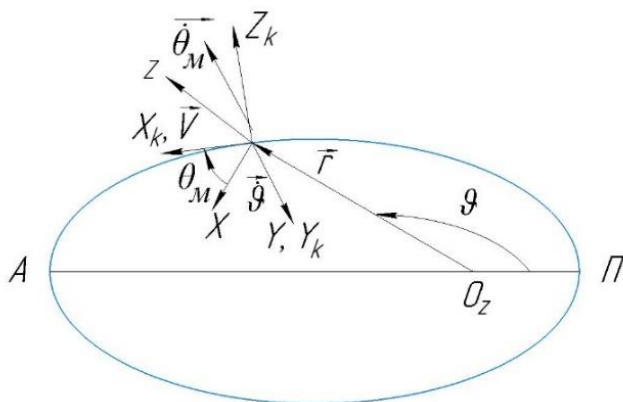


Рисунок 1.1 – Орбитальная система координат

Связанная система координат (ССК) $Oxyz$ – центр O находится в центре масс МКА, а оси системы координат совпадают с главными центральными осями МКА.

Согласно [1] связь между ТСС $O X_k Y_k Z_k$ и ССК $Oxyz$ определим с помощью углов Эйлера: угла прецессии $\psi \in [0, 2\pi]$, угла нутации – пространственного угла атаки $\alpha_n \in [0, \pi]$ и угла собственного вращения $\varphi \in [0, 2\pi]$. Взаимное расположение выбранных СК показано на рис. 1.2. Промежуточные СК: $O X_a Y_a Z_a$ – скоростная, $O X_n Y_n Z_n$ – связанная с пространственным углом атаки.

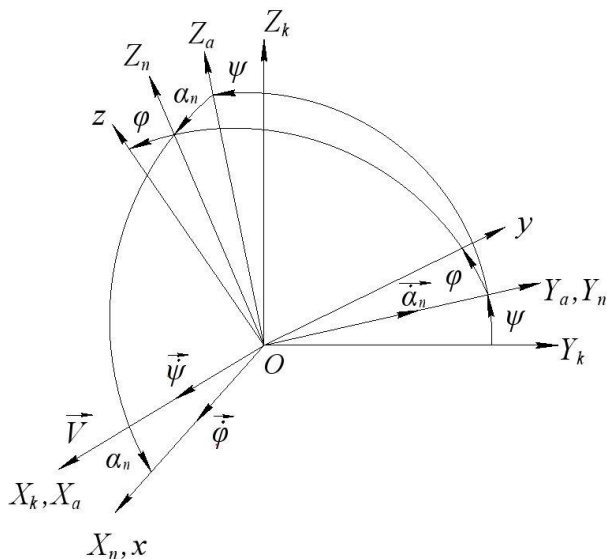


Рисунок 1.2 – Взаимное расположение систем координат

Переход от ОСК $OXYZ$ к ТСК $OX_k Y_k Z_k$ осуществляется с помощью матрицы поворота (поворот вокруг оси OX на угол θ_M):

$$A(\theta_M) = \begin{bmatrix} \cos \theta_M & 0 & \sin \theta_M \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_M & 0 & \cos \theta_M \end{bmatrix}.$$

Переход от ТСК $OX_k Y_k Z_k$ к скоростной СК $OX_a Y_a Z_a$ осуществляется с помощью матрицы поворота (поворот вокруг оси OX_k на угол ψ):

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Переход от скоростной СК $OX_a Y_a Z_a$ к пространственной СК $OX_n Y_n Z_n$ осуществляется с помощью матрицы поворота (поворот вокруг оси OY_a на угол α_n):

$$A(\alpha_n) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & 0 & -\sin \alpha_n \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_n & 0 & \cos \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица перехода от скоростной СК $OX_a Y_a Z_a$ к ССК $Oxyz$:

$$A = A(\varphi)A(\alpha_n)$$

или

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & 0 & -\sin \alpha_n \\ \sin \alpha_n \sin \varphi & \cos \varphi & \cos \alpha_n \sin \varphi \\ \sin \alpha_n \cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \alpha_n \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода от ТСК $OX_k Y_k Z_k$ к ССК $Oxyz$ определяется формулой:

$$B = A \cdot A(\psi) = [b_{ij}], \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \alpha_n, & b_{12} &= \sin \alpha_n \sin \psi, & b_{13} &= -\sin \alpha_n \cos \psi, \\ b_{21} &= \sin \alpha_n \sin \varphi, & b_{22} &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \alpha_n \sin \varphi \sin \psi, \\ b_{23} &= \cos \varphi \sin \psi + \cos \alpha_n \sin \varphi \cos \psi, \\ b_{31} &= \sin \alpha_n \cos \varphi, & b_{32} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \alpha_n \cos \varphi \sin \psi, \\ b_{33} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \alpha_n \cos \varphi \cos \psi. \end{aligned}$$

Матрица перехода от ОСК $OXYZ$ к ССК $Oxyz$ определяется формулой:

$$C = A \cdot A(\theta_m) = [c_{ij}]. \quad (1.2)$$

В случае если орбита МКА околокруговая, траекторная и орбитальная СК совпадают ($\theta_m = 0$), а матрица перехода (1.2) совпадает с матрицей перехода (1.1). В этом случае величина производной истинной аномалии $\bar{\vartheta}$ является постоянной и вычисляется по формуле:

$$\dot{\vartheta} = \omega_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}},$$

где $\mu = 398602 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$ – гравитационный параметр Земли; r – радиус-вектор орбиты МКА.

В дальнейшем рассматривается угловое движения МКА по круговым орбитам.

1.3 Динамические и кинематические уравнения углового движения

Движение МКА относительно центра масс как твёрдого тела в проекциях на оси ОСК с учётом действия гравитационного и аэродинамического моментов описывается уравнениями Эйлера [1, 2]:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x^r + M_x^a, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y^r + M_y^a, \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z^r + M_z^a, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где M_k^r, M_k^a – проекции гравитационного и аэродинамического моментов на оси ССК ($k = x, y, z$); J_k – главные центральные моменты инерции МКА; ω_k – проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ на оси ССК.

Для полного описания углового движения МКА необходимо задать зависимость величин гравитационного и аэродинамического моментов от мгновенного положения ССК относительно ОСК, которая устанавливается с помощью ранее введённых углов Эйлера.

Согласно [1, 3], выражения для гравитационного момента имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x^r &= \frac{3\mu}{r^3} (J_z - J_y) b_{23} b_{33}, \\ M_y^r &= \frac{3\mu}{r^3} (J_x - J_z) b_{33} b_{13}, \\ M_z^r &= \frac{3\mu}{r^3} (J_y - J_x) b_{13} b_{23}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для записи выражения аэродинамического момента будем считать, что обтекание МКА является свободномолекулярным и

удар молекул газа абсолютно неупругий. В этом случае аэродинамическая сила представляет собой силу сопротивления, которая определяется площадью проекции МКА на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [4]:

$$\vec{Q}_{xv} = -c_0 \tilde{S} q S \vec{e}_v,$$

где c_0 – коэффициент сопротивления, который может принимать значения в диапазоне от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности МКА (для проектных проработок принимается равным 2,2); \tilde{S} – площадь проекции МКА, спроектированная на плоскость перпендикулярную вектору скорости набегающего потока и отнесённая к характерной площади S ; $q = q(H) = \rho(H)[V(H)]^2/2$ – скоростной напор; $V(H) = \sqrt{\mu/(R_3 + H)}$ – скорость полёта по круговой орбите; $\rho(H)$ – плотность атмосферы; \vec{e}_v – единичный вектор, ориентированный по направлению вектора скорости центра масс.

Для МКА имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным поперечным сечением, величина \tilde{S} определяется по формуле [5]:

$$\tilde{S} = |\cos(\alpha_n)| + k_s \sin(\alpha_n) \cdot (|\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)|),$$

где k_s – отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади.

Проекции аэродинамического момента в связанной системе координат $Oxyz$ для МКА нанокласса формата CubeSat, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, можно представить в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} M_x^a &= Q_{xv} [\sin \alpha_n \cos \varphi y_d - \sin \alpha_n \cos \varphi z_d], \\ M_y^a &= Q_{xv} [\cos \alpha_n z_d - \sin \alpha_n \cos \varphi x_d], \\ M_z^a &= -Q_{xv} [\sin \alpha_n \sin \varphi x_d + \cos \alpha_n y_d], \end{aligned} \quad (1.5)$$

Где x_d, y_d, z_d – координаты положения центра давления МКА относительно центра масс в ССК.

В случае, если центр масс лежит на продольной оси МКА ($x_d \neq 0, y_d = z_d = 0$). Тогда, проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс на оси ССК $Oxyz$ равны:

$$\begin{aligned} M_x^a &= 0, \\ M_y^a &= -Q_{xv} \sin \alpha_n \cos \varphi x_d, \\ M_z^a &= -Q_{xv} \sin \alpha_n \sin \varphi x_d. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Момент аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс, действующий в плоскости $Ox_n z_n$, можно записать в виде

$$M^a = Q_{xv} x_d \sin \alpha_n = -c_0 \tilde{S} \Delta \bar{x} q S l \sin \alpha_n = m_\alpha(\alpha_n, \varphi) q S l, \quad (1.7)$$

где $\Delta \bar{x} = \frac{x_d}{l}$, l – характерная длина МКА; коэффициент аэродинамического момента $m_\alpha(\alpha_n, \varphi)$, вычисленный относительно центра масс, определяется по формуле

$$\begin{aligned} m_\alpha(\alpha_n, \varphi) &= -c_0 [|\cos \alpha_n| + k_s \sin \alpha_n \times \\ &\times (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)] \Delta \bar{x} \sin \alpha_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Дополним динамические уравнения (1.3) тремя кинематическими уравнениями, которые связывают проекции вектора абсолютной угловой скорости с первыми производными углов Эйлера.

Учитывая, что мгновенная угловая скорость равна сумме угловых скоростей составляющих вращение:

$$\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\varphi} + \bar{\alpha}_n + \omega_{орб},$$

кинематические соотношения примут вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \alpha_n + \dot{\varphi} + \omega_{орб} b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \alpha_n + \dot{\alpha}_n \cos \varphi + \omega_{орб} b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \alpha_n - \dot{\alpha}_n \sin \varphi + \omega_{орб} b_{32}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Динамические уравнения Эйлера (1.3) и кинематические соотношения (1.9) составляют полную систему уравнений движения относительно центра масс МКА.

1.4 Математическая модель углового движения МКА под действием аэродинамического и гравитационного момента в плоскости полёта

Для получения математической модели углового движения симметричного МКА под действием аэродинамического и гравитационного моментов в плоскости полёта воспользуемся формулами (1.3) и (1.9) в которых положим:

$$\dot{\vartheta} = \omega_{орб} = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0, \psi = 0, \dot{\psi} = 0, \alpha = \alpha_n. \quad (1.10)$$

Тогда уравнения (1.3) примут вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, \\ \omega_y &= \dot{\alpha}, \\ \omega_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Продифференцируем второе равенство (1.11) и учитывая второе равенство (1.3) получим математическую модель углового движения симметричного МКА ($J_y = J_z = J_n$) под действием аэродинамического и гравитационного моментов в плоскости полёта:

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_n} [M_y^r + M_y^a]. \quad (1.12)$$

Гравитационный момент в (1.12) с учётом (1.10) примет вид:

$$M_y^r = \frac{3\mu}{r^3} (J_x - J_n) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1.13)$$

Аэродинамический момент запишем для случая, когда центр масс лежит на продольной оси МКА (1.8), кроме этого, примем что зависимость коэффициента аэродинамического момента $m_\alpha(\alpha_n, \varphi)$ усреднённую по углу собственного вращения φ с достаточной точностью можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки α [1]:

$$m_\alpha(\alpha) = a_0 \sin \alpha, \quad (1.14)$$

где a_0 – коэффициент аппроксимации синусоидальной зависимости по углу атаки коэффициента аэродинамического момента, вычисленного относительно центра масс.

Тогда, приближённая модель углового движения динамически симметричного МКА в плоскости круговой орбиты, которая описывает изменение угла атаки под действием гравитационного и аэродинамического моментов имеет вид [1]:

$$\ddot{\alpha} = k_r \sin \alpha \cos \alpha + k_a \sin \alpha, \quad (1.15)$$

где J_{π} – поперечный момент инерции МКА; $k_r = \frac{3\mu}{J_{\pi} r^3} (J_x - J_{\pi}) < 0$ – коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента; $k_a = \frac{a_0 q S l}{J_{\pi}}$ – коэффициент, обусловленный действием аэродинамического восстанавливающего момента. Здесь и в последующем пренебрегаем орбитальной угловой скоростью МКА, которая, например для высоты 450 км составляет 0,064 град/с.

Для случаев малых углов ($\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$) гравитационный момент (1.13) примет вид:

$$M_y^r = \frac{3\mu}{r^3} (J_x - J_{\pi}) \alpha, \quad (1.14)$$

аэродинамический момент примет вид:

$$M_y^a = c_x S q \Delta \alpha, \quad (1.14)$$

Δ – запас статической устойчивости (расстояние между центром масс и центром давления МКА).

ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНОГО ДВИЖЕНИЯ МКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

2.1 Основные типы ориентации МКА

При выведении МКА на высокие орбиты (выше 500 км) основным (восстанавливающим) внешним моментом является гравитационный момент, а аэродинамический момент является возмущающим, не оказывает заметного влияния и им можно пренебречь. Тогда МКА будет стремиться занять положение, при котором продольная ось, относительно которой момент инерции имеет минимальное значение, будет стремиться занять вертикальное положение. Такая ориентация называется гравитационной.

На низких орбитах при малых значениях гравитационного момента ориентацию МКА могут определять аэродинамические силы, которые стремятся повернуть продольную ось МКА по вектору набегающего потока. Такая ориентация называется аэродинамической.

На высотах, традиционно используемых для выведения МКА (350-500 км) необходимо оценивать уровни действующих внешних моментов и находить устойчивые положения равновесия, относительно которых, при малых угловых скоростях движения и доминировании какого-либо внешнего момента, МКА будет стремиться совершать колебательное движение.

Положения равновесия МКА определяется из условия равенства нулю суммы гравитационного и аэродинамического моментов. Для нахождения положения равновесия в уравнение (1.15) положим $\ddot{\alpha} = 0$, тогда следует записать соотношение

$$k_r \sin \alpha \cos \alpha = -k_a \sin \alpha. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) имеет два решения

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \cos \alpha = -\frac{k_a}{k_r}. \quad (2.2)$$

Положение равновесия при условии $\alpha = 0$ является неустойчивым, а второе положение равновесия, соответствующее углу $\alpha = \arccos\left(-\frac{k_a}{k_r}\right)$, является устойчивым. Такое значение угла α называется балансирующим.

Все числовые результаты в главе 2, иллюстрирующие угловое движение МКА, соответствуют исходным данным, приведённым в Приложении А.

2.2 Пассивное движение МКА на высоких орбитах (в отсутствии аэродинамического момента)

На высоких орбитах, где отсутствует аэродинамический момент, уравнение плоского движения примет вид:

$$\ddot{\alpha} + k_r \cos \alpha \sin \alpha = 0. \quad (2.3)$$

Найдём положение равновесия и рассчитаем колебательное движение МКА в малой окрестности положения равновесия, а также построим фазовый портрет.

Рассмотрим два случая положения равновесия и добавим малое угловое отклонение $\Delta\alpha$

$$\alpha = 0 + \Delta\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \Delta\alpha.$$

При $\alpha = 0 + \Delta\alpha$ уравнение колебаний МКА примет вид:

$$\ddot{\alpha} + k_r \cos(\Delta\alpha) \sin(\Delta\alpha) = 0. \quad (2.4)$$

В силу малости $\Delta\alpha$ и отрицательности гравитационного коэффициента получим:

$$\Delta\ddot{\alpha} - |k_r|\Delta\alpha = 0.$$

Так как не выполняется необходимое условие устойчивости [3], то $\alpha = 0$ является неустойчивым положением равновесия.

Для второго случая уравнение движения МКА примет вид:

$$\Delta\ddot{\alpha} + k_r \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha\right) = 0.$$

В силу малости $\Delta\alpha$ и отрицательности гравитационного коэффициента получим:

$$\Delta\ddot{\alpha} + |k_r|\Delta\alpha = 0.$$

Необходимое условие устойчивости выполняется, поэтому для представления о характере движения МКА найдём решение дифференциального уравнения. Запишем и решим его характеристическое уравнение:

$$p^2 + |k_r| = 0 \rightarrow p_{1,2} = \pm i\sqrt{|k_r|}.$$

Общее решение уравнения примет вид:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(t) = C_1 \cos(\sqrt{|k_r|}t) + C_2 \sin(\sqrt{|k_r|}t) \\ \Delta\dot{\alpha}(t) = C_2\sqrt{|k_r|} \cos(\sqrt{|k_r|}t) - C_1\sqrt{|k_r|} \sin(\sqrt{|k_r|}t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Произвольные постоянные в (2.5) находятся из известных начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(0) = \Delta\alpha_0 \\ \Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 \\ C_2 = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\sqrt{|k_r|}} \end{cases}.$$

Пример фазового портрета, отражающий характер движения МКА приведён на рис. 2.1. Фазовый портрет представляет собой эллипс с центром в положении равновесия, из которого следует, что МКА совершает незатухающие колебания относительно местной вертикали.

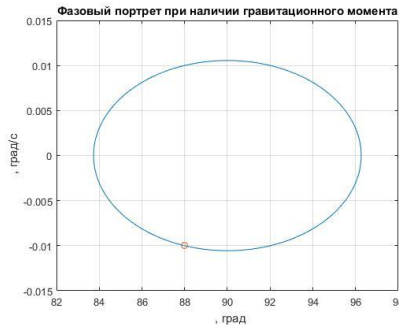


Рисунок 2.1 – Пример фазового портрета

при $\Delta\alpha_0 = -2$ град, $\Delta\dot{\alpha}_0 = -0,01$ град/с, $|k_r| = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{c^2}$

2.3 Пассивное движение МКА на низких орбитах (с учётом аэродинамического момента)

Рассмотрим плоское движение МКА под действием аэродинамического и гравитационного моментов.

В этом случае уравнение движения примет вид:

$$\ddot{\alpha} + k_r \cos \alpha \sin \alpha = -k_a \sin \alpha. \quad (2.6)$$

Рассчитаем колебательное движение МКА в окрестности положения равновесия, определённого по соотношению (2.2), и построим фазовый портрет. Для этого угол α с учётом малого отклонения продольной оси МКА от положения равновесия можно представить $\alpha = \alpha_{уст} + \Delta\alpha$.

Подставив в уравнение (2.6) получим

$$\Delta\ddot{\alpha} + k_r \cos(\alpha_{уст} + \Delta\alpha) \sin(\alpha_{уст} + \Delta\alpha) = -k_a \sin(\alpha_{уст} + \Delta\alpha).$$

Принимая во внимание, что для малых $\Delta\alpha$ можно произвести замену $\sin(\Delta\alpha) \sim \Delta\alpha$, а $\cos(\Delta\alpha) \sim 1$, уравнение можно переписать в виде

$$\Delta\ddot{\alpha} + \frac{1}{2} k_r \sin 2(\alpha_{уст} + \Delta\alpha) = -k_a [\sin(\alpha_{уст}) + \Delta\alpha \cos(\alpha_{уст})].$$

В силу малости $\Delta\alpha$, отрицательности коэффициента гравитационного момента и выполнения условия равновесия полученное выражение можно преобразовать к виду:

$$\Delta\ddot{\alpha} + \Delta\alpha(k_a \cos(\alpha_{уст}) - |k_r| \cos 2(\alpha_{уст})) = 0$$

или

$$\Delta\ddot{\alpha} + \Delta\alpha(\Delta k) = 0,$$

где $\Delta k = k_a \cos(\alpha_{уст}) - |k_r| \cos 2(\alpha_{уст}) > 0$.

Необходимое условие устойчивости выполняется, поэтому решение уравнения движения аналогично решению в разделе 2.2.

Характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряжённых корней:

$$p^2 + \Delta k = 0 \rightarrow p_{1,2} = \pm i\sqrt{\Delta k}$$

и угловое движение описывается соотношениями, аналогичными (2.5)

$$\begin{cases} \Delta\alpha(t) = C_1 \cos(\sqrt{\Delta k}t) + C_2 \sin(\sqrt{\Delta k}t) \\ \Delta\dot{\alpha}(t) = C_2\sqrt{\Delta k} \cos(\sqrt{\Delta k}t) - C_1\sqrt{\Delta k} \sin(\sqrt{\Delta k}t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Константы итерирования находятся из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(0) = \Delta\alpha_0 \\ \Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 \\ C_2 = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\sqrt{\Delta k}} \end{cases}$$

После нахождения произвольных постоянных, строится фазовый портрет углового движения МКА (рис. 2.2).

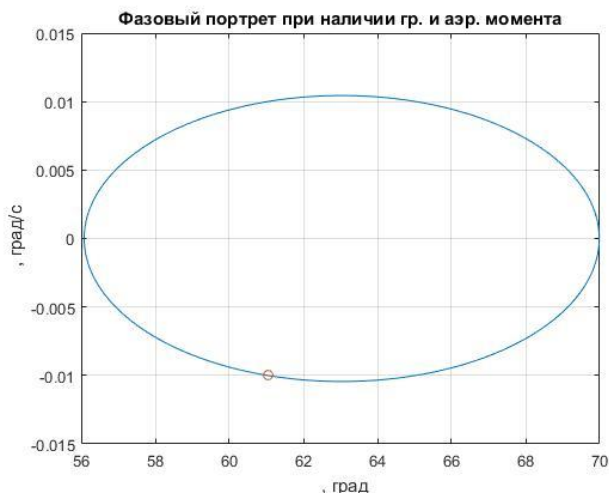


Рисунок 2.2 – Пример фазового портрета при наличии гравитационного и аэродинамического моментов

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_0 &= -2 \text{ град}, \Delta\dot{\alpha}_0 = -0,01 \frac{\text{град}}{\text{с}}, H=450 \text{ км} \\ |k_r| &= 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{с}^2}, k_a = 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{с}^2} \end{aligned}$$

В этом случае МКА так же совершает незатухающие колебания, но не относительно местной вертикали, а балансирующего угла, равного $\alpha_{уст} = 63$ град.

2.4 Движение МКА при наличии демпфирования

2.4.1 Колебательное движение наноспутника на высоких орбитах при наличии демпфирования

Для исследования колебательного движения МКА в окрестности устойчивого положения равновесия – местной вертикали ($\alpha = \frac{\pi}{2} + \Delta\alpha$) и построения фазового портрета при наличии демпфирующего момента перепишем уравнение (1.15) в виде

$$\ddot{\alpha} + k_r \cos \alpha \sin \alpha = -k_d \dot{\alpha}, \quad (2.8)$$

где k_d – коэффициент демпфирования.

При наличии пассивного демпфирования уравнение колебаний МКА (2.8) примет вид:

$$\Delta \ddot{\alpha} + k_r \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha\right) + k_d \Delta \dot{\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

или

$$\Delta \ddot{\alpha} - k_r \sin(\Delta\alpha) \cos(\Delta\alpha) + k_d \Delta \dot{\alpha} = 0.$$

В силу малости $\Delta\alpha$ и отрицательности коэффициента гравитационного момента получим:

$$\Delta \ddot{\alpha} + |k_r| \Delta\alpha + k_d \Delta \dot{\alpha} = 0.$$

Для данного дифференциального уравнения характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2 + pk_d + |k_r| = 0 \rightarrow p_{1,2} = -\frac{k_d}{2} \pm \sqrt{\left|\left(\frac{k_d}{2}\right)^2 - |k_r|\right|} = -\lambda \pm i\beta.$$

В этом случае решение однородного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(t) = e^{-\lambda t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] \\ \Delta\dot{\alpha}(t) = e^{-\lambda t} [C_2 \beta \cos(\beta t) - C_1 \beta \sin(\beta t)] - \\ - \alpha e^{-\lambda t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] \end{cases} \quad (2.10)$$

Подставим начальные условия в полученную систему уравнений для того, чтобы найти произвольные постоянные:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(0) = \Delta\alpha_0 \\ \Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 \\ C_2 = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0 - \alpha\Delta\alpha_0}{\beta} \end{cases}$$

Для оценки значения коэффициента демпфирования необходимого для обеспечения демпфирования колебаний по углу атаки и угловой скорости до требуемых значений $\Delta\alpha_A^T$ и $\Delta\dot{\alpha}_0^T$ за заданный промежуток времени T запишем выражения для изменения амплитуд колебаний по углу и угловой скорости от времени:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_A(t) = e^{-\lambda t} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \Delta\dot{\alpha}_A(t) = e^{-\lambda t} \left[\beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - \lambda^2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \right] \end{cases} \quad (2.11)$$

Чтобы найти оценку коэффициента демпфирования, подставим в уравнения (2.11) требуемые конечные условия:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_A(T) = \Delta\alpha_A^T \\ \Delta\dot{\alpha}_A(T) = \Delta\dot{\alpha}_0^T \end{cases}$$

и получим систему нелинейных уравнений относительно λ и β :

$$\begin{cases} e^{-\lambda T} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \Delta\alpha_A^T \\ e^{-\lambda T} \left[\beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - \lambda^2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \right] = \Delta\dot{\alpha}_0^T \end{cases} \quad (2.12)$$

Для иллюстрации углового движения выбраны коэффициенты демпфирования, обеспечивающие при начальных условиях $\Delta\alpha_0 = -2$ град, $\Delta\dot{\alpha}_0 = -0,01$ град/с выполнение допустимых отклонений по амплитуде колебаний 0,5 град и угловой скорости 0,005 град/с за шестнадцать и восемь витков движения МКА по орбите высотой 450 км. Примеры фазовых портретов приведены в рис. 2.3 и 2.4.



Рисунок 2.3 – Пример фазового портрета при учёте гравитационного момента и наличии демпфирующего момента, продолжительность демпфирования $T = 89702$ с

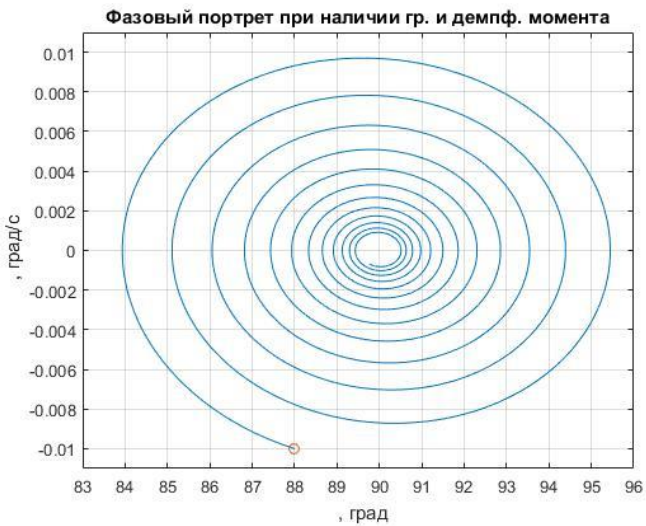


Рисунок 2.4 – Пример фазового портрета при учёте гравитационного момента и наличии демпфирующего момента, продолжительность демпфирования $T = 44851$ с

При наличии демпфирования фазовый портрет представляет собой сворачивающуюся спираль, которая со временем сходится к углу, соответствующему положению равновесия, относительно которого происходили колебания.

2.4.2 Колебательное движение наноспутника на низких орбитах при наличии демпфирования

Исследуем колебательное движение МКА в окрестности положения равновесия, при действии аэродинамического, гравитационного и демпфирующего моментов и построим фазовый портрет. Для этого рассмотрим случай, в котором МКА имеет устойчивое положение равновесия, аналогичное приведённому в разделе 2.3.

В этом случае уравнение движения МКА примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\alpha} + k_r \cos(\alpha_{уст} + \Delta\alpha) \sin(\alpha_{уст} + \Delta\alpha) + k_d \Delta\dot{\alpha} = \\ = -k_a \sin(\alpha_{уст} + \Delta\alpha). \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу малости $\Delta\alpha$, отрицательности гравитационного коэффициента и выполнения условий $\sin(\Delta\alpha) \sim \Delta\alpha$, $\cos(\Delta\alpha) \sim 1$ получим:

$$\Delta\ddot{\alpha} + \Delta\alpha(k_a \cos(\alpha_{уст}) - |k_r| \cos(2\alpha_{уст})) + k_d \Delta\dot{\alpha} = 0$$

или

$$\Delta\ddot{\alpha} + \Delta\alpha(\Delta k) + k_d \Delta\dot{\alpha} = 0,$$

$$p^2 + p\Delta k_d + k_2 = 0 \rightarrow p_{1,2} = -\frac{k_d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_d}{2}\right)^2 - \Delta k} = -\lambda \pm i\beta.$$

Общее решение данного уравнения будет иметь тот же вид, что и решение в пункте 2.3. Общее решение дифференциального уравнения примет вид (2.10):

$$\begin{cases} \Delta\alpha(t) = e^{-\lambda t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] \\ \Delta\dot{\alpha}(t) = e^{-\lambda t} [C_2\beta \cos(\beta t) - C_1\beta \sin(\beta t)] - \\ - \lambda e^{-\lambda t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] \end{cases} \quad (2.14)$$

Подставив начальные условия в полученную систему (2.14), найдём произвольные постоянные:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(0) = \Delta\alpha_0 \\ \Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 \\ C_2 = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0 + \alpha(\Delta\alpha_0)}{\beta} \end{cases}$$

Аналогично (2.8) запишем уравнения, описывающие амплитуду колебаний угла и угловой скорости:

$$\begin{cases} \alpha_A(t) = e^{-\lambda t} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \dot{\alpha}_A(t) = e^{-\lambda t} \left[\beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - \lambda^2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \right] \end{cases}$$

Численные результаты приведены для тех же исходных данных при коэффициентах демпфирования $(0,0000558 \frac{1}{c}$ и $0,00018916 \frac{1}{c})$, обеспечивающих выполнение требуемых конечных условий за 16 и 8 витков орбитального движения.

Как видно из рисунков 2.5 и 2.6 фазовые портреты представляют собой спирали, сворачивающиеся к балансировочному углу, равному 63 град.

Пример позволяет понять важность принятия правильных решений об учёте/не учёте тех или иных внешних моментов.

Пренебрежение аэродинамическим моментам в рассмотренном примере приводит к неправильному нахождению балансировочного угла ориентации и невозможности при пассивном движении достижения гравитационной ориентации.

Это может привести к неправильным решениям при проведении лётно-космического эксперимента.

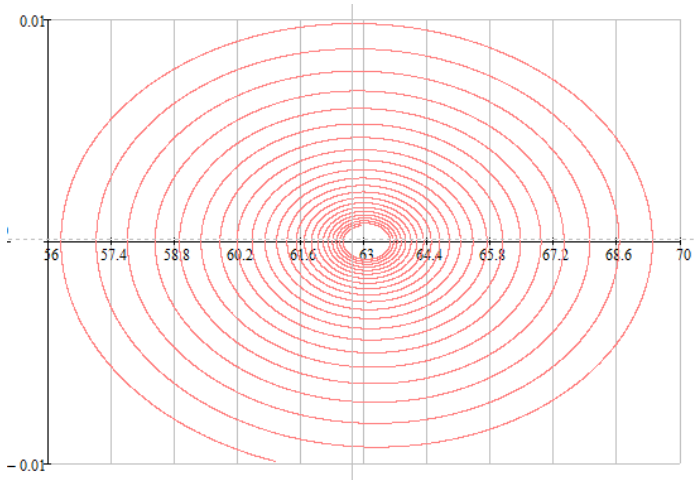


Рисунок 2.5 – Фазовый портрет системы при наличии гравитационного момента, аэродинамического момента и демпфирования, время демпфирования $T=89702$ с

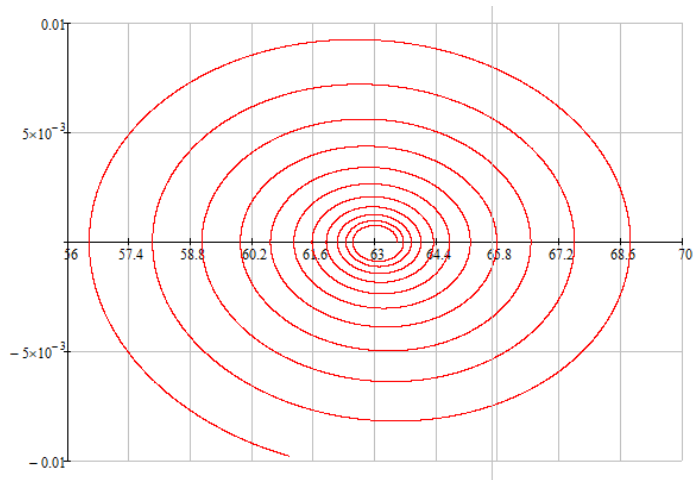


Рисунок 2.6 – Фазовый портрет системы при наличии гравитационного момента, аэродинамического момента и демпфирования, время демпфирования $T=44851$ с

ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МКА

3.1 Задача стабилизации углового движения МКА с использованием магнитной системы

Рассмотрим МКА формата CubeSat, вытянутый вдоль продольной оси (рис. 3.1).

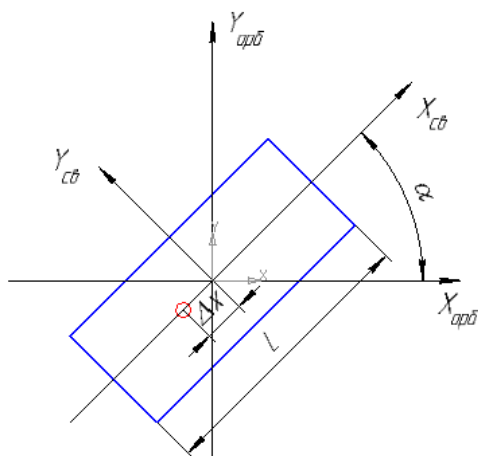


Рисунок 3.1 – МКА формата CubeSat

Одним из наиболее часто используемых алгоритмов магнитной ориентации является алгоритм B-dot [6]. Этот алгоритм широко используется для демпфирования начальной угловой скорости после отделения от средства выведения почти на всех МКА нанокласса формата CubeSat, оснащённых активной магнитной системой ориентации.

Уравнения движения МКА запишем в виде:

$$\ddot{\alpha} = k_a \sin \alpha + k_r \sin 2\alpha + \frac{u(t)}{J_{\Pi}} + M^{\text{упр}}, \quad (3.1)$$

где $M^{\text{упр}}$ – управляющий момент магнитной системы.

Дипольный магнитный момент \bar{m} формируется по закону [6, 7]

$$\bar{m} = -k\dot{\bar{B}} \quad (3.2)$$

и создаётся магнитной системой управления. Здесь $\dot{\bar{B}}$ – производная вектора магнитной индукции; k – постоянный положительный коэффициент. Управляющий магнитный момент возникает при взаимодействии дипольного магнитного момента катушки и магнитного поля Земли и определяется в векторном виде

$$\bar{M}^{\text{упр}} = \bar{m} \times \bar{B} \quad (3.3)$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned} M_x^{\text{упр}} &= -k(\dot{B}_y B_z - \dot{B}_z B_y), \\ M_y^{\text{упр}} &= -k(\dot{B}_z B_x - \dot{B}_x B_z), \\ M_z^{\text{упр}} &= -k(\dot{B}_x B_y - \dot{B}_y B_x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где B_x, B_y, B_z – проекции вектора магнитной индукции магнитного поля Земли (МПЗ) на оси ССК; $\dot{B}_x, \dot{B}_y, \dot{B}_z$ – проекции вектора производной магнитной индукции МПЗ на оси ССК.

Магнитный управляющий момент в случае плоского движения МКА $M_z^{\text{упр}} = M_z^{\text{упр}}$ и использовании модели МПЗ в виде простого диполя записывается в виде [8]

$$M_z^{\text{упр}} = \frac{\mu_m^2 k (\cos^2 i - 1) (6\alpha \sin^2 u - 4\omega_{\text{орб}} + 2\alpha)}{2r^6}. \quad (3.5)$$

Коэффициент k выбирается исходя из требований к интервалу времени, за который необходимо погасить угловую скорость, и ограничений на величину дипольного момента, который может создать магнитная система МКА.

Все числовые результаты в разделах 3.1 и 3.2, иллюстрирующие угловое движение, соответствуют исходным данным и параметрам МКА нанокласса, приведённым в Приложении А.

На рис. 3.2 приведён пример демпфирования движения МКА нанокласса при начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0 = 10$ град/с до достижения угловой скорости $\dot{\alpha}_к = 0,005$ град/с за время $T = 5646$ с, при значении коэффициента усиления $k = 42400$.

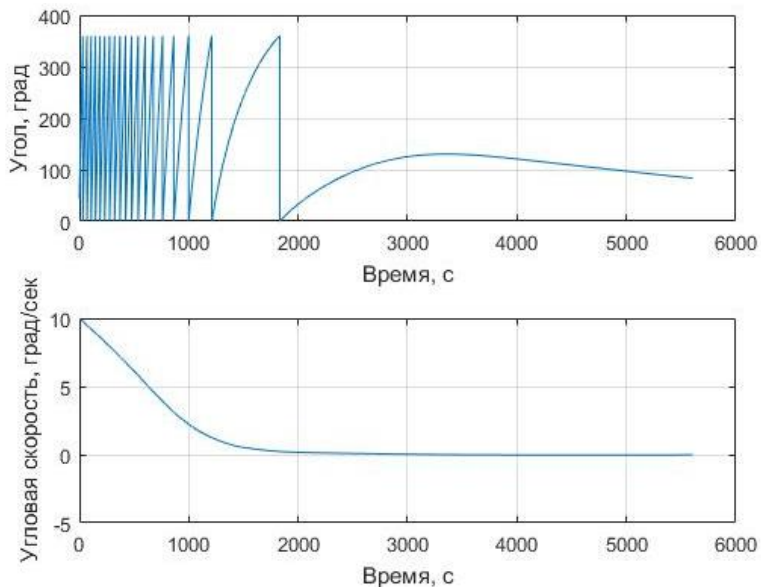


Рисунок 3.2 – График угловой скорости и угла от времени

Как видно из рис. 3.2 при таком значении коэффициента усиления достигается заданное конечное условие по угловой скорости, а угол сходится к положению равновесия.

3.2 Исследование процесса ориентации и стабилизации МКА с использованием релейного закона управления

Рассмотрим движение МКА под действием управляющего момента, изменяющегося по релейному закону:

$$M^{упр} = -M \cdot \text{sign}[k_{\alpha}(\alpha - \alpha_{к}) + k_{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_{к})]. \quad (3.6)$$

Задача состоит в переводе продольной оси МКА в требуемое угловое положение α_k и заставить его с остаточной угловой скоростью не выше $\dot{\alpha}_k$.

Рассмотрим случай движения по высоким орбитам в отсутствие аэродинамического момента.

Величина управляющего момента должна превышать величину гравитационного момента (в примерах принимается двухкратное превышение).

Из анализа (3.6) следует, что при достижении в фазовой плоскости так называемой линии переключения

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{k_\alpha}{k_{\dot{\alpha}}}(\alpha(t) - \alpha_k) - \dot{\alpha}_k$$

происходит смена знака управляющего момента.

Уравнение углового движения имеет вид:

$$\ddot{\alpha} + k_r \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{M}{J_\Pi} \text{sign}[k_\alpha(\alpha - \alpha_k) + k_{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_k)] \quad (3.6)$$

или при малом угле α

$$\ddot{\alpha} + k_r \alpha = -\frac{M}{J_\Pi} \text{sign}[k_\alpha(\alpha - \alpha_k) + k_{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_k)]. \quad (3.8)$$

Решение уравнения (3.8) имеет вид:

$$\alpha(t) = C_1 \cos(\sqrt{|k_r|} \cdot t) + C_2 \sin(\sqrt{|k_r|} \cdot t) - (-1)^{0||1} \frac{M}{J_\Pi |k_r|}$$

где C_1 и C_2 находится из начальных условий:

$$C_1 = \alpha_0 + (-1)^{0||1} \frac{M}{J_\Pi |k_r|}, C_2 = \frac{\dot{\alpha}_0}{\sqrt{|k_r|}}$$

С использованием выражения для линии переключения записывается уравнение, решение которого определяет момент времени, при котором происходит смена знака управляющего момента:

$$\begin{aligned}
& -C_1\sqrt{|k_r|} \sin(\sqrt{|k_r|} \cdot t_{\Pi}) + C_2\sqrt{|k_r|} \cos(\sqrt{|k_r|} \cdot t_{\Pi}) = \\
& = -\frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}}\left(C_1 \cos(\sqrt{|k_r|} \cdot t) + C_2 \sin(\sqrt{|k_r|} \cdot t) - \right. \\
& \quad \left. -\frac{M^{y_{\Pi\Pi}}}{J_{\Pi}|k_r|} - \alpha_{\kappa}\right) - \dot{\alpha}_{\kappa}.
\end{aligned}$$

В результате решения уравнения находится время переключения t_{Π} :

$$\begin{aligned}
t_{\Pi} = & \\
= & \frac{1}{\sqrt{K}} \left(\arccos \left(\frac{\left(\frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}} \frac{M^{y_{\Pi\Pi}}}{J_{\Pi}|k_r|} + \dot{\alpha}_{\kappa} + \frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}} \alpha_{\kappa} \right)}{\sqrt{\left(-C_1\sqrt{|k_r|} + \frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}} C_2 \right)^2 + \left(C_2\sqrt{|k_r|} + \frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}} C_1 \right)^2}} \right) \right. \\
& \left. - \operatorname{arctg} \frac{-C_1\sqrt{|k_r|} + \frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}} C_2}{C_2\sqrt{|k_r|} + \frac{k_{\alpha}}{k_{\dot{\alpha}}} C_1} \right), \tag{3.9}
\end{aligned}$$

где

$$C_1 = \alpha_0 + \frac{M^{y_{\Pi\Pi}}}{J_{\Pi}|k_r|}, C_2 = \frac{\dot{\alpha}_0}{\sqrt{|k_r|}}.$$

Затем рассчитываются $\alpha(t_{\Pi})$ и $\dot{\alpha}(t_{\Pi})$, которые принимаются новыми начальными условиями, но для следующей итерации $M^{y_{\Pi\Pi}}$ меняет знак. То есть для полуплоскости

$$\dot{\alpha}(t) \geq -\frac{k_1}{k_2}(\alpha(t) - \alpha_{\kappa}) - \dot{\alpha}_{\kappa}$$

берётся $M^{y_{\Pi\Pi}}$ со знаком плюс, а для полуплоскости

$$\dot{\alpha}(t) \leq -\frac{k_1}{k_2}(\alpha(t) - \alpha_{\kappa}) - \dot{\alpha}_{\kappa}$$

берётся $M^{y_{\Pi\Pi}}$ со знаком минус.

На рис. 3.3-3.5 показаны примеры графиков изменения угла и угловой скорости для исходных данных, приведённых в Приложении А.

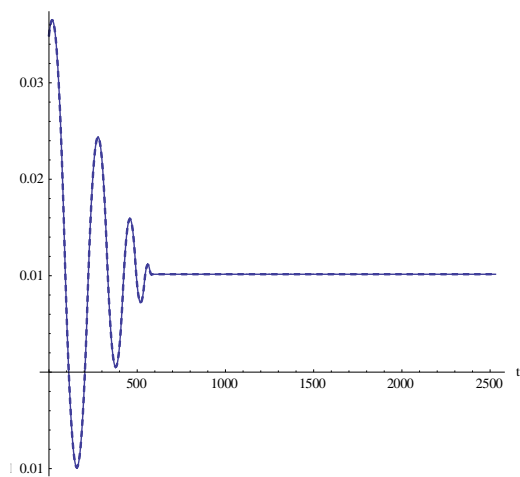


Рисунок 3.3 – График зависимости $\alpha(t)$

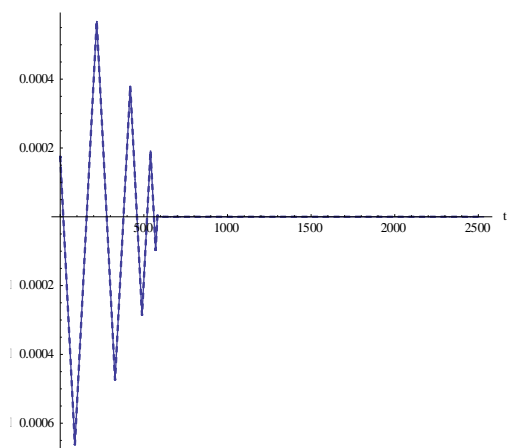


Рисунок 3.3 – График зависимости $\dot{\alpha}(t)$

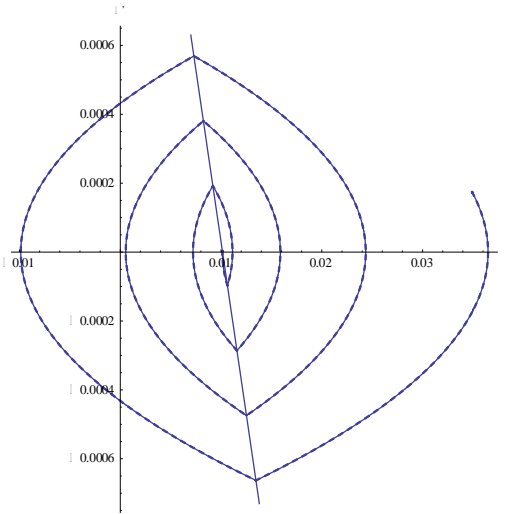


Рисунок 3.4 – Фазовый портрет $\dot{\alpha}(\alpha)$

Аналогично решается задача ориентации и стабилизации для низких орбит. Примеры графиков показаны на рис. 3.5-3.7.

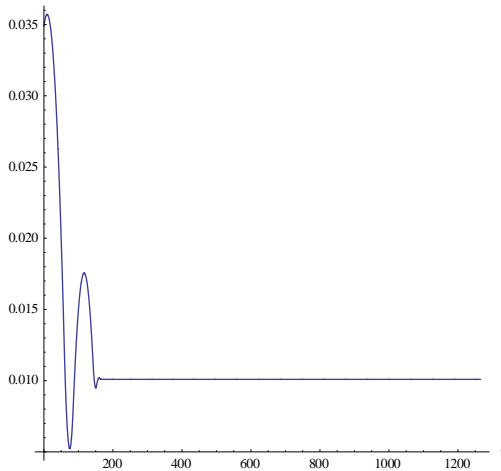


Рисунок 3.5 – График зависимости $\alpha(t)$

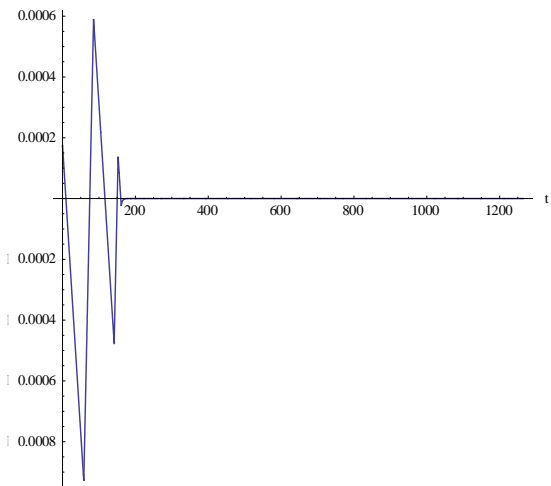


Рисунок 3.6 – График зависимости $\dot{\alpha}(t)$

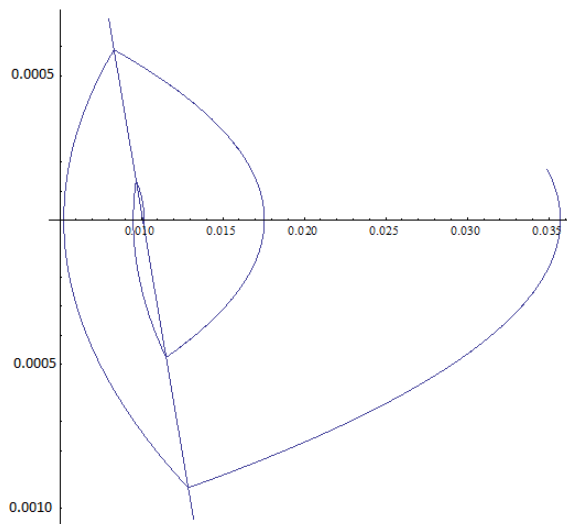


Рисунок 3.7 – Фазовый портрет $\dot{\alpha}(\alpha)$

3.3 Выбор номинальной программы переориентации МКА на основе решения обратной задачи динамики

Для решения задачи построения номинальной программы переориентации МКА на основе решения обратной задачи динамики (ОЗД) перепишем уравнение (1.15) в виде

$$\ddot{\alpha} = k_a \sin \alpha + k_r \sin 2\alpha + \frac{u(t)}{J_{\Pi}}, \quad (3.10)$$

где k_a – коэффициент аэродинамического момента; k_r – коэффициент гравитационного момента; $u(t)$ – управляющий момент.

Требуется найти такую номинальную траекторию и соответствующий ей управляющий момент, который обеспечит перевод МКА из начального положения в конечное за заданный интервал времени T .

Для решения задачи переориентации МКА как решение обратной задачи динамики перепишем уравнение плоского движения (3.9) в виде:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = k_a \sin \alpha_1 + k_r \sin 2\alpha_1 + \frac{u(t)}{J_{\Pi}} \\ |u| \leq u_{max} \end{cases} \quad (3.11)$$

Дополним уравнения (3.10) граничными условиями:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_0) = \alpha_1^0, \quad \alpha_1(T) = \alpha_1^T, \\ \alpha_2(t_0) = \alpha_2^0, \quad \alpha_2(T) = \alpha_2^T. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для поиска управления, номинальную траекторию переориентации (изменение угла атаки α от времени t) будем строить на основе полинома третьей степени [9]:

$$\tilde{\alpha}(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3. \quad (3.13)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов c_i ($i = \overline{1,4}$) необходимо использовать граничные условия (3.12). Продифференцируем (3.13):

$$\frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} = c_2 + 2c_3t + 3c_4t^2. \quad (3.14)$$

Подставив в (3.13) и (3.14) граничные условия (3.12) получим систем четырёх линейный алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2t_0 + c_3t_0^2 + c_4t_0^3 = \alpha_1^0 \\ c_1 + c_2T + c_3T^2 + c_4T^3 = \alpha_1^T \\ c_2 + 2c_3t_0 + 3c_4t_0^2 = \alpha_2^0 \\ c_2 + 2c_3T + 3c_4T^2 = \alpha_2^T \end{cases}. \quad (3.15)$$

Решив систему (3.15) найдём коэффициенты c_i .

Для получения управляющего момента, поставим выражение (3.13) в (3.10) и выразим $u(t)$. Получающийся в результате решения данной задачи, запишется в следующем виде:

$$u(t) = J_{\pi} \left[\frac{d^2\tilde{\alpha}(t)}{dt^2} - (k_a \sin \tilde{\alpha}(t) + k_r \sin 2\tilde{\alpha}(t)) \right]. \quad (3.16)$$

Все числовые результаты, иллюстрирующие угловое движение МКА в разделах 3.3 и 3.4, соответствуют исходным данным, приведённым в Приложении Б.

Пример фазового портрета показан на рис. 3.8 ($T = 1400$ с, $H = 415$ км, $\alpha(0) = 180$ град, $\dot{\alpha}(0) = 2 \frac{\text{град}}{\text{с}}$, $\alpha(T) = 0$, $\dot{\alpha}(T) = 0$).

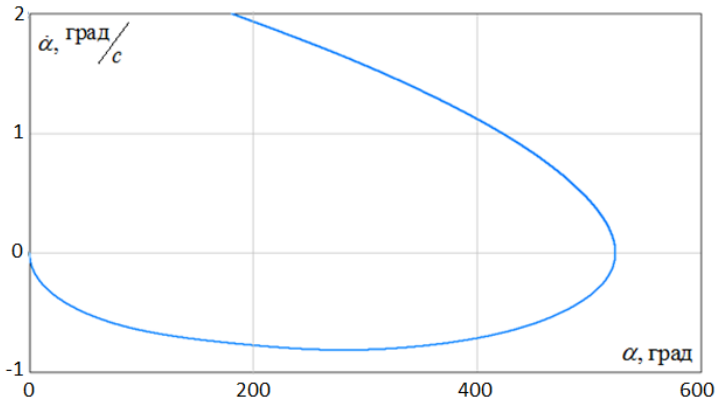


Рисунок 3.8 – Фазовый портрет

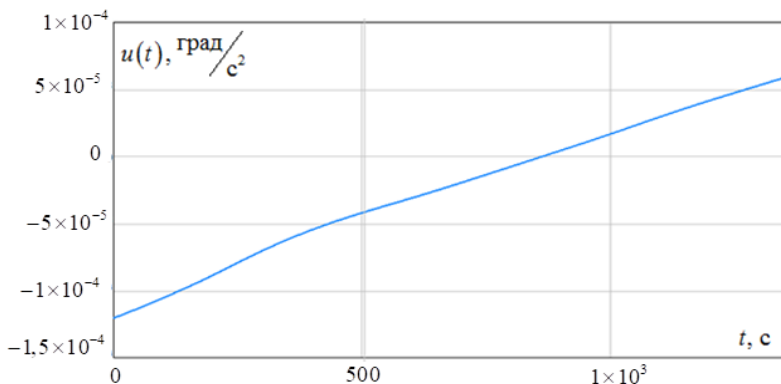


Рисунок 3.9 – Зависимость управления от времени

3.4 Выбор оптимальной номинальной программы управления ориентацией МКА

3.4.1 Решение задачи переориентации при помощи принципа максимума Понтрягина по критерию быстродействия

Примем допущение, что управляющий момент, создаваемый органами управления, во много раз превышает возмущающие моменты, действующие на МКА. Тогда с учётом этого понизим степень исходного уравнения и составим новую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{u(t)}{J_{\Pi}} \\ I(u) = \int_0^T 1 dt \rightarrow \min \end{array} \right. , \quad (3.17)$$

где $I(u)$ – критерий оптимальности, минимизация которого обеспечит оптимальную по быстродействию переориентацию МКА. Момент времени T в данной задаче не задан и подлежит определению.

Дополним уравнения (3.17) граничными условиями:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_0) &= \alpha_1^0, & \alpha_1(T) &= \alpha_1^T, \\ \alpha_2(t_0) &= \alpha_2^0, & \alpha_2(T) &= \alpha_2^T. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Требуется найти такое $u(t)$, которое будет доставлять минимум выбранному функционалу.

Запишем гамильтониан для системы уравнений:

$$H(\alpha, \psi, t) = \alpha_2 \psi_1 + \frac{u(t)}{J_{\Pi}} \psi_2 - 1. \quad (3.19)$$

Составим систему канонических уравнений. Для этого запишем уравнения для сопряжённых переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = -\psi_1 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Объединяя исходную систему (3.17) и систему уравнений для сопряжённых переменных (3.20), получим систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{u(t)}{J_{\Pi}} \\ \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}. \quad (3.21)$$

Проинтегрировав уравнения для сопряжённых переменных, получим

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1 \\ \psi_2 = -C_1 t + C_2 \end{cases}. \quad (3.22)$$

Так как на управление наложено ограничение, то максимум функции Гамильтона обеспечивается при максимальном управляющем воздействии, т.е. оптимальное управление имеет вид

$$u_{opt}(t) = u_{max} \text{sign}(\psi_2) = u_{max} \text{sign}(-C_1 t + C_2). \quad (3.23)$$

В результате интегрирования уравнений движения получим

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2J_{\Pi}} u_{max} t^2 + A_2 t + A_1 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{J_{\Pi}} u_{max} t + A_2 \end{cases} . \quad (3.24)$$

Выразим α_1 через α_2 :

$$\alpha_1 = -\frac{J_{\Pi}}{2u_{max}} \alpha_2^2 + \frac{J_{\Pi}}{2u_{max}} A_2^2 + A_1. \quad (3.25)$$

Следовательно, в фазовой плоскости оптимальной траекторией является парабола. В начало координат (которое в данном случае является устойчивым фокусом) ведёт только одна кривая, которая называется линией переключения.

Теперь составим закон управления, т.е. запишем управление в виде зависимости $u(\alpha_1, \alpha_2)$. Для точек, лежащих ниже линии переключения, имеем $u_{opt}(t) = -u_{max}$, или

$$u_{opt}(t) = -u_{max} \text{ если } \begin{cases} \alpha_1 \geq -\frac{\alpha_2^2}{2u_{max}}, & \alpha_2 > 0 \\ \alpha_1 > \frac{\alpha_2^2}{2u_{max}} & \alpha_2 < 0 \end{cases} . \quad (3.26)$$

Для точек, лежащих выше линии переключения, имеем $u_{opt}(t) = u_{max}$, или

$$u_{opt}(t) = u_{max} \text{ если } \begin{cases} \alpha_1 \leq -\frac{\alpha_2^2}{2u_{max}}, & \alpha_2 < 0 \\ \alpha_1 < -\frac{\alpha_2^2}{2u_{max}} & \alpha_2 > 0 \end{cases} . \quad (3.27)$$

В результате, оптимальный закон управления можно записать в виде

$$u(t) = -u_{max} \text{sign} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 |\alpha_2|}{2u_{max}} \right). \quad (3.28)$$

Результаты моделирования приведены для исходных данных из Приложения Б и представлены на рис. 3.10.

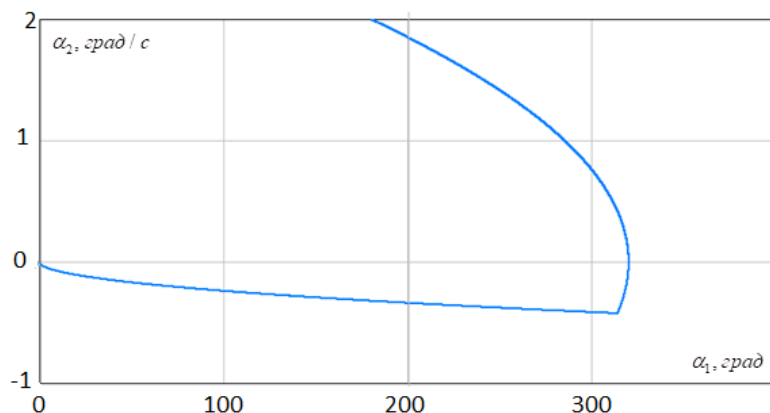


Рисунок 3.10 – Фазовый портрет $\alpha_2(\alpha_1)$

3.4.2 Решение задачи переориентации при помощи принципа максимума Понтрягина по критерию минимальных затрат на управление

Математическая постановка задачи отыскания оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = k_a \sin \alpha_1 + k_r \sin 2\alpha_1 + \frac{u(t)}{J_n} \\ I(u) = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min \end{cases} \quad (3.29)$$

Дополним уравнения (3.29) граничными условиями:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_0) &= \alpha_1^0, & \alpha_1(T) &= \alpha_1^T, \\ \alpha_2(t_0) &= \alpha_2^0, & \alpha_2(T) &= \alpha_2^T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Запишем гамильтониан для данной системы

$$H(\alpha, \psi, t) = \alpha_2 \psi_1 + (k_a \sin \alpha_1 + k_r \sin 2\alpha_1 + u(t)) \frac{\psi_2}{J_n} - \frac{u^2(t)}{2}. \quad (3.31)$$

Выпишем часть гамильтониана, зависящую от управления

$$H(u) = \frac{\psi_2}{J_n} u(t) - \frac{u^2(t)}{2}. \quad (3.32)$$

Следовательно, гамильтониан будет изменяться в зависимости от управления по квадратичному закону, а максимум его будет достигаться в том случае, когда

$$u(t) = \frac{\psi_2}{J_n}, \quad (3.33)$$

то есть в результате решения краевой задачи сопряжённая переменная ψ_2 будет представлять собой функцию управления в зависимости от времени.

Запишем уравнения для сопряжённых переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = -\frac{\psi_2}{J_n} (k_a \cos \alpha_1 + 2k_r \sin 2\alpha_1) \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = -\psi_1 \end{cases}. \quad (3.34)$$

Составим каноническую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{k_a}{J_n} \sin \alpha_1 + \frac{k_r}{J_n} \sin 2\alpha_1 + \frac{u(t)}{J_n} \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\psi_2}{J_n} (k_a \cos \alpha_1 + 2k_r \sin 2\alpha_1) \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}. \quad (3.35)$$

Система (3.35) с граничными условиями (3.30) не решается аналитически. Пример результатов численного решения приведены на рис. 3.11 и 3.12 в виде фазового портрета и графика зависимости сопряжённой переменной ψ_2 от времени соответственно.

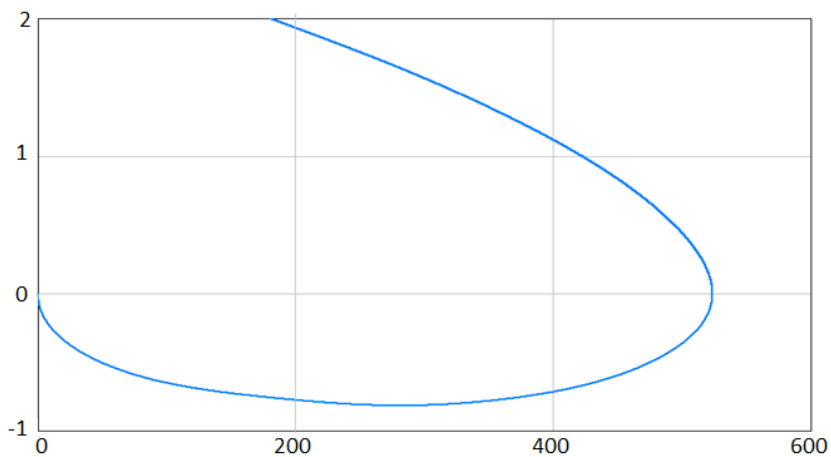


Рисунок 3.11 – Фазовый портрет

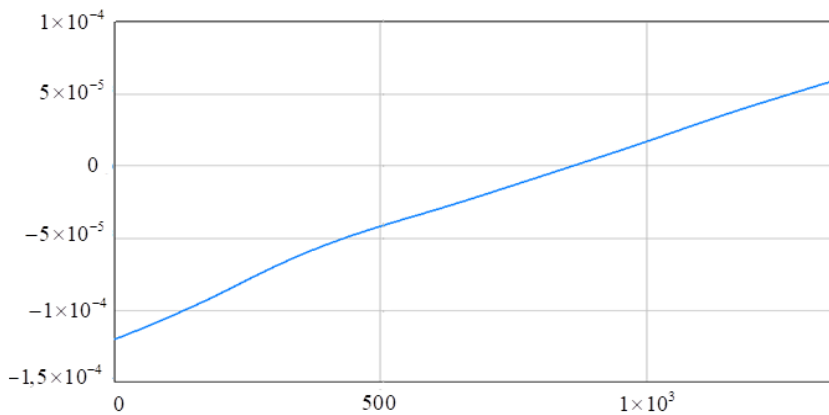


Рисунок 3.12 – Зависимость сопряжённой переменной ψ_2 от времени

Постановка задачи построения номинальной программы ориентации МКА в разделе 3.3 не предусматривает отыскания оптимальной траектории. Поэтому для решения вопроса об оптимальности управлений, найденных в результате обратной задачи динамики (ОЗД) в постановке раздела 3.3, сравним её решение с решением по принципу максимума Понтрягина (ПМП).

Сравним результаты решения раздела 3.3 с результатами, полученными при помощи ПМП с функционалом на минимальные затраты на управление. Сравнение фазовых портретов приведено на рис. 3.13, сравнение управляющих функций – на рис. 3.14.

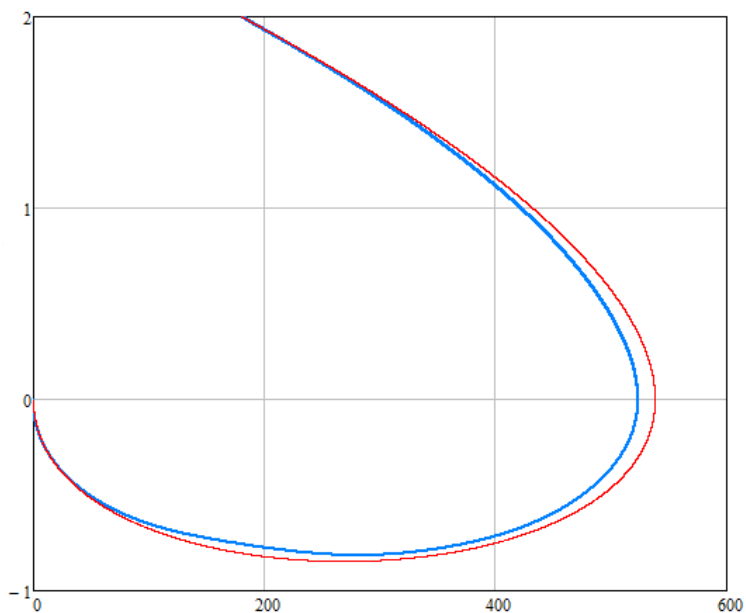


Рисунок 3.13 – Сравнение фазовых портретов

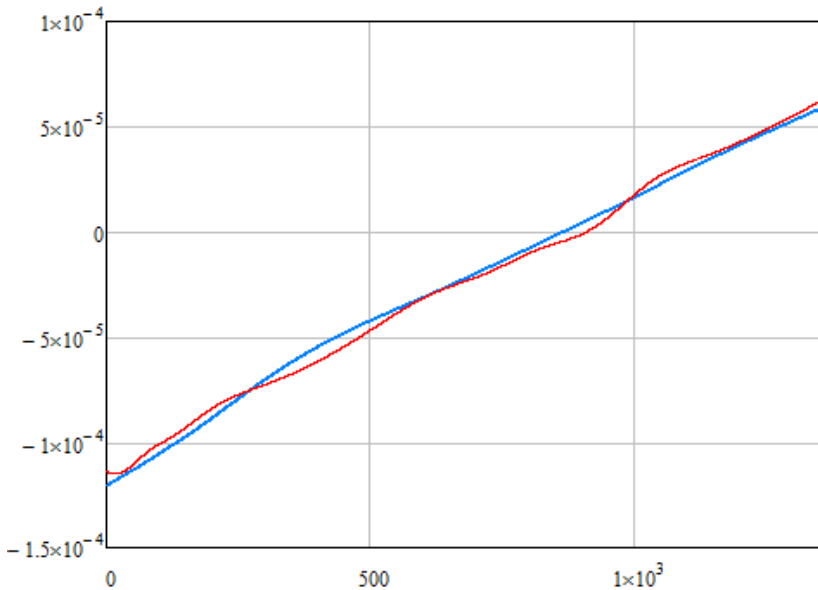


Рисунок 3.14 – Сравнение управляющих функций

Как видно из данных рисунков, кривая управляющего момента, полученная из решения ОЗД, лежит очень близко к кривой, полученной по ПМП. Из этого можно сделать вывод, что управление, полученное в результате решения ОЗД, является близким к оптимальному управлению по критерию минимума затрат на управление. Также можно заметить, что управление по ПМП остаётся практически линейным на протяжении всего интервала времени переориентации. Управление по ОЗД, в свою очередь, на длительном интервале времени начинает терять стабильность.

Теперь сравним результаты решения ОЗД с результатами, полученными при помощи ПМП с функционалом на

быстродействие. Для этого выполним моделирование процесса построения номинальной траектории при помощи решения ОЗД за время, полученное при решении задачи на быстродействие, т.е. $T = 1400$ с. Результаты моделирования приведены на рис. 3.15 и 3.16.

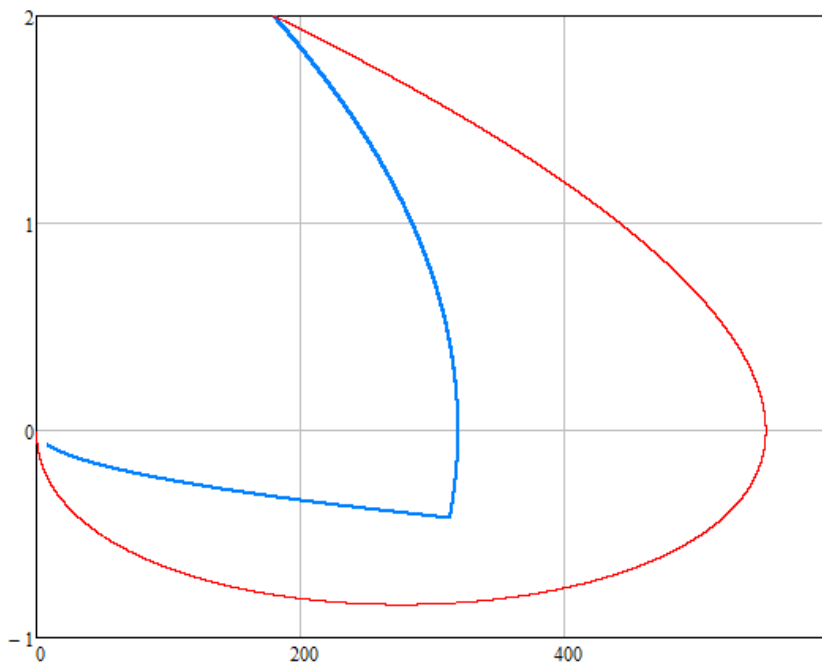


Рисунок 3.15 – Сравнение фазовых портретов

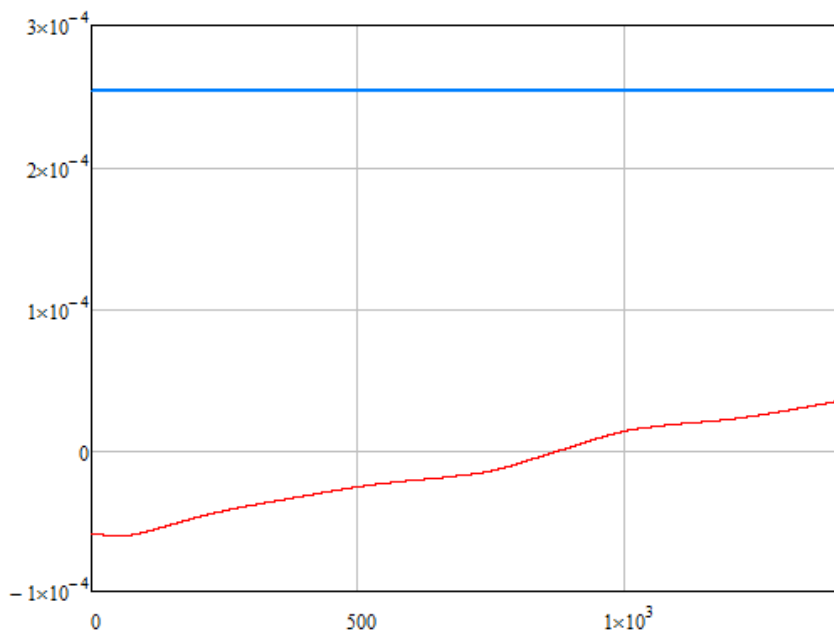


Рисунок 3.16 – Сравнение управляющих функций

Как видно из полученных результатов, решение ОЗД не только обеспечивает переориентацию МКА из заданного начального положения в конечное за то же время, что даёт решение задачи на быстроедействие при значительно меньших затратах энергии:

$$\Delta = \frac{E_{\text{ОЗД}} - E_{\text{ПМП}}}{E_{\text{ОЗД}}} \cdot 100\% = \frac{7 - 1,261}{7} \cdot 100\% = 82\%.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии кратко рассмотрены возможные режимы углового движения МКА и типовые алгоритмы управления, обеспечивающие требуемую ориентацию и стабилизацию МКА в пространстве.

Рассмотрен также перспективный подход к формированию программы управления на основе решения обратных задач динамики.

Используя материал учебного пособия учащийся может выбрать приемлемую для конкретной космической миссии технологию обеспечения управления угловым движением не только после отделения от космической платформы выведения на орбиту до момента перевода в рабочее состояние, но и последующие возможные маневрирования, обусловленные текущими требованиями со стороны целевой задачи.

Исходя из ограниченных энергетических возможностей МКА, использующего магнитные катушки в качестве исполнительных устройств, можно рекомендовать следующую последовательность действий:

1) гашение приобретённой после отделения угловой скорости МКА с помощью алгоритма $V\text{-dot}$ до требуемых значений;

2) перевод МКА с помощью релейного алгоритма управления в малую окрестность положения равновесия (в случае, если это рабочее положение МКА) с одновременным гашением угловой скорости до малых значений (следует отметить, что в данном пособии пренебрегается угловой скоростью орбитального движения МКА, которая составляет для типовых высот полёта порядка (0,04-0,06) град/с;

3) выполнение переориентации, например, при использовании обратных задач динамики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоконов, И.В. Движение наноспутника относительно центра масс на околоземных орбитах / И.В. Белоконов, И.А. Тимбай. – Самара: Издательство Самарского университета, 2020. – 128 с.
2. Алексеев, К.Б. Управление космическими летательными аппаратами / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебени. – Москва: Машиностроение, 1974. – 340 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика: учебное пособие / А. П. Маркеев. – Москва: ЧеРо, 1999. – 572 с.
4. Белецкий, В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. (Механика космического полета) / В.В. Белецкий. – Москва: Наука, 1965. – 416 с.
5. Belokonov I., Kramlikh A., Timbai I. etc. Problems of satellite navigation and communications for nanosatellites launched as piggyback payload from the orbital stage of carrier rockets // 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings. – 2014. – P. 407-415.
6. Stickler A.C. Elementary magnetic attitude control system / A.C. Stickler, K.T. Alfriend // J. Spacecr. Rockets, 1976. – Vol. 13. – P. 282-287.
7. Flatley, T., Morgenstern, W., Reth, A. etc. A B-Dot Acquisition Controller for the RADARSAT Spacecraft / T. Flatley, W. Morgenstern, A. Reth, F. Bauer // Flight Mechanics Symposium (1997). – P. 79-89.
8. Коваленко, А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами / А.П. Коваленко. – Москва: Машиностроение, 1976. – 250 с.
9. Chekashov, A.S. Research of optimality of the nanosatellite nominal reorientation trajectory / A.S. Chekashov, A.V. Kramlikh // Journal of Physics: Conference Series 1745 (2021) 012071.

Приложение А

Исходные данные и необходимые расчёты
для примеров второй главы и разделов 3.1 и 3.2

Таблица А1 – Исходные данные

M_1 , кг	M_2 , кг	M_3 , кг	$H_{кр}$, км	$\Delta\theta_0$, градус	θ'_0 , градус/с	α_k , градус	$\dot{\alpha}_k$, градус/с
0,8	2	1,5	450	-2	-0,01	0,5	0,005

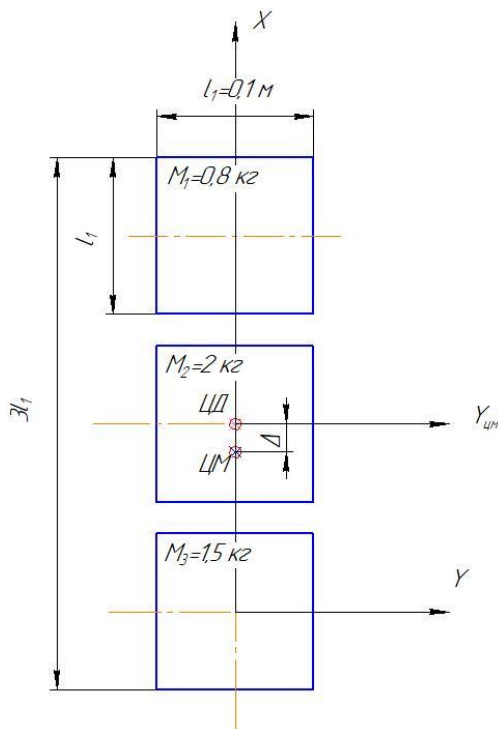


Рисунок А1 – Схема исследуемого МКА

Для того чтобы рассчитать главные центральные моменты инерции МКА, необходимо найти его центр масс. Выберем точку полюса в центре куба m_3 и запишем уравнение для определения положения центра масс:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1(l_1 + l_2) + m_2 l_2 + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0,8 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1}{0,8 + 2 + 1,5} = 0,0837 \text{ м.}$$

Рассчитаем моменты инерции каждого из кубов МКА:

$$I_1 = \frac{m_1 h^2}{6} = \frac{0,8 \cdot 0,1^2}{6} = 1,333 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_2 = \frac{m_2 h^2}{6} = \frac{2 \cdot 0,1^2}{6} = 3,333 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_3 = \frac{m_3 h^2}{6} = \frac{1,5 \cdot 0,1^2}{6} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

где h – длина стороны куба МКА.

Продольный момент инерции МКА будет равен сумме моментов инерции кубов МКА:

$$I_x = I_1 + I_2 + I_3 = (1,333 + 3,333 + 2,5) \cdot 10^{-3} = 7,167 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Так как МКА является симметричным относительно продольной оси, поперечные моменты инерции I_x и I_z будут одинаковы. Определить их можно при помощи теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I_{y_1} = I_1 + m_1(l_1 + (l_2 - x_c))^2 = 1,333 \cdot 10^{-3} + 0,8(0,1 + (0,1 - 0,0837))^2 = 0,012 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_{y_2} = I_2 + m_2(l_2 - x_c)^2 = 3,333 \cdot 10^{-3} + 2(0,1 - 0,0837)^2 = 3,863 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_{y_3} = I_3 + m_3(-x_c)^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} + 1,5(-0,0837)^2 = 0,013 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_y = I_z = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} = 0,012 + 0,013 + 3,863 \cdot 10^{-3} = 0,029 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Приложение Б

Исходные данные и необходимые расчёты
для примеров разделов 3.3 и 3.4

Таблица Б1 – Массогабаритные и инерционные характеристики МКА

Характеристики МКА	Величина
Масса m , кг	2
Поперечный момент инерции J_{Π} , кг · м ²	0,01975
Продольный момент инерции J_x , кг · м ²	0,004
Длина l , м	0,3
Площадь миделя S , м ²	0,01
Запас статической устойчивости Δ	0,06
Максимальный управляющий момент u_{max} , Н · м	$5 \cdot 10^{-6}$

Учебное пособие

*Белоконов Игорь Витальевич,
Крамлих Андрей Васильевич,
Ломака Игорь Андреевич,
Николаев Петр Николаевич*

**УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ
МАЛОРАЗМЕРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
В ПЛОСКОСТИ ПОЛЕТА**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 21.12.2022. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 3,25.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ . Арт. – 42(Р2УП)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.