МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра алгебры и геометрии

В. Н. Кокарев

ТОПОЛОГИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве сборника задач

Самара
Издательство «Самарский университет»
2012

УДК 513.013
ББК 22.15
К 59

Рецензент канд. физ.-мат наук, доц. Л.В. Кучма

Кокарев, В. Н.

К 59 **Топология** : сборник задач / В. Н. Кокарев. – Самара : Изд-во «Самарский университет», 2012. – 20 с.

Пособие содержит задачи по разделам: общая топология, многообразия и дифференциальная топология, теория гомотопий, топологические группы, фундаментальная группа, теория гомологий. Материал разбит на 18 занятий, порядок проведения которых может варьироваться. Звездочками отмечены задачи повышенной трудности. В конце даны основные определения и список литературы.

Набор задач соответствует программе и учебному плану по курсу «Дифференциальная геометрия и топология» и предназначен для студентов второго курса механико-математического факультета, а также 3-5 курсов при изучении геометрических дисциплин специализации.

УДК 513.013
ББК 22.15

Обозначения

1. D – дискретная топология
2. T – тривиальная топология
3. E – евклидова топология
4. F – топология Фреше
5. Z – топология Зарисского
6. K – топология стрелки (Колмогорова)
7. B_x^r – открытый шар в метрическом пространстве с центром в точке x радиуса r
8. D^n – единичный открытый шар в $\mathbb{R}^n$

Занятие № 1. Топологические пространства, база топологии, индуцированная топология, внутренность, граница, замыкание

1. Будет ли топологией на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ система множеств $\Lambda = \{\varnothing, U_0, U_1, U_2, \ldots\}$, где $U_m = \{n \in \mathbb{Z} \mid n$ делится на $2^m\}$, $m \geq 0$? Указать открытые окрестности точек 1, 10,16. Найти замыкание, внутренность и границу для $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$.

2. Доказать, что следующие семейства подмножеств в $\mathbb{R}^n$ задают топологию:
а) множества симметричные относительно 0;
б) множества, симметричные относительно фиксированной k-плоскости ($k < n$);
в) дополнения к множеству решений любой конечной системы алгебраических уравнений (топология Зарисского).

3. Выяснить, является ли одноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ открытым или замкнутым в каждой из топологий предыдущей задачи. Найти его внутренность, замыкание и границу во всех трех случаях.

4. Доказать, что $\mathbb{R}_F = \mathbb{R}_Z$, но $\mathbb{R}^n_F \neq \mathbb{R}^n_Z$ при $n > 1$.

5. Будут ли семейства множеств
$\Lambda = \{\varnothing, \mathbb{R}, [a, +\infty]\}$, $a \in \mathbb{R}$,
$M = \{\varnothing, \mathbb{R}, (a, +\infty)\}$, $a \in \mathbb{R}$
топологиями (базами топологии) на $\mathbb{R}$?

6. Доказать, что семейство $\Lambda = \{\varnothing, X, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{2\}\}$ является топологией на $X = \{1,2,3,4\}$. Найти замыкание, внутренность и границу для $A = \{1,3\}$, $B = \{1,2,3\}$.

7. Описать все топологии на двоеточии. Упорядочить их по усилению.

8. Описать все топологии на троеточии. Упорядочить их по усилению.

9. Доказать, что в $\mathbb{R}^n_E$ одновременно открытыми и замкнутыми подмножествами являются только $\varnothing$ и $\mathbb{R}^n$.

10. Пусть $A \subset X, A \neq X, A \neq \varnothing$. Найти $Int\ A, \overline{A}, \partial A$, если
а) в X тривиальная топология;
б) в X дискретная топология.

11. Доказать, что для любого подмножества A топологического пространства X
а) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
б) $\partial A = X \setminus (Int A \cup \operatorname{ext} A)$, где $\operatorname{ext} A = Int(X \setminus A)$;
в) $\overline{A} = A \cup \partial A$;
г) $Int A = A \setminus \partial A$;

д) A замкнуто $\Leftrightarrow \partial A \subset A$;

е) A открыто $\Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$.

12*. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $Int(A \cap B) = Int A \cap Int B$.

13*. Доказать, что $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$. Привести пример, когда $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$.

14*. Доказать, что $Int A \cup Int B \subset Int(A \cup B)$. Привести пример, когда $Int A \cup Int B \neq Int(A \cup B)$.

15. Верно ли, что для всякого семейства подмножеств $\{A_\alpha\}$ в топологическом пространстве выполнено

$\bigcup \overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup A_\alpha}$,

$\bigcap Int A_\alpha = Int \bigcap A_\alpha$?

16. Доказать, что для любого подмножества A любого топологического пространства в семействе множеств A, $Int\ A$, $\overline{Int\ A}$, $Int\ \overline{Int A}$, $\overline{Int\ \overline{Int\ A}}$,…, $\overline{A}$, $Int\ \overline{A}$, $\overline{Int\ \overline{A}}$, $Int\ \overline{Int\ \overline{A}}$, …, не более семи различных. Привести пример топологического пространства и его подмножества A , для которого различны A, $\overline{A}$, $Int\ A$, $Int\ \overline{A}$, $\overline{Int\ A}$, $\overline{Int\ \overline{A}}$, $Int\ \overline{Int\ A}$.

Занятие № 2. Метрическая топология

1. Доказать эквивалентность метрических топологий в $\mathbb{R}^n$ с метриками

$$\text{а)}\quad \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ ,$$

$$\text{б)}\quad \rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|\ ,$$

$$\text{в)}\quad \rho(x,y) = \max_{i=1,\dots,n}|x_i - y_i|\ .$$

Описать единичные шары при n=2,3.

2. Привести пример метрического пространства, в котором шар меньшего радиуса содержит шар большего радиуса, не совпадая с ним.

3. Построить на конечном множестве все метризуемые топологии.

4. Для произвольного подмножества A метрического пространства X и произвольной точки $x \in X$ величину $d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} \rho(x,a)$ называют расстоянием от точки x до множества A. В пространстве $X = C[-1,1]$ найти расстояние $d(f,A)$, если $A = \{g \in X | -x^2 - 1 \leqslant g \leqslant x^2\}$, $f = x^3$, $f = 2x^3 + 1/2$.

5. Доказать, что $S^n = \partial D^{n+1}$, $\overline{D}^{n+1} = \overline{D^{n+1}}$, где S^n - единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, D^{n+1} - единичный открытый шар в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{D}^{n+1}$ - единичный замкнутый шар в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{D^{n+1}}$ - замыкание D^{n+1}

6. Пусть M – конечное множество с метрикой

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

$S_1(x), B_x^1$ – единичные сфера и открытый шар в M с центром x Верно ли, что $S_1(x) = \partial B_x^1$?

7* Для всякого целого $n \neq 0$ обозначим через $v_p(n)$ показатель максимальной степени простого p, на которую делится n. Для $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ положим $v_p(r) = v_p(m) - v_p(n)$. Доказать, что

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ p^{-v_p(x-y)}, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

– метрика на $\mathbb{Q}$.

8* Пусть $\rho(x,y)$ – метрика в пространстве X и $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывная строго возрастающая выпуклая вверх функция, $f(0) = 0$. Доказать, что $f(\rho(x,y))$ – метрика в X, эквивалентная $\rho(x,y)$.

Занятие № 3. Аксиомы счетности. Плотные множества

1. Найти плотные подмножества в X , если в X а) дискретная б) тривиальная топология.

2. Какие аксиомы счетности выполняются в $\mathbb{R}^n$ с а) обычной топологией, б) топологией Зарисского, в) топологией, составленной из всех множеств, симметричных относительно 0.

3. Какие из множеств $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$,$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ а) всюду плотны, б) нигде не плотны в $\mathbb{R}_E$.

4. Доказать, что объединение конечного набора нигде не плотных множеств в $\mathbb{R}^n_E$ нигде не плотно.

5. Привести пример двух всюду плотных множеств с пустым пересечением.

6. Доказать, что в $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского любое бесконечное множество всюду плотно.

7. Доказать, что 1-я и 2-я аксиомы счетности наследственны(т.е. передаются от пространства к подпространнству), а сепарабельность не наследственна.

8*. Сепарабельны ли пространства $C^k[0,1]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$? Удовлетворяют ли они 2-й аксиоме счетности?

9* Сепарабельно ли пространство l_2? Удовлетворяет ли оно 2-й аксиоме счетности?

Занятие № 4. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы

1. Доказать, что любое отображение $f : X \to Y$, где X наделено дискретной топологией, непрерывно.

2. Доказать, что любое отображение $f . X \to Y$, где Y наделено тривиальной топологией, непрерывно.

3. Доказать, что интервалы (a,b), (b,c) в обычной топологии гомеоморфны.

4. Доказать, что интервал (a,b) гомеоморфен $\mathbb{R}$ в обычной топологии.

5. Доказать, что (a,b) и (c, $+\infty$) гомеоморфны в обычной топологии.

6. Доказать, что открытые квадрат и круг гомеоморфны.

7. Доказать, что открытый шар D^n гомеоморфен $\mathbb{R}^n$

8. Доказать, что $S^n\backslash\{x_0\}$ и $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны.

9. Доказать, что $[0,1)$ и S^1 не гомеоморфны.

10. Доказать, что $\mathbb{R}$, $[a,b]$, S^1, D^2 попарно не гомеоморфны.

11. Найти гомеоморфные цифры, буквы русского и латинского алфавитов.

12. Какие из следующих функций: $\cos x$, $\operatorname{sign} x$, $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, отображающих а) $\mathbb{R}_E \to \mathbb{R}_E$, б) $\mathbb{R}_E \to \mathbb{R}_Z$, в) $\mathbb{R}_Z \to \mathbb{R}_E$, г) $\mathbb{R}_Z \to \mathbb{R}_Z$, непрерывны?

Здесь $\mathbb{R}_E$, $\mathbb{R}_Z$ множества действительных чисел, соответственно, с евклидовой топологией и топологией Зарисского.

13*. Доказать, что любое метрическое пространство гомеоморфно метрическому пространству конечного диаметра (Указание: использовать результат задачи 2.8).

14*. Доказать, что функция $f : X \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывна, где ρ - метрика на X, $A \subset X$, $\rho(x, A) = inf\{\rho(x, a), a \in A\}$

15*. Пусть Y - топологическое пространство. Доказать, что для любого отображения $f : X \to Y$ существует слабейшая из топологий на X, при которых f непрерывно.

16*. Пусть X - топологическое пространство. Доказать, что для любого отображения $f : X \to Y$ существует сильнейшая из топологий на Y, при которых f непрерывно.

17*. Пусть $\{U_\alpha\}$ - открытое покрытие пространства X. Доказать, что если $f : X \to Y$ непрерывно на каждом U_α, то f непрерывно на X. Верно ли такое утверждение для а) замкнутого покрытия, б) конечного замкнутого покрытия X ?

Занятие № 5. Связность. Линейная связность

1. Доказать, что если X_1, X_2 (линейно) связны и $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, то $X_1 \cup X_2$ (линейно) связно.

2. Доказать, что $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ в топологии Зарисского связны.

3. Доказать, что если $A \subset X$ связно, то $\overline{A}$ связно.

4. Доказать, что компонента связности является открыто-замкнутым множеством.

5. Доказать, что открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n_E$ линейно связно.

6. Подмножество A в X связно тогда и только тогда, когда в X не существует двух открытых множеств U и V, разбивающих A, т.е. а) $(U \cap V) \cup A = \emptyset$, б) $U \cup V \supset A$, в) $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$. Доказать.

7. Связно ли множество $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}_E$? Указать его компоненты связности.

8. Доказать, что X связно тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение X в дискретное не одноточечное пространство постоянно.

9. Исследовать на связность и линейную связность отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и 2-х точечное множество $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ в топологиях 1-6.

10. Доказать, что множество $Y \subset \mathbb{R}^2_E$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$

$$\cup\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\}$$

линейно связно, но не локально линейно связно.

11*. Доказать, что группы SO(n), U(n), SL(n) линейно связны, а GL(n), O(n) несвязны.

Занятие № 6. Аксиомы отделимости

1. Какие аксиомы отделимости выполнены для:

а) пространств с тривиальной топологией;

б) пространств с дискретной топологией;

в) $\mathbb{R}^n$ с топологией Зарисского;

г) $\mathbb{R}$ с топологией, составленной из множеств, симметричных относительно 0.

2. Рассмотреть все возможные топологии на двоеточии. Какие аксиомы отделимости для них выполнены?

3. Доказать, что метрические пространства нормальны.

4. Доказать, что замкнутое подмножество нормального пространства нормально.

5. Доказать, что $(T_0 + T_3)$-пространство регулярно.

6. Доказать, что свойства T_0, T_1, T_2, T_3 наследственны.

7. Привести пример не нормального подмножества нормального пространства.

8. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Привести пример пространства, в котором каждая точка является пределом одной и той же последовательности.

9*. На $\mathbb{R}^2_+ = \{y \geq 0\}$ задано семейство Σ открытых кругов, содержащихся в $\mathbb{R}^2_+$, причем, если круг касается оси Ох, то к нему добавляется точка касания. Доказать, что Σ - база топологии на $\mathbb{R}^2_+$, в которой $\mathbb{R}^2_+$ регулярно, но не нормально.

10*. Сохраняются ли аксиомы отделимости при непрерывных отображениях.

11*. Пусть $f, g : X \to Y$ непрерывны, Y хаусдорфово. Доказать, что

а) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто

б) если f(x)=g(x) на всюду плотном множестве, то $f \equiv g$.

Занятие № 7. Произведение топологических пространств

1. Доказать, что $S^1 \times S^1$ гомеоморфно тору, а $I \times S^1$ не гомеоморфно листу Мебиуса.

2. Доказать, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$.

3. Пусть Y хаусдорфово. Доказать, что $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда график

$\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ замкнут в $X \times Y$.

4. Доказать, что множество

$S_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 1\}$

гомеоморфно $S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

5. Доказать, что $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ гомеоморфно $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

6. Изобразить $I \times I$, $I \times S^1$, $D^2 \times S^1$, $S^2 \times S^1$, $T^2 \times S^1$, где I=[0,1], T^2 - тор.

7. Доказать, что топология $I \times I$ совпадает с топологией квадрата, индуцированной вложением в $\mathbb{R}^2$.

8. Доказать, что $\mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^2_F$.

9. Пусть (X_1, ρ_1),(X_2, ρ_2) – метрические пространства. Доказать, что произведение $X_1 \times X_2$ метризуемо, причем его топология может быть задана метрикой $\rho((x_1,x_2),(x_1',x_2')) = \rho_1(x_1,x_1') + \rho_2(x_2,x_2')$.

10*. Привести пример бесконечного пространства X с недискретной топологией, гомеоморфного $X \times X$.

11*. Доказать, что в l^∞ последовательность $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ сходится и найти ее предел.

Занятие № 8. Фактортопология. Связные поверхности

1. Доказать, что $I/\partial I$ гомеоморфно S^1.

2. Описать пространства $I \times S^1/\partial(I \times S^1)$, $I \otimes S^1$, $S^1 \otimes S^1$

3. Какое пространство получится, если стянуть $\mathbb{R}P^1$ на $\mathbb{R}P^2$ в точку?

4. Какое пространство получится, если разрезать $\mathbb{R}P^2$ по $\mathbb{R}P^1$?

5. Построить факторпространство C[-1,1] по отношению эквивалентности:

а) $f \sim g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$;

б) $f \sim g \Leftrightarrow f(x) - g(x)$ многочлен степени $\leq n$;

в) $f \sim g \Leftrightarrow f(x) - g(x)$ четная функция.

6. Доказать, что $\overline{D}^2/\partial D^2$ гомеоморфно S^2.

7. Доказать, что склейка двух листов Мебиуса по их границе гомеоморфна бутылке Клейна.

8. Пусть $Q = \{0 \leq |x|, |y| \leq 1\}$ – квадрат в $\mathbb{R}^2$. Построить факторпространства Q/R_i по отношениям эквивалентности:

R_1: $(x, 1) \sim (x, -1)$,

R_2: $(1, y) \sim (-1, -y)$,

R_3: $(1, y) \sim (-1, y)$, $(x, 1) \sim (x, -1)$,

R_4: $(x, 1) \sim (x, -1)$, $(1, y) \sim (-1, -y)$,

R_5: $(x, 1) \sim (-x, -1)$, $(1, y) \sim (-1, -y)$,

R_6: $(x, 1) \sim (1, x)$, $(x, -1) \sim (-1, x)$,

и всюду $(x, y) \sim (x, y)$.

9. Привести пример хаусдорфова пространства с нехаусдорфовым факторпространством.

10. Описать факторпространства $\mathbb{R}^2$ по отношениям эквивалентности:

а) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

б) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos x_1 = \cos x_2$,

в) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \operatorname{sign}\ y_1 = \operatorname{sign}\ y_2$,

г) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2, y_1^2 = y_2^2$

д) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \operatorname{sign}\ y_1 = \operatorname{sign}\ y_2, \operatorname{sign}\ x_1 = \operatorname{sign}\ x_2$

11. Доказать, что факторпространство $\overline{D}^2$ при склеивании противоположных точек границы и факторпространство S^2 при склеивании противоположных точек гомеоморфны $\mathbb{R}P^2$.

12. Чему гомеоморфно факторпространство $\mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$?

13. Чему гомеоморфно факторпространство $\mathbb{R}^2$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z},\ y - y' \in \mathbb{Z}$?

Занятие № 9. Компактность

1. Доказать, что $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{C}^n$ и все их подмножества компактны в топологии Зарисского.

2. Доказать, что [a,b], (a,b], (a,b) в $\mathbb{R}_E$ попарно негомеоморфны.

3. Доказать, что всякое бесконечное подмножество компактного пространства имеет предельную точку.

4. Доказать, что объединение конечного набора компактных пространств компактно. Привести пример топологического пространства X и двух таких компактных подмножеств $A, B \subset X$, что $A \cap B$ некомпактно.

5. Какие из перечисленных ниже подмножеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ компактны:

$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$; $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$; $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$;

$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$; $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\right\}$.

6. Построить одноточечную компактификацию дискретного некомпактного пространства. Привести пример бесконечного открытого покрытия. Выделить конечное подпокрытие.

7*. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$, через F(A,B) обозначено множество непрерывных отображений $f : X \to Y$, переводящих A в B. Доказать, что $\Im = \{F(A,B) \mid A \text{ компактно, } B \text{ открыто}\}$ является базой топологии (называемой компактно-открытой) на множестве $\mathcal{F}(X,Y)$ всех непрерывных отображений $X \to Y$.

8*. Если X – компактное метрическое, Y – метрическое пространство с метрикой d(x,y), то

$$d^*(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

– метрика на $\mathcal{F}(X,Y)$, задающая компактно-открытую топологию.

9*. Доказать, что всякий компакт (компактное хаусдорфово пространство) нормален.

10*. Доказать, что если Y компактно, то проекция $X \times Y \to X$ – замкнутое отображение (т.е. образ любого замкнутого множества замкнут).

11*. Доказать, что непрерывное отображение f компактного метрического пространства в себя, удовлетворяющее условию $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$, $x \neq y$, имеет неподвижную точку.

12*. Топологическое пространство называется нётеровым, если в нем не существует бесконечной строго убывающей последовательности замкнутых множеств. Доказать, что нётерово топологическое пространство компактно.

13*. Являются ли компактными пространства l_2, $C[a,b]$?

14* Является ли компактным единичный шар в l_2?

15*. Для того, чтобы множество M полного метрического пространства было компактным необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и из всякой его бесконечной последовательности можно было выделить сходящуюся подпоследовательность. Доказать.

16*. Будет ли компактным ограниченное замкнутое множество в $C[a,b]$? В $C^k[a,b]$?

Занятие № 10. Топологические многообразия

1. Из следующих пространств выделить многообразия, многообразия с краем и определить их размерность: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2_+ = \{y \geq 0\}$, $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$, S^1, S^2, $\overline{D}^2$, $[a,b]$, объединение окружности и ее диаметра, треугольник, сфера с ручками, $\mathbb{R}P^2$, лист Мёбиуса, множество k-мерных подпространств n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ $(G(n,k))$, множество ориентированных k-мерных подпространств n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ $(G_+(n,k))$.

2. Если X_1, X_2 – многообразия, то $X_1 \times X_2$ – многообразие размерности $\dim X_1 + \dim X_2$. Доказать.

3. Если X_1, X_2 – многообразия с краем то $X_1 \times X_2$ – многообразие с краем $(\partial X_1 \times X_2) \cup (X_1 \times \partial X_2)$. Доказать.

4*. Доказать, что всякое n-мерное гладкое компактное многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

5. Какому многообразию гомеоморфно множество всех прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$?

6. Доказать, что поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = 1 \\ \sum\limits_{i=m+1}^{n} x_i^2 = 1, \end{cases}$$

гомеоморфна $S^{m-1} \times S^{n-m-1}$

7. Чему гомеоморфны поверхности $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ и $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ в $\mathbb{R}P^3$? Чему гомеоморфно множество $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$?

8. Чему гомеоморфно подмногообразие $x_0^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0$ в $\mathbb{R}P^n$?

9*. Показать, что многообразие $z_0{}^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ в $\mathbb{C}P^3$ гомеоморфно $S^2 \times S^2$, а многообразие $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$ в $\mathbb{C}P^2$ гомеоморфно S^2.

10*. Доказать, что всякая замкнутая гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ ориентируема.

11*. Доказать, что для любого линейно связного многообразия X и любых двух точек $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f : X \to X$, такой, что f(x)=y.

Занятие № 11. Топологические группы

1. Доказать, что группы SO(n), SL(n),U(n) линейно связны, а GL($\mathbb{R}$,n) нет.

2. Доказать, что группы SO(n), U(n) компактны, а GL(n),SL(n) некомпактны.

3. Доказать, что SL(1) гомеоморфно $\mathbb{R}$, а SO(2),U(1) гомеоморфны S^1

4* Доказать, что группы U(n), SU(n), SO(n) являются многообразиями, вычислить их размерность и построить атлас.

5*. Доказать, что SU(2) гомеоморфно S^3 , а SO(3) гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$

6*. Доказать, что связная компонента единицы в топологической группе является нормальным делителем.

7*. Доказать, что топологическая группа с замкнутыми точками регулярна.

8*. Если A – замкнутое и B – компактное подмножество топологической группы, то AB замкнуто.

9*. Пусть G/H – факторпространство левых классов смежности топологической группы G по замкнутой подгруппе $H \subset G$. Если H, G/H компактны, то G компактна, если H, G/H связны, то G связна.

10*. Доказать, что любая открытая подгруппа в топологической группе замкнута.

11*. Доказать, что любая окрестность единицы в связной топологичекой группе порождает всю группу.

12*. Найти нормальный делитель в группе $Diff(D^2)$.

Занятие № 12. Гомотопия. Ретракция

1. Какие из следующих отображений $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ гомотопны:

$$f_{1,2}(x) = \frac{\sin x}{4} \pm \frac{1}{2},\ f_3(x) = \frac{1}{2},\ f_4(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{4} - \frac{1}{2}\ ?$$

2. Гомотопны ли отображения $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$

а) $f(x) = (\sqrt{2}, 0)$, $g(x) = (-\sqrt{2}, 0)$;

б) $f(x) = (\sqrt{2}, x)$, $g(x) = (-\sqrt{2}, x)$?

3. Пусть $f : S^1 \to X$ – непрерывное отображение. Доказать, что f гомотопно постоянному отображению тогда и только тогда, когда f продолжается до непрерывного отображения $g : \overline{D}^2 \to X$.

4. Доказать, что A – ретракт пространства X тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f \colon A \to Y$ можно продолжить на все X.

5. Доказать, что если любое непрерывное отображение пространства X в себя имеет неподвижную точку, то любое непрерывное отображение его ретракта A в себя тоже имеет неподвижную точку.

6. Доказать, что точка 0 является деформационным ретрактом $\mathbb{R}_E$. Построить такую топологию Λ на $\mathbb{R}$, чтобы точка 0 не являлась деформационным ретрактом $\mathbb{R}_\Lambda$.

7. Доказать, что ретракт связного пространства связен.

8. Является ли объединение северного и южного полюса сферы ее ретрактом?

9. Доказать, что окружность ретрагируется на любую дугу.

10. Доказать, что если A – ретракт B, а B – ретракт , то A – ретракт C.

11*. Пусть $\mathcal{F}(X,Y)$ пространство непрерывных отображений компакта X в пространство Y. Наделим $\mathcal{F}(X,Y)$ компактно-открытой топологией. Доказать, что $f \sim g : X \to Y$ тогда и только тогда, когда f, g соединяются путем в $\mathcal{F}(X,Y)$.

12*. Подмножество A называется слабым ретрактом пространства X, если существует такое непрерывное отображение $r : X \to A$, что $i \circ r \sim id : A \to A$. Привести пример слабого ретракта, не являющегося ретрактом.

Занятие № 13. Гомотопическая эквивалентность. Деформационная ретракция

1.Доказать, что S^1 и $I \times S^2$ гомотопически эквивалентны.

2. Доказать, что лист Мёбиуса и цилиндр гомотопически эквивалентны.

3. Доказать, что если X и Y гомотопически эквивалентны и X связно, то Y связно.

4. Разбить русские буквы алфавита на классы гомотопической эквивалентности.

5. В каком случае два дискретных пространства гомотопически эквивалентны?

6. Пусть Z_f - цилиндр отображения $f : X \to Y$ (склейка цилиндра и Y по отображению $X \times \{1\} \to Y$, задаваемому формулой $(x,1) \to f(x)$). Доказать, что вложение Y в Z_f является гомотопической эквивалентностью.

7. Является ли сторона прямоугольника его деформационным ретрактом? Две стороны? Три стороны? Четыре стороны?

8. Построить сильную деформационную ретракцию пространства $\mathbf{R}^2\backslash\{x_0\}$ на некоторую окружность.

9. Доказать, что всякое выпуклое подмножество линейного топологического пространства стягивается по себе в точку.

10. Доказать, что всякое собственное подмножество S^2 стягивается в S^2 в точку. Привести пример линейно связного собственного подмножества S^2, которое не стягивается в точку по себе.

11*. X и Y стягиваемы $\Leftrightarrow X \times Y$ стягиваемо. Доказать.

12*. Если X не стягиваемо, $X\diagdown\{x\}$ стягиваемо, то X не разлагается в прямое произведение.

13*. Доказать, что $S^1 \times \{x_0\}$ – ретракт пространства $S^1 \times S^1$, на являющийся деформационным ретрактом.

Занятие № 14. Клеточные пространства

1. Указать несколько клеточных разбиений сферы S^n, шара $\overline{D}^n$, шара D^n, $n \geq 1$.

2. Указать несколько клеточных разбиений сферы с p ручками, сферы с q пленками, листа Мёбиуса.

3. Является ли клеточным разбиение

а) D^2 на точки,

б) D^2 на параллельные хорды,

в) $\overline{D}^2$ на центр, открытые радиусы, точку $x_0 \in S^1$, $S^1\backslash x_0$.

4. Доказать, что n-мерные клетки открыты в n-мерном остове клеточного пространства.

5. Доказать, что клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.

6. Доказать, что компактное подмножество клеточного пространства пересекается лишь с конечным числом клеток.

7. Доказать, что всякое клеточное пространство нормально.

8*. Доказать, что каждое конечное клеточное пространство вкладывается в $\mathbb{R}^n$ при каком-либо $n \geq 1$.

9*. Доказать, что счетное клеточное пространство сепарабельно, а несчетное – не сепарабельно.

10*. Для клеточного пространства X и его клеточного разбиения описать факторпространства $X^{(n)}/X^{(n-1)}$.

11*. Построить клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$.

12*. Доказать, что у линейно связного клеточного пространства X одномерный остов связен.

13. Доказать, что клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда оно связно.

14. Из предыдущей задачи следует, что связное, но не линейно связное подпространство $A = (0,1) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (0,1], y = \sin\frac{1}{x}\}$ пространства $\mathbb{R}^2_E$ не является клеточным пространством. Почему?

15*. Доказать, что линейно связное конечное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой.

Занятие № 15. Фундаментальная группа

1. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ односвязны, тогда

а) если $X_1 \cap X_2$ линейно связно, то $X_1 \cup X_2$ односвязно, б) если $X_1 \cap X_2$ состоит из двух компонент линейной связности, то $\pi_1(X_1 \cup X_2) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Привести пример инъективного(сюръективного) непрерывного отображения $f : X \to Y$, для которого f_* не инъективно(не сюръективно).

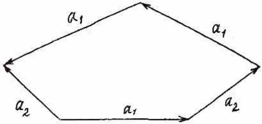
3. Пусть $r : X \to A$ ретракция. Доказать, что $r_* : \pi_1(X) \to \pi_1(A)$ – эпиморфизм, $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ – мономорфизм.

4. Найти $\pi_1(X)$, если в X а) дискретная, б) тривиальная топология.

5. Найти фундаментальные группы русских букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й.

6. Найти $\pi_1(\mathbb{R}^n)$, $\pi_1(S^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\pi_1(T^n)$, $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

7. Найти фундаментальную группу факторпространства пятиугольника, у которого стороны склеены так, как показано на рисунке.



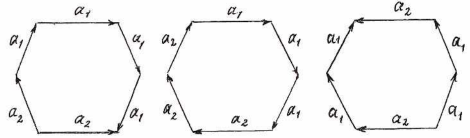
8. Пусть G – линейно связная топологическая группа с единицей e. Доказать, что $\pi_1(G, e)$ абелева.

9. Доказать, что π_1 – ковариантный функтор. Указать, для каких категорий. Указать объекты, морфизмы, изоморфизмы.

10*. Для каждой абелевой группы G построить пространство X_G с фундаментальной группой, изоморфной G.

11*. Доказать, что $\pi_1(X) = \pi_1(X^{(2)})$, где $X^{(2)}$ – 2-остов клеточного пространства X.

12* Вычислить фундаментальные группы факторпространств шестиугольника при склейке сторон, указанной на рисунках:



Занятие № 16. Расслоения. Накрытия

1. Какие из троек (T,B,p) являются локально тривиальными расслоениями:
а) $T = B = \mathbb{R}$, $p(x) = x^2$;
б) $T = \mathbb{R}$, $B = [0, +\infty)$, $p(x) = x^2$;
в) $T = \mathbb{R}$, $B = [0, 1)$, $p(x) = \{x\}$(дробная часть);
г) $T = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $B = (0, +\infty)$, $p(x) = x^2$
д) $T = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $B = (0, +\infty)$, $p_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
$p_2(x, y) = |x| + |y|$; $p_3(x, y) = |x|^n + |y|^n$

2. Доказать, что локально тривиальное расслоение над отрезком тривиально.

3. Расклассифицировать расслоения над S^1 со слоем $[0,1]$.

4. Доказать, что локально тривиальное расслоение над S^2 со слоем S^1 можно получить склеиванием двух полноториев (тел в $\mathbb{R}^3$, ограниченных тором) по их границе.

5. Доказать, что пространство единичных касательных векторов на торе T^2 гомеоморфно $T^2 \times S^1 = T^3$, но пространство единичных касательных векторов на сфере S^2 не гомеоморфно $S^2 \times S^1$.

6. Доказать, что бутылка Клейна расслаивается над S^1 со слоем S^1.

7. Найти все накрытия окружности, тора, проективной плоскости.

8. Построить универсальное накрытие объединения плоскости и касающейся ее окружности.

9. Пусть $p : X \to B$ – накрытие. Доказать, что если $g : S^1 \to X$, таково, что $p \circ g : S^1 \to B$ гомотопно постоянному отображению, то отображение g гомотопно постоянному.

10*. Доказать, что касательное расслоение TM^n тривиально тогда, когда существует n непрерывных векторных полей на M^n, линейно независимых в каждой точке.

11*. Пусть $\pi : X \to B$ – накрытие. X, B – гладкие многообразия. Если B ориентируемо, то X ориентируемо.

12*. Доказать, что плоскость с бесконечным числом ручек накрывает любую сферу с $k \geqslant 2$ ручками.

13*. Доказать, что бесконечный цилиндр с бесконечным числом ручек накрывает любую сферу с $k \geqslant 2$ ручками.

14*. Доказать, что сфера с $g_1 \geqslant 2$ ручками накрывает сферу с $g_2 \geqslant 2$ ручками тогда и только тогда, когда $(g_1 - 1) \vdots (g_2 - 1)$.

15*. Доказать, что O(n) расслаивается над S^{n-1} со слоем O(n-1).

16*. Доказать, что пространство $\mathbb{C}P^1$ комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через точку 0, гомеоморфно S^2. Вывести отсюда, что отображение

$$p \in S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \to (0p) \in \mathbb{C}P^1$$

задает расслоение $S^3 \to S^2$ со слоем S^1

17*. Доказать, что любое отображение $f : [0,1] \to X$ однозначно поднимается до $\widetilde{f} : [0,1] \to \widetilde{X}$, где $p \circ \widetilde{f} = f$, $p : \widetilde{X} \to X$ – накрытие, если задана точка $\widetilde{f}(0) \in p^{-1}(f(0))$.

18*. Доказать, что существует накрытие цилиндром листа Мёбиуса, тором бутылки Клейна. Сколько листов у этих накрытий?

Занятие № 17. Эйлерова характеристика

1. Найти Эйлерову характеристику сферы, шара, круга, окружности.

2. Доказать формулу Эйлера

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$$

где В, Р, Г – количество вершин, ребер и граней невырожденного ограниченного выпуклого многогранника. Найти отсюда все правильные многогранники.

3. Найти эйлерову характеристику листа Мёбиуса, замкнутых поверхностей.

4. Доказать, что для n-листного неразветвленного накрытия $p : X \to B$ выполнено $\chi(X) = n\chi(B)$.

5*. Доказать, что для любого связного графа $\chi = 1$.

6* Пусть n_k – число k-угольных граней выпуклого многогранника, тогда $3n_3 + 2n_4 + n_5 \geqslant 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \ldots$

7*. Замкнутая поверхность Q разделенная по k непересекающимся линиям, сохраняет связность. Доказать, что $k \leqslant 1 - \frac{\chi}{2}$.

8*. Граф (m,n) состоит из набора m точек, набора n точек и mn ребер, соединяющих каждую точку первого набора с каждой точкой второго набора. Если этот граф расположен без самопересечений на замкнутой поверхности Q, то $\chi(Q) \leqslant m + n - \frac{mn}{2}$.

Занятие № 18. Гомологии

1. Показать, что для любого линейно связного пространства $H_0 \simeq \mathbb{Z}$.

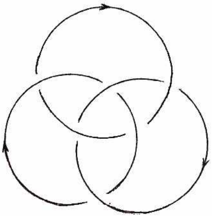
2. Доказать, что для двумерной ориентируемой поверхности $H_2 \simeq \mathbb{Z}$, а для неориентируемой поверхности $H_2 \simeq 0$.

3. Найти $H_1(Q)$, где Q – замкнутая поверхность.

4. Найти гомологии S^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$.

5. Для бутылки Клейна K^2 найти $H_2(K^2, \mathbb{Z})$, $H_2(K^2, \mathbb{Z}_2)$, $H_1(K^2, \mathbb{Z})$.

6. Доказать, что каждая из ориентированных окружностей на рисунке гомологична нулю в дополнении к двум другим окружностям, но не стягивается в точку.



Основные определения и обозначения

Топологическое пространство - это пара (X,τ), где X - множество, τ- система помножеств X, удовлетворяющая условаям:

1) $X, \varnothing \in \tau$;

2) для любого набора $\{U_\alpha\} \subset \tau$ объединение $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$;

3) для любого конечного набора $u_1, \ldots, u_n \in \tau$ пересечение $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

τ называется топологией на X, множества $U \in \tau$ называются открытыми в X.

Тривиальная топология на X содержит X,$\varnothing$, дискретная топология на X содержит все подмножества X.

Замкнутые множества - дополнения открытых.

База β топологии τ на X - это система открытых множеств, таких, что любое $U \in \tau$, $U \neq \varnothing$ можно представить в виде $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \in \beta$.

Замыкание $\overline{A}$ множества $A \subset X$ - это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Внутренность Int A множества $A \subset X$ - это объединение всех открытых множеств, содержащихся в A.

Граница ∂A множества $A \subset X$ - это множество точек, каждая окрестность которых пересекается с A и $X \backslash A$, $\partial A = \overline{A} \backslash Int A$.

База окрестностей в точке $x \in X$ - набор $\{U_\alpha\}$ - окрестностей точки x, таких, что всякая окрестность точки x содержит некоторую окрестность U_α.

Индуцированная топология на подмножестве A пространства (X,τ) есть $\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$.

Метрическая пространство - пара (X,ρ), где X - множество, $\rho : X \times X \to [0,+\infty)$ - функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

ρ называется метрикой на X.

Открытый шар, замкнутый шар, сфера радиуса r с центром $x_0 \in X$ суть множества

$$D_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) < r\}$$

$$\overline{D}_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) \leq r\}$$

$$S_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) = r\}$$

Через D^{n+1}, S^n обозначается $D_1(0)$, $S_1(0) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ с евклидовой метрикой, $n \geq 0$, $D^0 = \overline{D}^0$ - одноточечное пространство, $\partial D^0 = \varnothing$.

Метрическая топология на X - топология с базой, составленной из всех открытых шаров.

Аксиомы счетности:

S_1 - в каждой точке имеется счетная база окрестностей;

S_2 - имеется счетная база топологии;

Sep - имеется счетное всюду плотное множество.

Множество A всюду плотно в X, если оно пересекается с каждым непустым открытым множеством.

Множество A нигде не плотно в X, если всякое непустое открытое множество содержит непустое открытое подмножество, не пересекающееся с A.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если для всякого открытого $U \subset Y$ прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X.

Гомеоморфизм $f : X \to Y$ непрерывное отображение, для которого существует обратное непрерывное отображение.

Путь в пространстве X - это любое непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$.

Пространство X связано, если не существует непустых непересекающихся открытых множеств U, V, покрывающих X.

Пространство X линейно связно, если для любой пары точек $x, y \in X$ существует путь $f : [0,1] \to X$, f(0)=x, f(1)=y.

Аксиомы отделимости:

T_0 - для любой пары точек $x \neq y$ существует окрестность $U_x \not\supseteq \{y\}$;

T_1(отделимость) - для любой пары точек $x \neq y$ существуют окрестности $U_x \not\supseteq \{y\}$ и $U_y \not\supseteq \{x\}$;

T_2 (хаусдорфовость) для любой пары точек $x \neq y$ существуют непересекающиеся окрестности U_x, U_y;

T_3 - для любой точки x и замкнутого множества $F \not\supseteq \{x\}$ существуют непересекающиеся окрестности U_X, U_f;

T_4 - для любых непересающихся замкнутых множеств F, G существуют непересекающиеся окрестности U_F, U_G;

$T_1 + T_3$ - регулярность, $T_1 + T_4$ - нормальность.

произведение топологических пространств (X_α, τ_α), $\alpha \in \dashv$ - это множество $\prod_\alpha X_\alpha$, наделенное топологией с базой $\{\prod_{alpha} U_\alpha\}$, где $U_\alpha \in \tau$, $\alpha \in \dashv$ и $U_\alpha = X_\alpha$, при $\alpha \neq \alpha_0$ Для какого-либо $\alpha_0 \in \dashv$.

Фактормножество X - это множество его непересекающихся подмножеств A_α, $\alpha \in \dashv$, покрывающих X. Факторпространство - фактормножество с факторттопологией, составленной из множеств $U = \{A_\alpha | \alpha \in \dashv' \subset \dashv$, для которых $\bigcup_{A_{alpha} \in U} A_\alpha$ открыто в X.

Топологическое пространство компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Топологическое многообразие (связное хаусдорфово S_2) - пространство, у каждой точки которого имеется окрестность, гомеоморфная $\mathbf{R}^n$, при некотором $n \geq 0$.

Многообразие с краем - пространство, у каждой точки которого имеется окрестность, гомеоморфная $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^n_+ = \{x_n \geq 0\}$, при некотором $n \geq 0$.

Топологическая группа G - группа с топологией, в которой непрерывны отображения $(a,b) \in G \times G \to ab \in G$ и $a \in G \to a^{-1} \in G$.

Непрерывные отображения $f, g^X\ rightarrow Y$ гомотопны (гомотопны относительно множества $A \subset X$) - обозначается $f \sim g$ (соответственно $f \sim g$ rel A), - если существует гомотопия $h : X \times [0,1] \to Y$ - непрерывное отображение, для которого h(x,0))=f(x), h(x,1)=g(x) при $x \in X$ (g(a)=h(a,t)=f(a) при $t \in [0,1]$.

Ретракт пространства X - множество $A \subset X$, для которого имеется ретракция $r : X \to A$ - непрерывное отображение, причем r(a)=a, $a \in A$.

$f : X \to Y$ - гомотопическая эквивалентность, если существует отображение $g : Y \to X$, для которого $f \circ g \sim id_y$, $g \circ f \sim id_x$.

Стягиваемое пространство - гомотопически эквивалентное точке.

Деформационная ретракция - ретракция $r : X \to A$, для которой $in \circ r \sim id_X$.

Фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ - группа гомотопических классов петель в X с началом и концом x_0 с групповой операцией $[u] \circ [v] = [u * v]$.

Односвязное пространство - линейно связное с тривиальной фундаментальной группой.

Расслоение $p : E \to B$ со слоем L (локально тривиальное) - непрерывное отображение, такое, что у любой точки $b \in B$ имеется окрестность U, для которой $p|f^{-1}(U) = pr_2 \circ g$, где $g : f^{-1}(U) \to L \times U$ - гомеоморфизм, $pr_2 : L \times U \to U$ проекция. E - пространство расслоения, B - база.

Накрытие - локально тривиальное расслоение с дискретным слоем. Число листов накрытия - мощность слоя.

Клеточное пространство X (CW - комплекс) - хаусдорфово топологическое пространство, разбитое на непересекающиеся клетки $e_\alpha, \alpha \in \mathfrak{a}$, так, что каждой клетке e_α сопоставлено целое число $dime_\alpha \geq 0$ и непрерывное отображение $f_\alpha : \overline{D}^{dime_\alpha} \to X$, для которого $f_\alpha|D^{dime_\alpha}$ - гомеоморфизм D^{dime_α} и e_α, $f_\alpha(\partial D^{\dim e_\alpha}) \subset \bigcup_{dime_\beta < dime_\alpha} e_\beta$, а также выполнены требования:

(C) Замкнутая клетка $\overline{e}_\alpha$ пересекается лишь с конечным числом клеток;

(W) множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты все его пересечения $A \cap \overline{e}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{a}$

n-мерный остов $X^{(n)}$ клеточного пространства X - объединение всех клеток размерности $\leq n$.

Эйлерова характеристика конечного клеточного пространства X (состоящего из конечного числа клеток $e_1, \ldots, e_r$):

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{dime_i}$$

Библиографический список

1. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. М.: Наука,1983. 160 с.

2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.

3. Коснёвски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983. 304 с.

4. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: Издательство физико-математической литературы, 1987. 352 с.

5. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 432 с.

6. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии: Геометрические главы. М.: Наука, 1977. 488 с.

Оглавление