МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.Г. ВОЛЫНСКАЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 38.03.02 Менеджмент, 39.03.01 Социология

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2023

УДК 519.2(075)
ББК В17я7
В706

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Р а д ч е н к о,
канд. экон. наук, доц. А. В. Ю к л а с о в а

Волынская, Мария Геннадьевна

В706 **Теория вероятностей и статистический анализ данных:** учебное пособие / *М.Г. Волынская*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 84 с.

ISBN 978-5-7883-2024-3

В учебном пособии изложен теоретический материал по разделам и практические задания, соответствующие каждому разделу, которые в свою очередь необходимы для закрепления полученных теоретических знаний, практических навыков.

Предназначены для обучающихся по направлениям подготовки 38.03.02 Менеджмент, 39.03.01 Социология.

Подготовлено на кафедре математике и бизнес-информатики.

УДК 519.2(075)
ББК В17я7

ISBN 978-5-7883-2024-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные понятия 4
1. ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 5
1.1. Основные понятия комбинаторики 5
1.2. Решение комбинаторных задач 8
1.3. Понятие о случайном событии. Виды событий. Вероятность события 10
1.4. Классическое определение вероятности 11
1.5. Теорема сложения вероятностей 13
1.6. Теорема умножения вероятностей 15
2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, ЕЕ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 18
2.1. Случайная величина, способы ее задания 18
2.2. Дискретная и непрерывная случайные величины 19
2.3. Закон распределения случайной величины 19
2.4. Биномиальное распределение 23
3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ 25
3.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины 25
3.2. Среднее квадратичное отклонение и дисперсия случайной величины. 26
4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ 29
5. ОТВЕТЫ 32
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 33
Образец выполнения контрольной работы № 1. Теория вероятностей. 35
Образец выполнения контрольной работы № 2. Математическая статистика 39
ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ 53
Тематические тесты 58
Задания для самостоятельного выполнения. 66
Список рекомендуемой литературы 80

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений. Путем наблюдений (испытаний, экспериментов), т.е. опыта в широком смысле слова, происходит познание явлений действительного мира. В своей практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых невозможно предсказать, результат которых зависит от случая.

Случайное явление можно охарактеризовать отношением числа его наступлений к числу испытаний, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Математическая статистика- это раздел математики, который имеет своим предметом изучения методов сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия решений.

При этом под статистическими данными понимается совокупность чисел, которые представляют количественные характеристики интересующих нас признаков изучаемых объектов. Статистические данные получаются в результате специально поставленных опытов, наблюдений.

Статистические данные по своей сущности зависят от многих случайных факторов, поэтому математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, которая является ее теоретической основой.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Основные понятия комбинаторики

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3, … , 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие – входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания.

Предварительно познакомимся с понятием факториала.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют n – факториалом и пишут

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n.$$

Пример 1. Вычислить: а) $3!$; б) $7!-5!$; в) $\frac{7!+5!}{6!}$.

Решение. а) $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

б) Так как $7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$ и $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$, то можно вынести за скобки $5!$.

Тогда получим

$$5!(6\cdot 7-1) = 5!\cdot 41 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 41 = 120\cdot 41 = 4920.$$

в) $\frac{7!+5!}{6!}=\frac{5!(6\cdot 7+1)}{5!\cdot 6}=\frac{6\cdot 7+1}{6}=\frac{43}{6}$.

1. Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом Pn, где n – число элементов, входящих в каждую перестановку. (P – первая буква французского слова permutation- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n\cdot(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!.$$

Запомним, что 0!=1 и 1!=1.

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720\ .$$

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m – число всех имеющихся элементов, n – число элементов в каждой комбинации. (A – первая буква французского слова arrangement, что означает «размещение, приведение в порядок»).

При этом полагают, что $n \leq m$.

Число размещений можно вычислить по формуле

$$\underbrace{A_m^n = m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots}_{n.\text{множителей}},$$

т.е. число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Пример 3. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60\ .$$

2. Сочетания.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n-натуральные числа, причем n $\leq$ m).

Число сочетаний из *m* элементов по *n* обозначаются C_m^n (*C* – первая буква французского слова *combination* – сочетание).

В общем случае число из *m* элементов по *n* равно числу размещений из *m* элементов по *n*, деленному на число перестановок из *n* элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

Пример 4. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650 .$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \le n \le m),$$

(по определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$);

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

1.2. Решение комбинаторных задач

Задача 1. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360 .$$

Задача 2. Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)!\cdot 10!} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{5!\cdot 10!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$$
$$= \frac{11\cdot 3\cdot 13\cdot 3\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 1\cdot 1} = \frac{11\cdot 3\cdot 13\cdot 14}{2} = 11\cdot 3\cdot 13\cdot 7 = 3003.$$

Задача 3. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Решение.

$$P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Задача 4. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение. Солдат в дозор можно выбрать

$$C_{80}^{3} = \frac{80!}{77!3!} = \frac{77!\cdot 78\cdot 79\cdot 80}{77!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{78\cdot 79\cdot 80}{2\cdot 3} = 13\cdot 79\cdot 80 = 82160$$

способами, а офицеров $C_3^1 = 3$ **способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется** $C_{80}^{3}\cdot C_3^1 = 82160\cdot 3 = 246480$ способов.

Задача 5. Найти x, если известно, что $C_{x-2}^{2} = 21$.

Решение.

Так как

$$C_{x-2}^{2} = \frac{(x-2)!}{(x-2-2)!2!} = \frac{(x-2)!}{(x-4)!\cdot 2} = \frac{(x-4)!\cdot (x-3)(x-2)}{(x-4)!\cdot 2} = \frac{(x-3)(x-2)}{2}$$

, то получим

$$\frac{(x-3)(x-2)}{2} = 21,$$

$$(x-3)(x-2) = 42,$$

$$x^2 - 5x + 6 - 42 = 0,$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0,$$

$$x_1 = -4,\ x_2 = 9.$$

По определению сочетания следует, что $x-2 \le 2$, $x \le 4$. Т.о. $x = 9$.

Ответ: 9.

1.3. Понятие о случайном событии. Виды событий. Вероятность события

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть ***испытанием.***

Результат этого действия или наблюдения называется ***событием***.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, – ***невозможным***.

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: А, В, С, Д, … .

Полной системой событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.

Если полная система состоит из двух несовместных событий, то такие события называются противоположными и обозначаются А и $\overline{A}$.

Пример. В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными:

достали пронумерованный шар *(А);*

достали шар с четным номером *(В);*

достали шар с нечетным номером *(С);*

достали шар без номера *(Д).*

Какие из них образуют полную группу?

Решение. А – достоверное событие; *Д* – невозможное событие; *В* и *С* – противоположные события.

Полную группу событий составляют А и Д, В и ***С***.

Вероятность события, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

1.4. Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется вероятностью этого события и обозначается символом Р(А).

Определение. Вероятностью события *А* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *А,* к числу *n* всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы *n,* выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение m к n.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \le m \le n$. Разделив обе части на n, получим

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n = 1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n = 0$.

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Задача 2. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 18 \cdot 17 \cdot 28 = 8568.$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию А. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364 .$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184 .$$

Искомая вероятность события А равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} \approx 0{,}255 .$$

1.5. Теорема сложения вероятностей

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом А+В, а сумму n **событий символом** $A_1+A_2+ \ldots +A_n$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \text{ или}$$

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Следствие 1. Если событие A_1, A_2, … , A_n образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Задача 1. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 10 – по 15000 руб, на 15 – по 10000 руб., на 25 – по 2000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

Решение. Пусть A, B, и C – события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. так как события A, B и C несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0{,}3.$$

Задача 2. На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *A, B* и *C*. Вероятность поступления контрольной работы из города *A* равна 0,6, из города *B* – 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *C*.

Решение. События «контрольная работа поступила из города *A*», «контрольная работа поступила из города *B*» и «контрольная работа поступила из города *C*» образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0{,}6+0{,}1+p=1, \text{ т.е. } p=1-0{,}7=0{,}3.$$

Задача 3. Вероятность того, что день будет ясным, $p = 0{,}85$. Найти вероятность g того, что день будет облачным.

Решение. События «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому

$$p + g = 1, \text{ т.е } g = 1 - p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15.$$

1.6. Теорема умножения вероятностей

При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B возникает вопрос:

Как связаны события A и B друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие *условной вероятности.*

Определение. Пусть A и B – два случайных события одного и того же испытания. Тогда условной вероятностью события A или вероятностью события А при условии, что наступило событие В, называется число $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (P(B) \neq 0).$$

Задача 1. Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок – мальчик, родится второй мальчик.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в семье два мальчика, а событие B – что один мальчик.

Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка.

Тогда $P(AB)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ и по формуле находим

$$P(A/B)=\frac{1}{4}:\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\approx 0{,}3.$$

Событие ***A*** называется ***независимым от события B, если наступление события B не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события A***.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Задача 2. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй – 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар; A_2 – из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы.

Так как $P(A_1)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$, $P(A_2)=\dfrac{7}{12}$, то по формуле $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$ находим

$$P(A_1A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}.$$

Задача 3. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение. Пусть событие A – выход из строя первого элемента, событие B – выход их строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) Одновременное появление A и B есть событие AB. Следовательно,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}06.$$

б) Если работает первый элемент, то имеет место событие $\overline{A}$ (противоположное событию A – выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент – событие B. Найдем вероятности событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}2=0{,}8;$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}3=0{,}7.$$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\overline{A}\overline{B}$ и, значит,

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56.$$

2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, ЕЕ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Случайная величина, способы ее задания

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Если для какой-либо величины ее измерение повторять многократно в практически одинаковых условиях, то обнаружится, что всякий раз получаются несколько отличные друг от друга результаты. Это складывается влияние причин двух видов: 1) основных, определяющих главное значение результата; 2) второстепенных, обуславливающих их расхождение.

При совместном действии этих причин понятия необходимости и случайности оказываются тесно связанными между собой, но необходимое преобладает над случайным.

Таким образом, возможные значения случайных величин принадлежат некоторым числовым множествам.

Случайным является то, что на этих множествах величины могут принять любое значение, но какое именно, заранее сказать нельзя.

Случайная величина связана со случайным событием.

Если случайное событие – ***качественная характеристика*** испытаний, то случайная величина – его ***количественная характеристика***.

Случайные величины обозначают заглавными латинскими буквами $X, Y, Z,$ а их значение – прописными – x_i, y_i, z_i.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение x_1 обозначают:

$$P(X = x_1) = p_1 \text{ и т.д.}$$

Случайные величины задают законами распределения.

Закон распределения случайной величины – это соответствие, установленное между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Законы распределения могут быть заданы тремя способами: табличным, графическим, аналитическим. Способ задания зависит от типа случайной величины.

Различают два основных типа случайных величин: *дискретные и непрерывно распределенные случайные величины.*

2.2. Дискретная и непрерывная случайные величины

Если значения, которые может принимать данная случайная величина X, образует дискретный (конечный или бесконечный) ряд чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, то и сама случайная величина X называется ***дискретной.***

Если же значения, которые может принимать данная случайная величина X, заполняют конечный или бесконечный промежуток (а, в) числовой оси *Ох,* то случайная величина называется ***непрерывной.***

Каждому значению случайной величины дискретного типа x_n отвечает определенная вероятность p_n; каждому промежутку (а, в) из области значений случайной величины непрерывного типа также отвечает определенная вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной, попадает в этот промежуток.

2.3. Закон распределения случайной величины

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения*** случайной величины.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается ***рядом распределения:***

xi	x1	x2	x3	...	xn
pi	p1	p2	p3	...	pn

При этом $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, где суммирование распространяется на все (конечное или бесконечное) множество возможных значений данной случайной величины X.

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать с помощью ***функции плотности вероятности*** $f(x)$.

Вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной X, попадет в промежуток (а, в), определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

График функции $f(x)$ называется ***кривой распределения***. Геометрически вероятность попадания случайной величины в промежуток (а, в) равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = в$.

Задача 1. Даны вероятности значений случайной величины X: значение 10 имеет вероятность 0,3; значение 2 – вероятность 0,4; значение 8 – вероятность 0,1; значение 4 – вероятность 0,2. Построить ряд распределения случайной величины X.

Решение. Расположив значения случайной величины в возрастающем порядке, получим ряд распределения:

xi	2	4	8
pi	0,4	0,2	0,1

Возьмем на плоскости *xOp* точки (2; 0,4), (4; 0,2), (8; 0,1) и (10; 0,3). Соединив последовательные точки прямолинейными отрезками, получим ***многоугольник*** (или ***полигон***) распределения случайной величины X.

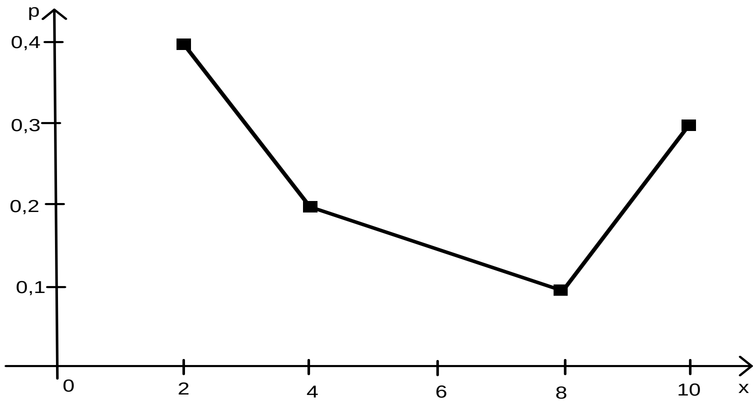

Рисунок 1 – Распределение случайной величины *X*

Задача 2. Разыгрываются две вещи стоимостью по 5000 руб. и одна вещь стоимостью 30000 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение. Искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать три значения: 0, 5000 и 30000 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – два случая и третьему – один случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1) = \frac{47}{50} = 0{,}94\,; \qquad P(x_2) = \frac{2}{50} = 0{,}04\,;$$

$$P(x_3) = \frac{1}{50} = 0{,}02\,.$$

Закон распределения случайной величины имеет вид:

xi	0	5000	30000
pi	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 0{,}94 + 0{,}04 + 0{,}02 = 1\,.$$

Задача 3. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ a = (3x - x^2) & при \quad 0 \le x \le 3, \\ 0 & при \quad x > 0. \end{cases}$$

Требуется: 1) Найти коэффициент а; 2) построить график распределения плотности $y = f(x)$; 3) найти вероятность попадания X в промежуток (1; 2).

Решение. 1) Так как все значения данной случайной величины заключены на отрезке [0; 3], то

$$\int_0^3 a(3x - x^2)dx = 1\,,$$

откуда $a(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^3 = 1,$

или $a(\frac{27}{2} - 9) = 1$, т.е. $a = \frac{2}{9}$.

2) Графиком функции $f(x)$ в интервале [0; 3] является парабола $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2$, а вне этого интервала графиком служит сама ось абсцисс.

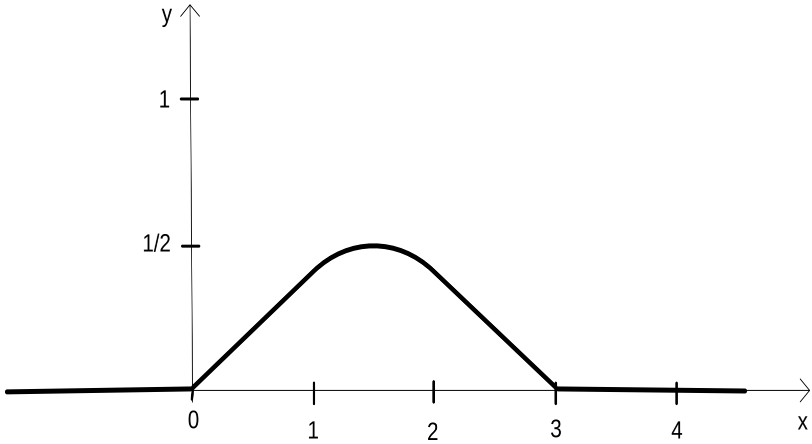

Рисунок 2 – График распределения

3) Вероятность попадания случайной величины X в промежуток (1; 2) найдется из равенства

$$P(1<X<2)=\int_1^2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{27}\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{3}-\frac{16}{27}+\frac{2}{27}-\frac{1}{3}=\frac{13}{27}.$$

2.4. Биномиальное распределение

Пусть производится определенное число n независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие P. Рассмотрим случайную величину X, представляющую собой число наступлений событий A в n опытах. $P(A_{n,k})$, вычисляется по формуле Бернулли.

$$P(A_{n,k}) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k g^{n-k}.$$

Закон распределения, который характеризуется такой таблицей, называется *биноминальным*.

Задача. Монету подбрасывают 5 раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадения герба.

Решение. Возможны следующие значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность выпадения герба в одном испытании равна $\frac{1}{2}$, найдем вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$$P(A_{5,0}) = C_5^0 p^0 g^5 = 1 \cdot (\frac{1}{2})^0 \cdot (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32};$$

$$P(A_{5,1}) = C_5^1 p^1 g^4 = 5 \cdot (\frac{1}{2})^1 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,2}) = C_5^2 p^2 g^3 = 10 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,3}) = C_5^3 p^3 g^2 = 10 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,4}) = C_5^4 p^4 g^1 = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^1 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,5}) = C_5^5 p^5 g^0 = 1 \cdot (\frac{1}{2})^5 \cdot (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{32}.$$

Сделаем проверку:

$$\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Наиболее исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее закон распределения вероятностей. Однако не всегда обязательно знать весь закон распределения. Иногда можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности закона распределения, например, числом, имеющим смысл «среднего значения» случайной величины, или же числом, показывающим средний размер отклонения случайной величины от своего среднего значения. Такого рода числа называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины. Оперируя числовыми характеристиками, можно решать многие задачи, не пользуясь законом распределения.

Одна из самых важных числовых характеристик случайной величины есть математическое ожидание.

Если известна дискретная случайная величина X, закон распределения которой имеет вид

Значения x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Вероятности p_i	p_1	P_p	$\cdots$	p_n

то ***математическим ожиданием*** (или средним значением) дискретной величины X называется число

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n .$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины X равно сумме произведений возможных значений этой величины на их вероятности.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Решение.

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}3 =$$

$$= -0{,}2 + 0 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}9 = 1{,}25.$$

Свойства математического ожидания.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

2. Математическое ожидание постоянной величины C равно самой этой величине:

$$M(C) = C.$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

3.2. Среднее квадратичное отклонение и дисперсия случайной величины

Пример 2. Найдем математическое ожидание случайных величин X и Y, зная законы их распределения

1)

X	-8	-4	-1	1	3	7
p	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

2)

Y	-2	-1	0	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

Решение:

$$M(X) = -8\cdot\frac{1}{12} - 4\cdot\frac{1}{6} - 1\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{12} + 7\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$M(Y) = -2\cdot\frac{1}{6} - 1\cdot\frac{1}{6} - 0\cdot\frac{1}{12} + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Получили любопытный результат: законы распределения величин X и Y разные, а их математические ожидания одинаковы.

Основной числовой характеристикой степени рассеяния значений случайной величины X относительно ее математического ожидания $M(X)$ является дисперсия, которая обозначается через $D(X)$.

Определение. ***Отклонением*** называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $M(X)$, т.е. $X - M(X)$.

Отклонение $X - M(X)$ **и его квадрат** $(X - M(X))^2$ **также являются случайными величинами.**

Определение. ***Дисперсией дискретной*** случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины C равна 0:

$$D(C) = 0.$$

2. Если X – случайная величина, а C – постоянная, то

$$D(C \cdot X) = C^2 D(X),$$

$$D(X + C) = D(X).$$

3. Если X и Y – независимые случайные величины, то

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Для вычисления дисперсий более удобной является формула

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Пример 3. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $D(X)$.

Решение. Сначала находим $M(X)$.

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}9,$$

а затем $M(X^2)$.

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}1.$$

По формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ имеем

$$D(X) = 2{,}1 - (0{,}9)^2 = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Комбинаторика

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

2. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

3. Сколькими способами можно выбрать двух студентов на конференцию, если в группе 33 человека?

4. Решить уравнения

а) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$. б) $C_x^5 = C_x^7$.

5. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

6. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

7. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

8. Сколькими способами можно составить четырехцветные ленты из семи лент различных цветов.

9. Сколькими способами можно выбрать четырех лиц на четыре различные должности из девяти кандидатов?

10. Сколькими способами можно выбрать 3 из 6 открыток?

11. Перед выпуском группа учащихся в 30 человек обменялась фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек.

12. Сколькими способами можно рассадить 10 гостей по десяти местам за праздничным столом?

13. Сколько всего игр должны провести 20 футбольных команд в однокруговом чемпионате?

14. Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?

Теория вероятностей

1. В урне находиться 7 красных и 6 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара красные (событие А)?

2. Девять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что четыре определенные книги окажутся поставленными рядом (событие С).

3. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов, один выигрышный.

4. из колоды карт (52 карты) наудачу извлекают 3 карты. Найти вероятность того, что это тройка, семерка, туз.

5. Ребенок играет с пятью буквами разрезной азбуки А, К, Р, Ш, Ы. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «Крыша».

6. В ящике находятся 6 белых и 4 красных шара. Наудачу берут два шара. Какова вероятность того, что они окажутся одного цвета?

7. В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй – 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Случайная величина, математическое ожидание и дисперсия случайной величины

1. Составить закон распределения числа попаданий в цель при шести выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4.

2. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые он посетит, если в городе четыре библиотеки.

3. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает делать не более четырех выстрелов. Найти дисперсию числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

4. На заводе работают четыре автоматические линии. Вероятность того, что в течении рабочей смены первая линия не потребует регулировки, равна 0,9, вторая – 0,8, третья – 0,75, четвертая – 0,7. найти математическое ожидание числа линий, которые в течение рабочей смены не потребуют регулировки.

5. ОТВЕТЫ

Комбинаторика

1. 120. **2.** 210. **3.** 528. **4.** а) $x \geq 3$, 5; б) $\{12\}$. **5.** 42. **6.** 15015. **7.** 62. **8.** 840. **9.** 3024. **10.** 20. **11.** 870. **12.** 3628800**.** **13.** 190. **14.** 924.

Теория вероятностей

1. $\frac{7}{26}$. **2.** $\frac{1}{21}$. **3.** $\frac{5}{9}$. **4.** $\frac{48}{16575} \approx 0{,}0029$. **5.** $\frac{1}{20}$. **6.** $\frac{7}{15}$. **7.** $\frac{3}{4}$.

Случайная величина, математическое ожидание и дисперсия случайной величины

1.

0	1	2	3	4	5	6
0,0467	0,1866	0,3110	0,2764	0,1382	0,0368	0,0040

2.

1	2	3	4
0,3	0,21	0,147	0,343

3. 0,53. **4.** 0,85.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вариант 1.

1. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,7, а третий – с вероятностью 0,75. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

2. Ожидается прибытие трех судов с фруктами. Статистика показывает, что 1% судов привозит товар, непригодный к пользованию. Найти вероятность того, что

а) хотя бы два судна привезут качественный товар;

б) ни одно судно не привезет качественный товар.

3. В среднем 5% студентов финансово-кредитного факультета сдают экзамен по высшей математике на «отлично». Найти вероятность того, что из 100 наудачу выбранных студентов этого факультета сдадут экзамен по математике на «отлично»:

а) два студента;

б) не менее пяти студентов.

4. Объем продаж в течение месяца – это случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами $a = 500$ и $b = 120$. Найти вероятность того, что объем товара в данном месяце заключен в границах от 480 до 600.

Вариант 2.

1. Среди 20 одинаковых по внешнему виду тетрадей 16 в клетку. Наудачу взяли 4 тетради. Найти вероятность того, что из них

а) две тетради в клетку;

б) хотя бы одна тетрадь в клетку.

2. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение доли изделий первого сорта среди отобранных от 0,85 не превосходило 0,01 (по абсолютной величине).

3. Из поступивших в магазин телефонов третья часть белого цвета, однако, определить цвет можно только после вскрытия упаковки. Найти вероятность того, что из шести распакованных телефонов

а) два аппарата белого цвета;

б) хотя бы один аппарат белого цвета.

5. Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднее квадратическое отклонение которой равно 10000 л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклонится от математического ожидания не более чем на 25000 л (по абсолютной величине).

Образец выполнения контрольной работы №1. Теория вероятностей

Вариант 1.

1. Решение.

Событие A_i – «*i – й стрелок попал в цель», противоположное событие* $\overline{A_i}$ *– «i – й стрелок не попал в цель», i = 1, 2, 3. Вероятности этих событий*

$P(A_1) = 0{,}6$, $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;

$P(A_2) = 0{,}7$, $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$;

$P(A_3) = 0{,}75$, $P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Событие A – «хотя бы один стрелок попал в цель», противоположное событие $\overline{A}$ *– «ни один стрелок не попал в цель».*

Событие $\overline{A}$ *можно записать так* $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. *Результаты выстрела любого из стрелков не зависят от результатов выстрелов других стрелков. Поэтому вероятность события* $\overline{A}$ равна $P(\overline{A}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) =$ $= 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}03$.

Искомая вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 -$ $- 0{,}03 = 0{,}97$.

Ответ: Вероятность хотя бы одного попадания в цель равна 0,97.

2. Решение.

Событие А – «судно привезет качественный товар» – происходит с вероятностью $p = P(A) = (100 - 1)/100 = 0{,}99$; вероятность противоположного события $\overline{A}$ – «судно не привезет качественный товар» $q = P(\overline{A})$ = 0,01. Число испытаний $n = 3$.

Применим формулу Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

а) Событие В – «хотя бы два судна привезут качественный товар» означает, что либо два судна из трех привезут качественный товар либо все три судна привезут качественный товар. Вероятность события В равна $P(B) = P_3(2) + P_3(3)$.

$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}99^2 \cdot 0{,}01^1 = 0{,}029403$;

$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0{,}99^3 \cdot 0{,}01^0 = 0{,}970299$;

$P(B) = 0{,}029403 + 0{,}970299 = 0{,}999702$.

б) Событие С – «ни одно судно не привезет качественный товар». Вероятность события С равна $P(C) = P_3(0)$

$P(C) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 0{,}99^0 \cdot 0{,}01^3 = 0{,}000001$.

Ответ:

а) вероятность того, что хотя бы два судна привезут качественный товар, равна 0,999702;

б) вероятность того, что ни одно судно не привезет качественный товар, равна 0,000001.

3. Решение.

Событие А – «студент сдаст экзамен по математике на «отлично»» – происходит с вероятностью $p = P(A) = 0{,}05$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Число испытаний $n = 100$.

Так как вероятность p события А мала, число испытаний n достаточно велико и np = 100 · 0,05 = 5 < 10, то можно применить асимптотическую формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np = 5$; $e^{-\lambda} = e^{-5} = 0{,}00674$.

а) Событие B – «из 100 наудачу выбранных студентов сдадут экзамен по математике на «отлично» два студента». Его вероятность

$$P(B) = P_{100}(2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{5^2}{2}e^{-5} = 12{,}5 \cdot 0{,}00674 = 0{,}0842.$$

б) Событие C – «из 100 студентов сдадут экзамен по математике на «отлично» не менее пяти студентов». Его вероятность равна

$$P(C) = P_{100}(k = 5) = 1 - P_{100}(k \le 4) = 1 - (P_{100}(0) + P_{100}(1) +$$
$$+ P_{100}(2) + P_{100}(3) + P_{100}(4)).$$

$$P(C) \approx 1 - \left(\frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} + \frac{5^3}{3!}e^{-5} + \frac{5^4}{4!}e^{-5}\right) \approx$$

$$\approx 1 - e^{-5}(1 + 5 + 12{,}5 + 20{,}8333 + 26{,}0417) \approx$$
$$\approx 1 - 0{,}00674 \cdot 65{,}375 \approx 0{,}5594.$$

Ответ:

а) вероятность того, что из 100 наудачу выбранных студентов сдадут экзамен по математике на «отлично» два студента, приближенно равна 0,0842;

б) вероятность того, что из 100 студентов сдадут экзамен по математике на «отлично» не менее пяти студентов, приближенно равна 0,5594.

5. Решение.

Вероятность того, случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения, примет значения, принадлежащие интервалу $[x_1; x_2]$, *найдем по формуле*

$$P(x_1 \le X \le x_2) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right].$$

$$P\ (480 \le X \le 600) = \frac{1}{2}\left[\varPhi\left(\frac{600-500}{120}\right) - \varPhi\left(\frac{480-500}{120}\right)\right] =$$

= 0,5(Φ(0,83) – Φ(-0,17)) = 0,5(Φ(0,83) + Φ(0,17)) =
= 0,5(0,5935 + 0,1350)) = 0,3643.

По таблице значений функции Лапласа

$$\varPhi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$

находим значения

Φ(0,83) = **0,5935; Φ(0,17)** = 0,1350.

Ответ: вероятность того, что объем товара в данном месяце заключен в границах от 480 до 600, приближенно равна 0,3643.

Образец выполнения контрольной работы №2
Математическая статистика

Вариант 1

1. С целью определения средней суммы вкладов в сберегательном банке, имеющем 2000 вкладчиков, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено обследование 100 вкладов. Результаты обследования представлены в таблице.

Сумма вклада, тыс. руб.	50 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
Число вкладов	14	24	35	20

Найти: а) границы, в которых с вероятностью 0,9488 находится средняя сумма всех вкладов в сберегательном банке; б) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для средней суммы вкладов в сберегательном банке (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9; в) вероятность того, что доля всех вкладчиков, у которых сумма вклада больше 250 тыс. руб., отличается от доли таких вкладчиков в выборке не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).

2. По данным задачи 1, используя критерий χ^2 – Пирсона, при уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – сумма вклада – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 250 пар, вступивших в брак, по возрасту мужчин X (лет) и женщин Y (лет) представлено в таблице:

y x	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
15 - 25	7	3			
25 - 35	52	110	13	1	
35 - 45	1	14	23	2	
45 - 55		1	4	6	1
55 - 65				3	6
65 - 75					3
Итого:	60	128	40	12	10

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать содержательную интерпретацию полученных уравнений; б) вычислить коэффициент корреляции на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y; в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний возраст мужчин, имеющих супруг в возрасте 30 лет.

1. Решение.

От интервального распределения перейдем к дискретному, взяв в качестве представителя интервала его середину $\widetilde{x}_i$.

Для расчета выборочной средней и выборочной дисперсии составим таблицу.

Сумма	Количество	x	$\frac{x_i - C}{k} \cdot n_i$	$\left(\frac{x_i - C}{k}\right)^2 \cdot n_i$
50 - 150	14	100	-28	56
150 - 250	24	200	-24	24
250 - 350	35	300	0	0
350 - 450	20	400	20	20
450 - 550	7	500	14	28
Суммы	100		-18	128

C = 300 – середина интервала с наибольшей частотой;
k = 100 – величина интервала.
Выборочное среднее найдем по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - C}{k} \cdot n_i}{n} \cdot k + C,$$

$$\bar{x}_{\hat{a}} = \frac{-18}{100} \cdot 100 + 300 = 282 \text{ тыс. руб.}$$

Выборочная дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - C}{k}\right)^2 \cdot n_i}{n} \cdot k^2 - (\bar{x} - C)^2,$$

$$\sigma^2 = \frac{128}{100} \cdot 100^2 - (282 - 300)^2 = 12476.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\bar{\sigma}_{\hat{a}} = \sqrt{\bar{\sigma}_{\hat{a}}^2} = \sqrt{12476} \approx 111{,}696.$$

а) Средняя квадратическая ошибка среднего значения признака для бесповторной выборки $\sigma_{\bar{x}в} = \sqrt{\dfrac{\bar{\sigma}_в^2}{n} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{N}\right)}$.

Число всех вкладов N = 2000, объем выборки n = 100

$$\sigma_{\bar{x}\hat{a}} = \sqrt{\frac{12476}{100} \cdot \left(1 - \frac{100}{2000}\right)} \approx \sqrt{118{,}5520} \approx 10{,}8868.$$

Вероятности β = 0,9488 соответствует t = 1,95, так как Ф(1,95) = 0,9488.

Предельная ошибка $\Delta = t \cdot \sigma_{\bar{x}_{\hat{a}}} =$ 1,95 · 10,8868 = 21,2270.

Нижняя граница $\bar{x}_в - \Delta =$ 282 - 21,227 = 260,773,

верхняя граница $\bar{x}_в + \Delta =$ 282 + 21,227 = 303,227.

С вероятностью 0,9488 средняя сумма всех вкладов в сберегательном банке заключена в границах от 260,773 до 303,227 тыс. руб.

б) Вероятности P = 0,9 соответствует t = 1,64, так как Ф(1,64) = 0,9.

Число вкладчиков, которых надо обследовать для повторной выборки

$$n_x = \frac{t^2 \sigma_{\hat{a}}^2}{\Delta^2} = \frac{1{,}64^2 \cdot 12476}{21{,}227^2} \approx 74{,}912.$$

Для бесповторной выборки

$n'_x = \dfrac{n_x \cdot N}{n_x + N} = \dfrac{74{,}912 \cdot 2000}{74{,}912 + 2000} \approx 72{,}207.$ Округляем до большего целого 73.

Чтобы с вероятностью 0,9 гарантировать те же границы для средней суммы всех вкладов в сберегательном банке, что и в п. а) объем бесповторной выборки должен быть равным 73 вкладам.

в) Выборочная доля вкладчиков, у которых сумма вклада больше 250 тыс. руб., равна $\omega = \dfrac{35+20+7}{100} = 0{,}62.$

Средняя квадратическая ошибка доли для бесповторной выборки

$$\sigma'_{\omega} = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{0{,}62\cdot(1-0{,}62)}{100}\cdot\left(1-\frac{100}{2000}\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{0{,}002238} \approx 0{,}0473 \approx 0{,}047.$$

Предельная ошибка $\Delta = 0{,}1$. $t_{\beta} = \dfrac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}_в}} =$ 0,1 / 0,0473 = 2,11.

Находим требуемую вероятность Р = $\Phi(t_{\beta}) = \Phi(2{,}11) =$ = 0,9651.

Вероятность того, что доля всех вкладчиков, у которых сумма вклада больше 250 тыс. руб., отличается от доли таких вкладчиков в выборке не более чем на 0,1(по абсолютной величине), приближенно равна 0,9651.

2. Решение.

Проверяется гипотеза H_0: случайная величина X – сумма вклада – распределена по нормальному закону. Функция плотности вероятности и функция распределения имеют вид

$$\varphi_н(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad F_н(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где a, σ – параметры распределения.

В качестве оценок этих параметров возьмем выборочное среднее значение и дисперсию.

$$a \approx \bar{x} = 282; \ \sigma = \bar{\sigma}_{\hat{a}} = \sqrt{\bar{\sigma}^2_{\hat{a}}} = \sqrt{12476} \approx 111{,}696.$$

Тогда $\varphi_i(x) = \frac{1}{111{,}696\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-282)^2}{2\cdot 12476}}$ и $F_i(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\Phi\left(\frac{x-282}{111{,}696}\right)$.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

где m – *число интервалов;* n_i – *частота (эмпирическая);* n – *объем выборки;* p_i – теоретическая *вероятность попадания случайной величины в i-й интервал;* np_i – *теоретическая частота.*

Вероятность p_i попадания случайной величины X в интервал $(x_i\,;\,x_{i+1})$ найдем по формуле

$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) =$

$= 0{,}5(\Phi(-1{,}18) - \Phi(-2{,}08)) = 0{,}5(-0{,}7620 + 0{,}9625) = 0{,}1002$,

$p_1 = 0{,}5(\Phi(-0{,}29) - \Phi(-1{,}18)) = 0{,}5(-0{,}2282 + 0{,}7620) = 0{,}2669$,

$p_2 = 0{,}5(\Phi(0{,}61) - \Phi(-0{,}29)) = 0{,}5(0{,}4581 + 0{,}2282) = 0{,}3432$,

$p_3 = 0{,}5(\Phi(1{,}50) - \Phi(0{,}61)) = 0{,}5(0{,}8664 - 0{,}4581) = 0{,}2041$,

$p_4 = 0{,}5(\Phi(2{,}40) - \Phi(1{,}50)) = 0{,}5(0{,}9836 - 0{,}8664) = 0{,}0586$.

Для расчета составим вспомогательную таблицу.

$(x_i\,;\,x_{i+1})$	Эмпир. частоты n_i	p_i	Теор. частоты np_i	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
50 - 150	14	0,1002	10,020	1,5809
150 - 250	24	0,2669	26,690	0,2711
250 - 350	35	0,3432	34,320	0,0135
350 - 450	20	0,2041	20,410	0,0082
450 - 550	7	0,0586	5,860	0,2218
Суммы	100	0,9730	97,300	2,0955

$\chi^2_{набл} = 2{,}0955$.

Найдем по таблице критическое значение критерия $\chi^2_{кр} = \chi^2_{\alpha,к}$, k = m – s – 1 , m = 5 - число интервалов, s = 2 - число параметров распределения, α = 0,05 - уровень значимости, k = 5 – 2 – 1 = 2, критическое значение 5,99.

Сравниваем наблюдаемое значение критерия с критическим, 2,0955 < 5,99. Это означает, что наблюдаемое значение не попало в критическую область. Поэтому гипотеза о нормальном распределении размера кредита согласуется с данными выборки и должна быть принята.

Гистограмма – это совокупность прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $(x_i; x_{i+1}]$, а высота которых равна $\omega_i = \frac{n_i}{n \cdot k_i}$.

$k_i = x_{i+1} - x_i$ – длина частичного интервала, $k_i = 100$, $n \cdot k_i =$ $= 100 \cdot 100 = 10000$:

$$\omega_1 = \frac{14}{10000} = 0{,}0014, \quad \omega_2 = \frac{24}{10000} = 0{,}0024,$$

$$\omega_3 = \frac{35}{10000} = 0{,}0035, \quad \omega_4 = \frac{20}{10000} = 0{,}0020,$$

$$\omega_5 = \frac{7}{10000} = 0{,}0007.$$

Для построения графика нормальной кривой отметим точки $(x_i; p_i/k)$, где x_i – середина интервала, p_i – вероятность попадания в интервал.

Вершина при $x = a = 282$.

$$y_{\max} = \frac{0{,}3989}{\sigma} = \frac{0{,}3989}{111{,}696} = 0{,}0574.$$

$p_1 / k = 0{,}1002 / 100 = 0{,}0010$, $p_2 / k = 0{,}2669 / 100 = 0{,}0027$,
$p_3 / k = 0{,}3432 / 100 = 0{,}0034$, $p_4 / k = 0{,}2041 / 100 = 0{,}0020$,
$p_5 / k = 0{,}0586 / 100 = 0{,}0006$.

3. Решение.

По исходным данным составим корреляционную таблицу, где интервалы представлены своими серединами.

y_j / x_i	20	30	40	50	60	n_i
20	7	3				10
30	52	110	13	1		176
40	1	14	23	2		40
50		1	4	6	1	12
60				3	6	9
70					3	3
n_j	60	128	40	12	10	250

1) Найдем групповые средние по Y по формуле

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{t} y_j n_{ij}}{n_{x_i}}.$$

$x_1 = 20$ $\bar{y}_1 = \bar{y}_{x1=20} =$ (20 · 7 + 30 · 3) / 10 = 230 / 10 = 23,000,

$x_2 = 30$ $\bar{y}_2 = \bar{y}_{x2=30} =$(20 · 52 + 30 · 110 + 40 · 13 + 50 · 1) / 176 = 4910 / 176 = 27,898,

$x_3 = 40$ $\bar{y}_3 = \bar{y}_{x3=40} =$ (20 · 1 + 30 · 14 + 40 · 23 + 50 · 2) / 40 = = 1460 / 40 = 36,500,

$x_4 = 50$ $\bar{y}_4 = \bar{y}_{x4=50} =$(30 · 1 + 40 · 4 + 50 ·6 + 60 ·1) / 12 = = 550 / 12 = 45,833,

$x_5 = 60$ $\bar{y}_5 = \bar{y}_{x5=60} =$(50 · 3 + 60 · 6) / 9 = 510 / 9 = 56,667,

$x_6 = 70$ $\bar{y}_6 = \bar{y}_{x6=70} =$60 · 3 / 3 = 60,000.

Построим эмпирическую линию регрессии Y на X. Эти точки расположены вблизи прямой с уравнением $y = ax + b$, где a и b неизвестные параметры и их нужно определить.

Групповые средние по X найдем по формуле $\bar{x}_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{ij}}{n_j}$.

$y_1 = 20$ $\quad \bar{x}_1 = \bar{x}_{y1=20} = (20 \cdot 7 + 30 \cdot 52 + 40 \cdot 1) / 60 =$

$= 1740 / 60 = 29{,}000,$

$y_2 = 30$ $\quad \bar{x}_2 = \bar{x}_{y2=30} = (20 \cdot 3 + 30 \cdot 110 + 40 \cdot 14 + 50 \cdot 1) / 128$

$= 3970 / 128 = 31{,}016,$

$y_3 = 40$ $\quad \bar{x}_3 = \bar{x}_{y3=40} = (30 \cdot 13 + 40 \cdot 23 + 50 \cdot 4) / 40 =$

$= 1510 / 40 = 37{,}750,$

$y_4 = 50$ $\quad \bar{x}_4 = \bar{x}_{y4=50} = (30 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 50 \cdot 6 + 60 \cdot 3) / 12 =$

$= 590 / 12 = 49{,}167,$

$y_5 = 60$ $\quad \bar{x}_5 = \bar{x}_{y5=60} = (50 \cdot 1 + 60 \cdot 6 + 70 \cdot 3) / 10 =$

$= 620 / 10 = 62{,}000.$

Составим таблицу.

$\overline{x_j}$	29,000	31,016	7,750	49,167	62,000
y_j	20	30	40	50	60

По точкам ($\overline{x_j}$; y_j) построим эмпирическую линию регрессии X на Y. Эти точки расположены вблизи прямой с уравнением $x = cy + d$, где c и d неизвестные параметры и их нужно определить.

Для получения уравнений прямых регрессий вычислим выборочные средние

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i}}{n} \text{ и } \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{t} y_j n_{y_j}}{n},$$

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 10 + 30 \cdot 176 + 40 \cdot 40 + 50 \cdot 12 + 60 \cdot 9 + 70 \cdot 3}{250} = \frac{8430}{250} = 33{,}72,$$

$$\bar{y} = \frac{20 \cdot 60 + 30 \cdot 128 + 40 \cdot 40 + 50 \cdot 12 + 60 \cdot 10}{250} = \frac{7840}{250} = 31{,}36.$$

Выборочные дисперсии находим по формулам

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \text{ и } \sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2,$$

$$\sigma_y^2 = 1076{,}8 - 31{,}36^2 = 93{,}3504.$$

Вычислим средние квадратические отклонения

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{76{,}9616} \approx 8{,}7728,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{93{,}3504} \approx 9{,}6618.$$

Вычислим $\mu = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ по формуле

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

μ = (20 · 20 · 7 + 20 · 30 · 3 + 30 · 20 · 52 + 30 · 30 · 110 +
+ 30 · 40 · 13 + 30 · 50 · 1 + 40 · 20 · 1 + 40 · 30 · 14 + 40 · 40 · 23 +
+ 40 · 50 · 2 + 50 · 30 · 1 + 50 · 40 · 4 + 50 · 50 · 6 + 50 · 60 · 1 +
+ 60 · 50 · 3 + 60 · 60 · 6 + 70 · 60 · 3) / 250 – 33,72 · 31,36 =
= 281000 / 250 – 1057,4592 =1124 – 1057,4592 = 66,5408.

Вычислим коэффициенты регрессии по формулам

$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2} =$ 66,5408 : 76,9616 0,8646 0,865;

$$\rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma_y^2} = 66{,}5408 : 93{,}3504 \;\; 0{,}7128 \;\; 0{,}713.$$

а) Составим уравнение регрессии X на Y $\quad x - \bar{x} = \rho_{x/y}(y - \bar{y})$

x – 33,72 = 0,713(у – 31,36) или x = 0,713 у + 11,366.

Прямую проведем через точки (33,72; 31,36) и (11,366; 0,00).

Уравнение регрессии X на Y показывает средний возраст мужчины, вступившего в брак с женщиной возраста у.

Содержательный смысл коэффициента регрессии $\rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma_y^2} = 0{,}713$ состоит в том, что при увеличении возраста женщины, вступающей в брак, на 1 год возраст супруга увеличивается в среднем на 0,713 года.

Составим уравнение регрессии Y на X $\; y - \bar{y} = \rho_{y/x}(x - \bar{x})$

у – 31,36 = 0,865(x – 33,36) или у = 0,865 x + 2,206.

Прямую проведем через точки (33,72; 31,36) и (0,00; 2,206).

Уравнение регрессии Y на X показывает средний возраст женщины, вступившей в брак с мужчиной возраста x.

Содержательный смысл коэффициента регрессии $\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2} = 0{,}865$ состоит в том, что при увеличении возраста мужчины, вступающего в брак, на 1 год возраст супруги увеличивается в среднем на 0,865 года.

б) Коэффициент корреляции $r = \frac{\mu}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{66{,}5408}{8{,}7728 \cdot 9{,}66181} \approx$

$\approx 0{,}7850.$

Для проверки значимости коэффициента корреляции вычислим наблюдаемое значение

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\,; \quad t_{íàáë} = \frac{0{,}7850 \cdot \sqrt{250-2}}{\sqrt{1-0{,}7850^{\,2}}} \approx 19{,}958.$$

Критическое значение для уровня значимости α = 0,05 и числа степеней свободы k = n – 2 = 250 – 2 = 248 находим по таблице $t_{1-0,05;248} = t_{0,95;248} = 1{,}97$.

Получили $|t_{набл}| > t_{кр}$, так как 19,958 > 1,97.

Следовательно, коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

Коэффициент корреляции *r* = 0,7851 > 0 и попадает по абсолютной величине в интервал 0,7 – 0,99. Следовательно, между возрастом вступающих в брак мужчины (X) и женщины (Y) существует прямая сильная корреляционная связь. При увеличении (уменьшении) значения одной величины соответственно увеличивается (уменьшается) среднее значение другой.

в) Используем уравнение прямой регрессии X на Y x = = 0,713 y + 11,366.

При y = 30, x = 0,713, 30 + 11,366 = 32,756.

Средний возраст мужчин, имеющих супруг в возрасте 30 лет, равен 32,756 лет.

Вариант 2

1. Для изучения структуры банков по размеру кредита из 3000 банков страны по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 100. Распределение банков по сумме выданных кредитов представлено в таблице.

Размер кредита, млн. руб.	1 - 6,3	6,3 - 11,6	11,6 - 16,9	11,6 - 22,2	22,2 - 27,5
Число банков	20	11	36	17	16

Найти: а) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключен средний размер кредита всех банков; б) вероятность того, что доля всех банков, выдающих кредит менее, чем 16,9 млн. руб., отличается от доли таких банков в выборке не более чем на 5% (по абсолютной величине); в) объем выборки, при котором те же границы для среднего размера кредита всех банков (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя критерий χ^2 – Пирсона, при уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – размер кредита – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Имеются данные по 50 предприятиям одной из отраслей промышленности за год. Распределение этих предприятий по двум признакам – выпуску продукции X (млн. руб.) и численности работающих Y (чел.) – представлено в таблице.

y x	100 - 220	220 - 340	340 - 460	460 - 580	580 - 700	700 - 820	Итого:
40 - 50	1	2	3				6
50 - 60		1	5	1			7
60 - 70		1	1		8	2	12
70 - 80			4	9			13
80 - 90			2	2	5		9
90-100						3	3
Итого:	1	4	15	12	13	5	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние, построить эмпирические линии регрессии.

2) Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость: а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений; б) вычислить коэффициент корреляции на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y; в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний выпуск продукции предприятия, число работающих на котором равно 700 человек.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия теории вероятностей: испытание, событие, виды событий, примеры.
2. Классическое определение вероятности события.
3. Теорема сложения вероятностей совместных и несовместных событий.
4. Теорема умножения вероятностей зависимых и независимых событий. Условная вероятность.
5. Полная группа событий. Противоположные события.
6. Формула полной вероятности.
7. Повторение независимых испытаний. Формула Бернулли, формула Пуассона локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа. Наивероятнейшее число наступления события.
8. Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины.
9. Непрерывная случайная величина. Основные числовые характеристики непрерывной случайной величины.
10. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины.
11. Понятие о законе больших чисел.
12. Вариационный ряд. Виды вариационных рядов их графическое изображение.
13. Числовые характеристики вариационного ряда.
14. Генеральная и выборочная совокупности.
15. Выборка: виды, способы образования. Основная задача выборочного метода.
16. Понятие об интервальном оценивании. Доверительная вероятность, доверительный интервал.
17. Статистическая гипотеза, статистический критерий.

18. Уровень значимости и мощность критерия.

19. Построение теоретического закона распределения по опытным данным.

20. Понятие о критериях согласия.

21. Критерий Пирсона χ^2 и схема его применения.

22. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

23. Основные задачи теории корреляции.

24. Линейная регрессия. Уравнения регрессии.

25. Коэффициент корреляции: оценка тесноты и вида связи между признаками X и Y.

Задачи к экзамену

1. На квадрат [0,5]x[0,5] случайным образом бросается точка. Найти вероятность попадания ее в треугольник с вершинами (1,1), (1,2), (2,2).

2. Дано линейное уравнение $ax=b$. Если $a \in (0{,}8)$, $b \in (0{,}10)$ произвольно, то какова вероятность того, что корень данного уравнения будет больше единицы?

3. Сколькими способами можно поставить оценки четверым студентам на экзамене, если не ставить оценку «неудовлетворительно»?

4. Пусть $P(A \cdot B) = \frac{1}{4}$, $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Найти $P(A+B)$.

5. В комиссию избрали 9 человек. Сколькими способами из них можно выбрать секретаря и его заместителя?

6. Случайная величина задана таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,15	0,2	0,35	0,2

Найти интегральную функцию распределения.

7. Сколько различных перестановок в слове биссектриса?

8. На карточках написаны числа от 1 до 15. Наугад извлекаются 2 карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел на этих карточках равна 10?

9. Студент знает ответы на 15 экзаменационных билетов из 20. Какова вероятность сдать экзамен, если он заходит вторым?

10. Дана функция распределения случайной величины $F(x) = \frac{1}{\Pi}\text{arctgx} + \frac{1}{2}$. Найдите плотность.

11. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наугад. Определите вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

12. Дана плотность вероятности случайной величины:

$$P(x)=\begin{cases}0, & x\le 6;\\ \dfrac{x}{2}-3, & 6<x\le 8;\\ 0, & x>8.\end{cases}$$

Найдите M(X).

13. Вероятность сдачи зачета 0,6. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого 0,8. Какова вероятность сдать зачет и экзамен?

14. Случайная величина задана таблицей:

x_i	2	5	8	9
P_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти M[x], D[x], $\sigma(x)$. Дано линейное уравнение $ax = b$. Если $a\in(0{,}8)$, $b\in(0{,}10)$, то какова вероятность того, что корень данного уравнения будет больше единицы?

15. Найти закон распределения Z = X + Y, если X и Y независимые случайные величины.

X_i	5	6
P_i	0,6	0,4

Y_i	0	1
P_i	0,2	0,8

16. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,2. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 5 попаданий.

17. Известно, что M[x] = 7, D[x] = 1,2. Найти M[Y] и D[Y], если Y = 2x – 3.

18. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях игральной кости 5 выпадет от 10 до 20 раз включительно.

19. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для пяти из них вероятность попадания 0,6, для трех – 0,5, для остальных – 0,3. Кольцо попало на колышек. Какова вероятность, что оно брошено юношей из первой группы.

20. Ученик знает 25 билетов из 30. Перед ним взят только 1 билет. Какова вероятность сдать ему экзамен?

21. Имеются 2 урны. Первая содержит два белых и два черных шара, а вторая – один белый и два черных шара. Сначала выбирается урна, а потом – шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар?

Тематические тесты

Тест 1. Основные понятия теории вероятностей.

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. A и B – независимые события. Тогда справедливо следующее утверждение

а) они являются взаимоисключающими событиями

б) $P(A/B)=P(B)$;

в) $P(A\cup B)=P(A)P(B)$;

г) $P(A\cap B)=0$;

д) $P(B/A)=P(B)$.

2. $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$ – вероятности событий A, B, $A\bigcap B$ соответственно – приведены в таблице. Отметьте в первом столбце знаками плюс и минус те ситуации, которые могут иметь место, и те, которые не могут произойти, соответственно.

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A\bigcap B)$
а	0.1	0.3	0.2
б	0.5	0.5	0.5
в	0.8	0.9	0.5
г	0.5	0.6	0.6
д	0.9	0.8	0.8

3. Вероятности событий A и B равны $P(A)=0{,}67$, $P(B)=0{,}58$. Тогда наименьшая возможная вероятность события $A\bigcap B$ есть:

а) 1,25; б) 0,3886; в) 0,25; г) 0,8614;

д) нет правильного ответа.

Тест 2. Вероятности объединения и пересечения событий, условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса.

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Бросаем одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков не больше 6?

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $\frac{4}{9}$; д) нет правильного ответа.

2. Каждая буква слова «РЕМЕСЛО» написана на отдельной карточке, затем карточки перемешаны. Вынимаем три карточки наугад. Какова вероятность получить слово «ЛЕС»?

а) $\frac{2}{105}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{105}$; г) $\frac{11}{210}$;

д) нет правильного ответа.

3. Среди студентов второго курса 50% ни разу не пропускали занятия, 40% пропускали занятия не более 5 дней за семестр и 10% пропускали занятия 6 и более дней. Среди студентов, не пропускавших занятия, 40% получили высший балл, среди тех, кто пропустил не больше 5 дней – 30% и среди оставшихся – 10% получили высший балл. Студент получил на экзамене высший балл. Найти вероятность того, что он пропускал занятия более 6 дней.

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{2}{33}$; г) $\frac{1}{33}$; д) нет правильного ответа.

Тест 3. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики.

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения

X	-1	1	3
P(X)	0.3	0.4	0.3

Y	0	1
P(Y)	0.5	0.5

2. Случайная величина Z = X + Y. Найти вероятность $P\left(\left|Z-E(Z)\right|\le\sigma_Z\right)$.

а) 0.7; б) 0.84; в) 0.65; г) 0.78; д) нет правильного ответа.

3. X, Y, Z – независимые дискретные случайные величины. Величина X распределена по биномиальному закону с параметрами n = 20 и p = 0.1. Величина Y распределена по геометрическому закону с параметром p = 0.4. Величина Z распределена по закону Пуассона с параметром λ = 2. Найти дисперсию случайной величины U = 3X + 4Y - 2Z:

а) 16.4; б) 68.2; в) 97.3; г) 84.2; д) нет правильного ответа.

4. Двумерный случайный вектор (X,Y) задан законом распределения.

	X=1	X=2	X=3
Y=1	0.12	0.23	0.17
Y=2	0.15	0.2	0.13

Событие $A=\{X=2\}$, событие $B=\{X+Y=3\}$. Какова вероятность события A+B?

а) 0.62; б) 0.44; в) 0.72; г) 0.58;

д) нет правильного ответа.

Тест 4. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Независимые непрерывные случайные величины X и Y равномерно распределены на отрезках: X на $[1,6]$ Y на $[2,8]$.

Случайная величина Z = 3X +3Y +2. Найти D(Z)

а) 47.75; б) 45.75; в) 15.25; г) 17.25;

д) нет правильного ответа.

2. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.5x-0.5, & 1\le x\le 3\\ 1, x\ge 3\end{cases}$. Найти $P(X\in(0.5;2))$.

а) 0.5; б) 1; в) 0; г) 0.75; д) нет правильного ответа.

3. Непрерывная случайная величина X задана своей плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ C(x-1)^2, & 1\le x\le 2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$. Найти $P(X\in(1.5;\,2))$.

а) 0.125; б) 0.875; в)0.625; г) 0.5;

д) нет правильного ответа.

4. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $\mu=8$ и $\sigma=3$. Найти $P(X\in(5;7))$:

а) 0.212; б) 0.1295; в) 0.3413; г) 0.625;

д) нет правильного ответа.

Тест 5. Введение в математическую статистику.

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Предлагаются следующие оценки математического ожидания μ, построенные по результатам четырех измерений X_1, X_2, X_3, X_4:

А) $\mu=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{5}X_3+\frac{1}{6}X_4$;

Б) $\mu=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4;$

В) $\mu=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{6}X_4;$

Г) $\mu=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{6}X_4$

Д) $\mu=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{6}X_4.$

Из них несмещенными оценками являются:

2. Дисперсия каждого измерения в предыдущей задаче есть σ^2. Тогда наиболее эффективной из полученных в первой задаче несмещенных оценок будет оценка

3. На основании результатов независимых наблюдений случайной величины X, подчиняющейся закону Пуассона, построить методом моментов оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

X_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	3	4	5	5	3

а) 2.77; б) 2.90; в) 0.34; г) 0.682;

д) нет правильного ответа.

4. Полуширина 90% доверительного интервала, построенного для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины X для объема выборки n = 120, выборочного среднего $\overline{x}$ = 23 и известного значения σ = 5, есть

а) 0.89; б) 0.49 ; в) 0.75; г) 0.98;

д) нет правильного ответа.

Итоговый тест

1. Число способов, которым можно выбрать двух человек из трех равно …:

А.1

Б.2

В.3

Г.4

2. Число трехбуквенных слов из букв слова «ромб» равно …

А.2

Б.3

В.4

Г.5

3. Вероятность попадания при одном выстреле 0,9, тогда вероятность трех промахов при трех выстрелах равна …

А. 0,001

Б. 0,5

В. 0,01

Г. 0,005

4. Вероятность угадывания последней цифры телефонного номера ровно с двух раз равна …

А. 0,2

Б. 0,1

В. 0,3

Г. 0,5

5. Число различных очередей из трех человек равно …

А. 3

Б. 4

В. 6

Г. 8

6. Элементарное событие – это …
А. эксперимент
Б. число
В. исход эксперимента
Г. вывод
7. Событие – это …
А. утверждение
Б. подмножество
В. пространство элементарных событий
Г. доказательство
8. Вероятность – это …
А. функция на пространстве элементарных событий
Б. утверждение
В. множество
Г. эксперимент
9. $P(A+B)=\ldots$
А. $P(A)+P(B)-P(AB)$
Б. $P(A)-P(B)$
В. $P(AB)+P(A)$
Г.$P(AB)+P(B)$
10. Случайная величина – это …
А. доказанное утверждение
Б. измеримая функция
В. очевидное свойство
Г. положительное число

Ключи к тестам
(для проверяющего)

1. В
2. В
3. А
4. Б
5. В
6. В
7. Б
8. А
9. А
10. Б

Задания для самостоятельного выполнения

ЗАДАНИЕ 1. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Брошена стандартная игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет а) два; б)меньше пяти.

2. В ящике находится 90 красных и 15 черных шаров. Наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что он а) красный, б) белый, в) черный.

3. Брошена стандартная игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет а) три; б) меньше трех.

4. Случайным образом выбирается число из множества $\{12,20,32,41,53,64,72,86\}$. Какова вероятность, что а) оно четно; б) четное и делится на 2.

5. Студент знает 20 вопросов из 30. Какова вероятность того, что предложенный вопрос студент а) знает б) не знает.

6. Из колоды в 36 карт случайным образом достается одна. Какова вероятность того, что а) эта туз; б) дама черви или король черви.

7. Из слова "вероятность" наугад выбирается одна буква. Какова вероятность, что это будет а) буква "В"; б) согласная буква.

8. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет, попадает выигрыш 500 руб., на 10 билетов по 50 руб. и на 60 билетов по 10 руб. Некто покупает 1 билет. Какова вероятность, что он выиграет а) 50 рублей; б) не менее 50 рублей.

9. В магазин поступило 150 цветных телевизоров, среди которых 50 фирмы Самсунг. Некто случайным образом покупает телевизор. Какова вероятность, что он от фирмы Самсунг.

10. Набирая номер телефона, забыли последнюю цифру. Какова вероятность того, что набирая ее случайным образом, правильно наберем номер. Как изменится эта вероятность, если дополнительно известно, что это четная цифра.

ЗАДАНИЕ 2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Для определения доли бракованных изделий были взяты случайным образом 200 изделий. При проверке оказалось, что среди них 5 бракованных. Какова вероятность, что произведенная деталь является а) бракованной б) стандартной.

2. Обследование показало, что из 1000 зашедших в магазин потенциальных покупателей, действительно приобрело товар 190. Какова вероятность того, что зашедший в магазин человек а) приобретет товар б) не приобретет товар.

3. Стрелок произвел 100 выстрелов по мишени, причем поразил мишень 57 раз. Какова вероятность, что стрелок поразит мишень.

4. Из 500 телевизоров 490 проработало без поломок 10 000 часов и более. Какова вероятность, что произведенный по данной технологии телевизор проработает не менее 10 000 часов без поломок.

5. За последние 100 дней курс доллара повышался 25 раз. Какова вероятность, что на следующих торгах курс доллара повысится.

6. Статистика показала, что из последних 1000 новорожденных 560-мальчики. Какова вероятность того, что следующий новорожденный будет мальчик.

7. Из 1000 случайно отобранных семей у 350 доходы были выше 1000 у.е. Какова вероятность, что отдельная семья имеет доход выше 1000 у.е.

8. При аттестации 100 сотрудников неаттестованными оказались 8. Какова вероятность пройти аттестацию у данной категории сотрудников.

9. Относительная частота появления бракованных изделий на автоматической срочной линии составляет 0,02. Сколько проверялось изделий, если известно, что бракованных было 8?

10. Из 1000 проверенных изделий оказалось, что 130 из них – "подделки". Какова вероятность, что приобретенный товар является "подделкой"?

ЗАДАНИЕ 3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

1. Технологический процесс контролируется тремя независимо работающими приборами, вероятности отказа которых 0,1;0,1;0,2 соответственно. Определите вероятность выхода из строя хотя бы одного прибора.

2. Вероятность того, что на торговую площадку в течении минуты придет одно сообщению равна 0,3, то, что два равна 0,15, то, что три сообщения - 0,05. Какова вероятность того, что в течении следующей минуты придет от одного до трех сообщений включительно.

3. Вероятность того, что индекс N ценной бумаги A возрастет равна 0,4, а для ценной бумаги B эта вероятность равна 0,3. Вероятность того, что индекс N возрастет одновременно для обоих ценных бумаг равна 0,15. Какова вероятность того, что а) индекс N возрастет хотя бы для одной ценной бумаги; б) индекс N не возрастет ни у одной ценной бумаги.

4. Вероятность того, что студент изучает английский равна 0,8, а немецкий 0,3. Вероятность того, что студент изучает оба языка равна 0,2. Найти вероятность того, что случайно взятый студент а) изучает хотя бы один язык; б) не изучает ни одного.

5. Вероятность того, что станок A выйдет из строя в течении смены равна 0,1, а для станка B-0,05. Вероятность того, что оба станка выйдут из строя в течении смены – 0,01. Найти вероятность того, что в течении смены а) выйдет из строя хотя бы один станок; б) не выйдут из строя оба станка.

6. Рабочий обслуживает три станка, вероятности отказа станков в течении смены $p1 = 0,4$; $p2 = 0,25$; $p3 = 0,15$ соответственно. Найти вероятность того, что в течении смены откажут ровно два станка.

7. В условиях предыдущей задачи положить $p1 = 0,45$; $p2 = 0,1$, $p3 = 0,35$.

8. Для сигнализации об аварии установлено два независимо работающих датчика, вероятности отказа которых $p1 = 0,2$ и $p2 = 0,1$. Найти вероятность того, что при отказе сработает ровно один датчик.

9. В урне находится $n = 10$ красных и $m = 20$ белых шара. Из урны без возвращения вынимают три шара. Какова вероятность того, что среди них два белых. При решении использовать теоремы сложения и умножения.

10. В условиях предыдущей задачи положить $n = 20$, $m = 40$.

ЗАДАНИЕ 4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БЕЙЕСА

1. В магазин поступили телевизоры с двух заводов в соотношении 30% с завода №1 и 70% с завода №2. Продукция завода №1 содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, а завода №2-10%. Найти вероятность того, что купленный телевизор содержит скрытый дефект.

2. Пусть мы находимся в условиях предыдущей задачи. Известно, что купленный телевизор оказался со скрытым дефектом. Требуется найти вероятность того, что он произведен на заводе №2.

3. В урне 1 содержится 3 белых и 3 черных шара, а в урне №2 содержится 5 белых и 1 черный шар. Из случайно

выбранной урны достается один шар. Какова вероятность того, что это белый шар?

4. В условиях предыдущей задачи, стало известно, что вынутый шар оказался белый. Какова вероятность того, что случайно выбрана была урна №2.

5. Известно, что 5% всех мужчин и 3% всех женщин – дальтоники. В группе из 100 человек 60 мужчин и 40 женщин. Найти вероятность того, что случайно выбранный человек – дальтоник.

6. Пусть мы находимся в условиях предыдущей задачи и предположим, что выбранный человек – дальтоник. Какова вероятность, что это женщина.

7. Вероятность того, что "хороший" эксперт оценит неправильно ценную бумагу равна 0,05, эта вероятность для "среднего" эксперта 0,15. В конторе работает 5 "хороших" и 3 "средних" эксперта. Для оценки ценной бумаги случайным образом выбран эксперт. Найти вероятность того, что ценная бумага будет оценена неправильно.

8. Пусть мы находимся в условиях предыдущей задачи. И пусть известно, что ценная бумага оценена неправильно. Какова вероятность того, что ошибку допустил "хороший" эксперт.

9. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает 5% брака, второй – 4%. Для контроля отобрано 20 деталей с первого цеха и 10 деталей со второго. Эти детали смешаны в одну партию, и из нее на удачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

10. В условиях предыдущей задачи стало известно, что деталь оказалась бракованная. Какова вероятность того, что она из цеха №1.

ЗАДАНИЕ 5. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Случайная величина X – число родившихся мальчиков среди 1000 новорожденных. Найти числовые характеристики X и вероятности а P (=520).

2. По предварительным опросам известно, что 40% опрошенных готовы проголосовать на выборах мэра города за №. Найти вероятность того, что из 50000 жителей, имеющих право проголосовать, за № отдадут голоса а) ровно 20000 человек; б) от 15000 до 25000 человек.

3. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,1. Найти вероятность, что среди 500 деталей окажется бракованными а) ровно 50; б) от 40 до 60.

4. Вероятность нарушения герметичности банки консервов 0,001. Найти вероятность того, что среди 20000 банок с нарушениями окажутся а) ровно 20; б) от 15 до 25.

5. Всхожесть семян данного растения составляет 80%. Найти вероятность того, что среди 200 посаженных семян взойдет а) ровно 160; б) от 140 до 180.

6. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет повреждена равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит поврежденными: а) ровно 3 бутылки; б) более 5 бутылок.

7. Книга издается тиражом 10000 экземпляров. Технология изготовления предполагает, что вероятность того, что в книге будет иметься дефект брошюровки равна 0,0003. Найти среднее число книг с дефектом брошюровки. Найти вероятность того, что число книг с дефектом брошюровки будет: а) хотя бы одна; б) более 4.

8. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течении часа равна 0,005. Найти числовые характеристики X – числа элементов отказавших в течении часа. Найти вероятность того, что в течении часа откажет а) хотя бы один элемент; б) от 4 до 6 элементов.

ЗАДАНИЕ 6. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРАВИЛО 3-Х СИГМ

1. Автомат штампует детали. Контролируемый размер является случайной величиной X, имеющей нормальное распределение с параметром а = 50, σ = 0,02. Выписать функцию распределения и плотность распределения с.в. X. Деталь считается годной, если ее размеры попадают в интервал от 49,96 до 50,04. Найдите процент бракованных деталей.

2. Жирность молока коров в область (в %) есть нормально распределенная с.в. с математическим ожиданием равным 4% и среднеквадратическим отклонением 0,03. Вычислить вероятность того, что в наудачу взятой пробе жирность молока будет: а) более 4%, б) менее 4%, в) от 3,95 до 4,05%. Выписать плотность распределения данной с.в.

3. Продолжительность работы прибора есть нормально распределенная с.в. с параметрами а = 1000 ч. и 2 = 900 ч. Найти вероятность того, что продолжительность горения лампы составляет: а) более 1000 ч, б) менее 1000 ч, в) от 940 ч. до 1060 ч. Выписать плотность распределения данной с.в. и изобразить решение п. в) на графике плотности.

4. Рост людей призывного возраста предполагается нормально распределенным со средним 170 см. и средним квадратическим отклонением 7 см. Определить процент лиц,

имеющих рост а) более 170 см, б) менее 170 см, в) от 170 до 180 см. Решение п. в) изобразить схематично на графике плотности распределения.

5. Изменение индекса ценной бумаги на фондовой бирже может быть смоделировано как нормально распределенная случайная величина с параметрами $a = 1$ и $2 = 0{,}01$. Найти вероятность того, что на следующих торгах индекс ценной бумаги будет а) более 1, б) менее 1, в) от 0,98 до 1,02. Выписать функцию распределения и плотность распределения данной с.в.

6. Средний процент выполнения плана предприятиями отрасли составляет 103%, среднее квадратическое отклонение 2%. Предполагая, что выполнение плана предприятиями подчиняется нормальному закону, определить процент предприятий, выполняющих план: а) более 103%, б) менее 103%, в) от 99%, до 107%. Решение п. в) схематично изобразить на графике плотности распределения.

7. Диаметр деталей, изготовленных цехом, является с.в., имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием равным $a = 5$ см. и дисперсией 0,0004. В каких границах можно практически гарантировать диаметр деталей. Если данная с.в. выйдет за эти границы, то объясните ситуацию. Подсчитайте процент деталей, заключенных в пределах от 4,96 до 5,04.

8. На автомате изготовляют заклепки. Диаметр заклепок можно считать нормально распределенной с.в. со средним 3 мм и среднем квадратическим отклонением 0,1. Какие размеры диаметра головок заклепки можно гарантировать с вероятностью: а) 0,95; б) 0,9973.

9. Контролируемый размер детали представляет собой нормально распределенную с.в. с параметрами $MX = 150$ мм

(X) = 2 мм. а) Найти вероятность брака, если допустимые размеры должны быть 150±3 мм. б) Какую точность контролируемого размера можно гарантировать с вероятностью 0,97. в) За какие границы практически не выйдет контролируемый размер детали. Если он выйдет за эти границы, то постарайтесь объяснить ситуацию.

10. Вес отдельной коробки конфет представляет собой нормально распределенную с.в. со средним 500 гр. и средним квадратическим отклонением 10 гр. а) Найти процент коробок, вес которых более 500 гр. б) Найти процент коробок, вес которых заключен в пределах 500±15 гр.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ЗАДАНИЕ 7. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ ПО НЕСГРУППИРОВАННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

1-10. В следующих задачах дана выборка. Требуется:

а) Построить статистический ряд распределения частот и полигон частот;

б) Вариационный ряд;

в) Найти "хорошие" оценки математического ожидания и дисперсии;

г) Найти выборочные моду, медиану, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии.

1. 0,1,1,3,1,2,2,0,1,0.
2. 1,5,1,2,1,3,2,3,1,2.
3. 10,8,10,11,9,10,8,9,10,10.
4. 50,45,45,55,45,50,40,45,50,45.
5. 20,22,20,24,20,22,20,20,25,22.
6. -1,1,0,1,1,2,-1,1,2,1.
7. 9,5,5,7,5,7,3,5,9,7.

8. 15,12,8,15,10,15,8,12,15,12.
9. 10,20,20,5,15,20,5,10,20,5.
10. 0,-1,2,-2,0,0,-1,2,-1,-2.

ЗАДАНИЕ 8. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

1. 25 рабочих контролировались в течении месяца по признаку – процент выполнения норм выработки за месяц. По выборочным данным были рассчитаны = 102,3% – средний процент выработки и дисперсия S2 = 16. Найти 95% доверительный интервал для генеральной средней, если известно, что признак имеет нормальное распределение.

2. Используя данные задачи 1, определите, каким должен быть минимальный размер выборки для того, чтобы оценить среднюю месячную норму выработки с 95% надежностью и с максимальной ошибкой (точностью) не более 0,5(%).

3. Из большой партии электроламп случайным образом взята выборка из 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы, оцененная по выборке оказалась равной 1200 ч. Из предыдущих проверок известно, что данный признак имеет нормальное распределение с дисперсией S2 = 2500. Найти 97% доверительный интервал для генеральной средней.

4. Используя данные задачи 3, определите, каким должен быть минимальный размер выборки для того, чтобы оценить среднюю продолжительность горения лампы с 99% надежностью и с точностью не более 100 (ч).

5. Произведено 15 замеров контролируемого признака детали, изготовляемой станком-автоматом. По выборочным данным найдено S2 = 20 мкм. Найти точность работы станка с надежностью 0,95. Предполагается, что контролируемый признак имеет нормальное распределение.

6. По предварительному опросу населения большого города, в котором участвовало 900 жителей, за мероприятие X, готовы

проголосовать 400 человек из опрошенных жителей. Найти 90% доверительный интервал, в котором находится истинный процент готовых проголосовать за мероприятие X.

7. Используя данные задачи 6, определите, каким должен быть минимальный размер выборки для того, чтобы оценить истинный процент "за" с 95% надежностью и с точностью не более 2%.

8. Недельные доходы фирмы подчинены нормальному закону распределения. По 25-еженедельным наблюдениям за доходами фирмы найдено S2 = 1200. Найдите 95% доверительный интервал для среднего квадратического отклонения недельных доходов.

9. Средний привес 16 поросят, которым давали в пищу добавку А, составил 30 кг, а S2 = 1,5. Считая, что данный признак имеет нормальное распределение, найдите 90% доверительный интервал для генеральной средней.

10. Среди 400 деталей, изготовленных станком-автоматом, 20 оказалось нестандартных. Найдите доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,98 неизвестную вероятность "брака".

ЗАДАНИЕ 9. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ. F, T – КРИТЕРИИ

1-5. Для сравнения организации работы на двух однотипных предприятиях, были взяты выборочные данные объемами n1 и n2 соответственно по признаку – объемы выпущенной продукции в у.е. Оценки дисперсии и даны ниже. Можно ли считать, что предприятия работают одинаково точно. Уровень значимости выбрать самостоятельно.

1. n1=10, n2=15;
2. n1=16, n2=9;
3. n1=12, n2=17;
4. n1=8, n2=17;
5. n1=11, n2=9.

6-10. Для сравнения производительности работы двух однотипных отделов торговли, были взяты две соответствующие выборки объемами n1 и n2 соответственно, по которым подсчитаны выборочные характеристики: Проверьте гипотезу о том, что производительность отделов одинакова. Уровень значимости выбрать самостоятельно.

6. n1=15, n2=20;

7. n1=20, n2=16;

8. n1=12, n2=8;

9. n1=9, n2=14;

10. n1=8, n2=20.

IV. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 1. Из колоды в 36 карт, достается одна. Найти вероятность того, что она "красная".

Решение: Обозначим A={наудачу вынутая карта-"красная"}; m=18 – число исходов благоприятствующих A, т.к. в колоде из 36 карт, 18 "красных" карт; n=36 – общее число исходов. Тогда по классическому определению вероятности

Пример 2. Стрелок произвел 100 выстрелов по мишени, причем поразил мишень в 45 случаях. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень.

Решение: Подсчитаем относительною частоту события A={стрелок поразит мишень при одном выстреле}.

Таким образом искомая вероятность P(A) = 0,45.

Пример 3. Вероятность того, что событие A произойдет в опыте равна 0,75; вероятность того, что событие B произойдет в опыте- 0,4. Вероятность того, что оба события произойдут в опыте равна 0,25. Найти вероятность того, что хотя бы одно событие произойдет в опыте.

Решение: Обозначим A={событие A произошло в опыте}, B={событие B произошло в опыте}.

Тогда $A \times B$={события A и B произошли в опыте одновременно}.

$P(A) = 0,75$; $P(B) = 0,4$; $P(A \times B) = 0,25$.

Используя теорему о сумме двух совместных событий получим

$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A \times B) = 0,75+0,4-0,25 = 0,9$.

Пример 4. Деталь проходит три операции обработки. Вероятность появления брака во время первой операции равна 0,02, второй – 0,01, третьей – 0,03. Найти вероятность: а) выхода стандартной детали, считая появление брака во время отдельных операций независимыми событиями.

Решение: а) введем события A={на выходе появилась стандартная деталь}, Ai={i-я операция обработки прошла без брака}, $i = 1,2,3$. Тогда $A = A1 \times A2 \times A3$. По условию задачи $P(A1) = 0,98$; $P(A2) = 0,99$; $P(A3) = 0,97$. Используя теорему умножения для независимых событий, получаем

$P(A)=P(A1 \times A2 \times A3)=P(A1) \times P(A2) \times P(A3)=0,98 \times 0,99 \times 0,97=0,941$.

Пример 5. Партия деталей содержит 70% деталей первого завода и 30% деталей второго завода. Вероятность того, что деталь с первого завода проработает без отказа более 1000 часов (надежность) равна 0,95, а для деталей со второго завода эта вероятность равна 0,9.

Найти вероятность того, что случайно взятая из партии деталь проработает без отказа более 1000 часов.

Решение: Введем события A={деталь проработает без отказа более 1000 часов}. Hi = {взятая деталь с завода i}, i = 1,2 по условию задачи P(H1) = 0,7; P(H2) = 0,3; P(A/H1) = = 0,95; P(A/H2) = 0,9.

По формуле полной вероятности

$P(A) = P(H1) \times P(A/H1) + P(H2) \times$

$\times P(A/H2) = 0{,}7 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}935$.

Таким образом, партия деталей (большое количество) будет содержать где-то 93,5% деталей с заданной надежностью.

Пример 6. Вероятность того, что в данный день торговая база уложится в норму расходов на транспорт, равна 0,8. Какова вероятность того, что за три рабочих дня база уложится в норму 2 раза. Найти числовые характеристики с.в. X – число дней, когда база укладывается в норму транспортных расходов в течение трех рассматриваемых дней.

Решение: Можно считать, что мы находимся в схеме Бернулли, а следовательно с.в. X имеет биномиальное распределение. По условию задачи $n = 3$, $p = 0{,}8$.

Тогда Основные числовые характеристики с.в. X равны: а) математическое ожидание $MX = n \times p = 3 \times 0{,}8 = 2{,}4$; б) дисперсия $DX = n \times p \times q = 3 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}48$; $q = 1-p = 0{,}2$.

Список рекомендуемой литература

1. Бондаренко, П.С. Теория вероятностей и математическая статистика (для бакалавров) / П.С. Бондаренко, Г.В. Горелова, И.А. Кацко. – М.: КноРус, 2018. – 384 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2018. – 480 с.
3. Далингер, В.А.Теория вероятностей и математическая статистика с применением mathcad: учебник и практикум для СПО / В.А. Далингер, С.Д. Симонженков, Б.С. Галюкшов. – М.: Юрайт, 2018. –146 с.
4. Дмитриев, Е.А. Математическая статистика в почвоведении / Е.А. Дмитриев. – М.: КД Либроком, 2019. – 334 с.
5. Долгова,В.Н. Статистика: учебник и практикум для СПО. В.Н. Долгова, Т.Ю. Медведева. – М.: Юрайт, 2019. – 246 с.
6. Кремер, Н. Ш. Математическая статистика: учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер. – М.: Издательство Юрайт, 2023. – 259 с.
7. Мятлев, В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: учебное пособие / В.Д. Мятлев. – М.: Академия, 2018. – 240 с.
8. Сидняев, Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для СПО / Н.И. Сидняев. – М.: Юрайт, 2019. – 220 с.
9. Спирина, М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М.С. Спирина. – М.: Academia, 2019. – 144 с.
10. Хуснутдинов, Р.Ш. Математическая статистика: учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. – М.: Инфра-М, 2018. – 384 с.

Учебное издание

Волынская Мария Геннадьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 25.12.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,25.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.