МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Электронный учебно-методический комплекс
по дисциплине в LMS Moodle
(по специальности 090303.65)

САМАРА
2012

УДК 517.2

Автор-составитель: **Коломиец Эдуард Иванович**

Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине в LMS Moodle / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.- сост. Э.И. Коломиец. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:

1. Курс лекций.
2. Учебное пособие.
3. Методические указания для практических занятий.
4. Варианты контрольных работ.
5. Вопросы к коллоквиумам и примеры заданий.
6. Вопросы к экзамену и примеры заданий.
7. АПИМ.

УМКД «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначен для студентов факультета информатики, обучающихся по специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем» в 3 и 4 семестрах.

УМКД разработан на кафедре технической кибернетики.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Коломиец Э.И.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по специальности
090303.65 «Информационная безопасность
автоматизированных систем»

Самара 2012

УДК 517.2(075)
ББК 22.171

Автор: КОЛОМИЕЦ Эдуард Иванович

Учебное пособие содержит полный конспект лекций по разделу «Теория вероятностей» курса «Теория вероятностей и математическая статистика», изучаемого студентами специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем». В состав учебного пособия входят разделы: «Элементарная теория вероятностей», «Случайные величины», «Случайные векторы», «Функции от случайных величин и векторов», «Предельные теоремы теории вероятностей». Рассматривается множество примеров решения типовых задач, рассматриваются также задачи исследовательского характера, приводятся задания для самостоятельной работы. Учебное пособие предназначено для получения студентами практических навыков при вероятностном анализе случайных явлений и для совершенствования форм самостоятельной работы.

Учебное пособие может быть использовано также при изучении студентами курса «Теория вероятностей и математическая статистика» направлений 010300.62 «Фундаментальные информатика и информационные технологии», 010400.62 «Прикладная математика и информатика», 010900.62 «Прикладные математика и физика» и 230100.62 «Информатика и вычислительная техника».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с задачами, поставленными азартными играми и не укладывающимися в рамки математики того времени (Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Я. Бернулли).

К дальнейшему развитию теории вероятностей привели требования естествознания и общественной практики: теория ошибок наблюдений, задачи теории стрельбы, проблемы статистики (Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон – аналитические методы; Чебышев, Марков, Ляпунов – русская школа XIX века).

Современное развитие теории вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней, расширением круга ее приложений (Бернштейн, Колмогоров, Хинчин, Слуцкий, Гнеденко).

Особенности данного курса: большой объем и разнообразие материала, практическая направленность и обилие задач, существенная потребность в самостоятельной работе.

Связь теории вероятностей с предшествующими дисциплинами

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» опирается на материал, излагаемый в курсах «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дискретная математика», и «Теория функций комплексной переменной» и поэтому предполагается, что по этим курсам студенты имеют достаточно хороший уровень знаний.

Связь с последующими дисциплинами

Знания и навыки, полученные студентами при изучении курса «Теория вероятностей и математическая статистика», далее используются при изучении дисциплин: «Теория случайных процессов», «Теория информации», «Планирование эксперимента и статистический анализ», «Теория цифровой обработки сигналов», «Методы распознавания образов», а также при выполнении выпускных квалификационных работ специалиста, бакалавра и магистра.

Учебно-методическое обеспечение

Основная литература

1. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987 г. и др. издания (гриф Минобразования России).
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986 г. и др. издания (гриф Минобразования России).
3. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 2004 г. и др. издания (гриф Минобразования России)
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Физматлит, 2006 г. (гриф Минобразования России).
5. Теория вероятностей. Под ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П. Учебник для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001 г. (гриф Минобразования России).

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2002 г. и стереотипные издания 1991, 1985 г.г. (гриф Минобразования России).
7. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 2004 г. и др. издания (гриф Минобразования России).
8. Коломиец Э.И., Дегтярев А.А. Сборник задач по теории вероятностей. Учебное пособие. Изд-во СГАУ, 2006 (гриф УМС по прикладной математике и информатике).

Дополнительная литература

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 2002 г. (и др. издания).
4. Мынбаева Г.У., Дмитриев И.Г., Борисов В.З., Савин А.С. Теория вероятностей в примерах и задачах. М.: Вузовская книга, 2005 (гриф НМС по математике и механике).
5. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. М.: Высшее образование, 2005 (МАИ).
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. Свешникова А.А. М.: Наука, 1970 г. (и др. издания).

Глава 1. Элементарная теория вероятностей

1.1. Предмет теории вероятностей. Случайный эксперимент

До возникновения теории вероятностей объектом исследования науки были, так называемые, детерминированные эксперименты, в которых условия проведения эксперимента однозначно определяют его исход. Однако для широкого круга явлений, наблюдается неоднозначность исхода при сохранении условий эксперимента.

Эксперимент, результат которого варьируется при его повторении, называется экспериментом со случайным исходом или случайным экспериментом. Всякий факт, который может произойти в результате случайного эксперимента и его появление не может быть наперед предсказано, называется случайным явлением или случайным событием.

Приведем примеры случайных экспериментов.

1. Эксперимент состоит в подбрасывании монеты закруткой. Наблюдается грань, выпавшая к верху. Всего у эксперимента два исхода: Г (герб), Р (решка). Ни один из исходов не может быть наперед предсказан. Эксперимент случайный.

2. Эксперимент состоит в подбрасывании игральной кости. Наблюдается грань, выпавшая к верху. Эксперимент случайный. Всего исходов шесть: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Монета подбрасывается закруткой 2 раза (или, что эквивалентно, две монеты один раз). Наблюдается выпавшая к верху грань. Эксперимент случайный. Его исходы можно записать следующим образом: (ГГ), (ГР), (РГ), (РР). Всего исходов четыре.

4. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб. Исходами данного случайного эксперимента являются: Г, (РГ), (РРГ),…, (РР…РГ),…. Число исходов эксперимента бесконечно, но счетно.

5. Эксперимент состоит в стрельбе по плоской мишени. Результат – попадание в некоторую точку плоскости с декартовыми координатами (x, y). Так как заранее координаты (x, y) предсказать невозможно, то эксперимент случайный. Число исходов эксперимента бесконечно и несчетно.

Приведенные примеры показывают, что разнообразие случайных экспериментов достаточно велико и также разнообразна структура их исходов.

Теория вероятностей – наука, изучающая закономерности случайных явлений. При этом между закономерностью и случайностью не возникает противоречия, поскольку теория вероятностей занимается изучением не любых случайных явлений, а только тех из них, которые обладают следующими свойствами:

1. Случайные явления в принципе могут быть наблюдаемы неограниченное число раз, притом в неизменных условиях.

2. Случайные явления должны обладать свойством статистической устойчивости или, иначе, устойчивостью частот.

Подробнее свойство 2 означает следующее. Предположим, что производится последовательность случайных экспериментов, в каждом из которых возможно появление некоторого события A. Эксперименты проводятся в одинаковых условиях и результаты одних экспериментов не влияют на результаты других (в этом случае говорят, что эксперименты независимы). Пусть m_A - число появлений события A в некоторой серии из n экспериментов. Тогда относительная частота $\frac{m_A}{n}$ при больших n для статистически устойчивого события A близка к некоторой константе $\mathrm{P}(A)$ и лишь незначительно изменяется от одной серии из n экспериментов к другой. Число $\mathrm{P}(A)$ служит объективной характеристикой степени возможности событию A произойти. (Проверка свойства статистической устойчивости представляет собой довольно сложную задачу и мы сможем решить ее только в следующем семестре при изучении теоремы Бернулли).

Свойства 1 и 2 называются свойствами массовости. Закономерности, устанавливаемые в теории вероятностей для случайных событий, удовлетворяемых свойствам массовости, тем строже и точнее, чем обширнее массив изучаемых событий. При очень большом числе таких событий случайность и непредсказуемость практически исчезают.

Одно же отдельное случайное событие остается в своём результате неопределенным и непредсказуемым и не является предметом изучения теории вероятностей. Так, событие A={Студент сдаст экзамен по теории вероятностей на ближайшей сессии} не является случайным с точки зрения теории вероятностей, так как отсутствует возможность его повторения неограниченное число раз и притом в неизменных условиях.

1.2. Пространство элементарных событий. Случайные события

Формализуем теперь понятие случайного события, как основополагающего понятия теории вероятностей.

Определение. Множество Ω всех возможных взаимоисключающих исходов случайного эксперимента называется пространством элементарных событий. Элементы множества Ω называются элементарными событиями (исходами) и обозначаются ω, $\omega \in \Omega$.

Из определения следует, что при проведении эксперимента обязательно наступает одно из элементарных событий $\omega \in \Omega$. и никакие два элементарных события ω_1 и ω_2, отличные друг от друга, не могут наступить одновременно.

Определение. Подмножества пространства элементарных событий Ω, называются случайными событиями, или просто событиями.

Обозначаются случайные события прописными буквами латинского алфавита A, B, C,….

Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A.

Замечание. Вообще говоря, можно назвать событиями не обязательно все подмножества Ω, а лишь множества из некоторого набора подмножеств Ω, считаемых доступными наблюдению (возможными) в данном эксперименте. О смысле такого ограничения мы поговорим позже при рассмотрении аксиоматического определения вероятности. На первоначальном же этапе о подобных тонкостях можно не задумываться и считать событиями любые подмножества Ω.

Вернемся к рассмотренным в предыдущем разделе примерам с учетом введенных определений.

1. $\Omega = \{\omega_1 = \tilde{A}, \omega_2 = Đ\}$, $|\Omega| = 2$, где $|\Omega|$ - мощность множества.

2. $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\} = \{\omega_i = i,\ i = \overline{1,6}\}$; $|\Omega| = 6$.

Событие A = {Выпало четное число очков} = {2, 4, 6}.

3. $\Omega = \{\omega_1 = \tilde{A}\tilde{A},\ \omega_2 = Đ\tilde{A},\ \omega_3 = \tilde{A}Đ,\ \omega_4 = ĐĐ\}$, $|\Omega| = 4$.

Событие A = {Выпадение герба} = $\{\tilde{A}Đ, Đ\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{A}\}$.

4. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\} = \{\tilde{A}, Đ\tilde{A}, ĐĐ\tilde{A}, Đ\cdots Đ\tilde{A}, ...\}$

Событие A = {Эксперимент закончится не позднее, чем при третьем подбрасывании} = $\{\tilde{A}, Đ\tilde{A}, ĐĐ\tilde{A}\}$.

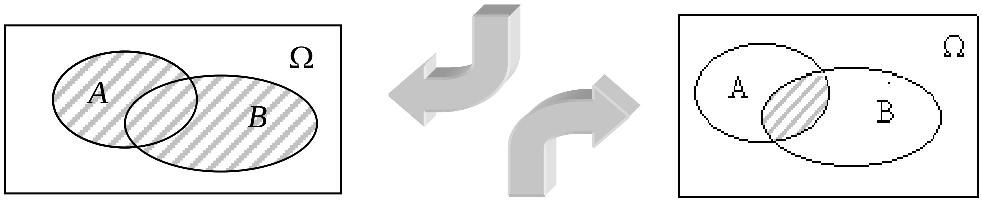
5. $\Omega = \{\omega = (x, y),\ -\infty < x, y < +\infty\}$

Событие $A = \{\omega = (x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ = {Попадание в круг единичного радиуса}.

1.3. Операции над случайными событиями

Поскольку события являются подмножествами, то операции над ними такие же, как в теории множеств. Только в теории вероятностей употребляется терминология, несколько отличающаяся от теоретико-множественной.

Суммой двух событий *A* и *B*, $A, B \subseteq \Omega$ называется событие *A*+*B* $(A \cup B)$,состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих по крайней мере одному из событий *A* или *B*. Событие *A*+*B* наступает тогда и только тогда, когда наступает или событие *A*, или событие *B*.



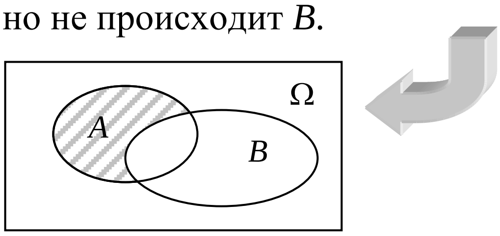
Произведением двух событий *A* и *B*, $A, B \subseteq \Omega$ называется событие *AB* $(A \cap B)$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и *A*, и *B*. Событие *AB* наступает тогда и только тогда, когда события *A* и *B* наступают одновременно.

Операции суммы и произведения обобщаются по индукции на любое конечное или счетное число событий. Используемые при этом обозначения:

$$A+B+C,\ A\cup B\cup C,\ \sum_{k=1}^{n} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\ ;$$

$$ABC,\ A\cap B\cap C,\ \prod_{k=1}^{n} A_k,\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k,\ \prod_{k=1}^{\infty} A_k,\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\ .$$

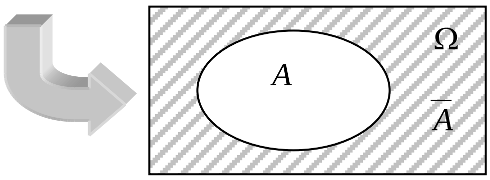
<u>Разностью</u> двух событий *A* и *B*, $A, B \subseteq \Omega$ называется событие $A - B\ (A \setminus B)$, состоящее из элементарных событий множества *A*, не принадлежащих *B*. Событие *A*-*B* происходит тогда и только тогда, когда происходит *A*, но не происходит *B*.

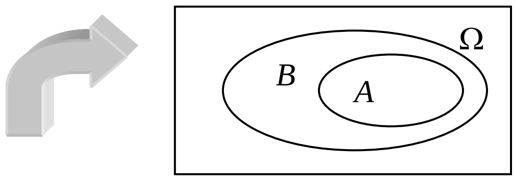


Событие Ω называется <u>достоверным</u> событием. Оно происходит всегда при проведении эксперимента.

<u>Невозможным</u> называется событие ∅, которое не может произойти при проведении эксперимента.

Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется <u>противоположным</u> событию *A*. Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда *A* не происходит.





Говорят, что событие *A* <u>влечёт</u> событие *B* (или, что *B* <u>следует</u> из *A*), обозначается $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, если все элементарные события, принадлежащие событию *A*, принадлежат также и событию *B*, то есть из наступления события *A* следует наступление события *B*.

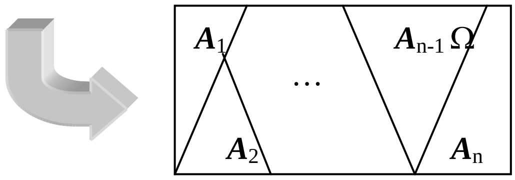
Очевидно, что любое событие *A* влечет достоверное и следует из невозможного: $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

События *A* и *B* называются <u>равносильными,</u> обозначается *A*=*B*, если $A \subseteq B$ è $B \subseteq A$.

События *A* и *B* называются <u>несовместными</u>, если они не могут произойти одновременно: *AB* = ∅.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют <u>полную группу событий</u>, если:

- они являются попарно несовместными: $A_i A_j = \varnothing, \quad i \neq j$;
- в сумме дают событие достоверное: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.



<u>Пример.</u>

Эксперимент состоит в подбрасывании игральной кости: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$.

Рассмотрим события:
A = {Выпадение четного числа очков} = {2, 4, 6};
B = {Выпадение не более трех очков} = {1, 2, 3};
C = {Выпадение нечетного числа очков} = {1, 3, 5}.

Тогда $A + B = \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 6\}$, $AB = \{2\}$; $A - B = \{4, \ 6\}$; $\overline{\mathrm{A}} = \{1, \ 3, \ 5\} = C$; $\mathrm{AC} = \varnothing$ è $\mathrm{A} + \mathrm{C} = \Omega$, то есть *A* и *C* образуют полную группу событий.

Свойства операций над событиями

1°. $A + B = B + A$, $\grave{A}\hat{A} = \hat{A}\grave{A}$ - êî ì ì óòàòèâí î ñòü.

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$; $A(BC) = (AB)C$ - àññî öèàòèâí î ñòü.

3°. $(A + B)C = AC + BC$ - äèñòðèáóòèâí î ñòü.

4°. $A + \Omega = \Omega, \quad A\Omega = A.$

5°. $A + \varnothing = A, \quad A\varnothing = \varnothing.$

6°. $A + A = A, \quad AA = A.$

7°. $A + \overline{A} = \Omega, \quad A\overline{A} = \varnothing.$

8°. $\overline{\Omega} = \varnothing; \quad \overline{\varnothing} = \Omega.$

9°. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

10°. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

} - ñâî éñòâà äâî éñòâåí í î ñòè èëè çàêî í û Äå Ì î ðãàí à.

11°. $A \subseteq B \Rightarrow \quad A + B = B, \ AB = A.$

12°. $AB \subseteq A \subseteq A + B.$

13°. $A - B = A\overline{B}.$

Приступим теперь к введению понятия вероятности. Делать мы это будем постепенно, как бы повторяя исторический путь. Такой подход позволяет избежать формального восприятия и способствует развитию теоретико-вероятностной интуиции. Начнем с, так называемого, классического определения вероятности.

1.4. Классическое определение вероятности

На самом деле это не определение, а метод вычисления вероятностей событий во вполне определенных и сильно ограниченных условиях.

Говорят, что случайный эксперимент удовлетворяет классическому определению вероятности (или классической вероятностной схеме), если:

- пространство элементарных событий состоит из конечного числа исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$;
- из соображений симметрии можно считать, что все элементарные исходы эксперимента являются равновозможными (т. е. ни один из исходов не имеет предпочтения перед другими).

Согласно классическому определению вероятности вероятность любого события $A = \{\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_m}\}$, $\omega_{k_i} \in \Omega$, $k_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $i = \overline{1, m}$ равна отношению числа m исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу исходов n:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Свойства вероятности, непосредственно вытекающие из классического определения вероятности:

1°. $\mathrm{P}(A) \geq 0$ для любого события A (доказательство очевидно).

2°. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$(доказательство очевидно).

3°. Если события A и B несовместны $(AB = \varnothing)$, то

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

▲ Пусть событию A благоприятствует m' исходов, а событию B - m'' исходов. Поскольку события A и B являются несовместными (т.е. не имеют общих исходов), то сумме $A + B$ благоприятствует $m' + m''$ исходов. Поэтому

$$\mathrm{P}(A + B) = \frac{m' + m''}{n} = \frac{m'}{n} + \frac{m''}{n} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B). \blacksquare$$

Исходя из свойств 1° – 3° (и только!!!) вытекают также следующие свойства вероятности:

4°. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

▲ Поскольку события A è $\overline{A}$ образуют полную группу событий ($A + \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$), то из свойств 2° и 3° $\mathrm{P}(A + \overline{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$.■

5°. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

▲ Следует из свойств 2° и 4°, поскольку события $\varnothing = \overline{\Omega}$.■

6°. Åñëè $A \subseteq B$, òî $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

▲ Представим событие B в виде: $B = \Omega B = (A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B = A + \overline{A}B$. Поскольку события A è $\overline{A}B$ являются несовместными, то из свойств 1° и 3° имеем: $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A + \overline{A}B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}B) \geq \mathrm{P}(A)$.■

7°. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

▲ Следует из свойств 2°, 5° и 6°, так как $\varnothing \subset A \subset \Omega$ (в частности, свойство 7° означает, что измерять вероятность в процентах некорректно).■

При решении задач с использованием классического определения вероятности, широко используются понятия комбинаторики. Напомним некоторые из них.

Размещением из N элементов некоторого множества по M элементов называется любой упорядоченный набор из M элементов данного множества. Число всех размещений равно $A_N^M = \dfrac{N!}{(N-M)!} = N(N-1)\cdots(N-M+1)$.

Если в упорядоченном наборе элементы могут повторяться, то этот набор называется размещением с повторениями. Число размещений с повторениями: равно N^M .

Перестановкой из N элементов некоторого множества называется размещение из N элементов по N. Число всех перестановок равно $P_N = A_N^N = N!$.

Сочетанием из N элементов некоторого множества по M элементов называется любое подмножество мощности M. Число всех сочетаний равно $C_N^M = \dfrac{A_N^M}{P_M} = \dfrac{N!}{M!(N-M)!}$.

Пример 1.

Определить вероятность события A, заключающегося в том, что при бросании двух игральных костей, сумма очков не превысит 4.

Решение. В данном примере важно понимать, что если в качестве исхода эксперимента понимать значение суммы выпавших очков: $\Omega = \left\{\omega_i = i,\ i = \overline{2,12}\right\}$ или количество очков, выпавших на каждой из костей без учета порядка их следования: $\Omega = \left\{\omega_{ij} = (i,\ j),\ \ i,\ j = \overline{1,6},\ \ i < j\right\}$, то исходы не являются равновозможными и классическое определение вероятности не применимо. Верное решение в соответствии с классическим определением вероятности можно получить, если только под исходом понимать количество очков, выпавших на каждой из костей с учетом порядка их следования: $\Omega = \left\{\omega_{ij} = (i,\ j),\ \ i, j = \overline{1,6}\right\}$. В этом случае $n = |\Omega| = 6^2 = 36$, а $A = \left\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(1,3)\right\}$. Поэтому $|A| = m = 6$ è $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Пример 2 (Урновая схема).

В урне находится N шаров, из которых M – белые. Из урны наугад извлекается n шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров окажется ровно m белых.

Решение. Исходами в данном эксперименте являются любые подмножества, содержащие n шаров, и они являются равновозможными (за счет слова «наугад»). Число всех исходов равно числу сочетаний из n по N: $|\Omega| = C_N^n$. Каждый набор шаров, входящий в интересующее нас событие, состоит из m белых шаров, которые можно выбрать из M белых C_M^m способами. Независимо от выбора белых шаров, небелые шары можно выбрать C_{N-M}^{n-m} способами. Поэтому общее число благоприятных исходов равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Из этого следует, что $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

1.5. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения вероятности на случай, когда множество равновозможных исходов бесконечно.

Говорят, что случайный эксперимент удовлетворяет геометрическому определению вероятности, если:

- исходы эксперимента можно изобразить точками некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, имеющей конечную меру μ;
- можно считать, что попадание точки в любые области $A \subset \Omega$, имеющие одинаковую конечную меру μ, равновозможно и не зависит от формы и расположения A внутри Ω. При этом говорят, что точка равномерно распределена в области Ω или бросается в область Ω наудачу.

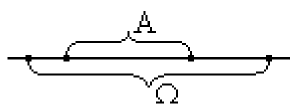
Согласно геометрическому определению вероятности вероятность попадания точки в любую область A (событие A) пропорциональна ее мере μ:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

В частности:

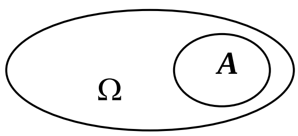
при $n = 1$ под мерой $\mu(\cdot)$ понимается длина $\ell(\cdot)$ подмножества на числовой прямой $\mathbb{R}$ и

$$\mathrm{P}(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)};$$



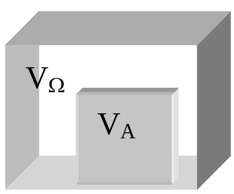
при $n = 2$ под мерой $\mu(\cdot)$ понимается площадь $S(\cdot)$ подмножества на плоскости $\mathbb{R}^2$ и

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)};$$



при $n = 3$ под мерой $\mu(\cdot)$ понимается объем $V(\cdot)$ подмножества в пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$\mathrm{P}(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$



Замечание. В рассмотренной схеме событиями считаются не любые подмножества $A \subseteq \Omega$, а только имеющие конечную меру $\mu(\cdot)$. Данное ограничение необходимо, поскольку в $\square^{n}$ существуют неизмеримые (не имеющие меры) множества (см. замечание из раздела 1.2, а также раздел 1.7).

Из геометрического определения вероятности вытекают следующие свойства вероятности.

1°. $\mathrm{P}(A) \geq 0;$

2°. $\mathrm{P}(\Omega) = 1;$

3°. $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, åñëè ñîáûòèÿ A è B ÿâëÿþòñÿ íåñîâìåñòíûìè.

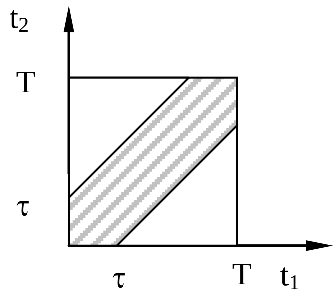
Следовательно, справедливы и свойства вероятности 4° – 7°, доказательство которых в классическом определении вероятности основывалось только на свойствах 1° – 3°.

Пример.

На обслуживающее устройство в промежутке времени $[0, T]$ равновозможно поступление двух заявок. Время обслуживания одной заявки равно τ. Если очередная заявка поступает в момент занятости устройства обслуживанием предыдущей, то она теряется. Найти вероятность потери заявки.

Решение. Обозначим t_1, t_2 – моменты поступления заявок. Тогда

$$\Omega = \{(t_1, t_2), \ 0 \leq t_1, t_2 \leq T\}.$$



Интересующее нас событие A имеет вид:

$$A = \{(t_1, t_2), \ 0 \leq t_1, \ t_2 \leq T : \ |t_2 - t_1| < \tau\}.$$

Поэтому (см. рисунок)

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

1.6. Статистическое определение вероятности

Существует большой класс событий, к которым классическое и геометрическое определения вероятности не применимы из-за отсутствия равновозможности исходов. Статистическое определение вероятности позволяет приближенно находить вероятности любых случайных событий.

Для статистически устойчивого события A частота его появления $\frac{m_A}{n}$ в n случайных экспериментах при больших n сохраняет почти постоянную величину. Причём, для тех случаев, к которым применимо классическое определение вероятности, можно показать, что эта постоянная величина есть не что иное, как вероятность события A. Естественно предположить, что и в случаях, не сводящихся к классической схеме, постоянная, около которой происходит колебание частоты события A, есть его вероятность $\mathrm{P}(A)$. Многочисленные эксперименты подтверждают это.

Согласно статистическому определению вероятности за вероятность события A принимается частота $\mathrm{P}^*(A)=\dfrac{m_A}{n}$ при достаточно большом n:

$$\mathrm{P}(A)\approx \mathrm{P}^*(A).$$

Частота $\mathrm{P}^*(A)$ обладает всеми свойствами вероятности из классического и геометрического определений:

1°. $\mathrm{P}^*(A)\geq 0$;

2°. $\mathrm{P}^*(\Omega)=1$;

3°. $\mathrm{P}^*(A+B)=\mathrm{P}^*(A)+\mathrm{P}^*(B),\ \text{åñëè}\ \ AB=\varnothing$.

Однако, частота $\mathrm{P}^*(A)$ не совпадает с истинной вероятностью $\mathrm{P}(A)$ даже при очень больших n. Более того, если провести другую серию из n экспериментов, то значение частоты $\mathrm{P}^*(A)$ будет, вообще говоря, другим. Это означает, что колебание частоты $\mathrm{P}^*(A)$ около вероятности $\mathrm{P}(A)$ носит случайный характер. Поэтому приближенное равенство $\mathrm{P}(A)\approx \mathrm{P}^*(A)$ следует понимать, как приближённое равенство чисел, имеющее большую степень достоверности, но не абсолютно достоверное. Аналогично, и сходимость частоты $\mathrm{P}^*(A)$ к $\mathrm{P}(A)$ при $n\to\infty$, следует понимать не в смысле сходимости числовой последовательности, а в некотором специфическом смысле, учитывающем случайность $\mathrm{P}^*(A)$ (в теории вероятностей эта сходимость называется сходимостью по вероятности и мы с ней будем неоднократно иметь дело в дальнейшем).

Статистическое определение вероятности является универсальным, поскольку применимо к любым случайным экспериментам и связанным с ними случайным событиям. Недостаток этого определения состоит в том, что оно требует проведения большого числа экспериментов для получения результата.

1.7. Аксиоматическое определение вероятности

Свойства 1° – 3°, установленные в классическом, геометрическом и статистическом определениях вероятности, в аксиоматическом определении принимаются в качестве системы аксиом (только свойство 3° формулируется в более общем виде).

Определение. Пусть Ω - произвольное пространство элементарных событий. Вероятностью называется числовая функция $\mathrm{P}(\cdot)$, определенная на подмножествах Ω (случайных событиях), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1°. Аксиома неотрицательности: $\mathrm{P}(A) \geq 0$.

2°. Аксиома нормированности: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

3°. Аксиома счетной аддитивности:

Для любой последовательности событий $A_1,...,A_n,...$, являющихся попарно несовместными $(A_k A_j = \varnothing,\ i \neq j)$

$$\mathrm{P}(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k).$$

Если при изучении данного случайного эксперимента не возникает потребность в рассмотрении бесконечных последовательностей событий, то в определении вероятности аксиома счетной аддитивности 3° может быть заменена на аксиому конечной аддитивности.

3^*. Аксиома конечной аддитивности: для любых событий $A_1,...,A_n$, являющихся попарно несовместными $(A_k A_j = \varnothing,\ i \neq j)$

$$\mathrm{P}(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k).$$

Проверка аксиомы счетной аддитивности 3° на практике бывает весьма затруднительна. Для этого полезным является следующее утверждение.

Теорема (без доказательства). Аксиома счетной аддитивности 3° эквивалентна аксиоме конечной аддитивности 3^* и следующей аксиоме непрерывности:

4°. Аксиома непрерывности. Если события $A_1,...,A_n$ обладают свойствами:

1) $A_{k+1} \subseteq A_k$, $k = 1,...,n$;

2) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = 0$,

(при этом говорят, что события образуют убывающую последовательность событий), то

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}(A_k) = 0.$$

Из аксиоматического определения вероятности вытекают следующие свойства вероятности.

4°. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

5°. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

6°. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$.

7°. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

(Свойства 4° – 7° были доказаны при рассмотрении классического определения вероятности сразу в общем случае).

8°. Теорема сложения вероятностей.

Для любых событий A и B (не обязательно несовместных)

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB).$$

▲ Представим событие B в виде:

$$B = B\Omega = B(A + \overline{A}) = AB + \overline{A}B.$$

Поскольку события AB è $\overline{A}B$ являются несовместными, то по аксиоме аддитивности 3°

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB + \overline{A}B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\overline{A}B). \qquad (1)$$

Представим событие $A+B$ в виде:

$$A + B = A + B\Omega = A + (AB + \overline{A}B) = A + AB + \overline{A}B = A + \overline{A}B.$$

Поскольку события A è $\overline{A}B$ являются несовместными, то по аксиоме 3°

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A + \overline{A}B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}B). \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$\mathrm{P}(A+B) - \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB). \ ■$$

Задача. Доказать, что для любых трех событий A, B и C

$$\mathrm{P}(A+B+C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(AC) - \mathrm{P}(BC) + \mathrm{P}(ABC).$$

Доказать общую формулу:

$$\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathrm{P}(A_i A_j A_k) - \ldots - (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

9°. Если события $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу событий, то

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = 1.$$

▲ Свойство следует из определения полной группы событий и аксиом 2° и 3°. ■

10°. $\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$.

▲ Представим событие A в виде:

$$A = A\Omega = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B} = AB + (A-B).$$

Поскольку события AB è $A-B$ являются несовместными, то по аксиоме аддитивности 3°

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB + (A-B)) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A-B). \blacksquare$$

Из аксиоматического определения вероятности классическое и геометрическое определения следуют, как частные случаи (поскольку в них вероятность обладает свойствами 1° – 3°, совпадающими с аксиомами). Для примера покажем, как аксиоматическое определение вероятности позволяет конструктивно задать вероятность на любом пространстве элементарных событий, содержащем счетное число не обязательно равновозможных исходов.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n, ...\}$. Каждому исходу ω_k поставим в соответствие неотрицательное число $p_k = \mathrm{P}(\omega_k) \geq 0,\ k = 1, 2, ...,$ так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Тогда, если вероятность любого события A определить как $\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{k:\omega_k \in A} p_k$, то она будет удовлетворять аксиомам 1°, 2°, 3°.

1.8. Условные вероятности

На практике случайные события обычно взаимосвязаны. Информация о наступлении одного из событий может влиять на шансы наступления другого. Пусть $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ - конечное пространство равновозможных исходов, A и B – некоторые события. Если о событии B ничего неизвестно, то согласно классическому определению вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Если же известно, что событие B уже произошло (т. е. наступил исход $\omega \in B$, но какой именно – неизвестно), то для определения вероятности события A следует выбрать новое пространство элементарных событий $\Omega' = B$.

В этом случае событию A благоприятствуют исходы $\omega \in AB$ и новая вероятность, которую обозначим $\mathrm{P}(A/B)$, равна:

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{|\grave{A}\hat{A}|}{|\Omega'|} = \frac{|\grave{A}\hat{A}|}{|\hat{A}|} = \frac{|\grave{A}\hat{A}|}{|\Omega|} : \frac{|\hat{A}|}{|\Omega|} = \frac{\text{Ð}(\grave{A}\hat{A})}{\text{Ð}(\hat{A})}.$$

Полученная вероятность называется условной вероятностью события A при условии, что событие B произошло и полученное для нее выражение в рамках классической схемы принимается за определение условной вероятности и в общем случае.

<u>Определение.</u> Пусть $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ - произвольное вероятностное пространство, $A, B \in \mathrm{F}$ - некоторые случайные события, $\mathrm{P}(B) > 0$.

Условной вероятностью события A при условии, что событие B произошло, называется величина

$$\mathrm{P}(A/B)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Для условной вероятности $\mathrm{P}(A/B)$ применяется также обозначение $\mathrm{P}_B(A)$.

Условная вероятность $\mathrm{P}(A/B)$, как функция события A при фиксированном событии B (условии), удовлетворяет аксиомам P1) – P3) и, следовательно, всем свойствам вероятности, вытекающим из аксиом:

P1). $\mathrm{P}(A/B)\geq 0$.

P2). $\mathrm{P}(\Omega/B)=1$

(Действительно, $\mathrm{P}(\Omega/B)=\dfrac{\mathrm{P}(\Omega B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=1$).

P3). $\mathrm{P}(A_1+A_2/B)=\mathrm{P}(A_1/B)+\mathrm{P}(A_2/B),\ \text{åñëè}\ A_1A_2=\varnothing$

(Действительно,

$$\mathrm{P}(A_1+A_2/B)=\frac{\mathrm{P}((A_1+A_2)B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A_1B+A_2B)}{\mathrm{P}(B)}=$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A_1B)+\mathrm{P}(A_2B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A_1/B)+\mathrm{P}(A_2/B),$$

поскольку события A_1B è A_2B являются несовместными).

Аналогично вводится понятие условной вероятности события B при условии, что событие A произошло:

$$\mathrm{P}(B/A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$$

в предположении, что $\mathrm{P}(A)>0$.

Если $\mathrm{P}(A)>0$ и $\mathrm{P}(B)>0$, то из определения условных вероятностей $\mathrm{P}(A/B)$ и $\mathrm{P}(B/A)$ получаем следующее правило умножения вероятностей:

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A/B)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A).$$

На случай любого конечного числа событий правило умножения вероятностей обобщается следующим образом.

Теорема (умножения вероятностей).

Пусть $A_1,...,A_n$ – некоторые события, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$, для которых $\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_{n-1})\neq 0$. Тогда

$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2/A_1)\,\mathrm{P}(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

▲ В соответствии с правилом умножения вероятностей

$$\mathrm{P}(\underbrace{A_1A_2\ldots A_{n-1}}_{\text{îäíî ñîáûòèå}}A_n)=\mathrm{P}(\underbrace{A_1A_2\ldots A_{n-2}}_{\text{îäíî ñîáûòèå}}A_{n-1})\,\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})=$$

$$=\mathrm{P}(A_1A_2...A_{n-2})\,\mathrm{P}(A_{n-1}/A_1A_2\ldots A_{n-2})\,\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})=$$

= (ðàñù åï ëÿÿ òàêèì æå îáðàçîì è äàëåå) ...

$$=\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2/A_1)\,\mathrm{P}(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).\ \blacksquare$$

Пример.

Партия из 100 деталей содержит 5 бракованных. Найти вероятность того, что среди отобранных 10 деталей не будет бракованных.

Решение. Рассмотрим события

$B_k = \{k$-ÿ âû áðàí í àÿ äåòàëü-äî áðî êà÷åñòâåí í àÿ$\}$;

$B = \{$âñå 10 âû áðàí í û õ äåòàëåé - äî áðî êà÷åñòâåí í û å$\}$.

Тогда $B = B_1 B_2 ... B_{10}$ и в соответствии с теоремой умножения вероятностей получаем:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B_1 B_2 ... B_{10}) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(B_2 / B_1)...\mathrm{P}(B_{10} / B_1 B_2 ... B_9) =$$

$$\frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot ... \cdot \frac{86}{91} = 0{,}584.$$

Заметим, что тот же ответ получается и при использовании классического определения вероятности:

$|\Omega| = C_{100}^{10}$, $|A| = C_{95}^{10}$ и $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}} = 0{,}584$ (см. пример Урновая схема).

1.9. Зависимые и независимые события

Зависимость событий понимается в <u>вероятностном</u> смысле, а не в функциональном. Это значит, что по появлению одного из зависимых событий нельзя однозначно судить о появлении другого. Вероятностная зависимость означает, что появление одного из зависимых событий только изменяет вероятность появления другого. Если вероятность при этом не изменяется, то события считаются независимыми.

<u>Определение</u>: Пусть $(\Omega, \mathsf{F}, \mathrm{P})$ - произвольное вероятностное пространство, $A, B \in \mathsf{F}$ - некоторые случайные события. Говорят, что <u>событие *A* не зависит от события *B*</u>, если его условная вероятность $\mathrm{P}(A/B)$ совпадает с безусловной вероятностью $\mathrm{P}(A)$:

$$\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A).$$

Если $\mathrm{P}(A/B) \neq \mathrm{P}(A)$, то говорят, что событие *A* зависит от события *B*.

Понятие независимости симметрично, то есть, если событие *A* не зависит от события *B*, то и событие *B* не зависит от события *A*. Действительно, пусть $\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A)$. Тогда $\mathrm{P}(B/A) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A/B)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B)$. Поэтому говорят просто, что события *A* и *B* независимы.

Из правила умножения вероятностей вытекает следующее симметричное определение независимости событий.

<u>Определение</u>: События *A* и *B*, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathsf{F}, \mathrm{P})$, называются <u>независимыми</u>, если

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Если $\mathrm{P}(AB) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, то события A и B называются <u>зависимыми</u>.

Отметим, что данное определение справедливо и в случае, когда $\mathrm{P}(A) = 0$ или $\mathrm{P}(B) = 0$.

<u>Свойства независимых событий.</u>

1. Если события A и B являются независимыми, то независимыми являются также следующие пары событий: $\overline{A}$ è B, A è $\overline{B}$, $\overline{A}$ è $\overline{B}$.

▲ Докажем, например, независимость событий A è $\overline{B}$. Представим событие A в виде: $A = A\Omega = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$. Поскольку события AB è $A\overline{B}$ являются несовместными, то $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B})$, а в силу независимости событий A и B получаем, что $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A\overline{B})$. Отсюда $\mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B})$, что и означает независимость A è $\overline{B}$. ■

2. Если событие A не зависит от событий B_1 и B_2, которые являются несовместными ($B_1B_2 = \varnothing$), то событие A не зависит и от суммы $B = B_1 + B_2$.

▲ Действительно, используя аксиому аддитивности вероятности и независимость события A от событий B_1 и B_2, имеем:

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A(B_1 + B_2)) = \mathrm{P}(AB_1) + \mathrm{P}(AB_2) =$$
$$= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(A)(\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(B_2)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \cdot \blacksquare$$

<u>Связь между понятиями независимости и несовместности.</u>

Пусть A и B – любые события, имеющие ненулевую вероятность: $\mathrm{P}(A) \neq 0$, $\mathrm{P}(B) \neq 0$, так что $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \neq 0$. Если при этом события A и B являются несовместными ($AB = \varnothing$), то $\mathrm{P}(AB) = 0$ и поэтому равенство $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ не может иметь место никогда. Таким образом, <u>несовместные события являются зависимыми</u>.

Когда рассматривают более двух событий одновременно, то попарная их независимость недостаточно характеризует связь между событиями всей группы. В этом случае вводится понятие независимости в совокупности.

<u>Определение</u>: События $A_1, A_2, ..., A_n$, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, называются <u>независимыми в совокупности</u>, если для любого $2 \leq m \leq n$ и любой комбинации индексов $1 \leq k_1 \leq k_2 \ldots \leq k_m \leq n$ справедливо равенство:

$$\mathrm{P}(A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_m}) = \mathrm{P}(A_{k_1})\mathrm{P}(A_{k_2})\ldots\mathrm{P}(A_{k_m}).$$

При $m = 2$ из независимости в совокупности следует попарная независимость событий. Обратное неверно.

<u>Пример. (Бернштейн С.Н.)</u>

Случайный эксперимент заключается в подбрасывании правильного четырехгранника (тетраэдра). Наблюдается грань, выпавшая книзу. Грани тетраэдра окрашены следующим образом: 1 грань - белая, 2 грань - чёрная, 3 грань - красная, 4 грань - содержит все цвета.

Рассмотрим события:

A = {Выпадение белого цвета}; B = {Выпадение черного цвета};

C = {Выпадение красного цвета}.

Тогда $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}$;

$\mathrm{P}(AB)=\dfrac{1}{4}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$; $\mathrm{P}(A\tilde{N})=\dfrac{1}{4}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\tilde{N})$; $\mathrm{P}(B\tilde{N})=\dfrac{1}{4}=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(\tilde{N})$.

Следовательно, события A, B и C являются попарно независимыми.

Однако, $\mathrm{P}(ABC)=\dfrac{1}{4}\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

Поэтому события A, B и C независимыми в совокупности не являются.

На практике, как правило, независимость событий не устанавливают, проверяя ее по определению, а наоборот: считают события независимыми из каких-либо внешних соображений или с учетом обстоятельств случайного эксперимента, и используют независимость для нахождения вероятностей произведения событий.

Теорема (умножения вероятностей для независимых событий).

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathsf{F}, \mathrm{P})$, являются независимыми в совокупности, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей:

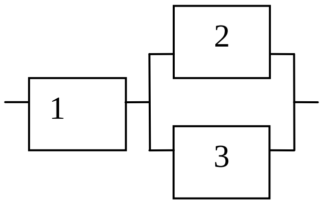
$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n).$$

▲ Доказательство теоремы следует из определения независимости событий в совокупности или из общей теоремы умножения вероятностей с учетом того, что при этом

$$\mathrm{P}(A_2/A_1)=\mathrm{P}(A_2),\ \mathrm{P}(A_3/A_1A_2)=\mathrm{P}(A_3),\ldots,\ \mathrm{P}(A_n/A_1\ldots A_{n-1})=\mathrm{P}(A_n).■$$

Пример 1 (типовой пример на нахождение условных вероятностей, понятие независимости, теорему сложения вероятностей).

Электрическая схема состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов соответственно равны $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}2$.



1) Найти вероятность отказа схемы.

2) Известно, что схема отказала.
Какова вероятность того, что при этом отказал:
а) 1-й элемент; б) 3-й элемент?

Решение. Рассмотрим события A_k = {Отказал k-й элемент}, $k=1,2,3$ и событие A = {Отказала схема}. Тогда событие A представляется в виде:

$$A=A_1+A_2A_3.$$

1) Поскольку события A_1 и A_2A_3 несовместными не являются, то аксиома аддитивности вероятности P3) неприменима и для нахождения вероятности $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 + A_2A_3)$ следует использовать общую теорему сложения вероятностей, в соответствии с которой

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2A_3) - \mathrm{P}(A_1A_2A_3).$$

Используя далее независимость событий A_k, $k = 1, 2, 3$, имеем

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3) = 0{,}1 + 0{,}04 - 0{,}004 = 0{,}136.$$

2) Если уже известно, что схема отказала, то для нахождения вероятности отказа при этом 1-го элемента необходимо определить условную вероятность $\mathrm{P}(A_1 / A)$. По определению условной вероятности и с учетом того, что $A_1 \subset A$, получаем:

$$\mathrm{P}(A_1 / A) = \frac{\mathrm{P}(A_1A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}136} = \frac{1}{68}.$$

Поскольку $A_3 \not\subset A$, то условная вероятность $\mathrm{P}(A_3 / A)$ находится несколько иначе:

$$\mathrm{P}(A_3 / A) = \frac{\mathrm{P}(A_3A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A_1A_3 + A_2A_3)}{\mathrm{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(A_1A_3) + \mathrm{P}(A_2A_3) - \mathrm{P}(A_1A_2A_3)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}02 + 0{,}04 - 0{,}004}{0{,}136} = \frac{28}{68}.$$

<u>Пример 2.</u>

Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,9. Сколько надо сделать независимых выстрелов, чтобы поразить цель с вероятностью не менее, чем 0,9999?

<u>Решение</u>. Пусть n – число сделанных выстрелов, событие A_k = {Попадание в цель при k-м выстреле}, $1 \le k \le n$, событие A = {Поражение цели}. Очевидно, что $A = A_1 + \ldots + A_n$, но поскольку события A_k, $1 \le k \le n$ не являются попарно несовместными, то для нахождения вероятности $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 + \ldots + A_n)$ следует использовать теорему сложения вероятностей в общем виде.

Удобнее перейти к противоположному событию и использовать свойство 1 независимых событий:

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A_1 + \ldots A_n}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A_1} \ldots \overline{A_n}) =$$

$$1 - \mathrm{P}(\overline{A}_1) \ldots \mathrm{P}(\overline{A}_n) = 1 - (0{,}1)^n \ge 0{,}9999.$$

Разрешая полученное неравенство $(0{,}1)^n \le 0{,}0001$ относительно n, получаем, что $n \ge 4$.

1.10. Формулы полной вероятности и Байеса

Предположим, что с данным случайным экспериментом связана полная группа событий $H_1,\ldots,H_n$, вероятности которых $\mathrm{P}(H_k),\ k=\overline{1,\ n}$ известны. Нас интересует некоторое событие A, которое может наступить одновременно с одним из H_k. При этом условные вероятности $\mathrm{P}(A/H_k),\ k=\overline{1,\ n}$ наступления события A при каждом H_k известны. Требуется определить безусловную вероятность $\mathrm{P}(A)$.

Представим событие A в виде:

$$A = A\Omega = A(H_1+\ldots+H_n) = AH_1+\ldots+AH_n\,.$$

В полученной сумме слагаемые являются попарно несовместными: $(AH_i)(AH_j)=\varnothing,\ i\neq j$. Поэтому, используя аксиому аддитивности и правило умножения вероятностей, получаем:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(AH_1)+\ldots+\mathrm{P}(AH_n)=\mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}(A/H_1)+\ldots+\mathrm{P}(H_n)\,\mathrm{P}(A/H_n)\,.$$

Формула

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(H_k)\,\mathrm{P}(A/H_k)$$

называется <u>формулой полной вероятности</u>. В ней события H_k называются <u>гипотезами</u> (так как одно из H_k обязательно происходит), а вероятности $\mathrm{P}(H_k),\ k=\overline{1,n}$ - <u>вероятностями гипотез</u>.

Пусть, по-прежнему, со случайным экспериментом связано n гипотез $H_1,\ldots,H_n$, вероятности которых $\mathrm{P}(H_k),\ k=\overline{1,n}$ известны. Известно также, что гипотеза H_k сообщает событию A вероятность $\mathrm{P}(A\,/\,H_k),\ k=\overline{1,n}$. Предположим, что эксперимент был произведён, и в результате событие A произошло. Этот факт приводит к переоценке вероятностей гипотез $\mathrm{P}(H_k),\ k=\overline{1,n}$. Количественно этот вопрос решает следующая формула:

$$\mathrm{P}(H_k/A)=\frac{\mathrm{P}(AH_k)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(H_k)\,\mathrm{P}(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A/H_i)},\ k=\overline{1,\ n}\,.$$

Полученная формула называется <u>формулой Байеса</u> (или формулой гипотез). В ней $\mathrm{P}(H_k),\ k=\overline{1,n}$ называются <u>априорными вероятностями гипотез</u> (они определяются *a priori* – до проведения опыта). Условные вероятности $\mathrm{P}(H_k\,/\,A),\ k=\overline{1,n}$ называются <u>апостериорными вероятностями гипотез</u> (они вычисляются *a posteriori* – после проведения опыта, когда стало известно, что событие A произошло).

<u>Пример</u>. По каналу связи с помехами передаются двоичные символы $\{0,1\}$. Вероятности искажения символов в канале $(0\to1,\ 1\to0)$ одинаковы и равны 0.2. Вероятность символа 0 на входе канала равна 0,9, а вероятность

символа 1 - 0,1. На выходе канала принят сигнал, соответствующий 1. Определить вероятность того, что на вход канала подавалась также 1.

Решение.

Рассмотрим гипотезы

H_0 = {На входе канала связи символ 0},

H_1 = {На входе канала связи символ 1}.

Очевидно, $H_0 H_1 = \varnothing$ и по условию $\mathrm{P}(H_0) = 0{,}9$, à $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}1$, то есть события H_0 и H_1 образуют полную группу событий.

Пусть событие A = {На выходе канала принят символ 1}.

Тогда по условию задачи вероятность искажения символа 0 в канале суть условная вероятность $\mathrm{P}(A/H_0) = 0{,}2$, а условная вероятность $\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}8$ является вероятностью неискажения в канале символа 1. В терминах введенных обозначений требуется найти условную (апостериорную) вероятность $\mathrm{P}(H_1 / A)$.

Найдем вначале по формуле полной вероятности безусловную вероятность события A:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_0)\mathrm{P}(A/H_0) + \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26.$$

Затем, в соответствии с формулой Байеса, находим апостериорную вероятность $\mathrm{P}(H_1 / A)$:

$$\mathrm{P}(H_1/A) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A/H_1)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}8}{0{,}26} \approx 0{,}31$$

(при априорной вероятности $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}1$).

Очевидно, что при этом апостериорная вероятность $\mathrm{P}(H_0 / A) \approx 0{,}69$

(при априорной вероятности $\mathrm{P}(H_0) = 0{,}9$).

Замечание. Таким образом, даже при приеме на выходе канала связи 1 мы отдаем предпочтение в пользу 0 на входе. Это объясняется тем, что априорная вероятность 0 на входе канала существенно больше априорной вероятности 1.

1.11. Схема независимых испытаний Бернулли

Предположим, что некоторый эксперимент может повторяться при неизменных условиях сколько угодно раз, и эти повторения не зависят друг от друга. В этом случае говорят о проведении последовательности независимых испытаний. Независимость испытаний при этом следует понимать в том смысле, что любые события, которые могут произойти в результате, являются независимыми в совокупности.

Простейшей является последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможно только 2 исхода: успех – У (1) и неуспех – Н (0). Последовательность независимых испытаний с двумя исходами называется схемой независимых испытаний Бернулли.

Обозначим вероятность успеха $\mathrm{P}(1) = p$, а вероятность неуспеха $\mathrm{P}(0) = q = 1 - p$.

При проведении n независимых испытаний по схеме Бернулли пространство элементарных событий имеет вид:

$$\Omega^{(n)} = \left\{ \omega : \ \omega = \left(x_1, \ldots, x_n\right), \ x_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, n} \right\},$$

а вероятности элементарных событий в силу независимости вычисляются по формуле:

$$\mathrm{P}(\omega) = \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(x_1) \ldots \mathrm{P}(x_n), \ \text{ãäå} \ \mathrm{P}(x_i) = \begin{cases} p, \ \text{åñëè} \ x_i = 1, \\ q, \ \text{åñëè} \ x_i = 0, \end{cases} = p^{x_i} q^{1-x_i},$$

то есть

$$\mathrm{P}(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot q^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

В связи с рассмотрением схемы независимых испытаний Бернулли обычно представляют интерес события

$$B_n(m) = \{\text{В } n \text{ испытаниях наступило ровно } m \text{ успехов}\} =$$
$$= \left\{ \omega : \ \omega = \left(x_1, \ldots, x_n\right) : x_1 + \ldots + x_n = m, \ x_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, n} \right\}.$$

Обозначим вероятность $\mathrm{P}(B_n(m)) = \mathrm{P}_n(m)$ и вычислим ее. Для любого $\omega \in B_n(m)$ вероятность $\mathrm{P}(\omega) = p^m \, q^{n-m}$, а общее количество исходов, содержащихся в $B_n(m)$, равно числу способов размещения m единиц в последовательности длины n из нулей и единиц, то есть $\left|B_n(m)\right| = C_n^m$. Таким образом,

$$\mathrm{P}_n(m) = \sum_{\omega \in B_n(m)} \mathrm{P}(\omega) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad 0 \le m \le n.$$

Полученная формула называется <u>формулой Бернулли</u>. Она даёт выражение для вероятности наступления m успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли с неизменной вероятностью успеха в одном испытании равной p и с вероятностью неуспеха равной $q = 1 - p$.

Поскольку события $B_n(m), \ 0 \le m \le n$ образуют полную группу событий, то $\sum\limits_{m=0}^{n} \mathrm{P}_n(m) = 1$. Тот же результат можно получить и на основании бинома Ньютона:

$$\sum_{m=0}^{n} \mathrm{P}_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

Исследуем поведение вероятностей $\mathrm{P}_n(m)$ в зависимости от m. Для этого вычислим отношение:

$$\frac{\mathrm{P}_n(m+1)}{\mathrm{P}_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m+1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n! m! (n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)! n!} \, \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q}.$$

Отсюда следует, что вероятности $\mathrm{P}_n(m)$ возрастают, когда $\frac{n-m}{n+1}\frac{p}{q}>1$ или, что эквивалентно, $np-q>m$.

Вероятности $\mathrm{P}_n(m)$ убывают, когда $\frac{n-m}{n+1}\frac{p}{q}<1$ или, что эквивалентно, $np-q<m$.

И, наконец, $\mathrm{P}_n(m+1)=\mathrm{P}_n(m)$, если $np-q=m$.

Определение. Число успехов $m = m_0$, при котором вероятности $P_n(m)$ достигают максимума, называются наивероятнейшим числом успехов.

Из проведённых рассуждений следует, что наивероятнейшее число успехов m_0 определяется из двойного неравенства:

$$np-q\le m_0\le np-q+1 = np+p.$$

При этом:

1. Если число $np-q$ нецелое, то существует одно наивероятнейшее число успехов: $m_0=[np-q]+1=[np+p]$.
2. Если число $np-q$ целое, то существует два наивероятнейших числа успехов: $m_0'=np-q$ и $m_0''=np-q+1=np+p$.
3. Если число np целое, то $m_0=np$.

Вычисления по формуле Бернулли при больших m и n весьма трудоёмкие. На практике в этом случае используют асимптотические приближения для вероятностей $\mathrm{P}_n(m)$, основанные на предельных теоремах Пуассона и Муавра-Лапласа.

Пример.

Что более вероятно: выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 из 8 (ничьи не считаются)?

Решение.

В данном примере речь идет о сравнении двух вероятностей $\mathrm{P}_4(3)$ и $\mathrm{P}_8(5)$, когда $p=q=\frac{1}{2}$. Поскольку $\mathrm{P}_4(3)=C_4^3\frac{1}{2^4}=4\frac{1}{2^4}$, а $\mathrm{P}_8(5)=C_8^5\frac{1}{2^8}=\frac{7}{2}\frac{1}{2^4}$, то $\mathrm{P}_4(3)>\mathrm{P}_8(5)$, то есть выиграть 3 партии из 4 более вероятно.

Глава 2. Случайные величины

2.1. Случайные величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства

Интуитивное представление о случайной величине.

Случайная величина (СВ) – это числовая функция, значения которой заранее (до наблюдения) нельзя точно определить, то есть функция, зависящая от случайного исхода и принимающая свои значения с некоторыми вероятностями.

Примеры СВ:
а) число пассажиров в автобусе (конечное число значений);
б) число вызовов на телефонной станции за время T (счетное число значений);
в) время безотказной работы прибора за время T (несчетное число значений).

Обозначают СВ прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z,…, а их значения соответствующими строчными буквами x, y, z,….

Формальное определение СВ.

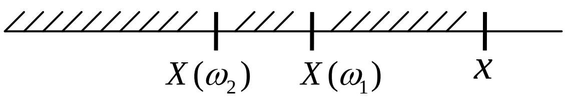
Определение. Случайной величиной X называется функция $X = X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая действительные значения ($X : \Omega \to \mathbb{R}$).

Для того, чтобы определять вероятности событий, связанных со СВ, и делать это одним и тем же способом для любых СВ, в теории вероятностей вводится понятие функции распределения.

Определение. Функцией распределения СВ X называется функция $F_X(x) = F(x)$ действительной переменной $\tilde{o}$, определяемая при каждом $x \in \mathbb{R}$ равенством:

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} = P(X < x).$$

Геометрически функция распределения (ФР) означает вероятность попадания СВ X левее заданной точки $\tilde{o}$:



ФР является исчерпывающей вероятностной характеристикой СВ. Это вытекает из следующих ее свойств.

Свойства ФР.

1. $0 \le F(x) \le 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$
(свойство очевидно, так как $F(x)$ - вероятность).

2. ФР является функцией неубывающей: åñëè $x_1 < x_2$, òî $F(x_1) \le F(x_2)$.

▲ Åñëè $x_1 < x_2$, òî $(X < x_1) \subset (X < x_2)$. Поэтому в силу свойства 6 вероятности $F(x_1) = P(X < x_1) \le P(X < x_2) = F(x_2)$ ■.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

▲ $F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\varnothing) = 0$ в силу свойства 5 вероятности.
$F(+\infty) = P(X < +\infty) = P(\Omega) = 1$ в силу аксиомы нормированности ■.

4. ФР является функцией <u>непрерывной слева</u>, то есть для любого $x \in \mathbb{R}$

$$F(x-0) = F(x),$$

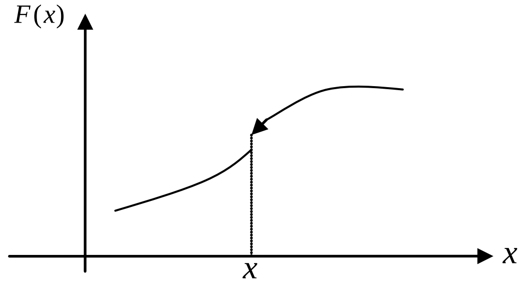
где $F(x-0) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x - \frac{1}{n})$ - предел слева ФР в точке *x*.

5. Для любого $x \in \mathbb{R}$

$$P(X \le x) = F(x+0),$$

где $F(x+0) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n})$ - предел справа ФР в точке *x*.

<u>Замечание</u>. Геометрически свойства 4 и 5 означают следующее. В точках $\tilde{o}$, где ФР имеет разрыв 1 рода, то есть когда $F(x+0) \ne F(x-0)$, значением ФР является левое (нижнее, меньшее). В точках непрерывности ФР свойства 4 и 5 содержательными не являются.



6. Вероятность попадания СВ X в интервал $[a,b)$ определяется как приращение ФР на этом интервале: для любых $a,b \in \mathbb{R} : a < b$

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

▲ Поскольку событие $(X < b) = (X < a) + (a \le X < b)$ и слагаемые в сумме являются несовместными, то в силу аддитивности вероятности

$$\mathrm{P}(X < b) = \mathrm{P}(X < a) + \mathrm{P}(a \le X < b)$$

или, что эквивалентно,

$$F(b) = F(a) + \mathrm{P}(a \le X < b) \ ■.$$

7. Для любого $x \in \mathbb{R}$

$$P(X = x) = \Delta F(x),$$

где $\Delta F(x) = F(x+0) - F(x)$ - величина скачка ФР в точке $\tilde{o}$.

▲ Поскольку событие $(X \le x) = (X < x) + (X = x)$ и слагаемые в сумме являются несовместными, то в силу аддитивности вероятности

$$\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(X < x) + \mathrm{P}(X = x),$$

а с учетом свойства 5 ФР

$$F(x+0) = F(x) + \mathrm{P}(X = x) \ \blacksquare.$$

<u>Следствие.</u> Если ФР непрерывна в точке x, то $P(X = x) = 0$. Если ФР непрерывна для любого $x \in \mathbb{R}$, то $P(X = x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

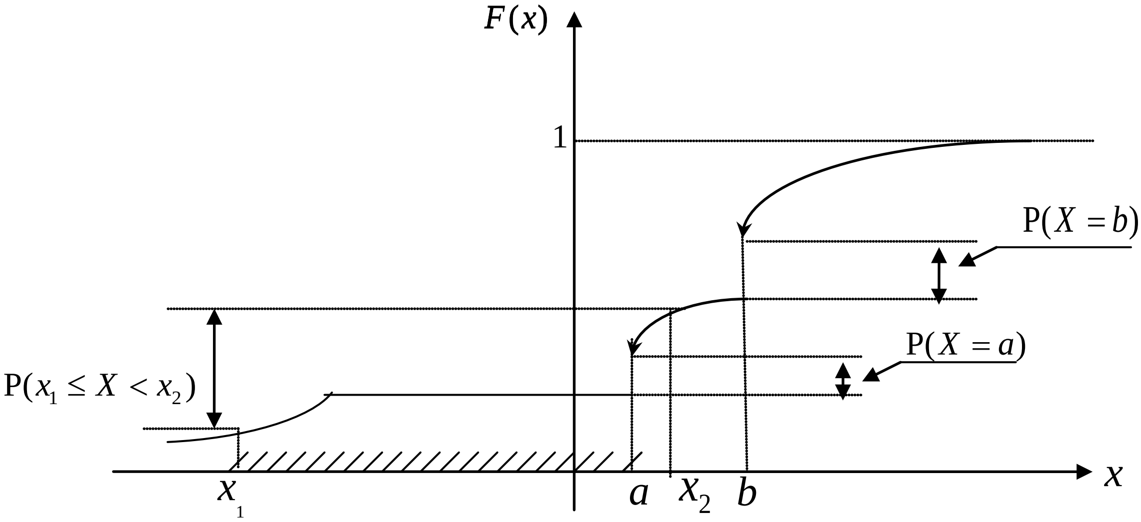
8. $P(a \le X \le b) = F(b+0) - F(a)$.

9. $P(a < X < b) = F(b) - F(a+0)$.

10. $P(a < X \le b) = F(b+0) - F(a+0)$.

(Доказать свойства 8, 9 и 10 самостоятельно).

В общем случае график ФР может иметь вид:



В приложениях, как правило, встречаются СВ, ФР которых являются либо везде кусочно-постоянными (дискретные СВ), либо везде непрерывными и даже гладкими (непрерывные СВ). В каждом из этих случаев существуют более удобные, чем ФР, вероятностные характеристики СВ.

2.2. Дискретные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется дискретной (ДСВ), если множество ее возможных значений X конечно или счетно:

$$\mathrm{X} = \left\{ x_1, x_2, ..., x_n \right\} \text{ или } \mathrm{X} = \left\{ x_1, x_2, ..., x_n, ... \right\}.$$

Для полной вероятностной характеристики ДСВ X достаточно указать все ее возможное значения $x_k \in \mathrm{X}$ и вероятности $p_k = P(X = x_k)$, с которыми эти значения принимаются, $k = 1, 2, \cdots$. При этом, поскольку события $(X = x_k)$, $k = 1, 2, \cdots$, образуют полную группу событий, то

$$\sum_k \mathrm{P}(X = x_k) = \sum_k p_k = 1 \text{ (условие нормировки).}$$

Подобную информацию о ДСВ записывают в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

(2.1)

которую называют законом распределения (ЗР) ДСВ X или рядом распределения.

ЗР является более удобной и наглядной вероятностной характеристикой, чем ФР, и его задание полностью эквивалентно заданию ФР.

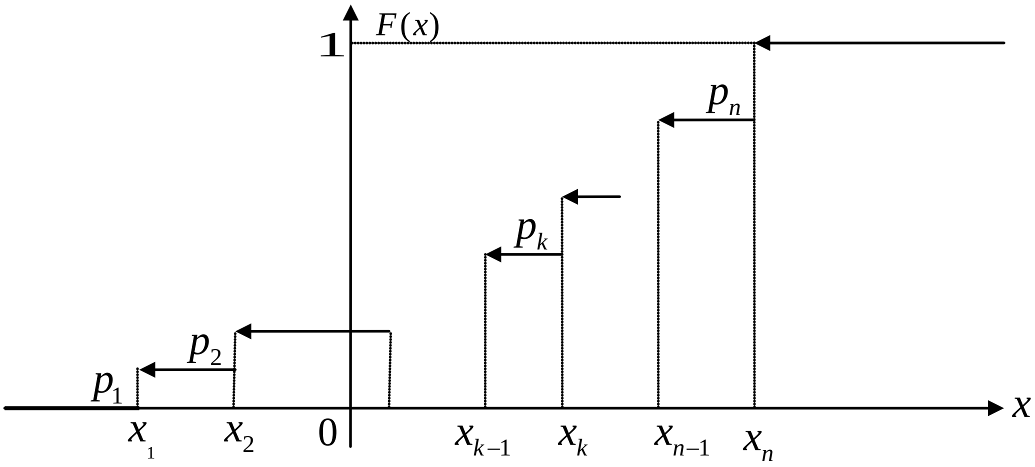
Действительно, ФР ДСВ определяется по ЗР (2.1) с помощью формулы:

$$F\left(x\right) = \mathrm{P}(X < x) = \sum_{k:\, x_k < x} p_k. \qquad (2.2)$$

В случае конечного числа значений ДСВ подробнее формула (2.2) выглядит следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \tilde{o} \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1, & x > x_n. \end{cases}$$

График ФР ДСВ является кусочно-постоянным со скачками в точках $x_k \in \mathrm{X}$ равными $p_k = \mathrm{P}(X = x_k) = \Delta F(x_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ (см. рисунок ниже). Это означает, что ЗР (2.1) по ФР (2.2) всегда можно однозначно восстановить.



Вероятность попадания ДСВ X в любое множество B на числовой прямой определяется по формуле:

$$\mathrm{P}(X \in B) = \sum_{k:\, x_k \in B} p_k \,.$$

Отметим, что через ФР вероятность $\mathrm{P}(X \in B)$ в явном виде может и не выражаться.

2.3. Важнейшие дискретные случайные величины и их законы распределения

1. <u>Вырожденная СВ</u>.

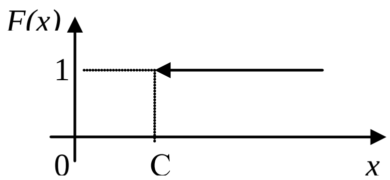
Любую константу C можно рассматривать как СВ, принимающую одно значение: $X = X(\omega) = C$ для любого $\omega \in \Omega$.

Закон распределения вырожденной СВ имеет вид:

X	C
P	1

Выражение для ФР вырожденной СВ и ее график также имеют вырожденный вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ \tilde{o} \le C; \\ 1\ ,\ x > C. \end{cases}$$



2. <u>Индикаторная СВ</u>.

С любым случайным событием A можно связать СВ вида:

$$X = I_A(\omega) = \begin{cases} 1,\ \omega \in A; \\ 0\ ,\ \omega \notin A. \end{cases}.$$

Случайная величина $X = I_A$ называется <u>индикатором случайного события</u> A или <u>индикаторной СВ</u>. Она принимает только два значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, при этом

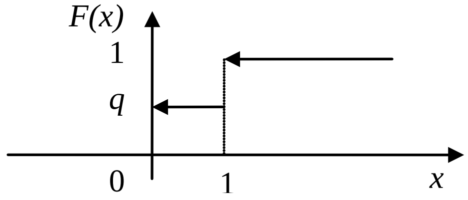
$$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(A)=p,\ \mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(\overline{A})=1-p=q.$$

Закон распределения индикаторной СВ имеет вид:

X	0	1
P	q	p

Аналитическое выражение и график ФР имеют вид:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \tilde{o}\le 0;\\ q\ ,\ 0<x\le 1;\\ 1\ ,\ x>1.\end{cases}$$



3. Биномиальная СВ.

Биномиальной называется ДСВ X, представляющая собой число успехов в n независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, с вероятностью успеха в одном испытании равной p.

Множество возможных значений биномиальной СВ:

$$\mathrm{X}=\left\{0,1,...,n\right\}=\left\{x_k=k,\ \ k=\overline{0,n}\right\}.$$

Вероятности, с которыми значения принимаются, определяются по формуле Бернулли:

$$p_k=\mathrm{P}(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=\overline{0,n}.$$

Закон распределения имеет вид:

X	0	1	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	…	p^n

и называется биномиальным законом распределения.

Условие нормировки при этом следует из формулы Бернулли или непосредственно из бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

(Записать аналитическое выражение для ФР и построить ее график самостоятельно).

Сокращенная запись для биномиальной СВ: $X \sim Bi(n,p)$.

4. Геометрическая СВ.

Геометрической называется ДСВ X, представляющая собой число испытаний, проводимых по схеме Бернулли, до появления первого успеха с вероятностью успеха в одном испытании равной p.

Геометрическая СВ имеет счетное множество возможных значений:

$$\mathrm{X}=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}=\{x_k=k,\ \ k=1,2,\ldots\}.$$

Вероятности значений определяются по формуле:

$$p_k=\mathrm{P}(X=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\ldots.$$

Закон распределения имеет вид:

X	1	2	…	n	…
P	p	qp	…	$q^{n-1}p$	…

и называется геометрическим законом распределения.

Условие нормировки при этом следует из формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p=p\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1.$$

(Записать аналитическое выражение для ФР и построить ее график самостоятельно).

Сокращенная запись для геометрической СВ: $X \sim G(p)$.

5. Пуассоновская СВ.

Пуассоновской называется целочисленная СВ, множество возможных значений которой

$$\mathrm{X}=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}=\{x_k=k,\ \ k=0,1,2,\ldots\},$$

а вероятности, с которыми значения принимаются, задаются формулой:

$$p_k=\mathrm{P}(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Число $a>0$ называется параметром пуассоновской СВ.

Закон распределения имеет вид:

X	0	1	…	n	…
P	e^{-a}	ae^{-a}	…	$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$	…

и называется пуассоновским законом распределения.

Условие нормировки при этом следует из разложения экспоненты в ряд Тейлора:

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=e^{-a}e^{a}=1.$$

(Записать аналитическое выражение для ФР и построить ее график самостоятельно).

Сокращенная запись для пуассоновской СВ: $X \sim \Pi(a)$.

2.4. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятностей

Определение. СВ X называется непрерывной или имеющей непрерывный закон распределения (НСВ), если существует такая функция $f_X(x) = f(x)$, что для любого $x \in \mathrm{R}$ ФР $F(x)$ СВ X допускает представление:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du. \quad (2.3)$$

При этом функция $f(x)$ называется плотностью вероятностей (ПВ) (плотностью распределения вероятностей, плотностью распределения) СВ X.

Замечание. Для существования интеграла (2.3) предполагается, что ПВ $f(x)$ является функцией непрерывна всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Из определения следует:

1. Если СВ X является непрерывной, то ее ФР $F(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

(Следует из свойств интеграла с переменным верхним пределом).

Следствие. Если СВ X является непрерывной, то

$$\mathrm{P}(X = x) = 0 \text{ для любого } x \in \mathrm{R}. \quad (2.4)$$

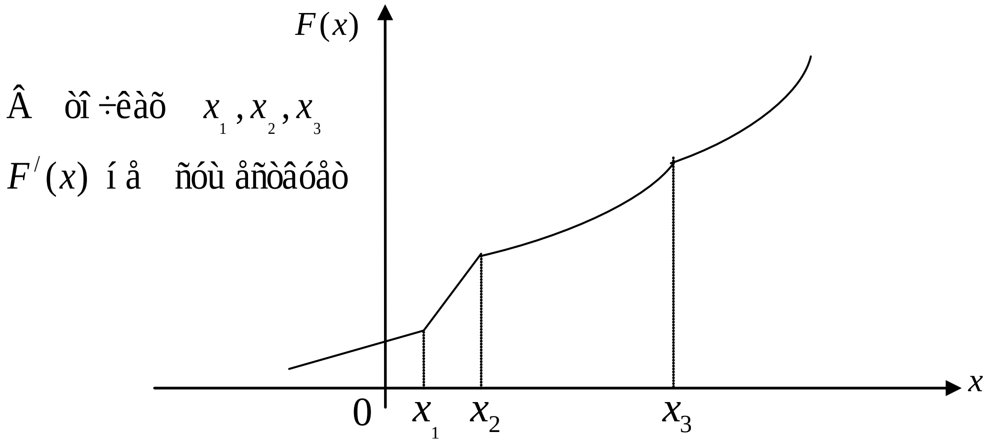
2. Если СВ X является непрерывной, то ее ФР $F(x)$ является дифференцируемой во всех точках, где ПВ $f(x)$ непрерывна, и при этом справедливо равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (2.5)$$

(Также следует из свойств интеграла с переменным верхним пределом).

В точках, где ПВ $f(x)$ непрерывной не является, производная ФР $F'(x)$ не существует. Это означает, что в этих точках ФР $F(x)$, являясь функцией непрерывной, имеет излом, так что $F'(x-0) \neq F'(x+0)$. Но таких точек в соответствии с замечанием не более конечного числа и в них ПВ может быть задана произвольно (на величине интеграла (2.3) и на вероятностях событий, связанных с НСВ, в соответствии с (2.4) это никак не отражается).

Графическая иллюстрация.



Из равенства (2.5) и определения производной следует, что

$$f\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{P}(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Интерпретируя вероятность $\mathrm{P}(x\le X<x+\Delta x)$ как массу, приходящуюся на интервал $\left[x,x+\Delta x\right)$, отношение $\dfrac{\mathrm{P}(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}$ представляет собой среднюю плотность массы на этом интервале, а в пределе при $\Delta x\to 0$ получаем плотность массы в точке *x*. Это оправдывает использование термина «плотность» для функции $f\left(x\right)$.

Формулы (2.3) и (2.5) показывают, что между ФР $F\left(x\right)$ и ПВ $f\left(x\right)$ существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому по аналогии с дискретным случаем ПВ можно называть ЗР НСВ.

<u>Свойства плотности вероятностей.</u>

1. $f\left(x\right)\ge 0$ для любого $x\in \mathrm{R}$.

▲ Поскольку ФР $F\left(x\right)$ является функцией неубывающей, то ее производная $F'\left(x\right)\ge 0$. Поэтому свойство следует из равенства (2.5) ■.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=1$ - условие нормировки.

▲ Из представления (2.3) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=F(+\infty)$, а в соответствии со свойством 3 ФР $F(+\infty)=1$ ■.

3. Вероятность попадания НСВ X в интервал $\left[a,b\right)$ определяется как интеграл от ПВ по этому интервалу:

для любых $a,b\in \mathbb{R} : a<b$

$$\mathrm{P}\left(a\le X<b\right)=\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx. \quad (2.6)$$

▲ Поскольку в соответствии со свойством 5 ФР $\mathrm{P}\left(a \le X < b\right) = F(b) - F(a)$, то свойство непосредственно вытекает из представления (2.3):

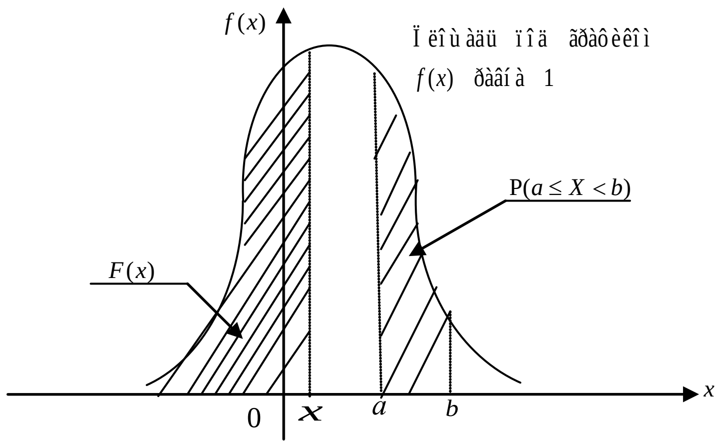
$$\mathrm{P}\left(a \le X < b\right) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f\left(x\right)dx = \int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx \;\blacksquare.$$

<u>Следствие</u>. Для непрерывной СВ X

$$\mathrm{P}\left(a \le X < b\right) = \mathrm{P}\left(a \le X \le b\right) = \mathrm{P}\left(a < X < b\right) = \mathrm{P}\left(a < X \le b\right)$$

и все вероятности определяются с помощью интеграла (2.6).

Графическая иллюстрация ФР и ПВ НСВ.



2.5. Важнейшие непрерывные случайные величины

1. <u>Равномерная СВ</u>.

Говорят, что НСВ X имеет равномерное распределение (равномерный ЗР) на отрезке $\left[a,b\right]$, если множество ее возможных значений $\mathrm{X} = \left[a,b\right]$, а ПВ постоянна на этом отрезке:

$$f(x) = \begin{cases} C \;, x \in \left[a,b\right]; \\ 0 \,, x \notin \left[a,b\right]. \end{cases}$$

Константа C при этом однозначно определяется из условия нормировки:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \int\limits_{a}^{b} C dx = C(b-a), \text{ то есть } C = \frac{1}{b-a}.$$

Таким образом, равномерно распределенная СВ имеет ПВ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \;, x \in \left[a,b\right]; \\ 0 \,, x \notin \left[a,b\right]. \end{cases}$$

и для нее используется сокращенная запись: $X \sim R\left[a,b\right]$.

Найдем ФР $F\left(x\right)$ СВ $X \sim R\left[a,b\right]$.

Для этого рассмотрим три случая:

а) если $x<a$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)du=\int\limits_{-\infty}^{x} 0du=0$;

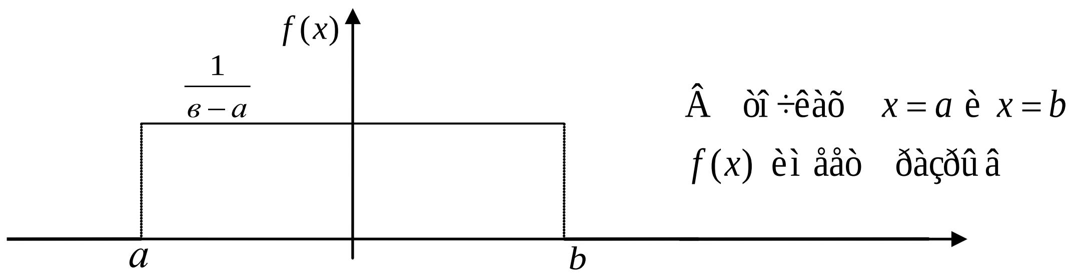
б) если $x\in[a,b]$,то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)du=\int\limits_{-\infty}^{a} 0du+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}du=\frac{x-a}{b-a}$;

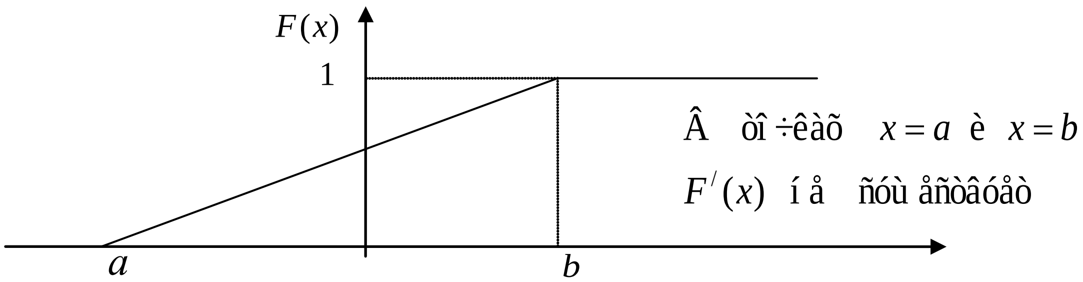
в) если $x>b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)du=\int\limits_{-\infty}^{a} 0du+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}du+\int\limits_{b}^{x}0du=1$.

Окончательно имеем:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}\ ,\ x\in[a,b];\\ 1\ ,\ x>b.\end{cases}$$

Графики ПВ и ФР СВ $X \sim R[a,b]$ имеют вид:





2. <u>Показательная (экспоненциальная) СВ</u>.

Говорят, что НСВ X имеет показательное распределение (показательный, экспоненциальный ЗР), если множество ее возможных значений $\text{X}=[0,+\infty)$, а ПВ имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0\ ,\ x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}\ ,\ x\geq 0.\end{cases}$$

$\lambda>0$ - параметр показательного распределения.

Сокращенная запись для показательной СВ: $X \sim E(\lambda)$.

Проверим условие нормировки.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1 \text{ при любом } \lambda > 0.$$

Найдем ФР СВ $X \sim E(\lambda)$.

Для этого рассмотрим два случая:

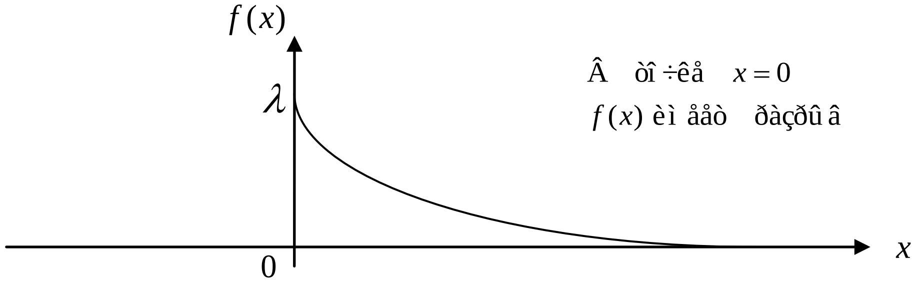
а) если $x < 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$;

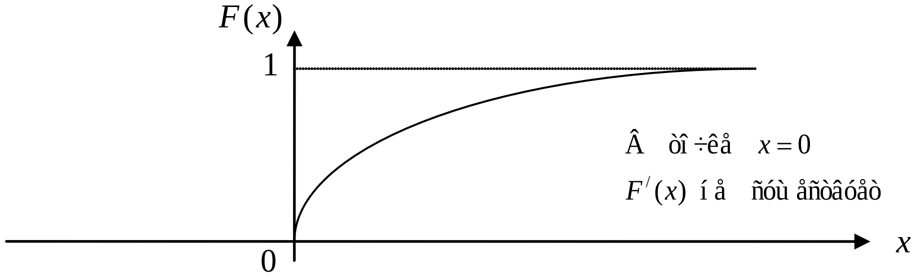
б) если $x \geq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda x}$.

Окончательно имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Графики ПВ и ФР СВ $X \sim E(\lambda)$ имеют вид:





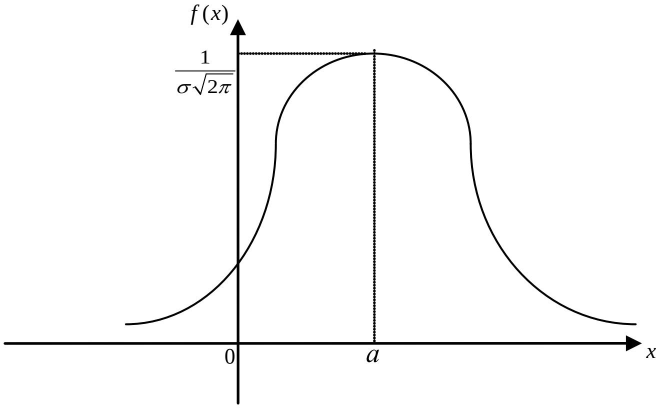
3. <u>Нормальная (гауссовская) СВ</u>.

Говорят, что НСВ X имеет нормальное распределение (нормальный, гауссовский ЗР) с параметрами (a, σ^2), если множество ее возможных значений $\mathrm{X} = (-\infty, +\infty)$, а ПВ имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < a < +\infty, \ \sigma > 0.$$

Сокращенная запись: $X \sim N(a, \sigma^2)$

Кривая ПВ СВ $X \sim N(a, \sigma^2)$ имеет симметричный вид относительно прямой $x = a$ и имеет максимум в точке $x = a$.



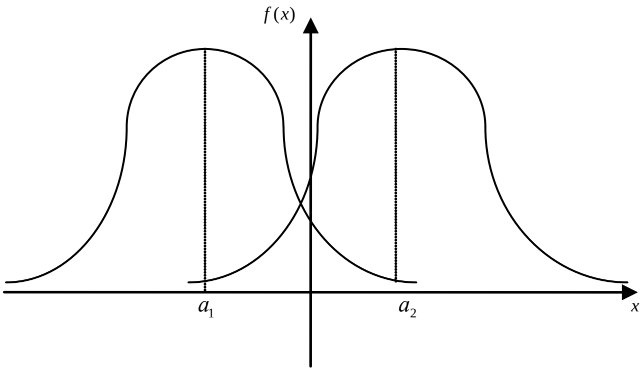
Проверим условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \begin{bmatrix} замена \\ u = \dfrac{x-a}{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

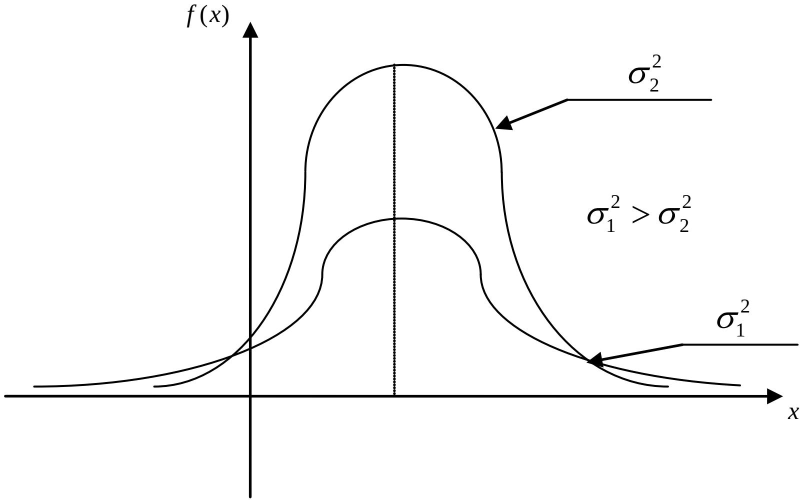
для любых значений параметров a и σ^2 (при этом был использован известный в анализе факт, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$ - интеграл Пуассона).

В зависимости от изменения параметров ПВ нормального закона распределения меняется следующим образом.

Если параметр σ^2 фиксирован, то при изменении a кривая $f(x)$, не изменяя своей формы, просто смещается вдоль оси абсцисс. Таким образом, параметр a является параметром сдвига (положения). Также параметр a характеризует среднее значение СВ.



Изменение σ^2 при фиксированном a равносильно изменению масштаба кривой $f(x)$ по обеим осям: при увеличении σ^2 ПВ становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ^2 - вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков (эффект действия условия нормировки). Таким образом, параметр σ^2 является параметром масштаба.



Также параметр σ^2 характеризует степень разброса значений СВ около среднего значения a в следующем смысле. Чем меньше σ^2, тем больше при фиксированном l вероятность вида $\mathrm{P}(|X-a|<l)$, как площадь под соответствующей ПВ или, другими словами, тем при меньшем l можно получить заданную вероятность вида $\mathrm{P}(|X-a|<l)$. Это означает, что при уменьшении σ^2 значения СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ более плотно группируются около a, то есть степень разброса значений СВ около среднего значения a меньше.

Если $a=0$ и $\sigma^2=1$, то нормальный ЗР называется <u>стандартным</u>, его ПВ имеет вид:

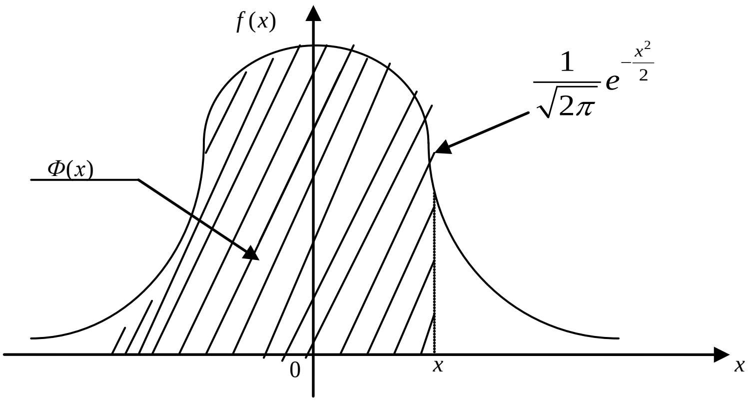
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и называется функцией Гаусса.

ФР СВ $X \sim N(0,1)$ имеет вид:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

и не выражается в элементарных функциях. Функцию $\Phi(x)$ называют функцией Лапласа (или интегралом вероятностей). Графическая иллюстрация приведена на рисунке ниже.



<u>Свойства функции Лапласа</u> $\Phi(x)$:

1. $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$;

2. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ для $x>0$.

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ для $x>0$ табулированы.

ФР СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ также выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}\,du=\begin{bmatrix}\text{çàì åí à}\\ z=\dfrac{u-a}{\sigma}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ в заданный интервал $[x_1,x_2)$ определяется по формуле:

$$\mathrm{P}(x_1\le X<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Наиболее просто выражается через функцию Лапласа вероятность попадания СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ в интервал длины $2l$, симметричный относительно точки $x=a$.

$$\mathrm{P}(a-l<X<a+l)=\mathrm{P}(|X-a|<l)=\Phi\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right)=$$

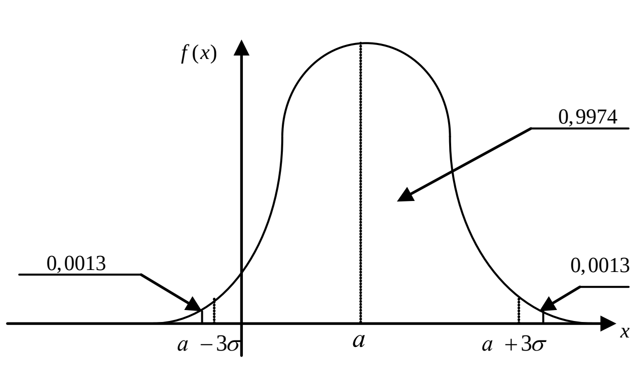
$$=\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1.$$

Далее, если положить $l=3\sigma$ и учесть, что $\Phi(3)=0{,}9987$, то получаем:

$$\mathrm{P}(a-2\sigma<X<a+3\sigma)=\mathrm{P}(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)-1=0{,}9974.$$

Полученный результат носит название «Правило трех сигма». Он означает, что «практически все» значения СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ находятся внутри интервала $(a-3\sigma,a+3\sigma)$ в том смысле, что вероятность СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ принять значение, не принадлежащее этому интервалу, пренебрежимо мала ($\approx 0{,}0026$).

Графическая иллюстрация.



Нормальный закон распределения очень распространен и имеет чрезвычайно большое значение для практики.

5. СВ, имеющая <u>распределение Коши</u>.

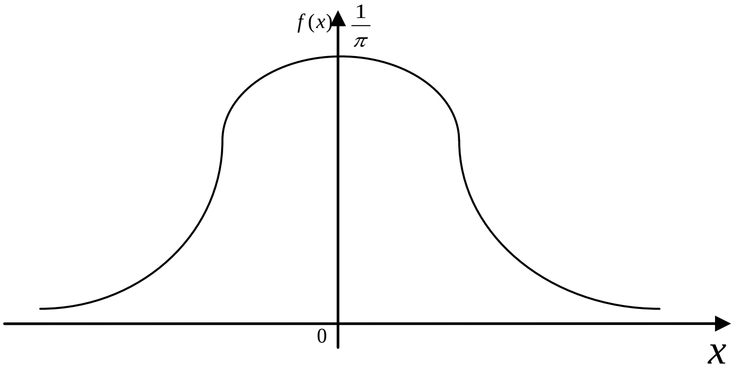
Говорят, что НСВ X имеет ЗР Коши, если множество ее возможных значений $\mathrm{X}=(-\infty,+\infty)$, а ПВ имеет вид:

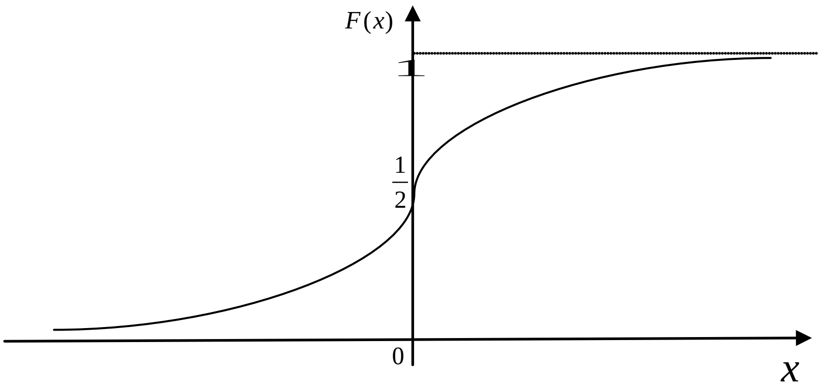
$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

ФР СВ, распределенной по закону Коши, имеет вид:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{\pi}arctgu\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}(arctgx+\frac{\pi}{2}).$$

Графики ПВ и ФР СВ, распределенной по закону Коши, выглядят следующим образом:





2.6. Числовые характеристики случайных величин

Функция распределения, закон распределения и плотность вероятностей полностью характеризуют дискретные и непрерывные случайные величины с вероятностной точки зрения. Однако во многих практических задачах нет надобности в таком полном описании случайных величин. Часто бывает достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения вероятностей случайной величины. Числа, выражающие в сжатой форме характерные свойства распределения случайной величины, называются числовыми характеристиками случайной величины. Наиболее важные среди них математическое ожидание и дисперсия.

2.6.1. Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим отдельно случай ДСВ и НСВ.

Пусть X - ДСВ с конечным множеством возможных значений $\mathrm{X}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ и $p_i=\mathrm{P}(X=x_i),\ i=1,2,\cdots,n,$ - вероятности, с которыми эти значения принимаются, то есть задан закон распределения ДСВ:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Предположим, что над СВ X произведено N независимых наблюдений, в результате которых значение x_1 появилось m_1 раз, x_2 - m_2 раз,…, x_n - m_n раз ($\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = N$). Тогда среднее значение СВ (среднее арифметическое) по результатам N наблюдений можно записать в виде:

$$\overline{x}=\frac{1}{N}(m_1x_1+...+m_nx_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{m_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i^*,$$

где p_i^* - статистическая вероятность (относительная частота) события $(X=x_i),\ i=\overline{1,n}$. Известно, что p_i^* при большом N близка к истинной вероятности $p_i=\mathrm{P}(X=x_i),\ i=\overline{1,n}$. Поэтому, если наблюдения над СВ X не производятся, то за ее среднее значение целесообразно принять величину $\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i$.

Определение. Математическим ожиданием ДСВ X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i=\mathrm{P}(X=x_i),\ i=1,2\cdots$, называется величина

$$\mathrm{M}X=\sum_i x_ip_i, \qquad (2.7)$$

если ряд в правой части абсолютно сходится: $\sum\limits_i |x_i|\,p_i<\infty$.

Если ряд в правой части абсолютно расходится, то говорят, что математического ожидания у ДСВ X не существует.

Замечание. Естественно, что вопрос о сходимости ряда встает только в случае, когда множество возможных значений ДСВ X бесконечно (но счетно). У ДСВ, принимающей конечное число значений, математическое ожидание существует всегда.

Пусть теперь X - НСВ с ПВ $f(x)$. Для определения МО построим следующую ДСВ X^h, аппроксимирующую НСВ X.

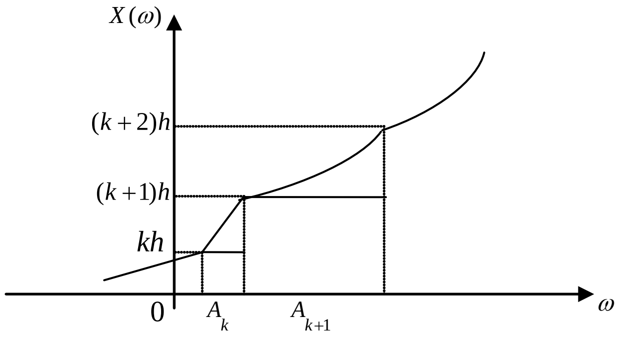
Для некоторого $h>0$ рассмотрим точки вида $kh,\ k=0,\pm1,\pm2,...,$ на числовой прямой и положим

$X^h = X^h(\omega) = kh$, если $\omega \in A_k = \{\omega : kh \le X < (k+1)h\}$, $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$.

СВ X^h принимает значения kh с вероятностями

$$p_k = \mathrm{P}(X^h = kh) = \mathrm{P}(kh \le X < (k+1)h) = \int_{kh}^{(k+1)h} f(x)dx \approx f(kh)h$$

(при малом $h>0$), $k = 0,\pm1,\pm2,\dots$.



При любом $h>0$ $\left|X^h - X\right| \le h$ и при $h \to 0$ ДСВ X^h все точнее аппроксимирует НСВ X. При этом

$$MX^h = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} khp_k \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} khf(kh)h,$$

если ряд сходится абсолютно. Последняя сумма является интегральной суммой для $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, который и следует считать МО НСВ X.

Определение. Математическим ожиданием НСВ X с плотностью вероятностей $f(x)$ называется величина

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (2.8)$$

если интеграл в правой части абсолютно сходится: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)dx < \infty$.

Если интеграл в правой части абсолютно расходится, то говорят, что математического ожидания у НСВ X не существует.

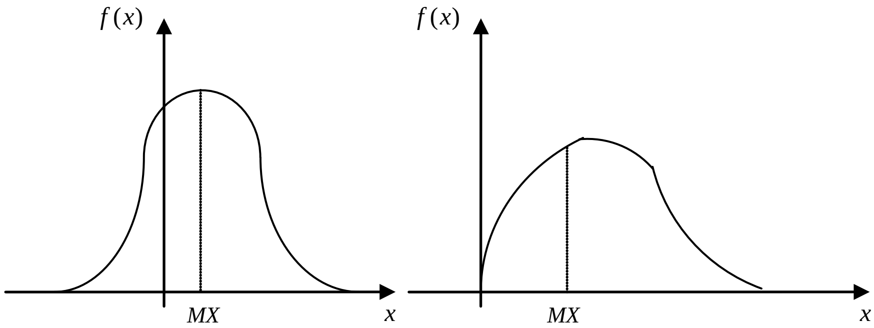
Замечание. Формулы (2.7) и (2.8) для МО ДСВ и НСВ можно объединить в одну, записав МО в виде

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}F(x),$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана-Стилтьеса по ФР $F(x)$ (подробнее см. учебник Гнеденко Б.В.).

Механическая интерпретация МО. Если закон распределения интерпретировать как распределение единичной массы вдоль оси абсцисс, то МО – координата центра тяжести (центра масс).

Геометрическая интерпретация МО. МО – среднее значение СВ, около которого группируются другие ее значения (иногда вместо МО СВ X говорят среднее СВ X).



Основная теорема о МО.

Пусть X - некоторая СВ, ЗР которой известен (дискретный или непрерывный), $g = g(x)$ - неслучайная функция, область определения которой содержит множество возможных значений СВ X . Рассмотрим СВ $Y = g(X)$, являющуюся функцией от СВ X .

Как можно найти $\mathrm{M}Y = \mathrm{M}\,g(X)$?

Есть два способа:

а) по ЗР СВ X ищется ЗР СВ Y и используются стандартные формулы (2.7) и (2.8);

б) с помощью основной теоремы о МО (ОТМО).

Теорема. (ОТМО, теорема о замене переменных, без доказательства)

Пусть X - некоторая СВ, ЗР которой известен, СВ $Y = g(X)$ является функцией от СВ X .

1. Если СВ X является дискретной, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и при этом ряд $\sum_i g(x_i)\,p_i$ абсолютно сходится ($\sum_i |g(x_i)|\,p_i < \infty$), то у СВ $Y = g(X)$ существует МО и

$$\mathrm{M}Y = \mathrm{M}\,g(X) = \sum_i g(x_i)p_i\,.$$

2. Если СВ X является непрерывной с ПВ $f(x)$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ абсолютно сходится ($\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, f(x)dx < \infty$), то у СВ $Y = g(X)$ существует МО и

$$\mathrm{M}Y = \mathrm{M}\, g(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx .$$

Смысл ОТМО: Для нахождения МО СВ $Y = g(X)$, являющейся функцией от СВ X, не требуется знать ЗР СВ Y, достаточно лишь знать ЗР СВ X.

Свойства МО.

1. МО постоянной C равно этой постоянной: $\mathrm{M}C = C$.

2. Постоянная выносится за знак МО:

$$\mathrm{M}(CX) = C\,\mathrm{M}\,X .$$

▲ Следует из ОТМО при $g(x) = Cx$ ■.

3. МО суммы любых СВ X и Y равно сумме их МО:

$$\mathrm{M}(X+Y) = \mathrm{M}\,X + \mathrm{M}Y .$$

▲ Следует из свойств линейности рядов и интегралов ■.

4. Если $X \geq 0$, то и $\mathrm{M}\,X \geq 0$.

Если $X \geq 0$ и при этом $\mathrm{M}\,X = 0$, то $X = 0$.

▲ Следует из определения МО для ДСВ и НСВ ■.

Следствие. Если $X \leq Y$, то $\mathrm{M}\,X \leq \mathrm{M}Y$.

▲ Достаточно применить свойство 4 к СВ $Y - X \geq 0$ ■.

5. $|\mathrm{M}\,X| \leq \mathrm{M}|X|$

▲ Следует из того, что $-|X| \leq X \leq |X|$ для любого $\omega \in \Omega$. Поэтому в силу свойства 4 МО $-\mathrm{M}|X| \leq \mathrm{M}\,X \leq \mathrm{M}|X|$, то есть $|\mathrm{M}\,X| \leq \mathrm{M}|X|$ ■.

Замечание. Свойство 5 справедливо и в более общем виде:

Для любой выпуклой вниз функции $g = g(x)$ справедливо неравенство:

$$g(\mathrm{M}\,X) \leq \mathrm{M}\,g(X) \text{ (неравенство Йенсена).}$$

2.6.2. Моменты. Дисперсия. Среднеквадратическое отклонение.

Кроме МО, в теории вероятностей используется еще ряд ЧХ различного назначения. Среди них основную роль играют моменты – начальные и центральные.

Определение. Начальным моментом k-го порядка СВ X называется МО k-ой степени этой СВ:

$$\alpha_k = \mathrm{M}\, X^k, \quad (2.9)$$

если МО существует.

Как правило, используют начальные моменты α_k целого положительного порядка. В частности, при $k = 1$ имеем $\alpha_1 = \mathrm{M}\, X$, а при $k = 2$ $\alpha_2 = \mathrm{M}\, X^2$.

Определение. Центральным моментом k-го порядка СВ X называется МО k-ой степени отклонения этой СВ от ее МО:

$$\mu_k = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\, X)^k, \quad (2.10)$$

если МО существует.

СВ $\overset{\circ}{X} = X - \mathrm{M}\, X$ называется центрированной СВ (так как $\mathrm{M}\, \overset{\circ}{X} = \mathrm{M}\, X - \mathrm{M}\, X = 0$). Таким образом, центральный момент – это начальный момент для центрированной СВ:

$$\mu_k = \mathrm{M}\, \overset{\circ}{X}{}^k.$$

Аналогично начальным моментам, центральные моменты μ_k обычно используют целого положительного порядка.

В частности, при $k = 1$ имеем $\mu_1 = \mathrm{M}\, \overset{\circ}{X} = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\, X) = 0$ для всех СВ.

Особое значение для практики имеет второй центральный момент μ_2, который называется дисперсией СВ и обозначается $\mathrm{D}\, X$.

Определение. Дисперсией СВ X называется МО квадрата отклонения СВ от ее МО:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{M}\left(X - \mathrm{M}X\right)^2. \quad (2.11)$$

Для дисперсии $\mathrm{D}X$ справедливо также следующее выражение:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{M}\left(X - \mathrm{M}X\right)^2 = \mathrm{M}\left[X^2 - 2X \cdot \mathrm{M}\, X + (\mathrm{M}\, X)^2\right] =$$

$$= \mathrm{M}\, X^2 - 2MX \cdot \mathrm{M}\, X + (\mathrm{M}\, X)^2 = \mathrm{M}\, X^2 - (\mathrm{M}\, X)^2$$

Таким образом, наряду с (2.11)

$$\mathrm{D}\, X = \mathrm{M}\, X^2 - (\mathrm{M}\, X)^2. \quad (2.12)$$

С помощью формулы (2.12) на практике вычислять дисперсию часто бывает проще.

Дисперсия $\mathrm{D}\, X$ характеризует степень разброса (рассеивания) значений СВ относительно ее среднего значения (МО). Чем плотнее группируются значения СВ около МО, тем дисперсия меньше (ср. со смыслом параметра σ^2 в нормальном законе распределения).

Механическая интерпретация дисперсии. Дисперсия представляет собой момент инерции распределения масс относительно центра масс (центра тяжести, МО).

Вычисляются начальные моменты α_k по формулам, вытекающим из ОТМО для функции $g(x) = x^k$:

$$\alpha^k = \mathrm{M}X^k = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i, \text{ åñëè } X - \text{ÄÑÂ}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \text{ åñëè } X - \text{Í ÑÂ}. \end{cases}$$

Центральные моменты μ_k вычисляются по формулам, вытекающим из ОТМО для функции $g(x) = (x - \mathrm{M}X)^k$:

$$\mu_k = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^k = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - \mathrm{M}\,X)^k p_i, \text{ åñëè } X - \text{ÄÑÂ}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{M}\,X)^k f(x)dx, \text{ åñëè } X - \text{Í ÑÂ}. \end{cases}$$

Формулы для вычисления дисперсии $\mathrm{D}X$ вытекают из ОТМО для функции $g(x) = (x - \mathrm{M}X)^2$ (если используется формула (2.11)) или функции $g(x) = x^2 - (\mathrm{M}X)^2$ (если используется формула (2.12)):

$$\mathrm{D}\,X = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - \mathrm{M}\,X)^2 p_i = \sum\limits_i x_i^2 p_i - (\mathrm{M}\,X)^2, \text{ если } X - \text{ДСВ}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{M}\,X)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2, \text{ если } X - \text{НСВ}. \end{cases}$$

Свойства дисперсии

1. $\mathrm{D}\,X \geq 0$, $\mathrm{D}\,X = 0$ тогда и только тогда, когда $X = C = const$.

▲ Свойство следует из свойства 4 МО ■.

2. Дисперсия не изменяется при прибавлении к СВ константы:

$$\mathrm{D}(X + C) = \mathrm{D}\,X.$$

▲ $\mathrm{D}(X + C) = \mathrm{M}\big[(X + C) - \mathrm{M}(X + C)\big]^2 = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2 = \mathrm{D}\,X$ ■.

3. Константа из-под знака дисперсии выносится с квадратом:

$$\mathrm{D}(CX) = C^2\,\mathrm{D}\,X.$$

▲ $\mathrm{D}(CX) = \mathrm{M}\big[CX - \mathrm{M}(CX)\big]^2 = C^2\,\mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2 = \mathrm{D}\,X$ ■.

Дисперсия имеет размерность квадрата СВ. Характеристикой рассеивания, размерность которой совпадает с размерностью СВ, является среднее квадратическое отклонение σ_X (стандартное отклонение), определяемое как корень арифметический из дисперсии:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}.$$

С учетом данного определения часто пишут: $\mathrm{D}X = \sigma_X^2$.

Другие используемые на практике ЧХ.

Величина x_p, определяемая равенством $F\left(x_p\right)=p$, называется p - квантилем распределения СВ X.

Квантиль $x_{0,5}$ называется медианой распределения СВ X. Другими словами, медиана – это значение $x_{0,5}$ на числовой прямой, для которого

$$\mathrm{P}(X \le x_{0,5}) = \mathrm{P}(X \ge x_{0,5}) = 0,5$$

Модой распределения НСВ X называется число x_M, при котором ПВ $f\left(x\right)$ достигает максимального значения. Распределения с одной модой называются унимодальными, а распределения с несколькими модами – мультимодальными.

Для симметричных распределений медиана, мода и МО совпадают.

2.7. Числовые характеристики важнейших случайных величин

1. Индикаторная СВ.

Индикаторная СВ имеет вид:

$$X = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in A; \\ 0\ , \ \omega \notin A. \end{cases}$$

а ее ЗР:

X	0	1
P	q	p

где $p = \mathrm{P}(A),\ q = 1 - p$.

Найдем МО и дисперсию этой СВ.

$$\mathrm{M}\,X = \mathrm{M}\,I_A = \sum_i x_i p_i = 0\cdot q + 1\cdot p = p.$$

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{D}\,I_A = \mathrm{M}\,X^2 - (\mathrm{M}\,X)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - p^2 = 0\cdot q + 1\cdot p - p^2 = pq.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X = p\,,\ \mathrm{D}\,X = pq}$

2. Биномиальная СВ $X \sim Bi(n,p)$.

Множество возможных значений биномиальной СВ

$$\mathrm{X} = \left\{0,1,...,n\right\} = \left\{x_i = i,\ i = \overline{0,n}\right\},$$

а вероятности, с которыми значения принимаются, определяются по формуле Бернулли:

$$p_i = \mathrm{P}(X = i) = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i},\quad i = \overline{0,n}.$$

Найдем МО СВ $X \sim Bi(n,p)$.

$$\mathrm{M}\,X = \sum_i x_i p_i = \sum_{i=0}^{n} i C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i\frac{n!}{i!(n-i)!}p^i q^{n-i} = np\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}p^{i-1}q^{n-i} =$$

$$np\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}p^{i-1}q^{n-i}=np\sum_{i=1}^{n}C_{n-1}^{i-1}p^{i-1}q^{n-i}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

Для нахождения дисперсии СВ $X \sim Bi(n,p)$ вычислим вначале $\mathrm{M}\,X^2$.

$$\mathrm{M}\,X^2=\sum_i x_i^2 p_i=\sum_{i=0}^{n}i^2\frac{n!}{i!(n-i)!}p^iq^{n-i}=np\sum_{i=1}^{n}(i-1+1)\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}p^{i-1}q^{n-i}=$$

$$=np\left[\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-2)!(n-i)!}p^{i-1}q^{n-i}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{n-1}^{i-1}p^{i-1}q^{n-i}}_{=1}\right]=np(n-1)p\left[\underbrace{\sum_{i=2}^{n}C_{n-2}^{i-2}p^{i-2}q^{n-i}}_{=1}\right]+np=$$

$$=n^2p^2-np^2+np.$$

Теперь для дисперсии СВ $X \sim Bi(n,p)$ получаем выражение:

$$\mathrm{D}\,X=\mathrm{M}\,X^2-(\mathrm{M}\,X)^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=npq.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X=np,\ \mathrm{D}\,X=npq}$

3. <u>Геометрическая СВ</u> $X \sim G(p)$.

Множество возможных значений геометрической СВ

$$\mathrm{X}=\{1,2,...,n,...\}=\{x_i=i,\ \ i=1,2,...\},$$

а вероятности значений определяются по формуле:

$$p_i=\mathrm{P}(X=i)=q^{i-1}p,\quad i=1,2,....$$

Найдем МО СВ $X \sim G(p)$.

$$\mathrm{M}\,X=\sum_i x_ip_i=\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}.$$

Заметим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}$ представляет собой результат дифференцирования по q геометрической прогрессии $\sum_{i=1}^{\infty}q^i=\frac{q}{1-q}$. Поэтому

$$\mathrm{M}\,X=p\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=1}^{\infty}q^i\right)=p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Для нахождения дисперсии СВ $X \sim G(p)$ вычислим вначале $\mathrm{M}\,X^2$.

$$\mathrm{M}\,X^2=\sum_i x_i^2p_i=\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}=p\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=1}^{\infty}iq^i\right)=p\frac{d}{dq}\left(q\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}\right).$$

Заметим теперь, что при нахождении МО было получено, что $\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$. Поэтому

$$\mathrm{M}\,X^2 = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Теперь для дисперсии СВ $X \sim G(p)$ получаем выражение:

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}\,X^2 - (\mathrm{M}\,X)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X = \frac{1}{p},\ \mathrm{D}\,X = \frac{q}{p^2}}$

4. Пуассоновская СВ $X \sim \Pi(a)$.

Множество возможных значений пуассоновской СВ

$$\mathrm{X} = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\} = \{x_i = i,\ \ i = 0,1,2,\ldots\},$$

а вероятности, с которыми значения принимаются, задаются формулой:

$$p_i = \mathrm{P}(X = i) = \frac{a^i}{i!}e^{-a},\quad i = 0,1,2,\ldots.$$

Найдем МО СВ $X \sim \Pi(a)$.

$$\mathrm{M}\,X = \sum_i x_i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{a^i}{i!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = ae^{-a}e^{a} = a.$$

Для нахождения дисперсии СВ $X \sim \Pi(a)$ вычислим вначале $\mathrm{M}\,X^2$.

$$\mathrm{M}\,X^2 = \sum_i x_i^2 p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2\frac{a^i}{i!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{i=1}^{\infty}(i-1+1)\frac{a^{i-1}}{(i-1)!} =$$

$$= ae^{-a}\left[a\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}\right] = a^2 + a$$

Теперь для дисперсии СВ $X \sim \Pi(a)$ получаем выражение:

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}\,X^2 - (\mathrm{M}\,X)^2 = a^2 + a - a^2 = a.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X = a,\ \mathrm{D}\,X = a}$

5. Равномерная СВ $X \sim R[a,b]$.

ПВ СВ X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$, имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\ , & x \in [a,b]; \\ 0\ , & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Найдем МО СВ $X \sim R[a,b]$.

$$\mathrm{M}\,X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x\right)dx = \int\limits_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Найдем далее $\mathrm{M}\,X^2$.

$$\mathrm{M}\,X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\left(x\right)dx = \int\limits_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Для дисперсии СВ $X \sim R\left[a,b\right]$ получаем выражение:

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}\,X^2 - (\mathrm{M}\,X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X = \frac{a+b}{2},\ \mathrm{D}\,X = \frac{(b-a)^2}{12}}$

6. <u>Показательная (экспоненциальная) СВ</u> $X \sim E(\lambda)$.

ПВ показательно распределенной СВ X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,,\ x<0; \\ \lambda e^{-\lambda x}\ \ ,\ x \ge 0. \end{cases}$$

Найдем МО СВ $X \sim E(\lambda)$.

$$\mathrm{M}\,X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x\right)dx = \lambda\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Найдем далее $\mathrm{M}\,X^2$.

$$\mathrm{M}\,X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\left(x\right)dx = \lambda\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Для дисперсии СВ $X \sim E(\lambda)$ получаем выражение:

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}\,X^2 - (\mathrm{M}\,X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X = \frac{1}{\lambda},\ \mathrm{D}\,X = \frac{1}{\lambda^2}}$

7. <u>Нормальная (гауссовская) СВ</u> $X \sim N(a,\sigma^2)$.

ПВ нормально распределенной с параметрами (a,σ^2) СВ X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < a < +\infty,\ \sigma > 0,\ -\infty < x < +\infty.$$

Найдем МО СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$.

$$\mathrm{M}\,X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f\left(x\right)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \left[\begin{matrix} \text{замена} \\ u = \dfrac{x-a}{\sigma} \end{matrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma u)e^{-\frac{u^2}{2}}du =$$

$$= a\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du}_{=1 \text{ в силу нормировки}} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}}du}_{=0 \text{ в силу нечетности}} = a$$

Найдем дисперсию СВ $X \sim N(a,\sigma^2)$ (причем в данном случае удобнее пользоваться выражением для дисперсии $\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2$).

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mathrm{M}\,X)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \begin{bmatrix} \text{замена} \\ u = \dfrac{x-a}{\sigma} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{0}^{+\infty} u\,de^{-\frac{u^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-ue^{-\frac{u^2}{2}}\Bigg|_0^{+\infty} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du}_{=\sqrt{2\pi}/2}\right) = \sigma^2.$$

Окончательно, $\boxed{\mathrm{M}\,X = a,\ \mathrm{D}\,X = \sigma^2}$

8. <u>СВ, имеющая распределение Коши</u>.

СВ X, распределенная по закону Коши, имеет ПВ вида:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ -\infty < x < +\infty.$$

Найдем МО этой СВ.

$$\mathrm{M}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \infty - \infty\ (\textit{неопределенность}).$$

В связи с этим проверим выполнения условие существования МО, а именно абсолютную сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Bigg|_0^{+\infty} = \infty.$$

Поскольку интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ абсолютно расходится, то у СВ, распределенной по закону Коши, МО не существует. Следовательно, у данной СВ не существует дисперсия и другие моменты более высоких порядков.

Глава 3. Случайные векторы

3.1. Случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства.

Часто в вероятностных моделях случайных явлений приходится рассматривать сразу несколько СВ, причем изучение каждой СВ отдельно от других приводит к недопустимому упрощению модели. Математической моделью таких случайных явлений является понятие случайного вектора ($\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$).

<u>Определение</u>. Совокупность случайных величин $X_1,..,X_n$, значения которых совместно описывают результат некоторого случайного явления, называется n-мерным <u>случайным вектором</u> (многомерной СВ или системой СВ) и обозначается $\mathbf{X}=\left(X_1,..,X_n\right)$. При этом сами СВ X_i, $i=\overline{1,n}$ называют <u>координатами</u> (компонентами, составляющими) $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X}$.

Исчерпывающей вероятностной характеристикой $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ является его функция распределения (ФР). Рассмотрим вначале случай двумерного случайного вектора $(n=2)$, как наиболее часто встречающийся в практических приложениях, а потом полученные результаты обобщим на случай многомерный.

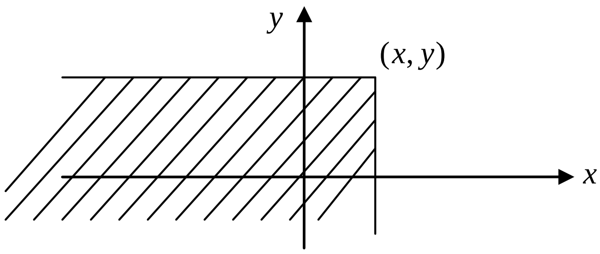
Двумерный $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ обычно обозначают (X,Y) (без введения индексов).

<u>Определение</u>. ФР $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ (X,Y) называется функция $F_{XY}(x,y)$ двух действительных переменных x и y, определяемая при каждом $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ равенством:

$$F_{XY}\left(x,y\right)=\mathrm{P}\left\{\omega:(X(\omega)<x)\cap(Y(\omega)<y\right\}=\mathrm{P}\left(X<x,Y<y\right). \quad (3.1)$$

ФР $F_{XY}(x,y)$ $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ (X,Y) называют также двумерной ФР или совместной ФР СВ X и Y.

Геометрически ФР $F_{XY}(x,y)$ представляет собой вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрант с вершиной в точке $\left(x,y\right)$.



Из определения (3.1) вытекают следующие свойства ФР $F_{XY}(x,y)$.

<u>Свойства двумерной ФР</u>.

1. $0\le F_{XY}\left(x,y\right)\le 1$ для любых $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(свойство очевидно, так как ФР $F_{XY}(x,y)$ - вероятность).

2. $F_{XY}\left(x,y\right)$ является неубывающей функцией по каждому из своих аргументов.

▲ Когда один из аргументов x или y фиксирован, доказательство свойства 2 полностью аналогично одномерному случаю. ■.

3. $F_{XY}(x,y)$ является непрерывной слева функцией по каждому из своих аргументов.

▲ Когда один из аргументов x или y фиксирован, доказательство свойства 3 полностью аналогично одномерному случаю ■.

4. $F_{XY}(-\infty,y)=F_{XY}(x,-\infty)=F_{XY}(-\infty,-\infty)=0$; $F_{XY}(+\infty,+\infty)=1$.

▲ В силу свойства 5 вероятности

$$F_{XY}(-\infty,y)=\mathrm{P}(X<-\infty,Y<y)=\mathrm{P}(\varnothing\cap(Y<y))=\mathrm{P}(\varnothing)=0;$$
$$F_{XY}(x,-\infty)=\mathrm{P}(X<x,Y<-\infty)=\mathrm{P}((X<x)\cap\varnothing)=\mathrm{P}(\varnothing)=0;$$
$$F_{XY}(-\infty,-\infty)=\mathrm{P}(X<-\infty,Y<-\infty)=\mathrm{P}(\varnothing\cap\varnothing)=\mathrm{P}(\varnothing)=0.$$

В силу аксиомы нормированности

$$F_{XY}(+\infty,+\infty)=\mathrm{P}(X<+\infty,Y<+\infty)=\mathrm{P}(\Omega\Omega)=\mathrm{P}(\Omega)=1$$ ■.

5. $F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x)$, $F_{XY}(+\infty,y)=F_Y(y)$,

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ - функции распределения координат X и Y соответственно.

Свойство 5 означает, что по функции распределения двумерного случайного вектора (X,Y) всегда можно найти одномерные (маргинальные) функции распределения его координат. Обратное без дополнительной информации неверно.

▲ В соответствии со свойствами вероятности имеем:

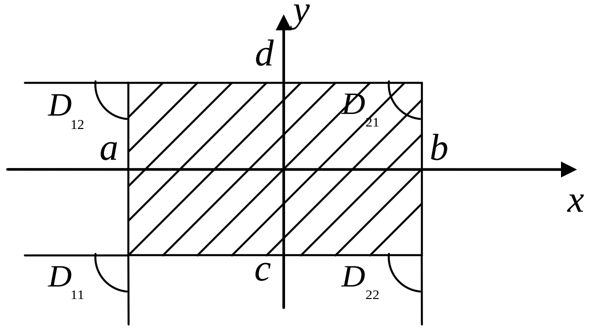
$$F_{XY}(x,+\infty)=\mathrm{P}(X<x,Y<+\infty)=\mathrm{P}((X<x)\cap\Omega)=\mathrm{P}(X<x)=F_X(x);$$
$$F_{XY}(+\infty,y)=\mathrm{P}(X<+\infty,Y<y)=\mathrm{P}(\Omega\cap(Y<y))=\mathrm{P}(Y<y)=F_Y(y)$$ ■.

6. Вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в прямоугольник $B=\{(x,y): a\le x<b, c\le y<d\}$ со сторонами, параллельными осям координат, определяется по формуле:

$$\mathrm{P}\{(X,Y)\in B\}=\mathrm{P}(a\le X<b, c\le Y<d)=F_{XY}(b,d)-F_{XY}(a,d)-F_{XY}(b,c)+F_{XY}(a,c)$$

▲ Обозначим

$$D_{11}=\{\omega: X<a, Y<c\};$$
$$D_{12}=\{\omega: X<a, Y<d\};$$
$$D_{21}=\{\omega: X<b, Y<c\};$$
$$D_{22}=\{\omega: X<b, Y<d\}.$$



Очевидно, что $D_{22}=B+D_{12}+D_{21}$. При этом события B и $D_{12}+D_{21}$ являются несовместными, а $D_{12}\cap D_{21}=D_{11}$. Поэтому по теореме сложения вероятностей получаем:

$$P(D_{22}) = P(B) + P(D_{12} + D_{21}) = P(B) + P(D_{12}) + P(D_{21}) - P(D_{11}).$$

Остается теперь учесть, что $P(D_{22}) = F_{XY}(b,d)$, $P(D_{12}) = F_{XY}(a,d)$, $P(D_{21}) = F_{XY}(b,c)$, $P(D_{11}) = F_{XY}(a,c)$ ■.

Аналогичными являются определение и свойства многомерной ФР.

<u>Определение</u>. Функция n действительных переменных, определяемая для любого $\left(x_1,...,x_n\right) \in \mathbb{R}^n$ равенством

$$F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,..,x_n\right) = \mathrm{P}\left(X_1 < x_1,.., X_n < x_n\right),$$

называется <u>функцией распределения</u> случайного вектора $\mathbf{X} = \left(X_1,.., X_n\right)$ или многомерной (n-мерной) ФР или совместной ФР СВ $X_1,.., X_n$.

<u>Свойства многомерной ФР</u>.

1. $0 \le F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,...,x_n\right) \le 1$ для любых $\left(x_1,...,x_n\right) \in \mathbb{R}^n$.

2. $F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,...,x_n\right)$ является неубывающей функцией по каждому из своих аргументов.

3. $F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,...,x_n\right)$ является непрерывной слева функцией по каждому из своих аргументов.

4. $F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,...,x_n\right) = 0$, если хотя бы один из аргументов $x_i = -\infty,\ i = \overline{1,n}$.
$F_{X_1 \ldots X_n}\left(+\infty,...,+\infty\right) = 1$.

5. (Свойство согласованности). По ФР $F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,...,x_n\right)$ $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X} = \left(X_1,.., X_n\right)$ можно получить ФР любой совокупности $(X_{k_1},..., X_{k_m})$ из m $(1 \le m \le n)$ его координат. Для этого следует в ФР $F_{X_1 \ldots X_n}\left(x_1,...,x_n\right)$ положить аргументы $x_i = +\infty$ для $i \ne k_l$, $l = \overline{1,m}$.

Многомерный аналог свойства 6 двумерной ФР приводить не будем из-за необходимости введения разностных операторов и его громоздкой записи.

В приложениях, как правило, имеют дело со $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ двух типов: дискретными и непрерывными. В каждом из этих случаев существуют более удобные, чем ФР, способы задания $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$.

3.2. Дискретные случайные векторы. Закон распределения дискретного случайного вектора

<u>Определение</u>. $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X} = \left(X_1,.., X_n\right)$ называется <u>дискретным (</u>Ä$\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$), если множество его возможных значений конечно или счетно:

$$\mathrm{X} = \left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2},..., \overrightarrow{x_N}\right\} \text{ или } \mathrm{X} = \left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2},..., \overrightarrow{x_N},...\right\},$$

где $\overrightarrow{x_i} = (x_{1i},..., x_{ni}),\ i = 1,2,...$.

Из определения следует, что $\overrightarrow{\text{СВ}}$ является дискретным тогда и только тогда, когда все его координаты X_k, $k = 1,2,...,n$, являются ДСВ.

Рассмотрим более подробно случай двумерного $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$, принимающего конечное число значений (случай счетного числа значений рассмотреть самостоятельно). Для полной вероятностной характеристики такого $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$ достаточно указать все его возможные значения (x_i, y_j) и вероятности $p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$, с которыми эти значения принимаются, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ (предполагается, что СВ X принимает n значений, а СВ Y принимает m значений, так что у вектора $\left(X,Y\right)$ возможных значений $N = nm$).

Как и в одномерном случае, подобную информацию о $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$ записывают в виде таблицы, но с двумя входами:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nm}

(3.2)

которую называют законом распределения (ЗР) $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$ (двумерным дискретным ЗР или совместным ЗР ДСВ X и Y).

При этом, поскольку события $\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$, образуют полную группу событий, то вероятности p_{ij} удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

По двумерному закону распределения вероятность попадания дискретного случайного вектора $\left(X,Y\right)$ в любую область $D \subset \mathbb{R}^2$ определяется по формуле:

$$\mathrm{P}\left\{\left(X,Y\right) \in D\right\} = \sum_{(i,j):\,(x_i,y_j)\in D} p_{ij}\,.$$

В частности, когда $D = (-\infty, x) \times (-\infty, y)$, получается следующее выражение для функции распределения $F_{XY}\left(x,y\right)$ $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$:

$$F_{XY}\left(x,y\right) = \sum_{(i,j):\,x_i<x,\,y_j<y} p_{ij}\,.$$

(ср. с одномерным случаем, когда $F\left(x\right) = \sum_{k:\,x_k<x} p_k$).

График ФР $F_{XY}\left(x,y\right)$ $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$ является кусочно-постоянным со скачками в точках (x_i, y_j), являющихся его возможными значениями, величина скачков определяется вероятностями p_{ij} $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$.

Одномерные ЗР каждой из СВ X и Y в отдельности (маргинальные законы распределения) ÄÑÂ (X,Y) являются дискретными и находятся по двумерному ЗР следующим образом:

Так как событие $(X = x_i) = \bigcup_{j=1}^{m}(X = x_i, Y = y_j),\ \overline{i=1,n},$ то в силу аддитивности вероятности

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ \ \overline{i=1,n}. \qquad (3.3)$$

Таким образом, ЗР СВ X имеет вид:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где в соответствии с (3.3) вероятность $p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ получается суммированием в i-ой строке таблицы (3.2) вероятностей p_{ij}, $i = \overline{1,n}$.

Аналогично, вероятности

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ \ \overline{j=1,m} \qquad (3.4)$$

и поэтому ЗР СВ Y имеет вид:

Y	y_1	y_2	…	y_m
P	q_1	q_2	…	q_m

где в соответствии с (3.4) вероятность $q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ получается суммированием в j-ом столбце таблицы (3.2) вероятностей p_{ij}, $j = \overline{1,m}$.

Многомерный случай ÄÑÂ $\mathbf{X} = (X_1,..,X_n)$ полностью аналогичен двумерному, только менее нагляден и имеет громоздкую индексацию. Так, ЗР ÄÑÂ $\mathbf{X} = (X_1,..,X_n)$ определяется набором вероятностей $p_{i_1 \dots i_n} = P(X_1 = x_{i_1},\dots,X_n = x_{i_n})$, где x_{i_k} - значения координаты X_k, $i_k = 1,\dots n_k$, $k = \overline{1,n}$.

3.3. Непрерывные случайные векторы. Плотность вероятностей

Снова начнем с рассмотрения двумерного $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y).

Определение. $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ (X,Y) называется непрерывным ($\text{Н}\overrightarrow{\text{СВ}}$) (или имеющим непрерывный закон распределения), если существует такая функция $f_{XY}(x,y)$, двух действительных переменных, что для любой точки $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ФР $F_{XY}(x,y)$ $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ (X,Y) допускает представление:

$$F_{XY}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv. \quad (3.5)$$

Функция $f_{XY}(x,y)$ при этом называется плотностью вероятностей (ПВ) $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ (X,Y) или двумерной плотностью вероятностей или совместной плотностью вероятностей случайных величин X и Y.

Везде далее будем предполагать, что ПВ непрерывна на всей плоскости, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Из определения (3.5) следует:

1. ФР $F_{XY}(x,y)$ $\text{Н}\overrightarrow{\text{СВ}}$ является непрерывной по x и по y (как двойной интеграл с переменными верхними пределами);

2. ФР $F_{XY}(x,y)$ $\text{Н}\overrightarrow{\text{СВ}}$ является дифференцируемой по x и по y во всех точках $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, являющихся точками непрерывности двумерной ПВ $f_{XY}(x,y)$, и при этом имеет место равенство:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y} \quad (3.6)$$

(также по свойствам двойного интеграла с переменными верхними пределами).

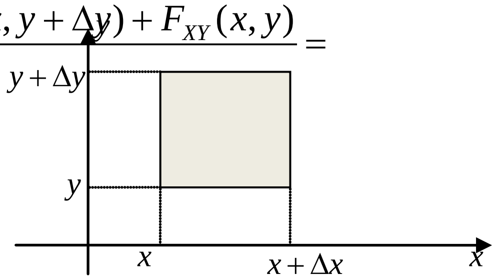
Вероятностный смысл двумерной ПВ.

Из (3.6), определения производной и свойства 6 двумерной ФР получаем, что

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{XY}(x,y+\Delta y)-F_{XY}(x,y)}{\Delta y}\right]=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{F_{XY}(x+\Delta x,y+\Delta y)-F_{XY}(x+\Delta x,y)-F_{XY}(x,y+\Delta y)+F_{XY}(x,y)}{\Delta x\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{P(x\le X<x+\Delta x, y\le Y<y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}.$$



Таким образом, плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ - это предел отношения вероятности попадания непрерывного случайного вектора (X,Y) в прямоугольник со сторонами Δx и Δy, параллельными осям координат, к площади этого прямоугольника, когда длины обеих сторон стремятся к нулю (при интерпретации вероятности как массы, приходящейся на элементарный прямоугольник $[x,x+\Delta x)\times[y,y+\Delta y)$, получаем, что $f_{XY}(x,y)$ есть плотность массы в точке (x,y)).

При малых Δx и Δy можно также записать, что

$$P(x \le X < x+\Delta x, y \le Y < y+\Delta y) \approx f_{XY}(x,y)\Delta x \Delta y . \qquad (3.7)$$

<u>Свойства плотности вероятностей</u> случайного вектора (X,Y):

1. $f_{XY}(x,y) \ge 0$ äëÿ ëþ áû õ $(x,y)\in$ □ ^{2}.

▲ Поскольку ФР $F_{XY}(x,y)$ является неубывающей функцией по каждому из своих аргументов, то ее производная $\dfrac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \ge 0$. Поэтому свойство следует из равенства (3.6) ■.

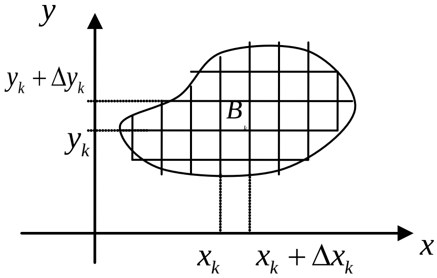
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1$ - <u>условие нормировки.</u>

▲ Из представления (3.5) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = F_{XY}(+\infty,+\infty)$, а в соответствии со свойством 4 двумерной ФР $F_{XY}(+\infty,+\infty)=1$ ■.

3. Вероятность попадания $\text{Н}\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) в любую область $D \subseteq$ □ ^{2} определяется формулой:

$$\mathrm{P}\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_D f_{XY}(x,y)dxdy .$$

▲ Разобъем множество B на n элементарных непересекающихся прямоугольников B_k со сторонами, параллельными осям координат и равными Δx_k и Δy_k, $k=\overline{1,n}$.



Так как в соответствии с (3.7) $\mathrm{P}((X,Y)\in B_k) \approx f_{XY}(x_k,y_k)\Delta x_k \Delta y_k$ и $B \approx \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, то в силу аддитивности вероятности имеем:

$$\mathrm{P}((X,Y)\in B) \approx \mathrm{P}((X,Y)\in \bigcup_{k=1}^{n} B_k) \approx \sum_{k=1}^{n} f_{XY}(x_k,y_k)\Delta x_k \Delta y_k .$$

Последняя сумма является интегральной, и поэтому предельный переход при $n \to \infty,\ \Delta x_k \to 0,\ \Delta y_k \to 0$ приводит к равенству

$$\mathrm{P}\{(X,Y) \in B\} = \iint\limits_B f_{XY}(x,y)dxdy \ \blacksquare.$$

4. Координаты $\overrightarrow{\text{НСВ}}$ (X,Y) с ПВ $f_{XY}(x,y)$ являются НСВ с ПВ $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно (маргинальные ПВ), определяемыми формулами:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy, \qquad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx, \qquad (3.8)$$

в точках непрерывности функций $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_{XY}(x,y)$

▲ Из представления (3.5) следует, что

$$F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(u,y)dudy.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, в точках непрерывности функций $f_X(x)$ и $f_{XY}(x,y)$ получаем:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy.$$

Аналогично,

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,v)dxdv$$

и после дифференцирования обеих частей последнего равенства по y, имеем:

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

в точках непрерывности функций $f_X(x)$ и $f_{XY}(x,y)$ ■.

<u>Пример</u>. (<u>Равномерное распределение в области</u> $D \subseteq \mathbb{R}^2$).

Говорят, что $\overrightarrow{\text{НСВ}}$ (X,Y) имеет равномерное распределение в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, если его ПВ постоянна внутри области D:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} C\ , (x,y) \in D; \\ 0\ , (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Константа C при этом однозначно определяется из условия нормировки:

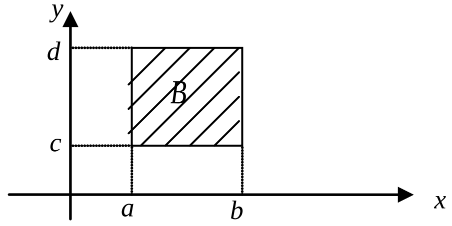
$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxdy = CS_D, \text{ то есть } C = \frac{1}{S_D},$$

где S_D - площадь области D.

а) Равномерное распределение в прямоугольнике.

Непрерывный случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение в прямоугольнике $B=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ со сторонами, параллельными осям координат, если его плотность вероятностей имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x,y)\in B;\\ 0, & (x,y)\notin B.\end{cases}$$



Найдем одномерные ПВ координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

В соответствии со свойством 4 двумерной ПВ

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d dy=\frac{1}{b-a},\ \text{если}\ x\in[a,b].$$

Таким образом, $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b],\end{cases}$ то есть $X\sim R[a,b]$.

Аналогично,

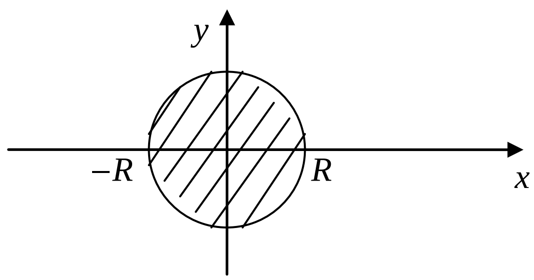
$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b dx=\frac{1}{d-c},\ \text{если}\ y\in[c,d].$$

Таким образом, $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & y\in[c,d];\\ 0, & y\notin[c,d],\end{cases}$ то есть $Y\sim R[c,d]$.

б) Равномерное распределение в круге.

Непрерывный случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение в круге $D=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}$, если его плотность вероятностей имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$



Найдем одномерные ПВ координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

В соответствии со свойством 4 двумерной ПВ

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2},\ \text{если}\ |x|\le R.$$

Таким образом, $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, \text{ если } |x|\le R;\\ 0,\ |x|>R.\end{cases}$

Аналогично

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, \text{ если } |y|\le R.$$

Таким образом, $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, \text{ если } |y|\le R;\\ 0,\ |y|>R.\end{cases}$

Все приведенные выше определения и формулы для двумерного Н$\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) легко обобщаются на случай n-мерного случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$.

<u>Определение</u>. $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$ называется непрерывным (Н$\overrightarrow{\text{СВ}}$), если существует такая функция $f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)$ n действительных переменных, что для любой точки $(x_1,...,x_n)\in\square^n$ ФР $F_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)$ $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$ допускает представление:

$$F_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1\ldots X_n}(u_1,...,u_n)\,du_1...du_n.$$

Функция $f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)$ при этом называется <u>плотностью вероятностей</u> (ПВ) $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$ или многомерной (n-мерной) ПВ, или совместной ПВ СВ $X_1,..,X_n$.

Во всех точках $(x_1,...,x_n)\in\square^n$, являющихся точками непрерывности ПВ $f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)$, имеет место равенство:

$$f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)=\frac{\partial^n F_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}.$$

<u>Свойства многомерной плотности вероятностей</u> $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$:

1. $f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)\ge 0$ для любой точки $(x_1,...,x_n)\in\square^n$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n=1$ - <u>условие нормировки.</u>

3. Вероятность попадания случайного вектора $(X_1,...,X_n)$ в любую область $D\subset\square^n$ определяется формулой:

$$\mathrm{P}\{(X_1,...,X_n)\in D\}=\int\limits_D\ldots\int f_{X_1\ldots X_n}(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n;$$

4. Если $\mathbf{X} = \left(X_1, .., X_n\right)$ - $\text{Н}\overrightarrow{\text{СВ}}$ с ПВ $f_{X_1 \dots X_n}\left(x_1, ..., x_n\right)$, то $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\left(X_{k_1}, ..., X_{k_m}\right)$ при любом $1 \le m < n$ также является непрерывным и имеет ПВ, определяемую формулой:

$$f_{X_{k_1} \dots X_{k_m}}\left(x_{k_1}, ..., x_{k_m}\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-m} f_{X_1 \dots X_n}\left(x_1, ..., x_n\right) dx_1 ... dx_{k_1 - 1} dx_{k_1 + 1} ... dx_{k_m - 1} dx_{k_m + 1} \dots dx_n .$$

3.4. Независимость случайных величин

Известно, что события A и B являются независимыми, если $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. Аналогично определяется и независимость СВ X и Y, только вместо событий A и B следует использовать события, связанные с этими СВ.

<u>Определение</u>. СВ X и Y называются <u>независимыми</u>, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство:

$$\mathrm{P}(X < x, Y < y) = \mathrm{P}(X < x)\mathrm{P}(Y < y)$$

или, что эквивалентно, в терминах ФР

$$F_{XY}\left(x, y\right) = F_X\left(x\right) F_Y\left(y\right). \qquad (3.9)$$

Если при каких-либо $x, y \in \mathbb{R}$ равенство (3.9) не выполняется, то говорят, что СВ X и Y являются <u>зависимыми</u>.

Таким образом, независимость СВ означает, что их совместная ФР $F_{XY}\left(x, y\right)$ равна произведению одномерных ФР $F_X\left(x\right)$ и $F_Y\left(y\right)$, или, как еще говорят, двумерная ФР $F_{XY}\left(x, y\right)$ факторизуется.

Отметим, что установить, являются зависимыми или независимыми СВ X и Y, можно только по определению (3.9) и только, зная их совместный (двумерный) ЗР (никакая вероятностная интуиция при этом не работает).

Установим условия независимости СВ в дискретном и непрерывном случаях.

<u>Лемма 1</u>.

Пусть $\left(X, Y\right)$ - $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$, принимающий значения (x_i, y_j) с вероятностями $p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$, $\quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}$; $\quad p_i = \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ i = \overline{1, n}$, - вероятности возможных значений СВ X, $q_j = \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ j = \overline{1, m}$ - вероятности возможных значений СВ Y.

ДСВ X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда при всех i и j

$$p_{ij} = p_i q_j, \qquad (3.10)$$

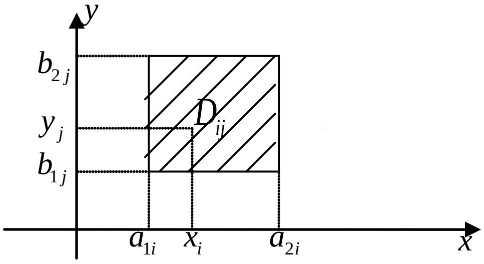
то есть вероятность p_{ij} факторизуется.

Если при каких-либо i и j равенство (3.10) не выполняется, то ДСВ X и Y являются зависимыми.

(Случай счетного числа возможных значений у какой-либо из ДСВ X или Y рассмотреть самостоятельно).

▲ <u>Необходимость</u>. Пусть дискретные случайные величины X и Y являются независимыми. Тогда $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Обозначим D_{ij} прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, который содержит точку (x_i, y_j) и не содержит других значений $\overrightarrow{\text{ÄÑÂ}}$ (X,Y).



Тогда

$\mathrm{P}(a_{1i} \le X < a_{2i}, b_{1j} \le Y < b_{2j}) = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ (по построению D_{ij}) =

= $F_{XY}(a_{2i}, b_{2j}) - F_{XY}(a_{2i}, b_{1j}) - F_{XY}(a_{1i}, b_{2j}) + F_{XY}(a_{1i}, b_{1j})$ (по свойству 4) =

= $(F_X(a_{2i}) - F_X(a_{1i}))(F_Y(b_{2j}) - F_Y(b_{1j}))$ (в силу независимости случайных величин)

= $\mathrm{P}(a_{1i} \le X < a_{2i})\mathrm{P}(b_{1j} \le Y < b_{2j}) = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j)$ (по построению D_{ij}),

то есть $p_{ij} = p_i q_j$, и так можно сделать для любого значения (x_i, y_j).

<u>Достаточность</u>. Если выполняется равенство (3.10), то в соответствии с определениями ФР $F_{XY}(x,y)$, $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ имеем:

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{(i,j):x_i<x, y_j<y} p_{ij} = \sum_{(i,j):x_i<x, y_j<y} \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_{i:x_i<x} \mathrm{P}(X = x_i) \sum_{j:y_j<y} \mathrm{P}(Y = y_j) = F_X(x)F_Y(y),$$

то есть ДСВ X и Y являются независимыми ■.

<u>Лемма 2</u>.

Пусть (X,Y) - $\text{Н}\overrightarrow{\text{СВ}}$, $f_{XY}(x,y)$ - его ПВ, $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ - одномерные ПВ его координат, определяемые по формулам (3.8).

НСВ X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \qquad (3.11)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$, являющихся точками непрерывности функций $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_{XY}(x,y)$, то есть двумерная ПВ $f_{XY}(x,y)$ факторизуется.

Если при каких-либо $x, y \in \mathbb{R}$ равенство (3.11) не выполняется, то НСВ X и Y являются зависимыми.

▲ <u>Необходимость</u>. Если НСВ X и Y являются независимыми, то

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y).$$

Дифференцируя это равенство по x и по y, получаем:

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}=\frac{dF_X(x)}{dx}\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

и, следовательно, в соответствии с определениями ПВ $f_{XY}(x,y)$, $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, справедливо равенство:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$

в точках непрерывности функций $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_{XY}(x,y)$.

<u>Достаточность</u>. Проинтегрируем равенство (3.11) по первому аргументу в пределах от $-\infty$ до x и по второму аргументу в пределах от $-\infty$ до y. В результате получаем:

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv.$$

и, следовательно, в соответствии с определениями ФР $F_{XY}(x,y)$, $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

то есть СВ X и Y являются независимыми ■.

Леммы 1 и 2 показывают, что, если СВ X и Y являются независимыми, то двумерный ЗР $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) полностью определяется одномерными ЗР его координат (то есть понятие $\overrightarrow{\text{СВ}}$ в этом случае вырождается).

Утверждения (3.10) и (3.11) лемм 1 и 2 сами могут служить определениями независимости СВ в дискретном и непрерывном случаях соответственно.

<u>Пример</u>.

а) Равномерное распределение в прямоугольнике $B=\{(x,y):a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ со сторонами, параллельными осям координат.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}\ , (x,y)\in B;\\ 0\ , (x,y)\notin B.\end{cases}$$

Ранее были найдены одномерные ПВ координат:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},\ x\in[a,b];\\ 0,\ x\notin[a,b],\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c},\ y\in[c,d];\\ 0,\ y\notin[c,d],\end{cases}$$

Поскольку в этом случае $f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$, то СВ X и Y являются независимыми.

б) Равномерное распределение в круге $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\right\}$.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}\ , x^2+y^2\le R^2;\\ 0\ , \text{иначе.}\end{cases}$$

Ранее были найдены одномерные ПВ координат:

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2},\ \text{если}\ |x|\le R;\\ 0,\ |x|>R.\end{cases}\qquad f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2},\ \text{если}\ |y|\le R;\\ 0,\ |y|>R.\end{cases}$$

Поскольку в данном случае $f_{XY}\left(x,y\right)\ne f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$, то СВ X и Y являются зависимыми.

Понятие независимости СВ обобщается на любое конечное число СВ следующим образом.

<u>Определение</u>. СВ $X_1,..,X_n$ называются <u>независимыми в совокупности</u>, если для любого $2\le m\le n$, для любого набора индексов $1\le i_1<i_2<...<i_m\le n$ и для любых $x_{i_k}\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,m}$

$$\mathrm{P}(X_{i_1}<x_{i_1},...,X_{i_m}<x_{i_m})=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{P}(X_{i_k}<x_{i_k})$$

или в терминах ФР для любой точки $\left(x_1,...,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$

$$F_{X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_m}}\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_m}\right)=F_{X_{i_1}}\left(x_{i_1}\right)F_{X_{i_2}}\left(x_{i_2}\right)\cdot...\cdot F_{X_{i_m}}\left(x_{i_m}\right),$$

где $F_{X_{i_k}}\left(x_{i_k}\right)$ – ФР СВ X_{i_k}, $i_k=1,2,...,n,\ k=\overline{1,m}$, то есть многомерная ФР $F_{X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_m}}\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_m}\right)$ факторизуется.

Для независимости в совокупности непрерывных случайных величин $X_1,X_2,...,X_n$, имеющих плотности вероятностей $f_{X_{i_k}}\left(x_{i_k}\right)$, $i_k=1,2,...,n,\ k=\overline{1,m}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_m}}\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_m}\right)=f_{X_{i_1}}\left(x_{i_1}\right)f_{X_{i_2}}\left(x_{i_2}\right)\cdot...\cdot f_{X_{i_m}}\left(x_{i_m}\right),$$

во всех точках непрерывности функций $f_{X_{i_k}}\left(x_{i_k}\right)$ и $f_{X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_m}}\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_m}\right)$, $i_k=1,2,...,n,\ k=\overline{1,m}$.

Из независимости СВ в совокупности при $m=2$ следует их попарная независимость. Обратное неверно (примером тому по-прежнему служит пример Бернштейна С.Н., если в качестве СВ рассмотреть индикаторные СВ соответствующих событий). В дальнейшем при рассмотрении одновременно более двух СВ под их независимостью, по умолчанию, будет подразумеваться независимость в совокупности.

3.5. Условные законы распределения и условные числовые характеристики

Известно, что, если случайные события A и B зависимы, то условная вероятность события A отличается от его безусловной вероятности. В этом случае

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \neq \mathrm{P}(A).$$

Аналогичное положение имеет место и для СВ.

Пусть X и Y - зависимые СВ, $F_{XY}(x,y)$ - их совместная ФР. Если известно, что СВ Y уже приняла некоторое значение y, то ЗР СВ X при этом условии не будет совпадать с ее безусловным ЗР. Он называется <u>условным законом распределения</u> (УЗР) СВ X при условии, что $Y = y$, и, заданный для всех возможных значений y СВ Y, полностью определяет зависимость между СВ X и Y.

Исчерпывающей характеристикой УЗР СВ X при условии, что $Y = y$, является <u>условная ФР</u> $F_X(x/y)$ (УФР) СВ X при условии, что $Y = y$, которую естественно было бы определить как

$$F_X(x/y) = \mathrm{P}(X < x / Y = y). \qquad (3.12)$$

Следует отметить, что это определение не имеет смысла, если $\mathrm{P}(Y = y) = 0$, что имеет место всегда, когда Y - НСВ. Тем не менее, в дискретном случае определением (3.12) можно вполне пользоваться.

Пусть (X,Y) - ÄÑÂ, (x_i, y_j) - его возможные значения, $p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ - вероятности значений, $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$, $q_j = \mathrm{P}(Y = y_j)$, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ (случай счетного числа значений ÄÑÂ рассмотреть самостоятельно). Тогда все УЗР СВ X при условии, что $Y = y_j$, $j = \overline{1,m}$, являются дискретными и согласно определению условной вероятности имеем:

$$F_X(x/y_j) = \frac{\mathrm{P}(X < x, Y = y_j)}{\mathrm{P}(Y = y_j)} = \frac{\sum\limits_{i:x_i<x} p_{ij}}{q_j},\ \ \overline{j = 1,m}.$$

Дискретные УЗР удобнее задавать не УФР $F_X(x/y_j)$, а совокупностью условных вероятностей $p_X(x_i/y_j)$, заданных при каждом y_j:

$$p_X\left(x_i/y_j\right) = \mathrm{P}\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{p_{ij}}{q_j},\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m}$$

и записывать в виде таблицы:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p_X(x/y_j)$	$p_X(x_1/y_j)$	$p_X(x_2/y_j)$	$\ldots$	$p_X(x_n/y_j)$

Очевидно, что при этом выполняется условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i / y_j) = 1, \quad j = \overline{1,m}.$$

Аналогичны выражения для УФР $F_Y(y/x_i)$, условных вероятностей $p_Y(y_j/x_i)$ и дискретного УЗР СВ Y при условии, что $X = x_i$:

$$F_Y(y/x_i) = \frac{\mathrm{P}(X = x_i, Y < y)}{\mathrm{P}(X = x_i)} = \frac{\sum\limits_{j: y_j < y} p_{ij}}{p_i}, \ i = \overline{1,n};$$

$$p_Y\left(y_j / x_i\right) = \mathrm{P}\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{p_{ij}}{p_i}, \ j = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,n} \ ;$$

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
$p_Y(y/x_i)$	$p_Y(y_1/x_i)$	$p_Y(y_2/x_i)$	$\ldots$	$p_Y(y_m/x_i)$

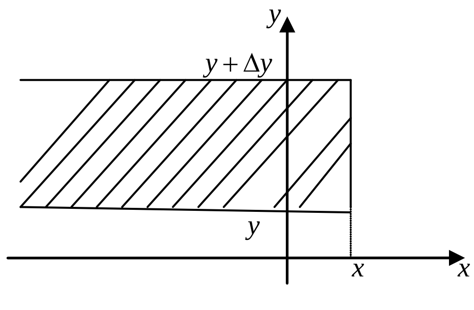
Для вероятностей в последней таблице также выполняется условие нормировки:

$$\sum_{j=1}^{m} p_Y(y_j / x_i) = 1, \ i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим теперь непрерывный случайный вектор $\left(X, Y\right)$. Так как в этом случае $\mathrm{P}(Y = y) = 0$ при любом $y \in \mathbb{R}$, то определение (3.12) условной функции распределения $F_X(x/y)$ случайной величины X при условии, что $Y = y$, неприменимо. Для непрерывных случайных величин X и Y условную функцию распределения $F_X(x/y)$ определяют следующим образом:

$$F_X(x/y) = \lim_{\Delta y \to 0} \mathrm{P}(X < x / y \le Y < y + \Delta y).$$

Вероятность, стоящая под знаком предела, представляет собой вероятность попадания непрерывного случайного вектора $\left(X, Y\right)$ в полосу.



В соответствии с определением условной вероятности и свойствами двумерной ФР имеем:

$$F_X(x/y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathrm{P}(X < x, y \le Y < y + \Delta y)}{\mathrm{P}(y \le Y < y + \Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F_{XY}(x, y + \Delta y) - F_{XY}(x, y)}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F_{XY}(x, y + \Delta y) - F_{XY}(x, y) / \Delta y}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y) / \Delta y}.$$

Если последний предел существует, то он равен

$$F_X(x/y) = \frac{\partial F_{XY}(x,y) / \partial y}{dF_Y(y) / dy}.$$

Учитывая, что у $\overrightarrow{\text{НСВ}}$ (X,Y) существует ПВ $f_{XY}(x,y)$ и $F_{XY}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv$, а также, что у СВ Y существует ПВ $f_Y(y)$ и $F'_Y(y) = f_Y(y)$, для УФР $F_X(x/y)$ получаем выражение:

$$F_X(x/y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,y)du}{f_Y(y)} \qquad (3.13)$$

в точках непрерывности функций $f_{XY}(x,y)$ и $f_Y(y)$.

Условная ПВ $f_X(x/y)$ (УПВ) СВ X при условии, что $Y = y$, по аналогии с одномерным случаем определяется как производная по x от УФР $F_X(x/y)$:

$$f_X(x/y) = \frac{\partial F_X(x/y)}{\partial x}$$

в точках, где УПВ $f_X(x/y)$ непрерывна.

Из (3.13) следует, что

$$f_X(x/y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (3.14)$$

(при этом полагается, что $f_X(x/y) = 0$, если $f_X(x) = 0$).

Аналогичные выражения имеют место для УФР $F_Y(y/x)$ и УПВ $f_Y(y/x)$ СВ Y при условии, что $X = x$:

$$F_Y(y/x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,v)dv}{f_X(x)}; \qquad (3.15)$$

$$f_Y(y/x) = \frac{\partial F_Y(y/x)}{\partial y}$$

в точках, где УПВ $f_Y(y/x)$ непрерывна;

$$f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \qquad (3.16)$$

(при этом полагается, что $f_Y(y/x) = 0$, если $f_Y(y) = 0$).

Как и любая ПВ, УПВ обладают свойствами:
При фиксированном y

$$f_X(x/y) \ge 0; \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x/y)dx = 1 \text{ (условие нормировки);}$$

При фиксированном x

$$f_Y\left(y/x\right) \ge 0; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y/x)dy = 1 \text{ (условие нормировки).}$$

Формулы (3.14) и (3.16) дают выражения для УПВ через безусловные, их также можно записать в виде:

$$f_{XY}\left(x,y\right) = f_Y\left(y\right) f_X\left(x/y\right) = f_X\left(x\right) f_Y\left(y/x\right)$$

Полученная формула есть правило умножения ПВ, которая является обобщением известного правила умножения вероятностей.

Для СВ в терминах ПВ имеют место также аналоги формулы полной вероятности и формулы Байеса:

$$f_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y\left(y\right) f_X\left(x/y\right)dy;$$

$$f_X\left(x/y\right) = \frac{f_{XY}\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)} = \frac{f_X\left(x\right) f_Y\left(y/x\right)}{f_Y\left(y\right)}$$

(в последней формуле $f_X(x)$ - априорная ПВ, а $f_X\left(x/y\right)$ - апостериорная ПВ).

Используя понятие УЗР, получаем еще одно эквивалентное определение независимости СВ.

Для независимости СВ X и Y необходимо и достаточно, чтобы УЗР одной из СВ относительно другой совпадали с безусловными (аналог равенств $\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A), \quad \mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$):

$$F_X(x/y) = F_X(x), \; F_Y(y/x) = F_Y(y);$$

$$p_X(x_i/y_j) = p_i, \; p_Y(y_j/x_i) = q_j;$$

$$f_X\left(x/y\right) = f_X(x), \; f_Y\left(y/x\right) = f_Y(y).$$

Кратко о многомерном случае. Здесь возникает дополнительная возможность рассмотрения УЗР одной группы координат $\overrightarrow{\text{СВ}}$ относительно другой. Но при этом определения полностью аналогичны.

Так, например, УПВ «отрезка» $\left(X_1,...,X_m\right)$ вектора $\left(X_1,...,X_n\right)$ при условии, что СВ $X_{m+1},...,X_n$ приняли определенные значения $X_{m+1} = x_{m+1},...,X_n = x_n$, задается формулой:

$$f_{X_1...X_m}\left(x_1,...,x_m \middle| x_{m+1},...,x_n\right) = \frac{f_{X_1...X_n}\left(x_1,...,x_n\right)}{f_{X_{m+1}...X_n}\left(x_{m+1},...,x_n\right)}, \quad 1 \le m < n.$$

Условные числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия) определяются и находятся также, как и безусловные, только в формулах для их вычисления следует безусловные законы распределения заменить на условные.

Если (X,Y) - $\overrightarrow{\text{ДСВ}}$, то условным математическим ожиданием СВ X при условии, что $Y=y_j$, называется величина

$$\mathrm{M}\left(X \mid Y=y_j\right)=\sum_i x_i p_X\left(x_i \mid y_j\right),$$

а условным математическим ожиданием СВ Y при условии, что $X=x_i$, - величина

$$\mathrm{M}\left(Y \mid X=x_i\right)=\sum_j y_j p_Y\left(y_j \mid x_i\right).$$

Если (X,Y) - $\overrightarrow{\text{НСВ}}$, то условные математические ожидания СВ X при условии, что $Y=y$, и СВ Y при условии, что $X=x$, определяются формулами:

$$\mathrm{M}\left(X / Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X\left(x / y\right)dx;$$

$$\mathrm{M}\left(Y / X=x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y\left(y / x\right)dy.$$

Аналогичные формулы имеют место и для условных дисперсий.

Если (X,Y) - $\overrightarrow{\text{ДСВ}}$, то

$$\mathrm{D}\left(X / Y=y_j\right)=\sum_i x_i^2 p_X\left(x_i / y_j\right)-\left[\mathrm{M}\left(X / Y=y_j\right)\right]^2;$$

$$\mathrm{D}\left(Y / X=x_i\right)=\sum_j y_j^2 p_Y\left(y_j / x_i\right)-\left[\mathrm{M}\left(Y / X=x_i\right)\right]^2.$$

Если (X,Y) - $\overrightarrow{\text{НСВ}}$, то

$$\mathrm{D}\left(X / Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X\left(x / y\right)\mathrm{d}x-\left[\mathrm{M}\left(X / Y=y\right)\right]^2;$$

$$\mathrm{D}\left(Y / X=x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y\left(y / x\right)\mathrm{d}y-\left[\mathrm{M}\left(Y / X=x\right)\right]^2.$$

Отметим, что, если безусловные МО и дисперсия являются числами, то условные МО и дисперсия есть <u>функции условия</u>. Функцию $\varphi(y)=M(X / Y=y)$ называют также функцией регрессии X на Y, а функцию $\psi(x)=\mathrm{M}(Y / X=x)$ - функцией регрессии Y на X.

3.6. Числовые характеристики случайных векторов

Рассмотрим вначале двумерный $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y).

Прежде, чем приводить соответствующие определения, сформулируем обобщение основной теоремы о математическом ожидании (ОТМО) на случай функции двух переменных $g=g(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

<u>Теорема (обобщение ОТМО на двумерный случай)</u>.

Пусть (X,Y) - некоторый $\overrightarrow{\text{СВ}}$, ЗР которого известен, $g=g(x,y)$ - неслучайная функция, область определения которой содержит множество возможных значений $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y), $Z = g(X,Y)$ - СВ, являющаяся функцией двух случайных аргументов.

1. Если (X,Y) - Д$\overrightarrow{\text{СВ}}$, принимающий значения (x_i, y_j) с вероятностями $p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$, и ряд $\sum\limits_{i,j} \left| g(x_i, y_j) \right| p_{ij}$ сходится, то у СВ $Z = g(X,Y)$ существует МО и

$$MZ = Mg(X,Y) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij} .$$

2. Если (X,Y) - Н$\overrightarrow{\text{СВ}}$ с ПВ $f_{XY}(x,y)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| g(x,y) \right| f_{XY}(x,y) dxdy$ сходится, то у СВ $Z = g(X,Y)$ существует МО и

$$MZ = Mg(X,Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dxdy .$$

Заметим, что приведенная теорема очевидным образом обобщается и на случай функции n переменных $g = g(x_1,...,x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теперь перейдем к рассмотрению числовых характеристик (ЧХ).

<u>Основными ЧХ</u> двумерного $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) являются:

- <u>математическое ожидание</u> $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y)$ - вектор, координатами которого являются математические ожидания СВ X и Y (характеризует координаты средней точки, около которой группируются другие значения вектора (X,Y));
- <u>дисперсия</u> $(\mathrm{D}X, \mathrm{D}Y)$ - вектор, координатами которого являются дисперсии СВ X и Y (характеризует степень разброса (рассеивания) значений вектора (X,Y) около его среднего значения $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y)$);
- <u>корреляционный момент</u> R_{XY} СВ X и Y - МО произведения отклонений этих СВ относительно их МО:

$$R_{XY} = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)(Y - \mathrm{M}Y) . \quad (3.17)$$

Как будет показано далее, корреляционный момент R_{XY} характеризует степень линейной зависимости между СВ X и Y.

Для корреляционного момента R_{XY} справедливо также следующее выражение:

$$R_{XY} = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)(Y - \mathrm{M}Y) = \mathrm{M}(XY - X\,\mathrm{M}Y - Y\,\mathrm{M}X + \mathrm{M}X\,\mathrm{M}Y) =$$
$$= \mathrm{M}XY - \mathrm{M}X\,\mathrm{M}Y - \mathrm{M}Y\,\mathrm{M}X + \mathrm{M}X\,\mathrm{M}Y = \mathrm{M}XY - \mathrm{M}X\,\mathrm{M}Y .$$

Таким образом, наряду с (3.12),

$$R_{XY} = \mathrm{M}XY - \mathrm{M}X\mathrm{M}Y . \quad (3.18)$$

Корреляционный момент R_{XY} обладает следующими двумя очевидными свойствами:

1. $R_{XY} = R_{YX}$;
2. $R_{XX} = \mathrm{D}X, \quad R_{YY} = \mathrm{D}Y$.

Благодаря этим свойствам, вектор дисперсий $(\mathrm{D}X, \mathrm{D}Y)$ можно не рассматривать как самостоятельную ЧХ, а использовать объединенную характеристику – корреляционную матрицу, элементами которой являются всевозможные корреляционные моменты:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{XX} & R_{XY} \\ R_{YX} & R_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}X & R_{XY} \\ R_{XY} & \mathrm{D}Y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно считать, что $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) имеет <u>две</u> основные ЧХ:

- математическое ожидание $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y)$;
- корреляционную матрицу $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}X & R_{XY} \\ R_{XY} & \mathrm{D}Y \end{pmatrix}$.

Математические ожидания $\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y$ и дисперсии $\mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$ координат $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) могут быть вычислены как по двумерному ЗР с помощью обобщения ОТМО, так и по обычным формулам через одномерные ЗР СВ X и Y.

Так, если (X,Y) - Д$\overrightarrow{\text{СВ}}$, то при $g(x,y) = x$ имеем:

$$\mathrm{M}\,X = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i p_i, \text{ где } p_i = \sum_j p_{ij},$$

а при $g(x,y) = (x - \mathrm{M}\,X)^2$ или $g(x,y) = x^2 - (\mathrm{M}\,X)^2$

$$\mathrm{D}\,X = \sum_i \sum_j (x_i - \mathrm{M}\,X)^2 p_{ij} = \sum_i (x_i - \mathrm{M}\,X)^2 p_i =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i^2 p_{ij} - (\mathrm{M}\,X)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathrm{M}\,X)^2, \text{ где } p_i = \sum_j p_{ij}.$$

Аналогичны выражения для $\mathrm{M}Y$ и $\mathrm{D}Y$ (написать самостоятельно).

Корреляционный момент R_{XY} вычисляется с помощью обобщения ОТМО, когда функция $g(x,y) = (x - \mathrm{M}\,X)(y - \mathrm{M}Y)$ или $g(x,y) = xy - \mathrm{M}\,X\,\mathrm{M}Y$ и <u>только</u> по двумерному закону распределения:

если (X,Y) - Д$\overrightarrow{\text{СВ}}$, то

$$R_{XY} = \sum_i \sum_j \left(x_i - \mathrm{M}X\right)\left(y_j - \mathrm{M}Y\right) p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mathrm{M}X \cdot \mathrm{M}Y;$$

если (X,Y) - Н$\overrightarrow{\text{СВ}}$, то

$$R_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathrm{M}X\right)\left(y - \mathrm{M}Y\right) f_{XY}(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dxdy - \mathrm{M}X \cdot \mathrm{M}Y.$$

3.6.1. Теоремы о числовых характеристиках

Теорема 1 (теорема сложения МО).

МО суммы двух любых СВ X и Y равно сумме их МО:

$$\mathrm{M}(X+Y)=\mathrm{M}X+\mathrm{M}Y.$$

▲ Докажем теорему в непрерывном случае, в дискретном случае доказать самостоятельно.

Из обобщения ОТМО при $g(x,y)=x+y$ имеем:

$$M(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,f_{XY}(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)\,dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dy=\mathrm{M}X+\mathrm{M}Y\ ■.$$

По индукции теорема 1 обобщается на сумму любого конечного числа СВ:

$$\mathrm{M}(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}X_k.$$

Теорема 2 (теорема умножения МО).

МО произведения двух независимых СВ X и Y равно произведению их МО:

$$\mathrm{M}XY=\mathrm{M}X\,\mathrm{M}Y.$$

▲ Докажем теорему в непрерывном случае, в дискретном случае доказать самостоятельно.

Если НСВ X и Y являются независимыми, то $f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$. Поэтому из обобщения ОТМО при $g(x,y)=xy$ имеем:

$$MXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{XY}(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dy=\mathrm{M}X\,\mathrm{M}Y\ ■.$$

По индукции теорема 2 обобщается на произведение любого конечного числа независимых (в совокупности) СВ:

$$\mathrm{M}(\prod_{k=1}^{n}X_k)=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{M}X_k.$$

3.6.2. Некоррелированность случайных величин и ее связь с независимостью

Определение. СВ X и Y, для которых корреляционный момент $R_{XY}=0$, называются некоррелированными.

Учитывая, что

$$R_{XY} = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)(Y - \mathrm{M}Y) = \mathrm{M}\,XY - \mathrm{M}\,X\,\mathrm{M}Y,$$

получаем: СВ X и Y являются некоррелированными тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}\,XY = \mathrm{M}\,X\,\mathrm{M}Y$.

Отсюда и из теоремы 2 вытекает, что из независимости СВ всегда следует их некоррелированность. Обратное, вообще говоря, неверно. Можно только сказать, что если СВ являются коррелированными, так, что $R_{XY} \neq 0$, то они являются зависимыми.

Пример.

Равномерное распределение в круге $D = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ранее были найдены одномерные ПВ координат вектора $\left(X, Y\right)$:

$$f_X\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}, & \text{если } |x| \leq R; \\ 0, & |x| > R. \end{cases} \qquad f_Y\left(y\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}, & \text{если } |y| \leq R; \\ 0, & |y| > R. \end{cases}$$

и установлено, что СВ X и Y являются зависимыми, так как $f_{XY}\left(x,y\right) \neq f_X\left(x\right) f_Y\left(y\right)$.

Найдем корреляционный момент $R_{XY} = \mathrm{M}\,XY - \mathrm{M}\,X\,\mathrm{M}Y$ СВ X и Y.

$$\mathrm{M}\,X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X\left(x\right)dx = \frac{2}{\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 0$$

в силу нечетности подинтегральной функции и симметричности относительно нуля пределов интегрирования.

По аналогичным соображениям $\mathrm{M}Y = 0$. Найдем $\mathrm{M}\,XY$.

$$\mathrm{M}\,XY = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}\left(x,y\right)dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{(R^2-x^2}}^{\sqrt{(R^2-x^2}} xydxdy = 0$$

также в силу нечетности подинтегральной функции.

Таким образом, $R_{XY} = 0$ и, следовательно, СВ X и Y являются зависимыми, но некоррелированными.

Понятие некоррелированности СВ играет важную роль в теории вероятностей. Подтверждением тому является следующая теорема.

Теорема 3 (теорема сложения дисперсий).

Для любых действительных чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых СВ X и Y, имеющих конечную дисперсию

$$D(\alpha X \pm \beta Y) = \alpha^2 DX + \beta^2 DY \pm 2\alpha\beta R_{XY}.$$

В частности, если $\alpha = \beta = 1$ и СВ X и Y являются некоррелированными, то имеет место свойство аддитивности дисперсии:

$$D(X+Y) = DX + DY.$$

▲ Доказательство теоремы основано только на свойствах МО и определении корреляционного момента R_{XY}:

$$D(\alpha X \pm \beta Y) = M\left[(\alpha X \pm \beta Y) - M(\alpha X \pm \beta Y)\right]^2 = M\left[\alpha(X - MX) \pm \beta(Y - MY)\right]^2 =$$
$$= \alpha^2 M(X - MX)^2 + \beta^2 M(Y - MY)^2 \pm 2\alpha\beta M(X - MX)(Y - MY) =$$
$$= \alpha^2 DX + \beta^2 DY \pm 2\alpha\beta R_{XY}. ■.$$

По индукции утверждение теоремы 3 обобщается на линейную комбинацию любого конечного числа СВ следующим образом.

Для любых действительных чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ и СВ $X_1,\dots,X_n$, имеющих конечную дисперсию

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 DX_k + 2\sum_{k<j}\alpha_k\alpha_j R_{X_k X_j} =$$
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 DX_k + \sum_{k\neq j}\alpha_k\alpha_j R_{X_k X_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j R_{X_k X_j}.$$

В частности, если все $\alpha_k = 1,\ k = \overline{1,n}$, а СВ $X_1,\dots,X_n$ являются попарно некоррелированными ($R_{X_k X_j} = 0,\ k \neq j$), то имеет место свойство аддитивности дисперсии:

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} DX_k.$$

3.6.3. Коэффициент корреляции его свойства

Значение корреляционного момента R_{XY} зависит от единиц измерения СВ X и Y. Безразмерным аналогом R_{XY} является коэффициент корреляции, определяемый формулой:

$$r_{XY} = \frac{R_{XY}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{R_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y},$$

где σ_X и σ_Y - средние квадратические отклонения СВ X и Y.

Свойства коэффициента корреляции.

1. $r_{XY} = 0$, если СВ X и Y являются независимыми.

(Свойство очевидно, так как в этом случае $R_{XY} = 0$).

2. Коэффициент корреляции по модулю не превосходит 1: $|r_{XY}| \le 1$.

▲ В соответствии со свойством 1 дисперсии

$$0 \le D(\alpha X \pm \beta Y) = \alpha^2 DX + \beta^2 DY \pm 2\alpha\beta R_{XY}.$$

Положим $\alpha = \sqrt{\mathrm{D}Y}$, $\beta = \sqrt{\mathrm{D}X}$. Тогда

$$2DXDY \pm 2\sqrt{DX}\sqrt{DY}R_{XY} \ge 0,$$

откуда

$$\sqrt{DX}\sqrt{DY} \ge R_{XY} \ge -\sqrt{DX}\sqrt{DY}.$$

Следовательно,

$$\left|R_{XY}\right| \le \sqrt{DX}\sqrt{DY} \text{, или, эквивалентно, } \left|r_{XY}\right| \le 1. \blacksquare$$

3. $\left|r_{XY}\right| = 1$ тогда и только тогда, когда СВ X и Y связаны линейной зависимостью, то есть существуют действительные числа A и B такие, что $Y = AX + B$.

▲ Необходимость. Предположим, что $\left|r_{XY}\right| = 1$. Тогда $\left|R_{XY}\right| = \sqrt{DX}\sqrt{DY}$ и из доказательства свойства 2 коэффициента корреляции следует, что $D(\alpha X \pm \beta Y) = 0$ при $\alpha = \sqrt{\mathrm{D}Y} = \sigma_Y$, $\beta = \sqrt{\mathrm{D}X} = \sigma_X$. В соответствии со свойством 1 дисперсии это означает, что $\sigma_Y X + \sigma_X Y = C$, откуда $Y = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}X - \dfrac{C}{\sigma_X}$ и значит $A = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, $B = -\dfrac{C}{\sigma_X}$.

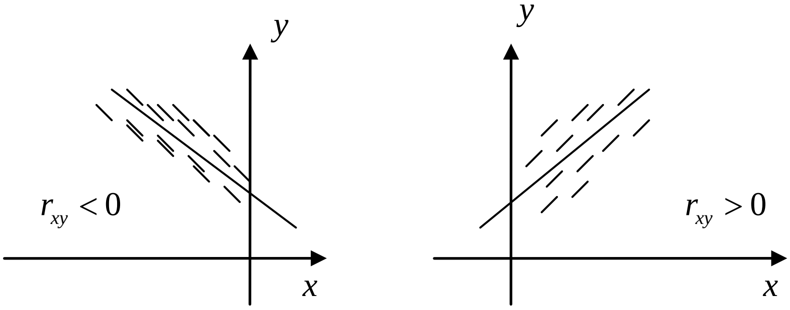
Достаточность. Пусть $Y = AX + B$. Тогда $DY = A^2 DX$, а корреляционный момент СВ X и Y равен

$$R_{XY} = M(X - MX)(Y - MY) = M(X - MX)(AX + B - M(AX + B)) =$$
$$= AM(X - MX)^2 = ADX.$$

Поэтому $\quad r_{XY} = \dfrac{R_{XY}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \dfrac{ADX}{\sqrt{DX}\left|A\right|\sqrt{DX}} = \dfrac{A}{\left|A\right|} = \pm 1$ ■.

Итак, $r_{XY} = 0$ для независимых СВ и достигает максимального по модулю значения $\left|r_{XY}\right| = 1$ для сильно (линейно) зависимых СВ. Поэтому значение коэффициента корреляции можно интерпретировать как степень линейной зависимости между СВ.

Геометрическая иллюстрация: чем больше по модулю r_{XY}, тем плотнее значения $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X, Y) располагаются вдоль некоторой прямой.



Многомерный случай.

Основными числовыми характеристики n-мерного $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ являются:

- математическое ожидание $\mathrm{M}\mathbf{X} = (\mathrm{M}X_1, ..., \mathrm{M}X_n)$;
- корреляционная матрица $\mathbf{R} = \|R_{ij}\|$, элементами которой являются всевозможные попарные корреляционные моменты координат: $R_{ij} = R_{X_i X_j}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Свойства корреляционной матрицы.

1. Матрица $\mathbf{R}$ является симметрической размера $n \times n$: $R_{ij} = R_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$.

2. На диагонали матрицы $\mathbf{R}$ расположены дисперсии координат $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$: $R_{ii} = \mathrm{D}\, X_i$, $i = \overline{1, n}$.

3. Матрица $\mathbf{R}$ является неотрицательно определенной матрицей, то есть для любого $n \geq 2$ и для любых действительных чисел $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j R_{ij} \geq 0.$$

▲ Обозначим $\overset{\circ}{X}_k = X_k - \mathrm{M}\, X_k$ - центрированную СВ, $k = \overline{1, n}$. Тогда $R_{ij} = \mathrm{M}\, \overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j$ и для произвольных чисел $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j R_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \,\mathrm{M}\, \overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j = \mathrm{M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j =$$

$$= \mathrm{M} \sum_{i=1}^{n} c_i \overset{\circ}{X}_i \sum_{j=1}^{n} c_j \overset{\circ}{X}_j = \mathrm{M} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \overset{\circ}{X}_i \right)^2 \geq 0 \ \blacksquare.$$

Наряду с корреляционной матрицей $\mathbf{R}$, иногда рассматривают нормированную корреляционную матрицу $\mathbf{r} = \|r_{ij}\|$, элементами которой являются всевозможные попарные коэффициенты корреляции координат: $r_{ij} = r_{X_i X_j}$, $i, j = \overline{1, n}$. Отличие ее от просто корреляционной матрицы состоит в том, что у нормированной корреляционной матрицы все диагональные элементы равны 1: $r_{ii} = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Понятие о моментах

Наряду с рассмотренными выше ЧХ $\overrightarrow{\text{СВ}}$, в приложениях используются также и моменты более высоких порядков.

Если задан $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $\mathbf{X} = \left(X_1,...,X_n\right)$, то величины

$$\alpha_{k_1...k_n} = \mathrm{M}\, X_1^{k_1}...X_n^{k_n} \quad \text{и} \quad \mu_{k_1...k_n} = \mathrm{M}(X_1 - \mathrm{M}\, X_1)^{k_1}...(X_n - \mathrm{M}\, X_n)^{k_n}$$

называются <u>начальными и центральными смешанными моментами</u> порядка $k = k_1 + ... + k_n$ соответственно ($k_i \geq 0$, целые). Вычисляются моменты более высоких порядков по формулам для $\mathrm{M}\, g(X_1,...,X_n)$, вытекающим из обобщения ОТМО на многомерный случай.

В частности,

$$\alpha_1 = \mathrm{M}\, X, \;\; \alpha_2 = \mathrm{M}\, X^2, \;\; \alpha_{11} = \mathrm{M}\, X_1 X_2 = \mathrm{cov}(X_1, X_2), \;\; \mu_2 = \mathrm{D}\, X, \;\; \mu_{11} = R_{X_1 X_2}.$$

<u>Пример 1</u>. Закон распределения случайного вектора $\left(X, Y\right)$ задан таблицей:

X \ Y	0	1	2
-1	0,1	0,2	0
0	0,3	0	0,1
1	0,1	0,2	0

Найти: 1) законы распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2) корреляционную матрицу. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

3) условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение, равное 0; вычислить $\mathrm{M}\left(Y / X = 0\right)$ и $\mathrm{D}\left(Y / X = 0\right)$.

<u>Решение</u>. 1) Для случайной величины X вероятности её значений $p_i = \mathrm{P}\left(X = x_i\right)$ находятся суммированием вероятностей $p_{ij} = \mathrm{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ в i-ой строке таблицы ($i = 1, 2, 3$):

$$p_1 = \mathrm{P}\left(X = -1\right) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0 = 0{,}3;$$

$$p_2 = \mathrm{P}\left(X = 0\right) = 0{,}3 + 0 + 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$p_3 = \mathrm{P}\left(X = 1\right) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0 = 0{,}3.$$

Поэтому закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

Вероятности значений случайной величины Y $q_i = \mathrm{P}\left(Y = y_i\right)$ находятся суммированием вероятностей p_{ij} в j-ом столбце таблицы ($j = 1, 2, 3$):

$$q_1 = \mathrm{P}\left(Y = 0\right) = 0{,}5; \; q_2 = \mathrm{P}\left(Y = 1\right) = 0{,}4; \; q_3 = \mathrm{P}\left(Y = 2\right) = 0{,}1.$$

Поэтому закон распределения случайной величины Y имеет вид:

Y	0	1	2
P	0,5	0,4	0,1

Условием независимости случайных величин X и Y является равенство:

$$p_{ij} = p_i q_j \text{, для всех } i, j = 1,2,3.$$

Поскольку в данном случае

$p_{11} = \mathrm{P}\left(X = -1, Y = 0\right) = 0{,}1;\ p_1 = \mathrm{P}\left(X = -1\right) = 0{,}3;\ q_1 = \mathrm{P}\left(Y = 0\right) = 0{,}5$, то $p_{11} \neq p_1 q_1$ и, следовательно, случайные величины X и Y <u>зависимы</u>.

2) Найдем математические ожидания случайных величин X и Y, используя одномерные законы распределения:

$$\mathrm{M}X = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = 0;$$

$$\mathrm{M}Y = \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}6.$$

Найдем далее дисперсии $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$ по одномерным законам распределения:

$$\mathrm{D}X = \sum_{i=1}^{3} \left(x_i - \mathrm{M}X\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}6;$$

$$\mathrm{D}Y = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 q_j - \left(\mathrm{M}Y\right)^2 = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 - 0{,}36 = 0{,}44.$$

Корреляционный момент R_{XY} находится только по совместному закону распределения случайных величин X и Y:

$$R_{XY} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(x_i - \mathrm{M}X\right)\left(y_j - \mathrm{M}Y\right) p_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - \mathrm{M}X \cdot \mathrm{M}Y =$$

$= 1 \cdot \left(-1\right) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 0$ (отсутствующие слагаемые равны 0).

Поскольку корреляционный момент $R_{XY} = 0$, то случайные величины X и Y являются <u>некоррелированными</u>.

Корреляционная матрица имеет вид:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{XX} & R_{XY} \\ R_{YX} & R_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}X & R_{XY} \\ R_{XY} & \mathrm{D}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

3) Условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина $X = 0$ определяется совокупностью условных вероятностей:

$$p_Y\left(y_j / 0\right) = \mathrm{P}\left(Y = y_j / X = 0\right) = \frac{p_{2j}}{p_2},\ j = 1,2,3,$$

которые равны: $p_Y\left(y_1 / 0\right) = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = \dfrac{3}{4};\ p_Y\left(y_2 / 0\right) = 0;\ p_Y\left(y_3 / 0\right) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = \dfrac{1}{4}$.

Записывается условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина $X = 0$ в виде таблицы:

Y	0	1	2
$p_Y\left(y / 0\right)$	$3/4$	0	$1/4$

Найдем условное математическое ожидание $\mathrm{M}\left(Y \middle| X = 0\right)$:

$$\mathrm{M}\left(Y / X = 0\right) = \sum_{j=1}^{3} y_j p_Y\left(y_j / 0\right) = 0 \cdot 3/4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/4 = 1/2.$$

Условная дисперсия $\mathrm{D}\left(Y \middle| X=0\right)$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{D}\left(Y / X=0\right)=\mathrm{M}\left(Y^2 / X=0\right)-\left[\mathrm{M}\left(Y / X=0\right)\right]^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_Y\left(y_j / 0\right)-1/4=0\cdot 3/4+1\cdot 0+4\cdot 1/4-1/4=3/4\,.$$

<u>Пример 2</u>. Плотность вероятностей $f_{XY}\left(x,y\right)$ двумерного случайного вектора $\left(X,Y\right)$ имеет вид:

$$f_{XY}\left(x,y\right)=\begin{cases} c\left(x+y\right), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1; \\ 0, & \text{èí à÷å.} \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F_{XY}\left(x,y\right)$;

в) плотности вероятностей координат $f_X\left(x\right)$ и $f_Y\left(y\right)$;

г) условные плотности вероятностей $f_X\left(x/y\right)$ и $f_Y\left(y/x\right)$;

д) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора $\left(X,Y\right)$;

е) вероятность $\mathrm{P}\left(X>Y\right)$.

Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

<u>Решение</u>. а) Коэффициент c определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}\left(x,y\right)dxdy=1\,.$$

В данном случае это условие означает, что

$$c\int_0^1\int_0^1\left(x+y\right)dxdy=c\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=c=1\,.$$

б) Функция распределения $F_{XY}\left(x,y\right)$ связана с двумерной плотностью вероятностей соотношением:

$$F_{XY}\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}\left(u,v\right)dudv\,.$$

При $\min\left(x,y\right)<0$ имеем:

$$F_{XY}\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dudv=0\,.$$

При $0\le x,y\le 1$ имеем:

$$F_{XY}\left(x,y\right)=\int_0^x\int_0^y\left(u+v\right)dudv=\frac{1}{2}\left(x^2y+xy^2\right).$$

При $0\le x\le 1$ и $y>1$ имеем:

$$F_{XY}\left(x,y\right)=\int_0^x\int_0^1\left(u+v\right)dudv=\frac{1}{2}\left(x^2+x\right).$$

Заметим, что в данной области $F_{XY}(x, y)$ в соответствии со свойством 5) совпадает с функцией распределения $F_X(x)$ случайной величины X.

При $x > 1$ и $0 \le y \le 1$ имеем:

$$F_{XY}(x, y) = \int_0^1 \int_0^y (u+v)\,du\,dv = \frac{1}{2}\left(y^2 + y\right).$$

В данной области $F_{XY}(x, y)$ совпадает с функцией распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y.

При $x > 1$ и $y > 1$ имеем:

$$F_{XY}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (u+v)\,du\,dv = 1.$$

Окончательно для функции распределения получаем выражение:

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & \min(x, y) < 0; \\ \frac{1}{2}xy(x+y), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1; \\ \frac{1}{2}x(x+1), & 0 \le x \le 1,\ y > 1; \\ \frac{1}{2}y(y+1), & x > 1,\ 0 \le y \le 1; \\ 1, & x > 1,\ y > 1. \end{cases}$$

в) Найдём плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2},\ 0 \le x \le 1.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = y + \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 1.$$

г) Условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$ находятся по формулам:

$$f_X(x/y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}; \quad f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}.$$

В данном случае

$$f_X(x/y) = \frac{x+y}{y+1/2},\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1;$$

$$f_Y(y/x) = \frac{x+y}{x+1/2},\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

д) Найдём математические ожидания $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{M}Y$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$, воспользовавшись одномерными законами распределения:

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{7}{12};$$

$$\mathrm{M}Y=\frac{7}{12} \text{ в силу симметрии.}$$

$$\mathrm{D}X=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx-(\mathrm{M}X)^2=\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144};$$

$$\mathrm{D}Y=\frac{11}{144} \text{ в силу симметрии.}$$

Корреляционный момент R_{XY} находится по совместной плотности вероятностей случайных величин X и Y:

$$R_{XY}=\mathrm{M}XY-\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}Y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy-\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}Y=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy-\left(\frac{7}{12}\right)^2=-\frac{1}{144}.$$

Корреляционная матрица вектора (X,Y) имеет вид:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\frac{11}{144} & -\frac{1}{144}\\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{144}\end{pmatrix}.$$

е) Вероятность $\mathrm{P}(X>Y)$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{P}(X>Y)=\iint_D f_{XY}(x,y)dxdy,$$

где область $D=\{(x,y):x>y\}$.

Интегрируя, получаем:

$$\mathrm{P}(X>Y)=\int_0^1\left(\int_0^x (x+y)dy\right)dx=\frac{1}{2}.$$

Поскольку $f_{XY}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, то случайные величины X и Y являются <u>зависимыми</u>. Корреляционный момент $R_{XY}\neq 0$, поэтому случайные величины являются <u>коррелированными</u>.

3.7. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение

Нормальное распределение в одномерном случае задается ПВ вида:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<a<+\infty,\ \sigma>0,$$

причем параметры $a=\mathrm{M}\,X$, $\sigma^2=\mathrm{D}\,X$ (предполагается, что $\sigma^2\neq 0$, иначе распределение является вырожденным).

<u>Определение</u>. Говорят, что $\mathrm{Н}\overrightarrow{\mathrm{СВ}}$ $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$ имеет <u>многомерное нормальное (гауссовское) распределение</u>, если его ПВ имеет вид:

$$f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left[\det\mathbf{R}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\det\mathbf{R}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{ij}^{-1}(x_i-a_i)(x_j-a_j)\right\},\qquad(3.19)$$

где $\mathbf{a}=(a_1,...,a_n)=(\mathrm{M}\,X_1,...,\mathrm{M}\,X_n)=\mathrm{M}\mathbf{X}$ - математическое ожидание $\overrightarrow{\mathrm{СВ}}$ $\mathbf{X}$; $\mathbf{R}$ - корреляционная матрица $\overrightarrow{\mathrm{СВ}}$ $\mathbf{X}$; $\det\mathbf{R}$ - определитель корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ (предполагается, что $\det\mathbf{R}>0$); R_{ij}^{-1} – алгебраическое дополнение к элементу R_{ij} матрицы $\mathbf{R}$ (так, что $\dfrac{R_{ij}^{-1}}{\det\mathbf{R}}$ - элемент матрицы, обратной к $\mathbf{R}^{-1}$).

Несколько более компактно выглядит запись для многомерной нормальной ПВ в векторной форме:

$$f_{\mathrm{X}}(\mathbf{x})=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left[\det\mathbf{R}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{a})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{a})^T\right\},$$

где верхний индекс «*T*» означает знак транспонирования.

Далее будет использоваться для нормального $\overrightarrow{\mathrm{СВ}}$ краткая запись: $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)\sim N(\mathbf{a},\mathbf{R})$.

Из выражения (3.19) для ПВ видно, что нормальный закон распределения <u>полностью</u> определяется моментами первых двух порядков: математическими ожиданиями $\mathrm{M}\,X_i=a_i$, дисперсиями $\mathrm{D}\,X_i=\sigma_i^2$ и корреляционными моментами R_{ij} $(i\neq j)$, $i,j=\overline{1,n}$.

Если $\overrightarrow{\mathrm{СВ}}$ $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)\sim N(\mathbf{a},\mathbf{R})$ и его координаты являются <u>попарно некоррелированными</u> СВ, то есть $R_{ij}=0,\ (i\neq j),\ i,j=\overline{1,n}$, то корреляционная матрица $\mathbf{R}$ и обратная к ней $\mathbf{R}^{-1}$ являются диагональными

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & ... & \\ & & \sigma_n^2\end{pmatrix},\quad \mathbf{R}^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sigma_1^2 & & \\ & ... & \\ & & 1/\sigma_n^2\end{pmatrix}.$$

Поэтому из (3.19) следует, что

$$f_{X_1\ldots X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{1}{\sigma_1\ldots\sigma_n\sqrt{(2\pi)^n}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_n-a_n)^2}{2\sigma_n^2}}=f_{X_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n),$$

где $f_{X_i}(x_i)$ - ПВ одномерного нормального распределения с параметрами $(a_i,\sigma_i^2),\ i=\overline{1,n}$. Но это означает независимость СВ $X_1,..,X_n$.

Таким образом, <u>для нормально распределенных СВ понятия независимости и некоррелированности совпадают</u> (эквивалентны).

<u>Другие замечательные свойства</u> многомерного нормального распределения.

Если $\mathbf{X}=\left(X_1,..,X_n\right)\sim N(\mathbf{a},\mathbf{R})$, то:

1. Все координаты X_i имеют одномерные нормальные распределения: $X_i\sim N(a_i,\sigma_i^2),\ i=\overline{1,n}$ (уметь доказывать при $n=2$).

2. Все условные ЗР являются нормальными (уметь доказывать при $n=2$).

3. Если координаты X_i являются независимыми СВ, то любая их линейная комбинация $Y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$ также является нормальной СВ: $Y\sim N(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2)$ (уметь доказывать при $n=2$ с помощью интеграла свертки).

Рассмотрим подробнее случай $n=2$. Пусть $\left(X,Y\right)$ - Н$\overrightarrow{\text{СВ}}$, у которого $\mathrm{M}X=a_X$, $\mathrm{M}Y=a_Y$, $\mathrm{D}X=\sigma_X^2$, $\mathrm{D}Y=\sigma_Y^2$. В этом случае корреляционная матрица $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $\left(X,Y\right)$ имеет вид: $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & R_{XY}\\ R_{XY} & \sigma_Y^2\end{pmatrix}$, а определитель корреляционной матрицы $\det\mathbf{R}=\sigma_X^2\sigma_Y^2-R_{XY}^2=\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-r_{XY}^2)$.

Поэтому ПВ двумерного нормального $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $\left(X,Y\right)$ имеет вид:

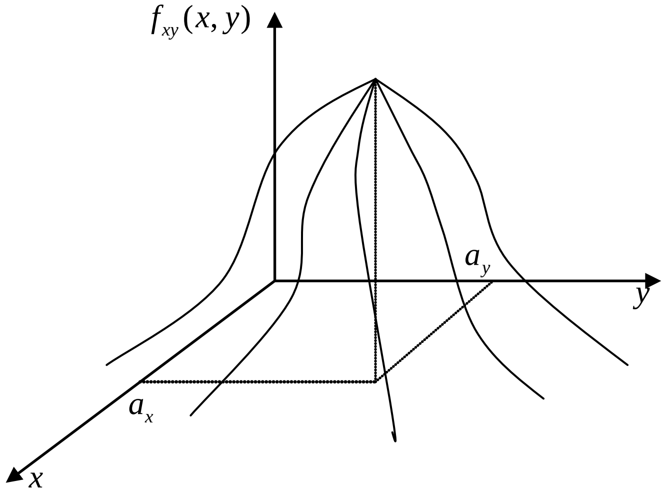
$$f_{XY}\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r_{XY}^2\right)\sigma_X^2\sigma_Y^2}\left[\sigma_Y^2\left(x-a_X\right)^2-2R_{XY}\left(x-a_X\right)\left(y-a_Y\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_Y^2\left(y-a_Y\right)^2\right]\right\}=$$

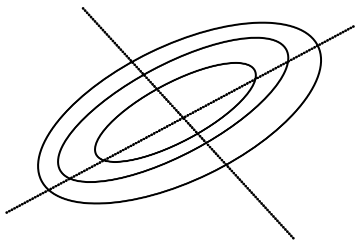
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r_{XY}^2\right)}\left[\frac{\left(x-a_X\right)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2r_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\left(x-a_X\right)\left(y-a_Y\right)+\frac{\left(y-a_Y\right)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}.$$

Для двумерного нормального $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) используется краткая запись: $(X,Y) \sim N(a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$ (зависит от пяти параметров).

График двумерной ПВ $f_{XY}(x,y)$ имеет вид:



Линиями уровня являются эллипсы:



Найдем одномерные ПВ $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ координат $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $(X,Y) \sim N(a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r_{XY}^2\right)}\left[\left(\frac{y-a_Y}{\sigma_Y} - \frac{r_{XY}}{\sigma_X}(x-a_X)\right)^2 + \frac{1-r_{XY}^2}{\sigma_X^2}\left(x-a_X\right)^2\right]\right\}dy =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Çàì åí à}: \; u = \dfrac{1}{\sqrt{1-r_{XY}^2}}\left(\dfrac{y-a_Y}{\sigma_Y} - r_{XY}\dfrac{x-a_X}{\sigma_X}\right) \\ \qquad\qquad du = \dfrac{1}{\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}dy \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left[-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du \cdot \sigma_y\sqrt{1-r_{XY}^2} = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}\right],$$

то есть $X \sim N(a_X, \sigma_X^2)$.

Аналогично, $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]$, то есть $Y \sim N(a_Y,\sigma_Y^2)$.

Таким образом, у двумерного нормального $\overrightarrow{\text{СВ}}$ (X,Y) одномерные законы распределения <u>всегда</u> являются нормальными.

Найдем условные ЗР, если $\overrightarrow{\text{СВ}}$ $(X,Y)\sim N(a_X,a_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,r_{XY})$.

$$f_X(x/y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\left(1-r_{XY}^2\right)}\left[\dfrac{\left(x-a_X\right)^2}{\sigma_X^2}-\dfrac{2r_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\left(x-a_X\right)\left(y-a_Y\right)+\dfrac{\left(y-a_Y\right)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{\left[x-a_X-r_{XY}\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y-a_Y\right)\right]^2}{2\left(1-r_{XY}^2\right)\sigma_X^2}\right\}$$

Из полученного вида условной ПВ $f_X(x/y)$ следует, что она является ПВ нормального ЗР с параметрами

$$\mathrm{M}\left(X/Y=y\right)=a_X+r_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y-a_Y\right) \text{ и } \mathrm{D}\left(X/Y=y\right)=\sigma_X^2\left(1-r_{XY}^2\right).$$

Полностью аналогично получаем, что условная ПВ

$$f_Y(y/x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{\left[y-a_Y-r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-a_X\right)\right]^2}{2\left(1-r_{XY}^2\right)\sigma_Y^2}\right\}$$

является ПВ нормального ЗР с параметрами

$$\mathrm{M}\left(Y/X=x\right)=a_Y+r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-a_X\right) \text{ и } \mathrm{D}\left(Y/X=x\right)=\sigma_Y^2\left(1-r_{XY}^2\right).$$

Таким образом, если (X,Y) - двумерный нормальный $\overrightarrow{\text{СВ}}$, то условные математические ожидания $\mathrm{M}\left(X/Y=y\right)$ и $\mathrm{M}\left(Y/X=x\right)$ являются линейными функциями условия (или, другими словами, в нормальном случае уравнения регрессии являются линейными), а условные дисперсии $\mathrm{D}\left(X/Y=y\right)$ и $\mathrm{D}\left(Y/X=x\right)$ являются постоянными величинами.

Глава 4. Функции случайных аргументов. Предельные теоремы теории вероятностей

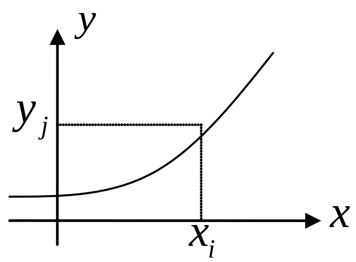
4.1. Функции случайных аргументов

Пусть $\vec{\mathbf{X}} = \left(X_1, .., X_n\right)$ - случайный вектор, закон распределения которого известен, и $y = g(x_1, \ldots, x_n)$ - скалярная (для простоты) неслучайная функция, область определения которой содержит множество возможных значений вектора $\vec{\mathbf{X}}$. Рассмотрим случайную величину $Y = g(X_1, ..., X_n)$. Известно, что для нахождения числовых характеристик случайной величины $Y = g(X_1, ..., X_n)$ достаточно знать только закон распределения случайного вектора $\vec{\mathbf{X}}$. Однако, во многих приложениях, особенно в математической статистике, необходимо уметь находить в явном виде закон распределения случайной величины *Y*, являющейся функцией случайных аргументов. Рассмотрим вначале задачу нахождения закона распределения случайной величины *Y* в одномерном случае ($n = 1$).

4.1.1. Функции от случайных величин

<u>Дискретный случай</u>. Пусть X – ДСВ, принимающая значения x_i с вероятностями p_i, $i = \overline{1, n}$ (случай счетного числа значений СВ X рассмотреть самостоятельно). Тогда для произвольной неслучайной функции $g(x)$, область определения которой содержит множество возможных значений СВ X, СВ $Y = g\left(X\right)$ является дискретной и задача состоит в нахождении ее ЗР.

а) Предположим вначале, что все значения $g\left(x_i\right)$ различны (так, в частности, может быть, если функция $y = g(x)$ является монотонной в области возможных значений случайной величины X). Тогда случайная величина $Y = g\left(X\right)$ будет иметь столько же возможных значений y_j, как и случайная величина X, с $y_j = g(x_j)$, $j = \overline{1, n}$ и при этом



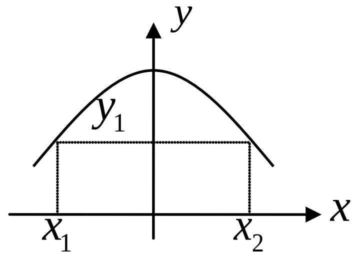
$$q_j = \mathrm{P}\left(Y = y_j\right) = \mathrm{P}\left(g(X) = g(x_j)\right) = \mathrm{P}\left(X = x_j\right) = p_j, \; j = \overline{1, n}. \quad (4.1)$$

Таким образом, ЗР СВ Y имеет вид:

Y	y_1	y_2	…	y_n
P	q_1	q_2	…	q_n

где в соответствии с (4.1) вероятность $q_j = p_j$, $j = \overline{1, n}$.

б) Предположим теперь, что среди значений $g(x_i)$ есть совпадающие (это может быть, в частности, если функция $y=g(x)$ не является монотонной в области возможных значений случайной величины X). Тогда случайная величина $Y=g(X)$ будет иметь меньше возможных значений, чем случайная величина X , и ими являются y_j, $j=\overline{1,m}$ $(1\le m<n)$, различные среди $g(x_i)$, $i=\overline{1,n}$. При этом вероятности q_j значений y_j определяются по формуле:



$$q_j = \mathrm{P}\left(Y=y_j\right)=\mathrm{P}\left(g(X)=y_j\right)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i:g(x_i)=y_j}(Y=y_j)\right)=\sum_{i:g(x_i)=y_j} p_i,\ j=\overline{1,m}, \qquad (4.2)$$

ЗР СВ Y в данном случае имеет вид:

Y	y_1	y_2	…	y_m
P	q_1	q_2	…	q_m

где в соответствии с (4.2) вероятности q_j являются суммой вероятностей p_i тех значений x_i, для которых $g(x_i)=y_j$. $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$.

Пример. Найти ЗР СВ $Y=|X|$, если СВ X является дискретной и имеет ЗР

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Решение. В соответствии с (4.2) ЗР СВ $Y=|X|$ имеет вид:

Y	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

Непрерывный случай. Если X – НСВ с ПВ $f_X(x)$, а $y=g(x)$ – дифференцируемая функция в области возможных значений случайной величины X. Тогда величина $Y=g(X)$ является непрерывной СВ и задача состоит в нахождение ПВ $f_Y(y)$.

Предположим вначале, что $y=g(x)$ - монотонно возрастающая функция в области возможных значений СВ X. Тогда у функции $y=g(x)$ существует однозначная обратная функция $x=g^{-1}(y)$ и ФР СВ $Y=g(X)$ можно записать в виде:

$$F_Y(y)=\mathrm{P}(Y<y)=\mathrm{P}(g(X)<y)=\mathrm{P}(X<g^{-1}(y))=F_X(g^{-1}(y)).$$

Дифференцируя обе части полученного равенства по y, получаем:

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}=f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}. \qquad (4.3)$$

Для <u>монотонно убывающей</u> в области возможных значений СВ X функции $y = g(x)$

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X > g^{-1}(y)) = 1 - \mathrm{P}(X \le g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)),$$

а после дифференцирования по y обеих частей этого равенства

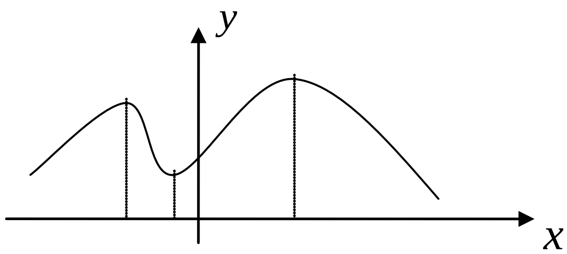
$$f_Y(y) = F_Y'(y) = -F_X'(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}. \qquad (4.4)$$

Объединяя полученные в (4.3) и (4.4) результаты, получаем:

Если X – НСВ с ПВ $f_X(x)$, а $y = g(x)$ – монотонная дифференцируемая функция, то СВ $Y = g(X)$ является непрерывной и ее ПВ $f_Y(y)$ определяется через $f_X(x)$ по формуле:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \qquad (4.5)$$

где $x = g^{-1}(y)$ – функция, обратная к функции $y = g(x)$ (отметим, что равенство (4.5) имеет место в точках непрерывности ПВ $f_X(x)$ и $f_Y(y)$).



Если дифференцируемая функция $y = g(x)$ <u>не является монотонной</u> в области возможных значений случайной величины X, то ее область определения можно разбить на K непересекающихся интервалов, на каждом из которых она монотонной будет и будет иметь однозначную обратную функцию $x_i = g_i^{-1}(y),\ i = \overline{1,K}$. Применяя формулу (4.5) на каждом интервале монотонности, получаем:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_i^{-1}(y)}{dy}\right|. \qquad (4.6)$$

<u>Пример 1</u>. Пусть X – НСВ с ПВ $f_X(x)$, а $Y = aX + b$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a \ne 0)$. Найти ПВ $f_Y(y)$.

<u>Решение</u>. В данном случае функция $y = g(x) = ax + b$ является монотонной при любых значениях $a,b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$ (при $a > 0$ функция $y = g(x)$ возрастает, при $a < 0$ - убывает). Функция, обратная к $y = g(x)$, имеет вид: $x = g^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$, а ее производная $\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{a}$. Поэтому в соответствии с (4.5)

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \qquad (4.7)$$

а) Рассмотрим линейное преобразование вида $Y=(b-a)X+a,\ (b>a)$ над СВ $X \sim R[0,1]$.

В соответствии с (4.7) в этом случае $f_Y(y)=\dfrac{1}{b-a}f_X\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right)$, а с учетом того, что

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1],\end{cases}$$

для ПВ СВ Y имеем выражение:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & 0\le\dfrac{y-a}{b-a}\le 1;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & y\in[a,b];\\ 0, & y\notin[a,b].\end{cases}$$

Полученный результат схематично можно записать

$$R[0,1]\xrightarrow{Y=(b-a)X+a}R[a,b].$$

и он означает, что из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$ можно получить равномерное распределение на любом отрезке $[a,b]$ путем линейного преобразования.

б) Рассмотрим линейное преобразование вида $Y=\sigma X+a,\ (\sigma>0)$ над СВ $X \sim N(0,1)$.

В соответствии с (4.7) в этом случае $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sigma}f_X\left(\dfrac{y-a}{\sigma}\right)$, а с учетом того, что

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

для ПВ СВ Y имеем выражение:

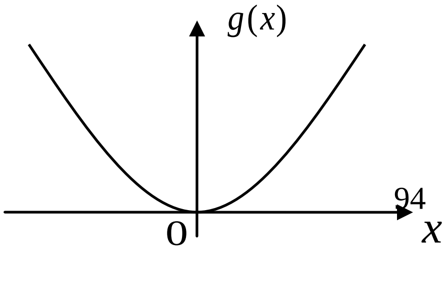
$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Полученный результат схематично можно записать

$$N(0,1)\xrightarrow{Y=\sigma X+a}N(a,\sigma^2).$$

и он означает, что из стандартного нормального распределения можно получить нормальное распределение с любыми параметрами (a,σ^2) путем линейного преобразования.

<u>Пример 2</u>. Пусть $X \sim N(0,1)$, а $Y=X^2$. Найти плотность вероятностей $f_Y(y)$.



<u>Решение</u>. В данном случае функция $y=g(x)=x^2$ не является монотонной в области

возможных значений случайной величины X и имеет два интервала монотонности $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. На каждом из интервалов функция $y=g(x)$ имеет однозначную обратную функцию: $g_1^{-1}(y)=-\sqrt{y}$ на первом интервале $(-\infty,0)$ и $g_2^{-1}(y)=\sqrt{y}$ - на втором $(0,+\infty)$. Поскольку модуль производной $\left|\frac{dg_i^{-1}(y)}{dy}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, $i=1,2$, то в соответствии с (4.6)

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(-\sqrt{y}\right)+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(\sqrt{y}\right),$$

а с учетом того, что $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$, получаем:

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}},\ \ y>0,$$

$f_Y(y)=0$ при $y\le 0$.

<u>Пример 3</u>. Пусть $F(x)$ - строго монотонная ФР, а СВ $U\sim R[0,1]$. Тогда СВ $X=F^{-1}(U)$ имеет заданную ФР $F(x)$.

<u>Решение</u>. Действительно,

$$F_X(x)=\mathrm{P}(X<x)=\mathrm{P}(F^{-1}(U)<x)=\mathrm{P}(U<F(x))=F(x).$$

Последнее равенство следует из того, что ФР СВ $U\sim R[0,1]$ имеет вид:

$$F_U(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}.$$

<u>Смысл примера 3</u>. Предположим, что требуется получить n значений $x_1,\dots,x_n$ СВ X с заданным ЗР (смоделировать СВ X). Для этого в соответствии с примером 3 необходимо найти ФР $F_X(x)$ СВ X и, если она имеет однозначную обратную функцию, то положить

$$x_i=F_X^{-1}(u_i),\ i=\overline{1,n},$$

где u_i, $i=\overline{1,n}$ - значения СВ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ (значения u_i, $i=\overline{1,n}$ можно получить путем обращения к датчику случайных чисел, входящему в стандартное математическое обеспечение любого персонального компьютера).

4.1.2. Функции от случайных векторов

Пусть (X,Y) – двумерный $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ с заданным ЗР и СВ $Z=g(X,Y)$, где $g(x,y)$ – неслучайная скалярная функция двух переменных, область определения которой содержит множество возможных значений вектора (X,Y). Рассмотрим задачу нахождения ЗР СВ Z.

Пусть (X,Y) – Ä$\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$, принимающий конечное число значений (x_i,y_j) с вероятностями $p_{ij}=\mathrm{P}(X=x_i,Y=y_j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ (случай счетного числа значений $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ рассмотреть самостоятельно). Тогда $Z=g(X,Y)$ – ДСВ и ее возможными значениями z_k, $k=\overline{1,l}$ являются различные среди значений $g(x_i,y_j)$ ($l\neq nm$ может быть). При этом вероятности значений z_k аналогично одномерному случаю определяются по формуле:

$$\mathrm{P}(Z=z_k)=\mathrm{P}(g(X,Y)<z_k)=\sum_{(i,j):g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij}\,,\ k=\overline{1,l}. \quad (4.8)$$

Если (X,Y) – Í $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ с ПВ $f_{XY}(x,y)$, то $Z=g(X,Y)$ является НСВ, если функция $g(x,y)$ дифференцируема по каждому из своих аргументов. При этом ФР $F_Z(z)$ СВ Z определяется формулой:

$$F_Z(z)=\mathrm{P}(Z<z)=\mathrm{P}(g(X,Y)<z)\iint_{(x,y):g(x,y)<z} f_{XY}(x,y)dxdy, \quad (4.9)$$

а ПВ $f_Z(z)$ находится дифференцированием $F_Z(z)$ по z.

Композиция (свертка) законов распределения

Часто на практике возникает задача определения ЗР СВ $Z=X+Y$, являющейся суммой координат $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ (X,Y). Если при этом одну из СВ интерпретировать как полезный сигнал, а вторую СВ как шум, то в приложениях эта задача известна как исследование модели «сигнал + шум».

Применяя формулы (4.8) и (4.9) для функции $z=g(x,y)=x+y$ получаем следующие результаты.

Если (X,Y)- Ä$\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$, принимающий конечное число значений (x_i,y_j) с вероятностями $p_{ij}=\mathrm{P}(X=x_i,Y=y_j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, то $Z=X+Y$ – ДСВ и ее возможными значениями z_k, $k=\overline{1,l}$, являются различные среди значений x_i+y_j. Вероятности значений z_k определяются по формуле:

$$\mathrm{P}\left(Z=z_k\right)=\sum_{(i,j):\, x_i+y_j=z_k} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=z_k-x_i)=\sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(X=z_k-y_j, Y=y_j),\ k=\overline{1,l} \qquad (4.10)$$

(при этом предполагается, что вероятность $\mathrm{P}\left(X=x_i, Y=z_k-x_i\right)=0$, если $z_k-x_i \neq y_j$ ни при каком *j*, и аналогично вероятность $\mathrm{P}\left(X=z_k-y_j, Y=y_j\right)=0$, если $z_k-y_j \neq x_i$ ни при каком *i*).

Если $\left(X,Y\right)$- Í $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ с ПВ $f_{XY}\left(x,y\right)$, то СВ $Z=X+Y$ является непрерывной и ФР $F_Z\left(z\right)$ СВ Z имеет вид:

$$F_Z\left(z\right)=\mathrm{P}\left(Z<z\right)=\mathrm{P}(X+Y<z) \iint\limits_{(x,y):x+y<z} f_{XY}\left(x,y\right)dxdy$$

а, после расстановки пределов по области $D_z=\left\{(x,y): x+y<z\right\}$,

$$F_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{XY}\left(x,y\right)dy\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-y} f_{XY}\left(x,y\right)dx\right)dy$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по z, получаем:

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}\left(x,z-x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}\left(z-y,y\right)dy \qquad (4.11)$$

(в точках непрерывности ПВ $f_{XY}\left(x,y\right)$, $f_X\left(x\right)$ и $f_Y\left(y\right)$).

Если дополнительно известно, что координаты $\overrightarrow{\text{ÑÂ}}$ $\left(X,Y\right)$ являются <u>независимыми</u> СВ, то:

- СВ $Z=X+Y$ является дискретной, если X и Y - ДСВ, и имеет ЗР, определяемый в соответствии с (4.10) вероятностями:

$$\mathrm{P}\left(Z=z_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left(X=x_i\right)\mathrm{P}\left(Y=z_k-x_i\right)=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}\left(Y=y_j\right)\mathrm{P}\left(X=z_k-y_j\right),\ k=\overline{1,l} \quad (4.12)$$

(при этом предполагается, что вероятность $\mathrm{P}\left(Y=z_k-x_i\right)=0$, если $z_k-x_i \neq y_j$ ни при каком *j*, и аналогично вероятность $\mathrm{P}\left(X=z_k-y_j\right)=0$, если $z_k-y_j \neq x_i$ ни при каком *i*).

- СВ $Z=X+Y$ является непрерывной, если X и Y- НСВ, и имеет в соответствии с (4.11) ПВ:

$$f_Z\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(z-y\right)f_Y\left(y\right)dy, \quad (4.13)$$

где $f_X\left(x\right)$ и $f_Y\left(y\right)$ - ПВ СВ X и Y соответственно;

- СВ $Z=X+Y$ является непрерывной, если X - дискретная а Y- непрерывная СВ, и имеет ПВ:

$$f_Z(z)=\sum_{i=1}^{n} p_i f_Y(z-x_i), \quad (4.14)$$

где x_i и p_i, $i=\overline{1,n}$ - значения СВ X и соответствующие им вероятности, а $f_Y(y)$ - ПВ СВ Y.

Получается данный результат комбинированием дискретного и непрерывного случаев. Вначале находится ФР НСВ $Z=X+Y$ с учетом независимости СВ X и Y:

$$F_Z(z)=\mathrm{P}(Z<z)=\mathrm{P}(X+Y<z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i, Y<z-x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)\mathrm{P}(Y<z-x_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i F_Y(z-x_i),$$

а затем дифференцированием $F_Z(z)$ по z получаем для ПВ $f_Z(z)$ выражение (4.14).

Задача определения ЗР суммы независимых СВ по ЗР слагаемых в теории вероятностей называется <u>задачей композиции</u> ЗР, а в функциональном анализе – <u>сверткой</u> функций. По этой причине формулу (4.13) кратко можно записать в виде $f_{X+Y}=f_X * f_Y$ (где $*$ означает операцию свертки), а интегралы в ней называют интегралами свертки.

<u>Замечание</u>. Все результаты, полученные для двумерного СВ, без труда обобщаются и на многомерный случай.

<u>Пример</u>. Пусть $X \sim N(a_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(a_2,\sigma_2^2)$ и СВ X и Y независимы. Найти ПВ СВ $Z=X+Y$.

<u>Решение</u>. Для простоты положим $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$ (общий случай рассмотреть самостоятельно). Тогда, в соответствии с интегралом свертки (4.13), имеем:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x-a_2)^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a_1)^2-\frac{1}{2}\left[(z-a_1-a_2)-(x-a_1)\right]^2\right\}dx=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z-a_1-a_2)^2\right\}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-(x-a_1)^2+(z-a_1-a_2)(x-a_1)-\frac{1}{4}(z-a_1-a_2)^2+\frac{1}{4}(z-a_1-a_2)^2\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{4}(z-a_1-a_2)^2\right\}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left[(x-a_1)-\frac{1}{2}(z-a_1-a_2)\right]^2\right\}dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(z-a_1-a_2)^2}{4}}$$

(при этом был использован тот факт, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ - интеграл Пуассона)

Таким образом, СВ $Z = X + Y \sim N(a_1 + a_2, 2)$.

В общем случае, когда $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq 1$, СВ $Z = X + Y \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

По индукции можно доказать, что если СВ $X_1, ..., X_n$ независимы (в совокупности) и $X_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$, $i = \overline{1, n}$, то СВ их любая линейная комбинация также имеет нормальный ЗР:

$$Y = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n \sim N(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2).$$

4.2. Предельные теоремы теории вероятностей

Есть две группы предельных теорем, объединяемых названиями: законы больших чисел (ЗБЧ) и центральная предельная теорема (ЦПТ). ЗБЧ устанавливают факт приближения среднего арифметического СВ к некоторой неслучайной величине (константе). ЦПТ устанавливает факт приближения ЗР суммы СВ к нормальному ЗР.

Прежде, чем переходить к рассмотрению предельных теорем, приведем ряд понятий и фактов, необходимых для их формулировки и доказательства.

4.2.1. Неравенство Чебышева

Получим вначале некоторые оценки для распределений СВ.

Лемма. Если неотрицательная СВ X имеет конечное математическое ожидание $\mathrm{M}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\mathrm{P}\left(X \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{M}X}{\varepsilon}.$$

▲ Докажем лемму для НСВ X (для ДСВ доказать самостоятельно). По определению математического ожидания НСВ

$$\mathrm{M}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \begin{bmatrix} f(x) = 0, \\ \text{если} \quad x < 0 \end{bmatrix} = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq$$

$$\geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon f(x)dx = \varepsilon\,\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \ \blacksquare.$$

Следствие (неравенство Чебышева). Если СВ X имеет конечную дисперсию $\mathrm{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathrm{P}\left(\left|X - \mathrm{M}X\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2}; \quad (4.15)$$

$$\mathrm{P}\left(\left|X - \mathrm{M}X\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2}. \quad (4.15')$$

▲ В соответствии с леммой

$$\mathrm{P}\left(\left|X-\mathrm{M}X\right|\geq\varepsilon\right)=\mathrm{P}((X-\mathrm{M}\,X)^2\geq\varepsilon^2)\leq\frac{\mathrm{M}(X-\mathrm{M}\,X)^2}{\varepsilon^2}=\frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2},$$

что доказывает неравенство (4.15). Неравенство $(4.15')$ следует из (4.15) путем перехода к противоположному событию ■.

Неравенство Чебышева имеет большое теоретическое и практическое значение. Оно дает простую оценку для вероятности отклонения СВ с произвольным ЗР от ее математического ожидания. Причем, если о СВ, кроме ее математического ожидания и дисперсии ничего не известно, то эту оценку улучшить нельзя (существует пример СВ, для которой в (4.15) достигается равенство). Если же есть дополнительная информация о СВ (например, известен ее ЗР), то оценки (4.15) и $(4.15')$ могут быть существенно улучшены.

Пример. Пусть СВ X имеет нормальный ЗР: $X \sim N(a,\sigma^2)$. Тогда:

- на основании неравенства Чебышева

$$\mathrm{P}\left(\left|X-\mathrm{M}X\right|<3\sigma\right)\geq 1-\frac{1}{9}\approx 0.889;$$

- в соответствии с «правилом 3σ»

$$\mathrm{P}\left(\left|X-\mathrm{M}X\right|<3\sigma\right)=2\Phi(3)-1\approx 0.997,$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

4.2.2. Виды сходимости последовательностей случайных величин и связь между ними

Определение. Говорят, что последовательность СВ $\{X_n\},\ n\geq 1,$ сходится по вероятности к величине X (случайной или нет), если для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|X_n-X\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

или, что эквивалентно,

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|X_n-X\right|<\varepsilon\right)=1$$

Краткое обозначение сходимости по вероятности: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X$.

Определение. Говорят, что последовательность СВ $\{X_n\},\ n\geq 1,$ сходится в среднем квадратическом к величине X (случайной или нет), если

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}\left(X_n-X\right)^2=0.$$

Краткое обозначение сходимости в среднем квадратическом: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} X$ или $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ X_n=X$ (limit in the mean).

Лемма. Если последовательность СВ $\{X_n\},\ n\geq 1,$ сходится к величине X в среднем квадратическом, то она сходится к этой величине и по вероятности:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X.$$

▲ В силу неравенства Чебышева

$$\mathrm{P}\left(\left|X_n - X\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{M}(X_n - X)^2}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому, если $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} X$, то $\mathrm{M}(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\left(\left|X_n - X\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, поскольку вероятность не может быть отрицательной (лемма о двух милиционерах) ■.

Смысл леммы: сходимость в среднем квадратическом является более сильной, чем сходимость по вероятности. Обратное неверно: из сходимости по вероятности сходимость в среднем квадратическом не следует.

Смысл введенных видов сходимостей последовательностей СВ: понятие предела определено только для числовой последовательности, поэтому случайность под знаком предела должна быть ликвидирована. Это делается либо с помощью вероятности, либо с помощью математического ожидания со своим понятием близости между X_n и X.

4.2.3. Законы больших чисел

Типичным примером применения на практике ЗБЧ является следующая задача об измерениях в условиях помех.

Предположим, что производится измерение некоторой физической величины a. При этом в действительности результат измерения есть значение СВ $X = a + \delta$, где δ - погрешность измерения, которую естественно считать СВ с $\mathrm{M}\delta = 0$, $\mathrm{D}\delta = \sigma^2$. Для повышения точности измерения величины a на практике всегда поступают следующим образом. Измерения производят как можно в большем количестве и в одинаковых условиях, стараясь обеспечить независимость измерений друг от друга. Получают при этом результаты $x_1,\ldots,x_n$ (значения СВ X). В качестве приближенного значения величины a принимают среднее арифметическое результатов измерений:

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \qquad (4.16)$$

ЗБЧ позволяют:

- указать точный смысл приближенного равенства (4.16);
- ответить на вопрос о точности приближенного равенства (4.16);
- указать условия, при которых утверждения типа приближенного равенства (4.16) справедливы.

Определение. Говорят, что последовательность СВ $\{X_n\}$, $n \ge 1$, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}X_k = a_k$, $k \ge 1$, подчиняется закону больших чисел (ЗБЧ), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \ge \varepsilon\right) = 0 \qquad (4.17),$$

или, более кратко,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Важно выделить частный случай, когда все СВ в последовательности $\{X_n\}$, $n \geq 1$, имеют одинаковые математические ожидания $\mathrm{M}X_k = a$, $k \geq 1$. Тогда утверждение ЗБЧ (4.17) принимает вид:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a \right| \geq \varepsilon \right) = 0, \qquad (4.17')$$

то есть

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} a$$

(в частности, утверждение типа ЗБЧ, имеет вид (4.17′) для одинаково распределенных СВ).

Рассмотрим несколько вариантов ЗБЧ, причем начнем с наиболее общего из них.

<u>Теорема 1 (Маркова)</u> (ЗБЧ для зависимых, разнораспределенных СВ).

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность СВ, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}\, X_k = a_k$ и дисперсии $\mathrm{D}\, X_k = \sigma_k^2$, $k \geq 1$ и выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) = 0. \qquad \text{(условие Маркова)}$$

Тогда эта последовательность СВ подчиняется ЗБЧ, то есть выполняется соотношение (4.17).

▲ Обозначим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Тогда по свойствам математического ожидания и дисперсии имеем:

$$\mathrm{M}Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}\, X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k; \;\; \mathrm{D}Y_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right).$$

В силу неравенства Чебышева (4.15)

$$\mathrm{P}\big(|Y_n - \mathrm{M}Y_n| \geq \varepsilon \big) \leq \frac{\mathrm{D}Y_n}{\varepsilon^2}.$$

Но по условию Маркова $\mathrm{D}Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Поэтому, переходя в последнем соотношении к пределу при $n \to \infty$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\big(|Y_n - \mathrm{M}Y_n| \geq \varepsilon \big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть $Y_n - \mathrm{M}Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$ (лемма о двух милиционерах) ■.

Теорема 2 (Чебышева) (ЗБЧ для некоррелированных, разнораспределенных СВ).

Пусть $\{X_n\}, n \ge 1$ - последовательность попарно некоррелированных (в частности, попарно независимых) СВ, дисперсии которых равномерно ограничены, то есть

$$\mathrm{D}X_k = \sigma_k^2 \le C,\ \ k \ge 1.$$

Тогда эта последовательность СВ подчиняется ЗБЧ, то есть выполняется соотношение (4.17).

▲ Снова обозначим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Тогда $\mathrm{M}Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\,X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, а по свойству аддитивности дисперсии для попарно некоррелированных СВ имеем:

$$\mathrm{D}Y_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}\,X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2.$$

В силу неравенства Чебышева (4.15)

$$\mathrm{P}\left(\left|Y_n - \mathrm{M}Y_n\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \le \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя далее к пределу при $n \to \infty$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\left(\left|Y_n - \mathrm{M}Y_n\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть $Y_n - \mathrm{M}Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$ ■.

Замечание 1. Теорема Чебышева является фактически следствием теоремы Маркова, поскольку из равномерной ограниченности дисперсий СВ следует выполнение условия Маркова (что и было продемонстрировано при доказательстве).

Замечание 2. Утверждение теоремы Чебышева остается справедливым и при более слабом, чем равномерная ограниченность дисперсий, условии:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k = 0.$$

Теорема 3 (ЗБЧ для независимых, одинаково распределенных СВ).

Если СВ в последовательности $\{X_n\}, n \ge 1$, являются независимыми, одинаково распределенными и имеют конечные математические ожидания $\mathrm{M}\,X_k = a$ и дисперсии $\mathrm{D}\,X_k = \sigma^2,\ k \ge 1$, то эта последовательность СВ подчиняется ЗБЧ, то есть

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} a.$$

▲ Обозначим по-прежнему $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Тогда

$$\mathrm{M}Y_n = a;\ \ \mathrm{D}Y_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Из неравенства Чебышева (4.15) получаем:

$$\mathrm{P}\left(\left|Y_n - a\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $n \to \infty$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\left(\left|Y_n - a\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} a$ ■.

Замечание 1. Теорема 3 является очевидным следствием теоремы Чебышева и ее можно было бы не доказывать. Доказательство приведено здесь только для того, чтобы утверждению теоремы придать самостоятельность.

Вернемся теперь к задаче об измерениях в условиях помех.

Проведение n независимых наблюдений над СВ $X = a + \delta$, где $\mathrm{M}\delta = 0,\ \mathrm{D}\delta = \sigma^2$, эквивалентно проведению одного наблюдения над n независимыми, распределенными также как X СВ $X_1, ..., X_n$. При этом $\mathrm{M}\,X_k = 0,\ \mathrm{D}\,X_k = \sigma^2$ для любого $k \ge 1$. В силу Теоремы 3 такая последовательность СВ $\{X_n\},\ n \ge 1,$ подчиняется ЗБЧ, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Таким образом, среднее арифметическое результатов измерений при больших n мало отличается от измеряемой величины a с вероятностью, близкой к 1. Это и есть точный смысл приближенного равенства (4.16).

Точность приближенного равенства (4.16) характеризуется величиной дисперсии среднего арифметического измерений

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right) = \frac{\sigma^2}{n},$$

которая оказывается в n раз выше, чем точность одного измерения, равная σ^2. Этот факт и объясняет требование к проведению на практике как можно большего числа измерений в условиях, обеспечивающих их независимость друг от друга.

Теорема 4 (Бернулли).

Относительная частота $\frac{m_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, сходится по вероятности при $n \to \infty$ к вероятности $p = \mathrm{P}(A)$ наступления события A в одном испытании, то есть для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{m_A}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) = 0,$$

или, кратко

$$\frac{m_A}{n} \xrightarrow{\text{P}} p \text{ при } n \to \infty.$$

▲ Обозначим X_k - число появлений события A в k-ом испытании. СВ X_k принимает два значения 1 и 0, вероятности которых равны:

$$\text{P}(X_k = 1) = \text{P}(A) = p, \ \ \text{P}(X_k = 0) = \text{P}(\overline{A}) = 1 - p = q, \quad k \geq 1$$

Все СВ X_k, являются независимыми и одинаково распределенными, причем для любого $k \geq 1$

$$\text{M}\, X_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \ \ \text{D}\, X_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

В силу Теоремы 3 последовательность СВ $\{X_k\}$, $k \geq 1$, подчиняется ЗБЧ, то есть

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} p.$$

Осталось заметить, что $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{m_A}{n}$ и поэтому $\frac{m_A}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} p$ ■.

<u>Замечание</u>. Пусть $X \sim Bi(n, p)$. Поскольку СВ X - число успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли, то ее можно представить в виде:

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad (4.18)$$

где X_k, $k \geq 1$ - СВ из доказательства теоремы Бернулли (их называют еще бернуллиевскими). Из представления (4.18), свойств математического ожидания и дисперсии и того, что $\text{M}\, X_k = p$, $\text{D}\, X_k = pq$, имеем:

$$\text{M}\, X = \sum_{k=1}^{n} \text{M}\, X_k = np, \ \ \text{D}\, X = \sum_{k=1}^{n} \text{D}\, X_k = npq.$$

Это есть более простой способ нахождения числовых характеристик биномиальной СВ, чем просто по определению (как это делалось ранее).

Теорема Бернулли является обоснованием статистического определения вероятности, в соответствии с которым за неизвестную вероятность $\text{P}(A)$ события A принимается его известная относительная частота $\text{P}^*(A) = \frac{m_A}{n}$ появления в n независимых испытаниях. Теорема Бернулли утверждает, что действительно вероятность неравенства $\left|\frac{m_A}{n} - p\right| < \varepsilon$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ может быть при достаточно большом числе испытаний n сделана как угодно близкой к 1.

Физическая суть ЗБЧ состоит в том, что различные по алгебраическим знакам случайные отклонения независимых (или слабо зависимых) СВ X_k, $k \ge 1$ от их общего среднего значения при большом n в массе своей взаимно погашаются. Поэтому, хотя сами величины X_k, $k \ge 1$ и случайны, но их среднее $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ при достаточно большом n практически уже неслучайно.

Из ЗБЧ также следует, что путем усреднения наблюдаемых значений любой СВ можно достаточно точно определить ее математическое ожидание (если оно неизвестно). Такого типа задачи решаются в математической статистике.

<u>Замечание</u>. Заметим, что во всех приведенных теоремах 1 – 4 справедлива на самом деле и более сильная сходимость в среднем квадратическом.

Действительно,

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \begin{cases} \to 0, \text{ â òåîðåì å 1 â ñèëó óñëîâèÿ Ì àðêîâà;} \\ \le \dfrac{C}{n} \to 0, \text{ â òåîðåì å 2 (×åáûø åâà);} \\ = \dfrac{\sigma^2}{n} \to 0, \text{ â òåîðåì å 3;} \\ = \dfrac{pq}{n} \to 0, \text{ â òåîðåì å 4 (Áåðíóëëè).} \end{cases}$$

<u>Пример.</u> Пусть $\{X_n\}, n \ge 1$ - последовательность случайных величин, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной C, а коэффициент корреляции любых случайных величин X_i и X_j $(i \ne j)$, не являющихся соседними в последовательности, равен нулю. Подчиняется ли эта последовательность случайных величин закону больших чисел?

<u>Решение.</u> Проверим выполнение условия в теореме Маркова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0.$$

Из свойств дисперсии следует, что $\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}X_k + 2\sum_{i<j} R_{ij}$, где R_{ij} - корреляционный момент случайных величин X_i и X_j. Но для $i < j$, по условию, $R_{ij} = 0$, если $i \ne j-1$. Следовательно, в сумме $\sum_{i<j} R_{ij}$ равны нулю все слагаемые кроме, может быть, $R_{12}, R_{23}, \cdots, R_{(n-1)n}$ (их ровно $n-1$).

Для любых i и j $R_{ij} \le \sqrt{\mathrm{D}X_i}\sqrt{\mathrm{D}X_j} \le \sqrt{C}\sqrt{C} = C$, так как, по условию $\mathrm{D}X_i \le C$ для любого $1 \le i \le n$. Поэтому

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k+2\sum_{i=1}^{n-1}R_{i(i+1)}\le nC+2(n-1)C=3nC-2C$$

и получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{3nC-2C}{n^2}=0.$$

Таким образом, последовательность случайных величин $\{X_n\}, n\ge 1$, подчиняется закону больших чисел.

4.2.4 Характеристические функции

Наряду с вещественными случайными величинами $X=X(\omega)$ рассматриваются и комплекснозначные случайные величины, под которыми понимаются функции вида $X(\omega)=X_1(\omega)+iX_2(\omega)$, где $i=\sqrt{-1}$, $X_1(\omega)$ и $X_2(\omega)$ - вещественнозначные случайные величины, называемые действительной и мнимой частями случайной величины $X(\omega)$ соответственно. По определению при этом полагается, что $\mathrm{M}\,X=\mathrm{M}\,X_1+i\,\mathrm{M}\,X_2$ и считается, что математическое ожидание $\mathrm{M}\,X$ существует, если существуют математические ожидания $\mathrm{M}\,X_1$ и $\mathrm{M}\,X_2$. Отметим, что для математического ожидания комплекснозначной случайной величины остаются справедливыми все свойства с очевидными изменениями.

Определение. Характеристической функцией вещественной случайной величины X с функцией распределения $F_X(x)$ называется комплекснозначная функция $\varphi_X(t)$ действительной переменной, определяемая для любого $t\in\mathbb{R}$ равенством:

$$\varphi_X(t)=Me^{itX}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_X(x). \quad (4.19)$$

Вычисляется характеристическая функция в соответствии с основной теоремой о математическом ожидании по формулам:

если X - дискретная случайная величина, принимающая значения x_k с вероятностями p_k, $k=1,2,...$, то

$$\varphi_X(t)=\sum_k e^{itx_k}p_k; \quad (4.20)$$

если X - непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей $f_X(x)$, то

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f_X(x)dx. \quad (4.21)$$

Характеристические функции представляют собой прекрасный аппарат для исследования свойств сумм независимых случайных величин и на их применении основаны доказательства многих предельных теорем.

Свойства характеристических функций

Ф1). Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ любой случайной величины X удовлетворяет условиям:

$$\varphi_X(0)=1,\ \left|\varphi_X(t)\right|\le 1 \text{ для любого } t\in\mathbb{R}\ .$$

▲ $\left|\varphi_X(t)\right|=\left|Me^{itX}\right|\le M\left|e^{itX}\right|=1$ ■.

В частности, из свойства Ф1) следует, что характеристическая функция существует у любой случайной величины X, в то время как просто математическое ожидание существует не всегда.

Ф2). Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ любой случайной величины X обладает свойством:

$$\varphi_X(t)=\overline{\varphi_X(-t)}.$$

▲ $\overline{\varphi_X(-t)}=\overline{Me^{-itX}}=M\,\overline{e^{-itX}}=Me^{itX}=\varphi_X(t)$ ■.

В частности, из свойства Ф2) следует, что характеристическая функция случайной величины X, имеющей симметричный относительно оси ординат закон распределения, является <u>вещественной</u> (в этом случае $\varphi_X(t)=\varphi_X(-t)$ и поэтому $\varphi_X(t)=\overline{\varphi_X(t)}$).

Ф3). Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ любой случайной величины X является неотрицательно определенной функцией, то есть для любого $n\in\mathbb{N}$, для любых $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ и любых комплексных чисел $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$$\sum_{k,j=1}^{n}\varphi_X(t_k-t_j)z_k\overline{z_j}\ge 0.$$

▲ В соответствии с определением характеристической функции имеем:

$$\sum_{k,j=1}^{n}\varphi_X(t_k-t_j)z_k\overline{z_j}=\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{M}\,e^{i(t_k-t_j)X}z_k\overline{z_j}=$$

$$=\mathrm{M}\sum_{k,j=1}^{n}e^{it_kX}z_k\overline{e^{it_jX}z_j}=\mathrm{M}\left|\sum_{k=1}^{n}e^{it_kX}z_k\right|^2\ge 0 \text{ ■.}$$

<u>Замечание.</u> На самом деле справедливо более общее утверждение, известное как теорема Бохнера-Хинчина. Для того, чтобы непрерывная функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=1$, была характеристической функцией, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательно определенной (свойство Ф3) доказывает эту теорему в одну сторону).

Ф4). Для любых вещественных чисел $a,b\in\mathbb{R}$

$$\varphi_{aX+b}(t)=e^{itb}\varphi_X(at)$$

(преобразование характеристической функции при линейном преобразовании).

▲ Действительно, в соответствии с определением характеристической функции имеем:

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathrm{M} e^{it(aX+b)} = e^{itb}\,\mathrm{M} e^{iatX} = e^{itb}\varphi_X(at) \;\blacksquare.$$

Ф5). Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых:

если $X_1,\dots,X_n$ - независимые случайные величины, а $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, то

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

Свойство Ф5) означает, что свертке законов распределения независимых случайных величин соответствует произведение их характеристических функций.

▲ В соответствии со свойствами математического ожидания имеем:

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathrm{M} e^{it(X_1+\dots+X_n)} = \mathrm{M} e^{itX_1}\cdot\ldots\cdot e^{itX_n} = \mathrm{M} e^{itX_1}\cdot\ldots\cdot \mathrm{M} e^{itX_n} = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t) \;\blacksquare.$$

Ф6). Если у случайной величины X при некотором $k \ge 1$ существует момент порядка k, то есть $M|X|^k < \infty$, то характеристическая функция $\varphi_X(t)$ случайной величины X k раз непрерывно дифференцируема и ее k-я производная в нуле $\varphi_X^{(k)}(0)$ связана с моментом порядка k соотношением:

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\,\mathrm{M}\,X^k.$$

В частности, $\mathrm{M}\,X = -i\varphi_X'(0)$, $\mathrm{M}\,X^2 = -\varphi_X''(0)$, $\mathrm{D}\,X = -\varphi_X''(0) + \left(\varphi_X'(0)\right)^2$.

▲ Докажем свойство в непрерывном случае, когда случайная величина X имеет плотность вероятностей $f_X(x)$ и ее характеристическая функция

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx.$$

(в дискретном случае доказать самостоятельно).

Формальное дифференцирование характеристической функции k раз по t дает:

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} f_X(x)dx = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} f_X(x)dx,$$

откуда $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\,\mathrm{M}\,X^k$.

Законность дифференцирования под знаком интеграла определяется тем фактом, что

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} f_X(x)dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f_X(x)dx$$

и существованием момента k-го порядка ■.

Замечание. При четном k справедливо и обратное утверждение: если характеристическая функция случайной величины X имеет производную k-го порядка в нуле $\varphi_X^{(k)}(0)$, то у нее существуют моменты $\mathrm{M}\,X^r$ всех порядков r до k включительно и $\mathrm{M}\,X^r = i^{-r}\varphi_X^{(r)}(0),\ r \le k$.

Ф7). Если у случайной величины X существует момент порядка $k \ge 1$, то есть $M\left|X\right|^k < \infty$, то ее характеристическая функция $\varphi_X(t)$ в окрестности точки $t=0$ разлагается в ряд Тейлора:

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{t^j}{j!}\varphi_X^{(j)}(0) + o(\left|t^k\right|) =$$

$$= 1 + it\mathrm{M}\,X - \frac{t^2}{2}\mathrm{M}\,X^2 + \ldots + \frac{i^k t^k}{k!}\mathrm{M}\,X^k + o(\left|t^k\right|).$$

▲ Свойство Ф7) следует из свойства Ф6) и определения ряда Тейлора ■.

Ф8) (формула обращения).

Если $F_X(x)$ - функция распределения случайной величины X, а $\varphi_X(t)$ - ее характеристическая функция, то для любых двух точек $a,b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$, в которых функция распределения $F_X(x)$ является непрерывной, справедливо равенство:

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt.$$

▲ Докажем свойство для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятностей $f_X(x)$ и абсолютно интегрируемой характеристической функцией $\varphi_X(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_X(t)\right|dt < \infty$ (общий случай см. в учебнике А.А. Боровкова «Теория вероятностей»).

Поскольку в соответствии с (4.21) у непрерывной случайной величины X характеристическая функция $\varphi_X(t)$ является преобразованием Фурье от плотности вероятностей $f_X(x)$:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dt,$$

то абсолютная интегрируемость $\varphi_X(t)$ является достаточным условием существования обратного преобразования Фурье, в соответствии с которым

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

Интегрируя обе части последнего равенства по x в пределах от a до b, получаем:

$$\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) \left(\int_a^b e^{-itx}dx \right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t)\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}dt,$$

что и доказывает формулу обращения в непрерывном случае ■.

Непосредственно из свойства Ф8) вытекают следующие утверждения.

<u>Следствие 1.</u> Если характеристическая функция $\varphi_X(t)$ некоторой случайной величины X абсолютно интегрируема: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_X(t)| dt < \infty$, то эта случайная величина является непрерывной и ее плотность вероятностей $f_X(x)$ есть обратное преобразование Фурье от характеристической функции:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

<u>Следствие 2.</u> Абсолютно интегрируемая функция $\varphi(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, удовлетворяющая свойствам Ф1) и Ф2), является характеристической тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье всюду неотрицательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt \geq 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

▲ В этом случае преобразование Фурье $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = 2\pi f(x)$, где $f(x)$ - плотность вероятностей некоторой непрерывной случайной величины X, являющаяся функцией неотрицательной для любого $x \in \mathbb{R}$ ■.

<u>Замечание.</u> Фактически утверждение следствия 2 позволяет проверять свойство неотрицательной определенности абсолютно интегрируемой функции $\varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая свойствам Ф1) и Ф2), абсолютно интегрируемой не является, но допускает представление в виде ряда Фурье $\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k$, то она является характеристической функцией (и, следовательно, обладает свойством неотрицательной определенности) дискретной случайной величины X, принимающей значения x_k с вероятностями p_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Следствие 3 (теорема единственности).

Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ случайной величины X однозначно определяет ее функцию распределения $F_X(x)$.

▲ Следует из формулы обращения Ф8) и того, что разности $F_X(b) - F_X(a)$ при любых $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ однозначно определяют функцию распределения $F_X(x)$ ■.

Характеристические функции важнейших случайных величин

Дискретные случайные величины.

0. Вырожденная случайная величина.

Если $X = C$ п.н., то $\varphi_X(t) = \mathrm{M}e^{itC} = e^{itC}$.

1. Индикаторная случайная величина.

Индикаторная случайная величина имеет вид:

$$X = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in A; \\ 0\ , \ \omega \notin A, \end{cases}$$

а ее закон распределения:

X	0	1
P	q	p

где $p = \mathrm{P}(A),\ q = 1 - p$.

В соответствии с определением характеристической функции дискретной случайной величины (4.20) имеем:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{M}e^{itX} = \sum_k e^{itx_k} p_k = e^{it0} \cdot q + e^{it1} \cdot p = pe^{it} + q.$$

Окончательно, $$\boxed{\varphi_X(t) = pe^{it} + q.}$$

2. Биномиальная случайная величина $X \sim Bi(n, p)$.

Множество возможных значений биномиальной случайной величины

$$\mathrm{X} = \{0, 1, ..., n\} = \left\{x_k = k,\ k = \overline{0, n}\right\},$$

а вероятности, с которыми значения принимаются, определяются по формуле Бернулли:

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ \ k = \overline{0, n}.$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $X \sim Bi(n, p)$.

1 способ.

По определению характеристической функции и на основании бинома Ньютона имеем:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{M}e^{itX} = \sum_{k=0}^{n} e^{itx_k} p_k = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = \left(pe^{it} + q\right)^n.$$

2 способ.

В соответствии с представлением (4.20) случайная величина $X \sim Bi(n, p)$ равна сумме независимых случайных величин

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k ,$$

где X_k - индикаторная случайная величина (число успехов в k-ом испытании), имеющая характеристическую функцию $\varphi_{X_k}(t) = pe^{it} + q$, $k = \overline{0, n}$. Поэтому по свойству Ф5) $\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n$.

Окончательно, $\boxed{\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n .}$

3. Геометрическая случайная величина $X \sim G(p)$.

Множество возможных значений геометрической случайной величины

$$\mathrm{X} = \{1, 2, ..., n, ...\} = \{x_k = k,\ k = 1, 2, ...\},$$

а вероятности значений определяются по формуле:

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, ...$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $X \sim G(p)$.

По определению характеристической функции и с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{M} e^{itX} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} q^{k-1} p = pe^{it} \sum_{k=1}^{\infty} (qe^{it})^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} .$$

Окончательно, $\boxed{\varphi_X(t) = \dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} .}$

4. Пуассоновская случайная величина $X \sim \Pi(a)$.

Множество возможных значений пуассоновской случайной величины

$$\mathrm{X} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\} = \{x_k = k,\ k = 0, 1, 2, ...\},$$

а вероятности, с которыми значения принимаются, задаются формулой:

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $X \sim \Pi(a)$.

По определению характеристической функции и с использованием выражения для разложения экспоненты в ряд Тейлора имеем:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{M} e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itx_k} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a(e^{it} - 1)}$$

Окончательно, $\boxed{\varphi_X(t) = e^{a(e^{it} - 1)} .}$

Используя характеристические функции, найдем числовые характеристики, например, геометрической случайной величины $X \sim G(p)$.

$$\mathrm{M}\, X = -i\varphi_X'(0) = -i\left(\frac{pie^{it}(1-qe^{it}) + qie^{it}\,pe^{it}}{(1-qe^{it})^2}\right)\Bigg|_{t=0} = -i\left(\frac{ip(1-q)+ipq}{(1-q)^2}\right) = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{M}\, X^2 = -\varphi_X''(0) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{pie^{it}}{(1-qe^{it})^2}\right)\Bigg|_{t=0} = -\left(\frac{pi^2e^{it}(1-qe^{it})^2 + 2(1-qe^{it})qie^{it}\,pie^{it}}{(1-qe^{it})^4}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= -\left(\frac{-p(1-q)^2 - 2p^2q}{(1-q)^4}\right) = \frac{p+2q}{p^2}.$$

$$\mathrm{D}\, X = \mathrm{M}\, X^2 - (\mathrm{M}\, X)^2 = \frac{p+2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Найти с использованием характеристических функций числовые характеристики биномиальной и пуассоновской случайных величин самостоятельно.

Непрерывные случайные величины

5. <u>Равномерная случайная величина</u> $X \sim R[a,b]$.

Плотность вероятностей случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$, имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $X \sim R[a,b]$.

По определению характеристической функции непрерывной случайной величины (4.23) имеем:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{M}\, e^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx = \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}\right).$$

В частности:

если $X \sim R[0,1]$, то

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it}-1}{it};$$

если $X \sim R[-a,a]$, то характеристическая функция является вещественной (см. свойство Ф2))

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2a}\left(\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{it}\right) = \frac{\sin at}{at}.$$

Окончательно, $$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}\right).}$$

6. <u>Показательная (экспоненциальная) случайная величина</u> $X \sim E(\lambda)$.

Плотность вероятностей показательно распределенной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , \ x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}\ \ , \ x \geq 0. \end{cases}$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $X \sim E(\lambda)$:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{M}e^{itX} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda - it)x} dx =$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda - it} e^{-(\lambda - it)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Окончательно, $$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.}$$

7. <u>Нормальная (гауссовская) случайная величина</u> $X \sim N(a,\sigma^2)$.

Плотность вероятностей нормально распределенной с параметрами (a,σ^2) случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\ , \ -\infty < a < +\infty,\ \sigma > 0,\ -\infty < x < +\infty.$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $X \sim N(a,\sigma^2)$.

Известно, что случайную величину $X \sim N(a,\sigma^2)$ можно получить с помощью линейного преобразования $X = \sigma Y + a$, где $Y \sim N(0,1)$. Поэтому найдем вначале характеристическую функцию $\varphi_Y(t)$ стандартной нормальной случайной величины $Y \sim N(0,1)$, а затем используем свойство Ф4) для нахождения $\varphi_X(t)$.

$$\varphi_Y(t) = \mathrm{M}e^{itY} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_Y(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx + (it)^2) + \frac{1}{2}(it)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx = \begin{bmatrix} \text{çàì åí à} \\ z = x - it \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int\limits_{-\infty - it}^{+\infty - it} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

(при выкладках были использованы аналитичность подинтегральной функции на всей плоскости и интеграл Пуассона).

В соответствии со свойством Ф4) имеем:

$$\varphi_X(t)=\varphi_{\sigma Y+a}(t)=e^{iat}\varphi_Y(\sigma t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Окончательно, $$\boxed{\varphi_X(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.}$$

Пример. Заданы две независимые нормальные случайные величины: $X_1 \sim N(a_1,\sigma_1^2)$ и $X_2 \sim N(a_2,\sigma_2^2)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y=X_1+X_2$ или, другими словами, найти композицию двух нормальных законов распределения.

Решение. Известно, что характеристические функции случайных величин X_1 и X_2 имеют вид:

$$\varphi_{X_1}(t)=e^{ia_1t-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}} \text{ и } \varphi_{X_2}(t)=e^{ia_2t-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}}.$$

В соответствии со свойством Ф5) характеристическая функция случайной величины $Y=X_1+X_2$ равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)=e^{ia_1t-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}}e^{ia_2t-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}}=e^{i(a_1+a_2)t-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}.$$

Но в силу теоремы единственности (следствие 3 из формулы обращения Ф8)) это означает, что случайная величина $Y=X_1+X_2$ имеет также нормальный закон распределения: $Y \sim N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Замечание. Законы распределения, сохраняющиеся при линейных преобразованиях над случайными величинами, называются устойчивыми. Рассмотренный пример доказывает устойчивость нормального закона распределения. Устойчивыми также являются биномиальный и пуассоновский законы распределения (показать самостоятельно).

Задача. Используя характеристические функции, найти все центральные моменты μ_n случайной величины $X \sim N(a,\sigma^2)$.

Замечание (о производящих функциях).

Пусть X - дискретная случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения, закон распределения которой известен, то есть известно ее множество возможных значений $\mathrm{X}=\{x_k=k,\ k=0,1,2,...\}$ и вероятности значений $p_k=\mathrm{P}(X=k),\ \ k=0,1,2,...$.

Производящей функцией целочисленной случайной величины X называется функция $p_X(z)$ комплексной переменной z, определяемая при $|z| \le 1$ равенством

$$p_X(z) = \mathrm{M}\, z^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k .$$

Производящая функция $p_X(z)$ является аналитической внутри единичного круга $|z| < 1$ и по ней закон распределения целочисленной случайной величины X однозначно определяется равенствами:

$$p_k = \frac{1}{k!} p_X^{(k)}(0), \text{ где } p_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dz^k} p_X(z) \Big|_{z=0} , \; k \ge 0.$$

Так как $p_X(e^{it}) = \varphi_X(t)$ есть характеристическая функция целочисленной случайной величины X, то для производящих функций остаются справедливыми все свойства характеристических функций с теми лишь изменениями, которые вытекают из замены аргумента. Но использование на практике производящих функций при исследовании целочисленных случайных величин существенно проще, чем характеристических.

В частности (показать самостоятельно):

производящая функция $p_{S_n}(z)$ суммы $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ независимых целочисленных случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых:

$$p_{S_n}(z) = \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}(z);$$

моменты первых двух порядков целочисленной случайной величины X определяются через ее производящую функцию $p_X(z)$ равенствами:

$$\mathrm{M}\,X = p'_X(1), \; \mathrm{M}\,X^2 = p''_X(1) + p'_X(1), \; \mathrm{D}\,X = p''_X(1) + p'_X(1) - \left(p'_X(1)\right)^2 .$$

Задача 1. Найти производящие функции случайных величин $X \sim Bi(n,p)$, $X \sim G(p)$, $X \sim \Pi(a)$ и по ним определить их числовые характеристики $\mathrm{M}\,X$ и $\mathrm{D}\,X$.

Характеристические функции случайных векторов

Характеристической функцией случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называется комплекснозначная функция $\varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) = \varphi_{X_1 \ldots X_n}(t_1, \ldots, t_n)$ вещественных переменных, определяемая для любого $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ равенством:

$$\varphi_{X_1 \ldots X_n}(t_1, \ldots, t_n) = M e^{i \sum_{k=1}^{n} t_k X_k}$$

или в векторной форме

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) = M e^{i(\vec{t}, \vec{X})} ,$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение векторов.

Характеристическая функция случайного вектора обладает всеми свойствами (с очевидными изменениями в формулировках) одномерной характеристической функции. Но есть и дополнительные полезные свойства.

*n*Ф1) По характеристической функции $\varphi_{X_1 \dots X_n}(t_1,\dots,t_n)$ случайного вектора $(X_1,\dots,X_n)$ можно найти характеристическую функцию любой группы из k $(k<n)$ его координат $(X_{j_1},\dots,X_{j_k})$. Для этого следует положить аргументы $t_s = 0$ при $s \neq j_l$ $(1 \le l \le k)$.

Так, например, характеристическая функция «отрезка» $(X_1,\dots,X_k)$ случайного вектора $(X_1,\dots,X_n)$ равна

$$\varphi_{X_1 \dots X_k}(t_1,\dots,t_k) = \varphi_{X_1 \dots X_n}(t_1,\dots,t_k,0,\dots,0),$$

а характеристическая функция любой координаты X_j $(j=1,\dots,n)$ вектора $(X_1,\dots,X_n)$ равна

$$\varphi_{X_j}(t_j) = \varphi_{X_1 \dots X_n}(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1},t_j,\underbrace{0,\dots,0}_{n-j-1}).$$

*n*Ф2) Если $\varphi_{X_1 \dots X_n}(t_1,\dots,t_n)$ - характеристическая функция случайного вектора $(X_1,\dots,X_n)$, то характеристическая функция суммы его координат $S_n = X_1 + \dots + X_n$ равна

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1 \dots X_n}(\underbrace{t,\dots,t}_{n}),$$

то есть следует положить все $t_j = t$ $(j=\overline{1,n})$.

<u>Задача 1</u>. Найти характеристическую функцию двумерного нормального случайного вектора $(X,Y) \sim N(a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$.

Ответ: $\varphi_{XY}(t_1,t_2) = \exp\left[ia_X t_1 + ia_Y t_2 - \dfrac{1}{2}(\sigma_X^2 t_1^2 + 2\sigma_X \sigma_Y r_{XY} t_1 t_2 + \sigma_Y^2 t_2^2) \right].$

<u>Задача 2</u>. Найти характеристическую функцию суммы $Z = X + Y$ двумерного нормального случайного вектора $(X,Y) \sim N(a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$ и по ней определить закон распределения случайной величины Z.

Ответ: $\varphi_Z(t) = \exp\left[it(a_X + a_Y) - \dfrac{t^2}{2}(\sigma_X^2 + 2\sigma_X \sigma_Y r_{XY} + \sigma_Y^2) \right].$

<u>Задача 3</u>. Найти характеристическую функцию многомерного нормального случайного вектора $(X_1,\dots X_n) \sim N(\vec{a},\mathbf{R})$.

Ответ: $\varphi_{X_1 \ldots X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \exp\left[i\sum_{j=1}^{n} a_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \sigma_k r_{jk} t_j t_k \right].$

4.2.5. Центральная предельная теорема

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых одинаково распределенных СВ с конечной дисперсией $\mathrm{M}X_n = a$, $\mathrm{D}X_n = \sigma^2$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$ - сумма первых n СВ.

В соответствии с ЗБЧ (Теорема 3)

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} a$$

или, после приведения к общему знаменателю,

$$\frac{S_n - na}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0 .$$

Возникает вопрос: если при делении на n мы получили в пределе 0 (в смысле некоторой, все равно какой, сходимости), то не слишком ли на «много» мы поделили? Нельзя ли поделить на что-нибудь, растущее к ∞ медленнее, чем n, чтобы получить в пределе не 0 (и не ∞, естественно)? Оказывается, что уже последовательность СВ $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}}$ сходится не к 0, а к СВ, причем имеющей нормальный ЗР!

Теоремы, которые устанавливают нормальность предельного закона распределения суммы СВ называются <u>центральными предельными теоремами (ЦПТ)</u>. Мы ограничимся приведением формулировок только двух таких теорем, которые касаются сумм <u>независимых</u> СВ (доказательства этих теорем основаны на использовании аппарата характеристических функций, выходящего за рамки данного курса, и потому приводиться не будут).

<u>Теорема 1</u> (ЦПТ для независимых, одинаково распределенных СВ).

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание $\mathrm{M}X_k = a$ и дисперсию $\mathrm{D}X_k = \sigma^2$, $k \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$ - сумма первых n СВ.

Тогда при $n \to \infty$ равномерно по всем $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

Учитывая, что $\mathrm{M}S_n = na$, а $\mathrm{D}S_n = n\sigma^2$, утверждение теоремы можно переписать в виде:

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\mathrm{D}S_n} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

или

$$F_{\tilde{S}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

где $\tilde{S}_n = \dfrac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\mathrm{D}S_n}$ - центрированная и нормированная сумма СВ ($\mathrm{M}\tilde{S}_n = 0$, $\mathrm{D}\tilde{S}_n = 1$); $F_{\tilde{S}_n}(x)$ - ФР суммы $\tilde{S}_n$; $\Phi(x)$ - ФР стандартного нормального закона распределения $N(0,1)$.

Таким образом, стремление ЗР суммы СВ к нормальному ЗР следует понимать в смысле сходимости при $n \to \infty$ ФР СВ $\tilde{S}_n$ к ФР СВ $X \sim N(0,1)$ равномерно по всем значениям аргумента.

Условия сходимости ФР суммы независимых <u>разнораспределенных</u> слагаемых к ФР стандартного нормального ЗР содержится в следующей теореме, принадлежащей А.М. Ляпунову.

<u>Теорема 2 (Ляпунова)</u> (ЦПТ для независимых, разнораспределенных СВ)

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых разно-распределенных СВ, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}X_k = a$, дисперсии $\mathrm{D}X_k = \sigma_k^2$ и центральные абсолютные моменты $\mathrm{M}|X_k - a_k|^{2+\delta}$ порядка $2+\delta$ при некотором $\delta > 0$ и любом $k \geq 1$.

Обозначим $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$ - сумму первых n СВ, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ и $C_n^{2+\delta} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}|X_k - a_k|^{2+\delta}$.

Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n} = 0 \quad \text{(условие Ляпунова)},$$

то при $n \to \infty$ равномерно по всем $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

или

$$F_{\tilde{S}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

где $\tilde{S}_n = \dfrac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\mathrm{D}S_n}$ - центрированная и нормированная сумма СВ; $F_{\tilde{S}_n}(x)$ - ФР суммы $\tilde{S}_n$; $\Phi(x)$ - ФР стандартного нормального закона распределения $N(0,1)$.

Выясним вероятностный смысл условия Ляпунова.

Для этого рассмотрим при $\varepsilon > 0$ события $D_k = \left(\dfrac{|X_k - a_k|}{B_n} > \varepsilon \right)$, $k \ge 1$. Тогда

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le n} D_k \right) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} D_k \right) \le \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(D_k) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} f_{X_k}(x)dx <$$

$$< \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - a_k|^{2+\delta} f_{X_k}(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}|X_k - a_k|^{2+\delta} = \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta}} \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^{2+\delta} \to 0$$

при $n \to \infty$, если условие Ляпунова выполнено.

Таким образом, если условие Ляпунова выполняется, то все слагаемые в центрированной и нормированной сумме $\tilde{S}_n = \dfrac{S_n - A_n}{B_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k - a_k}{B_n}$ равномерно малы в том смысле, что вероятность хотя бы одному из них превзойти величину $\varepsilon > 0$ стремится к нулю при возрастании числа слагаемых. Другими словами, влияние каждого слагаемого на всю сумму должно быть очень мало, для того, чтобы ЦПТ имела место. (Заметим, что это касается только случая разнораспределенных слагаемых, для одинаково распределенных слагаемых ЦПТ выполняется без каких-либо дополнительных предположений).

При ссылках на ЦПТ удобно использовать понятие асимптотической нормальности.

Определение. Говорят, что СВ Y_n при $n \to \infty$ асимптотически нормальна с параметрами (A_n, B_n^2) (краткая запись: $Y_n \sim (A_n, B_n^2)$), если ФР СВ $\dfrac{Y_n - A_n}{B_n}$ сходится при $n \to \infty$ к ФР $\Phi(x)$ стандартного нормального ЗР равномерно по всем $x \in (-\infty, +\infty)$.

С учетом этого определения утверждения Теорем 1 и 2 можно записать следующим образом.

Теорема 1. $S_n \sim N(na, n\sigma^2)$; Теорема 2. $S_n \sim N(A_n, B_n^2)$

Прикладное значение ЦПТ состоит в следующем. Если СВ представляет собой сумму большого числа независимых СВ, то можно считать, что ее ЗР является нормальным, причем тип распределения слагаемых безразличен. Этим фактом и обусловлено широкое распространение на практике нормального ЗР.

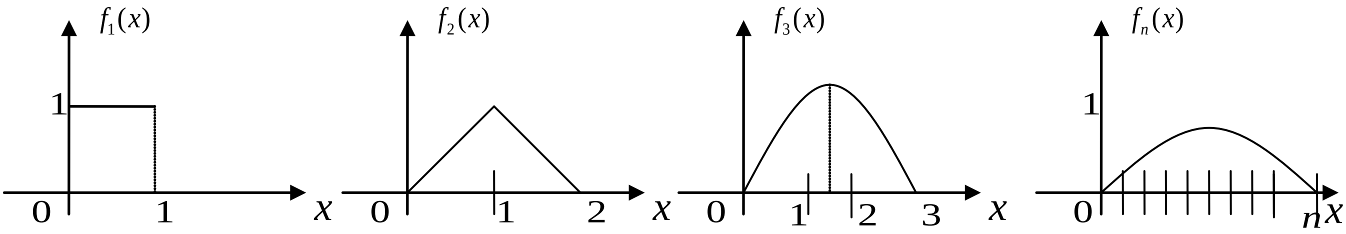
Проиллюстрируем действие ЦПТ на сумме независимых, равномерно распределенных СВ $X_k \sim R[0,1]$, $k \ge 1$.

Обозначим $f(x)$ - ПВ СВ X_k, $k \ge 1$, $f_n(x)$ - ПВ СВ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

С одной стороны, ПВ $f_n(x)$ можно найти аналитически с помощью интеграла свертки (4.13):

$$f_n(x) = \underbrace{f(x) * \ldots * f(x)}_{n\ \text{ðàç}}.$$

Графическая иллюстрация этого:



С другой стороны, поскольку $\mathrm{M}S_n = \dfrac{n}{2}$, $\mathrm{D}S_n = \dfrac{n}{12}$, то в соответствии с ЦПТ СВ

$$\frac{S_n - \mathrm{M}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} = \frac{X_1 + \ldots + X_n - \dfrac{n}{2}}{\sqrt{\dfrac{n}{12}}}$$

имеет приблизительно нормальный ЗР с параметрами (0,1) или, что эквивалентно, СВ S_n является асимптотически нормальной: $S_n \sim N\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{12}\right)$.

Последнее означает, что для ПВ $f_n(x)$ справедливо приближенное равенство:

$$f_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \dfrac{n}{12}}} \exp\left\{ -\frac{\left(x - \dfrac{n}{2}\right)^2}{2 \cdot \dfrac{n}{12}} \right\}. \quad (4.19)$$

Оказывается, что уже при $n = 12$, точность приближения в равенстве (4.19) вполне пригодна для практического использования и это свидетельствует о достаточно быстрой скорости сходимости в ЦПТ.

При $n = 12$ утверждение ЦПТ принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{12} X_k - 6 \sim N(0,1). \quad (4.20)$$

На последнем соотношении основан алгоритм получения значений стандартной нормальной СВ $X \sim N(0,1)$ с помощью значений СВ $U \sim R[0,1]$, то есть с помощью датчика случайных чисел:

$$x_i = \sum_{j=1}^{12} u_{ij} - 6,\ i = \overline{1, N}.$$

Заметим, что алгоритм моделирования стандартной нормальной СВ с помощью функции, обратной к ФР, неприменим, поскольку функция Лапласа $\Phi(x)$ не выражается через элементарные.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)**

Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Коломиец Э.И.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ДАННЫХ

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по специальности
090303.65 «Информационная безопасность
автоматизированных систем»

Самара 2012

УДК 519.2(075)
ББК 22.171

Учебное пособие содержит полное методическое обеспечение всех видов учебных занятий по разделу «Математическая статистика» курса «Теория вероятностей и математическая статистика», изучаемого студентами специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем». В состав учебного пособия входят: краткие теоретические сведения, методические указания по проведению практических занятий, варианты индивидуального задания для расчетно-графической работы или для курсового проекта (в зависимости от действующего учебного плана) и методические указания по его выполнению с использованием универсальных пакетов MCAD и MATLAB. Учебное пособие предназначено для получения студентами практических навыков при статистическом анализе случайных данных и для совершенствования форм самостоятельной работы.

Учебное пособие может быть использовано также при изучении студентами курса «Теория вероятностей и математическая статистика» направлений 010300.62 «Фундаментальные информатика и информационные технологии», 010400.62 «Прикладная математика и информатика», 010900.62 «Прикладные математика и физика» и 230100.62 «Информатика и вычислительная техника».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тезис о том, что «критерий истины есть практика» имеет самое непосредственное отношение к математической статистике,- науке, занимающейся анализом случайных данных. Именно эта наука изучает методы (в рамках точных математических моделей), которые позволяют отвечать на вопрос, соответствует ли практика, представленная в виде результатов эксперимента, данному гипотетическому представлению о природе явления или нет. При этом имеются в виду не эксперименты, которые позволяют делать однозначные, детерминированные выводы о рассматриваемых явлениях, а эксперименты, результатами которых являются случайные события. С развитием науки задач такого рода становится все больше и больше, поскольку с увеличением точности экспериментов становится все труднее избежать «случайного фактора», связанного с различными помехами и ограниченностью наших измерительных и вычислительных возможностей. Вот почему за последнее время статистические методы, проникнув в самые разнообразные области науки и техники, стали широко использоваться при анализе и обработке опытных данных. Этот процесс находит отражение и в обучении по направлениям «Фундаментальные информатика и информационные технологии», «Прикладная математика и информатика», «Прикладные математика и физика», «Информатика и вычислительная техника» и специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем», в соответствии с учебными планами которых существенное время отводится на изучение дисциплин вероятностного цикла, что обусловлено неуклонным возрастанием их практической значимости.

Цель данного учебного пособия – привить студентам практические навыки обработки экспериментальных случайных данных с использованием теоретических методов классической математической статистики и современных программных пакетов со встроенными статистическими функциями, а также предоставить студентам методическую поддержку при самостоятельной работе.

Учебное пособие содержит полное методическое обеспечение всех видов учебных занятий по разделу «Математическая статистика» и в его состав входят: краткие теоретические сведения, методические указания по проведению практических занятий, варианты индивидуального задания для расчетно-графической работы или для курсового проекта (в зависимости от действующего учебного плана) и методические указания по его выполнению, примеры выполнения задания с использованием универсальных пакетов MCAD и MATLAB.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Выборка. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Выборочные числовые характеристики

В математической статистике имеют дело со стохастическими экспериментами, состоящими в проведении повторных независимых наблюдений над некоторой случайной величиной X, имеющей неизвестное распределение вероятностей, т.е. неизвестную функцию распределения $F_X(x) = F(x)$. В этом случае множество всех возможных значений наблюдаемой случайной величины X называют ***генеральной совокупностью***, имеющей функцию распределения $F(x)$. Числа $(x_1,...,x_n)$, являющиеся результатом n повторных независимых наблюдений над случайной величиной X, называют ***выборкой*** из генеральной совокупности или ***выборочными*** (статистическими) данными. Число наблюдений n называется ***объемом*** выборки.

Основная задача математической статистики состоит в том, как по выборке $(x_1,...,x_n)$, извлекая из нее максимум информации, сделать обоснованные выводы относительно вероятностных характеристик наблюдаемой случайной величины X.

Замечание: Выборка $(x_1,...,x_n)$ является исходной информацией для статистического анализа и принятия решений о неизвестных вероятностных характеристиках наблюдаемой случайной величины X. Однако на основе конкретной выборки обосновать качество статистических выводов принципиально невозможно. Для этого на выборку следует смотреть априорно как на ***случайный вектор*** $(X_1,...,X_n)$, координаты которого являются независимыми, распределенными так же как и X, случайными величинами, и который еще не принял конкретного значения в результате эксперимента. Переход от выборки конкретной $(x_1,...,x_n)$ к выборке случайной $(X_1,...,X_n)$ будет неоднократно использоваться далее при решении теоретических вопросов и задач для получения выводов, справедливых для любой выборки из генеральной совокупности.

В зависимости от дальнейших целей существует несколько способов представления статистических данных. Простейший из них - в виде статистического ряда:

Номер наблюдения i	1	2	$\dots$	n
Результат наблюдения x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n

Если среди выборочных значений имеются совпадающие, то статистический ряд удобнее записывать в виде таблицы, называемой ***таблицей частот***:

Выборочные значения y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_r
Частоты m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_r
Относительные частоты $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$	$p_1^* = \dfrac{m_1}{n}$	$p_2^* = \dfrac{m_2}{n}$	$\dots$	$p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$

где $(y_1,...,y_r)$, $r \le n$ - различные значения среди $(x_1,...,x_n)$; m_i - частота значения y_i; $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ - относительная частота значения y_i. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i = n$, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i^* = 1$. Поэтому совокупность пар $\left(y_i, p_i^*\right)$, $i = \overline{1,r}$ называют ***эмпирическим законом распределения***.

Выборочные значения $(x_1,...,x_n)$, упорядоченные по возрастанию, носят название ***вариационного ряда***:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)},$$

где $x_{(1)} = \min(x_1,...,x_n)$, $x_{(n)} = \max(x_1,...,x_n)$.

Величина $R = x_{(n)} - x_{(1)}$ называется ***размахом выборки***.

Эмпирической функцией распределения, соответствующей выборке $(x_1,...,x_n)$, называется функция

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i < x) = \frac{1}{n}\nu_n(x),$$

где $I(A)$ - индикатор множества A, а $\nu_n(x)$ - число выборочных значений, не превосходящих x.

Для заданной выборки $(x_1,...,x_n)$ эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ обладает всеми свойствами обычной функции распределения: принимает значения между 0 и 1, является неубывающей и непрерывной слева. График $F_n^*(x)$ имеет ступенчатый вид, причем:

если все значения $x_1,...,x_n$ различны, то

$$F_n^*(x) = \frac{k}{n} \text{ при } x \in \left[x_{(k)}, x_{(k+1)}\right), \; x_{(0)} = -\infty, \; x_{(n+1)} = \infty;$$

если $(y_1,..., y_r)$ - различные значения среди $(x_1,...,x_n)$, то

$$F_n^*(x) = \sum_{i:\, y_i < x} \frac{m_i}{n}.$$

Принципиальное отличие эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ от обычной функции распределения состоит в том, что она может изменяться от выборки к выборке и притом случайным образом. Важнейшим свойством эмпирической функции распределения $F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < x)$ как случайной функции (см. замечание выше) является то, что она для любого $x \in (-\infty, \infty)$ при увеличении объема выборки n сближается (в смысле сходимости по вероятности) с истинной функцией распределения $F(x)$. Поэтому говорят, что эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ является статистическим аналогом (оценкой) неизвестной функции распределения $F(x)$, которую называют при этом теоретической.

Если $(x_1,...,x_n)$ - выборка объема n из генеральной совокупности, имеющей непрерывное распределение с неизвестной плотностью вероятностей $f_X(x) = f(x)$, то для получения статистического аналога $f(x)$ следует предварительно произвести группировку данных. Она состоит в следующем:

1. По данной выборке $(x_1,...,x_n)$ строят вариационный ряд

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}.$$

2. Промежуток $\left[x_{(1)}, x_{(n)}\right]$ разбивают точками $x_{(1)} = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = x_{(n)}$ на N непересекающихся интервалов $J_k = \left[u_{k-1}, u_k\right)$ (на практике $N << n$).
3. Подсчитывают частоты ν_k попадания выборочных значений в k-ый интервал J_k.
4. Полученную информацию заносят в следующую таблицу, которую называют ***интервальным статистическим рядом***:

Интервалы J_k	$[u_0, u_1)$	$[u_1, u_2)$	$\cdots$	$[u_{N-1}, u_N]$
Частоты ν_k	ν_1	ν_2	$\cdots$	ν_N
Относительные частоты $\tilde{p}_k^* = \dfrac{\nu_k}{n}$	$\tilde{p}_1^* = \dfrac{\nu_1}{n}$	$\tilde{p}_2^* = \dfrac{\nu_2}{n}$	$\cdots$	$\tilde{p}_N^* = \dfrac{\nu_N}{n}$

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \nu_i = n$, $\sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{p}_k^* = 1$. Поэтому совокупность пар $(\tilde{u}_k, \tilde{p}_k^*)$, где $\tilde{u}_k = \dfrac{1}{2}(u_k + u_{k-1})$ - середина интервала J_k, $k = \overline{1,N}$ называют ***эмпирическим законом распределения, полученным по сгруппированным данным.***

Далее в прямоугольной системе координат на каждом интервале J_k как на основании длиной $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ строят прямоугольник с высотой $h_k = \dfrac{\nu_k}{n \cdot \Delta u_k}$, $k = \overline{1,N}$. Получаемую при этом ступенчатую фигуру называют ***гистограммой***.

Поскольку при больших n в соответствии с теоремой Бернулли $\dfrac{\nu_k}{n} \approx p_k$, где $p_k = P(u_{k-1} \le X < u_k)$ - истинная вероятность попадания случайной величины X в интервал J_k, а $p_k = \int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} f(x)dx \approx f(\tilde{u}_k)\Delta u_k$, то справедливо приближенное равенство $h_k \approx f(\tilde{u}_k)$. Поэтому верхняя граница гистограммы является статистическим аналогом (оценкой) неизвестной плотности вероятностей $f(x)$.

На практике при группировке данных обычно берут интервалы одинаковой длины $\Delta u = \text{const}$, а число интервалов группировки определяют с помощью, так называемого, правила Стургерса, согласно которому полагается $N = \left[1 + 3{,}32 \lg n\right] + 1$.

Ломаная с вершинами в точках $(\tilde{u}_k, h_k)$ называется ***полигоном частот*** и для гладких плотностей является более точной оценкой, чем гистограмма. Пример гистограммы и полигона частот приведен на рисунке 1.

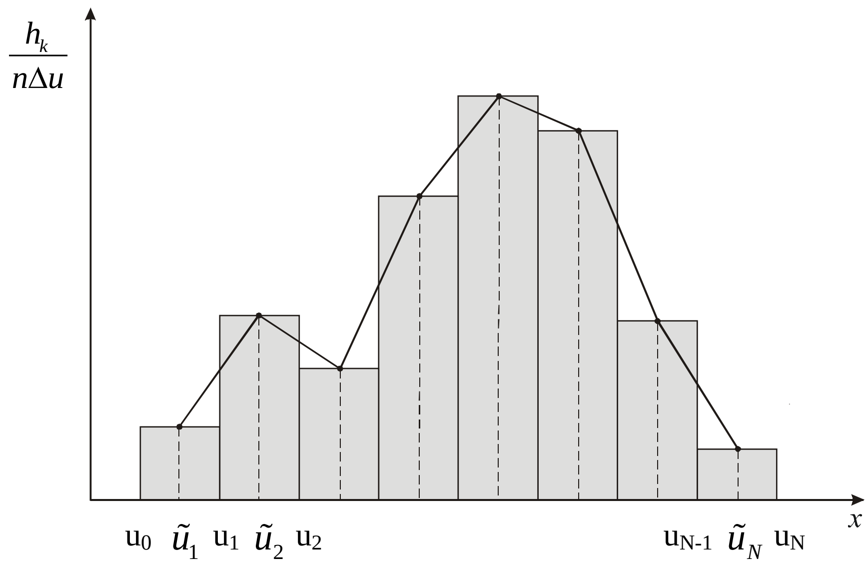


Рис. 1 - Гистограмма и полигон частот

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей функцию распределения $F(x)$. Аналогично тому, как теоретической функции распределения $F(x)$ ставят в соответствие эмпирическую функцию распределения $F_n^*(x)$, любой теоретической характеристике $g = Mg(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$ можно поставить в соответствие ее статистический аналог - ***выборочную (эмпирическую) числовую характеристику g*,*** определяемую как среднее арифметическое значений функции $g(x)$ для элементов выборки $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$g^* = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$

В частности, выборочный ***начальный момент*** k-го порядка есть величина

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k .$$

При $k = 1$ величину α_1^* называют ***выборочным средним*** и обозначают $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Выборочный ***центральный момент*** k-го порядка есть величина

$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k .$$

При $k = 2$ величину μ_2^* называют ***выборочной дисперсией*** и обозначают s^2:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 .$$

Между выборочными начальными и выборочными центральными моментами сохраняются те же соотношения, что и между теоретическими. Например, справедливо равенство

$$s^2 = \alpha_2^* - (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 ,$$

являющееся аналогом известного равенства

$$\mu_2 = DX = \alpha_2 - \alpha_1^2 = MX^2 - (MX)^2 .$$

Являясь для заданной выборки числами, в общем случае выборочные числовые характеристики являются случайными величинами и обозначаются соответствующими заглавными буквами:

$$G^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i);\ A_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k ;\ M_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k ;$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ;\ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 .$$

В связи с этим можно ставить вопрос о нахождении закона распределения выборочных числовых характеристик и их числовых характеристиках.

Располагая только ***сгруппированными*** данными, можно определить аналог эмпирической функции распределения следующим образом:

$$\tilde{F}_n^*(x) = \sum_{k:\, \tilde{u}_k < x} \frac{\nu_k}{n}.$$

Для вычисления выборочных моментов k-го порядка по сгруппированным данным используются формулы:

$$\tilde{\alpha}_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i^k \nu_i \,, \qquad \tilde{\mu}_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{u}_i - \tilde{\alpha}_1^*\right)^k \nu_i \,.$$

В частности, выборочное среднее и выборочная дисперсия по сгруппированным данным определяются с помощью формул:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \nu_i \,, \qquad \tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{u}_i - \tilde{x}\right)^2 \nu_i \,.$$

1.2. Оценивание неизвестных параметров распределений

Пусть имеется выборка $(x_1,...,x_n)$, представляющая собой результат n независимых наблюдений над некоторой случайной величиной X, и предположим, что тип распределения генеральной совокупности известен, но зависит от неизвестного параметра: $F_X(x) = F(x;\theta), \;\; \theta \in \Theta$. В общем случае задача оценивания формулируется так: используя информацию, доставляемую выборкой, сделать статистические выводы об истинном значении неизвестного параметра θ, т.е. оценить параметр θ.

Различают точечные и интервальные оценки неизвестных параметров.

1.2.1. Точечные оценки. Методы нахождения точечных оценок

При точечном оценивании ищут ***статистику*** $\theta^* = \theta^*(x_1,...,x_n)$, (т.е. функцию, зависящую только от выборки $(x_1,...,x_n)$), значение которой при заданной выборке принимают за приближенное значение параметра θ. В этом случае статистику $\theta^* = \theta^*(x_1,...,x_n)$ называют ***оценкой*** параметра θ.

Обосновать качество оценки θ^* можно лишь исходя из ее свойств, не зависящих от конкретной выборки. Для изучения таких свойств (естественно, вероятностного характера) в соответствии с замечанием из п. 1.1. под оценкой следует понимать ***случайную величину*** $\theta^* = \theta^*(X_1,...,X_n)$. Выбор из множества оценок одного и того же параметра наилучшей основан на критерии сравнения качества оценок, предложенном Р.А.Фишером. Согласно этому критерию оценка $\theta^* = \theta^*(X_1,...,X_n)$ должна быть:

1) ***состоятельной***, т. е. с возрастанием объема выборки n должна сходиться по вероятности к истинному неизвестному значению параметра θ: $\quad \theta^* = \theta^*(X_1,...,X_n) \xrightarrow{P} \theta$;

2) ***несмещенной***, т. е. математическое ожидание θ^* должно быть равно оцениваемому параметру θ: $M\theta^* = \theta$;
3) ***эффективной***, т. е. должна обладать минимальной дисперсией в рассматриваемом классе оценок.

Величина $b(\theta^*) = M\theta^* - \theta$ называется ***смещением*** оценки θ^*. Таким образом, оценка θ^* является несмещенной тогда и только тогда, когда ее смещение $b(\theta^*) = 0$. Оценка θ^*, у которой $b(\theta^*) \to 0$ при $n \to \infty$, называется ***асимптотически несмещенной***.

Достаточным условием состоятельности несмещенной оценки в силу неравенства Чебышева является стремление к нулю ее дисперсии:

$$D\theta^* \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Эффективность оценки θ^* позволяет исследовать следующее неравенство Рао-Крамера: для широкого класса непрерывных распределений и для любой несмещенной оценки θ^*, имеющей конечную дисперсию, справедливо неравенство:

$$D\theta^* \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)} = \frac{1}{n \cdot M\left(\dfrac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2},$$

где $f(x;\theta)$ - плотность вероятностей наблюдаемой случайной величины X, $I(\theta) = M\left(\dfrac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$ - информация Фишера о параметре θ, содержащаяся в одном наблюдении над случайной величиной X.

Таким образом, оценка θ^* является эффективной, если она обращает неравенство Рао-Крамера в равенство, т.е. $D\theta^* = \dfrac{1}{n \cdot I(\theta)}$.

Наиболее распространенными методами получения точечных оценок неизвестных параметров распределений, удовлетворяющих требованиям 1 - 3 (хотя бы частично), являются метод моментов и метод максимального правдоподобия.

Метод моментов. Пусть $(x_1,...,x_n)$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей функцию распределения $F_X(x) = F(x;\theta)$, зависящую от векторного параметра $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$. Предположим, что у наблюдаемой случайной величины X существуют первые r моментов $\alpha_k = MX^k$, $k = \overline{1,r}$, которые являются функциями от θ: $\alpha_k = \alpha_k(\theta_1,...,\theta_r)$. Метод моментов состоит в нахождении решения $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1,...,\tilde{\theta}_r)$ системы уравнений, получаемой приравниванием теоретических моментов соответствующим выборочным моментам:

$$\alpha_k(\theta_1,...,\theta_r) = \alpha_k^*, \ \ k = \overline{1,r}.$$

Для нахождения оценки $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1,...,\tilde{\theta}_r)$ может быть использована также система уравнений, основанных на приравнивании центральных теоретических и выборочных моментов:

$$\mu_k(\theta_1,...,\theta_r) = \mu_k^*, \ k = \overline{1,r}.$$

Использование именно первых r моментов является необязательным.

В случае двумерного неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ его оценка по методу моментов $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ обычно определяется как решение системы уравнений: $\begin{cases} MX = \overline{x}, \\ DX = s^2. \end{cases}$

Оценки, получаемые по методу моментов являются:

- состоятельными (при весьма общих предположениях);
- несмещенными не всегда;
- вообще говоря, неэффективными.

На практике оценки, получаемые по методу моментов, часто используются как первое приближение, на основе которого находятся более «хорошие» оценки.

Достоинство метода моментов заключается в том, что системы уравнений для нахождения оценок решаются довольно просто. Однако имеет место произвол в выборе уравнений для нахождения оценок и метод вообще неприменим, когда моментов необходимого порядка не существует (пример, - закон распределения Коши).

Метод максимального правдоподобия. Пусть $(x_1,...,x_n)$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей функцию распределения $F_X(x) = F(x;\theta)$, зависящую от неизвестного скалярного параметра θ.

Если закон распределения наблюдаемой случайной величины X является непрерывным, т.е. существует плотность вероятностей $f(x;\theta)$, то функция

$$L(x_1,...,x_n;\theta\ ) = f(x_1;\theta)\cdot...\cdot f(x_n;\theta),$$

рассматриваемая при фиксированной выборке $x_1,...,x_n$ как функция параметра θ, называется ***функцией правдоподобия***.

Если наблюдаемая случайная величина X имеет дискретный закон распределения, задаваемый вероятностями $P(X = x) = p(x;\theta)$, то функция правдоподобия определяется равенством:

$$L(x_1,...,x_n;\theta\ ) = p(x_1;\theta)\cdot...\cdot p(x_n;\theta).$$

Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ называется такое значение параметра, при котором функция правдоподобия при заданной выборке $(x_1,...,x_n)$ достигает максимума:

$$L(x_1,...,x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x_1,..,x_n;\theta).$$

Если функция правдоподобия дифференцируема по θ, то оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ можно найти, решив относительно θ ***уравнение правдоподобия***

$$\frac{\partial L(x_1,...,x_n;\theta\ )}{\partial\theta} = 0$$

или равносильное уравнение

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n;\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

Если $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$ - векторный параметр, то для отыскания оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_r)$ следует решить ***систему уравнений правдоподобия***

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n;\theta_1,...,\theta_r)}{\partial\theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,r}.$$

Все изложенные результаты остаются в силе и при оценивании не самого параметра θ, а некоторой параметрической функции $\tau(\theta)$.

Оценки максимального правдоподобия являются:

- состоятельными;
- асимптотически эффективными;
- несмещенными не всегда;
- асимптотически нормальными, т.е. при соответствующей нормировке закон распределения оценки максимального правдоподобия является нормальным

(что очень важно для нахождения вероятностей отклонения их от истинных значений параметров).

Однако уравнения (системы уравнений) для нахождения оценок максимального правдоподобия могут решаться довольно сложно.

1.2.2. Интервальные оценки

На практике ограничиться нахождением «хороших» точечных оценок бывает обычно недостаточно. Приближенное равенство $\theta^* \approx \theta$ лишь указывает на то, что вместо неизвестного параметра θ можно использовать известное значение оценки θ^*. Однако важно знать (хотя бы в вероятностном смысле) величину совершаемой при этом ошибки. Для этого прибегают к построению интервальных оценок неизвестных параметров.

Пусть наблюдаемая величина X имеет функцию распределения $F(x;\theta)$, зависящую от неизвестного параметра θ. При интервальном оценивании параметра θ ищут две такие статистики $T_1 = T_1(X_1,...,X_n)$ и $T_2 = T_2(X_1,...,X_n)$ (T_1 и T_2 - случайные величины!), для которых при заданном $\gamma \in (0,1)$ выполняется соотношение

$$P(T_1 < \theta < T_2) = \gamma .$$

В этом случае интервал $\Delta_\gamma(\theta) = (T_1, T_2)$ называют ***γ-доверительньм интервалом*** для параметра θ, число γ - ***доверительной вероятностью*** (надежностью, коэффициентом доверия), T_1 и T_2 - нижней и верхней ***доверительными границами*** соответственно.

Таким образом, γ-доверительный интервал — это *случайный* интервал, зависящий от выборки (но не от θ), который содержит (накрывает) истинное значение неизвестного параметра θ с вероятностью γ. На практике обычно используют значения доверительной вероятности γ из небольшого набора близких к 1 значений (0,9; 0,95; 0,98; 0,99 и т. д.) и строят соответствующие им доверительные интервалы.

Построение доверительных интервалов для отдельных параметров распределения генеральной совокупности зависит как от вида закона распределения, так и от того, являются известными значения остальных параметров распределения или нет.

- Если наблюдаемая случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(\theta,\sigma^2)$ с неизвестным математическим ожиданием θ

и ***известной*** дисперсией σ^2, то ***доверительный интервал для математического ожидания*** θ имеет вид:

$$\Delta_\gamma(\theta) = \left(\bar{X} - c_{(1+\gamma)/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \bar{X} + c_{(1+\gamma)/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

где $\bar{X}$ - выборочное среднее; n - объем выборки; число $c_{(1+\gamma)/2}$ - такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \cdot du,$ при котором $\Phi(c_{(1+\gamma)/2}) = (1+\gamma)/2$. Находят число $c_{(1+\gamma)/2}$ по заданной доверительной вероятности γ из табл. П2.

Квантилью, соответствующей вероятности p, называется такое значение x_p, при котором выполняется соотношение

$$F(x_p) = P\left(X < x_p \right) = \int\limits_{-\infty}^{x_p} f(x)dx = p,$$

где $f\left(x \right)$ – плотность вероятностей соответствующего закона распределения (слово квантиль – женского рода). Геометрическое пояснение смысла квантили, отвечающей вероятности p, приведено на рис. 2.

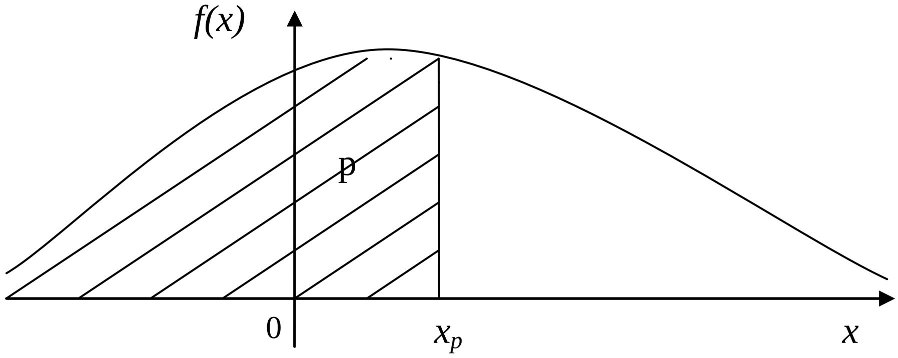


Рис. 2 - Геометрическое пояснение смысла квантили x_p, отвечающей вероятности p

В этой терминологии число $c_{(1+\gamma)/2}$ есть $(1+\gamma)/2$ - квантиль стандартного нормального $N(0,1)$ закона распределения.

- Если наблюдаемая случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(\theta_1, \theta_2^2)$ с неизвестным математическим ожиданием θ_1 и ***неизвестной*** дисперсией θ_2^2, то ***доверительный интервал для математического ожидания*** θ_1 имеет вид:

$$\Delta_\gamma(\theta_1) = \left(\bar{X} - t_{(1+\gamma)/2;n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \;;\; \bar{X} + t_{(1+\gamma)/2;n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right),$$

где S^2 - выборочная дисперсия; $S = \sqrt{S^2}$; n - объем выборки; число $t_{(1+\gamma)/2;n-1}$ – $(1+\gamma)/2$ - квантиль распределения Стьюдента $S(n-1)$ с $(n—1)$ степенью свободы. Находят квантиль $t_{(1+\gamma)/2;n-1}$ по заданным γ и n из табл. П3.

При больших n (практически при $n \geq 30$) распределение Стьюдента приближается (в смысле слабой сходимости) к стандартному нормальному закону распределения, поэтому в этом случае $t_{(1+\gamma)/2;n-1} \approx c_{(1+\gamma)/2}$.

- ***Доверительный интервал для дисперсии*** θ^2 наблюдаемой случайной величины X, распределенной по нормальному закону $N(a,\theta^2)$, при ***известном*** математическом ожидании $MX = a$ имеет вид:

$$\Delta_\gamma(\theta^2) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}{\chi^2_{(1+\gamma)/2;n}} \;;\; \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}{\chi^2_{(1-\gamma)/2;n}} \right),$$

где числа $\chi^2_{(1-\gamma)/2;n}$ и $\chi^2_{(1+\gamma)/2;n}$ есть $(1-\gamma)/2$- и $(1+\gamma)/2$-квантили распределения хи - квадрат $\chi^2(n)$ с n степенями свободы соответственно. Квантили распределения хи - квадрат находят по заданным γ и n из табл.П4.

- ***Доверительный интервал для дисперсии*** θ_2^2 наблюдаемой случайной величины X, распределенной по нормальному закону $N(\theta_1,\theta_2^2)$, при ***неизвестном*** математическом ожидании $MX = \theta_1$ имеет вид:

$$\Delta_\gamma(\theta_2^2) = \left(\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{(1+\gamma)/2;n-1}} ; \frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{(1-\gamma)/2;n-1}} \right),$$

где S^2 - выборочная дисперсия, а $\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n)$; $\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n)$ – соответствующие квантили распределения $\chi^2(n-1)$.

При больших n (практически при $n \geq 30$) с использованием центральной предельной теоремы можно показать, что ***приближенным***

(асимптотическим) доверительным интервалом для дисперсии θ_2^2 нормально распределенной $N(\theta_1, \theta_2^2)$ случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием $MX = \theta_1$ является интервал

$$\Delta_\gamma(\theta_2^2) = \left(\frac{n \cdot S^2}{n - 1 + c_{(1+\gamma)/2}\sqrt{2(n-1)}} \;;\; \frac{n \cdot S^2}{n - 1 - c_{(1+\gamma)/2}\sqrt{2(n-1)}} \right).$$

Фактически это означает, что для квантилей распределения хи - квадрат $\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)$ и $\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)$ при $n \geq 30$ имеют место приближенные формулы:

$$\chi^2_{(1-\gamma)/2;n-1} \approx n - 1 - c_{(1+\gamma)/2} \cdot \sqrt{2(n-1)}\;;$$

$$\chi^2_{(1+\gamma)/2;n-1} \approx n - 1 + c_{(1+\gamma)/2} \cdot \sqrt{2(n-1)}\,.$$

Если распределение наблюдаемой случайной величины X произвольное (не обязательно нормальное), то, используя асимптотическую нормальность выборочных моментов, можно показать, что при больших объемах выборки ***приближенными (асимптотическими) доверительными интервалами для математического ожидания*** $MX = a$ ***и дисперсии*** $DX = \sigma^2$ являются:

$$\Delta_\gamma(a) = \left(\bar{X} - c_{(1+\gamma)/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{X} + c_{(1+\gamma)/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right),$$

$$\Delta_\gamma(\sigma^2) = \left(S^2 - c_{(1+\gamma)/2} \frac{\sqrt{M_4^* - S^4}}{\sqrt{n}} \;;\; S^2 + c_{(1+\gamma)/2} \frac{\sqrt{M_4^* - S^4}}{\sqrt{n}} \right),$$

где $\bar{X}$ - выборочное среднее; S^2 - выборочная дисперсия; $S = \sqrt{S^2}$; $M_4^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4$ - выборочный центральный момент четвертого порядка.

Замечание: Все приведенные доверительные интервалы, рассчитанные для заданной выборки $(x_1, \ldots, x_n)$, являются обычными числовыми интервалами, внутри которых неизвестный параметр находится в $\gamma \cdot 100\%$ случаев.

1.3. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называют любое утверждение о виде или свойствах наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Правило, позволяющее по имеющимся статистическим данным (выборке) принять или отклонить выдвинутую гипотезу, называется ***статистическим критерием***. Если формулируется только одна гипотеза H_0 и требуется проверить, согласуются ли статистические данные с этой гипотезой или же они ее опровергают, то критерии, используемые для этого, называются ***критериями согласия***. Если гипотеза H_0 однозначно фиксирует закон распределения наблюдаемой случайной величины, то она называется простой, в противном случае — сложной. Пусть относительно наблюдаемой случайной величины X сформулирована некоторая гипотеза H_0; $(x_1,...,x_n)$ - выборка объема n, являющаяся реализацией случайного вектора $(X_1,...,X_n)$, координаты которого X_i, $i=\overline{1,n}$ независимы и распределены так же, как X.

Общий метод построения критерия согласия для проверки гипотезы H_0 состоит в следующем. Вначале ищут статистику $T=T(X_1,...,X_n)$ (случайную величину!), характеризующую отклонение эмпирического распределения от теоретического, закон распределения которой в случае справедливости H_0 можно определить (точно или приближенно). Далее задают некоторое положительное малое число α, так что событие с вероятностью α можно считать практически невозможным в данном эксперименте. Затем для заданного α определяют в множестве $K=\{t:t=T(x_1,...,x_n)\}$ возможных значений статистики T подмножество K_α, так чтобы $P\{T(X_1,...,X_n)\in K_\alpha / H_0\}\le\alpha$.

Критерий согласия имеет следующий вид:

если $t=T(x_1,...,x_n)$ значение статистики $T(X_1,...,X_n)$, соответствующее данной выборке $(x_1,...,x_n)$ и $t\in K_\alpha$, то гипотеза H_0 отвергается;

если $t\notin K_\alpha$, то гипотеза H_0 принимается.

Статистика $T=T(X_1,...,X_n)$ называется ***статистикой критерия***; множество K_α - ***критической областью*** для гипотезы H_0, число α - ***уровнем значимости*** критерия.

1.3.1. Проверка гипотезы о виде распределения

Пусть $(x_1,...,x_n)$ - выборка объема n, представляющая собой результат n независимых наблюдений над случайной величиной X, относительно распределения которой выдвинута простая гипотеза $H_0: F_X(x)=F(x)$

($F(x)$ - теоретическая функция распределения, соответствующая гипотезе H_0). Наиболее распространенным критерием проверки этой гипотезы H_0 является критерии χ^2 Пирсона.

Чтобы воспользоваться критерием χ^2 Пирсона, выборочные данные $(x_1,...,x_n)$ следует предварительно сгруппировать, представив их в виде интервального статистического ряда. Пусть $J_k = [u_{k-1}, u_k), k = \overline{1,N}$ - интервалы группировки; $\nu_1,...,\nu_N$ - частоты попадания выборочных значений в интервалы $J_1,...,J_N$ соответственно ($\nu_1 + ... + \nu_N = n$).

Обозначим p_k теоретическую (соответствующую H_0) вероятность попадания случайной величины X в интервал J_k:

$$p_k = \mathrm{P}(u_{k-1} \le X < u_k) = F(u_k) - F(u_{k-1}),\ k = \overline{1,N}.$$

Статистикой критерия χ^2 является величина:

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{(\nu_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k},$$

которая характеризует отклонение эмпирической функции распределения $\tilde{F}_n^*(x)$ от теоретической функции распределения $F(x)$ (значение $\frac{\nu_k}{n}$ является приращением эмпирической функции $\tilde{F}_n^*(x)$ на интервале J_k, а p_k - приращением теоретической функции $F(x)$ на том же интервале). Поскольку относительные частоты $\frac{\nu_k}{n}$ сближаются с вероятностями p_k при $n \to \infty,\ k = \overline{1,N}$, то в случае справедливости гипотезы H_0 значение величины χ_n^2 не должно существенно отличаться от нуля. Поэтому критическая область критерия χ^2 задается в виде $K_\alpha = \{t \ge t_\alpha\}$, где $t = \chi_n^2(x_1,...,x_n)$ – значение величины χ_n^2, полученное для заданной выборки, а порог t_α определяется по заданному уровню значимости α так, чтобы $P\left\{\chi_n^2 \in K_\alpha / H_0\right\} = \alpha$. Нахождение t_α основано на том факте (известном как теорема Пирсона), что случайная величина χ_n^2 имеет при

$n \to \infty$ предельное распределение хи - квадрат $\chi^2(N-1)$ с $N-1$ степенью свободы.

На практике предельное распределение $\chi^2(N-1)$ можно использовать с хорошим приближением при $n \geq 50$ и $\nu_k \geq 5,\ k = \overline{1,N}$. При выполнении этих условий для заданного уровня значимости α можно положить $t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha;N-1}$, где $\chi^2_{1-\alpha;N-1}$ является (1—α)-квантилью распределения $\chi^2(N-1)$.

Таким образом, критерий согласия χ^2 Пирсона состоит в следующем:

1. По заданному уровню значимости α находится по табл. П4 порог $\chi^2_{1-\alpha;N-1}$.
2. По заданной выборке $(x_1,...,x_n)$ объема $n \geq 50$ определяется число N интервалов группировки так, чтобы $\nu_k \geq 5,\ k = \overline{1,N}$. Вычисляется значение статистики $\chi^2_n(x_1,...,x_n) = t$.
3. Если $t \geq \chi^2_{1-\alpha;N-1}$, то гипотезу H_0 отвергают.
4. Если $t < \chi^2_{1-\alpha;N-1}$, то гипотезу H_0 принимают.

Если случайная величина X дискретная, $x_k,\ k = \overline{1,N}$ - различные выборочные значения, а $\mathrm{P}(X = x_k) = p_k$ в случае справедливости H_0, то всегда можно определить N интервалов, содержащих ровно по одному выборочному значению. Поэтому в данном случае можно сразу считать, что $\nu_k = m_k,\ k = \overline{1,N}$, где m_k – частота выборочного значения x_k.

На практике теоретическое распределение полностью бывает определено редко. Чаще известен предположительно только тип распределения, но неизвестны параметры его определяющие. В этом случае гипотеза о виде распределения, подлежащая проверке, имеет вид $H_0:\ F_X(x) = F(x;\theta),\ \theta = (\theta_1,...,\theta_r) \in \Theta$ и является сложной параметрической гипотезой.

Критерий согласия χ^2 Пирсона применим для проверки такой гипотезы H_0 со следующими изменениями:

а) вероятности $p_k = \mathrm{P}(X \in J_k)$, $k = \overline{1, N}$ вычисляют, заменяя неизвестные параметры $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$ их оценками максимального правдоподобия $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_r)$: $\quad p_k = F(u_k; \hat{\theta}) - F(u_{k-1}; \hat{\theta})$, $k = \overline{1, N}$;

б) число степеней свободы предельного распределения хи - квадрат должно быть уменьшено на число неизвестных параметров и считаться равным $(N - 1 - r)$.

1.4. Изучение зависимости между случайными величинами.

Предположим, что случайный эксперимент состоит в проведении повторных независимых наблюдений над случайным вектором (X, Y), имеющим неизвестное распределение вероятностей, т.е. неизвестную двумерную функцию распределения $F_{XY}(x, y) = F(x, y)$. В этом случае выборка объема n представляет собой множество пар чисел $((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n))$ и она является исходной информацией для получения статистических выводов о вероятностных характеристиках случайного вектора.

При рассмотрении одновременно двух случайных величин X и Y наряду с одномерными статистическими задачами дополнительно возникают статистические задачи, связанные с изучением зависимости между случайными величинами. К ним, в частности, относятся: определение корреляционной зависимости между случайными величинами X и Y; проверка гипотезы о независимости случайных величин; построение регрессионной зависимости между случайными величинами X и Y.

1.4.1. Оценка коэффициента корреляции.

Точечными оценками математических ожиданий и дисперсий координат вектора X и Y в соответствии с разделом 1.1 являются выборочные средние и выборочные дисперсии:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2.$$

Аналогичным усреднением находится и оценка корреляционного момента $R_{XY} = M(X - MX)(Y - MY) = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$, называемая ***выборочным корреляционным моментом***:

$$\hat{R}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

С учетом этого оценка коэффициента корреляции $r_{XY} = \dfrac{R_{XY}}{\sqrt{DX \cdot DY}}$, называемая ***выборочным коэффициентом корреляции***, определяется по формуле:

$$\hat{r}_{XY} = \frac{\hat{R}_{XY}}{\sqrt{s_X^2 \cdot s_Y^2}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2 - n \cdot \overline{y}^2\right)}}.$$

1.4.2. Проверка гипотезы о независимости

В общем случае для проверки гипотезы о независимости случайных величин X и Y можно воспользоваться критерием независимости χ^2 проверки гипотезы H_0, заключающейся в том, что функция распределения случайного вектора (X, Y)

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ - одномерные функции распределения координат вектора.

Статистика критерия независимости χ^2 имеет вид (см. [3, разд. 3.5]):

$$\chi_n^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L}\frac{\left(\nu_{ij} - (\nu_i^X \nu_j^Y)/n\right)^2}{\nu_i^X \nu_j^Y} = n \cdot \left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L}\frac{\nu_{ij}^2}{\nu_i^X \nu_j^Y} - 1\right),$$

где K и L – число интервалов группировки выборочных значений случайных величин X и Y соответственно; ν_i^X и ν_j^Y - частоты интервалов группировки выборочных значений случайных величин X и Y соответственно; ν_{ij} - частота прямоугольника, сторонами которого являются i-й интервал группировки выборочных значений случайной величины X и j-й интервал группировки выборочных значений случайной величины Y.

Гипотезу H_0 отвергают тогда, когда вычисленное по заданной выборке $((x_1, y_1),...,(x_n, y_n))$ значение статистики χ_n^2 удовлетворяет неравенству $\chi_n^2 \geq \chi^2_{1-\alpha;(K-1)(L-1)}$, где $\chi^2_{1-\alpha;(K-1)(L-1)}$ является $(1-\alpha)$-квантилью распределения $\chi^2((K-1)(L-1))$ с $(K-1)(L-1)$ степенями свободы. В противном случае гипотезу H_0 принимают.

В случае ***нормального*** распределения случайного вектора (X,Y) равенство коэффициента корреляции нулю означает одновременно и независимость координат вектора. Поэтому гипотеза о независимости случайных величин X и Y в этом случае может быть сформулирована как гипотеза $H_0 : r_{XY} = 0$.

Статистикой критерия для проверки данной гипотезы H_0 является величина: $T = \dfrac{\hat{r}_{XY} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2_{XY}}}$, где $\hat{r}_{XY}$ - выборочный коэффициент корреляции.

В случае справедливости H_0 значение величины T не должно существенно отличаться по модулю от нуля. Поэтому критическая область критерия для проверки H_0 является двусторонней (в отличие от критерия χ^2) и задается в виде $K_\alpha = \left\{ |t| \geq t_\alpha \right\}$, где $t = T((x_1, y_1),...,(x_n, y_n))$ - значение величины T, полученное для заданной выборки, а порог t_α определяется по заданному уровню значимости α так, чтобы $P\left\{T \in K_\alpha / H_0\right\} = \alpha$.

Поскольку (см. [3, разд. 3.5] и [4, разд. 4.8.1]) при больших n (практически при $n \geq 30$) в случае справедливости гипотезы H_0 случайная величина T имеет распределение Стьюдента $S(n-2)$ с $(n-2)$ степенями свободы, то для заданного уровня значимости α можно положить $t_\alpha = t_{1-\alpha/2;n-2}$, где $t_{1-\alpha/2;n-2}$ является 1—α/2 - квантилью распределения $S(n-2)$.

Таким образом, критерий для проверки гипотезы H_0 о равенстве нулю коэффициента корреляции состоит в следующем:

1. По заданному уровню значимости α находится по табл. П3 порог $t_{1-\alpha/2;n-2}$.

2. По заданной выборке $((x_1, y_1),...,(x_n, y_n))$ вычисляется значение статистики $T((x_1, y_1),...,(x_n, y_n)) = t$.

3. Если $|t| \ge t_{1-\alpha/2;n-2}$, то гипотезу H_0 отвергают и делают вывод о том, что случайные величины X и Y являются зависимыми.

4. Если $|t| < t_{1-\alpha/2;n-2}$, то гипотезу H_0 принимают и считают, что случайные величины X и Y являются независимыми.

Замечание. В общем случае (отличном от нормального) гипотеза $H_0 : r_{XY} = 0$ является гипотезой о некоррелированности случайных величин X и Y и известна также как гипотеза о значимости коэффициента корреляции.

1.4.3. Эмпирические уравнения регрессии

Функцией регрессии $\psi(x)$ случайной величины Y на случайную величину X называется условное математическое ожидание $\mathrm{M}(Y / X = x)$. Эта функция наилучшим (в среднеквадратическом смысле) образом описывает зависимость случайной величины Y от случайной величины X.

Известно, что если случайный вектор (X, Y) имеет двумерный нормальный закон распределения $N(a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$, то функция регрессии случайной величины Y на случайную величину X является линейной и имеет вид (случай нормальной регрессии):

$$y = a_Y + r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - a_X).$$

Заменяя в этом уравнении $a_X, a_Y, \sigma_X, \sigma_Y, r_{XY}$ на их точечные оценки $\overline{x}, \overline{y}, s_X, s_Y, \hat{r}_{XY}$ соответственно, получаем эмпирическое уравнение регрессии случайной величины Y на случайную величину X вида (подробнее см. [4, разд. 4.8.2]):

$$y - \overline{y} = \hat{r}_{XY} \frac{s_Y}{s_X}(x - \overline{x}).$$

Аналогично определяется функция регрессии $\varphi(y) = \mathrm{M}(X / Y = y)$ случайной величины X на случайную величину Y. При этом эмпирическое уравнение регрессии случайной величины X на случайную величину Y в нормальном случае имеет вид:

$$x - \overline{x} = \hat{r}_{XY} \frac{s_X}{s_Y} (y - \overline{y}).$$

Геометрически уравнение регрессии представляет собой прямую, около которой группируются значения случайного вектора (X, Y). Чем ближе значение выборочного коэффициента корреляции к 1, тем плотнее значения вектора (X, Y) располагаются вдоль прямой регрессии.

1.5. Моделирование случайных величин и векторов

1.5.1. Моделирование непрерывных случайных величин

Случайные величины обычно моделируют с помощью преобразований одного или нескольких независимых значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$, которые называют равномерными случайными числами. Неограниченный источник, вырабатывающий последовательность $u_1, u_2, \ldots$ равномерных случайных чисел, называется датчиком случайных чисел. В ряде ЭВМ имеются встроенные физические датчики случайных чисел, принцип работы которых основан на использовании в качестве источников случайности быстро флуктуирующих шумовых процессов, вырабатываемых радиоэлементами. Однако чаще всего в качестве равномерных случайных чисел используют так называемые псевдослучайные числа, т.е. детерминированные числа, получаемые по некоторому алгоритму и обладающие в той или иной мере свойствами случайных чисел. «Качество» псевдослучайных чисел проверяется при помощи статистических критериев проверки их случайности и равномерной распределенности. Известны различные методы получения псевдослучайных чисел, и соответствующие программы входят в математическое обеспечение современных ЭВМ.

Стандартный метод моделирования непрерывных случайных величин

Пусть U - равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина, то есть

$$f_U(u)=\begin{cases}1, & u\in[0,1],\\ 0, & u\notin[0,1],\end{cases}\qquad F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ u, & u\in[0,1],\\ 1, & u>1,\end{cases}$$

X - моделируемая случайная величина с непрерывной и строго монотонной функцией распределения $F(x)$; $F^{-1}(y)$ - функция, обратная к $F(x)$. Тогда случайная величина $F^{-1}(U)$ распределена также как X, поскольку

$$P\left(F^{-1}(U)<x\right)=P\left(U<F(x)\right)=F_U\left(F(x)\right)=F(x).$$

Таким образом, если $F^{-1}(y)$ может быть явно вычислена, а $u_1,u_2,\dots u_n$ последовательность равномерных случайных чисел, то последовательность чисел $x_1,x_2,\dots x_n$ с $x_k=F^{-1}(u_k),\ k=\overline{1,n}$ будет последовательностью значений случайной величины X, имеющей функцию распределения $F(x)$.

Пример: Моделирование случайной величины с экспоненциальным законом распределения.

Пусть случайная величина X имеет плотность вероятностей $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad x\geq 0,\lambda>0$. Функция распределения этой случайной величины $F(x)=1-e^{-\lambda x},\quad x\geq 0,\lambda>0$ является строго возрастающей и потому существует обратная к ней: $x=F^{-1}(y)=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-y),\quad y\in(0,1)$. Для получения значений случайной величины X следует положить $x_k=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-u_k),\quad k=1,2,\dots$. Поскольку случайные величины U и $1-U$ одинаково распределены, то можно также положить

$$x_k=-\frac{1}{\lambda}\ln(u_k),\quad k=1,2,\dots\ .$$

Замечание: Если смоделирована случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ и $\{x_k\}$ – последовательность ее значений, то случайные числа $\{a+bx_k\},\quad b>0$ будут являться значениями случайной величины с функцией распределения $F\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$. В частности, линейное преобразование $Y=a+(b-a)U$, где U - равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$

случайная величина, позволяет получать случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[a,b]$.

Следует отметить, что стандартный метод моделирования применим на практике, если только функции $F(x)$ и $F^{-1}(y)$ выражаются через элементарные. Для некоторых распределений это не так, но вместе с тем, как показывают примеры ниже, эффективные методы моделирования существуют и в этих случаях.

Моделирование случайной величины, имеющей однопараметрическое гамма-распределение

Плотность вероятностей однопараметрического гамма-распределения с параметром a имеет вид

$$f_a(x) = \frac{x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)},$$

где $x > 0$, а $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$ - гамма функция

Известно, что сумма двух независимых случайных величин X_α и X_β, имеющих однопараметрическое гамма-распределение с параметрами α и β, снова имеет гамма-распределение с параметром $\alpha+\beta$. Из вида плотности $f_1(x)$ следует, что X_1 есть экспоненциально распределенная случайная величина, моделирование которой осуществляется в соответствии с рассмотренным выше примером. Поэтому моделирование случайной величины X_n, имеющей гамма-распределение с натуральным параметром n можно производить с использованием формулы:

$$x_n = x_1^{(1)} + \ldots x_1^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right), k = 1,2,\ldots$$

где $x_1^{(k)}$ - независимые экспоненциально распределенные случайные числа.

Моделирование случайной величины, имеющей бета-распределение

Для моделирования случайной величины, имеющей бета-распределение на интервале (0,1) с плотностью вероятностей

$$f_{p,q}(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, \quad 0 < x < 1,$$

где параметры $p > 0,\ q > 0$, а $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ – бета функция, может быть использован метод Йонка:

1. моделируются два независимых значения u_1 и u_2 случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$;
2. если $u_1^{1/p} + u_2^{1/p} < 1$, то $x_{p,q} = u_1^{1/p}\left(u_1^{1/p} + u_2^{1/p}\right)$, в противном случае возвращаемся к пункту 1.

Моделирование нормально распределенной случайной величины

Большое число статистических задач связано с анализом последовательностей значений нормально распределенных случайных величин, называемых нормальными случайными числами. Последовательность нормальных случайных чисел не может быть получена стандартным методом моделирования, поскольку функция распределения нормального закона распределения (функция Лапласа) не выражается через элементарные функции. Наиболее распространенный способ получения нормальных случайных чисел из последовательности равномерных основан на использовании центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Рассмотрим сумму $S_N = \sum_{i=1}^{N} U_i$, где U_i - независимые равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ случайные величины, имеющие математические ожидания $MU_i = \frac{1}{2}$ и дисперсии $DU_i = \frac{1}{12}$, $\quad i = 1,\ldots,N$.

В соответствии с центральной предельной теоремой случайная величина

$$X_N = \frac{S_N - \mathrm{M}S_N}{\sqrt{\mathrm{D}S_N}} = \frac{S_N - 0.5N}{\sqrt{N}}\sqrt{12}$$

имеет приближенно нормальное распределение с параметрами $(0,1)$ (приближение тем лучше, чем больше N). На практике удовлетворительное приближение к нормальному распределению $N(0,1)$ получается уже при $N = 12$ и это значение параметра N обычно используют для конкретных вычислений. Таким образом, из последовательности равномерных случайных чисел $u_1, u_2, \ldots$ можно получить последовательность нормальных случайных чисел $x_1, x_2, \ldots$ с параметрами $(0,1)$ по формуле:

$$x_i = \sum_{k=1}^{12} u_{ik} - 6, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Если есть необходимость в получении нормальных случайных чисел $y_1, y_2, \ldots$ с параметрами $\left(a, \sigma^2\right)$, то следует положить $y_i = \sigma x_i + a$.

Приведенный алгоритм получения нормальных случайных чисел прост в реализации, однако он приводит лишь к приближенно нормальным случайным числам. Кроме того, он имеет существенный недостаток в смысле быстродействия процесса моделирования, так как для получения одного нормального случайного числа используется $N = 12$ равномерных случайных чисел.

Другой метод получения нормальных случайных чисел из равномерных, часто используемый на практике, состоит в построении соответствующего явно вычисляемого функционального преобразования. Пример такого преобразования дает следующее утверждение.

Утверждение (см. [5, разд. 2.12]). Пусть случайные величины U_1 и U_2 являются независимыми и распределенными равномерно на отрезке $[0,1]$. Тогда случайные величины

$$X_1 = \sqrt{-2\ln\left(U_2\right)}\cos\left(2\pi U_1\right), \quad X_2 = \sqrt{-2\ln\left(U_2\right)}\sin\left(2\pi U_1\right)$$

являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Доказательство этого утверждения представляет собой простое упражнение в вычислении плотности вероятностей при взаимнооднозначном преобразовании случайных векторов. Якобиан указанного преобразования равен

$$J\left(u_1, u_2\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{u_2} = 2\pi \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right).$$

Поэтому совместная плотность вероятностей величин X_1 и X_2 равна

$$f_{X_1 X_2}\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right).$$

Таким образом, каждая пара $\left(u_{2k-1}, u_{2k}\right), k = 1,2,...$ равномерных случайных чисел с помощью указанного в утверждении преобразования порождает пару нормальных $N(0,1)$ случайных чисел $\left(x_{2k-1}, x_{2k}\right)$.

Приведенным алгоритмом предпочтительно пользоваться, когда необходимо получить достаточно много нормальных чисел, так как он требует существенно меньше равномерных случайных чисел. Следует отметить также, что нормальные случайные числа, получаемые с его помощью, являются более точными, нежели полученные с помощью центральной предельной теоремы.

1.5.2. Моделирование гауссовского случайного вектора

Закон распределения нормального (гауссовского) случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)$, как известно, вполне определяется его вектором математических ожиданий $\mathbf{a} = (a_1,...,a_n)$ и корреляционной матрицей $\mathbf{R} = \left\|R_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n}$, где $R_{ij} = M(X_i - a_i)(X_j - a_j)$. В предположении, что распределение вектора $\mathbf{X}$ является невырожденным ($\det \mathbf{R} > 0$) плотность вероятностей многомерного нормального распределения имеет вид:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathbf{R}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a}),(\mathbf{x}-\mathbf{a}))\right\},$$

где $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n$, $\mathbf{R}^{-1}$ - матрица, обратная к $\mathbf{R}$, а символ $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в евклидовом пространстве R^n: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$.

Известно, что вектор $\mathbf{X}$ с многомерным нормальным распределением можно получить специальным линейным преобразованием вектора $\mathbf{Y} = (Y_1,...,Y_n)$ с независимыми, одинаково распределенными по закону $N(0,1)$ координатами. Обычно предполагают, что матрица $\mathbf{B}$ преобразования

$$\mathbf{X} = \mathbf{BY} + \mathbf{a}$$

является треугольной, т.е. k-я строка матрицы $\mathbf{B}$ имеет вид:

$$(b_{k1},...,b_{kk},0,...,0), \qquad k = 1,...,n.$$

Коэффициенты b_{ij} при этом легко определяются рекуррентной процедурой. Поскольку $X_1 = b_{11}Y_1 + a_1$, то $b_{11} = \sqrt{R_{11}} = \sqrt{DX_1}$. Далее имеем:

$$X_2 = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + a_2,$$

$$M[b_{11}Y_1(b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2)] = R_{12},$$

$$M(b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2)^2 = R_{22}.$$

Следовательно,

$$b_{21} = \frac{R_{12}}{b_{11}} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}}}, \qquad b_{22} = \sqrt{R_{22} - \frac{R_{21}^2}{R_{11}}}.$$

Общая рекуррентная формула выглядит следующим образом:

$$b_{ij} = \frac{R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}b_{jk}}{\sqrt{R_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}}, \qquad 1 \le j \le i \le n,$$

где полагается, что $\sum_{k=1}^{0} b_{ik}b_{jk} = 0$.

Таким образом, моделирование произвольного невырожденного нормального случайного вектора $\mathbf{X}$ сводится к моделированию n независимых случайных величин $Y_1,...,Y_n$, каждая из которых имеет стандартный нормальный закон распределения $N(0,1)$. Алгоритмы моделирования случайных величин Y_k, $k = 1,...,n$ приведены в разделе 1.5.1.

Подробнее о методах моделирования случайных величин и векторов см. [2], [5], [7].

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

2.1. Первичная обработка статистических данных

2.1.1. Записать выборку (5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4) в виде вариационного ряда и статистического ряда, обозначив $(y_1,..., y_r)$ различные среди выборочных значений $(x_1,..., x_n)$.

2.1.2. В эксперименте наблюдалась целочисленная случайная величина X. Соответствующие выборочные значения оказались равными (3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1). Записать их в виде статистического ряда, найти соответствующую эмпирическую функцию распределения $F_8^*(x)$ и изобразить ее графически.

2.1.3. Пусть (0,8; 2,9; 4,4; -5,6; 1,1; -3.2) – наблюдавшиеся значения некоторой случайной величины. Построить эмпирическую функцию распределения $F_6^*(x)$ и проверить, что $F_6^*(-5) = 1/6$, $F_6^*(0) = 1/2$, $F_6^*(4) = 5/6$.

2.1.4. Найти и изобразить графически эмпирические функции распределения, соответствующие следующим выборкам, представленным в виде статистических рядов:

а)

y_i	1	4	6
m_i	10	15	25

б)

y_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

2.1.5. Построить эмпирические функции распределения и вычислить выборочные средние и выборочные дисперсии, соответствующие следующим выборкам, представленным в виде статистических рядов:

а)

y_i	-1	0	1	4
m_i	5	2	9	4

б)

y_i	1	4	5	9	10
m_i	1	3	4	2	5

2.1.6. В результате эксперимента непрерывная случайная величина X приняла следующие значения (округленные до целых): (6, 17, 9, 13, 21, 11, 7, 7, 19, 5, 17, 5, 20, 18, 11, 4, 6, 22, 21, 15, 15, 23, 19, 25, 1) Построить интервальный статистический ряд, взяв 5 интервалов одинаковой длины; построить гистограмму и полигон частот.

2.1.7. Построить гистограмму и полигон частот по следующим статистическим данным, представленным в виде интервального статистического ряда:

Номер интервала k	Границы интервала $[u_{k-1}, u_k)$	Частота интервала ν_k
1	0 – 2	2
2	2 – 4	4
3	4 – 6	8
4	6 – 8	12
5	8 – 10	16
6	10 – 12	10
7	12 - 14	3

Найти и построить эмпирическую функцию распределения $\tilde{F}_n^*(x)$, соответствующую этим сгруппированным данным; вычислить выборочное среднее и выборочную дисперсию.

2.1.8. Проводились опыты с бросанием 12 игральных костей. Наблюдаемую случайную величину X брали равной числу костей, на которых выпало 4, 5 или 6 очков. Пусть m_i - число опытов, в которых наблюдалось значение $X = i \quad (i = 0,1,...,12)$. Ниже приведены результаты $n = 4096$ опытов:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_i	0	7	60	198	430	731	918	847	536	257	71	11	0

Взяв в качестве интервалов $J_i = \left[\frac{i-1}{2}, \frac{i+1}{2}\right)$, $i = 0,1,...,12$, построить гистограмму и полигон частот. Вычислить выборочное среднее и выборочную дисперсию, соответствующие этим данным.

2.1.9. Ниже приведены результаты измерения роста случайно отобранных 100 студентов:

Рост, см	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию роста обследованных студентов, построить гистограмму и полигон частот.

2.1.10. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты:

(3, 1, 3, 4, 2, 1, 1, 3, 2, 7, 2, 0, 2, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 0, 2, 1, 4, 3, 4, 2, 0, 2, 3, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 2, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 2, 2, 1, 1, 5).

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию числа неправильных соединений в минуту и сравнить эмпирическое распределение с распределением Пуассона.

2.1.11. Измерительным прибором, практически не имеющим систематической погрешности, было сделано пять независимых измерений некоторой величины. Получены следующие результаты:

Номер измерения	1	2	3	4	5
Результат измерения	2781	2836	2807	2763	2858

Найти: а) выборочную дисперсию погрешности измерения, если измеряемая величина точно известна и равна 2800; б) выборочное среднее и выборочную дисперсию, если точное значение измеряемой величины неизвестно.

2.1.12. Доказать, что выборочные начальные и выборочные центральные моменты k-го порядка связаны соотношением:

$$\mu_k^* = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j \alpha_j^* (\overline{x})^{k-j} .$$

2.2. Точечные оценки неизвестных параметров

2.2.1. Показать, что выборочное среднее $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания наблюдаемой случайной величины X .

2.2.2. Показать, что выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ не является несмещенной оценкой дисперсии наблюдаемой случайной величины X . Определить смещение оценки S^2. Является ли она асимптотически несмещенной? Показать, что несмещенной оценкой дисперсии является величина $S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2$, называемая ***исправленной выборочной дисперсией.***

2.2.3. Показать, что справедлива формула:

$$DS^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\mu_2^2 \right),$$

где $\mu_4 = M(X - MX)^4$ – четвертый центральный момент случайной величины X. Являются ли выборочная дисперсия S^2 и исправленная выборочная дисперсия S'^2 состоятельными оценками наблюдаемой случайной величины X?

2.2.4. Показать, что эмпирическая функция распределения $F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой теоретической функции распределения $F(x)$.

2.2.5. Вычислить информацию Фишера $I(\theta)$ о параметре θ, содержащуюся в одном наблюдении над случайной величиной X, имеющей:

а) нормальное распределение $N(\theta, \sigma^2)$;

б) нормальное распределение $N(a, \theta^2)$;

в) нормальное распределение $N(\theta_1, \theta_2^2)$;

г) гамма-распределение $\Gamma(\theta, \lambda)$;

д) распределение Коши $K(\theta)$;

е) биномиальное распределение $Bi(m, \theta)$;

ж) распределение Пуассона $\Pi(\theta)$.

2.2.6. Доказать, что выборочное среднее $\overline{X}$ является эффективной оценкой математического ожидания наблюдаемой случайной величины X, имеющей распределение: а) $N(\theta, \sigma^2)$; б) $N(\theta_1, \theta_2^2)$.

2.2.7. Доказать, что статистика $\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$ является несмещенной и эффективной оценкой дисперсии наблюдаемой случайной величины X, имеющей нормальное распределение $N(a, \theta^2)$.

2.2.8. Показать, что исправленная выборочная дисперсия S'^2 является асимптотически эффективной оценкой дисперсии наблюдаемой случайной величины X, имеющей нормальное распределение $N(\theta_1, \theta_2^2)$.

2.2.9. Пусть наблюдаемая случайная величина X имеет распределение Коши $K(\theta)$. Показать, что выборочное среднее $\overline{X}$ не является состоятельной оценкой параметра θ.

2.2.10. Показать, что в случае логистического распределения, плотность вероятностей которого при $-\infty < x < \infty$ имеет вид:

$$f(x;\theta) = e^{-x+\theta}\left(1+e^{-x+\theta}\right)^{-2},$$

справедливы утверждения:

а) выборочное среднее $\overline{X}$ – несмещенная оценка θ и $D\overline{X} = \dfrac{\pi^2}{3n}$;

б) информация Фишера $I(\theta) = 1/3$ и поэтому $\overline{X}$ не является эффективной оценкой θ.

2.2.11. Пусть по выборке $(x_1,\ldots,x_n)$ из генеральной совокупности, имеющей биномиальное распределение $Bi(1,\theta)$, требуется оценить функцию $\tau(\theta) = 1/\theta$. Показать, что в данном случае несмещенных оценок не существует.

2.2.12. Пусть по одному наблюдению над случайной величиной X, имеющей отрицательное биномиальное распределение $\overline{Bi(1,\theta)}$, требуется оценить параметр θ. Найти оценку, удовлетворяющую условию несмещенности, и показать, что она практически бесполезна.

2.2.13. Пусть производится одно наблюдение над случайной величиной X, имеющей распределение Пуассона $\Pi(\theta)$ с неизвестным параметром θ:

$$P(X = x) = \left(\theta^x / x!\right)e^{-\theta}, \quad x = 0,1,2,\ldots.$$

Показать, что в этом случае не существует несмещенных оценок параметрической функции $\tau(\theta) = 1/\theta$.

2.2.14. Случайная величина X имеет распределение Пуассона $\Pi(\theta)$ с неизвестным параметром θ. По выборке $(x_1,\ldots,x_n)$ найти точечные оценки параметра θ по методу моментов, используя первый и второй моменты. Исследовать полученные оценки на несмещенность.

2.2.15. Случайная величина X (число нестандартных изделий в партии изделий) имеет распределение Пуассона $\Pi(\theta)$ с неизвестным параметром θ.

Найти методом моментов оценку параметра θ, если обследование $n = 200$ партий на наличие нестандартных изделий дало следующие результаты:

x_i	0	1	2	3	4
m_i	132	43	20	3	2

где x_i число нестандартных изделий в одной партии; m_i - число партий, содержащих x_i нестандартных изделий.

2.2.16. По выборке $(x_1,...,x_n)$ из генеральной совокупности, имеющей биномиальное распределение $Bi(m,\theta)$, т.е. $\mathrm{P}(X = x) = C_m^x \theta^x (1-\theta)^{m-x}$, $x = 0,1,2,...,m$, найти оценку неизвестной вероятности успеха θ по методу моментов, используя первый момент.

2.2.17. Случайная величина X (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена биномиальному закону распределения $Bi(m,\theta)$ с неизвестным параметром θ. Ниже приведены результаты числа появлений события в 10 опытах по 5 испытаний в каждом:

x_i	0	1	2	3	4
m_i	5	2	1	1	1

где x_i - число появлений события A в одном опыте; m_i - количество опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A. Найти методом моментов оценку параметра θ по этим статистическим данным.

2.2.18. Случайная величина X имеет геометрическое распределение $G(\theta)$ с неизвестным параметром θ, т.е. $\mathrm{P}(X = x) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x = 1,2,...$, где x – число испытаний, произведенных до появления события; θ - вероятность появления события в одном испытании. По выборке $(x_1,...,x_n)$ найти методом моментов оценку параметра θ.

2.2.19. Найти методом моментов оценку параметра θ геометрического распределения $G(\theta)$, если в четырех опытах событие появилось соответственно после двух, четырех, шести и восьми испытаний.

2.2.20. По выборке $(x_1,...,x_n)$ найти методом моментов оценку неизвестного параметра θ показательного распределения $E(\theta)$, плотность вероятностей которого $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \ge 0$. Исследовать полученную оценку на несмещенность.

2.2.21. Найти методом моментов по выборке $(x_1,...,x_n)$ точечные оценки неизвестных параметров α и β гамма-распределения $\Gamma(\alpha,\beta)$, плотность вероятностей которого

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^{\alpha}e^{-x/\beta},\ (\alpha>-1,\ \beta>0,\ x\geq 0).$$

2.2.22. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[\theta_1,\theta_2]$ с неизвестными границами. По выборке $(x_1,...,x_n)$ найти методом моментов оценки параметров θ_1 и θ_2.

2.2.23. По выборке $(x_1,...,x_n)$ из генеральной совокупности, имеющей биномиальное распределение $Bi(m,\theta)$, найти оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестной вероятности успеха θ. Сравнить ее с оценкой, полученной по методу моментов (см. задачу 2.2.16).

2.2.24. Случайная величина X имеет распределение Пуассона $\Pi(\theta)$ с неизвестным параметром θ. По выборке $(x_1,...,x_n)$ найти оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ и исследовать ее на несмещенность.

2.2.25. По выборке $(x_1,...,x_n)$ найти оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ показательного распределения $E(\theta)$. Сравнить ее с оценкой, полученной по методу моментов (см. задачу 2.2.20).

2.2.26. Случайная величина X (время безотказной работы элемента) имеет показательный закон распределения $E(\theta)$ с неизвестным параметром θ. В результате проверки 1000 элементов были получены следующие значения среднего времени их работы:

x_i	5	15	25	35	45	55	65
m_i	365	245	150	100	70	45	25

Здесь x_i – среднее время безотказной работы одного элемента, часов; m_i - количество элементов, проработавших в среднем x_i часов. Найти на основании этих данных оценку параметра θ по методу максимального правдоподобия.

2.2.27. По выборке $(x_1,...,x_n)$ из генеральной совокупности, имеющей гамма-распределение $\Gamma(1,\theta)$ с плотностью вероятностей $f(x;\theta)=(x/\theta^2)e^{-x/\theta}$, $x \ge 0$, найти оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ. Сравнить ее с оценкой, полученной по методу моментов (см. задачу 2.2.21).

2.2.28. Устройство состоит из элементов, время безотказной работы которых подчинено гамма-распределению $\Gamma(1,\beta)$. Испытания пяти элементов дали следующие результаты (время работы элемента в часах до отказа): (50, 60, 100, 200, 250). Найти по этим выборочным значениям оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра β.

2.2.29. Случайная величина X, характеризующая срок службы элементов электронной аппаратуры, имеет плотность вероятностей $f(x;\theta)=(2x/\theta)e^{-x^2/\theta}$, $x \ge 0$ (закон распределения Релея). По выборке $(x_1,...,x_n)$ построить оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ. Исследовать ее на несмещенность и сравнить с оценкой, которую дает метод моментов.

2.2.30. По выборке $(x_1,...,x_n)$ найти оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров распределений: а) $N(\theta,\sigma^2)$; б) $N(a,\theta^2)$; в) $N(\theta_1,\theta_2^2)$. Проанализировать качество полученных оценок.

2.2.31. Наблюдаемая случайная величина X имеет геометрическое распределение $G(\theta)$ с неизвестным параметром θ. По выборке $(x_1,...,x_n)$ построить оценку максимального правдоподобия неизвестной вероятности θ и сравнить ее с оценкой, полученной по методу моментов (см. задачу 2.2.18).

2.2.32. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,\theta]$. По выборке $(x_1,...,x_n)$ построить оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ.

2.2.33. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке единичной длины $[\theta,\theta+1]$. По выборке $(x_1,...,x_n)$ построить оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ.

2.2.34. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$. По выборке $(x_1, ..., x_n)$ построить оценки максимального правдоподобия неизвестных концов отрезка θ_1 и θ_2.

2.3. Интервальные оценки неизвестных параметров

2.3.1. Найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны дисперсия $DX = \sigma^2$, выборочное среднее $\overline{x}$, объем выборки n и доверительная вероятность γ:

а) $\sigma^2 = 16; \quad \overline{x} = 10,2; \quad n = 16; \quad \gamma = 0,95;$

б) $\sigma^2 = 25; \quad \overline{x} = 16,8; \quad n = 25; \quad \gamma = 0,98;$

в) $\sigma^2 = 4; \quad \overline{x} = 7,0; \quad n = 100; \quad \gamma = 0,99.$

2.3.2. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma = 40$ м произведено пять равноточных измерений высоты полета аппарата. Найти доверительный интервал для истинной высоты h полета с надежностью $\gamma = 0,999$, зная среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x} = 20000$ м, и предполагая, что результаты измерений распределены нормально.

2.3.3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a случайной величины X по выборочному среднему равна 0,3, если известна дисперсия $DX = 1,44$.

2.3.4. Построить доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны выборочное среднее $\overline{x}$, выборочная дисперсия s^2, объем выборки n и доверительная вероятность γ:

а) $\overline{x} = 3,2; \quad s^2 = 6,25; \quad n = 16; \quad \gamma = 0,95;$

б) $\overline{x} = 1,1; \quad s^2 = 1,69; \quad n = 25; \quad \gamma = 0,98;$

в) $\overline{x} = 2,0; \quad s^2 = 4,0; \quad n = 100; \quad \gamma = 0,99.$

2.3.5. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x} = 30,1$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0,999$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

2.3.6. Построить доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины X, если известны выборочная дисперсия s^2, объем выборки n и доверительная вероятность γ:

а) $s^2 = 1,21; \quad n = 10; \quad \gamma = 0,95;$ б) $s^2 = 10,0; \quad n = 30; \quad \gamma = 0,98;$

в) $s^2 = 4,5; \quad n = 50; \quad \gamma = 0,99.$

2.3.7. Зная выборочную дисперсию $s^2 = 2$ и объем выборки $n = 100$ из нормальной генеральной совокупности, построить точный и приближенный доверительные интервалы для неизвестной дисперсии σ^2, отвечающие доверительной вероятности $\gamma = 0,95$. Сравнить полученные результаты.

2.3.8. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X, имеющей биномиальное распределение $Bi(1,\theta)$, если выборочное среднее $\bar{x} = 5,0$, а объем выборки $n = 100$. Доверительную вероятность принять равной $\gamma = 0,95$.

2.3.9. Зная объем выборки $n = 100$, выборочное среднее $\bar{x} = 1,0$, выборочную дисперсию $s^2 = 9$ и выборочный центральный момент $\mu_4^* = 90$, найти доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии случайной величины X, имеющей показательное распределение с плотностью вероятностей $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$. Доверительную вероятность принять равной $\gamma = 0,975$.

2.3.10. Показать, что в случае экспоненциального распределения с плотностью вероятностей $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq 0$, γ-доверительный интервал для θ имеет вид: $\left(X_{(1)} + \dfrac{\ln(1-\gamma)}{n}, X_{(1)} \right)$, где $X_{(1)} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.

2.3.11. Пусть n, $\bar{X}$ и S^2 - соответственно объем, выборочное среднее и дисперсия выборки из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с неизвестными параметрами. Показать, что с вероятностью γ результат следующего, $(n+1)$-го, наблюдения находится в интервале:

$$(\bar{X} \pm t_{\gamma;n-1} \cdot S\sqrt{(n+1)(n-1)}).$$

2.3.12. В результате пяти независимых взвешиваний одного и того же тела получены следующие результаты (в граммах): (4,12; 3,92; 4,55; 4,04; 4,35). Считая погрешности измерений нормальными $N(0,\sigma^2)$ случайными величинами, указать доверительные границы для результатов предстоящего шестого взвешивания (доверительную вероятность принять равной $\gamma = 0,95$).

2.4. Проверка статистических гипотез

2.4.1. В таблице даны результаты $n = 200$ наблюдений над случайной величиной X :

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
m_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Проверить, используя критерий χ^2 Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой о нормальном $N(1,4)$ распределении генеральной совокупности. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0,05$.

2.4.2. Используя критерий χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0,02$ проверить, согласуется ли следующая выборка, представленная в виде статистического ряда, с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2.4.3. Используя критерий χ^2, проверить при уровне значимости $\alpha = 0,05$, согласуются ли с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности следующие данные, представленные в виде интервального статистического ряда:

Номер интервала k	Границы интервала $[u_{k-1}, u_k)$	Частота интервала ν_k
1	3 – 8	6
2	8 – 13	88
3	13 – 18	15
4	18 – 23	40
5	23 – 28	16
6	28 – 33	8
7	33 – 38	7

2.4.4. В итоге регистрации времени прихода 800 посетителей выставки (в качестве начала отсчета времени принят момент открытия работы выставки) получены данные представленные в следующей таблице:

$\left[u_{k-1}, u_k\right)$	ν_k	$\left[u_{k-1}, u_k\right)$	ν_k
0 – 1	259	4 – 5	70
1 – 2	167	5 – 6	47
2 – 3	109	6 – 7	40
3 – 4	74	7 – 8	34

где $\left[u_{k-1}, u_k\right)$ - интервалы времени; ν_k - частоты интервалов, т.е. количество посетителей, пришедших в течение соответствующего интервала. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что время прихода посетителей выставки распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 2$.

2.4.5. Испытания 200 элементов на продолжительность работы дали результаты, приведенные в следующей таблице:

$\left[u_{k-1}, u_k\right)$	ν_k	$\left[u_{k-1}, u_k\right)$	ν_k
0 – 5	133	15 – 20	4
5 – 10	45	20 – 25	2
10 – 15	15	25 – 30	1

где $\left[u_{k-1}, u_k\right)$ - интервалы времени в часах; ν_k - частоты интервалов, т.е. количество элементов, проработавших время в пределах соответствующего интервала. Требуется, используя критерий χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону с плотностью вероятностей $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$.

2.4.6. В опытах наблюдалась неотрицательная непрерывная случайная величина X. Ее значения (упорядоченные по величине и округленные до двух знаков) для $n = 50$ опытов оказались равными: (0,01; 0,01; 0,04; 0,17; 0,18; 0,22; 0,22; 0,25; 0,25; 0,29; 0,42; 0,46; 0,47; 0,56; 0,59; 0,67; 0,68; 0,70; 0,72; 0,76; 0,78; 0,83; 0,85; 0,87; 0,93; 1,00; 1,01; 1,01; 1,02; 1,03; 1,05; 1,32; 1,34; 1,37; 1,47; 1,50; 1,52; 1,54; 1,59; 1,71; 1,90; 2,10; 2,35; 2,46; 2,46; 2,50; 3,73; 4,07; 5, 55; 6,03).

Проверить на основании этих данных гипотезу $H_0 : F_X(x) = 1 - e^x,\ x \geq 0$, применяя критерий χ^2 и используя группировку с четырьмя равновероятными интервалами (уровень значимости принять равным $\alpha = 0,1$).

2.4.7. Наблюдались показания 500 наугад выбранных часов, выставленных в витринах часовщиков. Пусть i - номер промежутка от i-го часа до $(i+1)$-го,

$i = 0, 1, ..., 11$, а ν_i - число часов, показания которых принадлежали i-му промежутку. Результаты наблюдений оказались следующими:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν_i	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

Согласуются ли эти данные с гипотезой о том, что показания часов равномерно распределены на интервале $(0,12)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$?

2.4.8. В течение 10 часов регистрировали прибытие автомашин к бензоколонке и получили данные представленные в таблице.

$[u_{k-1}, u_k)$	ν_k	$[u_{k-1}, u_k)$	ν_k
8 – 9	12	13 – 14	6
9 – 10	40	14 – 15	11
10 – 11	22	15 – 16	33
11 – 12	16	16 – 17	18
12 – 13	28	17 – 18	14

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о том, что время прибытия автомашин распределено равномерно.

2.4.9. Четыре монеты подбрасывались одновременно 100 раз, причем каждый раз отмечалось число выпавших «гербов». Ниже приведены частоты m_i случаев, когда число выпавших «гербов» было равно x_i:

x_i	0	1	2	3	4
m_i	8	20	42	22	8

Пользуясь критерием χ^2, проверить согласие этих данных с гипотезой о биномиальном распределении числа выпавших «гербов», если вероятность выпадения «герба» при бросании каждой из монет равна 0,5. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0,05$.

2.4.10. Из 2020 семей, имеющих двух детей, в 527 семьях по два мальчика и в 476 – по две девочки (в остальных 1017 семьях дети разного пола). Можно ли с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ считать, что количество мальчиков в семье с двумя детьми – биномиальная случайная величина?

2.4.11. Выборка представляет собой целочисленный случайный вектор (47, 46, 49, 53, 50). Можно ли с уровнем значимости $\alpha = 0,1$ считать распределение наблюдавшейся случайной величины пуассоновским?

2.4.12. При $n = 4040$ бросаниях монеты было получено $m_1 = 2048$ выпадений «герба» и $m_2 = n - m_1 = 1992$ выпадений «решки». Проверить, используя критерий χ^2, совместимы ли эти данные с гипотезой о том, что монета была симметричной.

2.4.13. При $n = 4000$ независимых испытаниях события A_1, A_2 и A_3, образующие полную группу событий, осуществились 1905, 1015 и 1080 раз соответственно. Проверить, согласуются ли эти данные на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с гипотезой $H_0: p_1 = 1/2;\ p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_i = \mathrm{P}(A_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2.4.14. Таблица «случайных чисел» содержит реализации 10 000 независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Корректно ли предположение о равновероятности этих значений, если в упомянутой таблице числа, не превосходящие 4, встречаются 4806 раз? При каком уровне значимости гипотеза равновероятности отвергается?

ГЛАВА 3. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ДАННЫХ»

3.1. Содержание задания

1. Смоделировать случайную величину X, имеющую нормальный закон распределения с параметрами (a_X, σ_X^2). На основе выборки объема n исследовать статистические характеристики случайной величины X, решив следующие задачи.
   1.1. Построить гистограмму распределения и изобразить ее графически одновременно с теоретической плотностью вероятностей.
   1.2. Вычислить выборочное среднее и выборочную дисперсию.
   1.3. Найти оценки математического ожидания и дисперсии методом максимального правдоподобия. Указать несмещенную оценку дисперсии.
   1.4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии, соответствующие доверительной вероятности γ.
   1.5. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X, используя критерий χ^2 Пирсона при уровне значимости α.
2. Смоделировать случайную величину Y, имеющую заданный непрерывный закон распределения (отличный от нормального) с заданными параметрами. На основе выборки объема n исследовать статистические характеристики случайной величины Y, решив следующие задачи.
   2.1. Построить гистограмму распределения и изобразить ее графически одновременно с теоретической плотностью вероятностей.
   2.2. Определить точечные оценки математического ожидания и дисперсии.
   2.3. При заданном виде распределения построить оценки входящих в него неизвестных параметров методом моментов.
   2.4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии, соответствующие доверительной вероятности γ.
   2.5. Проверить гипотезу о виде распределении случайной величины Y, используя критерий χ^2 Пирсона при уровне значимости α.
3. Смоделировать случайный вектор (X, Y), имеющий двумерный нормальный закон распределения с параметрами $(a_X, a_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$.

На основе выборки объема n исследовать статистические характеристики случайного вектора (X, Y), решив следующие задачи.

3.1. Найти точечные оценки параметров, входящих в распределение.

3.2. Проверить гипотезу о независимости случайных величин X и Y при уровне значимости α.

3.3. Найти эмпирические уравнения регрессии Y на X и X на Y и изобразить их графически одновременно с выборочными значениями.

Примечание: В зависимости от действующего учебного плана по изучаемому курсу на основе данного задания может быть сформировано либо индивидуальное задание для расчетно-графической работы (по усмотрению преподавателя некоторые разделы могут быть исключены), либо индивидуальное задание для курсового проекта.

3.2. Исходные данные к заданию

Каждый студент получает индивидуальный вариант задания, в котором указаны:

для раздела 1: значения объема выборки n, математического ожидания a_X и дисперсии σ_X^2, доверительной вероятности γ и уровня значимости α.

для раздела 2: закон распределения случайной величины (отличный от нормального) и значения его параметров, значения объема выборки n, доверительной вероятности γ и уровня значимости α, задания для аналитических расчетов.

для раздела 3: значение объема выборки n, значения математических ожиданий a_X и a_Y, дисперсий σ_X^2 и σ_Y^2 и коэффициента корреляции r_{XY} значение уровня значимости α.

Варианты индивидуальных заданий приведены в Приложении 1.

3.3. Методические указания по выполнению задания

Задание должно выполняться на компьютере с использованием универсальных математических пакетов MCAD или MATLAB.

1. При моделировании нормальной случайной величины руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.5.1. Для генерирования равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных чисел

использовать стандартные функции (в MathCAD – функцию rnd, в MatLab – функцию rand).

1.1. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.1. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей: границы интервалов группировки; частоты и относительные частоты интервалов; суммы частот; значения высот столбцов гистограммы; значения теоретической плотности вероятностей в серединах интервалов.

1.2. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.1. Результаты сравнить с истинными значениями математического ожидания и дисперсии.

1.3. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.2.1. Результаты сравнить с истинными значениями математического ожидания и дисперсии.

1.4. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.2.2. Рассмотреть отдельно случаи известных и неизвестных параметров распределения. Проверить попадание истинных значений математического ожидания и дисперсии в построенные доверительные интервалы.

1.5. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.3.1. Для выполнения требования, состоящего в том, чтобы частоты всех интервалов были не менее 5, произвести, при необходимости, объединение соседних интервалов. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей: границы интервалов группировки; частоты и относительные частоты интервалов; суммы частот; теоретические вероятности попадания в интервалы (до и после объединения). Привести значения статистики критерия и порога и сделать вывод о том, принимается выдвинутая гипотеза о виде распределения или нет. Рассмотреть отдельно случаи известных и неизвестных параметров распределения.

2. При моделировании непрерывных случайных величин с законом распределения отличным от нормального руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.5.1 и из [1, разд. 1, пп. 2.1-2.11, 2.13-2.27]. Привести подробный алгоритм моделирования для своего варианта задания и аналитический расчет теоретических значений математического ожидания и дисперсии.

2.1. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.1. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей: границы интервалов группировки; частоты и относительные частоты интервалов; суммы частот; значения высот столбцов гистограммы; значения теоретической плотности вероятностей в серединах интервалов.

2.2. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.1. Результаты сравнить с истинными значениями математического ожидания и дисперсии.

2.3. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.2.1. Результаты сравнить с истинными значениями математического ожидания и дисперсии.

2.4. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.2.2, считая параметры распределения неизвестными. Проверить попадание истинных значений математического ожидания и дисперсии в полученные доверительные интервалы.

2.5. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.3.1, считая параметры распределения неизвестными. Для выполнения требования, состоящего в том, чтобы частоты всех интервалов были не менее 5, произвести, при необходимости, объединение соседних интервалов. Результаты расчетов представить в виде таблицы, содержащей: границы интервалов группировки; частоты и относительные частоты интервалов; суммы частот; теоретические вероятности попадания в интервалы (до и после объединения). Привести значения статистики критерия и порога и сделать вывод о том, принимается выдвинутая гипотеза о виде распределения или нет.

3. При моделировании случайного вектора, имеющего двумерное нормальное распределение руководствоваться разделом 1.5.2 и [1, разд. 2, п. 4].

3.1. При нахождении точечных оценок математических ожиданий и дисперсий координат вектора руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.1. Оценку коэффициента корреляции находить по формулам раздела 1.4.1. Результаты оценивания сравнить с истинными значениями.

3.2. Проверку гипотезы независимости произвести и с использованием критерия независимости χ^2, и с использованием критерия проверки значимости коэффициента корреляции (см. раздел 1.4.2, [3, разд. 3.5], [4, разд. 4.8.1]).

При использовании критерия независимости χ^2 следует обеспечить выполнение требования, чтобы частоты всех прямоугольников группировки

ν_{ij} были не менее 5. Это достигается объединением соседних интервалов группировки выборочных значений случайных величин X и Y соответственно

Результаты расчетов представить в виде двумерной таблицы, содержащей: границы прямоугольников группировки; частоты и относительные частоты интервалов и прямоугольников; суммы частот (до и после объединения интервалов). Привести значения статистики критерия и порога и сделать вывод о том, принимается выдвинутая гипотеза о независимости или нет.

При использовании критерия проверки значимости коэффициента корреляции привести значения статистики критерия и порога и сделать вывод о том, принимается выдвинутая гипотеза о независимости или нет.

3.3. При выполнении задания руководствоваться теоретическими сведениями из раздела 1.4.3. и результатами выполнения п. 3.1. Проанализировать изменение полученных результатов в зависимости от значения коэффициента корреляции.

В заключение сделать выводы об изменении качества всех статистических выводов при увеличении объема выборки n, качества построения доверительных интервалов в зависимости от доверительной вероятности γ, качества проверки гипотез в зависимости от уровня значимости α.

3.4. Требования к оформлению отчета

Отчет об индивидуальном задании должен быть оформлен в соответствии с правилами оформления учебных текстовых документов, изложенными в методических указаниях [6]. Его представляют в печатном виде в обложке со стандартным титульным листом, форма которого приведена в Приложении 5.

Отчет включает в себя следующие основные части.

1. ***Введение.*** В нем следует дать общую характеристику роли и значений практических приложений математической статистики.
2. ***Задание и исходные данные.*** Следует конкретизировать постановку задач разделов 1 - 3 задания в соответствии с полученными исходными данными.
3. ***Результаты моделирования и исследование статистических характеристик.*** Эта основная часть работы содержит последовательное решение задач из разделов 1 - 3 задания. При решении каждой задачи следует приводить описание используемого метода, необходимые формулы и

пояснения к ним. Если задача решается двумя методами, следует произвести сравнение этих методов и полученных результатов.

Расчеты и результаты представляются в виде таблиц или графиков функций и помещаются в соответствующих разделах отчета.

В Приложениях А, Б, и В должны быть помещены полные тексты программ, результатов моделирования и статистического анализа для разделов задания 1, 2, и 3 соответственно.

4. Библиографический список приводится в конце отчета. В тексте самого отчета следует делать ссылки на используемую литературу с указанием номера ее в списке (в квадратных скобках).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: «Мир», 1989.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: «Наука», 1982.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: «Высшая школа», 1984.
4. Коломиец Э.И. Математическая статистика: Метод. указания к решению задач/ Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1990.
5. Тараскин А.Ф. Статистическое моделирование и метод Монте-Карло: Учебное пособие/ Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1997.
6. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере /Под ред. Фигурнова В.Э. М.: «ИНФРА-М», 1998.
7. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. Минск: Изд-во «Университетское», 1987.
8. Суханов С.В. Дипломная работа. Оформление пояснительной записки: Метод. указания / Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1999.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Исходные данные к разделу 1

Вариант	n	a_X	σ_X^2	γ	α
1	400	4.1	2.25	0.95	0.05
2	350	2.6	7.29	0.96	0.01
3	275	0.1	14.44	0.9	0.01
4	425	3.3	4.7	0.95	0.001
5	450	1.15	11.56	0.92	0.02
6	325	4.36	3.4	0.98	0.005
7	425	0.7	10.0	0.9	0.005
8	350	2.2	6.76	0.99	0.001
9	475	1.8	9.5	0.999	0.001
10	450	4.6	2.56	0.98	0.02
11	375	1.2	11.7	0.99	0.005
12	400	3.15	4.6	0.95	0.025
13	275	2.8	6.9	0.92	0.005
14	325	0.65	15.21	0.96	0.025
15	500	3.9	4.3	0.9	0.025
16	475	5.2	1.7	0.95	0.001
17	425	4.75	8.5	0.9	0.02
18	375	0.4	11.1	0.98	0.005
19	450	2.35	6.4	0.95	0.005
20	325	6.0	1.1	0.99	0.001
21	300	5.1	1.8	0.999	0.001
22	350	3.45	4.2	0.96	0.02
23	275	5.15	1.25	0.99	0.005
24	300	5.7	1.6	0.95	0.025
25	475	1.35	10.7	0.9	0.05
26	400	2.1	8.41	0.999	0.05
27	375	1.12	12.0	0.99	0.01
28	500	4.95	3.7	0.95	0.01
29	300	3.7	5.4	0.98	0.001
30	500	0.45	9.9	0.95	0.05

Исходные данные к разделу 2

Вариант № 1. ***Однопараметрическое показательное распределение***:

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Исходные данные: a = 3.5, $\alpha =$ 0.001, $\gamma =$ 0.96, $n = 300$.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 2. ***Общее показательное распределение***:

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-a(x-b)}, & x\ge b,\\ 0, & x<b.\end{cases}$$

Исходные данные: a = 2.2, b = -1.5, $\alpha =$ 0.025, $\gamma =$ 0.92, $n = 250$.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант № 3. ***Однопараметрическое распределение Лапла***са:

$$f(x)=\frac{a}{2}\exp\left\{-a|x|\right\}.$$

Исходные данные: $a = 0.3$, $\alpha = 0.005$, $\gamma = 0.94$, $n = 400$.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 4. ***Общее распределение Лапласа***:

$$f(x)=\frac{a}{2}\exp\left\{-a|x-b|\right\}.$$

Исходные данные: a = 1.5, b = -2, α = 0.005, γ = 0.94, n = 350.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант № 5. Распределение Релея***:*** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

Исходные данные: a = 4, α = 0.025, γ = 0.999, n = 375.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 6. Однопараметрическое логистическое распределение:

$$f(x) = \frac{ae^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}.$$

Исходные данные: a = 1/2, α = 0.025, γ = 0.9, n = 400.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 7. Общее логистическое распределение:

$$f(x) = \frac{ae^{-a(x-b)}}{\left[1+e^{-a(x-b)}\right]^2}.$$

Исходные данные: a = 1/2, b = 3, α = 0.025, γ = 0.95, n = 350.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант № 8. Распределение Эрланга k-го порядка:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(a\,x)^{k-1}}{(k-1)!} a\,e^{-ax}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Исходные данные: a = 2, k = 3, α = 0.025, γ = 0.9, n = 400.

Рассчитать аналитически: MX, DX.

Найти точечные оценки параметров a и k методом моментов.

Указание: Воспользоваться тем, что моделируемая случайная величина

$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$,

где случайные величины Y_k - независимы и распределены по показательному закону с параметром a, то есть:

$f_{Y_k}(y) = a\,e^{-ay}$, $y \ge 0$.

Вариант № 9. Степенное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^{a-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Исходные данные: a = 4, α = 0.05, γ = 0.92, N = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 10. Степенное распределение:

$$f(x)=\begin{cases} b(1-x)^{b-1}, & x\in[0,1] \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}.$$

Исходные данные: b = 5, α = 0.05, γ = 0.92, N = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра b методом моментов.

Вариант № 11. Однопараметрическое распределение прямоугольного треугольника:

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le\sqrt{\dfrac{2}{a}}, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Исходные данные: a = 0.5, α = 0.1, γ = 0.98, n = 250.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 12. Однопараметрическое распределение прямоугольного треугольника:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{x}{2a}\right), & 0\le x\le 2a, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Исходные данные: a = 3, α = 0.1, γ = 0.98, n = 250.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 13. Общее распределение прямоугольного треугольника:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{(b-a)^2}(x-a), & a\le x\le b, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Исходные данные: a = -2, b= 3, α = 0.01, γ = 0.95, n = 250.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант № 14. Однопараметрическое распределение Симпсона:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a^2}, & 0\le x\le a,\\[2mm] \dfrac{2a-x}{a^2}, & a\le x\le 2a\\[2mm] 0, & x<0,\quad x>2a.\end{cases}$$

Исходные данные: a = 2, α = 0.05, γ = 0.98, n = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 15. Симметричное однопараметрическое распределение Симпсона:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|\le a,\\[2mm] 0, & |x|>a.\end{cases}$$

Исходные данные: a = 2, α = 0.05, γ = 0.95, n = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 16. Общее распределение Симпсона:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2a}{(b-a)^2}, & 2a\le x\le a+b;\\[2mm] \dfrac{2b-x}{(b-a)^2}, & a+b\le x\le 2b;\\[2mm] 0, & x<2a,\quad x>2b.\end{cases}$$

Исходные данные: a = -0.8, b = 0.5, α = 0.05, γ = 0.98, n = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант № 17. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2a}\sqrt{1-\dfrac{x}{a}}, & 0\le x\le a,\\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$

Исходные данные: a = 3, α = 0.1, γ = 0.98, n = 350.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 18. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{4a}\sqrt{1-\dfrac{|x|}{a}}, & |x|\le a, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Исходные данные: a = 2, α = 0.1, γ = 0.95, n = 350.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}, & \dfrac{a}{2}\le x\le a, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Исходные данные: a = 2, α = 0.1, γ = 0.98, n = 250.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 20. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a+1}, & x\ge b, \\ 0, & x<b, \end{cases} \quad a>2, b>0.$

Исходные данные: a = 2, b = 10, α = 0.1, γ = 0.98, n = 450.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант № 21. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ab}{b-a}x^{a-1}, & x\in[0,1), \\ \dfrac{ab}{b-a}x^{b-1}, & x\in[1,+\infty), \end{cases} \quad a>1, b<-2..$

Исходные данные: a = 2, b = -3, α = 0.002, γ = 0.96, n = 350.

Считая параметр a известным, рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x)$, $F^{-1}(u)$. Найти точечную оценку параметра b методом моментов.

Вариант № 22. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ab}{b-a}x^{a-1}, & x\in[0,1), \\ \dfrac{ab}{b-a}x^{b-1}, & x\in[1,+\infty), \end{cases} \quad a>1, b<-2.$

Исходные данные: a = 3, b = -3, α = 0.002, γ = 0.98, n = 350.

Считая параметр b известным, рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x)$, $F^{-1}(u)$. Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 23. Распределение арксинуса:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\geq a.\end{cases}$$

Исходные данные: a = 1/2, α = 0.025, γ = 0.94, n = 400.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант *№ 24.* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}\sin(ax+b), & x\in\left[-\dfrac{b}{a};\dfrac{\pi-b}{a}\right],\\ 0, & x\notin\left[-\dfrac{b}{a};\dfrac{\pi-b}{a}\right].\end{cases}$

Исходные данные: a = 2, b = 1, α = 0.05, γ = 0.98, n = 400.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант *№ 25.* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}\cos(ax+b), & x\in\left[-\dfrac{\pi+2b}{2a};\dfrac{\pi-2b}{2a}\right],\\ 0, & x\notin\left[-\dfrac{\pi+2b}{2a};\dfrac{\pi-2b}{2a}\right].\end{cases}$

Исходные данные: a = 1.5, b = -1, α = 0.01, γ = 0.98, n = 400.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Вариант *№ 26.* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}\cos\sqrt{ax}\,\dfrac{1}{\sqrt{ax}}, & x\in\left(0;\dfrac{\pi^2}{4a}\right),\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

Исходные данные: a = 1/2, α = 0.01, γ = 0.96, n = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант *№ 27.* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}\sin\sqrt{ax}\,\dfrac{1}{\sqrt{ax}}, & x\in\left(0;\dfrac{\pi^2}{4a}\right),\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

Исходные данные: a = 1/2, α = 0.001, γ = 0.95, n = 300.

Рассчитать аналитически: $MX, DX, F(x), F^{-1}(u)$.

Найти точечную оценку параметра a методом моментов.

Вариант № 28. Гамма-распределение: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} a^{\lambda} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

где $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$ - гамма-функция.

Исходные данные: $a = 2$, $\lambda = 3/2$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.99$, $n = 400$.

Рассчитать аналитически: MX, DX .

Найти точечные оценки параметров a и λ методом моментов.

Указание: Воспользоваться алгоритмом моделирования для случая, когда $\lambda = m + \dfrac{1}{2}, m = 0, 1, 2, ...$ или общим алгоритмом моделирования гамма-распределения.

Вариант № 29. Общее бета-распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

Исходные данные: $a = 2$, $b = 2$, $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.95$, $n = 300$.

Рассчитать аналитически: MX, DX .

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Указание: Воспользоваться алгоритмом моделирования для случая целых a и b или общим алгоритмом моделирования бета-распределения.

Вариант № 30. Распределение Парето:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \dfrac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Исходные данные: $a = 2$, $b = 2$, $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.92$, $n = 300$.

Рассчитать аналитически: MX, DX .

Найти точечные оценки параметров a и b методом моментов.

Указание: Воспользоваться тем, что моделируемая случайная величина $X = Y^{-1} - 1$, где Y - случайная величина, имеющая бета-распределение с параметрами a и b

Исходные данные к разделу 3

Значения параметров n, a_X , σ_X^2 , α заимствовать из раздела 1.

Вариант	a_Y	σ_Y^2	r_{XY}	Вариант	a_Y	σ_Y^2	r_{XY}
1	1.12	11.56	-0.21	**16**	2.35	7.5	0.24
2	-5.6	1.69	-0.15	**17**	-1.4	10.2	0.3
3	-3.3	4.7	0.74	**18**	3.7	4.41	-0.425
4	0.45	14.0	0.25	**19**	5.9	1.21	0.49
5	4.25	3.24	-0.33	**20**	2.2	6.25	0.045
6	-1.5	9.9	0.41	**21**	-2.35	8.0	-0.235
7	3.35	4.6	-0.29	**22**	-0.1	15.21	0.415
8	-5.4	1.75	0.12	**23**	2.4	8.5	-0.45
9	-4.5	3.61	-0.18	**24**	2.95	9.0	0.07
10	1.3	9.3	-0.63	**25**	-4.21	2.1	-0.39
11	4.48	2.56	0.08	**26**	5.25	1.44	0.14
12	0.5	10.7	-0.85	**27**	4.3	3.8	-0.54
13	-5.44	1.36	0.5	**28**	1.7	12.96	0.315
14	3.8	5.45	-0.37	**29**	-0.55	14.44	-0.125
15	-0.7	12.96	-0.05	**30**	-3.7	4.3	0.09

Приложение 2

Нормальное распределение

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $x \geq 0$.

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,5000	0,32	0,6255	0,64	0,7389	0,96	0,8315
0,01	0,5040	0,33	0,6293	0,65	0,7422	0,97	0,8340
0,02	0,5080	0,34	0,6331	0,66	0,7454	0,98	0,8365
0,03	0,5120	0,35	0,6368	0,67	0,7486	0,99	0,8389
0,04	0,5160	0,36	0,6406	0,68	0,7516	1,00	0,8413
0,05	0,5199	0,37	0,6443	0,69	0,7549	1,01	0,8438
0,06	0,5239	0,38	0,6480	0,70	0,7580	1,02	0,8461
0,07	0,5279	0,39	0,6517	0,71	0,7611	1,03	0,8485
0,08	0,5319	0,40	0,6554	0,72	0,7642	1,04	0,8508
0,09	0,5359	0,41	0,6591	0,73	0,7673	1,05	0,8531
0,10	0,5398	0,42	0,6628	0,74	0,7703	1,06	0,8554
0,11	0,5438	0,43	0,6664	0,75	0,7734	1,07	0,8577
0,12	0,5478	0,44	0,6700	0,76	0,7764	1,08	0,8599
0,13	0,5517	0,45	0,6736	0,77	0,7794	1,09	0,8621
0,14	0,5557	0,46	0,6772	0,78	0,7823	1,10	0,8643
0,15	0,5596	0,47	0,6808	0,79	0,7852	1,11	0,8665
0,16	0,5636	0,48	0,6844	0,80	0,7881	1,12	0,8686
0,17	0,5675	0,49	0,6879	0,81	0,7910	1,13	0,8708
0,18	0,5714	0,50	0,6915	0,82	0,7939	1,14	0,8729
0,19	0,5753	0,51	0,6950	0,83	0,7967	1,15	0,8749
0,20	0,5793	0,52	0,6985	0,84	0,7995	1,16	0,8770
0,21	0,5832	0,53	0,7019	0,85	0,8023	1,17	0,8790
0,22	0,5871	0,54	0,7054	0,86	0,8051	1,18	0,8810
0,23	0,5910	0,55	0,7088	0,87	0,8078	1,19	0,8830
0,24	0,5948	0,56	0,7123	0,88	0,8106	1,20	0,8849
0,25	0,5987	0,57	0,7157	0,89	0,8133	1,21	0,8869
0,26	0,6026	0,58	0,7190	0,90	0,8159	1,22	0,8883
0,27	0,6064	0,59	0,7224	0,91	0,8186	1,23	0,8907
0,28	0,6103	0,60	0,7257	0,92	0,8212	1,24	0,8925
0,29	0,6141	0,61	0,7291	0,93	0,8228	1,25	0,8944
0,30	0,6179	0,62	0,7324	0,94	0,8264	1,26	0,8962
0,31	0,6217	0,63	0,7357	0,95	0,8289	1,27	0,8980

Окончание таблицы

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,28	0,8997	1,61	0,9463	1,94	0,9738	2,54	0,9945
1,29	0,9015	1,62	0,9474	1,95	0,9744	2,56	0,9948
1,30	0,9032	1,63	0,9484	1,96	0,9750	2,58	0,9951
1,31	0,9049	1,64	0,9495	1,97	0,9756	2,60	0,9953
1,32	0,9066	1,65	0,9505	1,98	0,9761	2,62	0,9956
1,33	0,9082	1,66	0,9515	1,99	0,9767	2,64	0,9959
1,34	0,9099	1,67	0,9525	2,00	0,9772	2,66	0,9961
1,35	0,9115	1,68	0,9535	2,02	0,9783	2,68	0,9963
1,36	0,9131	1,69	0,9545	2,04	0,9793	2,70	0,9965
1,37	0,9147	1,70	0,9554	2,06	0,9803	2,72	0,9967
1,38	0,9162	1,71	0,9564	2,08	0,9812	2,74	0,9969
1,39	0,9177	1,72	0,9573	2,10	0,9821	2,76	0,9971
1,40	0,9192	1,73	0,9582	2,12	0,9830	2,78	0,9973
1,41	0,9207	1,74	0,9591	2,14	0,9838	2,80	0,9974
1,43	0,9236	1,76	0,9608	2,18	0,9854	2,84	0,9977
1,44	0,9251	1,77	0,9616	2,20	0,9861	2,86	0,9979
1,45	0,9265	1,78	0,9625	2,22	0,9868	2,88	0,9980
1,46	0,9279	1,79	0,9633	2,24	0,9875	2,90	0,9981
1,47	0,9292	1,80	0,9641	2,26	0,9881	2,92	0,9982
1,48	0,9306	1,81	0,9649	2,28	0,9887	2,94	0,9984
1,49	0,9319	1,82	0,9656	2,30	0,9893	2,96	0,9985
1,50	0,9332	1,83	0,9664	2,32	0,9898	2,98	0,9986
1,51	0,9345	1,84	0,9671	2,34	0,9904	3,00	0,99865
1,52	0,9357	1,85	0,9678	2,36	0,9909	3,20	0,99931
1,53	0,9370	1,86	0,9686	2,38	0,9913	3,40	0,99966
1,54	0,9382	1,87	0,9693	2,40	0,9918	3,60	0,999841
1,55	0,9394	1,88	0,9699	2,42	0,9922	3,80	0,999928
1,56	0,9406	1,89	0,9706	2,44	0,9927	4,00	0,999968
1,57	0,9418	1,90	0,9713	2,46	0,9931	4,50	0,999997
1,58	0,9429	1,91	0,9719	2,48	0,9934	5,00	0,999997
1,59	0,9441	1,92	0,9726	2,50	0,9938		
1,60	0,9452	1,93	0,9732	2,52	0,9941		

Примечание: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad x \geq 0$.

Квантили нормального распределения $c_p : \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{c_p} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx = p$.

p	c_p	p	c_p	p	c_p
0,50	0.000	0,860	1,080	0,9910	2,366
0,55	0,126	0,870	1,126	0,9920	2,409
0,60	0,253	0,880	1,175	0,9930	2,457
0,65	0,385	0,890	1,227	0,9940	2,512
0.70	0,524	0,900	1,282	0,9950	2,576
0,75	0,674	0,910	1,341	0,9955	2,612
0,76	0,706	0,920	1,405	0,9960	2,652
0,77	0,739	0,930	1.476	0,9965	2,697
0,78	0,772	0,940	1,555	0,9970	2,748
0,79	0,806	0,950	1,645	0,9975	2,807
0,80	0,842	0,960	1,751	0,9980	2,878
0,81	0,878	0,970	1,881	0,9985	2,968
0,82	0,915	0,975	1,960	0,9990	3,090
0,83	0,954	0,980	2,051	0,9995	3,291
0,84	0,994	0,985	2,170	0,9999	3,720
0,85	1,036	0,990	2,326	0,99999	4,265

Примечание: Если $0<p<0.5$, то $c_p = -c_{1-p}$.

Приложение 3

Распределение Стьюдента $S(n)$

Квантили распределения $t_{p,n}$: $\int\limits_{-\infty}^{t_{p,n}} s_n(x)\,dx = p$, где

$$s_n(n) = \frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

Число степеней свободы n	Вероятность, p					
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1.895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,977	4,140
16	1,337	1,746	2,120	2,584	2,921	4,015
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Приложение 4

Распределение хи-квадрат $\chi^2(n)$

Квантили распределения $\chi^2_{p,n}$: $\int\limits_{-\infty}^{\chi^2_{p,n}} k_n(x)\,dx = p$, где

$$k_n(n) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{(n/2)-1} \exp(-x/2), \quad x > 0.$$

Число степеней свободы n	Вероятность, p						
	0,001	**0,005**	**0,01**	**0,02**	**0,025**	**0,05**	**0,1**
1	0,0000016	0,000039	0,00016	0,00063	0,00098	0,004	0,016
2	0,002	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211
3	0,024	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584
4	0,091	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204
7	0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490
9	1,152	1,735	2,008	2,532	2,700	3,325	4,168
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865
11	1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578
12	2,214	3,074	3,571	4.178	4,404	5,226	6,304
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547
16	3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312
17	4.416	5.697	6.408	7,255	7,564	8,672	10,085
18	4,905	6,265	7,015	7,096	8,231	9,390	10,865
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651
20	5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041
23	7.529	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848
24	8,085	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114
28	10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18.939
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599

Продолжение таблицы

Число степеней свободы n	Вероятность, p						
	0,9	**0,95**	**0,975**	**0,98**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
1	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268'
4	7,779	9,488	11,143	11.668	13,277	14,860	18,465
5	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	23,542	26,296	28^845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	24.769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	25,989	28.809	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	37,916	41.337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	40,256	43,773	46,9.79	47,962	50,892	53,672	59,703

Примечание: При $n \geq 30$

$$\chi^2_{p,n} \approx \left(c_p + \sqrt{2n-1}\right)^2 \Big/ 2, \quad 0 < p < 1,$$

где c_p — квантиль нормального распределения (см. Приложение 2).

Приложение 5

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА (Национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

КАФЕДРА «ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА»

ОТЧЕТ
ОБ ИНДИВИДУАЛЬНОМ ЗАДАНИИ ПО КУРСУ

«Теория вероятностей и математическая статистика»

МОДЕЛИРОВАНИЕ
И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СЛУЧАЙНЫХ ДАННЫХ

Студент____________________

Группа ____________________

Руководитель _______________

Оценка ____________________

САМАРА 2012

Жулькова Е.В., Храмов А.Г.

«Теория вероятностей и математическая статистика»

План практических занятий и методические указания для преподавателя

Часть 1

Самара 2012

Оглавление

Введение

Нумерация задач (в скобках) дана по сборнику задач по теории вероятностей [1].

1. Занятие №1. Случайные события и операции над ними

Вопросы для контроля

1. *Пространство элементарных событий. Случайные события.*
2. *Операции над событиями.*
3. *Несовместные события. Полная группа событий.*

Задачи

1.1. Эксперимент состоит в однократном бросании двух игральных костей. Пусть событие A состоит в том, что сумма выпавших очков чётная, а событие B заключается в том, что выпала хотя бы одна единица. Описать пространство элементарных событий и события AB, $A+B$, $A\overline{B}$.

1.2. Описать пространство элементарных исходов, соответствующее трём независимым испытаниям, в каждом из которых может наступить успех ***У*** или неуспех (неудача) ***Н***. Выразить через элементарные исходы следующие события: $A=${в первом испытании наступил успех}; $B=${наступило ровно два успеха}; $C=${наступило не больше двух успехов}.

1.3. Эксперимент состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A = {появление герба на первой монете}; B = {появление цифры на первой монете}; C = {появление герба на второй монете}; D = {появление цифры на второй монете}; E = {появление хотя бы одного герба}; F = {появление хотя бы одной цифры}; G = {появление одного герба и одной цифры}; H = {не появление ни одного герба}; K = {появление двух гербов}. Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G+E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E+K$.

1.4. Два стрелка по очереди стреляют по мишени до первого попадания. Обозначим через A_i событие, заключающееся в поражении мишени при i-м выстреле (i = 1, 2, 3, …). Выразить через A_i события B = {поражение мишени до пятого выстрела включительно}, C = {поражение мишени первым стрелком}, D = {поражение мишени первым стрелком до (общего) пятого выстрела включительно}.

1.5. Рабочий изготовил n деталей. События: A_i = {i-ая деталь имеет дефект}, $(i=1,2,...,n)$. Выразить через A_i следующие события: а) ни одна из деталей не имеет дефектов; б) хотя бы одна деталь имеет дефект; в) только одна деталь имеет дефект; г) не более двух деталей имеют дефект; д) по крайней мере, две детали не имеют дефектов; е) две детали дефектны.

1.6. Пусть $A\subset B$. Упростить выражения: а) AB; б) $A+B$; в) ABC; г) $A+B+C$.

1.7. Когда возможны равенства: а) $A+B=\overline{A}$; б) $AB=\overline{A}$; в) $A+B=AB$?

1.8. Доказать, что следующие события достоверны:
а) $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$; б) $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})+(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

1.9. Доказать, что событие $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$ невозможно.

1.10. Найти простые выражения для событий:
а) $(A+B)(A+\overline{B})$; б) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$; в) $(A+B)(B+C)$.

1.11. Обязаны ли быть равносильными события A и B, если: а) $\overline{A}=\overline{B}$; б) $A+C=B+C$ (C – некоторое событие); в) $AC=BC$ (C – некоторое событие); г) $A(A+B)=B(A+B)$; д) $A(A-B)=B(B-A)$; е) $A(A-B)=B(A-B)$; ж) $A-B=\varnothing$?

1.12. Образуют ли полную группу событий следующие события: а) эксперимент – бросание монеты; события: {выпадение герба}, {выпадение цифры}; эксперимент – бросание двух монет; события: {выпадение двух гербов}, {выпадение двух цифр}; в) эксперимент – два выстрела по мишени; события: {ни одного попадания}, {одно попадание}, {два попадания}; г) эксперимент – два выстрела по мишени; события: {хотя бы одно попадание}, {хотя бы один промах}; д) эксперимент – вынимание карты из колоды; события: {появление карты пиковой масти}, {появление карты бубновой масти}, {появление карты крестовой масти}?

1.13. Доказать, что соотношение между произвольными событиями $(A-B)+C=(A+C)-B$ неверно. При каких событиях A,B,C это соотношение справедливо? *Вывод*: Чтобы не было путаницы целесообразно использовать для обозначения разности $A-B$ использовать эквивалентную запись $A\overline{B}$.

2. Занятие №2. Классическое определение вероятности (часть 1)

Вопросы для контроля

1. *Классическое определение вероятности.*
2. *Свойства вероятности.*
3. *Основные понятия комбинаторики.*

Задачи

2.1. **(1.2.1)** Являются ли равновозможными исходы следующих экспериментов: **(1)** эксперимент: бросание симметричной игральной кости, исходы: ω_1 – выпадение четного числа очков, ω_2 – выпадение нечетного числа очков; **(2)** эксперимент: выстрел по мишени; исходы: ω_1 – попадание; ω_2 – промах; **(3)** эксперимент: бросание двух монет; исходы: ω_1 – выпадение двух гербов, ω_2 – выпадение двух цифр; ω_3 – выпадение одного герба и одной цифры; **(4)** эксперимент: бросание двух игральных костей; исходы: $\omega_{ij} = (i, j)$ – выпадение i очков на первой кости и j на второй, $i, j = \overline{1,6}$; **(5)** эксперимент: бросание двух игральных костей; исходы: ω_i – сумма выпавших очков на двух костях равна i, $i = \overline{2,12}$; **(6)** эксперимент: вынимание двух карт из колоды; исходы: ω_1 – появление двух карт красной масти, ω_2 – появление двух карт черной масти; ω_3 – появление одной карты красной масти и одной карты черной масти ?

2.2. **(1.2.4)** В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти: а) вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах; б) ошибку в решении: $p = m/n$; $n = 6^3 = 216$; $m = C_6^3 = 20$; $p = 5/54$.

2.3. **(1.2.5)** На шести карточках написаны буквы А, А, Б, Б, Б, О. Какова вероятность того, что расположенные наугад в ряд эти карточки составят слово БАОБАБ?

2.4. **(1.2.7)** Игральная кость подбрасывается шесть раз. Найти вероятность того, что выпадет: а) различное число очков на всех костях; б) одинаковое число очков на всех костях; в) хотя бы одна шестерка; г) в точности одна шестерка; д) хотя бы две шестерки.

2.5. **(1.2.10)** Сравнить вероятности выпадения 11 и 12 очков при бросании трех игральных костей. Найти ошибку в следующем рассуждении. *Эти вероятности равны, так как каждому событию благоприятствуют по шесть элементарных исходов: {146, 155, 236, 245, 335, 344} и {156, 246, 255, 336, 345, 444}.*

2.6. **(1.2.12)** Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, большей **0,5**, сумма очков, равная **12**, выпала хотя бы один раз?

2.7. **(1.2.13)** Монета подбрасывается ***n*** раз. Найти вероятность того, что число появлений герба будет нечетным.

2.8. **(1.2.15)** Чемпион мира и претендент играют матч из определенного четного числа партий. Чемпион мира сохраняет звание чемпиона, если он выигрывает матч или сводит его вничью. Что более выгодно для претендента: играть матч из большего или из меньшего числа партий? Считать, что соперники равносильны и ничьи в партиях отсутствуют.

2.9. **(1.2.26)** *N* лиц случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что при этом два фиксированных лица окажутся рядом. Найти соответствующую вероятность, если те же лица рассаживаются в ряд.

2.10. **(1.2.28)** За круглый стол в случайном порядке садятся **5** мужчин и **5** женщин. Найти вероятность того, что два лица одинакового пола не окажутся рядом.

2.11. **(1.2.29)** Из колоды карт (52 листа) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз (*решить тремя способами: одним неправильным и двумя правильными*).

2.12. **(1.2.57)** Королевский казначей кладет в каждый из ***N*** ящиков по ***N*** монет, из которых одна монета – фальшивая. Король не доверяет казначею и проверяет по одной монете из каждого ящика. Какова вероятность того, что подлог будет обнаружен? Рассчитать вероятность для больших ***N***.

Задачи повышенной сложности

2.13. Написать сочинение на тему расчета вероятностей покерных комбинаций (или вероятностей выигрышей в «Спортлото»).

3. Занятие №3. Классическое определение вероятности (часть 2)

Вопросы для контроля
1. *Классическое определение вероятности.*
2. *Основные понятия комбинаторики.*
3. *Урновая схема.*
4. *Формула Стирлинга.*

Задачи

3.1. **(1.2.37)** Из урны, в которой находятся десять красных и пять синих шаров, наугад вынимаются три шара. Каков состав шаров по цвету извлечь наиболее вероятно.

3.2. **(1.2.34)** Перемешанная колода из 52 карт делится пополам. Найти вероятность того, что: а) число черных и красных карт в обеих половинах будет одинаковым; б) в каждой половине будет по два туза.

3.3. **(1.2.38)** Из урны, содержащей шары с номерами $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$ раз вынимается шар, и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Решить эту же задачу, если выбор $\boldsymbol{k}$ шаров производится без возвращения.

3.4. **(1.2.39)** В урне находятся $\boldsymbol{a}$ белых и $\boldsymbol{b}$ черных шаров. Шары без возвращения извлекаются из урны. Найти вероятность того, что $\boldsymbol{k}$-й вынутый шар оказался белым.

3.5. **(1.2.40)** Только один из $\boldsymbol{n}$ ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно $\boldsymbol{k}$ ключей для открывания двери.

3.6. **(1.2.49)** $\boldsymbol{N}$ орудий производят стрельбу по $\boldsymbol{N}$ целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная орудием, поражается наверняка. Найти вероятность поражения всех $\boldsymbol{N}$ целей.

3.7. **(1.2.48)** Каждый из $\boldsymbol{N}$ шаров наугад кладут в один из $\boldsymbol{N}$ ящиков. $\boldsymbol{M}$ ящиков оказываются пустыми. Найти наиболее вероятное значение $\boldsymbol{M}$.

3.8. **(1.2.47)** Найти вероятность того, что при размещении $\boldsymbol{M}$ шаров по $\boldsymbol{N}$ ящикам заданный ящик будет содержать ровно $\boldsymbol{K}$ ($\mathbf{0} \le \boldsymbol{K} \le \boldsymbol{M}$) шаров (все размещения равновероятны).

3.9. Найти вероятности покерных комбинаций (а) «одна пара», (б) «тройка» (в колоде **52** листа).

3.10. **(1.2.42)** В лотерее $\boldsymbol{n}$ билетов, из которых $\boldsymbol{m}$ выигрышные. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет $\boldsymbol{k}$ билетов?

3.11. **(1.2.36)** Из урны, в которой находятся три красных, три зеленых и три синих шара, наугад вынимаются три шара. Какова вероятность того, что вынутые шары имеют различные цвета.

3.12. Сравнить между собой вероятности угадывания ровно трех номеров в Спортлото «**5** из **36**» и «**6** из **49**».

3.13. **(1.2.52)** В шкафу $\boldsymbol{n}$ пар ботинок. Из них случайно выбираются $\mathbf{2}\boldsymbol{r}$ ботинок ($\mathbf{2}\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$). Найти вероятность того, что: а) среди вынутых ботинок нет парных; б) имеется ровно одна пара.

4. Занятие №4. Геометрическое определение вероятности

Вопросы для контроля
1. *Геометрическое определение вероятности.*

Задачи

4.1. (1.3.8) На окружности наугад поставлены три точки. Чему равна вероятность того, что эти точки являются вершинами *тупоугольного* треугольника?

4.2. Чему равна вероятность того, что пощадь треугольника с вершинами, наугад расположенными на окружности, меньше трети площади круга?

4.3. **(1.3.11)** На бесконечную «шахматную доску» со стороной квадрата $\boldsymbol{a}$ наудачу бросается монета радиуса $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}/\mathbf{2}$. Найти вероятности того, что: (*а*) монета попадет целиком внутрь одного квадрата; (*б*) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

4.4. **(1.3.12)** Считая, что монета представляет собой цилиндр с высотой, равной половине диаметра, найти вероятность того, что при бросании монеты она упадет на ребро (удар при бросании абсолютно неупругий, момент вращения отсутствует).

4.5. **(1.3.16)** Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит ***1***, будет больше ***1***?

4.6. **(1.3.17)** На отрезок наудачу брошено две точки, разбившие его на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?

4.7. **(1.3.19)** *Задача о встрече.* Двое договорились встретиться на отрезке времени $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T}]$. Первый пришедший ждет второго время $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l} < \boldsymbol{T}$). Найти вероятность того, что встреча произойдет.

4.8. **(1.3.26)** На поверхности шара берут наудачу две точки и соединяют меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что дуга не превзойдет $\boldsymbol{\alpha}$.

4.9. В круге произвольно проведена хорда. Определить вероятность того, что длина хорды будет меньше радиуса круга. *Разобрать различные математические трактовки «произвольности» проведения хорды (3 варианта).*

4.10. На смежных сторонах квадрата наугад ставят две точки. Какова вероятность того, что расстояние между этими точками будет меньше стороны квадрата?

Задачи повышенной сложности

4.11. Внутрь квадрата наудачу бросают две точки. Какова вероятность того, что расстояние между этими точками будет меньше стороны квадрата?

4.12. Внутрь круга наудачу бросают две точки. Какова вероятность того, что расстояние между этими точками будет меньше радиуса круга?

5. Занятие №5. Аксиомы теории вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий

Вопросы для контроля

1. *Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство.*
2. *Теорема сложения вероятностей. Формула вероятности суммы событий.*
3. *Условная вероятность. Умножение вероятностей.*
4. *Независимость событий (попарная и в совокупности).*
5. *Несовместные события. Полная группа событий.*

Задачи

5.1. **(1.4.1)** Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ – произвольное счетное множество, $\{p_n\}$, n = 1,2,3,… – последовательность таких неотрицательных чисел, что $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, F – система всех подмножеств Ω. Для каждого $A \in \mathsf{F}$ положим $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$. Доказать, что $(\Omega, \mathsf{F}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство.

5.2. **(1.4.4, 1.4.5)** Используя аксиомы и свойства вероятности, доказать, что
$\mathrm{P}(A-B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$, $\mathrm{P}(A \Delta B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\,\mathrm{P}(AB)$, $\mathrm{P}(AB) \le \mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(A+B) \le \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$,
$\max[\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)] \le \mathrm{P}(A+B) \le 2\max[\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)]$.

5.3. **(1.4.6)** Пусть вероятность каждого из событий *A* и *B* равна **1/2**. Доказать, что $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(\overline{A}\,\overline{B})$.

5.4. **(1.4.11, 1.4.12)** Доказать, что $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$, $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \ge \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - (n-1)$.

5.5. **(1.4.21)** Являются ли независимыми два события, образующие полную группу событий? *Показать, что есть исключение из общего решения.*

5.6. **(1.4.23)** Из колоды в 52 карты наугад извлекают одну карту. Являются ли независимыми события: $\boldsymbol{A}$ = {появление карты пиковой масти} и $\boldsymbol{B}$ = {появление дамы}. Изменится ли результат, если в колоду добавить две «пустых» карты (джокера)?

5.7. **(1.4.33)** Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятности попаданий при этом равны **0,4**; **0,6**; **0,7**. Найти вероятность того, что в мишени будет: а) ровно одна пробоина; б) хотя бы одна пробоина.

5.8. **(1.4.37)** Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна **0,2**, а для второго **0,3**. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

5.9. **(1.4.48)** Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет единица, если на трех костях выпали разные грани?

5.10. **(1.4.61)** Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от 1 до M. Шары извлекаются из урны по одному без возвращения. Найти вероятность того, что не будет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Найти предельное значение этой вероятности при $\mathrm{M} \to \infty$.

5.11. **(1.4.63)** Имеется группа из $\boldsymbol{k}$ космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью $\boldsymbol{p}$. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга $\boldsymbol{m}$ радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

5.12. Два из трех независимо работающих устройств отказали. Найти вероятность того, что отказали первое и второе устройство, если вероятности отказа устройств равны, соответственно, **10%**, **20%** и **30%**.

Задачи повышенной сложности

5.13. **(1.4.13)** Доказать, что для любых двух событий A и B выполняется соотношение $\left|\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\right| \le 1/4$.

Решение. «Лемма»: $x(1-x)=x-x^2=1/4-\left(x-1/2\right)^2 \le 1/4\ \forall x$.

Обозначения: $x=P(A\overline{B})$, $y=P(\overline{A}B)$, $z=P(AB)$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z\le 1$).

1. Доказываем, что $P(AB)-P(A)P(B)\le 1/4$. $P(A)\ge P(AB)$, $P(B)\ge P(AB)$, $P(A)P(B)\ge P^2(AB)$,

$P(AB)-P(A)P(B)\le P(AB)-P^2(AB)=z-z^2\le 1/4$ (по «лемме»).

2. Доказываем, что $P(AB)-P(A)P(B)\ge -1/4$. $A=AB+A\overline{B}$, $B=AB+\overline{A}B$.

$P(AB)-P(A)P(B)=z-(z+x)(z+y)=z(1-x-y-z)-xy\ge -xy\ge -1/4$, так как

$xy\le x(1-x-z)\le x(1-x)\le 1/4$ (по «лемме»).

5.14. **(1.4.62)** В электропоезд, состоящий из $\boldsymbol{n}$ вагонов, входят $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k \ge n}$) пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.

Решение: Речь идёт о событии B = {нет пустых вагонов}. Введём в рассмотрение событие A_i = {i-й вагон пустой}, тогда вероятность события $\overline{B}=A_1+\ldots+A_n$ = {хотя бы один вагон пустой} может быть найдена по общей формуле вероятности суммы событий:

$$\mathrm{P}\left(A_1+\ldots+A_n\right)=\sum_i \mathrm{P}\left(A_i\right)-\sum_{i<j}\mathrm{P}\left(A_iA_j\right)+\sum_{i<j<m}\mathrm{P}\left(A_iA_jA_m\right)-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\mathrm{P}\left(A_1A_2\ldots A_n\right).$$

6. Занятие №6. Формула полной вероятности и формула Байеса

Вопросы для контроля

1. *Полная группа событий. Формула полной вероятности.*
2. *Априорные и апостериорные вероятности. Формула Байеса.*

Задачи

6.1. **(1.5.1)** Две урны $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ содержат цветные шары в следующем составе: $\boldsymbol{A}$ – **5** зеленых и 7 красных, $\boldsymbol{B}$ – **4** зеленых и **2** красных. Какова вероятность вынуть зеленый шар, если: а) сначала случайно выбирается урна и затем вынимается из нее шар; б) шары из двух урн перекладываются в третью и шар вынимается из нее?

6.2. **(1.5.10)** По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: ***AAAA***, ***BBBB***, ***CCCC***. Известно, что вероятности каждой из последовательностей равны соответственно **0,3**; **0,4**; **0,3**. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью **0,6**. Вероятность того, что переданная буква будет принята за каждую из двух оставшихся, равна **0,2**. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано ***AAAA***, если на приемном устройстве получено ***ABCA***.

6.3. **(1.5.15)** Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

6.4. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Оказалось, что вторую кость можно приставить к первой. Определить вероятность того, что одна из выбранных костей была «дублем».

6.5. **(1.5.16)** Имеется **10** урн, в каждой из которых **3** белых шара и 7 черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; затем из второй в третью – один шар и т.д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

6.6. **(1.5.21)** Известно, что **95%** выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает годной стандартную продукцию с вероятностью **0,96** и нестандартную с вероятностью **0,06**. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль (признанное годным), удовлетворяет стандарту.

6.7. При бросании трех игральных костей выпало **11** очков. Какова вероятность того, что на одной из костей выпала «шестерка»?

6.8. Шесть граней куба окрашивают в различные цвета и распиливают его на **27** одинаковых кубиков. У двух выбранных наугад кубиков имеются грани, окрашенные в один цвет. Какова вероятность того, один из выбранных кубиков - угловой?

Задачи повышенной сложности

6.9. **(1.5.24)** Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью ***p***. Найти вероятности того, что из трех целей будут поражены ровно **0, 1, 2, 3** цели.

Решение. Обозначения событий: A_m = {поражено ровно *m* целей}, $m = 0,1,2,3$; B_n = {орудие *n* поразило цель}, $n = 1,2,3$; система гипотез: H_k = {стрельба проводилась ровно по *k* целям}, $k = 1,2,3$. Искомые вероятности вычисляются по формуле полной вероятности:

$$P(A_m) = P(H_1)P(A_m \mid H_1) + P(H_2)P(A_m \mid H_2) + P(H_3)P(A_m \mid H_3),\ m = 0,1,2,3.$$

Вероятности гипотез: $P(H_1) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$, $P(H_3) = \frac{3!}{27} = \frac{2}{9}$, $P(H_2) = 1 - P(H_1) - P(H_3) = \frac{2}{3}$.

0. $P(A_0 \mid H_1) = P(A_0 \mid H_2) = P(A_0 \mid H_3) = (1-p)^3$, $P(A_0) = (1-p)^3$.

1. $P(A_1 \mid H_1) = P(B_1 + B_2 + B_3) = 1 - P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3) = 1-(1-p)^3$,

$P(A_1 \mid H_2) = P\left((B_1 + B_2)\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2 B_3\right) = p(1-p)(3-2p)$,

$P(A_1 \mid H_3) = P\left(\overline{B}_1\overline{B}_2 B_3 + \overline{B}_1 B_2 \overline{B}_3 + B_1\overline{B}_2\overline{B}_3\right) = 3p(1-p)^2$,

$$P(A_1) = \frac{1}{9}\left[1-(1-p)^3\right] + \frac{2}{3}\left[p(1-p)(3-2p)\right] + \frac{2}{9}\left[3p(1-p)^2\right] = p\left(3 - 5p + \frac{19}{9}p^2\right).$$

Здесь и далее при вычислении условных вероятностей $P(A_m \mid H_k)$ используется только один из вариантов выбора целей орудиями, так как множество вариантов было учтено при расчёте вероятностей гипотез $P(H_k)$.

2. $P(A_2 \mid H_1) = 0$, $P(A_2 \mid H_2) = P\left((B_1 + B_2)B_3\right) = p^2(2-p)$,

$P(A_2 \mid H_3) = P\left(\overline{B}_1 B_2 B_3 + B_1\overline{B}_2 B_3 + B_1 B_2 \overline{B}_3\right) = 3p^2(1-p)$,

$$P(A_2) = \frac{1}{9}\cdot 0 + \frac{2}{3}\left[p^2(2-p)\right] + \frac{2}{9}\left[3p^2(1-p)\right] = 2p^2\left(1 - \frac{2}{3}p\right).$$

3. $P(A_3 \mid H_1) = P(A_3 \mid H_2) = 0$, $P(A_3 \mid H_3) = P(B_1B_2B_3) = p^3$, $P(A_3) = \frac{2}{9}p^3$.

Вычисления можно оформить в виде следующей таблицы:

H_k	$P(H_k)$	$P(A_m \mid H_k)$				Σ
		A_0	A_1	A_2	A_3	
H_1	$1/9$	$(1-p)^3$	$1-(1-p)^3$	0	0	1
H_2	$2/3$	$(1-p)^3$	$p(1-p)(3-2p)$	$p^2(2-p)$	0	1
H_3	$2/9$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3	1
$P(A_m)$		$(1-p)^3$	$p\left(3-5p+19p^2/9\right)$	$2p^2\left(1-2p/3\right)$	$2p^3/9$	1

Тот факт, что события A_0, A_1, A_2, A_3 образуют полную группу событий, можно использовать для проверки вычислений условных и полных вероятностей (последний столбец в таблице).

7. Занятие №7. Схема испытаний Бернулли. Предельные теоремы

Вопросы для контроля

1. *Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли.*
2. *Локальная предельная теорема Муавра–Лапласа.*
3. *Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа.*
4. *Функции Лапласа* $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$.
5. *Теорема Пуассона.*
6. *Независимые испытания с несколькими исходами.*

Задачи

7.1. **(1.6.4)** Что вероятнее: выиграть у равносильного противника **3** партии из **4** или **5** из **8** (ничьих не бывает)?

7.2. **(1.6.8)** В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал **6** очков (выигрыш – **1** очко, проигрыш – **0** очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает ***k*** очков, ***k* = 0, 1, …, 5**.

7.3. **(1.6.16)** Вероятность появления некоторого события хотя бы один раз при четырех независимых испытаниях равна **0,59**. Какова вероятность появления этого события при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

7.4. **(1.6.18)** Для поражения цели производится серия независимых выстрелов. Цель считается пораженной, если в неё попало не менее двух снарядов. Сколько следует произвести выстрелов для поражения цели с вероятностью не менее **0,98**, если вероятность попадания снаряда в цель при одном выстреле равна **0,3**?

7.5. **(1.6.21)** Театр, вмещающий **1000** человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в **99** случаев из **100** все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: (а) зрители приходят парами; (б) зрители приходят поодиночке. Предполагается, что зрители выбирают входы с равными вероятностями.

7.6. **(1.6.29)** Брошено 6 правильных игральных костей. Какова вероятность выпадения **«1»** (а) хотя бы один раз; (б) ровно один раз; (в) ровно два раза? Найти точные значения и сравнить с результатами, полученными по теореме Пуассона.

7.7. **(1.6.30)** Партия из **100** изделий подвергается выборочному контролю. Партия бракуется, если среди пяти проверяемых изделий обнаруживается хотя бы одно негодное. Какова вероятность того, что партия будет забракована, если в ней содержится **5%** негодных изделий?

Решение. $N=100$. Пусть событие A = {партия изделий забракована}. Будем искать вероятность противоположного события: $P(\overline{A})$.

<u>Точное</u> решение получается при использовании урновой схемы:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{95}^5 C_5^0}{C_{100}^5}=1-\frac{95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}=\mathbf{0,2304100}\ldots$$

<u>Приближенное</u> решение получается при использовании схемы независимых испытаний Бернулли: $n=5$; $m=0$; $p=0,05$; $q=0,95$.

Тогда $P(\overline{A})=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=C_5^0 0,05^0 0,95^5=0,95^5=0,7737809\ldots$, $P(A)=1-P(\overline{A})=\mathbf{0,2262190}\ldots$

Приближенность этого решения объясняется некорректностью применения схемы независимых испытаний Бернулли, так испытания в нашем случае не являются независимыми, а вероятности успеха неодинаковы при испытаниях. При неограниченном возрастании N погрешность приближенного решения становится сколь угодно малой.

Приближение Пуассона для схемы независимых испытаний Бернулли:

$n = 5$; $m = 0$; $p = 0,05$; $\lambda = np = 5 \cdot 0,05 = 0,25$.

$$P(\overline{A}) = P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{0,25^0}{0!} e^{-0,25} = 0,7788007\ldots, \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{0,2211992}\ldots$$

Видим, что погрешность этого решения ещё больше.

Приближение Муавра–Лапласа для схемы независимых испытаний Бернулли:

$n = 5$; $m = 0$; $p = 0,05$; $q = 0,95$; $np = 0,25$; $npq = 0,2375$.

$$P(\overline{A}) = P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left[-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0,2375}} \exp\left[-\frac{(0-0,25)^2}{2 \cdot 0,2375}\right] = 0,7176856\ldots,$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{0,2823143}\ldots$$

Совсем плохое приближение, так как n недостаточно велико.

7.8. **(1.6.33)** Имеется тесто в количестве для изготовления **100** булок с изюмом, который берется в количестве **500** изюминок и замешивается в тесто. Какова вероятность того, что в наугад выбранной булке будет хотя бы одна изюминка? (Решить двумя способами: с использованием теоремы Пуассона и без нее).

7.9. **(1.6.40)** Пусть $\boldsymbol{m}$ – число успехов при проведении $\boldsymbol{n}$ испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха $\boldsymbol{p}$. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы относительная частота $\boldsymbol{m/n}$ успехов отличалась от вероятности успеха $\boldsymbol{p}$ не более, чем на $\boldsymbol{\delta}$, с вероятностью $\boldsymbol{\beta}$?

7.10. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью **0,99** утверждать, что «шестерка» выпала не менее **10** раз?

7.11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы вероятность отклонения относительной частоты выпадения «герба» от истинного значения вероятности более, чем на **0,02**, была не менее **95%**?

8. Занятие №8. Повторение. Подготовка к контрольной работе

Задачи

8.1. *2D игла Бюффона*. Игла единичной длины наугад бросается на бесконечную «шахматную доску» с единичным размером клеток. Найти вероятность того, что игла окажется целиком внутри клетки.
Указание. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A}$ = {игла внутри клетки}, $\boldsymbol{B}$ = {игла не пересекает вертикальную линию}, $\boldsymbol{C}$ = {игла не пересекает горизонтальную линию}, $\boldsymbol{A=BC}$. Так события $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ независимы, то $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{B})\mathbf{P}(\boldsymbol{C}) = \mathbf{P}^2(\boldsymbol{B})$. Вероятность $\mathbf{P}(\boldsymbol{B})$ рассчитывается так же, как и в стандартной задаче про иглу Бюффона [1].

8.2. На периметре квадрата наугад ставят две точки. Какова вероятность того, что расстояние между этими точками будет меньше длины стороны квадрата?
Решение. Рассматриваем «единичный» квадрат. Событие $\boldsymbol{A}$ = {расстояние между точками меньше длины стороны квадрата}. Система гипотез: $\boldsymbol{H_1}$ = {точки попали на одну сторону квадрата}, $\boldsymbol{H_2}$ = {точки попали на две смежные стороны квадрата}, $\boldsymbol{H_3}$ = {точки попали на две противоположные стороны квадрата}. На самом деле, события $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$ не являются попарно несовместными, так как по меньшей мере одна из точек может попасть в вершину квадрата. Почему мы можем игнорировать этот факт? $\mathbf{P}(\boldsymbol{H_1}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{H_3}) = \mathbf{1/4}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{H_2}) = \mathbf{1/2}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}) = \mathbf{1}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3}) = \mathbf{0}$. Для расчета $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})$ воспользуемся геометрическим определением вероятности: $\boldsymbol{\Omega} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}): \boldsymbol{x}\in[0;1], \boldsymbol{y}\in[0;1]\}$, $A = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}): \boldsymbol{x}\in[0;1], \boldsymbol{y}\in[0;1], \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2<1\}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{\pi/4}$. Тогда $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{H_1})\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{H_2})\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{H_2})\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}) = \mathbf{(2+\pi)/8}$.

8.3. В ящике находятся $\boldsymbol{N}$ шаров, причем каждый из шаров может быть белым или черным с одинаковой вероятностью. $\boldsymbol{N}$ раз производится извлечение шара с возвращением. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?
Решение. Событие A = {черные шары не извлекались}, система гипотез: H_m = {в ящике находятся m белых шаров}, m = 0, 1, 2, …, N. По условию задачи требуется найти условную вероятность $P(H_N|A)$. Вероятности гипотез рассчитываются по урновой схеме ($p = q = 1/2$):

$P(H_m)=P_N(m)=C_N^m p^m q^{N-m}=C_N^m/2^N$. Условные вероятности: $P(A|H_m)=(m/N)^N$. По формуле полной вероятности: $P(A)=\sum_{m=0}^{N}P(H_m)P(A|H_m)=\sum_{m=0}^{N}\frac{C_N^m}{2^N}(m/N)^N=\frac{N!}{(2N)^N}\sum_{m=0}^{N}\frac{m^N}{m!(N-m)!}$.

Искомую вероятность $P(H_N|A)$ находим по формуле Байеса:

$$P(H_N\,|\,A)=\frac{P(H_N)P(A|H_N)}{\sum_{m=0}^{N}P(H_m)P(A|H_m)}=\frac{\frac{C_N^N}{2^N}\cdot 1}{\frac{N!}{(2N)^N}\sum_{m=0}^{N}\frac{m^N}{m!(N-m)!}}=\frac{N^N}{N!\sum_{m=0}^{N}\frac{m^N}{m!(N-m)!}}.$$

Задачи повышенной сложности

8.4. **(1.6.37)** На факультете **500** студентов. Считая, что в году **365** дней, найти (1) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, (2) вероятность того, что ровно три студента отмечают день рождения 1 января, (3) вероятность того, что найдутся три студента, отмечающие день рождения 1 января, (4) вероятность того, что не найдётся трёх студентов с одним и тем же днем рождения.

Решение.

Для (1) – (3) используем схему независимых испытаний Бернулли. Успехом является рождение студента 1 января, число испытаний $n=500$, вероятность успеха $p=1/365$, вероятность неудачи $q=364/365$.

По Формуле Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ – вероятность рождения ровно k студентов 1 января.

Приближение Пуассона: $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda=np$.

$$P_{500}(0)=\left(364/365\right)^{500}=0{,}253664\ldots,\quad P_{500}(0)\approx\frac{\left(\frac{500}{365}\right)^0}{0!}e^{-\frac{500}{365}}=0{,}254141\ldots$$

$$P_{500}(1)=500\cdot\left(1/365\right)^1\cdot\left(364/365\right)^{499}=0{,}348440\ldots,\quad P_{500}(1)\approx\frac{\left(\frac{500}{365}\right)^1}{1!}e^{-\frac{500}{365}}=0{,}348139\ldots$$

$$P_{500}(2)=\frac{500\cdot 499}{2}\cdot\left(1/365\right)^2\cdot\left(364/365\right)^{498}=0{,}238834\ldots,\quad P_{500}(2)\approx\frac{\left(\frac{500}{365}\right)^2}{2!}e^{-\frac{500}{365}}=0{,}238451\ldots$$

$$P_{500}(3)=\frac{500\cdot 499\cdot 498}{2\cdot 3}\cdot\left(1/365\right)^3\cdot\left(364/365\right)^{497}=0{,}108919\ldots,\quad P_{500}(3)\approx\frac{\left(\frac{500}{365}\right)^3}{3!}e^{-\frac{500}{365}}=0{,}108882\ldots$$

(1) Наиболее вероятное число успехов $k_0=\left[np+p\right]=\left[500\cdot\frac{1}{365}+\frac{1}{365}\right]=\mathbf{1}$.

(2) $P_{500}(3)\approx\mathbf{0{,}108919}$. Приближение Пуассона: $P_{500}(3)\approx\mathbf{0{,}108882}$.

(3) $P(k\ge 3)=1-P_{500}(0)-P_{500}(1)-P_{500}(2)\approx\mathbf{0{,}159062}$. Приближение Пуассона: $P(k\ge 3)\approx\mathbf{0{,}159270}$.

(4) Пусть A = {не найдётся трёх студентов с одним и тем же днем рождения}. Используем схему независимых испытаний с несколькими исходами. Испытанием является день рождения студента. Всего испытаний $n=500$. Результатом испытания является один из $m=365$ дней с одинаковой вероятностью $p_i=1/m,\ i=1,2,3,\ldots,m$. По формуле вероятностей в схеме независимых испытаний с несколькими исходами: $\mathrm{P}_n\left(k_1,k_2,\ldots,k_m\right)=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}\left(\frac{1}{m}\right)^n$,

где k_i – число студентов, родившихся в i-й день года, $i=1,2,3,\ldots,m$; $\sum_{i=1}^{m}k_i=n$.

$$\mathrm{P}\left(A\right)=\sum_{\substack{k_1<3,k_2<3,\ldots,k_m<3\\k_1+k_2+\ldots+k_m=n}}\mathrm{P}_n\left(k_1,k_2,\ldots,k_m\right)=\frac{n!}{m^n}\sum_{\substack{k_1<3,k_2<3,\ldots,k_m<3\\k_1+k_2+\ldots+k_m=n}}\frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_m!}=\frac{500!}{365^{500}}\sum_{k=135}^{250}\frac{C_{365}^kC_{365-k}^{500-2k}}{2^k}=\mathbf{6{,}3225\times 10^{-49}},$$

так как, в соответствии со схемой $\overbrace{\underbrace{000\ldots0}_{k-135}\underbrace{111\ldots1}_{500-2k}\underbrace{222\ldots2}_{k}}^{365}$, $k_{\min}=135$, $k_{\max}=250$, количество вариантов распределения дней рождения, соответствующих событию A при фиксированном значении k (количество «двойных» дней рождения), равно $C_{365}^kC_{365-k}^{500-2k}$.

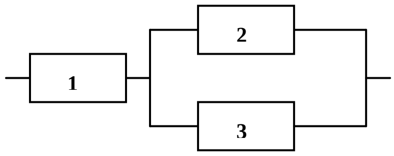
Текст программы для вычисления $\frac{500!}{365^{500}}\sum_{k=135}^{250}\frac{C_{365}^{k}C_{365-k}^{500-2k}}{2^k}$ в системах **Scilab** (http://www.scilab.org/) или **MatLab**:

```
function x = C(n,m)
  x = 1; for k = 1:m; x = x * (n-k+1)/k; end
endfunction

function p = P()
  p = 0; m = 365; n = 500;
  for k = n-m:n/2; p = p + C(m,k)*C(m-k,n-2*k)/2^k; end
  for k = 1:n; p = p*k/m; end
endfunction

-->printf("%g",P())
6.32251e-049
```

9. Занятие №9. Контрольная работа №1

Вариант 1

1. На шахматную доску произвольным образом поставили две ладьи. Какова вероятность того, что ладьи находятся под ударом друг друга.
2. Товарный и пассажирский поезда должны пройти через стрелку с 11 часов до 11 часов 30 минут. Время прихода поезда независимо и равновозможно. Товарный поезд проходит стрелку за 10 минут, а пассажирский - за 5 минут. Светофор переключается с красного на зеленый свет через 2 минуты после прохода поезда. Найти вероятность того, что один из поездов подъедет к стрелке на красный свет.
3. Доля годных (не бракованных) изделий в продукции первого завода составляет 85%, в продукции второго завода – 90%, в продукции третьего – 95%. Берут 2000 изделий первого завода, 1000 изделий второго, 3000 изделий третьего и смешивают в одну кучу. Какова вероятность того, что выбранное наугад из этой кучи изделие окажется бракованным?
4. Вероятность события в схеме Бернулли p=0,4; число испытаний n = 1000; $P(m_1 \le m \le m_2) = 0{,}99$. Найти m_1 и m_2.
5. На схеме вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}7$. Элементы работают независимо друг от друга. Схема не работает. Найти вероятность того, что отказал 2-й элемент.



Вариант 2

1. Из последовательности чисел 1, 2, …, n наугад выбирают два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ – целое число?
2. Два теплохода должны подойти к одному причалу. Время прихода каждого из них равновозможно в течение суток и не зависит от времени прихода другого. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода 1 час, а второго – 2 часа.
3. Доля брака для первого станка составляет 5%, для второго – 10%. Берут 400 деталей, изготовленных на первом станке, 600 деталей, изготовленных на втором, и смешивают в одну кучу. Взятая наугад из кучи деталь оказалась годной (не бракованной). На каком станке вероятнее всего она изготовлена?
4. Вероятность события в схеме Бернулли p = 0,6. Вероятность того, что относительная частота наступления события $\frac{m}{n}$ отклонится от p в ту или другую сторону не больше, чем на $\delta = 0{,}02$: $P\left(\left|p - \frac{m}{n}\right| \le \delta\right) = 0{,}95$. Сколько испытаний n необходимо для этого провести?
5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления второго мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет четверо детей.

Вариант 3

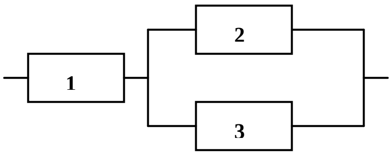
1. Восемь команд спортсменов разбиваются случайным образом на две группы по четыре команды в каждой группе. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в одной группе.

2. Девушка и юноша договорились встретиться у кинотеатра с 17 часов до 17 часов 30 минут. Если девушка придет раньше юноши, она будет ждать не более 10 минут, а юноша обязательно дождется девушки. Какова вероятность их встречи?

3. Доля брака для первого станка составляет 15%, для второго – 10%, для третьего – 5%. Берут 500 деталей, изготовленных на первом станке, 300 деталей, изготовленных на втором, 200 деталей, изготовленных на третьем, и смешивают в одну кучу. Какова вероятность того, что взятая наугад из кучи деталь окажется годной (не бракованной)?

4. Известно, что 30% призывников носят обувь 42 размера. Сколько пар обуви указанного размера необходимо иметь на складе воинской части, чтобы с вероятностью 0,9 обеспечить всех таких призывников, если планируется прибытие 200 новобранцев?

5. На схеме вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}6$; $p_3 = 0{,}5$. Элементы работают независимо друг от друга. Схема не работает. Найти вероятность того, что отказал 1-й элемент.



Вариант 4

1. Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение ¼ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

3. Доля годных (не бракованных) изделий в продукции первого завода составляет 90%, в продукции второго завода – 95%. Берут 4000 изделий первого завода, 1000 изделий второго и смешивают в одну кучу. Взятое наугад из кучи изделие оказалось бракованным. На каком заводе вероятнее всего оно изготовлено?

4. Число испытаний в схеме Бернулли $n = 10$, вероятность успеха $p = 0{,}7$. Найти вероятность того, что число успехов будет не менее 9. Сравнить с оценкой вероятности, полученной с использованием локальной предельной теоремы Муавра-Лапласа.

5. Дуэль снайперов. Сначала стреляет первый снайпер и с вероятностью p_1 убивает второго. В случае промаха первого стреляет второй снайпер и с вероятностью p_2 убивает первого. В случае промаха второго стреляет опять первый снайпер и убивает второго с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих исходов дуэли: A = {убит первый снайпер}, B = {убит второй снайпер}, C = {убит хотя бы один из снайперов}, D = {убит ровно один снайпер}, E = {оба снайпера остались живы}.

10. Занятие №10. Случайные величины. Функция распределения. Дискретные случайные величины

Работа над ошибками контрольной работы

1. Вероятность рождения мальчика равна **0,515**. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления **второго** мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет **четверо** детей.
   Решение: B = {в семье будет четверо детей}, A_i = {i-й ребенок – мальчик}, i = 1, 2, 3, 4. События A_i считаем независимыми, $P(A_i) = p = 0{,}515$; $B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4$;
   $$P(B) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4) = 3p^2(1-p)^2 \approx 0.187\,.$$

2. Из последовательности чисел 1, 2, …, n наугад выбирают два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ – целое число?
   Решение: Классическое определение вероятности. Множество элементарных событий (упорядоченных пар

чисел) $\Omega = \{(x, y): 1 \le x \le y \le n\}$, $|\Omega| = C_n^2$. Событие *A* = {одно из чисел меньше *k*, а другое больше *k*},

$A = \{(x, y): 1 \le x \le y \le n,\ x < k,\ y > k\}$, $|A| = (k-1)(n-k)$. Тогда $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{(k-1)(n-k)}{C_n^2} = \dfrac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

3. Известно, что 30% призывников носят обувь 42 размера. Сколько пар обуви указанного размера необходимо иметь на складе воинской части, чтобы с вероятностью 0,9 обеспечить всех таких призывников, если планируется прибытие 200 новобранцев?

   Решение: Схема испытаний Бернулли: ***n*** = 200; ***p*** = 0,3; ***q*** = 0,7. Обозначим через ***x*** искомое количество пар обуви на складе, а через ***k*** – количество призывников, носящих обувь 42 размера (число «успехов» в схеме Бернулли). По условию задачи $P(k \le x) = 0{,}9.$ Используем интегральную формулу Муавра–Лапласа:

   $\mathrm{P}(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0\left(\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ при $k_1 = 0$, $k_2 = x$.

   $P(k \le x) = P(0 \le k \le x) \approx \Phi_0\left(\dfrac{x-60}{\sqrt{42}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{0-60}{\sqrt{42}}\right) \approx \Phi_0\left(\dfrac{x-60}{\sqrt{42}}\right) + \dfrac{1}{2}$; $\Phi_0\left(\dfrac{x-60}{\sqrt{42}}\right) \approx 0{,}4$;

   По таблице функции Лапласа $\Phi_0(\cdot)$ находим $\dfrac{x-60}{\sqrt{42}} \approx 1{,}28155$, $x \approx 68{,}305$. *Ответ*: **69**.

4. Вероятность события в схеме Бернулли p = 0,6. Вероятность того, что относительная частота наступления события $\dfrac{m}{n}$ отклонится от *p* в ту или другую сторону не больше, чем на $\delta = 0{,}02$: $P\left(\left|p - \dfrac{m}{n}\right| \le \delta\right) = 0{,}95$.

   Сколько испытаний *n* необходимо для этого провести?

   Решение: Используем интегральную формулу Муавра–Лапласа:

   $P\left(\left|p - \dfrac{m}{n}\right| \le \delta\right) = P\left(np - n\delta \le m \le np + n\delta\right) \approx \Phi_0\left(\dfrac{np + n\delta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{np - n\delta - np}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi_0\left(\delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$;

   $\Phi_0\left(\delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0{,}475$; по таблице функции Лапласа $\Phi_0(\cdot)$: $0{,}02\sqrt{\dfrac{n}{0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 1{,}95996$; $n \approx 2304{,}86591$.

   Ответ: $n = \mathbf{2305}$.

Вопросы для контроля

1. *Определение случайной величины.*
2. *Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения.*
3. *Дискретная случайная величина. Ряд распределения.*
4. *Функция распределения дискретной случайной величины.*
5. *Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.*

Задачи

10.1. **(2.1.6)** Случайная величина X полагается равной **0**, если на правильной игральной кости в результате подбрасывания появляется нечетная грань, и **1**, если появляется четная грань. Построить ряд распределения, записать выражение и построить график функции распределения случайной величины X. Вычислить вероятности событий: ($X < 3/2$), ($X < 1/2$), ($X > 1/3$), ($X < 1$), ($X \ge 1$), ($X = 1$).

10.2. **(2.1.13)** Дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0	2	4	6
P	0,2	0,3	0,3	0,2

Найти математическое ожидание $\mathbf{M}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и вероятность $\mathbf{P}\left(X < \mathbf{M}X\right)$.

10.3. **(2.1.15)** В урне имеется 4 шара с номерами 1, 2, 3, 4. Наудачу из урны без возвращения вынимают два шара. Построить ряд распределения случайной величины X – суммы номеров двух шаров. Найти математическое ожидание $\mathbf{M}X$, среднее квадратичное отклонение $\boldsymbol{\sigma}_X$ и вероятность $\mathbf{P}\left(X < \mathbf{M}X + \sigma_X\right)$.

10.4. **(2.1.18)** Стрелок имеет три патрона и стреляет в цель до первого попадания или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна **2/3**. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов.

10.5. **(2.1.22)** Монету бросают до первого выпадения герба. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросаний монеты.

10.6. **(2.1.23)** По мишени, вероятность попадания в которую равна ***p***, ведется стрельба в неизменных условиях до получения ***k*** попаданий. Найти математическое ожидание числа произведенных выстрелов.

10.7. **(2.1.25)** Из урны, содержащей ***m*** белых и ***n*** черных шаров, извлекается по одному шару без возвращения до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров.

11. Занятие №11. Непрерывные случайные величины. Числовые характеристики

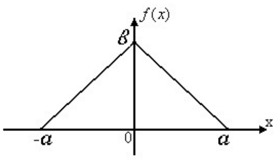
Вопросы для контроля

1. *Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности. Свойства плотности вероятности.*
2. *Числовые характеристики непрерывной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, начальные и центральные моменты, мода, медиана).*
3. *Основные законы распределения: нормальный, равномерный, показательный, Симпсона, Лапласа, Коши.*

Задачи

11.1. **(2.1.33)** Непрерывная случайная величина имеет плотность вероятности: $f(x)=\begin{cases} ax^2, & 0<x\le 1; \\ 0, & x\le 0, x>1 \end{cases}$. Найти коэффициент a и построить график $f(x)$; найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(0{,}5;1{,}5)$; найти моду и медиану случайной величины X; вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$.

11.2. **(2.1.34)** Случайная величина X имеет плотность вероятностей, изображенную на рисунке (закон распределения Симпсона). Найти параметр b; написать выражение для плотности вероятностей; найти функцию распределения и построить её график; определить числовые характеристики случайной величины X: $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$, σ_X, μ_3; найти моду и медиану случайной величины X; найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-a/2, a)$.



11.3. **(2.1.42)** Случайная величина X имеет плотность вероятности (распределение Лапласа): $f(x)=ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda>0$. Считая заданным параметр λ, найти коэффициент a; найти функцию распределения $F(x)$, плотность вероятности $f(x)$ и построить их графики; найти $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{D}X$.

11.4. **(2.1.49)** Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса ***R***. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки до центра круга.

11.5. Внутрь квадрата со стороной **2** наугад бросается точка. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины – расстояния от точки до центра квадрата. Изобразить графически функцию распределения и плотность вероятности.

11.6. **(~2.1.74)** По известному правилу *«трех сигм»* вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более, чем на три средних квадратичных отклонения мала. Найти $\mathrm{P}\left(|X-\mathbf{M}X|>3\sigma_X\right)$, если случайная величина X имеет распределение: (а) нормальное; (б) показательное; (в) равномерное; (г) Симпсона (треугольное), (д) Лапласа (двустороннее экспоненциальное).

11.7. **(2.1.72)** Случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти $\mathbf{M}|X-\mathbf{M}X|$.

11.8. **(2.1.87)** Доказать, что при показательном законе распределения случайной величины X справедливо следующее свойство «нестарения»: для любых $x_1, x_2>0$ $\mathbf{P}(X>x_1+x_2\mid X>x_1)=\mathbf{P}(X>x_2)$. Доказать также обратное: если неотрицательная случайная величина X является непрерывной и обладает свойством «нестарения», то она имеет показательный закон распределения.

12. Занятие №12. Случайные величины. Повторение и самостоятельная работа

Вопросы для контроля

1. *Функция распределения. Ряд распределения. Плотность вероятности. Свойства.*
2. *Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.*
3. *Математическое ожидание функции от случайной величины (основная теорема о математическом ожидании).*

Задачи

См. задачи из занятий №10 и №11.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Дуэлянты по очереди стреляют друг в друга. Вероятность попадания первого дуэлянта в соперника равна **1/3**, второго – **2/3**. Дуэль заканчивается при первом попадании. Найти математическое ожидание числа произведённых выстрелов.
2. Найти $\mathrm{P}\left(\left|X-\mathbf{M}X\right|>\sigma_X\right)$, если случайная величина X имеет равномерное распределение.

Вариант 2

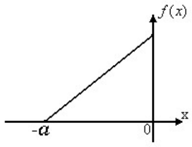
1. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого промаха, но не более четырех раз. Вероятность попадания в корзину при каждом бросании равна **0,9**. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных баскетболистом бросков.
2. Найти $\mathrm{P}\left(\left|X-\mathbf{M}X\right|>\sigma_X\right)$, если случайная величина X имеет симметричное треугольное распределение.

Вариант 3

1. В урне имеется четыре шара с номерами **1**, **2**, **3**, **4**. Наудачу из урны без возвращения вынимают два шара. Построить ряд распределения случайной величины X – суммы номеров двух шаров. Найти и изобразить графически функцию распределения случайной величины X.
2. Найти $\mathrm{P}\left(\left|X-\mathbf{M}X\right|>3\sigma_X\right)$, если случайная величина X имеет симметричное двустороннее экспоненциальное распределение с плотностью вероятностей $f(x)=ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda>0$ (распределение Лапласа).

Вариант 4

1. В урне имеется четыре шара с номерами **1**, **2**, **3**, **4**. Наудачу из урны без возвращения вынимают два шара. Построить ряд распределения случайной величины X – суммы номеров двух шаров. Найти и изобразить графически функцию распределения случайной величины X.
2. Случайная величина X распределена по закону прямоугольного треугольника (плотность вероятности приведена на рисунке). Найти функцию распределения и построить её график; найти вероятность $\mathrm{P}(-a<X<-a/3)$; найти медиану распределения, математическое ожидание и дисперсию.



Вариант 5

1. Из урны, содержащей ***m*** белых и ***n*** черных шаров, извлекается по одному шару, который возвращается обратно, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров.

2. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases} A\cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$. Найти коэффициент A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, изобразить графически плотность вероятности и функцию распределения.

Вариант 6

1. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $\mathbf{M}X = 2,6$ и среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}_X = 0,8$.

2. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятностей: $f(x)=\begin{cases} 0, \ x \notin [0;3] \\ ax(3-x), \ x \in [0;3] \end{cases}$. Найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$, построить графики плотности вероятностей и функции распределения; найти вероятность того, что случайная величина X попадёт в интервал $(-1;2)$; найти медиану распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Вариант 7

1. В партии из **10** деталей имеется **8** стандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание и дисперсию числа стандартных деталей среди отобранных.
2. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины, распределённой на интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ с плотностью вероятностей $f(x) = a\cos^2 x$.

Вариант 8

1. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков при бросании двух игральных костей.
2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид (закон распределения арксинуса): $F(x)=\begin{cases} 0, \ x<-a \\ A+B\arcsin(x/a), \ -a \le x \le a \\ 1, \ x>a \end{cases}$. Определить: параметры A и B; плотность вероятностей $f(x)$ (нарисовать её график); вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(-a/2, a/2)$; математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

13. Занятие №13. Случайные векторы и их числовые характеристики

Вопросы для контроля

1. *Свойства двумерной функции распределения.*
2. *Двумерные ряд распределения и плотность вероятности.*
3. *Числовые характеристики случайного вектора.*

Задачи

13.1. **(2.2.1)** Дана функция распределения $F_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y). Найти вероятность $\mathrm{P}(X > x, Y > y)$.

13.2. **(2.2.3)** Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения случайного вектора (X,Y).

X	Y	
	2	**4**
1	0,1	0,3
3	0,2	0,4

13.3. **(~2.2.6, ~2.2.9)** Закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y) задан таблицей. Найти совместную функцию распределения $F_{XY}(x,y)$, законы распределения координат X и Y, числовые характеристики вектора (X,Y). Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y). Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

13.4. **(2.2.17)** Задана функция распределения случайного вектора (X,Y):

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x \ge 0, y \ge 0; \\ 0 & , \quad \min(x,y) < 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); б) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, в) вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в область, задаваемую неравенствами $(1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2)$. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

13.5. **(2.2.22)** Функция распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & \min(x,y) < 0; \\ \min(x,y), & 0 \le \min(x,y) < 1; \\ 1, & \min(x,y) \ge 1. \end{cases}$$

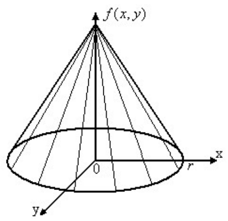
Найти одномерные законы распределения случайных величин X и Y. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y). Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

13.6. **(2.2.28)** Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) равна:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y). Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

13.7. **(2.2.40)** Поверхность плотности вероятности $f_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y), представляет собой круговой конус, основанием которого служит круг радиуса r с центром в начале координат. Вне этого конуса плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ равна нулю. Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$, найти плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y), определить, являются ли случайные величины X и Y некоррелированными.



14. Занятие №14. Случайные величины и случайные векторы. Повторение

Вопросы для контроля

1. *Функция распределения, ряд распределения, плотность вероятности.*
2. *Числовые характеристики случайной величины.*
3. *Числовые характеристики случайного вектора. Корреляционная матрица.*

Задачи

См. задачи из занятий 10, 11, 12, 13.

14.1. **(2.1.12)** Монету бросают ***n*** раз. Найти функцию распределения: а) числа выпадений герба; б) разности числа выпадений герба и числа выпадений цифры.

14.2. Сколько раз в среднем надо бросить игральную кость до первого появления «шестёрки»?

14.3. Технический контроль последовательно проверяет изделия, каждое из которых с вероятностью $\boldsymbol{p}$ является бракованным. Найти математическое ожидание числа годных деталей между двумя бракованными.

14.4. На единичную окружность с центром в начале координат наугад ставится точка. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины $\boldsymbol{X}$ – абсциссы этой точки.

14.5. Найти вероятность того, что случайная величина, распределённая по показательному закону, примет значение большее своего математического ожидания.

14.6. **(2.1.76)** Величина $S_X = \mu_3 / \sigma_X^3$ называется асимметрией случайной величины X, а величина $E_X = \mu_4 / \sigma_X^4 - 3$ – эксцессом случайной величины X. Найти S_X и E_X, если (*а*) X – нормально распределенная случайная величина с параметрами a и σ^2; (*б*) X – равномерно распределенная на отрезке $[-1;1]$ случайная величина; (*в*) X имеет закон распределения Лапласа с плотностью вероятностей $f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$, $\lambda > 0$.

15. Занятие №15. Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин (повторение)

См. задачи из занятий 10, 11, 12, 14.

16. Занятие №16. Определение вероятности. Случайные величины (подготовка к зачёту)

Вопросы для контроля

1. *Классическое определение вероятности, геометрическое определение вероятности.*
2. *Дискретные и непрерывные случайные величины.*
3. *Функция распределения, ряд распределения, плотность вероятности.*
4. *Числовые характеристики случайной величины.*

См. задачи из занятий 10, 11, 12, 14.

16.1. **(2.1.5)** Случайную величину $\boldsymbol{X}$ умножили на постоянную, неслучайную величину $\boldsymbol{a}$. Как от этого изменятся ее характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, второй начальный момент?

16.2. **(2.1.28)** Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известно, что $\mathbf{M}X = 0{,}1$, $\mathbf{M}X^2 = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

16.3. **(2.1.40)** Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X, имеющей в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ плотность вероятностей $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \cos^2 x$.

16.4. **(2.1.41)** Случайная величина X имеет плотность вероятностей (закон распределения Коши): $f(x) = \dfrac{A}{1+x^2}$. Найти: коэффициент A, функцию распределения, вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-1;1)$; математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

16.5. **(2.1.46)** Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид (закон распределения арксинуса): $F(x)=\begin{cases}0, \ x<-a;\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, \ -a\le x\le a;\\ 1, \ x>a.\end{cases}$

Определить: параметры A и B, плотность вероятностей $f(x)$, вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(-a/2;a/2)$, числовые характеристики $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{D}X$.

16.6. **(2.1.50)** Случайная величина X, представляющая собой расстояние от точки попадания до центра мишени, имеет плотность вероятностей (закон распределения Релея): $f(x)=\begin{cases}Axe^{-h^2x^2}, \ x>0;\\ 0, \ x\le 0;\end{cases}$

Найти: коэффициент A и построить график $f(x)$, моду распределения случайной величины X, $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{D}X$, вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше, чем мода.

Литература

1. ***Коломиец Э.И., Дегтярев А.А.*** **Сборник задач по теории вероятностей:** Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2006. – 244 с.

Приложение. Таблицы функций математической статистики

Функция Лапласа

$$\Phi_0\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \qquad \boxed{x \to \Phi_0\left(x\right)}$$

0.01	.00398	0.02	.00797	0.03	.01196	0.04	.01595	0.05	.01993	0.06	.02392	0.07	.02790	0.08	.03188
0.09	.03585	0.10	.03982	0.11	.04379	0.12	.04775	0.13	.05171	0.14	.05567	0.15	.05961	0.16	.06355
0.17	.06749	0.18	.07142	0.19	.07534	0.20	.07925	0.21	.08316	0.22	.08706	0.23	.09095	0.24	.09483
0.25	.09870	0.26	.10256	0.27	.10641	0.28	.11026	0.29	.11409	0.30	.11791	0.31	.12171	0.32	.12551
0.33	.12930	0.34	.13307	0.35	.13683	0.36	.14057	0.37	.14430	0.38	.14802	0.39	.15173	0.40	.15542
0.41	.15909	0.42	.16275	0.43	.16640	0.44	.17003	0.45	.17364	0.46	.17724	0.47	.18082	0.48	.18438
0.49	.18793	0.50	.19146	0.51	.19497	0.52	.19846	0.53	.20194	0.54	.20540	0.55	.20884	0.56	.21226
0.57	.21566	0.58	.21904	0.59	.22240	0.60	.22574	0.61	.22906	0.62	.23237	0.63	.23565	0.64	.23891
0.65	.24215	0.66	.24537	0.67	.24857	0.68	.25174	0.69	.25490	0.70	.25803	0.71	.26114	0.72	.26423
0.73	.26730	0.74	.27035	0.75	.27337	0.76	.27637	0.77	.27935	0.78	.28230	0.79	.28523	0.80	.28814
0.81	.29102	0.82	.29389	0.83	.29673	0.84	.29954	0.85	.30233	0.86	.30510	0.87	.30784	0.88	.31057
0.89	.31326	0.90	.31593	0.91	.31858	0.92	.32121	0.93	.32381	0.94	.32639	0.95	.32894	0.96	.33147
0.97	.33397	0.98	.33645	0.99	.33891	1.00	.34134	1.01	.34375	1.02	.34613	1.03	.34849	1.04	.35083
1.05	.35314	1.06	.35542	1.07	.35769	1.08	.35992	1.09	.36214	1.10	.36433	1.11	.36650	1.12	.36864
1.13	.37076	1.14	.37285	1.15	.37492	1.16	.37697	1.17	.37899	1.18	.38099	1.19	.38297	1.20	.38493
1.21	.38686	1.22	.38876	1.23	.39065	1.24	.39251	1.25	.39435	1.26	.39616	1.27	.39795	1.28	.39972
1.29	.40147	1.30	.40319	1.31	.40490	1.32	.40658	1.33	.40824	1.34	.40987	1.35	.41149	1.36	.41308
1.37	.41465	1.38	.41620	1.39	.41773	1.40	.41924	1.41	.42073	1.42	.42219	1.43	.42364	1.44	.42506
1.45	.42647	1.46	.42785	1.47	.42921	1.48	.43056	1.49	.43188	1.50	.43319	1.51	.43447	1.52	.43574
1.53	.43699	1.54	.43821	1.55	.43942	1.56	.44062	1.57	.44179	1.58	.44294	1.59	.44408	1.60	.44520
1.61	.44630	1.62	.44738	1.63	.44844	1.64	.44949	1.65	.45052	1.66	.45154	1.67	.45254	1.68	.45352
1.69	.45448	1.70	.45543	1.71	.45636	1.72	.45728	1.73	.45818	1.74	.45907	1.75	.45994	1.76	.46079
1.77	.46163	1.78	.46246	1.79	.46327	1.80	.46406	1.81	.46485	1.82	.46562	1.83	.46637	1.84	.46711
1.85	.46784	1.86	.46855	1.87	.46925	1.88	.46994	1.89	.47062	1.90	.47128	1.91	.47193	1.92	.47257
1.93	.47319	1.94	.47381	1.95	.47441	1.96	.47500	1.97	.47558	1.98	.47614	1.99	.47670	2.00	.47724
2.01	.47778	2.02	.47830	2.03	.47882	2.04	.47932	2.05	.47981	2.06	.48030	2.07	.48077	2.08	.48123
2.09	.48169	2.10	.48213	2.11	.48257	2.12	.48299	2.13	.48341	2.14	.48382	2.15	.48422	2.16	.48461
2.17	.48499	2.18	.48537	2.19	.48573	2.20	.48609	2.21	.48644	2.22	.48679	2.23	.48712	2.24	.48745
2.25	.48777	2.26	.48808	2.27	.48839	2.28	.48869	2.29	.48898	2.30	.48927	2.31	.48955	2.32	.48982
2.33	.49009	2.34	.49035	2.35	.49061	2.36	.49086	2.37	.49110	2.38	.49134	2.39	.49157	2.40	.49180
2.41	.49202	2.42	.49223	2.43	.49245	2.44	.49265	2.45	.49285	2.46	.49305	2.47	.49324	2.48	.49343
2.49	.49361	2.50	.49379	2.51	.49396	2.52	.49413	2.53	.49429	2.54	.49445	2.55	.49461	2.56	.49476
2.57	.49491	2.58	.49505	2.59	.49520	2.60	.49533	2.61	.49547	2.62	.49560	2.63	.49573	2.64	.49585
2.65	.49597	2.66	.49609	2.67	.49620	2.68	.49631	2.69	.49642	2.70	.49653	2.71	.49663	2.72	.49673
2.73	.49683	2.74	.49692	2.75	.49702	2.76	.49710	2.77	.49719	2.78	.49728	2.79	.49736	2.80	.49744
2.81	.49752	2.82	.49759	2.83	.49767	2.84	.49774	2.85	.49781	2.86	.49788	2.87	.49794	2.88	.49801
2.89	.49807	2.90	.49813	2.91	.49819	2.92	.49824	2.93	.49830	2.94	.49835	2.95	.49841	2.96	.49846
2.97	.49851	2.98	.49855	2.99	.49860	3.00	.49865	3.01	.49869	3.02	.49873	3.03	.49877	3.04	.49881
3.05	.49885	3.06	.49889	3.07	.49892	3.08	.49896	3.09	.49899	3.10	.49903	3.11	.49906	3.12	.49909
3.13	.49912	3.14	.49915	3.15	.49918	3.16	.49921	3.17	.49923	3.18	.49926	3.19	.49928	3.20	.49931
3.21	.49933	3.22	.49935	3.23	.49938	3.24	.49940	3.25	.49942	3.26	.49944	3.27	.49946	3.28	.49948
3.29	.49949	3.30	.49951	3.31	.49953	3.32	.49954	3.33	.49956	3.34	.49958	3.35	.49959	3.36	.49961
3.37	.49962	3.38	.49963	3.39	.49965	3.40	.49966	3.41	.49967	3.42	.49968	3.43	.49969	3.44	.49970
3.45	.49971	3.46	.49972	3.47	.49973	3.48	.49974	3.49	.49975	3.50	.49976				

3.51	.4997759	3.52	.4997842	3.53	.4997922	3.54	.4997999	3.55	.4998073	3.56	.4998145	3.57	.4998215
3.58	.4998282	3.59	.4998346	3.60	.4998408	3.61	.4998469	3.62	.4998526	3.63	.4998582	3.64	.4998636
3.65	.4998688	3.66	.4998738	3.67	.4998787	3.68	.4998833	3.69	.4998878	3.70	.4998922	3.71	.4998963
3.72	.4999003	3.73	.4999042	3.74	.4999079	3.75	.4999115	3.76	.4999150	3.77	.4999183	3.78	.4999215
3.79	.4999246	3.80	.4999276	3.81	.4999305	3.82	.4999332	3.83	.4999359	3.84	.4999384	3.85	.4999409
3.86	.4999433	3.87	.4999455	3.88	.4999477	3.89	.4999498	3.90	.4999519	3.91	.4999538	3.92	.4999557
3.93	.4999575	3.94	.4999592	3.95	.4999609	3.96	.4999625	3.97	.4999640	3.98	.4999655	3.99	.4999669
4.00	.4999683	4.01	.4999696	4.02	.4999709	4.03	.4999721	4.04	.4999732	4.05	.4999743	4.06	.4999754
4.07	.4999764	4.08	.4999774	4.09	.4999784	4.10	.4999793	4.11	.4999802	4.12	.4999810	4.13	.4999818
4.14	.4999826	4.15	.4999833	4.16	.4999840	4.17	.4999847	4.18	.4999854	4.19	.4999860	4.20	.4999866
4.21	.4999872	4.22	.4999877	4.23	.4999883	4.24	.4999888	4.25	.4999893	4.26	.4999897	4.27	.4999902
4.28	.4999906	4.29	.4999910	4.30	.4999914	4.31	.4999918	4.32	.4999921	4.33	.4999925	4.34	.4999928
4.35	.4999931	4.36	.4999934	4.37	.4999937	4.38	.4999940	4.39	.4999943	4.40	.4999945	4.41	.4999948
4.42	.4999950	4.43	.4999952	4.44	.4999955	4.45	.4999957	4.46	.4999959	4.47	.4999960	4.48	.4999962
4.49	.4999964	4.50	.4999966	4.51	.4999967	4.52	.4999969	4.53	.4999970	4.54	.4999971	4.55	.4999973
4.56	.4999974	4.57	.4999975	4.58	.4999976	4.59	.4999977	4.60	.4999978	4.61	.4999979	4.62	.4999980
4.63	.4999981	4.64	.4999982	4.65	.4999983	4.66	.4999984	4.67	.4999984	4.68	.4999985	4.69	.4999986
4.70	.4999986	4.71	.4999987	4.72	.4999988	4.73	.4999988	4.74	.4999989	4.75	.4999989	4.76	.4999990
4.77	.4999990	4.78	.4999991	4.79	.4999991	4.80	.4999992	4.81	.4999992	4.82	.4999992	4.83	.4999993
4.84	.4999993	4.85	.4999993	4.86	.4999994	4.87	.4999994	4.88	.4999994	4.89	.4999994	4.90	.4999995
4.91	.4999995	4.92	.4999995	4.93	.4999995	4.94	.4999996	4.95	.4999996	4.96	.4999996	4.97	.4999996
4.98	.4999996	4.99	.4999996	5.00	.4999997								

Обратная функция Лапласа

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du = p\,; \quad x = \Phi_0^{-1}(p)$$

$\boxed{p \to x}$

.005	.01253	.010	.02506	.015	.03760	.020	.05015	.025	.06270	.030	.07526
.035	.08784	.040	.10043	.045	.11303	.050	.12566	.055	.13830	.060	.15096
.065	.16365	.070	.17637	.075	.18911	.080	.20189	.085	.21470	.090	.22754
.095	.24042	.100	.25334	.105	.26631	.110	.27931	.115	.29237	.120	.30548
.125	.31863	.130	.33185	.135	.34512	.140	.35845	.145	.37185	.150	.38532
.155	.39885	.160	.41246	.165	.42614	.170	.43991	.175	.45376	.180	.46769
.185	.48172	.190	.49585	.195	.51007	.200	.52440	.205	.53883	.210	.55338
.215	.56805	.220	.58284	.225	.59776	.230	.61281	.235	.62800	.240	.64334
.245	.65883	.250	.67448	.255	.69030	.260	.70630	.265	.72247	.270	.73884
.275	.75541	.280	.77219	.285	.78919	.290	.80642	.295	.82389	.300	.84162
.305	.85961	.310	.87789	.315	.89647	.320	.91536	.325	.93458	.330	.95416
.335	.97411	.340	.99445	.345	1.01522	.350	1.03643	.355	1.05812	.360	1.08031
.365	1.10306	.370	1.12639	.375	1.15034	.380	1.17498	.385	1.20035	.390	1.22652
.395	1.25356	.400	1.28155	.405	1.31057	.410	1.34075	.415	1.37220	.420	1.40507
.425	1.43953	.430	1.47579	.435	1.51410	.440	1.55477	.445	1.59819	.450	1.64485
.451	1.65462	.452	1.66456	.453	1.67466	.454	1.68494	.455	1.69539	.456	1.70604
.457	1.71688	.458	1.72793	.459	1.73919	.460	1.75068	.461	1.76241	.462	1.77438
.463	1.78661	.464	1.79911	.465	1.81191	.466	1.82500	.467	1.83842	.468	1.85217
.469	1.86629	.470	1.88079	.471	1.89569	.472	1.91103	.473	1.92683	.474	1.94313
.475	1.95996	.476	1.97736	.477	1.99539	.478	2.01409	.479	2.03352	.480	2.05374
.481	2.07485	.482	2.09692	.483	2.12007	.484	2.14441	.485	2.17009	.486	2.19728
.487	2.22621	.488	2.25712	.489	2.29036	.490	2.32634	.491	2.36561	.492	2.40891
.493	2.45726	.494	2.51214	.495	2.57582	.4951	2.58280	.4952	2.58991	.4953	2.59715
.4954	2.60453	.4955	2.61205	.4956	2.61972	.4957	2.62755	.4958	2.63555	.4959	2.64372
.4960	2.65206	.4961	2.66060	.4962	2.66934	.4963	2.67828	.4964	2.68744	.4965	2.69684
.4966	2.70648	.4967	2.71638	.4968	2.72655	.4969	2.73701	.4970	2.74778	.4971	2.75887
.4972	2.77032	.4973	2.78215	.4974	2.79437	.4975	2.80703	.4976	2.82015	.4977	2.83378
.4978	2.84796	.4979	2.86273	.4980	2.87816	.4981	2.89430	.4982	2.91123	.4983	2.92904
.4984	2.94784	.4985	2.96773	.4986	2.98888	.4987	3.01145	.4988	3.03567	.4989	3.06181
.4990	3.09023	.4991	3.12138	.4992	3.15590	.4993	3.19465	.4994	3.23888	.4995	3.29052
.49951	3.29620	.49952	3.30199	.49953	3.30789	.49954	3.31391	.49955	3.32005	.49956	3.32632
.49957	3.33272	.49958	3.33926	.49959	3.34595	.49960	3.35279	.49961	3.35979	.49962	3.36696
.49963	3.37431	.49964	3.38184	.49965	3.38957	.49966	3.39751	.49967	3.40567	.49968	3.41407
.49969	3.42271	.49970	3.43161	.49971	3.44079	.49972	3.45028	.49973	3.46008	.49974	3.47023
.49975	3.48075	.49976	3.49167	.49977	3.50302	.49978	3.51485	.49979	3.52718	.49980	3.54008
.49981	3.55359	.49982	3.56779	.49983	3.58274	.49984	3.59854	.49985	3.61529	.49986	3.63313
.49987	3.65220	.49988	3.67270	.49989	3.69486	.49990	3.71901	.49991	3.74554	.49992	3.77501
.49993	3.80816	.49994	3.84612	.49995	3.89059						

.499951	3.89549	.499952	3.90048	.499953	3.90557	.499954	3.91077	.499955	3.91608
.499956	3.92149	.499957	3.92703	.499958	3.93269	.499959	3.93847	.499960	3.94439
.499961	3.95046	.499962	3.95667	.499963	3.96304	.499964	3.96957	.499965	3.97628
.499966	3.98317	.499967	3.99026	.499968	3.99755	.499969	4.00506	.499970	4.01281
.499971	4.02080	.499972	4.02906	.499973	4.03760	.499974	4.04645	.499975	4.05562
.499976	4.06515	.499977	4.07507	.499978	4.08540	.499979	4.09619	.499980	4.10747
.499981	4.11931	.499982	4.13175	.499983	4.14487	.499984	4.15874	.499985	4.17346
.499986	4.18914	.499987	4.20593	.499988	4.22400	.499989	4.24356	.499990	4.26488
.499991	4.28835	.499992	4.31444	.499993	4.34385	.499994	4.37758	.499995	4.41717
.4999951	4.42153	.4999952	4.42598	.4999953	4.43053	.4999954	4.43516	.4999955	4.43989
.4999956	4.44473	.4999957	4.44967	.4999958	4.45472	.4999959	4.45989	.4999960	4.46517
.4999961	4.47059	.4999962	4.47614	.4999963	4.48184	.4999964	4.48768	.4999965	4.49368
.4999966	4.49984	.4999967	4.50619	.4999968	4.51272	.4999969	4.51944	.4999970	4.52638
.4999971	4.53354	.4999972	4.54094	.4999973	4.54860	.4999974	4.55654	.4999975	4.56478
.4999976	4.57333	.4999977	4.58224	.4999978	4.59152	.4999979	4.60122	.4999980	4.61137
.4999981	4.62202	.4999982	4.63322	.4999983	4.64503	.4999984	4.65753	.4999985	4.67080
.4999986	4.68495	.4999987	4.70011	.4999988	4.71643	.4999989	4.73411	.4999990	4.75340
.4999991	4.77465	.4999992	4.79830	.4999993	4.82498	.4999994	4.85561	.4999995	4.89160

Квантили χ^2-распределения Пирсона

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)}\int\limits_{\chi^2}^{\infty} u^{n/2-1}e^{-u/2}du = p$$

$\boxed{n,\, p \to \chi^2}$

N	*p*										
	0.990	*0.980*	*0.950*	*0.900*	*0.800*	*0.500*	*0.200*	*0.100*	*0.050*	*0.020*	*0.010*
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	1.386	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	2.366	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	3.357	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	4.351	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	5.348	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	6.346	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	7.344	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	8.343	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	9.342	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	10.341	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	11.340	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	12.340	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	13.339	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	14.339	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	15.338	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	16.338	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	17.338	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	18.338	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	19.337	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	20.337	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	21.337	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	22.337	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	23.337	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	24.337	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	25.336	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	26.336	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	27.336	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	28.336	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	29.336	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

Квантили *t*-распределения Стьюдента

$$\frac{\Gamma\left(\left(n+1\right)/2\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(n/2\right)}\int\limits_{-t}^{t}\left(1+u^2/n\right)^{-(n+1)/2}du = p$$

$\boxed{n,\, p \to t}$

n	*p*								
	0.500	*0.800*	*0.900*	*0.950*	*0.980*	*0.990*	*0.995*	*0.998*	*0.999*
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.675	1.282	1.645	1.960	2.327	2.576	2.808	3.091	3.291

Ананьин М.А., Храмов А.Г.

«Теория вероятностей и математическая статистика»

План практических занятий и методические указания для преподавателя

Часть 2

Самара 2012

Оглавление

Введение

Нумерация задач (в скобках) дана по сборнику задач по теории вероятностей [1]. Задачи повышенной сложности обозначены знаком *.

1 Занятие №1. Случайные векторы и их числовые характеристики

Вопросы для контроля
1. *Свойства двумерных функции распределения, ряда распределения и плотности вероятности.*
2. *Свойства корреляционного момента.*

Задачи *(частично из части 1, занятие №13)*

1.1. **(2.2.1)** Дана функция распределения $F_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y). Найти вероятность $\mathrm{P}(X > x, Y > y)$. *Решение:*

$$P(X > x, Y > y) = P((X > x)\cdot(Y > y)) = P\left(\overline{(X \le x)}\cdot\overline{(Y \le y)}\right) = P\left(\overline{(X \le x)+(Y \le y)}\right) = 1 - P((X \le x)+(Y \le y)) =$$
$$= 1 - P(X \le x) - P(Y \le y) + P((X \le x)\cdot(Y \le y)) = 1 - F_X(x+0) - F_Y(y+0) + F_{XY}(x+0, y+0) =$$
$$= 1 - F_{XY}(x+0,\infty) - F_{XY}(\infty, y+0) + F_{XY}(x+0, y+0).$$

1.2. **(2.2.4)** Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения случайного вектора $(X,|X|)$. *Решение:*

$$F_{X,|X|}(x,y) = P(X < x, -y < X < y) = P(X < x, X < y) - P(X < x, X < -y) + P(X < x, X = -y) =$$
$$= P(X < \min(x,y)) - P(X < \min(x,-y)) + P(X = -y)\cdot(-y < x) =$$
$$= F_X(\min(x,y)) - F_X(\min(x,-y)) + \left(F_X(-y+0) - F_X(-y)\right)\cdot(x+y > 0)$$

1.3. **(2.2.22)** Функция распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & \min(x,y) < 0; \\ \min(x,y), & 0 \le \min(x,y) < 1; \\ 1, & \min(x,y) \ge 1. \end{cases}$$

Найти одномерные функции распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?
Решение:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } y < 0; \\ x, & 0 \le x < 1,\ x \le y; \\ y, & 0 \le y < 1,\ x \ge y; \\ 1, & x \ge 1,\ y \ge 1. \end{cases}$$

Ответ: $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ y, & 0 \le y < 1; \\ 1, & y \ge 1. \end{cases}$ $\quad F_X(x)\cdot F_X(y) \ne F_{XY}(x,y)$.

1.4. **(2.2.40)** Поверхность плотности вероятности $f_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y), представляет собой круговой конус, основанием которого служит круг радиуса r с центром в начале координат. Вне этого конуса плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ равна нулю. Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$, найти плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y), определить, являются ли случайные величины X и Y некоррелированными.

1.5. **(2.2.15)** По мишени производится два независимых выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматриваются две случайные величины: X – число попаданий, Y – число промахов. Найти: (а) закон распределения случайного вектора X; (б) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); (в) законы распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

Задачи повышенной сложности

1.6. *** (2.2.5)** Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Положим $X=\min(X_1,\ldots,X_n)$, $Y=\max(X_1,\ldots,X_n)$. Найти функцию распределения случайного вектора (X,Y). *Решение:*

$$F_{XY}(x,y)=P(X<x,Y<y)=P(\min(X_1,\ldots,X_n)<x,\ \max(X_1,\ldots,X_n)<y)=$$
$$=P\big(((X_1<x)+\ldots+(X_n<x))\cdot(X_1<y)\cdot\ldots\cdot(X_n<y)\big)=$$
$$=P\big((X_1<y)\cdot\ldots\cdot(X_n<y)\big)\cdot P\big(((X_1<x)+\ldots+(X_n<x))\,|\,(X_1<y)\cdot\ldots\cdot(X_n<y)\big)=$$
$$=P(X_1<y)\cdot\ldots\cdot P(X_n<y)\cdot\big(1-P\big((X_1\ge x)\cdot\ldots\cdot(X_n\ge x)\,|\,(X_1<y)\cdot\ldots\cdot(X_n<y)\big)\big)=$$
$$=P(X_1<y)\cdot\ldots\cdot P(X_n<y)\cdot\left(1-\frac{P(x\le X_1<y)}{P(X_1<y)}\cdot\ldots\cdot\frac{P(x\le X_n<y)}{P(X_n<y)}\right)=$$
$$=P(X_1<y)\cdot\ldots\cdot P(X_n<y)-P(x\le X_1<y)\cdot\ldots\cdot P(x\le X_n<y)=\begin{cases}F^n(y),\ x\le y;\\ F^n(y)-\big(F(y)-F(x)\big)^n,\ x>y.\end{cases}$$

1.7. ***** Функция распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & \min(x,y)<0;\\ \min(x,y), & 0\le\min(x,y)<1;\\ 1, & \min(x,y)\ge 1.\end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

Решение:

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\ \textit{или}\ y<0;\\ x, & 0\le x<1,\ x\le y;\\ y, & 0\le y<1,\ x\ge y;\\ 1, & x\ge 1,\ y\ge 1.\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\quad\text{(приложение 1).}$$

$$\mathbf{M}XY=\iint xyd^2F_{XY}(x,y)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_k\sum_l x_ky_l\Delta^2F_{XY}(x_k,y_l)=\left[x_k=k\cdot\Delta,\ y_l=l\cdot\Delta\right]=$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_k\sum_l k\cdot\Delta\cdot l\cdot\Delta\cdot\Delta^2F_{XY}(k\cdot\Delta,l\cdot\Delta)=\left[F_{XY}(k\cdot\Delta,l\cdot\Delta)\ne 0\ \textit{только при}\ k=l\right]=\left[\Delta=\frac{1}{N}\right]=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k\cdot k\cdot\big(F_{XY}(k\cdot\Delta,k\cdot\Delta)-F_{XY}((k-1)\cdot\Delta,k\cdot\Delta)-F_{XY}(k\cdot\Delta,(k-1)\cdot\Delta)+F_{XY}((k-1)\cdot\Delta,(k-1)\cdot\Delta)\big)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k^2\big(k\Delta-(k-1)\Delta-(k-1)\Delta+(k-1)\Delta\big)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N}k^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^3}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}.$$

См. задачу 1.4: $\mathbf{M}X=\mathbf{M}Y=\frac{1}{2}$, $\mathbf{D}X=\mathbf{D}Y=\frac{1}{12}$, $\mathbf{R}_{XY}=\mathbf{M}XY-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\frac{1}{12}$,

$\mathbf{r}_{XY}=1$ – линейная зависимость случайных величин X и Y (с вероятностью 1).

2 Занятие №2. Условные распределения. Независимость случайных величин

Вопросы для контроля

1. *Условный закон распределения.*
2. *Условная плотность вероятности.*
3. *Условные числовые характеристики.*
4. *Некоррелированность и независимость случайных величин.*

Задачи

2.1. **(2.2.14)** Дискретные случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k)=pq^{k-1}$, $q=1-p$, $0<p<1$, $k=1,2,\dots$

Найти: (а) $\mathrm{P}(X=Y)$; (б) $\mathrm{P}(X>Y)$; (в) $\mathrm{P}(X<Y)$; (г) $\mathrm{P}(X=k\,/\,X>Y)$; (д) $\mathrm{P}(X=k\mid X<Y)$; (е) $\mathrm{P}(X=k\mid X=Y)$; (ж) $\mathrm{P}(X=k\mid X+Y=l)$; (з) $\mathrm{M}(X\mid X+Y=l)$, $l\ge 2$.

2.2. Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен в треугольнике с вершинами в точках **(0;0), (0;1), (1;0)**. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Найти безусловные $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и условные $f_{X|Y}(x\mid y)$, $f_{Y|X}(y\mid x)$ плотности вероятностей, безусловные математические ожидания $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}Y$, условные математические ожидания $\mathrm{M}(X\mid Y=y)$ и $\mathrm{M}(Y\mid X=x)$.

2.3. **(~2.2.34)** Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен в квадрате с диагоналями, совпадающими с осями координат и равными 2. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Найти безусловные $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и условные $f_{X|Y}(x\mid y)$, $f_{Y|X}(y\mid x)$ плотности вероятностей.

2.4. **(~2.2.37, ~2.2.39)** Случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение в круге единичного радиуса. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными? Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2.5. **(2.2.31)** Дана плотность вероятностей случайного вектора (X,Y):

$$f_{XY}(x,y)=k\cdot xye^{-(x^2+y^2)},\quad (x\ge 0, y\ge 0).$$

Определить: (а) коэффициент k; (б) одномерные плотности вероятностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$; (в) условные плотности вероятностей $f_{X|Y}(x\mid y)$, $f_{Y|X}(y\mid x)$; (г) первые и вторые моменты случайного вектора (X,Y).

2.6. **(2.2.25)** Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c\left(xy+y^2\right), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: (а) коэффициент c; (б) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); (в) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ и определить, являются ли случайные величины X и Y независимыми; г) вероятность $\mathrm{P}(X+Y<2)$; д) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора (X,Y).

Задачи повышенной сложности

2.7. ***** Дуэль. Соперники стреляют друг в друга по очереди. Вероятности попадания каждого дуэлянта в соперника при каждом выстреле равна **0,5**. Дуэль продолжается до первого попадания. Дуэль закончилась. Пусть X – число выстрелов, произведённых первым дуэлянтом, Y – число выстрелов, произведённых вторым дуэлянтом. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

Решение:

X	**Y**								**P**(X=k)
	0	*1*	*2*	*3*	…	*k-1*	*k*	…	
1	$\mathbf{2^{-1}}$	$\mathbf{2^{-2}}$	0	0	0	0	0	…	$\mathbf{3\cdot 2^{-2}}$
2	0	$\mathbf{2^{-3}}$	$\mathbf{2^{-4}}$	0	0	0	0	…	$\mathbf{3\cdot 2^{-4}}$
3	0	0	$\mathbf{2^{-5}}$	$\mathbf{2^{-6}}$	0	0	0	…	$\mathbf{3\cdot 2^{-6}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
k-1	0	0	0	0	…	$\mathbf{2^{-2k+2}}$	0		$\mathbf{3\cdot 2^{-2k+2}}$
k	0	0	0	0	…	$\mathbf{2^{-2k+1}}$	$\mathbf{2^{-2k}}$	…	$\mathbf{3\cdot 2^{-2k}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P(Y=k)	$\mathbf{2^{-1}}$	$\mathbf{3\cdot 2^{-3}}$	$\mathbf{3\cdot 2^{-5}}$	$\mathbf{3\cdot 2^{-7}}$	…	$\mathbf{3\cdot 2^{-2k+1}}$	$\mathbf{3\cdot 2^{-2k-1}}$	…	

Для $|x|<1$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k=\dfrac{x}{(1-x)^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2x^k=\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ (приложение 1).

$$\mathbf{M}X=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\mathbf{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot 3\cdot 2^{-2k}=3\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{3},$$

$$\mathbf{M}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 3 \cdot 2^{-2k} = 3\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{20}{9}, \quad \mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9},$$

$$\mathbf{M}Y = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 3 \cdot 2^{-2k-1} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{M}Y^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 3 \cdot 2^{-2k-1} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{10}{9}, \quad \mathbf{D}Y = \mathbf{M}Y^2 - (\mathbf{M}Y)^2 = \frac{10}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{M}XY = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} kl\mathbf{P}(X = k, Y = l) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-2k} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)2^{-2k+1} = 3\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{4}\right)^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-2k} = \frac{20}{9} - \frac{8}{9} = \frac{4}{3},$$

$$\mathbf{R}_{XY} = \mathbf{M}XY - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad \mathbf{r}_{XY} = \frac{\mathbf{R}_{XY}}{\sqrt{\mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y}} = \frac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816496\ldots$$

2.8. ***** Двое игроков бросают по очереди игральную кость до тех пор, пока не выпадет «шестёрка». Игра закончилась. Пусть X – число бросков игральной кости, произведённых первым игроком, Y – число бросков игральной кости, произведённых вторым игроком. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

3 Занятие №3. Случайные величины. Случайные векторы

Вопросы для контроля

1. *Свойства одномерных и двумерных функции распределения, ряда распределения и плотности вероятности.*
2. *Свойства корреляционного момента и коэффициента корреляции.*
3. *Условный закон распределения, условная плотность вероятности, условные числовые характеристики.*
4. *Некоррелированность и независимость случайных величин.*

Задачи

3.1. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0;1]$.

3.2. **(~2.2.35)** Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен внутри прямоугольного треугольника с вершинами в точках (0;0), (0;1), (1;0). Найти функцию распределения, плотность вероятностей и числовые характеристики случайного вектора (X,Y). Найти условные плотности вероятностей случайных величин X, Y и соответствующие условные числовые характеристики.

3.3. **(2.2.29)** Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 \ge a^2; \\ c \cdot \sqrt{a^2 - \left(x^2 + y^2\right)}, & x^2 + y^2 < a^2. \end{cases}$$

Найти: (*а*) коэффициент c; (*б*) вероятность попадания вектора (X,Y) в первый квадрант плоскости $\mathrm{P}\left(X > 0, Y > 0\right)$; (*в*) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора (X,Y).

3.4. **(2.2.30)** Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{A}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Определить коэффициент A, математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y).

3.5. **(2.2.38)** Случайный вектор (X,Y,Z) распределён равномерно внутри шара радиуса r. Написать выражения для плотности вероятностей $f_{XYZ}(x,y,z)$ вектора (X,Y,Z), плотностей вероятностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_Z(z)$ его координат, а также для условной плотности вероятностей $f_X(x|y,z)$. Вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$.

4 Занятие №4. Нормальное распределение

Вопросы для контроля

1. *Одномерная и двумерная плотности вероятности нормального распределения.*
2. *Интеграл вероятности (функция Лапласа).*
3. *Плотность вероятности многомерного нормального распределения.*

Задачи

4.1. Время, за которое студент добирается из дома в университет, является случайной величиной, распределённой приближённо по нормальному закону с математическим ожиданием 30 минут и средним квадратичным отклонением 5 минут (почему приближённо, а не точно?). За сколько времени до начала занятий студент должен выйти из дома, чтобы прибыть на занятия вовремя с вероятностью **0,95**?

4.2. **(2.1.61)** Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5м. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5м.

4.3. **(2.1.63)** Размер однотипных деталей, изготавливаемых цехом, является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием **2,5** см и дисперсией **0,0001** см^2. В каких границах можно практически гарантировать размер детали с вероятностью **0,997**?

4.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-4x}dx$.

4.5. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2xy-5y^2}\,dxdy$.

4.6. При стрельбе отклонения снаряда от цели по координатам являются независимыми случайными величинами X и Y, одинаково распределёнными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением, равным одному метру. Найти вероятность того, что снаряд отклонится от цели больше, чем на один метр.

4.7. **(2.2.45)** Случайный вектор (X,Y) имеет нормальный закон распределения с плотностью вероятностей вида:

$$f_{XY}(x,y) = k\cdot\exp\left\{-\frac{1}{0,72\sigma^2}\left[(x-5)^2+0,8(x-5)(y+2)+0,25(y+2)^2\right]\right\}.$$

Определить: (*а*) параметр k; (*б*) плотности вероятностей каждой из координат вектора (X,Y); (*в*) условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$; (*г*) условные математические ожидания и дисперсии.

4.8. Мишень состоит из **10** концентрических кругов. При стрельбе отклонения от центра мишени по координатам являются независимыми случайными величинами X и Y, одинаково распределёнными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Вероятность попадания «в молоко» составляет **0,01**. Найти вероятность попадания в «десятку».

4.9. **(2.2.55)** Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют нормальные законы распределения $\mathbf{N}(1,1)$, $\mathbf{N}(0,4)$, $\mathbf{N}(-1,1)$ соответственно. Найти: (*а*) $P(X_1+X_2+X_3<0)$; (*б*) $P(|2X_1-X_2+X_3|<3)$.

4.10. **(2.2.53)** Случайные величины X и Y независимы и распределены следующим образом: X – по показательному закону с параметром $\lambda=2$, Y – по равномерному закону на интервале $(-2,2)$. Найти вероятности $P(0\le X\le 2,\ 0\le Y\le 1)$ и $P(Y-X<2)$.

4.11. **(2.2.60)** Пусть $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – две плотности вероятностей двумерных гауссовских распределений на плоскости с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и равными коэффициентами корреляции. Доказать, что: (*а*) функция $f(x,y)=\frac{1}{2}\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]$ является плотностью вероятностей некоторого случайного вектора (X,Y); (*б*) вектор (X,Y) не является гауссовским; (*в*) каждая из величин X и Y имеет гауссовское распределение с параметрами $(0,1)$.

4.12. **(2.2.50)** Трехмерный нормальный случайный вектор (X,Y,Z) имеет математическое ожидание $(\mathbf{M}X,\mathbf{M}Y,\mathbf{M}Z)=(0,0,0)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 2 & 6 & 3\\ -2 & 3 & 8\end{pmatrix}$. Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XYZ}(x,y,z)$ случайного вектора (X,Y,Z).

5 Занятие №5. Функции от случайных величин и векторов

Вопросы для контроля

1. *Плотность вероятности функции от случайной величины.*
2. *Плотность вероятности вектор-функции от случайного вектора.*
3. *Композиция законов распределения.*
4. *Числовые характеристики функций от случайных величин и векторов. Свойства математического ожидания и дисперсии.*

Задачи

5.1. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(0,\pi)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y=\sin X$. *Задачу решить двумя способами.*

5.2. **(2.3.9)** Пусть X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1,1]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y=|X|$.

5.3. **(2.3.4)** Случайная величина X имеет закон распределения $p_k=\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{2^{k+1}}$, $k=0,1,2,\ldots$ Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $Y=(X-1)^2$.

5.4. **(2.3.6)** Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(-\pi/2,\pi/2)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y=\mathrm{tg}\,X$.

5.5. **(~2.3.7)** Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0,1)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y=X^k$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ Построить графики плотности вероятности для $k=-2;-1;+1;+2$.

5.6. **(2.3.13)** Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y=\mathrm{arctg}\,X$.

5.7. **(2.3.75)** Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(0,\sigma^2)$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y=1-3X^2+4X^3$.

5.8. Случайная точка (X,Y) распределена равномерно внутри круга единичного радиуса. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=e^{-X^2-Y^2}$.

5.9. Найти числовые характеристики расстояния между двумя точками, поставленными наудачу и независимо на контур единичного квадрата.

5.10. На окружность единичного радиуса наудачу ставятся две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной длины хорды, соединяющей эти точки.

5.11. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с плотностью вероятностей $f_X(z) = f_Y(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z \ge 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$ Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

6 Занятие №6. Случайные величины и векторы. Функции от случайных величин (повторение)

7 Занятие №7. Контрольная работа №2

8 Занятие №8. Неравенство Чебышева и законы больших чисел

Вопросы для контроля

1. *Неравенство Чебышева.*
2. *Сходимость по вероятности.*
3. *Закон больших чисел (различные формулировки).*

8.1. **(3.1.1)** Показать, что если существует $\mathbf{M}X^2$, то $\mathrm{P}\{|X| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{M}X^2$.

8.2. **(3.1.3)** Пусть $\mathbf{M}X = 1$, $\mathbf{D}X = 0,04$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $0,5 \le X \le 1,5$.

8.3. **(~3.1.6)** Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания: (*а*) менее чем на три средних квадратических отклонения; (*б*) не менее чем на два средних квадратических отклонения. Сравнить эти оценки с точными значениями вероятностей для случаев нормального и равномерного распределений случайной величины.

8.4. Дана последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \ge 1$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева, если случайные величины X_n имеют закон распределения:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$1-\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

8.5. **(3.1.34)** Доказать, что если $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ при $n \to \infty$, то (1) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X + Y$ и (2) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$ при $n \to \infty$.

Доказательство первого утверждения. Из равенства $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ следует, что $P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1$. Кроме того, $\{(x,y) : |x+y| < \varepsilon\} \supset \left\{(x,y) : |x| < \frac{\varepsilon}{2}, |y| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Поэтому

$$P\{|(X_n - X) + (Y_n - Y)| < \varepsilon\} \ge P\left\{|(X_n - X)| < \frac{\varepsilon}{2}, |(Y_n - Y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \ge P\left\{|(X_n - X)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|(Y_n - Y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} - 1.$$

Тогда $\forall \varepsilon$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|(X_n - X) + (Y_n - Y)| < \varepsilon\} \ge \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{|(X_n - X)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{|(Y_n - Y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} - 1 = 1.$

8.6. **(3.1.29)** Показать, что, если последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \ge 1$, такова, что $\mathbf{D}X_k < C$ и $\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{M}\left[(X_i - \mathbf{M}X_i)(X_k - \mathbf{M}X_k)\right] \le 0$, $k \ne i$, $k, i = 1, 2, \ldots$, то она подчиняется закону больших чисел.

Доказательство. Применяем теорему Маркова: Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathbf{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=0,$ то последовательность случайных величин $\{X_n\}, n\ge 1$ подчиняется закону больших чисел.

$\mathbf{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{D}X_k+2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=k}^{n}\mathbf{R}_{ik}<nC,$ тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathbf{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}n\cdot C=0$.

9 Занятие №9. Характеристические функции. Центральная предельная теорема

1. *Производящая функция. Её свойства.*
2. *Характеристическая функция. Её свойства.*
3. *Центральная предельная теорема.*

9.1. **(3.1.12)** Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью не менее **0,99** можно было утверждать, что отклонение относительной частоты от вероятности события, равной **0,35**, будет не более **0,01**?

9.2. **(3.2.2)** Найти производящую функцию пуассоновской случайной величины и с её помощью найти математическое ожидание и дисперсию.

9.3. **(3.2.10)** Найти характеристическую функцию пуассоновской случайной величины и с её помощью найти математическое ожидание и дисперсию.

9.4. **(3.2.12а)** Найти характеристическую функцию равномерно распределённой случайной величины и с её помощью найти математическое ожидание и дисперсию.

9.5. **(3.2.12д)** Найти характеристическую функцию случайной величины, распределённой по закону Лапласа, и с её помощью найти математическое ожидание и дисперсию.

9.6. **(3.2.18–3.2.19)** Найти плотности вероятностей случайных величин, имеющих следующие характеристические функции:

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2},\quad \varphi(t)=\frac{1}{1-it},\quad \varphi(t)=\begin{cases}0, & |t|>1\\ 1-|t|, & |t|\le 1\end{cases},\quad \varphi(t)=\frac{\sin t}{t},\quad \varphi(t)=\frac{1+it}{1+t^2},\quad \varphi(t)=\frac{1-it}{1+t^2}.$$

9.7. **(3.2.20)** С помощью характеристических функций доказать, что (*а*) сумма независимых пуассоновских случайных величин имеет пуассоновское распределение; (*б*) сумма независимых случайных величин, имеющих распределения Коши, также распределена по закону Коши.

9.8. **(3.2.21)** Величины X и Y независимы, одинаково распределены и их характеристическая функция равна $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию разности $X-Y$.

9.9. **(3.2.22)** Показать, что если $\varphi(t)$ – характеристическая функция, то и $|\varphi(t)|^2$ также является характеристической функцией.

9.10. **(3.3.5)** Игральная кость бросается **1000** раз. Найти пределы, симметричные относительно математического ожидания, в которых с вероятностью, большей **0,99**, будет находиться число выпавших очков.

9.11. **(3.3.3)** Случайная величина X является средним арифметическим независимых и одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна **5**. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина X с вероятностью, не меньшей **0,9973**, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее **0,01**?

9.12. **(3.3.11)** Используя производящие функции, показать, что при $np\to\lambda$ $(n\to\infty)$ биномиальный закон распределения сходится к пуассоновскому закону с параметром λ.

10 Индивидуальное задание №1

1.1. Дискретные случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены:
$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k)=pq^{k-1},\ q=1-p,\ 0<p<1,\ k=1,2,\dots$
Найти: $\mathrm{P}(X=Y)$, $\mathrm{P}(X>Y)$, $\mathrm{P}(X=k\,|\,X=Y)$, $\mathrm{M}(X\,|\,X+Y=l),\ l\geq 2$.

1.2. Случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение в круге единичного радиуса. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины X.

2.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ax-b}dx$.

2.2. Задан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

X	Y	
	0	1
0	**0,3**	**q**
1	**p**	**0,5**

Доказать, что при любых значениях параметров ***p*** и ***q*** случайные величины X и Y будут (*а*) коррелированными, (*б*) зависимыми. Найти минимальное (по абсолютной величине) значение коэффициента корреляции X и Y.

3.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-axy-y^2}dxdy$. При каких значениях параметра a интеграл принимает конечное значение?

3.2. Двое игроков бросают по очереди игральную кость до тех пор, пока не выпадет «шестёрка». Игра закончилась. Пусть X – число бросков игральной кости, произведённых первым игроком, Y – число бросков игральной кости, произведённых вторым игроком. Найти закон распределения случайного вектора (X,Y) и его числовые характеристики.

4.1. Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен в квадрате с диагоналями, совпадающими с осями координат и равными a. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y). Найти функцию распределения и числовые характеристики случайной величины X.

4.2. Задан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

X	Y	
	0	1
0	**p**	**q**
1	**0,3**	**0,5**

При каких значениях параметров ***p*** и ***q*** случайные величины X и Y будут (*а*) некоррелированными, (*б*) независимыми?

5.1. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z=\dfrac{X}{X+Y}$.

5.2. Найти вероятность $\mathrm{P}\left(X>Y\right)$, если дискретные случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k)=pq^{k-1},\ q=1-p,\ 0<p<1,\ k=1,2,3,\dots$

10.1. Случайный вектор (X,Y,Z) распределён равномерно внутри шара единичного радиуса с центром в начале координат. Найти функцию распределения и числовые характеристики случайной величины X.

10.2. Дуэль. Соперники стреляют друг в друга по очереди. Вероятности попадания каждого дуэлянта в соперника при каждом выстреле равна **0,5**. Дуэль продолжается до первого попадания. Дуэль закончилась. Пусть X – число выстрелов, произведённых первым дуэлянтом, Y – число выстрелов, произведённых вторым дуэлянтом. Найти числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

7.1. На окружность единичного радиуса наудачу ставятся две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной длины хорды, соединяющей эти точки.

7.2. Случайная величина X принимает значения $-1,0,1$ с вероятностями $1/4, 1/2, 1/4$ соответственно, а величина Y принимает значения $0,1,2$ с вероятностями $1/3, 1/3, 1/3$. Величины X и Y независимы. Найти распределение вероятностей случайной величины $Z = X+Y$.

8.1. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины $W=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, если случайный вектор (X,Y,Z) имеет равномерное распределение в единичном шаре с центром в начале координат.

8.2. Пусть X и Y – число очков, выпавших при бросании двух игральных костей. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины $Z=|X-Y|$.

9.1. Случайные величины X_1, X_2 и X_3 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X_1+X_2+X_3$.

9.2. Дважды бросается игральная кость. Рассматриваются две случайные величины: X – число появлений шестёрки, Y – число появлений чётной цифры. Найти закон распределения случайного вектора (X,Y), законы распределения случайных величин X и Y, корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y).

10.1. (X,Y) – нормальный случайный вектор с плотностью вероятностей

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}\right].$$

Найти плотность вероятностей случайной величины $Z=\dfrac{X}{Y}$.

10.2. По мишени производится два независимых выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $\boldsymbol{p}$. Рассматриваются две случайные величины: X – число попаданий, Y – число промахов. Найти закон распределения случайного вектора (X,Y), законы распределения случайных величин X и Y, корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y).

11.1. Найти плотность вероятностей и числовые характеристики длины $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ вектора (X,Y), если сам вектор имеет нормальное распределение с плотностью

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right].$$

11.2. Производится бросание игральной кости, а затем бросается монета столько раз, сколько очков выпало на игральной кости. Случайная величина X – число бросаний монеты, случайная величина Y – число выпавших «гербов». Найти закон распределения и числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

12.1. Случайная величина X имеет распределение Коши. Доказать, что случайные величины $\dfrac{1}{X}$ и $\dfrac{2X}{1-X^2}$ также имеют распределение Коши.

12.2. Дискретные случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k)=pq^{k-1},\ q=1-p,\ 0<p<1,\ k=1,2,3,\ldots$
Найти закон распределения случайной величины $Z=X+Y$.

13.1. Определить функцию $Y=g(X)$, преобразующую случайную величину X, имеющую плотность вероятности $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(0;1)\\ 0, & x\notin(0;1)\end{cases}$, в равномерно распределенную на интервале $(0,1)$ случайную величину Y.

13.2. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z=X+Y$.

14.1. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z=|X-Y|$.

14.2. Случайная величина X имеет закон распределения $p_k=\mathrm{P}(X=k)=2^{-k},\ k=1,2,3,\ldots$ Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $Y=(X-1)^2$.

15.1. Дискретные случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены: $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k)=pq^{k-1},\ q=1-p,\ 0<p<1,\ k=1,2,3,\ldots$
Найти закон распределения случайной величины $Z=|X-Y|$.

15.2. Случайные величины X_1, X_2 и X_3 независимы и имеют нормальные законы распределения $N(1,1),\ N(4,4),\ N(-1,1)$ соответственно. Найти $\mathrm{P}(|2X_1-2X_2+X_3|>2)$.

16.1. Производится стрельба по точечной (малоразмерной) цели, зона поражения которой представляет собой круг радиуса r с центром в начале координат. Рассеивание точки попадания снаряда нормальное с параметрами $m_X=m_Y=0,\ \sigma_X=\sigma_Y=2r,\ \mathrm{r}_{XY}=0.$ Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы поразить цель с вероятностью, не меньшей 0,95.

16.2. Дважды бросается игральная кость. Рассматриваются две случайные величины: X – число появлений шестёрки, Y – число появлений чётной цифры. Найти закон распределения и числовые характеристики случайного вектора (X,Y).

17.1. Отклонения снаряда от цели по координатам являются независимыми случайными величинами X и Y, одинаково распределёнными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением, равным одному метру. Найти вероятность того, что снаряд отклонится от цели больше, чем на один метр.

17.2. Задан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y)

X	*Y*		
	-1	*0*	*1*
0	**0**	**0,2**	**0,1**
1	**0,2**	**0,3**	**0,2**

Найти условный закон распределения случайной величины X при условии, что $Y=-1$, и вычислить $\mathrm{M}(X\mid Y=-1)$ и $\mathrm{D}(X\mid Y=2)$.

18.1. На две стороны равностороннего треугольника со стороной **1** наугад ставятся две точки. Найти числовые характеристики случайной величины – расстояния между этими точками.

18.2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-1	0	1
P	1/6	1/3	1/2

Найти числовые характеристики случайного вектора $\left(X, X^2\right)$.

19.1. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $\mathbf{M}X = a$, $\mathbf{D}X = \sigma^2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

19.2. Дискретная случайная величина Φ принимает значения $\varphi_k = \dfrac{k\pi}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$ с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии $p_k = \mathrm{P}\left(\Phi = \varphi_k\right) = qp^k$, $q = 1 - p$. Найти числовые характеристики случайной величины $X = \sin\Phi$.

20.1. Найти функцию распределения, плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в единичном круге с центром в начале координат.

20.2. Случайный вектор (X, Y) имеет математическое ожидание $(-1,1)$ и корреляционную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X - 4Y + 3$.

21.1. Пусть X, Y, Z – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность вероятностей случайной величины $W = X + Y + Z$.

21.2. Случайные величины X и Y независимы и имеют математическое ожидание m и дисперсию σ^2. Найти коэффициент корреляции случайных величин $U = \alpha X + \beta Y$ и $V = \alpha X - \beta Y$.

22.1. Пусть X и Y – число очков, выпавших при бросании двух игральных костей. Найти числовые характеристики случайной величины $Z = \max(X, Y)$.

22.2. На единичный отрезок наугад ставятся две точки. Найти плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины – расстояния между этими точками.

23.1. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно внутри круга единичного радиуса. Найти числовые характеристики случайной величины $Y = e^{-X}$.

23.2. Случайная величина X распределена по показательному закону: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, $\lambda > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{-X}$.

24.1. Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

24.2. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5м. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5м.

25.1. Случайный вектор (X,Y,Z) распределён равномерно внутри шара единичного радиуса. Найти числовые характеристики случайной величины X.

25.2. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y): $f_{XY}(x,y)=ce^{-4(x-5)^2-2(x-5)(y-3)-5(y-3)^2}$. Найти коэффициент с и корреляционную матрицу вектора (X,Y).

---

11 Контрольная работа №2

Вариант 1

X	**Y**		
	-2	*0*	*2*
-1	0,01	0,05	0,09
0	0,05	0,1	0,15
1	0,09	0,15	0,31

1. Дано распределение вероятностей случайного вектора (X,Y).
Найти условное распределение величины Y, при условии, что случайная величина X примет значение равное 0.
Вычислить $\mathbf{M}(Y/X=0), \mathbf{D}(Y/X=0)$.

2. Дана плотность распределения двумерного нормального случайного вектора (X,Y):
$f_{XY}(x,y)=K\cdot\exp\left\{-\left[(x-1)^2+2(x-1)(y+2)+4(y+2)^2\right]\right\}$.
Найти K, математическое ожидание $\mathbf{M}(X,Y)$, корреляционную матрицу $\mathbf{R}$.

3. Радиус шара R – случайная величина, которая равномерно распределена на отрезке [a, b]. Найти функцию распределения площади поверхности шара ($S=4\pi R^2$).

4. Пусть X и Y – независимые равномерно распределенные случайные величины. Причем $X \sim R[-a,a]$, а $Y \sim R[0,a]$. Найти плотность распределения случайной величины $Z=X-Y$.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=-\ln(1-X)$, если случайная величина X равномерно распределена на отрезке [0, 1].

Вариант 2

1. Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид:
$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), & 0\le x\le 6, 0\le y\le 6; \\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$ Найти c, $f_X(x)$, $P\{X>2\}$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-axy-4y^2}dxdy$. При каких значениях параметра a интеграл принимает конечное значение?

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью вероятности: $f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, x\ge 0, \\ 0, \quad x<0\end{cases}$
Найти плотность распределения случайной величины $Y=1-e^{-2X}$.

4. Пусть X и Y – независимые случайные величины, причем X распределена равномерно на отрезке $[0,a]$, а Y имеет показательное распределение: $f_Y(y)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 0; \\ 0, & y<0.\end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $Z=X-Y$.

5. Найти математическое ожидание $\mathbf{M}(U,V)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}$ случайного вектора $(U,V)=(3X+2Y-2,-2X+3Y+1)$, если случайный вектор (X,Y) имеет математическое ожидание $\mathbf{M}(X,Y)=(3,1)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Вариант 3

X	**Y**	
	1	2
-2	0,25	0,1
0	0,15	0,15
2	0,1	0,25

1. Дано распределение вероятностей случайного вектора (X,Y).

Найти одномерные распределения вероятностей случайных величин X и Y, их математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции. Записать корреляционную матрицу $\mathbf{R}$.

2. Дана плотность распределения двумерного нормального случайного вектора (X,Y):

$$f_{XY}(x,y) = K \cdot \exp\left\{-\left[2(x-3)^2 + 6(x-3)(y-4) + 8(y-4)^2\right]\right\}.$$

Найти K, математическое ожидание $\mathbf{M}(X,Y)$, корреляционную матрицу $\mathbf{R}$.

3. Диаметр шара D – случайная величина, которая равномерно распределена на отрезке [1, 2]. Найти функцию распределения объема шара ($V = \frac{1}{6}\pi D^3$).

4. Пусть X и Y – независимые равномерно распределенные случайные величины. Причем $X \sim R[-a,a]$, а $Y \sim R[0,a]$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \frac{1}{X}$, если случайная величина X имеет распределение $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-3/2}, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$

Вариант 4

1. Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 3(x+y)/8, & 0 \le x+y \le 2,\ x \ge 0, y \ge 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти $f_X(x)$, $\mathrm{P}\{1/2 \le X < 1, Y < 1\}$.

2. Найти вероятность того, что гауссовский случайный вектор (X,Y) с параметрами: $\mathbf{M}(X,Y) = (2;-1)$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ попадет внутрь области D, ограниченной эллипсом рассеяния $(x - MX)^2/\sigma_X^2 + (y - MY)^2/\sigma_Y^2 = 4$.

3. Плотность случайной величины X задана формулой $f(x) = \begin{cases} \beta x^{-3/2}, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$ Найти β и плотность распределения случайной величины $Y = \frac{1}{X}$.

4. Пусть X и Y – независимые случайные величины, причем X распределена равномерно на отрезке $[-a,a]$, а $f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \ge 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

5. Найти математическое ожидание $\mathbf{M}(U,V)$ и корр. матрицу $\mathbf{R}$ случайного вектора $(U,V) = (X - 2Y - 1, -2X + 2Y + 1)$, если случайный вектор (X,Y) имеет математическое ожидание $\mathbf{M}(X,Y) = (1,2)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Литература

Основная литература (одновременно изучают данную дисциплину на одном курсе 75 человек).

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2002 г (гриф Минобразования России; 150 экземпляров с учетом стереотипных изданий 1991, 1985гг).
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Физматлит, 2006 г. (гриф Минобразования России, 100 экземпляров).
3. Теория вероятностей. Под ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П. Учебник для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001 г. (гриф Минобразования России; 50 экземпляров).
4. Коломиец Э.И., Дегтярев А.А. Сборник задач по теории вероятностей. Учебное пособие. Изд-во СГАУ, 2006 (гриф УМС по прикладной математике и информатике, 50 экземпляров).

Дополнительная литература

1. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987 г. (и др. издания).
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986 г. (и др. издания).
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 2002 г. (и др. издания).
4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. Свешникова А.А. М.: Наука, 1970 г. (и др. издания).
5. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: «Мир», 1989.
6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: «Наука», 1982.
7. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: «Высшая школа», 1984.
8. Тараскин А.Ф. Статистическое моделирование и метод Монте-Карло: Учебное пособие/ Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1997.
9. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере /Под ред. Фигурнова В.Э. М.: «ИНФРА-М», 1998.
10. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. Минск: Изд-во «Университетское», 1987.

Электронные учебные издания

1. Коломиец Э.И., Дегтярев А.А. Сборник задач по теории вероятностей. (http://virtual6.ssau.ru)
2. Коломиец Э.И. Моделирование и статистический анализ случайных данных. (http://virtual6.ssau.ru)
3. Коломиец Э.И. Курс лекций по теории вероятностей. (http://virtual6.ssau.ru/distance)

Приложение 1. Математические формулы

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Для $|x|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.

Объём шарового сегмента: $V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R-h)$.

Приложение 2. Таблицы функций математической статистики

Функция Лапласа

$$\Phi_0\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \qquad \boxed{x \to \Phi_0\left(x\right)}$$

0.01	.00398	0.02	.00797	0.03	.01196	0.04	.01595	0.05	.01993	0.06	.02392	0.07	.02790	0.08	.03188
0.09	.03585	0.10	.03982	0.11	.04379	0.12	.04775	0.13	.05171	0.14	.05567	0.15	.05961	0.16	.06355
0.17	.06749	0.18	.07142	0.19	.07534	0.20	.07925	0.21	.08316	0.22	.08706	0.23	.09095	0.24	.09483
0.25	.09870	0.26	.10256	0.27	.10641	0.28	.11026	0.29	.11409	0.30	.11791	0.31	.12171	0.32	.12551
0.33	.12930	0.34	.13307	0.35	.13683	0.36	.14057	0.37	.14430	0.38	.14802	0.39	.15173	0.40	.15542
0.41	.15909	0.42	.16275	0.43	.16640	0.44	.17003	0.45	.17364	0.46	.17724	0.47	.18082	0.48	.18438
0.49	.18793	0.50	.19146	0.51	.19497	0.52	.19846	0.53	.20194	0.54	.20540	0.55	.20884	0.56	.21226
0.57	.21566	0.58	.21904	0.59	.22240	0.60	.22574	0.61	.22906	0.62	.23237	0.63	.23565	0.64	.23891
0.65	.24215	0.66	.24537	0.67	.24857	0.68	.25174	0.69	.25490	0.70	.25803	0.71	.26114	0.72	.26423
0.73	.26730	0.74	.27035	0.75	.27337	0.76	.27637	0.77	.27935	0.78	.28230	0.79	.28523	0.80	.28814
0.81	.29102	0.82	.29389	0.83	.29673	0.84	.29954	0.85	.30233	0.86	.30510	0.87	.30784	0.88	.31057
0.89	.31326	0.90	.31593	0.91	.31858	0.92	.32121	0.93	.32381	0.94	.32639	0.95	.32894	0.96	.33147
0.97	.33397	0.98	.33645	0.99	.33891	1.00	.34134	1.01	.34375	1.02	.34613	1.03	.34849	1.04	.35083
1.05	.35314	1.06	.35542	1.07	.35769	1.08	.35992	1.09	.36214	1.10	.36433	1.11	.36650	1.12	.36864
1.13	.37076	1.14	.37285	1.15	.37492	1.16	.37697	1.17	.37899	1.18	.38099	1.19	.38297	1.20	.38493
1.21	.38686	1.22	.38876	1.23	.39065	1.24	.39251	1.25	.39435	1.26	.39616	1.27	.39795	1.28	.39972
1.29	.40147	1.30	.40319	1.31	.40490	1.32	.40658	1.33	.40824	1.34	.40987	1.35	.41149	1.36	.41308
1.37	.41465	1.38	.41620	1.39	.41773	1.40	.41924	1.41	.42073	1.42	.42219	1.43	.42364	1.44	.42506
1.45	.42647	1.46	.42785	1.47	.42921	1.48	.43056	1.49	.43188	1.50	.43319	1.51	.43447	1.52	.43574
1.53	.43699	1.54	.43821	1.55	.43942	1.56	.44062	1.57	.44179	1.58	.44294	1.59	.44408	1.60	.44520
1.61	.44630	1.62	.44738	1.63	.44844	1.64	.44949	1.65	.45052	1.66	.45154	1.67	.45254	1.68	.45352
1.69	.45448	1.70	.45543	1.71	.45636	1.72	.45728	1.73	.45818	1.74	.45907	1.75	.45994	1.76	.46079
1.77	.46163	1.78	.46246	1.79	.46327	1.80	.46406	1.81	.46485	1.82	.46562	1.83	.46637	1.84	.46711
1.85	.46784	1.86	.46855	1.87	.46925	1.88	.46994	1.89	.47062	1.90	.47128	1.91	.47193	1.92	.47257
1.93	.47319	1.94	.47381	1.95	.47441	1.96	.47500	1.97	.47558	1.98	.47614	1.99	.47670	2.00	.47724
2.01	.47778	2.02	.47830	2.03	.47882	2.04	.47932	2.05	.47981	2.06	.48030	2.07	.48077	2.08	.48123
2.09	.48169	2.10	.48213	2.11	.48257	2.12	.48299	2.13	.48341	2.14	.48382	2.15	.48422	2.16	.48461
2.17	.48499	2.18	.48537	2.19	.48573	2.20	.48609	2.21	.48644	2.22	.48679	2.23	.48712	2.24	.48745
2.25	.48777	2.26	.48808	2.27	.48839	2.28	.48869	2.29	.48898	2.30	.48927	2.31	.48955	2.32	.48982
2.33	.49009	2.34	.49035	2.35	.49061	2.36	.49086	2.37	.49110	2.38	.49134	2.39	.49157	2.40	.49180
2.41	.49202	2.42	.49223	2.43	.49245	2.44	.49265	2.45	.49285	2.46	.49305	2.47	.49324	2.48	.49343
2.49	.49361	2.50	.49379	2.51	.49396	2.52	.49413	2.53	.49429	2.54	.49445	2.55	.49461	2.56	.49476
2.57	.49491	2.58	.49505	2.59	.49520	2.60	.49533	2.61	.49547	2.62	.49560	2.63	.49573	2.64	.49585
2.65	.49597	2.66	.49609	2.67	.49620	2.68	.49631	2.69	.49642	2.70	.49653	2.71	.49663	2.72	.49673
2.73	.49683	2.74	.49692	2.75	.49702	2.76	.49710	2.77	.49719	2.78	.49728	2.79	.49736	2.80	.49744
2.81	.49752	2.82	.49759	2.83	.49767	2.84	.49774	2.85	.49781	2.86	.49788	2.87	.49794	2.88	.49801
2.89	.49807	2.90	.49813	2.91	.49819	2.92	.49824	2.93	.49830	2.94	.49835	2.95	.49841	2.96	.49846
2.97	.49851	2.98	.49855	2.99	.49860	3.00	.49865	3.01	.49869	3.02	.49873	3.03	.49877	3.04	.49881
3.05	.49885	3.06	.49889	3.07	.49892	3.08	.49896	3.09	.49899	3.10	.49903	3.11	.49906	3.12	.49909
3.13	.49912	3.14	.49915	3.15	.49918	3.16	.49921	3.17	.49923	3.18	.49926	3.19	.49928	3.20	.49931
3.21	.49933	3.22	.49935	3.23	.49938	3.24	.49940	3.25	.49942	3.26	.49944	3.27	.49946	3.28	.49948
3.29	.49949	3.30	.49951	3.31	.49953	3.32	.49954	3.33	.49956	3.34	.49958	3.35	.49959	3.36	.49961
3.37	.49962	3.38	.49963	3.39	.49965	3.40	.49966	3.41	.49967	3.42	.49968	3.43	.49969	3.44	.49970
3.45	.49971	3.46	.49972	3.47	.49973	3.48	.49974	3.49	.49975	3.50	.49976				

3.51	.4997759	3.52	.4997842	3.53	.4997922	3.54	.4997999	3.55	.4998073	3.56	.4998145	3.57	.4998215
3.58	.4998282	3.59	.4998346	3.60	.4998408	3.61	.4998469	3.62	.4998526	3.63	.4998582	3.64	.4998636
3.65	.4998688	3.66	.4998738	3.67	.4998787	3.68	.4998833	3.69	.4998878	3.70	.4998922	3.71	.4998963
3.72	.4999003	3.73	.4999042	3.74	.4999079	3.75	.4999115	3.76	.4999150	3.77	.4999183	3.78	.4999215
3.79	.4999246	3.80	.4999276	3.81	.4999305	3.82	.4999332	3.83	.4999359	3.84	.4999384	3.85	.4999409
3.86	.4999433	3.87	.4999455	3.88	.4999477	3.89	.4999498	3.90	.4999519	3.91	.4999538	3.92	.4999557
3.93	.4999575	3.94	.4999592	3.95	.4999609	3.96	.4999625	3.97	.4999640	3.98	.4999655	3.99	.4999669
4.00	.4999683	4.01	.4999696	4.02	.4999709	4.03	.4999721	4.04	.4999732	4.05	.4999743	4.06	.4999754
4.07	.4999764	4.08	.4999774	4.09	.4999784	4.10	.4999793	4.11	.4999802	4.12	.4999810	4.13	.4999818
4.14	.4999826	4.15	.4999833	4.16	.4999840	4.17	.4999847	4.18	.4999854	4.19	.4999860	4.20	.4999866
4.21	.4999872	4.22	.4999877	4.23	.4999883	4.24	.4999888	4.25	.4999893	4.26	.4999897	4.27	.4999902
4.28	.4999906	4.29	.4999910	4.30	.4999914	4.31	.4999918	4.32	.4999921	4.33	.4999925	4.34	.4999928
4.35	.4999931	4.36	.4999934	4.37	.4999937	4.38	.4999940	4.39	.4999943	4.40	.4999945	4.41	.4999948
4.42	.4999950	4.43	.4999952	4.44	.4999955	4.45	.4999957	4.46	.4999959	4.47	.4999960	4.48	.4999962
4.49	.4999964	4.50	.4999966	4.51	.4999967	4.52	.4999969	4.53	.4999970	4.54	.4999971	4.55	.4999973
4.56	.4999974	4.57	.4999975	4.58	.4999976	4.59	.4999977	4.60	.4999978	4.61	.4999979	4.62	.4999980
4.63	.4999981	4.64	.4999982	4.65	.4999983	4.66	.4999984	4.67	.4999984	4.68	.4999985	4.69	.4999986
4.70	.4999986	4.71	.4999987	4.72	.4999988	4.73	.4999988	4.74	.4999989	4.75	.4999989	4.76	.4999990
4.77	.4999990	4.78	.4999991	4.79	.4999991	4.80	.4999992	4.81	.4999992	4.82	.4999992	4.83	.4999993
4.84	.4999993	4.85	.4999993	4.86	.4999994	4.87	.4999994	4.88	.4999994	4.89	.4999994	4.90	.4999995
4.91	.4999995	4.92	.4999995	4.93	.4999995	4.94	.4999996	4.95	.4999996	4.96	.4999996	4.97	.4999996
4.98	.4999996	4.99	.4999996	5.00	.4999997								

Обратная функция Лапласа

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du = p\,; \quad x = \Phi_0^{-1}(p)$$

$\boxed{p \to x}$

.005	.01253	.010	.02506	.015	.03760	.020	.05015	.025	.06270	.030	.07526
.035	.08784	.040	.10043	.045	.11303	.050	.12566	.055	.13830	.060	.15096
.065	.16365	.070	.17637	.075	.18911	.080	.20189	.085	.21470	.090	.22754
.095	.24042	.100	.25334	.105	.26631	.110	.27931	.115	.29237	.120	.30548
.125	.31863	.130	.33185	.135	.34512	.140	.35845	.145	.37185	.150	.38532
.155	.39885	.160	.41246	.165	.42614	.170	.43991	.175	.45376	.180	.46769
.185	.48172	.190	.49585	.195	.51007	.200	.52440	.205	.53883	.210	.55338
.215	.56805	.220	.58284	.225	.59776	.230	.61281	.235	.62800	.240	.64334
.245	.65883	.250	.67448	.255	.69030	.260	.70630	.265	.72247	.270	.73884
.275	.75541	.280	.77219	.285	.78919	.290	.80642	.295	.82389	.300	.84162
.305	.85961	.310	.87789	.315	.89647	.320	.91536	.325	.93458	.330	.95416
.335	.97411	.340	.99445	.345	1.01522	.350	1.03643	.355	1.05812	.360	1.08031
.365	1.10306	.370	1.12639	.375	1.15034	.380	1.17498	.385	1.20035	.390	1.22652
.395	1.25356	.400	1.28155	.405	1.31057	.410	1.34075	.415	1.37220	.420	1.40507
.425	1.43953	.430	1.47579	.435	1.51410	.440	1.55477	.445	1.59819	.450	1.64485
.451	1.65462	.452	1.66456	.453	1.67466	.454	1.68494	.455	1.69539	.456	1.70604
.457	1.71688	.458	1.72793	.459	1.73919	.460	1.75068	.461	1.76241	.462	1.77438
.463	1.78661	.464	1.79911	.465	1.81191	.466	1.82500	.467	1.83842	.468	1.85217
.469	1.86629	.470	1.88079	.471	1.89569	.472	1.91103	.473	1.92683	.474	1.94313
.475	1.95996	.476	1.97736	.477	1.99539	.478	2.01409	.479	2.03352	.480	2.05374
.481	2.07485	.482	2.09692	.483	2.12007	.484	2.14441	.485	2.17009	.486	2.19728
.487	2.22621	.488	2.25712	.489	2.29036	.490	2.32634	.491	2.36561	.492	2.40891
.493	2.45726	.494	2.51214	.495	2.57582	.4951	2.58280	.4952	2.58991	.4953	2.59715
.4954	2.60453	.4955	2.61205	.4956	2.61972	.4957	2.62755	.4958	2.63555	.4959	2.64372
.4960	2.65206	.4961	2.66060	.4962	2.66934	.4963	2.67828	.4964	2.68744	.4965	2.69684
.4966	2.70648	.4967	2.71638	.4968	2.72655	.4969	2.73701	.4970	2.74778	.4971	2.75887
.4972	2.77032	.4973	2.78215	.4974	2.79437	.4975	2.80703	.4976	2.82015	.4977	2.83378
.4978	2.84796	.4979	2.86273	.4980	2.87816	.4981	2.89430	.4982	2.91123	.4983	2.92904
.4984	2.94784	.4985	2.96773	.4986	2.98888	.4987	3.01145	.4988	3.03567	.4989	3.06181
.4990	3.09023	.4991	3.12138	.4992	3.15590	.4993	3.19465	.4994	3.23888	.4995	3.29052
.49951	3.29620	.49952	3.30199	.49953	3.30789	.49954	3.31391	.49955	3.32005	.49956	3.32632
.49957	3.33272	.49958	3.33926	.49959	3.34595	.49960	3.35279	.49961	3.35979	.49962	3.36696
.49963	3.37431	.49964	3.38184	.49965	3.38957	.49966	3.39751	.49967	3.40567	.49968	3.41407
.49969	3.42271	.49970	3.43161	.49971	3.44079	.49972	3.45028	.49973	3.46008	.49974	3.47023
.49975	3.48075	.49976	3.49167	.49977	3.50302	.49978	3.51485	.49979	3.52718	.49980	3.54008
.49981	3.55359	.49982	3.56779	.49983	3.58274	.49984	3.59854	.49985	3.61529	.49986	3.63313
.49987	3.65220	.49988	3.67270	.49989	3.69486	.49990	3.71901	.49991	3.74554	.49992	3.77501
.49993	3.80816	.49994	3.84612	.49995	3.89059						

.499951	3.89549	.499952	3.90048	.499953	3.90557	.499954	3.91077	.499955	3.91608
.499956	3.92149	.499957	3.92703	.499958	3.93269	.499959	3.93847	.499960	3.94439
.499961	3.95046	.499962	3.95667	.499963	3.96304	.499964	3.96957	.499965	3.97628
.499966	3.98317	.499967	3.99026	.499968	3.99755	.499969	4.00506	.499970	4.01281
.499971	4.02080	.499972	4.02906	.499973	4.03760	.499974	4.04645	.499975	4.05562
.499976	4.06515	.499977	4.07507	.499978	4.08540	.499979	4.09619	.499980	4.10747
.499981	4.11931	.499982	4.13175	.499983	4.14487	.499984	4.15874	.499985	4.17346
.499986	4.18914	.499987	4.20593	.499988	4.22400	.499989	4.24356	.499990	4.26488
.499991	4.28835	.499992	4.31444	.499993	4.34385	.499994	4.37758	.499995	4.41717
.4999951	4.42153	.4999952	4.42598	.4999953	4.43053	.4999954	4.43516	.4999955	4.43989
.4999956	4.44473	.4999957	4.44967	.4999958	4.45472	.4999959	4.45989	.4999960	4.46517
.4999961	4.47059	.4999962	4.47614	.4999963	4.48184	.4999964	4.48768	.4999965	4.49368
.4999966	4.49984	.4999967	4.50619	.4999968	4.51272	.4999969	4.51944	.4999970	4.52638
.4999971	4.53354	.4999972	4.54094	.4999973	4.54860	.4999974	4.55654	.4999975	4.56478
.4999976	4.57333	.4999977	4.58224	.4999978	4.59152	.4999979	4.60122	.4999980	4.61137
.4999981	4.62202	.4999982	4.63322	.4999983	4.64503	.4999984	4.65753	.4999985	4.67080
.4999986	4.68495	.4999987	4.70011	.4999988	4.71643	.4999989	4.73411	.4999990	4.75340
.4999991	4.77465	.4999992	4.79830	.4999993	4.82498	.4999994	4.85561	.4999995	4.89160

Квантили χ^2-распределения Пирсона

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)}\int_{\chi^2}^{\infty} u^{n/2-1}e^{-u/2}du = p$$

$\boxed{n, p \to \chi^2}$

N	p										
	0.990	0.980	0.950	0.900	0.800	0.500	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	1.386	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	2.366	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	3.357	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	4.351	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	5.348	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	6.346	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	7.344	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	8.343	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	9.342	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	10.341	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	11.340	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	12.340	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	13.339	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	14.339	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	15.338	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	16.338	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	17.338	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	18.338	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	19.337	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	20.337	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	21.337	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	22.337	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	23.337	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	24.337	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	25.336	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	26.336	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	27.336	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	28.336	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	29.336	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

Квантили *t*-распределения Стьюдента

$$\frac{\Gamma\left(\left(n+1\right)/2\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(n/2\right)}\int_{-t}^{t}\left(1+u^2/n\right)^{-(n+1)/2}du = p$$

$\boxed{n, p \to t}$

n	p								
	0.500	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990	0.995	0.998	0.999
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.675	1.282	1.645	1.960	2.327	2.576	2.808	3.091	3.291

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Коломиец Э.И.

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Варианты контрольных работ

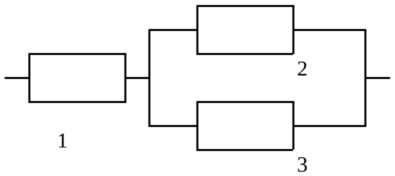
для студентов, обучающихся по специальности 090303.62 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Самара 2012

Содержание

Вариант 1

1. На шахматную доску произвольным образом поставили две ладьи. Какова вероятность того, что ладьи находятся под ударом друг друга.
2. Товарный и пассажирский поезда должны пройти через стрелку с 11 часов до 11 часов 30 минут. Время прихода поезда независимо и равновозможно. Товарный поезд проходит стрелку за 10 минут, а пассажирский - за 5 минут. Светофор переключается с красного на зеленый свет через 2 минуты после прохода поезда. Найти вероятность того, что один из поездов подъедет к стрелке на красный свет.
3. Доля годных (не бракованных) изделий в продукции первого завода составляет 85%, в продукции второго завода – 90%, в продукции третьего – 95%. Берут 2000 изделий первого завода, 1000 изделий второго, 3000 изделий третьего и смешивают в одну кучу. Какова вероятность того, что выбранное наугад из этой кучи изделие окажется бракованным?
4. Вероятность события в схеме Бернулли p=0,4; число испытаний n=1000. $P(m_1 \le m \le m_2) = 0{,}99$. Найти m_1 и m_2.
5. На схеме вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}7$. Элементы работают независимо друг от друга. Схема не работает. Найти вероятность того, что отказал 2-й элемент.



Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 1

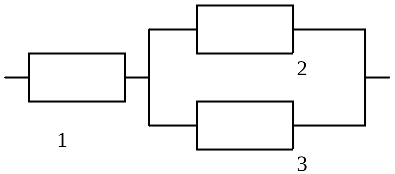
Вариант 2

1. Из последовательности чисел 1,2,…,n наугад выбирают два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ - целое число?
2. Два теплохода должны подойти к одному причалу. Время прихода каждого из них равновозможно в течение суток и не зависит от времени прихода другого. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода 1 час, а второго – 2 часа.
3. Доля брака для первого станка составляет 5%, для второго – 10%. Берут 400 деталей, изготовленных на первом станке, 600 деталей, изготовленных на втором, и смешивают в одну кучу. Взятая наугад из кучи деталь оказалась годной (не бракованной). На каком станке вероятнее всего она изготовлена?
4. Вероятность события в схеме Бернулли p=0,6. Вероятность того, что относительная частота наступления события $\frac{m}{n}$ отклонится от p в ту или другую сторону не больше, чем на $\delta p = 0{,}02$: $P\left(\left|p - \frac{m}{n}\right| \le \delta p\right) = 0{,}95$. Сколько испытаний n необходимо для этого провести?
5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления второго мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет четверо детей.

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 1

Вариант 3

1. Восемь команд спортсменов разбиваются случайным образом на две группы по четыре команды в каждой группе. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в одной группе.
2. Девушка и юноша договорились встретиться у кинотеатра с 17 часов до 17 часов 30 минут. Если девушка придет раньше юноши, она будет ждать не более 10 минут, а юноша обязательно дождется девушки. Какова вероятность их встречи?
3. Доля брака для первого станка составляет 15%, для второго – 10%, для третьего – 5%. Берут 500 деталей, изготовленных на первом станке, 300 деталей, изготовленных на втором, 200 деталей, изготовленных на третьем, и смешивают в одну кучу. Какова вероятность того, что взятая наугад из кучи деталь окажется годной (не бракованной)?
4. Известно, что 30% призывников носят обувь 42 размера. Сколько пар обуви указанного размера необходимо иметь на складе воинской части, чтобы с вероятностью 0,9 обеспечить всех таких призывников, если планируется прибытие 200 новобранцев?
5. На схеме вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,5$. Элементы работают независимо друг от друга. Схема не работает. Найти вероятность того, что отказал 1-й элемент.



Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 1

Вариант 4

1. Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.
2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет другого в течении ¼ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).
3. Доля годных (не бракованных) изделий в продукции первого завода составляет 90%, в продукции второго завода – 95%. Берут 4000 изделий первого завода, 1000 изделий второго и смешивают в одну кучу. Взятое наугад из кучи изделие оказалось бракованным. На каком заводе вероятнее всего оно изготовлено?
4. Число испытаний в схеме Бернулли n=10 , вероятность успеха p=0,7 . Найти вероятность того, что число успехов будет не менее 9. Сравнить с оценкой вероятности, полученной с использованием локальной предельной теоремы Муавра-Лапласа.
5. Дуэль снайперов. Сначала стреляет 1-й снайпер и с вероятностью p_1 убивает 2-го. В случае промаха 1-го стреляет 2-й снайпер и с вероятностью p_2 убивает 1-го. В случае промаха 2-го стреляет опять 1-й снайпер и убивает 2-го с вероятностью p_3 . Найти вероятности следующих исходов дуэли: A – {убит 1-й}, B – {убит 2-й}, C – {убит хотя бы один из снайперов}, D – {убит ровно один снайпер}, E – {оба остались живы}.

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 2

Вариант 25

6. Опыт заключается в бросании трех монет. Такие опыты повторяют до первого выпадения хотя бы одного орла. Найти функцию распределения (и построить график) $F(x)$ и математическое ожидание случайной величины X – числа проведенных опытов.
7. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид $f(x) = a\sin x$ в интервале $(0, \pi)$ и равна нулю вне этого интервала. Найти a, $F(x)$, MX и $P\{-\pi/2 \le x \le \pi/4\}$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.
8. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/16, & 0 \le x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$
Найти $f(x)$, MX, DX.
9. Масса коробок с шоколадом, которые упаковываются автоматически, может считаться случайной величиной, имеющей нормальное распределение. Средняя масса коробки равна 6 кг. Известно, что 5 % коробок имеют массу меньшую 5,9 кг. Найти процент коробок, масса которых превышает 5,8 кг.
10. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $N = 4,\ p = 0{,}8$. Найти MX, DX и $P\{-1 \le x \le 3\}$.

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 2

Вариант 26

6. В мешке находятся 8 карточек, на которых написаны числа от 1 до 8. Карточки извлекаются наугад с возвращением до тех пор, пока не попадется либо нечетное число, либо число, большее 5. Найти функцию распределения (и построить график) $F(x)$ и математическое ожидание случайной величины X – числа извлеченных карточек.
7. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид $f(x) = a(x+1)^2$ в интервале (-1, 1) и равна нулю вне этого интервала. Найти a, $F(x)$, и $P\{-2 \le x \le 0\}$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.
8. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi/6, \\ a \cdot Cos3x, & \pi/6 \le x \le \pi/3, \\ 1, & x > \pi/3. \end{cases}$$
Найти a, $f(x)$, MX, DX.
9. Случайная величина X распределена по закону $N(2, \sigma^2)$. Известно, что $P\{X > 1\} = 0{,}98$. Вычислить MX^2 и $P\{X > 3\}$.
10. Случайная величина X имеет равномерное распределение с параметрами $a = 1, b = 5$. Найти MX, DX и $P\{2 \le x \le 6\}$.

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 2

Вариант 27

1. Опыт заключается в бросании двух игральных костей. Такие опыты повторяют до первого выпадения двух шестерок. Найти функцию распределения (и построить график) $F(x)$ и математическое ожидание случайной величины *X* – числа проведенных опытов.
2. Плотность распределения непрерывной случайной величины *X* имеет вид $f(x) = a(\cos x + 1)$ в интервале (-π, π) и равна нулю вне этого интервала. Найти a, $F(x)$, MX и $P\{-\pi/2 \le x \le 3\pi/2\}$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.
3. Функция распределения непрерывной случайной величины *X* имеет вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/36, & 0 \le x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$
Найти $f(x)$, MX, DX.
4. Случайная величина *X* имеет гауссовское распределение, причем $P\{X < 4\} = 0{,}25$ и $P\{X > 5\} = 0{,}55$. Найти $m = \mathrm{M}X$ и $\sigma^2 = \mathrm{D}X$.
5. Случайная величина *X* имеет показательное распределение с параметром $a = 0{,}5$. Найти MX, DX и $P\{-1 \le x \le 2\}$.

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 2

Вариант 28

1. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, извлекают наудачу по два шара одновременно. Шары возвращают в урну, и опыт повторяют до первого появления двух белых шаров. Найти функцию распределения (и построить график) $F(x)$ и математическое ожидание случайной величины *X* – числа проведенных опытов.
2. Плотность распределения непрерывной случайной величины *X* имеет вид $f(x) = \frac{3}{2}x^2, |x| \le h$ и равна нулю вне указанного интервала. Найти h, $F(x)$, и $P\left\{-\frac{3}{2}h \le x \le \frac{h}{2}\right\}$.
Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.
3. Функция распределения непрерывной случайной величины *X* имеет вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a \cdot (1 - \mathrm{Cos}\, x), & 0 \le x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$
Найти a, $f(x)$, MX, DX.
4. Случайная величина *X* распределена по закону $N(a, \sigma^2)$, причем $\sigma^2 = 2$. Известно, что $P\{X > -1\} = 0{,}9$. Найти *a* и $P\{X > 2\}$.
5. Случайная величина *X* имеет распределение Пуассона с параметром $a = 0{,}5$. Найти MX, DX и $P\{-1 \le x \le 2\}$.

Вариант 25

1. Дано распределение вероятностей случайного вектора (X, Y):

$x \backslash y$	-2	0	2
-1	0,01	0,05	0,09
0	0,05	0,1	0,15
1	0,09	0,15	0,31

Найти совместную функцию распределения $F(x, y)$. Найти условное распределение величины Y, при условии, что случайная величина X примет значение равное 0. Вычислить $M(Y/X=0), D(Y/X=0)$.

2. Дана плотность распределения двумерного нормального случайного вектора (X,Y):

$$f_{XY}(x,y) = K \cdot \exp\left\{-\left[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + 4(y+2)^2\right]\right\}.$$

Найти K, математическое ожидание $M(X,Y)$, корреляционную матрицу $\mathbf{R}$.

3. Радиус шара R – случайная величина, которая равномерно распределена на отрезке [a, b]. Найти функцию распределения площади поверхности шара ($S = 4\pi R^2$).

4. Пусть X и Y независимые равномерно распределенные случайные величины. Причем $X \sim R[-a,a]$, а $Y \sim R[0,a]$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X - Y$.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = -\ln(1-X)$, если случайная величина X равномерно распределена на отрезке [0, 1].

Вариант 26

1. Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид: $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 6; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Найти c, $f_X(x)$, $\mathrm{P}\{X > 2\}$.

2. Написать уравнение эллипса рассеяния, в который случайный вектор (X,Y), распределенный по нормальному закону, с параметрами: $M(X,Y) = (-2;1)$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, попадает с вероятностью 0,99.

3. Случайная величина X имеет показательное распределение $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ с параметром $\lambda = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = 1 - e^{-X/2}$.

4. Пусть X и Y независимые случайные величины. Причем $X \sim R[0,a]$, то есть, распределена равномерно, а $f_y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \ge 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $Z = X - Y$.

5. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}(U,V)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}$ случайного вектора $(U,V) = (3X + 2Y - 2, -2X + 3Y + 1)$, если случайный вектор (X,Y) имеет математическое ожидание $\mathrm{M}(X,Y) = (3,1)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 27

1. Дано распределение вероятностей случайного вектора (X,Y):

$x \backslash y$	1	2
-2	0,25	0,1
0	0,15	0,15
2	0,1	0,25

Найти одномерные распределения вероятностей случайных величин *X* и *Y*, их математические ожидания M*X* и M*Y*, дисперсии D*X* и D*Y* и коэффициент корреляции *r*. Записать корреляционную матрицу R.

2. Дана плотность распределения двумерного нормального случайного вектора (X,Y):

$$f_{XY}(x,y)=K\cdot\exp\left\{-\left[2(x-3)^2+6(x-3)(y-4)+8(y-4)^2\right]\right\}.$$

Найти K, математическое ожидание $M(X,Y)$, корреляционную матрицу $\mathbf{R}$.

3. Диаметр шара D – случайная величина, которая равномерно распределена на отрезке [1, 2]. Найти функцию распределения объема шара ($V=\dfrac{1}{6}\pi D^3$).

4. Пусть X и Y независимые равномерно распределенные случайные величины. Причем $X \sim R[-a,a]$, а $Y \sim R[0,a]$. Найти плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=\dfrac{1}{X}$, если случайная величина *X* имеет распределение $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^{-3/2}, & x\ge 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$

Вариант 28

1. Совместная плотность распределения случайных величин *X* и *Y* имеет вид: $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}3(x+y)/8, & 0\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

Найти $f_X(x)$, $\mathrm{P}\{1/2\le X<1, Y<1\}$.

2. Найти вероятность того, что гауссовский случайный вектор (X,Y) с параметрами: $M(X,Y)=(2;-1)$, $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, попадет внутрь области *D*, ограниченной эллипсом рассеяния $(x-MX)^2/\sigma_X^2+(y-MY)^2/\sigma_Y^2=4$.

3. Плотность случайной величины *X* задана формулой $f(x)=\begin{cases}\beta x^{-3/2}, & x\ge 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$ Найти β, плотность распределения случайной величины $Y=\dfrac{1}{X}$.

4. Пусть X и Y независимые случайные величины. Причем $X \sim R[-a,a]$, то есть, распределена равномерно, а $f_y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 0;\\ 0, & y<0.\end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$.

5. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}(U,V)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}$ случайного вектора $(U,V)=(X-2Y-1,\ -2X+2Y+1)$, если случайный вектор (X,Y) имеет математическое ожидание $\mathrm{M}(X,Y)=(1,2)$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Вариант 1

11. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность $\mathrm{P}\{|X-a| > 3\sigma\}$. Сравнить с точным значением этой вероятности.
12. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения 1 и –1 с вероятностями $1/2$. Найти характеристическую функцию случайной величины $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Найти $\mathrm{M}S_n$ и $\mathrm{D}S_n$ двумя способами: обычным и через характеристическую функцию.
13. Стрелок при выстреле по мишени попадает в десятку с вероятностью 0,4; в девятку – 0,3; в восьмерку – 0,15; в семерку – 0,1; в шестерку – 0,05. Стрелок сделал N выстрелов. С вероятностью γ сумма набранных очков: $1725 < S_N < 1835$. Используя центральную предельную теорему, определить N и γ.
14. Величины X_1 è X_2 независимы и имеют нормальные распределения $N(0,2)$ è $N\left(1, 1/2\right)$ соответственно. Используя характеристические функции, найти $\mathrm{P}\{|-X_1 + 2X_2| < 4\}$.
6. Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра p геометрического распределения:

$$P(X = x_i) = p \cdot (1-p)^{x_i - 1},\ x_i = 1, 2, 3, \dots$$

по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ объема n.

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 4

Вариант 2

11. Планируют провести 100 измерений $\{X_i\},\ i = \overline{1{,}100}$ неизвестной величины a. Считая $\{X_i\},\ i = \overline{1{,}100}$ независимыми, нормальными случайными величинами с $\mathrm{M}X_i = a$, $\mathrm{D}X_i = 0{,}05$, $i = \overline{1{,}100}$, найти наименьшее Δ такое, чтобы выполнялось неравенство $\mathrm{P}\left\{\left|\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i\right) - a\right| < \Delta\right\} \ge 0{,}95$. Найти точное значение Δ и сравнить с оценкой, полученной с помощью неравенства Чебышева.
12. Найти закон распределения, соответствующий характеристической функции $\varphi(t) = \cos^2 t$. Найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$ двумя способами: обычным и через характеристическую функцию.
4. Игральную кость бросают N раз и подсчитывают сумму выпавших очков S_N. Оказалось, что $6873 < S_N < 7127$ с надежностью γ. Найти N и γ, используя центральную предельную теорему.
5. Величины X_1 è X_2 независимы и имеют нормальные распределения $N(1,1)$ è $N(0,2)$ соответственно. Используя характеристические функции, найти $\mathrm{P}\{|2X_1 - X_2| < 3\}$.
6. Найти методом моментов оценку параметров a и b равномерного распределения $(X \sim R[a;b])$ по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ объема n.

Вариант 3

6. Вероятность появления события A в одном опыте равна $1/2$. Используя неравенство Чебышева проверить, можно ли с вероятностью, большей 0,97, утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых опытах будет в пределах от 400 до 600?
7. Найти закон распределения, соответствующий характеристической функции $\varphi(t) = \cos^n t$. Найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$ двумя способами: обычным и через характеристическую функцию.
8. Стрелок при выстреле по мишени попадает в десятку с вероятностью 0,3; в девятку – 0,25; в восьмерку – 0,2; в семерку – 0,15; в шестерку – 0,1. Стрелок сделал 500 выстрелов. Используя центральную предельную теорему, определить в каких пределах будет находиться сумма набранных очков с вероятностью 0,999.
9. Величины X_1 è X_2 независимы и имеют нормальные распределения $N(2,1)$ è $N(1,3)$ соответственно. Используя характеристические функции, найти $\mathrm{P}\{|-X_1 + X_2| < 2\}$.
10. Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра λ показательного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n

Дисциплина: ТВ и МС *Контрольная* № 4

Вариант 4

1. Какое число испытаний n нужно провести в схеме Бернулли, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{\eta}{n} - p\right| < 0{,}03$ превысила 0,9 ? Считать вероятность события в отдельном испытании $p = 0{,}6$; η- число появления событий в n испытаниях; использовать неравенство Чебышева.
2. Найти закон распределения, соответствующий характеристической функции $\varphi(t) = \cos^3 t$. Найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$ двумя способами: обычным и через характеристическую функцию.
3. Игральную кость бросают 500 раз и подсчитывают сумму выпавших очков S_N. Оказалось, что $1674 < S_N < 1826$ с надежностью γ. Найти γ, используя центральную предельную теорему.
4. Величины X_1 è X_2 независимы и имеют нормальные распределения $N(1,1)$ è $N\left(0, 1/2\right)$ соответственно. Используя характеристические функции, найти $\mathrm{P}\{|X_1 - 2X_2| < 2\}$.
5. Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра λ распределения Пуассона:

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}, \; x_i = 0, 1, 2, \ldots$$

по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Коломиец Э.И.

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Вопросы к коллоквиумам и примеры заданий

для студентов, обучающихся по специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Самара 2012

Содержание

Вопросы к коллоквиуму № 1 по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"
для специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Раздел «Элементарная теория вероятностей»

Теоретические вопросы:

1. Случайный эксперимент. Пространство элементарных событий. Случайные события и операции над ними.
2. Классическое определение вероятности. Урновая схема. Пример.
3. Геометрическое определение вероятности. Пример.
4. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Теорема сложения вероятностей.
5. Условная вероятность и ее свойства. Правило и теорема умножения вероятностей.
6. Независимость событий. Свойства независимых событий. Независимость в совокупности.
7. Формулы полной вероятности и Байеса. Пример.
8. Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов.

Пример практического задания

Задача 1. Числа 1, 2, …, 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятность того, что: а) числа будут записаны в порядке убывания (возрастания); б) числа 1, 2 и 3 будут стоять рядом (в порядке убывания, в порядке возрастания).

Задача 2. Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время их прихода равновозможно в течение суток. Какова вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки одного теплохода – 2 часа, а второго – 3 часа?

Задача 3. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0,9, второго – 0,8. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятности событий $A_1 = \{\text{отказал только первый узел}\}$ и. $A_2 = \{\text{отказали оба узла}\}$ (повторить все задачи на схемы).

Задача 4. Из трех пистолетов выбирается наудачу один и производится выстрел. Вероятности попадания в цель из пистолетов соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Известно, что произошел промах. Из какого пистолета вероятнее всего был произведен выстрел?

Задача 5. Событие В наступает в том случае, если событие А появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события В, если вероятность появления события А при одном опыте равна 0,3 и произведено 5 независимых опытов.

Автор-составитель: ______________________________ Коломиец Э.И.

Вопросы к коллоквиуму № 2 по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"
для специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Раздел «Случайные величины»

Теоретические вопросы

1. Понятие случайной величины (СВ). Функция распределения СВ и ее свойства.
2. Дискретные СВ. Закон распределения (ЗР) дискретной СВ.
3. Непрерывные СВ. Плотность вероятностей и ее свойства.
4. Математическое ожидание дискретных и непрерывных СВ.
5. Моменты, дисперсия и среднеквадратическое отклонение СВ. Свойства дисперсии.
6. Биномиальный ЗР. Числовые характеристики (ЧХ) биномиальной СВ.
7. Геометрический ЗР. ЧХ геометрической СВ.
8. Пуассоновский ЗР. ЧХ пуассоновской СВ.
9. Равномерный ЗР. ЧХ равномерно распределенной СВ.
10. Показательный ЗР. ЧХ показательно распределенной СВ.
11. Нормальный (гауссовский) ЗР, смысл его параметров.
12. Функция Лапласа и ее свойства. Вероятность попадания гауссовской СВ в заданный интервал. Правило трех сигма.

Пример практического задания

<u>Задача 1.</u> Вероятность вынуть бракованную деталь из большой партии равна 0,1. Вынимаются 3 детали. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины X - числа появившихся при этом бракованных деталей. Найти математической ожидание и дисперсию случайной величины X.
<u>Задача 2.</u> Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, но не более трех раз. Вероятность попадания в корзину при каждом бросании равна 0,75. Найти: а) закон распределения случайной величины X - числа произведенных бросков; б) функцию распределения случайной величины X; в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$.
<u>Задача 3.</u> Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \; x\le 0;\\ ax^3, \; 0<x\le 2;\\ 1, \;\; x>2.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) плотность вероятностей $f(x)$, изобразить $f(x)$ и $F(x)$ графически; в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$; г) вероятность $P\left(|X|<1\right)$.

Задача 4. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax, \ 0 \le x < 1; \\ 2 - x, \ 1 \le x \le 2; \\ 0, \quad x < 0, \ x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$, изобразить $f(x)$ и $F(x)$ графически; в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$; г) вероятность $\mathrm{P}(|X| < 1)$.

Автор-составитель: ______________________________ Коломиец Э.И.

Вопросы к коллоквиуму № 3 по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"
для специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Раздел «Случайные векторы»

Теоретические вопросы

1. Определение случайного вектора. Свойства двумерной функции распределения.
2. Функция распределения многомерного случайного вектора и ее свойства.
3. Дискретные случайные векторы. Закон распределения дискретного случайного вектора.
4. Функция распределения двумерного дискретного случайного вектора. Нахождение одномерных законов распределения координат случайного вектора по двумерному закону распределения.
5. Определение непрерывного двумерного случайного вектора и следствия из него.
6. Вероятностный смысл двумерной плотности вероятностей.
7. Свойства двумерной плотности вероятностей.
8. Равномерное распределение в области $D \subset \mathbb{R}^2$, равномерное распределение в прямоугольнике.
9. Равномерное распределение в круге.
10. Многомерные непрерывные случайные векторы. Свойства многомерной плотности вероятностей.
11. Независимость случайных величин. Условие независимости дискретных случайных величин.
12. Независимость случайных величин. Условие независимости непрерывных случайных величин.
13. Исследование на независимость случайных величин, имеющих равномерное распределение в прямоугольнике и в круге. Независимость в совокупности.
14. Условная функция распределения. Условные законы распределения дискретных случайных величин.
15. Условная функция распределения. Условные законы распределения непрерывных случайных величин.
16. Правило умножения и формула Байеса для плотностей вероятностей. Условные числовые характеристики.
17. Обобщение основной теоремы о математическом ожидании на двумерный и многомерный случаи.
18. Основные числовые характеристики двумерного случайного вектора и формулы для их вычисления.
19. Теоремы сложения и умножения математических ожиданий.
20. Некоррелированность случайных величин и ее связь с независимостью. Пример.
21. Теорема сложения дисперсий.
22. Коэффициент корреляции, его вероятностный смысл и свойства.
23. Числовые характеристики многомерных случайных векторов. Свойства корреляционной матрицы. Понятие о моментах.
24. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение. Эквивалентность понятий независимости и некоррелированности для гауссовских случайных величин.
25. Двумерное нормальное распределение.
26. Одномерные плотности вероятностей двумерного нормального случайного вектора.
27. Условные плотности вероятностей и условные числовые характеристики двумерного нормального случайного вектора.

28. Функции случайных аргументов. Закон распределения функций от дискретных случайных величин.
29. Закон распределения функций от непрерывных случайных величин.
30. Преобразование плотности вероятностей при линейном преобразовании равномерных и нормальных случайных величин.
31. Моделирование случайных величин, имеющих однозначную функцию, обратную к функции распределения.
32. Закон распределения суммы случайных величин.
33. Композиция дискретных законов распределения.
34. Композиция непрерывных законов распределения.
35. Композиция дискретного и непрерывного законов распределения.
36. Устойчивость нормального закона распределения.

Пример практического задания

<u>Задача 1.</u> Задан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,3

Найти: а) одномерные законы распределения координат X и Y; являются ли случайные величины X и Y независимыми? б) коэффициент корреляции r_{XY}; являются ли случайные величины X и Y некоррелированными? в) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение равное 0; вычислить условное математическое ожидание $\mathrm{M}(X \mid Y=0)$ и условную дисперсию $\mathrm{D}(X \mid Y=0)$.

<u>Задача 2.</u> Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c(x+y),\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2; \\ 0, \qquad \text{â î ñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ.} \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c; б) одномерные (маргинальные) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) условные плотности вероятностей $f_X(x\mid y),\ f_Y(y\mid x)$; в) математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y); являются ли случайные величины X и Y независимыми?; являются ли они некоррелированными?; г) вероятность $\mathrm{P}(X+Y<2)$.

<u>Задача 3.</u> Пусть X и Y независимые равномерно распределенные случайные величины: $X \sim R[-1,0]$, $Y \sim R[0,1]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z=X+Y$.

Автор-составитель: ______________________________ Коломиец Э.И.

Вопросы к экзамену по дисциплине
"Теория вероятностей и математическая статистика"
для специальности 090303.62 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Семестр 3

1. Случайный эксперимент. Пространство элементарных событий. Случайные события и операции над ними.
2. Классическое определение вероятности. Урновая схема. Пример.
3. Геометрическое определение вероятности. Пример.
4. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности.
5. Условная вероятность и ее свойства. Правило и теорема умножения вероятностей.
6. Независимость событий. Свойства независимых событий. Независимость в совокупности.
7. Формулы полной вероятности и Байеса. Пример.
8. Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов.
9. Понятие случайной величины (СВ). Функция распределения СВ и ее свойства.
10. Дискретные СВ. Закон распределения (ЗР) дискретной СВ.
11. Непрерывные СВ. Плотность вероятностей и ее свойства.
12. Математическое ожидание (МО) дискретных и непрерывных СВ, его простейшие свойства. Основная теорема о МО.
13. Моменты, дисперсия и среднеквадратическое отклонение СВ. Свойства дисперсии.
14. Биномиальный ЗР. Числовые характеристики (ЧХ) биномиальной СВ.
15. Геометрический ЗР. ЧХ геометрической СВ.
16. Пуассоновский ЗР. ЧХ пуассоновской СВ.
17. Равномерный ЗР. ЧХ равномерно распределенной СВ.
18. Показательный ЗР. ЧХ показательно распределенной СВ.
19. Нормальный (гауссовский) ЗР, смысл его параметров.
20. Функция Лапласа и ее свойства. Вероятность попадания гауссовской СВ в заданный интервал. Правило трех сигма.

Примеры практических заданий

Задача 1. Числа 1, 2, …, 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятность того, что: а) числа будут записаны в порядке убывания (возрастания); б) числа 1, 2 и 3 будут стоять рядом (в порядке убывания, в порядке возрастания).
Задача 2. Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время их прихода равновозможно в течение суток. Какова вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки одного теплохода – 2 часа, а второго – 3 часа?
Задача 3. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0,9, второго – 0,8. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятности событий $A_1 = \{\text{отказал только первый узел}\}$ и. $A_2 = \{\text{отказали оба узла}\}$ (повторить все задачи на схемы).
Задача 4. Из трех пистолетов выбирается наудачу один и производится выстрел. Вероятности попадания в цель из пистолетов соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Известно, что произошел промах. Из какого пистолета вероятнее всего был произведен выстрел?
Задача 5. Событие В наступает в том случае, если событие А появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события В, если вероятность появления события А при одном опыте равна 0,3 и произведено 5 независимых опытов.

Задача 6. Вероятность вынуть бракованную деталь из большой партии равна 0,1. Вынимаются 3 детали. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины X - числа появившихся при этом бракованных деталей. Найти математической ожидание и дисперсию случайной величины X.

Задача 7. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, но не более трех раз. Вероятность попадания в корзину при каждом бросании равна 0,75. Найти: а) закон распределения случайной величины X - числа произведенных бросков; б) функцию распределения случайной величины X; в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$.

Задача 8. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x \le 0;\\ ax^3, \ 0 < x \le 2;\\ 1, \quad x > 2.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) плотность вероятностей $f(x)$, изобразить $f(x)$ и $F(x)$ графически; в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$; г) вероятность $P\left(|X|<1\right)$.

Задача 9. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}ax, \ 0 \le x < 1;\\ 2-x, \ 1 \le x \le 2;\\ 0, \quad x<0, \ x>2.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$, изобразить $f(x)$ и $F(x)$ графически; в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$; г) вероятность $\mathrm{P}(|X|<1)$.

Автор-составитель ______________________________ Коломиец Э.И.

Вопросы к экзамену по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика"
для направления 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Семестр 4

1. Случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства.
2. Дискретные случайные векторы. Закон распределения дискретного случайного вектора.
3. Непрерывные случайные векторы. Плотность вероятностей случайного вектора и ее свойства.
4. Равномерное распределение в области на плоскости. Равномерные распределения в прямоугольнике и в круге.
5. Независимость случайных величин. Условия независимости. Независимость в совокупности.
6. Условные законы распределения. Условная плотность вероятностей и ее свойства. Условные числовые характеристики.
7. Числовые характеристики случайных векторов. Корреляционная матрица и ее свойства. Понятие о моментах случайных векторов.
8. Теоремы о числовых характеристиках.
9. Некоррелированные СВ. Связь между некоррелированностью и независимостью. Пример.
10. Коэффициент корреляции, его свойства и вероятностный смысл.
11. Многомерное нормальное распределение и его свойства.
12. Функции от СВ и их законы распределения.
13. Закон распределения суммы СВ. Композиция (свертка) законов распределения. Пример.
14. Неравенство Чебышева. Виды сходимости последовательностей СВ и связь между ними.
15. Закон больших чисел (ЗБЧ) для последовательностей СВ. Теоремы Маркова и Чебышева.
16. ЗБЧ для последовательностей независимых одинаково распределенных СВ. Задача об измерениях. Теорема Бернулли и ее применение.
17. Характеристическая функция СВ и ее свойства.
18. Характеристические функции важнейших СВ. Устойчивость нормального закона распределения.
19. Сходимость распределений (слабая сходимость) и ее связь со сходимостью по вероятности. Теорема непрерывности.
20. Центральная предельная теорема (ЦПТ) для независимых одинаково распределенных СВ. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
21. ЦПТ для независимых разнораспределенных СВ. Теорема Ляпунова. Смысл условия Ляпунова. Асимптотическая нормальность.
22. Статистическая модель. Генеральная совокупность (ГС), выборка, объем выборки. Простейшие способы представления статистических данных.
23. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
24. Гистограмма и полигон частот.
25. Выборочные (эмпирические) числовые характеристики. Выборочное среднее и выборочная дисперсия.
26. Точечные оценки неизвестных параметров распределений. Требования, предъявляемые к точечным оценкам.

27. Свойства выборочного среднего и выборочной дисперсии как точечных оценок МО и дисперсии соответственно.
28. Метод моментов получения точечных оценок. Свойства оценок, найденных по методу моментов. Пример.
29. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия. Пример.
30. Интервальные оценки неизвестных параметров распределений. Доверительные интервалы (ДИ) для МО нормально распределенной ГС (при известной и неизвестной дисперсии).
31. ДИ для дисперсии нормально распределенной ГС (при известном и неизвестном МО).
32. Асимптотические ДИ для МО и дисперсии произвольно распределенной ГС.
33. Критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простой гипотезы о виде распределения.
34. Критерий хи-квадрат Пирсона для проверки сложной гипотезы о виде распределения.
35. Критерий хи-квадрат Пирсона для проверки гипотезы независимости.
36. Регрессионный анализ случайных величин.
37. Случайные процессы (СП) и их классификация.
38. Моментные функции СП и их свойства.
39. Стационарные СП. Свойства корреляционной функции стационарных СП.
40. Энергетический спектр стационарных СП и его свойства.

Примеры практических заданий

<u>Задача 1.</u> Задан закон распределения дискретного случайного вектора (X, Y):

Y / X	-1	0	1
0	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,3

Найти: а) одномерные законы распределения координат X и Y; являются ли случайные величины X и Y независимыми? б) коэффициент корреляции r_{XY}; являются ли случайные величины X и Y некоррелированными? в) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение равное 0; вычислить условное математическое ожидание $\mathrm{M}(X \mid Y = 0)$ и условную дисперсию $\mathrm{D}(X \mid Y = 0)$.

<u>Задача 2.</u> Плотность вероятностей случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c(x + y), \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2; \\ 0, \qquad \text{â î ñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ.} \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c; б) одномерные (маргинальные) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) условные плотности вероятностей $f_X(x \mid y), f_Y(y \mid x)$; в) математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X, Y); являются ли случайные величины X и Y независимыми?; являются ли они некоррелированными?; г) вероятность $\mathrm{P}(X + Y < 2)$.

<u>Задача 3.</u> Пусть X и Y независимые равномерно распределенные случайные величины: $X \sim R[-1, 0]$, $Y \sim R[0, 1]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

Автор составитель ______________________________ Коломиец Э.И.

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» (СГАУ)

«УТВЕРЖДАЮ»
Председатель научно-методической комиссии факультета информатики

________________ Э.И. Коломиец

«_____»________________ 2012 г.

АТТЕСТАЦИОННЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

для проверки остаточных знаний студентов

по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Специальность 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Автор-составитель:
к.ф.-м.н, доцент,
кафедры технической кибернетики _______________ Э.И. Коломиец

ТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ

1. Классическое определение вероятности
2. Вероятности случайных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей
3. Схема независимых испытаний Бернулли
4. Дискретные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики
5. Непрерывные случайные величины, плотность вероятностей и ее свойства
6. Числовые характеристики непрерывных случайных величин
7. Дискретные случайные векторы, их законы распределения и числовые характеристики
8. Непрерывные случайные векторы, двумерная плотность вероятностей и ее свойства
9. Независимость и некоррелированность случайных величин, связь между ними
10. Точечные оценки неизвестных параметров распределений
11. Интервальные оценки неизвестных параметров распределений
12. Корреляционная функция стационарного случайного процесса и ее свойства
13. Энергетический спектр стационарного случайного процесса и его свойства

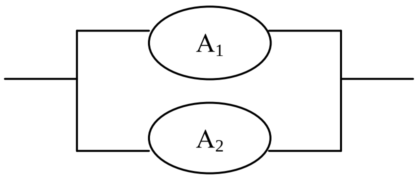
Аттестационные педагогические измерительные материалы для контроля остаточных знаний по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» Специальность 090303.65 Информационная безопасность автоматизированных систем

Вариант 1-12

1. На полке лежат 5 маркированых и 5 немаркированых конвертов. Наудачу берут 2 конверта. Вероятность того, что оба конверта <u>маркированные</u>, равна:

1) 4/9   2) 1/36   3) 5/18   4) 5/9

2. Элементы электрической цепи работают независимо друг от друга.



Вероятности безотказной работы элементов за время T: $P(A_1)=0.6$; $P(A_2)=0.8$.
Тогда вероятность безотказной работы <u>всей цепи</u> за время T равна:

1) 0.48   2) 0.84   3) 0.92   4) 0.96

3. Стрелок производит 5 независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Тогда вероятность того, что мишень будет поражена не менее 3 раз, равна:

1) 0,2627   2) 0,2048   3) 0,7373   4) 0,9488

4. Дан закон распределения дискретной случайной величины **X**:

X	**-2**	**0**	**1**
P	0.2	0.3	0.5

Дисперсия **D(X)** равна:

1) 1,05   2) 1,29   3) 1,3   4) 0,31

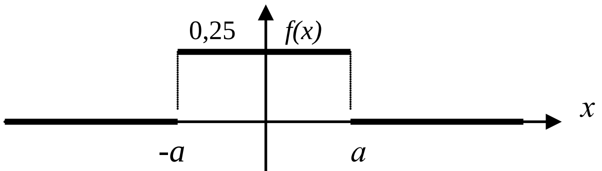
5. Функция распределения непрерывной случайной величины **X** имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/4, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Тогда вероятность **$P(1<X<3)$** равна:

1) 0,75   2) 0,25   3) 0,2   4) 0,5

6. График плотности вероятностей случайной величины **X** имеет вид:



Тогда значение параметра a равно:

1) 4   2) 2   3) 1   4) 0,5

7. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases} 3/28\,x^2 & , x\in(-1;3) \\ 0 & , x\notin(-1;3) \end{cases}$.

Тогда математическое ожидание М**(2X+1)**равно:

1) 6.2 2) 2.8 3) 6 4) 5.4

8. Дан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

X \ У	**-1**	**0**	**1**
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0,5

Тогда математическое ожидание **M(X-2Y)** равно:

1) –1,7 2) 1,0 3) –0,4 4) 0,4

9. Случайный вектор (X;У) имеет равномерное распределение в прямоугольнике с вершинами в точках A(0,0); B(2,0); C(0,1); D(2,1). Тогда значение двумерной плотности вероятностей $f(x,y)$ внутри этого прямоугольника равно:

1) 0,5 2) 0,25 3) 2 4) 4

10. В условиях задачи 9 случайные величины X и У являются:

1) зависимыми и коррелироваными 2) зависимыми, но некоррелироваными
3) независимыми, но коррелированными 4) независимыми и некоррелироваными

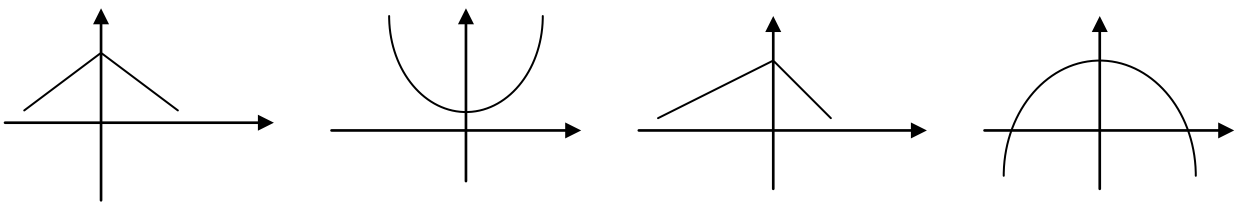
11. Дана выборка значений случайной величины X: { -2, 0, 1, 2, 4 }. Несмещенная оценка математического ожидания по данной выборке равна:

1) 1 2) 5 3) 1,25 4) 4

12. Если <u>объем выборки</u> увеличивается в 100 раз, то <u>длина</u> доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины…

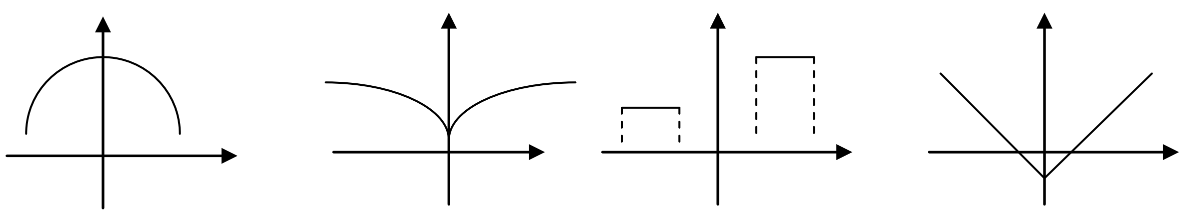
1) увеличивается в 10 раз 2) уменьшается в 10 раз
3) увеличивается в 100 раз 4) уменьшается в 100 раз

13. Какой из следующих графиков может являться графиком корреляционной функции $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?



1) 2) 3) 4)

14. Какой из следующих графиков может являться графиком энергетического спектра $G(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?



1) 2) 3) 4)

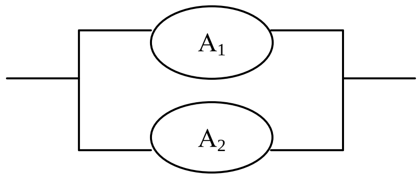
Аттестационные педагогические измерительные материалы для контроля остаточных знаний по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» Специальность 090303.65 Информационная безопасность автоматизированных систем

Вариант 3-12

1. На полке лежат 6 маркированых и 3 немаркированых конверта. Наудачу берут 2 конверта. Вероятность того, что оба конверта немаркированные, равна:

   1) 1/12   2) 1/9   3) 2/9   4) 5/12

2. Элементы электрической цепи работают независимо друг от друга



   Вероятности безотказной работы элементов за время T: $P(A_1)=0.8$; $P(A_2)=0.7$.
   Тогда вероятность безотказной работы всей цепи за время T равна:

   1) 0.56   2) 0.94   3) 0.38   4) 0.5

3. Стрелок производит 5 независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,9. Тогда вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы 1 раз, равна:

   1) 0,0729   2) 0,9919   3) 0,4095   4) 0,0081

4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины **X**:

X	**-3**	**0**	**2**
P	0.2	0.3	0.5

   Дисперсия **D(X)** равна:

   1) 3,8   2) 0,4   3) 3,94   4) 3,64

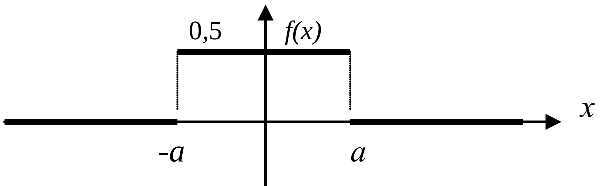
5. Функция распределения непрерывной случайной величины **X** имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 4x^2, & 0\le x\le 0{,}5 \\ 1, & x>0{,}5 \end{cases}\cdot$$

   Тогда вероятность **P(1>X>0,25)** равна…

   1) 0,25   2) 0,5   3) 0,75   4) 0,85

6. График плотности вероятностей случайной величины **X** имеет вид:



   Тогда значение параметра *a* равно:

   1) 4   2) 2   3) 1   4) 0,5

7. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}2x & , x\in(0;1)\\ 0 & , x\notin(0;1)\end{cases}$.

Тогда математическое ожидание M**(2X-1)** равно:

1) 1/2 2) 2/3 3) 1 4) 1/3

8. Дан закон распределения дискретного случайного вектора (X ; Y):

X \ У	**1**	**2**	**3**
-1	0,2	0,1	0,1
1	0,1	0	0,5

Тогда математическое ожидание **M(X-2Y)** равно:

1) -2,2 2) 4,7 3) –4,4 4) 2,4

9. Случайный вектор (X;У) имеет равномерное распределение в прямоугольнике с вершинами в точках A(0,0), B(4,0), C(0,1), D(4,1). Тогда значение двумерной плотности распределения $f(x,y)$ внутри этого прямоугольника равно:

1) 0,5 2) 0,25 3) 0,4 4) 4,0

10. В условиях задачи 9 случайные величины X и У являются:

1) зависимыми и коррелироваными 2) зависимыми , но некоррелироваными
3) независимыми, но коррелироваными 4) независимыми и некоррелироваными

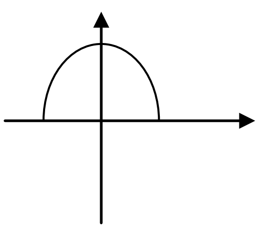
11. Дана выборка значений случайной величины X: $\{-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Несмещенная оценка математического ожидания по данной выборке равна:

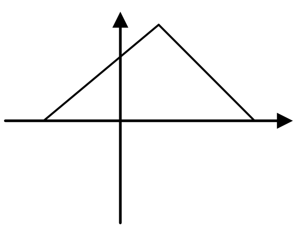
1) 0 2) 2 3) 1,6 4) 4

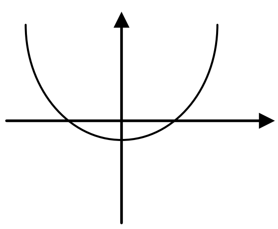
12. Если объем выборки уменьшается в 100 раз, то длина доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины…

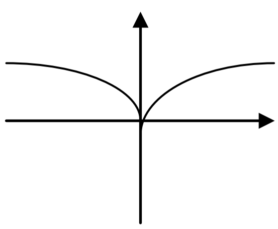
1) увеличивается в 10 раз 2) уменьшается в 10 раз
3) увеличивается в 100 раз 4) уменьшается в 100 раз

13. Какой из следующих графиков может являться графиком корреляционной функции $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?

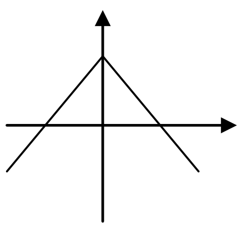

1)

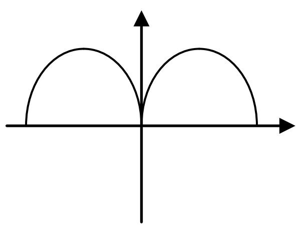

2)

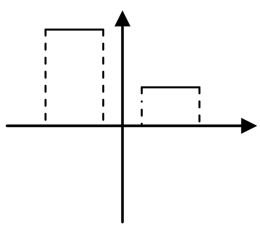

3)

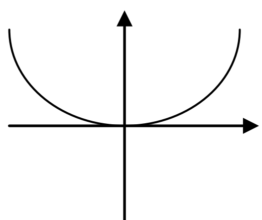

4)

14. Какой из следующих графиков может являться графиком энергетического спектра $G(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?


1)


2)


3)


4)

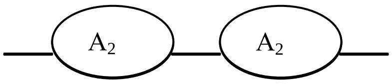
Аттестационные педагогические измерительные материалы для контроля остаточных знаний по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» Специальность 090303.65 Информационная безопасность автоматизированных систем

Вариант 2-12

1 В урне лежат 5 черных и 5 белых шаров. Наудачу из урны вынимают 2 шара. Вероятность того, что оба шара <u>черные</u>, равна:

1) 4/9 2) 2/9 3) 5/18 4) 1/5

2 Элементы электрической цепи работают независимо друг от друга.



Вероятности отказов элементов за время T: $P(A_1)=0.3$; $P(A_2)=0,2$.
Тогда вероятность <u>отказа</u> <u>всей цепи</u> за время T равна:

1) 0.94 2) 0.86 3) 0.5 4) 0.44

3 Орудие производит 5 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,7. Тогда вероятность того, что мишень будет поражена не менее 2 раз, равна:

1) 0,3998 2) 0,4718 3) 0,6913 4) 0,8677

4 Дан закон распределения дискретной случайной величины **X**:

X	**-1**	**0**	**3**
P	0.2	0.3	0.5

Тогда дисперсия **D(X)** равна:

1) 4,7 2) 1,3 3) 3,01 4) 6,0

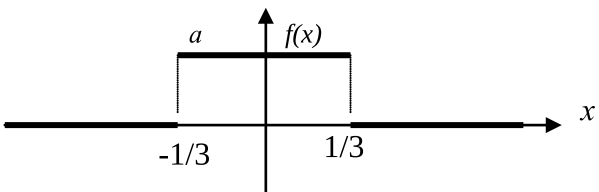
5 Функция распределения непрерывной случайной величины **X** имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/2, & 0\le x\le\sqrt{2} \\ 1, & x>\sqrt{2} \end{cases}.$$

Тогда вероятность **P(2>X>1)** равна:

1) 0,5 2) 0,75 3) 0,25 4) $1/\sqrt{2}$

6 График плотности вероятностей случайной величины **X** имеет вид:



Тогда значение параметра a равно:

1) 3/2 2) 3 3) 1/3 4) 2/3

7 Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases} 8x & ,x\in(0;0{,}5) \\ 0 & ,x\notin(0,0{,}5) \end{cases}$.

Тогда математическое ожидание М**(2X+1)** равно:

1) 11/8 2) 5/3 3) 25/24 4) 20/17

8 Дан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

X \ У	**-1**	**0**	**1**
1	0,1	0,3	0
2	0,2	0,3	0,1

Тогда математическое ожидание **M(X-2Y)** равно:

1) 0,4 2) 0,3 3) 2,0 4) 0,7

9 Случайный вектор (X,У) имеет равномерное распределение в прямоугольнике с вершинами в точках A(1,1); B(5,1); C(1,2); D(5,2). Тогда значение двумерной плотности вероятностей $f(x,y)$ внутри этого прямоугольника равно:…

1) 0,5 2) 0,25 3) 0,4 4) 4,0

10 . В условиях задачи 9 случайные величины X и У являются:

1) зависимыми и коррелированными; 2) зависимыми, но некоррелированными;
3) независимыми, но коррелированными; 4) независимыми и некоррелированными.

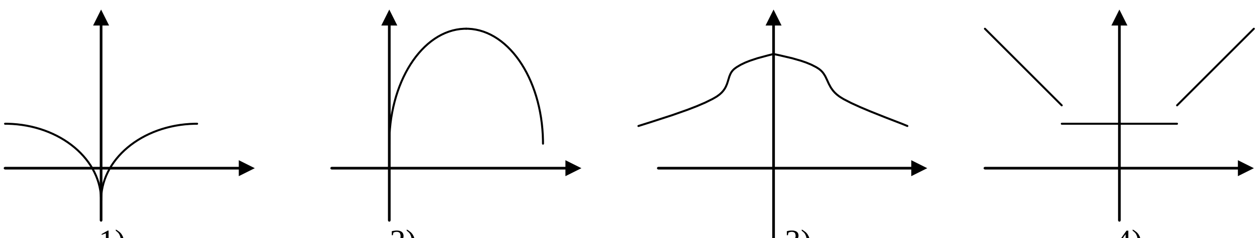
11. Дана выборка значений случайной величины X: { -2, 0, 4, 6, 8 }. Несмещенная оценка математического ожидания по данной выборке равна:

1) 3,2 2) 1,6 3) 0 4) 4,0

12. Если среднеквадратическое отклонение увеличивается в 25 раз, то длина доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины…

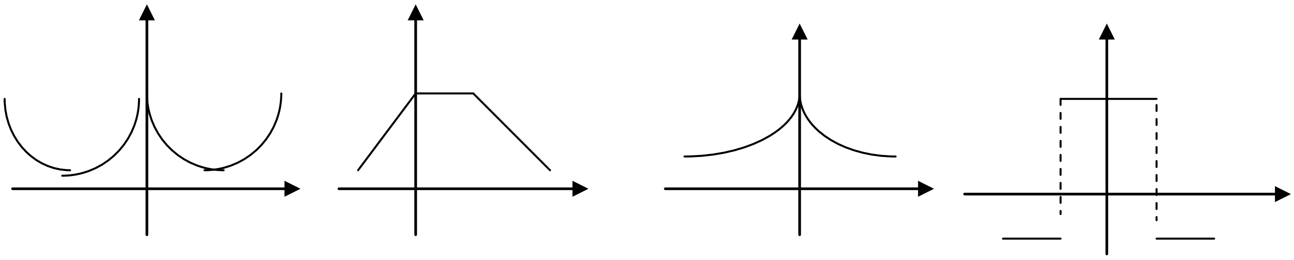
1) увеличивается в 5 раз 2) уменьшается в 5 раз
3) увеличивается в 25 раз 4) уменьшается в 25 раз

13. Какой из следующих графиков может являться графиком корреляционной функции $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?



1) 2) 3) 4)

14. Какой из следующих графиков может являться графиком энергетического спектра $G(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?



1) 2) 3) 4)

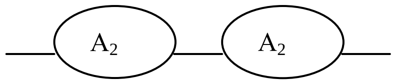
Аттестационные педагогические измерительные материалы для контроля остаточных знаний по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» Специальность 090303.65 Информационная безопасность автоматизированных систем

Вариант 4-12

1. В урне лежат 7 черных и 3 белых шара. Наудачу из урны вынимают 2 шара. Вероятность того, что оба шара <u>белые</u>, равна:

1) 1/5 2) 2/15 3) 7/15 4) 1/15

2. Различные элементы электрической цепи работают независимо друг от друга.



Вероятности отказов элементов за время T: $P(A_1)=0,4$; $P(A_2)=0,2$.
Тогда вероятность <u>безотказной</u> работы <u>всей цепи</u> за время T равна...

1) 0.92 2) 0.52 3) 0.08 4) 0.6

3. Орудие производит 5 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Тогда вероятность того, что мишень будет поражена более 2 раз, равна:

1) 0,3174 2) 0,6544 3) 0,3456 4) 0,7696

4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины **X**:

X	**-1**	**1**	**3**
P	0.3	0.6	0.1

Дисперсия **D(X)** равна:

1) 1,44 2) 2,16 3) 1,8 4) 0,6

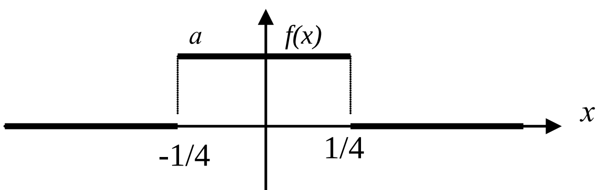
5. Функция распределения непрерывной случайной величины **X** имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^3/27, & 0\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Тогда вероятность **P(3,5>X>1,5)** равна:

1) 7/8 2) 8/9 3) 7/8 4) 7/27

6. График плотности вероятностей случайной величины **X** имеет вид:



Тогда значение параметра *a* равно:

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1

7. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases} x/2 & ,x\in(0;2) \\ 0 & ,x\notin(0,2) \end{cases}$.

Тогда математическое ожидание М**(3X-1)** равно:

1) 3 2) 1 3) 1/3 4) -1/3

8. Дан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

X / У	**-1**	**0**	**1**
1	0,4	0,1	0,1
2	0	0,2	0,2

Тогда математическое ожидание **M(X-2Y)** равно:

1) 1,2 2) 1,6 3) 0,8 4) 1,8

9. Случайный вектор (X;У) имеет равномерное распределение в прямоугольнике с вершинами в точках A(2,2), B(6,2), C(2,3), D(6,3). Тогда значение двумерной плотности распределения $f(x,y)$ внутри этого прямоугольника равно:

1) 0,5 2) 0,25 3) 0,4 4) 4,0

10. В условиях задачи 9 случайные величины X и У являются:

1) зависимыми и коррелироваными 2) зависимыми, но некоррелироваными
3) независимыми, но коррелироваными 4) независимыми и некоррелироваными

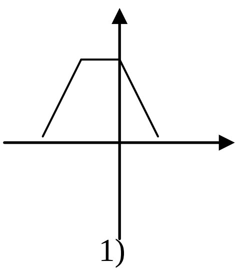
11. Дана выборка значений случайной величины X: $\{$ -2, 1, 3, 5, 8 $\}$. Несмещенная оценка математического ожидания по данной выборке равна …

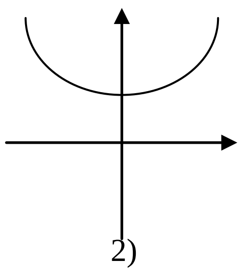
1) 1 2) 3 3) 3,5 4) 5

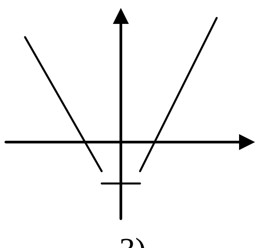
12. Если среднеквадратическое отклонение уменьшается в 25 раз, то <u>длина </u>доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины…

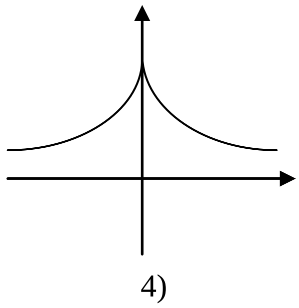
1) увеличивается в 5 раз 2) уменьшается в 5 раз
3) увеличивается в 25 раз 4) уменьшается в 25 раз

13. Какой из следующих графиков может являться графиком корреляционной функции $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?

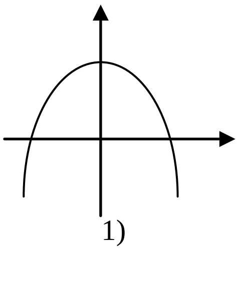

1)

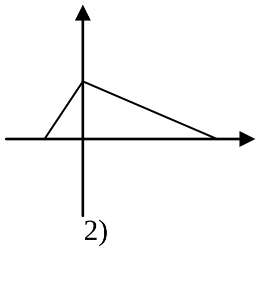

2)

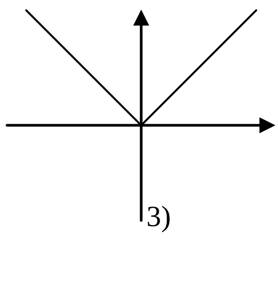

3)

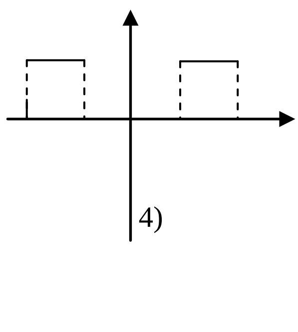

4)

14. Какой из следующих графиков может являться графиком энергетического спектра $G(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$?


1)


2)


3)


4)