МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.Р. КАРГИН, Б.В. КАРГИН, А.В. КАЗАКОВ

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 22.04.02 Металлургия

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2022

УДК 519.677(075)
ББК 32.973я7
К218

Рецензенты: д-р техн. наук, доц. А. И. Х а й м о в и ч,
канд. техн. наук, доц. А. П. Б ы к о в

Каргин, Владимир Родионович
К218 **Теория принятия решений и системный анализ:** учебное пособие / *В.Р. Каргин, Б.В. Каргин, А.В. Казаков.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 156 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1721-2

Системный анализ рассмотрен как методология проектирования и совершенствования процессов пластического деформирования металлов и сплавов. Описаны этапы системного инженерного проектирования, даны основные принципы теории принятия решений. Описаны основные этапы системного инженерного проектирования: выявление целей и построение путей их достижения, комплексная оценка полученных решений. Описаны методы моделирования, системного анализа и оптимизации при проектировании технических систем.

Пособие рекомендовано кафедрой обработки металлов давлением обучающимся в магистратуре по направлению подготовки 22.04.02 Металлургия при изучении дисциплины «Теория принятия решений и системный анализ».

УДК 519.677(075)
ББК 32.973я7

ISBN 978-5-7883-1721-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития производства решающим стратегическим направлением является повышение эффективности процессов пластического деформирования металлов за счет значительного роста производительности и снижение себестоимости, увеличения эффективности использования металла и улучшение качества изделий. Для успешного решения поставленных задач необходимо проектировать новые и совершенствовать существующие процессы пластического деформирования металлов. Методологической базой разработки эффективных процессов в настоящее время являются принципы и приемы теории принятия решений и системного анализа.

Системный подход при анализе явлений различного вида (технических, экономических, социальных и т.д.) представляет собой проявление диалектического подхода к познанию. Системный подход – это изучение части целого с позиции целого. Принцип системности заключается в том, что объект (объект проектирования, совершенствования, конструирования и т.п.) рассматривается как сложная система. Сложную систему можно разделить на конечное число подсистем-элементов. Элементы сложной системы функционируют не изолированно друг от друга, а во взаимодействии. Свойства сложной системы в целом определяются не только свойствами элементов, но и характером взаимоотношения между ними.

Современная техника, по своему существу, является системной. Оборудование, используемое в металлургическом производстве при пластическом деформировании металлов, представляет собой систему, состоящую из ряда подсистем – механических, электрических, гидравлических, питания, охлаждения, связи, управления и т.п. Производственные процессы обработки металлов давлением (участки, автоматизированные технологические линии, робототехнические комплексы) – это системы, включающие машины, людей и различные приспособления. Системным является и способ проектирования новых и совершенствования существующих процессов пластического деформирования металлов, предполагающий слаженную работу сотен и тысяч исполнителей.

Необходимость использования специалистами приемов и методов системного подхода объясняется и тем, что темпы развития науки и техники растут с каждым днем, сложность технических устройств и технологий и всей совокупности хозяйственных связей возрастают – это увеличивает длительность разработки системы, в результате к моменту ввода она может оказаться устаревшей. Отсюда основное назначение системного подхода и анализа к проектированию – сокращение периода проектирования. Системный подход и анализ служат тем общим языком, благодаря которому специалисты различных специальностей могут понимать друг друга.

Основные этапы системного подхода и анализа при проектировании – выявление целей и «построение» путей их достижения, комплексная оценка полученных решений. К числу таких целей для процессов пластического деформирования металлов необходимо отнести повышение качества изделий, показателей технологического процесса и эффективности производства. Для достижения указанных целей в соответствии с научной методологией системного подхода и анализа необходимо в процессе проектирования выделить по возможности все альтернативные ситуации, связанные с выбором наилучшего проектного решения. Выбор наилучшего решения осуществляется с помощью методов математического моделирования и оптимизации систем.

Дисциплина «Теория принятия решений и системный анализ» предназначена для базовой общенаучной подготовки магистров.

Цель дисциплины – ознакомление обучающихся с основными понятиями теории принятия решений и системного анализа, а также применение методов системного подхода и анализа для решения задач по профилю обучения в магистратуре.

Обучающийся должен знать методы и модели теории принятия решений и системного анализа, уметь выбирать методы моделирования систем, структурировать и анализировать цели и функции систем, проводить системный анализ прикладной области исследования, владеть навыками и инструментами системного анализа.

Теория принятия решений – это наука, направленная на разработку методов и средств решения слабо формализованных проблем и способов достижения желаемого результата.

Системный анализ – это изучение системы, выявление ее проблемной ситуации и определении целей, процесс сбора и интерпретации фактов, разложении системы на ее компоненты и принятие решений в условиях анализа большого количества информации различной природы.

Системный подход – это подход, направленный на рассмотрение изучаемого объекта, процесса или явления как целого, как системы взаимосвязанных элементов, имеющей выход (цель), вход (ресурсы, параметры) и связь с внешней средой. Системный подход – это методология, которая немыслима без системного анализа.

Теория систем – научная и методологическая концепция исследования объектов, представляющих собой системы. Она тесно связана с системным подходом и системным анализом, является конкретизацией ее принципов и методов.

Изучив дисциплину обучающийся должен:

- развить системное мышление, которое направлено на выделение проблем реального объекта, составление общего системного представления об объекте;

- научиться анализировать сложные ситуации и проблемы;

- научиться ставить задачи, формулировать альтернативные варианты решений, выбирать из них лучшее, соответствующее поставленным целям;

- уметь использовать методы системного анализа, приемы моделирования систем для решения поставленных задач;

- овладеть компетенцией:

УК-1 «Способен осуществить критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий»;

УК-1.1 «Критически анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними»;

УК-1.2 «Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации»;

УК-1.3 «Разрабатывает и содержательно аргументирует стратегию действий в проблемной ситуации на основе системного подхода».

1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПРИЕМЫ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА И АНАЛИЗА

1.1. Определение системы

Первый шаг поиска новых технических решений на основе системного подхода – это представление технического объекта, процесса (модернизируемого, вновь создаваемого) в виде системы. Слово **система** происходит от греческого слова systema, что означает соединение или целое, составленное из отдельных частей.

Чтобы прийти к определению понятия «система», рассмотрим несколько различных объектов, которые интуитивно представляются системами. Физические и механические свойства алюминиевого сплава Д16 системы Al-Cu-Mg: пределы текучести и прочности $\sigma_т$ и $\sigma_в$, относительное удлинение δ определяются составом и количеством легирующих элементов, входящих в данный сплав. Функции профильного гидравлического пресса определяются его конструкцией, состоящей из станины, колонн, гидроприводов, траверс, направляющих, инструмента. Способность металлургического завода к выпуску изделий зависит от организации его производственного процесса в целом. Эти объекты по своей природе разнородны, но в них есть общее. Это общее во всех приведенных примерах заключается в том, что объекты являются **системами**, каждая из которых содержит **элементы**, а определенное свойство на выходе системы задается отношением элементов внутри. Иными словами, внешняя функция системы (цель) определяется ее внутренним устройством. Отсюда и вытекает определение системы:

Система **– это совокупность взаимосвязанных элементов, образующих единое целое и определенным образом взаимодействующих друг с другом и средой для достижения заданной цели.**

Элементы 1, образующие систему – это относительно неделимые части целого (рис. 1). Элемент считается неделимым в пределах масштаба рассматриваемой системы. Стрелками 2 показаны отношения (связи) между элементами. Для описания элементов используют их свойства, признаки, характеристики, параметры.

Функция – это внешнее проявление свойств системы, ее «способностей», целей. Цели показывают, что техническая система может делать: нагревать, перемещать, удерживать, деформировать и т.п. Эти действия и есть функции системы.

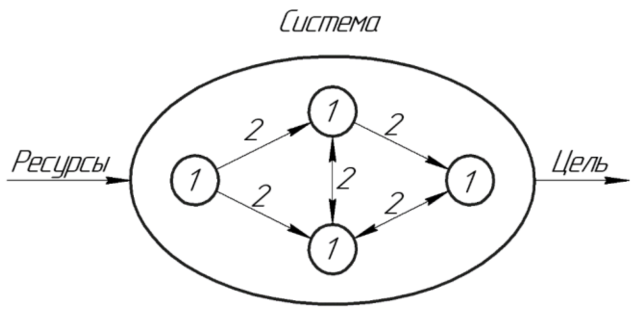


Рис. 1. Система с ресурсами и целью

Все системы обладают рядом свойств, независимо от их природы.

1. **Эмерджентность** (целостность) системы означает, что комплекс элементов, рассматриваемый в качестве системы, обладает общими свойствами, функцией, причем свойства системы не сводимы к сумме свойств входящих в нее элементов. Например, эмерджентным свойством, целью телевизора является прием и передача звуковых сигналов и изображения.

2. **Делимость** системы отражает тот факт, что любой объект, процесс, явление можно представить состоящим из множества элементов. Каждый элемент в свою очередь можно рассматривать отдельно, изолированно, но не забывая, что это часть целого.

3. **Открытость** – наличие связей с окружающей средой, то есть с элементами других надсистем.

4. **Структурированность**. Элементы системы не изолированы, а связаны друг с другом. Наличие существенных связей между элементами системы называется структурой системы.

5. **Иерархичность системы**. Любая система представляет собой элемент системы более высокого уровня (надсистемы), а ее элементы, в свою очередь, обычно выступают в роли системы более низкого порядка (подсистемы). Например, самолет как система состоит из множества элементов (подсистем): двигатель, фюзеляж, шасси, крыло и т.д. В то же время в системе «аэропорт» самолет можно считать элементом надсистемы (рис. 2).

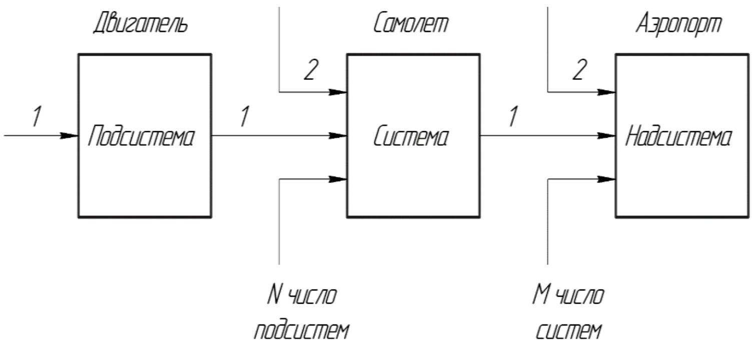


Рис. 2. Иерархия соподчиненности элементов в системе

Из описания, приведенного выше, следует: система – это прежде всего совокупность элементов; имеется наличие существенных связей между элементами или их свойствами, превосходящими по силе связи с элементами, не входящими в данную систему; имеется наличие определенной организации элементов; существуют интегративные качества (свойства, функции), присущие системе в целом, но не свойственные ни одному из элементов системы в отдельности.

Например, гильотинные ножницы для резки листового материала на полосы – это простая механическая система, состоящая из трех элементов. Эти элементы связаны между собой в определенном порядке и представляют единое целое – ножницы. Интегративным свойством, функцией ножниц является способность при приложении силы резать металл на части за счет двухстороннего совместного действия режущих кромок, связанных между собой осью.

Примером технической системы может быть автомобиль. Его детали по отдельности не обеспечивают системного свойства, функции, но объединенные обеспечивают перемещение грузов по поверхности земли с использованием двигателя.

Электронно-вычислительная машина, управляющая ходом технологического процесса пластического деформирования металлов давлением – более сложная техническая система. В зависимости от уровня рассмотрения элементами ЭВМ могут быть отдельные логические схемы, узлы, блоки, датчики или устройства (арифметические, запоминающие, управляющие и т.п.). Указанные элементы связаны различными связями: механическими, электрическими, информационными. Распределение основных связей между элементами зафиксировано во времени и пространстве, что говорит о вполне определенной организации элементов. Интегративные свойства данной системы обусловлены способностью ЭВМ обрабатывать цифровую информацию, производить логический анализ, решать задачи по контролю технологических параметров и т.п.

Таким образом, система не сводится к простой совокупности элементов и, расчленяя систему на отдельные части, изучая каждую из них в отдельности, нельзя познать все свойства системы в целом. Чем сложнее система, тем больше у нее интегративных свойств, функций.

Примерами бессистемных объектов являются: куча кирпичей или песка (слабая связь элементов-песчинок и отсутствие устойчивой внутренней связи); колесо в виде цельного однородного диска (отсутствует элементарный состав на механическом уровне); металлолом.

Рассмотренный выше подход является **дескриптивным** (описательным) определением системы. Он применяется в тех случаях, когда необходимо объяснить, как устроен листопрокатный стан, закономерности технологического процесса прессования профилей и т.п. Тогда система выступает только в одном отношении, в каком внешнее проявление (свойство, функция) задается внутренним устройством (отношения, структура, взаимодействие и т.п.)

Специалист, проектирующий новый технологический процесс, деформирующий инструмент, высокопроизводительное оборудование, идет **конструктивным** путем, т.е. по заданной функции находит структуру системы. Выделение и построение новой системы осуществляется таким образом: ставится цель, определяется функция, обеспечивающая достижение этой цели, а затем подыскивается или создается структура, обеспечивающая выполнение функции (рис. 3).

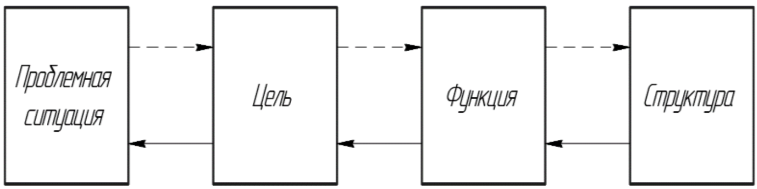


Рис. 3. Схема образования и функционирования системы

Новая цель возникает тогда, когда создается ***проблемная ситуация***. Ситуация называется проблемной, если она не может быть решена имеющимися известными средствами. Необходимость выработки новых средств ставит перед специалистами новые цели, для реализации которых создаются новые системы.

В этой связи говорят, что нет системы без проблемы. **Система – это средство решения проблемы.**

Например, при горячей объемной штамповке малопластичных и труднодеформируемых сплавов на молоте существующие способы пластического деформирования с скоростью 3 м/сек не позволяли получать высококачественные поковки за один удар. Возникла проблемная ситуация, откуда появилась цель – разработать новый способ горячей штамповки. Реализация этой цели осуществлена через разработку новой функции системы – высокоскоростное деформирование с скоростью до 50 м/сек. В результате создана новая техническая система – высокоскоростной молот.

Цель, вытекающая из проблемы, является объективным критерием для отбора того, что должно войти в систему из окружающей среды. Из бесконечного мира в систему включается конечное число элементов, которые необходимы для функционирования системы, обеспечивающей достижение цели. Теперь можно четко представить границу в виде поверхности в пространстве между вновь созданной системой и средой (рис. 4).

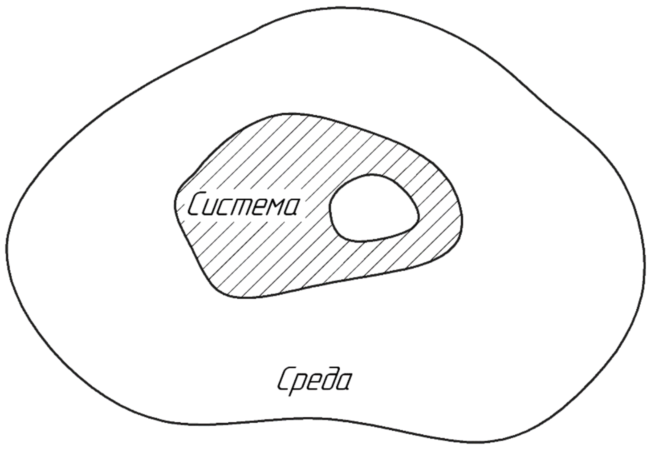


Рис. 4. Схематическое представление системы и среды

Среда представляет собой совокупность всех систем, кроме той, которая образуется под данную цель. Из системы исключаются не только пространственные, внешние по отношению к ней элементы, но и те элементы, которые вещественно входят в состав элементов данной системы, но функционально исключены из нее, так как обеспечивают достижение целей других систем. Ни одна система не является абсолютно замкнутой. Взаимодействие системы со средой представляется внешними информационными и ресурсными связями на входе и выходе. На входе простейшей модели системы в виде черного ящика видно, что система получает что-то из среды, на выходе среда получает что-то из системы (рис. 5). Например, входы системы «автомобиль» – это руль, педали газа, сцепления и тормоза, рычаг переключения коробки скоростей. Выходы системы «наручные часы» – это показания времени в произвольный момент.

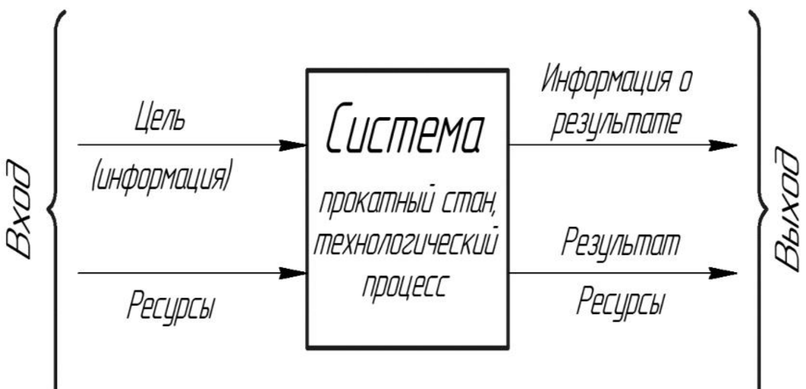


Рис. 5. Входы и выходы модели системы «черный ящик»

Для процессов пластического деформирования внешними информационными связями на входе являются входные переменные, изменяющиеся непрерывно и дискретно. К ним можно отнести управляемые параметры, такие как скорость деформации, размеры деформирующего инструмента, нагрев заготовки, тип оборудования и т.п.

Внешними связями на выходе из системы являются выходные величины, которые содержат сведения о количественных и качественных характеристиках изготавливаемого изделия, таких как точность, механические свойства и т.п. Значения входных и выходных переменных заключены в определенном интервале, задаваемом технологическим регламентом процесса или техническим обеспечением.

Кроме управляемых параметров на входе имеют место контролируемые, но неуправляемые параметры, целесообразное изменение которых невозможно в данном процессе (например, качество исходной заготовки, изменяющейся от партии к партии), и неконтролируемые параметры, возмущаемые воздействия которых носят случайный характер и не поддаются определению. Совокупность контролируемых неуправляемых и неконтролируемых параметров часто называется **помехой**.

Для реализации системы также нужен определенный материал, средства и энергия. Вещество и энергия необходимы для воплощения цели в конечный продукт.

Информационный вход системы – это информационная цель, а ***ресурсный вход*** – это материалы, энергия, необходимые для ее реализации. ***Ресурсный выход*** системы – это результат ее деятельности, а ***информационный выход*** – информация о степени этого соответствия.

После представления объекта в виде системы, дальнейшим шагом является ее системный анализ. Полное и правильное представление о системе в целом можно получить, проводя системный анализ в трех аспектах: предметном, функциональном и историческом (рис. 6).

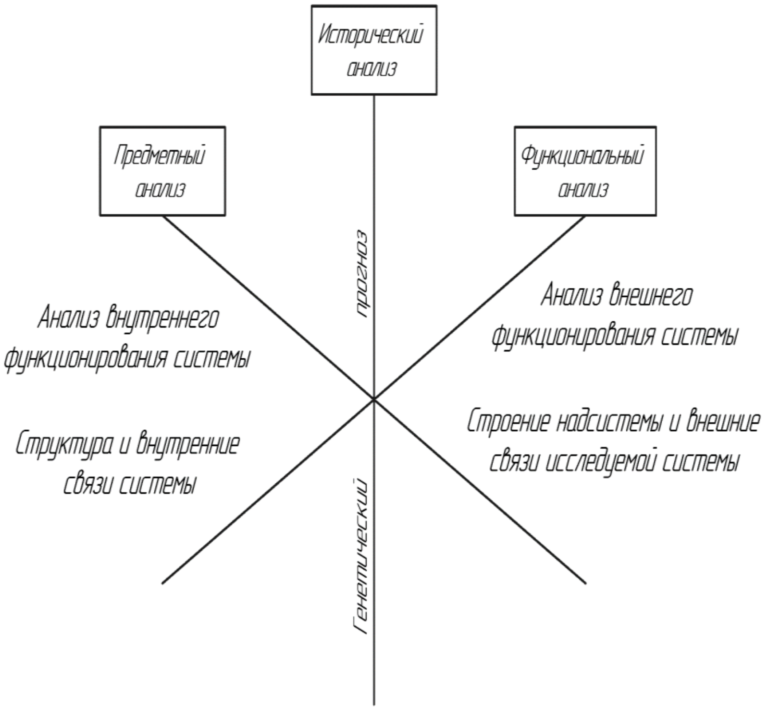


Рис. 6. Анализ системы

Целью предметного анализа системы являются ответы на следующие вопросы:

1. Из чего состоит наша система? (Элементный анализ).
2. Как связаны между собой элементы системы? (Структурный анализ).
3. Из чего состоит надсистема, в которую входит наша система?
4. Как в надсистеме наша система связана с другими?

Целью функционального анализа являются ответы на следующие вопросы:

1. Как работает данный элемент системы? (Для внутреннего функционирования).

2. Как работает наша система в данной надсистеме? (Для внешнего функционирования).

Историческое исследование предполагает проведение генетического анализа, при котором прослеживается история развития системы (ее возникновение, становление, эволюция, разрушение и преображение), определение текущей стадии жизненного цикла системы и проведение прогностического анализа, намечающего пути ее дальнейшего развития.

Внешний элементный и функциональный анализ позволяет определить полезные входы и выходы исследуемой технической системы. На этапах внутреннего, предметного и функционального анализа выявляются многие побочные входы и выходы, происходит более четкое разделение их на **полезные**, **бесполезные** и **вредные**.

Примеры вредных выходов технических систем: выхлопные газы автомобиля, шум турбореактивного двигателя, вибрация.

Из бесконечного набора свойств, которые характеризуют каждый элемент системы, в рассматриваемой системе существенными являются лишь некоторые из них. Все остальные свойства элемента либо остаются скрытыми, резервными, либо пополняют список бесполезных и вредных функций. Это очень важный факт, во многом определяющий развитие системы. Умение выявить и использовать эти свойства – одно из необходимых условий научного поиска в технике.

1.2 Классификация систем

В научно-технической литературе описано большое количество классификаций систем. Их можно разделить по двум типам: **предметный** и **категориальный.** К предметному типу систем относят основные виды конкретных систем, существующих в природе и обществе (технические, экономические, социальные, биологические и т.п.). Таких названий можно дать бесчисленное множество. Категориальный тип позволяет классифицировать системы по общим характеристикам, присущим любым системам, независимо от их материального выражения: простые или сложные системы; детерминированные и стохастические (вероятностные) системы; статистические и динамические системы; моно- и полисистемы.

Все компоненты систем количественно можно описать как «**моно**» (одно свойство или отношение, один элемент) и «**поли**» (много свойств, отношений, элементов) компоненты. По составу компоненты систем оцениваются как статические (находящиеся в состоянии относительного покоя) и динамические (изменяющиеся во времени). В свою очередь, компоненты, охарактеризованные как динамические, делятся на функционирующие (изменение не ведет к смене качества) и развивающиеся (изменение приводит к смене качества). Примером динамической функционирующей системы является работа гидравлического пресса, производящего одну и ту же продукцию, динамической развивающейся системы – работа металлургического завода, осваивающего выпуск новых изделий; студент, приобретающий квалификацию магистра.

Структурно (по характеру отношений с другими явлениями) компоненты систем оцениваются, во-первых, как **детерминированные** и **стохастические** и, во-вторых, как простые и сложные. Система является детерминированной, если ее поведение обусловлено конечным множеством элементов, входящих в нее, и отношений между ними. Поведение параметров детерминированной системы полностью объяснимо и предсказуемо в любых заданных условиях. Система является стохастической, если ее поведение обусловлено объектами, не входящими в конечное множество составляющих данной системы, а значения параметров являются неопределенными.

В настоящее время нет однозначного определения **сложной** системы. Определяя ее, выбирают признак, по которому можно отличить сложную систему от простой системы. В качестве формальных признаков при определении сложной системы выделяют число взаимосвязанных элементов, отсутствие формальной математической модели, способ описания системы.

Пивоваров Г.Н. в зависимости от числа элементов выделяет четыре класса систем: малые ($10 \ldots 10^3$), сложные ($10^4 \ldots 10^7$), ультрасложные ($10^7 \ldots 10^{30}$), суперсистемы ($10^{10} \ldots 10^{200}$).

Академик А.И. Берг определяет сложную систему как систему, которую можно описать не менее, чем на двух математических языках, например, теория дифференциальных уравнений и алгебра Буля.

С точки зрения технических решений под сложной системой понимают систему:

- построенную для решения многоцелевой задачи;
- для описания которой используется несколько математических языков;
- включающую взаимосвязанный комплекс разнородных моделей;
- отражающую разные несравнимые объекты, характеристики объекта.

Например, металлургическое предприятие по производству металлоизделий следует рассматривать как сложную систему, представляющую собой некоторую организованную совокупность рабочих мест, оборудования, агрегатов, способных перерабатывать заготовки в продукцию. При этом весь процесс производства по характеру прохождения продукции через отдельные рабочие места, агрегаты можно расчленить на отдельные операции – производственные процессы. С общей точки зрения в каждом производственном процессе происходит соединение различного рода ресурсов (труда, оборудования, оснастки, заготовок, материалов, энергии, конструкторско-технологической информации и т.п.) для получения тех или иных изделий.

Системы по происхождению условно делят на:

- **естественные (природные),** возникающие и существующие независимо от человека и его воли, например, «солнечная система», атом, Земля как небесное тело;

- **искусственные,** созданные человеком для прямого или косвенного удовлетворения какой-либо своей потребности, например, трактор, пианино, часы, фломастер;

- **природно-искусственные** системы, например, домашние животные, водохранилища и т.п.

По типу элементов системы могут быть **абстрактными**, например, теории упругости, пластичности и **материальными**, существующие в природе и обществе, например, физические, химические, технические, биологические и т.п.

По виду элементов системы могут быть системы типа **предмет,** например, устройства, машины, агрегаты, роботы и т.п. и системы типа **процесс**, например, способы, технологии и т.п.

Поскольку вся техника относится к искусственным системам, то в дальнейшем будем рассматривать только технические системы.

Технические системы – это искусственно созданное материальное единство взаимосвязанных элементов, имеющее целью своего функционирования удовлетворение некоторой потребности общества или окружающих технических систем.

Все указанные выше системы могут переходить из одного типа в другой, поэтому отнесение той или иной системы к определенному виду является в значительной мере условным.

1.3 Структурный анализ

Структурный анализ производят тогда, когда необходимо выяснить, как система устроена, из каких частей состоит, как эти части связаны между собой. Структурный анализ осуществляется в два этапа:

- определение элементарного состава систем, т.е. полного перечня элементов;
- выяснение структуры системы и характера связей. Обычно выделяют информационные, энергетические и вещественные связи.

Знать структуру системы – это знать закон, по которому порождаются элементы системы и отношения между ними. Структура может быть формальной (логической) и материальной.

Структура – это закономерная устойчивая связь между элементами системы, отражающая форму расположения элементов и характер взаимодействия их сторон и свойств.

Структура – важнейшая характеристика системы. При одном и том же составе элементов, но при различном взаимодействии между ними меняются ее функция. Как пример, на рис. 7 показана простая система, состоящая из четырех элементов: 1 – пол, 2 – стол, 3 – стул, 4 – человек.

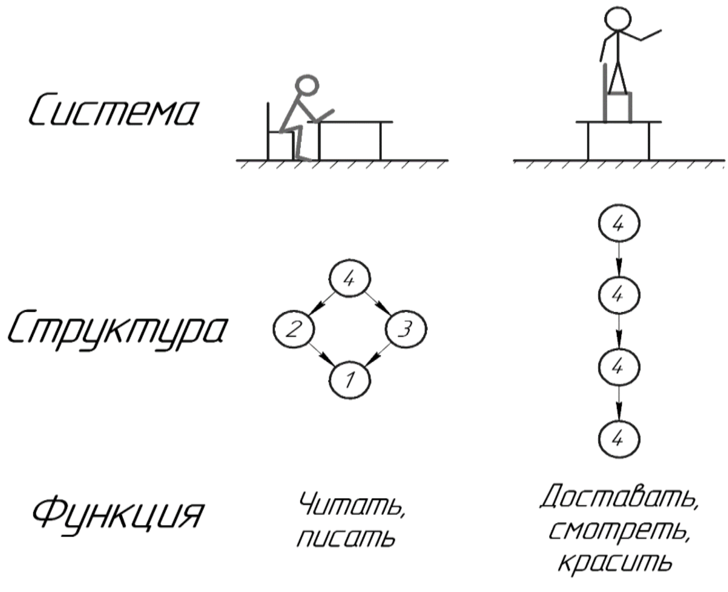


Рис. 7. Влияние структуры системы на свойства системы

***Формальная структура* системы** – это совокупность функциональных элементов и их отношений, необходимых и достаточных для достижения системой заданных целей.

***Материальная структура* системы** – это реальное исполнение формальной структуры.

В качестве поясняющего примера рассмотрим систему, целью (функцией) которой является деформирование (любой технологический процесс обработки металлов давлением). Формальная структура технологического процесса обработки металлов давлением есть совокупность отношений между функциональными элементами – оборудованием, инструментом, заготовкой и изделием.

Необходимыми и достаточными отношениями между перечисленными элементами являются однозначная связь оборудования с инструментом, заготовки и изделия с инструментом (рис. 8). Наличие данной формальной структуры присуще любому технологическому процессу пластического деформирования: прессованию или волочению, прокатке, горячей или холодной штамповке, ковке.

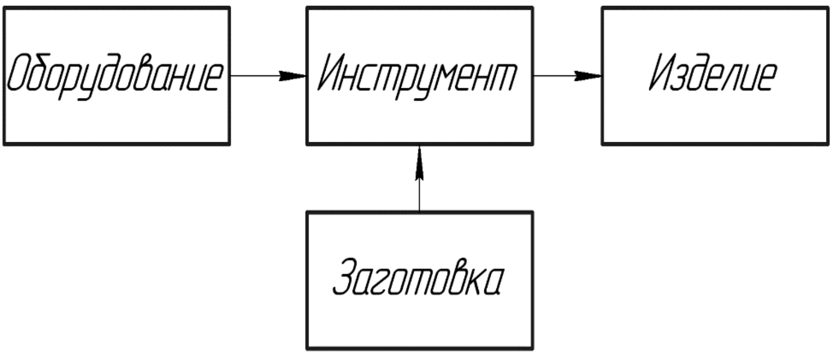


Рис. 8. Формальная структура процессов пластического деформирования металлов

Материальная структура, реализующая формальную структуру технологического процесса обработки металлов давлением, определяется конкретным процессом. Например, при прокатке в качестве оборудования может быть взят стан, в качестве деформирующего инструмента – валки, заготовки – сляб, а изделия – лист.

Любые жизнеспособные, наиболее распространенные на практике технические системы состоят из четырех функциональных элементов (рис. 9):

1) рабочего органа, осуществляющего обработку предмета труда;

2) двигателя, преобразующего вещество (бензин, керосин и т. п.) в конечный вид энергии, необходимой для реализации рабочим органом технологической функции или двигателя, получаемого энергию извне;

3) трансмиссии, передающей энергию от двигателя к рабочему органу;

4) органа управления, осуществляющего воздействие на части системы.

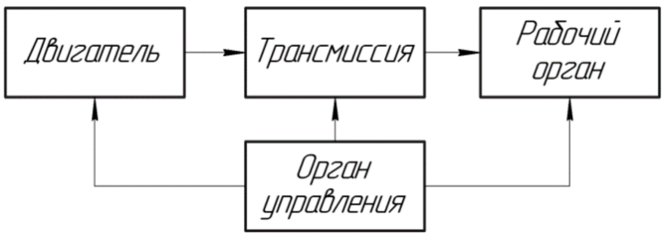


Рис. 9. Формальная структура технических систем

Из приведенных примеров следует, что:

- фиксированной цели соответствует одна и только одна формальная структура системы;
- одной формальной структуре может соответствовать множество различных материальных структур.

Можно выделить следующие виды связей между элементом данной системы с другими элементами этой же системы и внешней средой: направленные и ненаправленные (рис. 10, *а*); односторонние и двухсторонние (рис. 10, *б*); равноправные и неравноправные (рис. 10, *в*); входные и выходные (рис. 10, *г*).

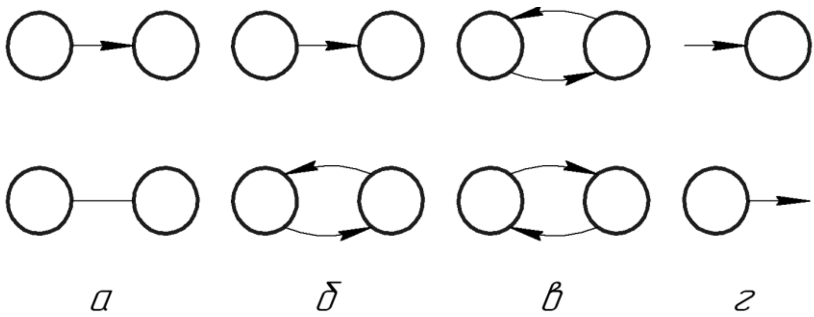


Рис. 10. Виды связей между элементами системы

Каждая из этих связей может быть постоянной или переменной, непрерывной или дискретной. Обычно между элементами системы выделяют следующие виды связей: информационные (термопара – прибор), энергетические (молот – штамп) и вещественные (заготовка – штамп).

Каждый элемент системы обладает множеством различных свойств. Например, обычный карандаш. Он имеет определенную форму, размеры, вес, прочность, цвет и состоит из графита и деревянной оболочки. В зависимости от того, с чем и каким образом взаимодействует карандаш с другими элементами системы, осуществляется реализация тех или иных свойств и выполняется та или иная функция писать, быть проводником электрического тока, опорой комнатному цветку и т.п. Другими словами, реализация свойств системы зависит от структуры системы. Даже при одном и том же составе элементов, но при различных взаимодействиях между ними, меняются ее функции.

Существование большого разнообразия структур заставляет классифицировать их по видам: линейная (рис. 11, *а*); радиальная (рис. 11, *б*); кольцевая (рис. 11, *в*); сотовая (рис. 11, *г*); графовая (рис. 11, *д*); древовидная (рис. 11, *е*).

Линейная (последовательная) структура на рис. 11, а характеризуется тем, что каждый элемент связан с двумя другими. При выходе из строя хотя бы одного элемента (связи) структура (система) разрушается, например, система конвейер.

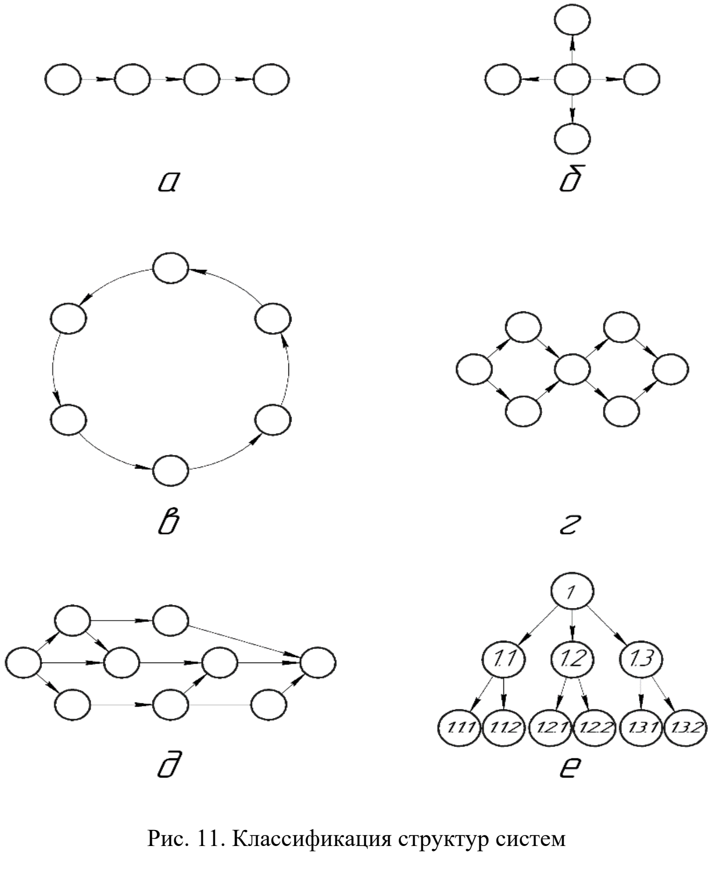


Рис. 11. Классификация структур систем

Радиальная (звездная) структура на рис. 11, *б* имеет центральный узел, который выполняет роль центра. Все остальные элементы системы являются подчиненными.

Кольцевая структура на рис. 11, *в* отличается замкнутостью. Любые два элемента обладают двумя направленными связями. Это повышает скорость обмена информацией, делает структуру более живучей.

Сотовая структура на рис. 11, *г* характеризуется наличием резервных связей, что повышает надежность функционирования системы, но повышает ее стоимость.

Графовая структура на рис. 11, *д* используется при описании производственно-технологических задач, сети интернет, сетевых структур, транспортных систем, дерева целей и т.п.

Древовидная структура на рис. 11, *е* – это иерархическая структура, в которой каждый элемент нижележащего слоя подчинен одному узлу вышестоящего уровня.

Новые структуры, как правило, порождаются последовательным использованием основных видов. В практике широкое распространение получили древовидные структуры, которые можно подразделить на два класса: идеальные иерархические структуры и неидеальные иерархические структуры. Учитывая особую важность таких структур, остановимся на них более подробно.

Идеальная иерархическая структура на рис. 12 характеризуется следующими признаками:

- многоуровневость;
- субординация внутренних связей: элементы данного уровня связаны только с элементами ближайшего верхнего уровня и ближайшего нижнего уровня;
- ветвистость: элемент данного уровня связан только с одним элементом верхнего уровня и с несколькими элементами нижнего уровня;
- пирамидальность: на самом верхнем уровне имеется только один элемент;
- субординация внешних связей: элементы каждого уровня могут быть связаны с внешней средой, однако эти связи контроли-

руются элементами ближайшего верхнего уровня. Внешняя связь верхнего элемента контролируется только вне системы.

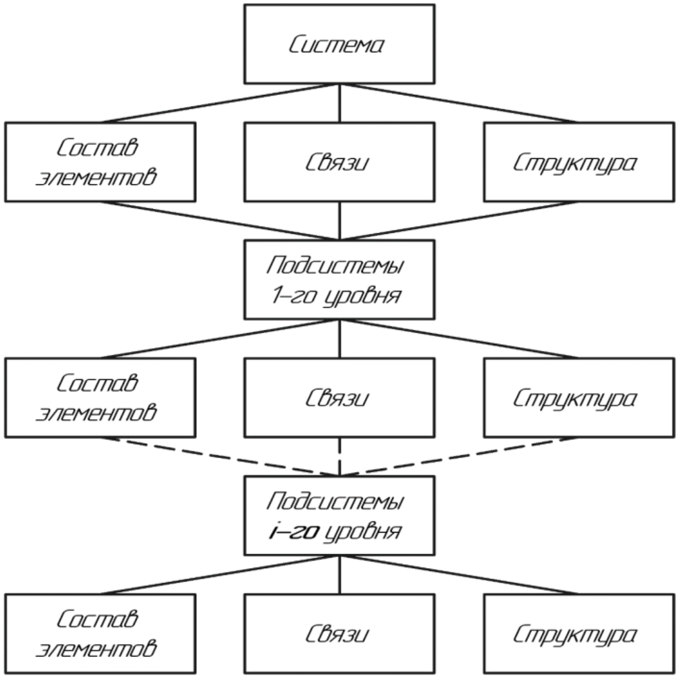


Рис. 12. Иерархия многоуровневой системы

Пример трехуровневой идеальной иерархической древовидной системы дан на рис. 11, *е*, где кружками изображены элементы структуры, стрелками – внутренние связи. В реальных системах встречаются различные отступления от идеальной иерархической структуры. Перечислим типы этих нарушений:

- элемент данного уровня связан только с одним элементом нижнего уровня (иерархия с синекурой);
- элемент данного уровня связан более чем с одним элементом верхнего уровня (иерархия с расщеплением);

- элемент данного уровня связан с элементом высших уровней, минуя ближайший верхний уровень (дислокация в иерархии);
- на самом верхнем уровне имеется несколько элементов (незавершенность иерархии);
- элемент данного уровня связан непосредственно с элементами разных нижних уровней (неоднородность иерархии);
- элементы одного уровня связаны между собой (внутриуровневая зависимость);
- связи элементов данного уровня с внешней средой контролируются верхним уровнем или элементами других уровней (нарушение субординации внешних связей).

Идеальных иерархий в природе не существует. Однако есть интуитивные основания полагать, что чем ближе структура к идеальной иерархической, тем эффективнее будет работать система.

1.4 Метод «дерева» целей

В системном анализе для структуризации вновь создаваемых или совершенствования существующих систем (устройств, агрегатов, процессов и т.п.) широко используют **«дерево» целей**, представляющее собой определенным образом иерархически упорядоченную совокупность целей и подцелей. Принцип разбиения общей цели на подцели, решаемые задачи и средства ее достижения иллюстрирует схема, представленная на рис. 13.

Название дерево целей связано с тем, что схематически представленная совокупность распределенных по уровням целей внешне напоминает по виду перевернутое дерево. Концепция дерева целей впервые предложена в 1957 году Чарльзом Черчменом и Расселом Акоффом.

В настоящее время **метод дерева целей** считается одним из наиболее эффективных методов теории принятия решений и системного анализа. По сути, это **граф**, отражающий план решения той или иной проблемы. Этот метод широко применяется для прогнозирования возможных направлений развития науки, техники, технологий, производства, а также для составления личных целей человека и профессиональных целей любой компании.

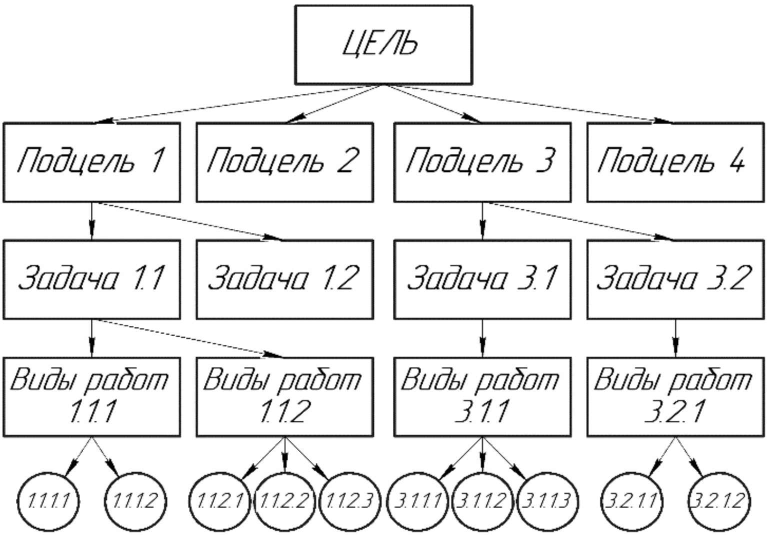


Рис. 13. Обобщенная схема метода дерева целей

Дерево целей имеет стандартную древовидную структуру. «Стволом» дерева целей является **главная проблема (цель)**, для которой требуется найти решение. «**Ветки**» – это задачи (подцели) второго, третьего, четвертого и так далее уровней. При планировании решения задачи, как правило, используют графическое изображение дерева. В таком изображении дерево имеет перевернутый вид, где «ствол» представляет собой вершину графа и находится на самом верху. А из нее, вершины, вниз растут ветви последующих уровней, образуя крону, в которой располагаются локальные подцели и задачи, с помощью которых обеспечивается достижение целей верхних уровней.

Графическое изображение решаемых задач в таком виде помогает специалисту четко продумать план достижения намеченной общей цели. Изобразив свои план в виде дерева целей, специалист видит с какими проблемами он столкнется и какие дополнительные ресурсы ему потребуются, чтобы достичь задуманного.

Каждая вершина «дерева» представляет собой цель для всех исходящих из нее ветвей. Любая цель имеет конкретное содержание и осуществляется определенными средствами в соответствии с достигнутыми на всех исходящих ветвях целями. Эти цели, в свою очередь, являются подцелями для вышестоящей цели. Если на одном уровне иерархии достигнуты все цели, то цель будет достигнута и на следующем, более высоком уровне.

Таким образом, «дерево» целей выступает в качестве инструмента увязки целей высшего уровня с конкретными средствами их достижения на низшем уровне через ряд промежуточных звеньев и представляет собой каркас (структуру), организующий разнородную содержательную информацию. Для построения «дерева» целей специалисту необходимо изучить закономерности поставленной проблемы.

Для каждой конкретной проблемы дерево целей строится путем **метода декомпозиции и анализа**, последовательного выделения все более мелких компонентов на понижающихся уровнях. При этом необходимо соблюдать следующие требования:

- Из каждой вершины дерева должно исходить не менее двух ветвей.
- Число ветвей, исходящих из каждой вершины, не обязательно должно быть одинаковым.
- Ветви, исходящие из вершины, должны быть взаимно исключающими, т.е. должны обладать свойством альтернативности.

- Исходящие из одной вершины ветви должны удовлетворять условиям полноты и непротиворечивости. Непротиворечивость означает, что достижение одной из пары целей предполагает достижение другой и наоборот, в дереве целей отсутствуют циклы. Требование полноты означает, что количество подцелей для каждой цели должно быть достаточным для ее достижения.
- «Дерево» целей не должно иметь изолированных вершин, т.е. должны отсутствовать цели, не связанные с другими целями исследуемой проблемы.
- Описание каждой цели дерева должно достаточно точно раскрывать его содержание и устанавливать степень ее достижения, иметь средства и ресурсы для ее осуществления.

Этапы построения дерева целей: формулировка главной (общей) цели, генерация подцелей, уточнение формулировок и оценка полноты подцелей, проверка на осуществимость, построение дерева целей.

Кроме описательного «дерева» целей, показывающего состав элементов системы и их иерархическую соподчиненность, строятся также и «деревья» целей, показывающие альтернативные решения поставленной задачи. Начиная с некоторого уровня, такое «дерево» показывает возможные альтернативные решения, показанные на рис. 13 в виде кружков. Каждая подцель может иметь несколько альтернативных решений – специалисту приходится выбирать одну из возможных альтернатив.

При построении «дерева» целей для сложных систем каждая цель кодируется. Код цели указывает на ее связь с целями более высокого уровня. Кодирование вершин должно обеспечить однозначное построение и расчленение «дерева», не нарушая общего принципа кодирования. Система кодирования целей может быть буквенная, цифровая и буквенно-цифровая. Один из вариантов кодирования представлен на рис. 14.

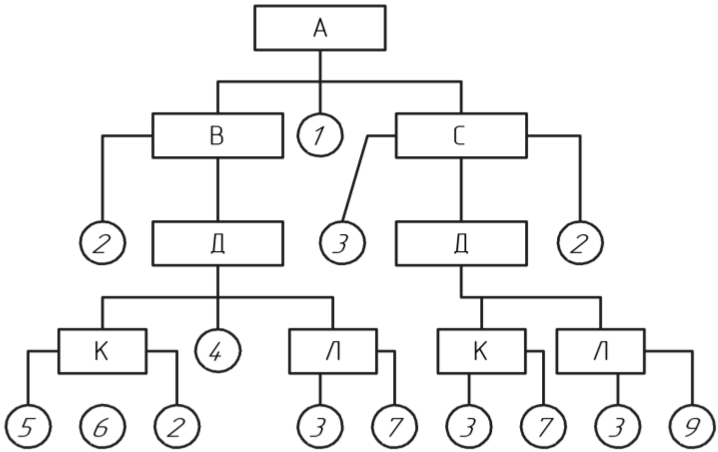


Рис. 14. Иерархическая структура материальных потоков сборки изделия А

Метод «дерева» целей – это наглядная схема, которая подходит для решения практически любых проблем и задач: делает сложное прозрачным, подсказывает оптимальные пути решения, позволяет оптимизировать время, является основой синтеза системы.

Задача 1. Построить дерево целей для синтеза системы «деформирующий инструмент» при холодной прокатке тонкой стальной ленты.

Решение. Главной целью в поставленной задаче является пластическая деформация металла при холодной прокатке тонкой стальной ленты A_0. Признак декомпозиции (разбиение главной цели) сформулируем в виде вопроса: какие условия необходимы для реализации поставленной цели? Итогом декомпозиции на первом шаге является следующий состав (подцелей): A_1 – создание больших давлений, превышающих предел текучести прокатываемого металла; A_2 – сохранение прямолинейности образующих рабочей поверхности валков; A_3 – способность валков воспринимать большой крутящий момент (рис. 15).

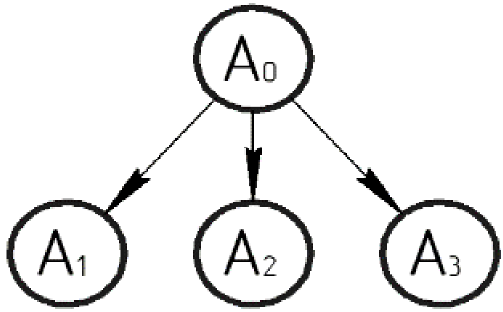


Рис. 15. Дерево целей задачи синтеза системы деформирующий инструмент

Проверяем полученные подцели на элементарность. Выясняется, что для реализации подцели A_1 необходимо иметь рабочие валки малого диаметра. Если такие валки имеются, то данная подцель является элементарной. Подцели A_2 и A_3 также оказываются элементарными. Для реализации подцелей A_2 и A_3 возможно несколько альтернативных решений: иметь либо валки большого диаметра, либо каскад рабочих и опорных валков.

Переходим к этапу синтеза конструкции деформирующего инструмента. Поскольку предложено наличие ресурсов, необходимых для реализации всех вышеперечисленных подцелей одновременно, то получаем одну из возможных конструкций инструмента, например, предложенного Сендзимиром (рис. 16).

Рабочие валки имеют диаметр, несколько больший 40 мм, что позволяет создать большое давление, превышающее предел пластичности материала. Таким тонким валкам невозможно передать крутящий момент от привода в несколько сотен киловатт; для этого используется фрикционный комплекс, составленный из валков 0 и валков 1 и 2. Критерий малых допускаемых отклонений толщины ленты требует большой жесткости комплекса ввиду необходимости сохранения прямолинейности поверхности рабочих валков. Это обеспечивается комплексом валков 1, 2, 3, а также подпорных колес 4.

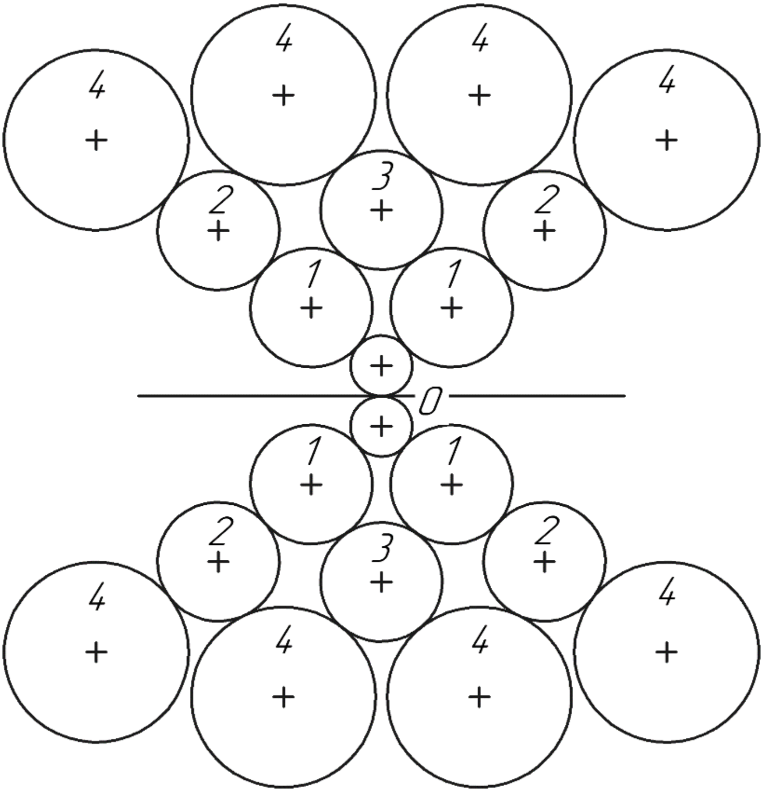


Рис. 16. Конструктивный вид валков прокатного стана Сендзимира:
0 – рабочие валки; 1 – опорные валки; 2 – приводные валки;
3 – опорные валки; 4 – опорные колеса

Не менее успешно применяется методика «дерево целей» и индивидуально. Социологи подчеркивают, что такой метод способствует личностному успеху специалиста. Здесь применяется иная схема, больше напоминающая дерево желаний. Дерево рекомендуется разместить на видном месте. Смотреть на него рекомендуют ежедневно, чтобы не забывать продвигаться в нужном направлении. Схема предусматривает:

- Вершину, где главная цель – событие в жизни, которого хотелось бы достичь: покупка машины, квартиры, карьера, женитьба, успешная защита курсовой работы и т.д.
- Из подцелей – шаги, которые предпринимаются для достижения, количество веток соответствует этапам, чем они сложнее, тем толще ветка. Как только какой-то из них выполнен, ветку можно стереть.

На рис. 17 приведен пример построения дерева целей по выполнению и защите лабораторной работы.

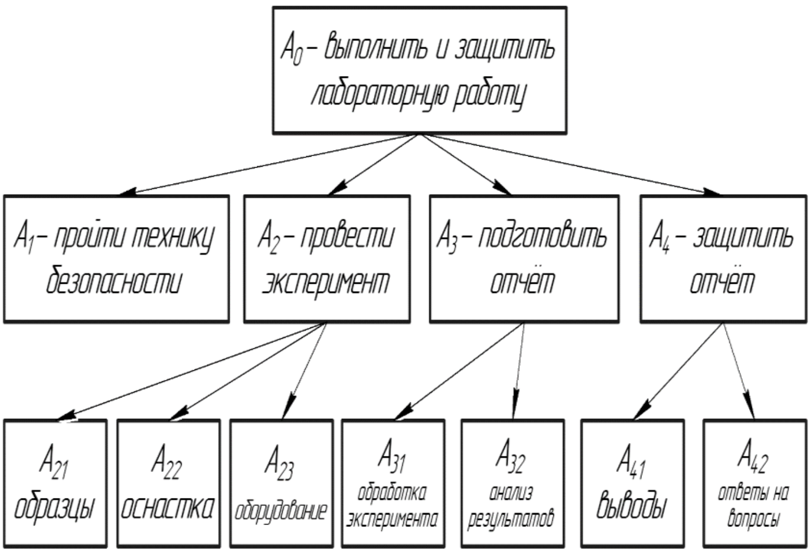


Рис. 17. Дерево целей желания «выполнить и защитить лабораторную работу»

1.5 Этапы системного проектирования

Системное проектирование основано на системном анализе, в основе которого лежит изучение проектируемой системы и определении ее целей. Это процесс сбора и интерпретации фактов, выявление проблемной ситуации и разложении системы на ее компоненты. Системный анализ помогает убедиться, что все компоненты работают для выполнения поставленной цели. Выводами системного анализа являются входные данные для проектирования системы.

Основные этапы системного проектирования (рис. 18) позволяют выявить цели, построить пути их достижения и дать комплексную оценку получаемых решений.

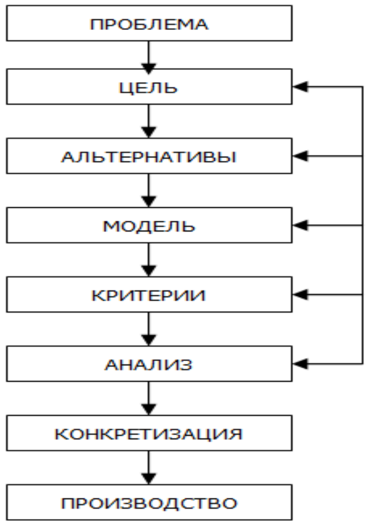


Рис. 18. Последовательность этапов системного проектирования

По словам К. Маркса, «самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что прежде чем построить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове». Расхождение между желаемым и действительным и будет составлять **проблему**. В таком понимании – это абстрактная категория из области познания, выражающая понимание людьми мотивов своей деятельности. Совокупность проблемы и условий, в которых она возникла, образуют **проблемную ситуацию.**

Согласно классификации все проблемы разделяют на три класса:

- **хорошо структурированные** или количественно выраженные проблемы, в которых главные зависимости выяснены очень хорошо;

- **слабо структурированные** или смешанные проблемы, содержащие как качественные элементы, так и мало известные;

- **неструктурированные** или качественно выраженные проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков, отношений и характеристик, количественные зависимости между которыми совершенно неизвестны.

Чтобы решать проблему, инженеры создают **системы**. В самом общем понимании система, как совокупность всех необходимых знаний и сведений, материальных средств и способов их использования, методов организации деятельности людей есть способ решения проблемы. Чтобы правильно спроектировать систему, необходимо уяснить ее цель. Цель может определяться заданием или вытекать из характера работы. Если мы имеем крупную проблему, например, создание автоматизированного прокатного стана, то и система будет сложной и крупной. Для нее можно определить цель лишь в общих терминах. Между тем работа по созданию системы осуществляется конкретными людьми, отделами, организациями, поэтому необходимо общую цель разукрупнить (декомпозиция цели) до конкретных исполнителей.

Альтернативы – это пути достижения целей. При этом должны рассматриваться всевозможные альтернативы достижения цели, например, для перемещения груза в цехе могут быть использованы следующие альтернативы: железная дорога, автомобиль, кран, электрокара, транспортер и т.д.

При реализации любой альтернативы могут быть использованы различные средства. Они различаются по затратам, стоимости, доступности, дефицитности и т.п. Необходим единый метод для отбора различных средств. Он обеспечивается набором критериев.

Критерий – это средство для вынесения суждения, стандарт для сравнения, правило для оценки. Выработка критериев необходима для выбора одного решения из нескольких вариантов, альтернатив.

Критерий должен быть универсальным, количественным, простым и легко вычисляемым, иметь физический смысл. Лучшим будет тот критерий, который в максимальной степени способствует достижению поставленной цели. Например, при разработке грузового автомобиля критерием выбора является грузоподъемность. В процессах производства металлоизделий критериями выбора оптимальной альтернативы могут быть использованы такие показатели, как производительность, точность, надежность, коэффициент использования металла, механические свойства готовых изделий, себестоимость, рентабельность, затраты энергии, дизайн, экология, безопасность, а также комплекс показателей в виде обобщенного критерия.

Для описания зависимости между альтернативами и критериями для обоснования решений строят **модели** физические, математические, смешанные, имитационные, компьютерные, сетевые используя методы моделирования и эксперимента, математического планирования эксперимента, линейное и динамическое программирование, методологию исследования операций, методы оптимизации и верификации, методы экспертных оценок и т.д. При анализе модели рассматривается различное множество вариантов решения проблемы. В ряде случаев эти варианты трудно сравнимы, так как включают явления различной природы: материальные, социальные, политические, моральные, психологические и т.п.

После выбора оптимального варианта делается полная конкретизация решения со всеми его параметрами, и система запускается в производство.

1.6 Проектирование технических систем

Проектирование – это комплекс системных работ по изысканиям, исследованиям, расчетам и конструированию для получения всей необходимой документации при создании новой технической системы, удовлетворяющей заданным требованиям.

Проектирование технических систем включает в себя следующие этапы:

- разработка технического задания;
- предварительное проектирование;
- эскизное проектирование;
- техническое проектирование.

Техническое задание составляется разработчиком, на основе исходных данных, предоставленных заказчиком, содержит основные технические требования к создаваемой системе и служит основанием ее проектирования.

Техническое задание содержит:

- назначение системы;
- область применения проектируемой системы;
- технические требования к технико-экономическим показателям разрабатываемой системы, формулируемые в виде ограничений, налагаемых на показатели эффективности;
- условия эксплуатации (режим и продолжительность эксплуатации, внешние воздействия и т.д.);
- сроки и стоимость разработки;
- другие дополнительные сведения, которые оказывают влияние на результаты проектирования системы.

Предварительное проектирование связано с поиском принципиальных возможностей построения системы, исследованием новых принципов, структур и т.п. Результатом предварительного проектирования является **техническое предложение**.

На этапе **эскизного проектирования** производится детальная проработка возможностей построения системы. Результатом эскизного проектирования является **эскизный проект.**

Техническое проектирование – это тщательная проработка всех схемных, конструкторских и технологических решений. Результатом технического проектирования является **технический проект**.

1.7 Задания для самоконтроля

1. Дайте определение системы.
2. Что такое функция системы?
3. Перечислите свойства систем.
4. Определение технической системы.
5. Определение структуры системы.
6. Классификация систем.
7. Что такое проблемная ситуация?
8. Дайте схему образования и функционирования системы.
9. В каких направлениях проводится анализ систем?
10. Цели предметного анализа систем.
11. Цели функционального анализа систем.
12. В чем состоит исторический анализ систем?
13. Классификация систем по происхождению.
14. Основные типы систем.
15. Перечислите признаки идеальной иерархической структуры.
16. Виды связей систем.
17. Что такое формальная структура системы?
18. Что такое материальная структура системы?
19. Этапы структурного анализа.
20. Классификация структур по видам.
21. Определение сложной системы.
22. Определение структуры системы.

23. Деление систем по типу элементов.

24. Перечислите отступления от идеальной иерархической структуры.

25. Классификации систем по двум типам: предметный и категориальный.

26. Что представляет собой «дерево» целей?

27. Метод построения дерева целей.

28. Примеры построения дерева целей.

29. Цель использования дерева целей.

30. Что такое проектирование?

31. Перечислите основные этапы системного проектирования.

32. Что такое альтернативы?

33. Что такое критерии?

34. Что такое анализ?

35. Что такое принятие решения?

36. Примеры критериев для выбора наилучших решений.

37. Основные этапы проектирования технических систем.

38. С чего начинается проектирование технических систем?

39. Структура технического задания.

40. Сущность этапа эскизного проектирования.

41. Какие системы называют слабоструктурированными?

1.8 Задачи и упражнения

1.1. Сформулируйте две или три известные вам инженерные задачи (проблемы). Определите возможные альтернативы, критерии и ограничения для каждой задачи.

1.2. Определите противоречивые требования, которые приходится выполнять специалисту-металлургу при проектировании деформирующего инструмента.

1.3. Опишите проект скоростного автоматизированного прокатного стана, выпускающего тонкий алюминиевый лист. Это описание должно включать обстоятельства, под влиянием которых возник этот проект, трудные или необычные задачи, входящие в него, окончательный результат, приносимая польза и т.п.

1.4. Вы – обучающийся института авиационной и ракетно-космической техники. Каждый курс, который Вам читают, предназначен для того, чтобы сформировать у Вас определенные умения, навыки. Проанализируйте каждый из курсов и определите какие умения и навыки Вы приобрели.

1.5. Ниже приведены решения некоторых задач обработки металлов давлением. Попробуйте сформулировать эти задачи: а) печь для отжига; б) автоматизированный склад; в) гидравлический пресс; г) кузнечно-штамповочный цех.

1.6. Проведите структурный анализ и приведите структуры следующих системных объектов: а) велосипед; б) система автоматического регулирования температуры в печи; в) технологический процесс изготовления поковок; г) система подготовки бакалавров в техническом вузе.

1.7. Постройте укрупненное иерархическое дерево целей металлургического завода.

1.8. Постройте дерево целей для механической системы, бытовые пружинные весы. Определите для каждой подцели множество альтернативных решений. Проведите синтез системы.

1.9. Необходимо получить трубку определенного диаметра и с заданной толщиной стенки из алюминиевого сплава. В трубном цехе имеется разнообразное оборудование: гидравлические прессы, станы холодной прокатки труб, волочильные станы, правильные машины и печи для термообработки. Предложите различные альтернативные варианты технологических маршрутов получения такой трубы. Как выбрать оптимальный маршрут?

1.10. Любая система представляет собой элемент системы более высокого порядка (надсистемы), а ее элементы в свою очередь обычно выступают в роли более низкого порядка (подсистемы). Исходя из этого принципа, заполните табл. 1.

Таблица 1. Анализ систем

Подсистема	Система	Надсистема
операция	технология	производство
	нервная система	
	привычка	
	факультет	
	дерево	
	штамп	
	пылесос	
	лопатка газотурбинного двигателя	
	мотор	

1.11. Постройте дерево целей по выбору обучающегося (металлургический завод, курсовая работа МНИ, прокатка, подготовка статьи и т.д.)

1.12. В табл. 2 приведена группа технических объектов. Определите для каждого объекта функцию и функциональный элемент, обеспечивающий реализацию данной функции.

Таблица 2. Группа технических систем

Система	Функция	Функциональный элемент
фреза	фрезерование	острая кромка
штамп		
самолет		
пресс гидравлический		
пылесос		

1.13. Постройте дерево целей по выбору обучающегося (металлургический завод, курсовая работа МНИ, прокатка, подготовка статьи и т.д.)

1.14. Представьте в виде системы один объект по выбору обучающегося (компьютер, интернет, мобильный телефон, автомобиль, метро и т.д.). Опишите цели их существования, элементный состав, надсистему, подсистему.

1.15. Что является надсистемой автомобиля? Как она изменяется со временем? Выберите одну из подсистем, попытайтесь спрогнозировать ее будущее.

1.16. Приведите возможный набор критериев для легкового автомобиля: а) по назначению; б) по конструктивным показателям; в) эргономическим показателям; д) эстетическим показателям, показателям технологичности.

1.17. Постройте формальную (логическую) структуру технологических процессов пластического деформирования. Приведите примеры материальных структур, реально исполняющих формальную структуру. Укажите виды связей между элементами системы.

1.18. Постройте структуру технической системы: а) автомобиль; б) токарный станок; в) пылесос.

1.19. Выявите противоречия в технических системах: а) кнопка; б) штамп.

1.20. Постройте дерево целей для механической системы бытовые весы. Определите для каждой подцели множество альтернативных решений. Проведите синтез системы.

1.21. Из одного и того же набора трех-четырех элементов представьте не менее двух структур различных систем, обладающих различными функциями.

1.22. Приведите примеры противоречий в системе молоток-гвоздь-доска и опишите существенные признаки (свойства, функции) элементов системы.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

2.1 Основные положения

При проектировании систем для описания зависимости между различными альтернативами и критериями строят модели. Модель имитирует сложную систему, позволяет многократно воспроизвести процесс и оценить все возможные варианты, выбрать из них наиболее предпочтительные.

Относительно проектируемой системы обычно известны (и то не полностью) входные (определяемые средой) и выходные (определяемые назначением системы) параметры. На рис. 19 приведена схема изучения системы с помощью модели. При построении модели на основании эмпирических или предположительных данных реальные системы эффективно упрощаются. Чем удачнее будет подобрана модель, тем лучше она будет отражать главнейшие черты системы.

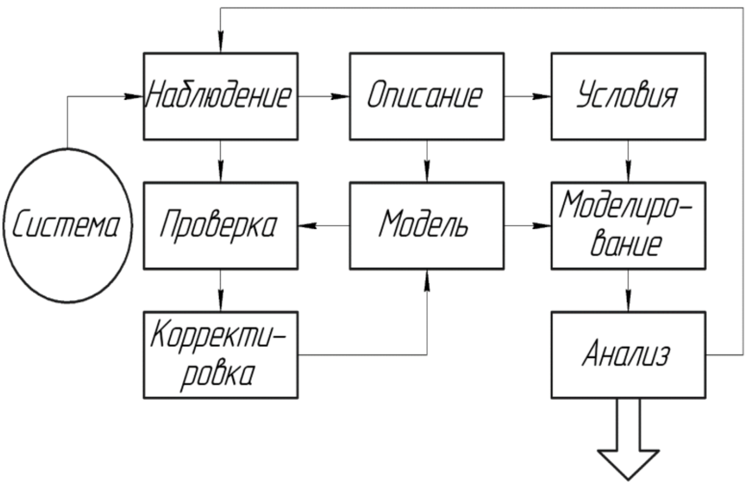


Рис. 19. Схема изучения системы с помощью модели

Модель должна отражать все существенные входные и выходные параметры, от которых в основном зависит успех расчета. Две опасности всегда подстерегают инженера-составителя модели: первая – увязнуть в подробностях «из-за деревьев не увидеть леса» и вторая – слишком огрубить явление «выплеснуть вместе с водой и ребенка». Для построения модели нужно искусство, которое приобретается в процессе опыта. Поскольку модель приближенно описывает объект, всегда полезно не верить слепо одной модели, а сличать результаты, полученные по разным моделям. Если результаты от модели к модели меняются мало, это серьезный аргумент в пользу объективности исследования.

При создании модели нужно глубокое знание существа моделируемой системы, поэтому «чистые» математики без помощи инженеров с построением моделей справляются плохо.

Следует различать предметное моделирование и абстрактное моделирование. При предметном моделировании исследование системы ведется на физической модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные параметры реальной системы, например, на модели проектируемого высокоскоростного самолета, испытуемого в аэродинамической трубе. Если модель и моделируемый объект имеют одну и ту же физическую природу, то говорят о физическом предметном моделировании.

Под математическим предметным моделированием понимают способ исследования различных процессов путем изучения явлений, имеющих различное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. В простейших случаях для этой цели используют известные аналогии между механическими, электрическими и другими явлениями.

Модели могут быть реализованы и с помощью абстрактных объектов. К ним относятся, в частности, формулы, уравнения, неравенства, логические условия и т.п., описывающие параметры объекта моделирования. Таким образом, мы приходим к понятию **математического моделирования**, позволяющего по заданным входным величинам $\overline{X} = \{x_1, \dots , x_n\}$ получать выходные величины $\overline{Y} = \{y_1, \dots , y_k\}$.

Математическое моделирование является наиболее совершенным и эффективным методом моделирования, открывая путь для современных мощных методов математического анализа, вычислительной математики при исследовании в оптимизации технологических процессов. Например, трудно представить, чтобы можно было специально в целях моделирования создать опытный образец крупного автоматизированного предприятия в металлургической промышленности. Такой физический эксперимент привел бы к огромным дополнительным материальным затратам и значительному увеличению сроков ввода объекта.

Для построения математических моделей процессов пластического деформирования металлов используют теоретические, статистические и экспериментальные методы исследования технических систем. Большинство процессов пластического деформирования металлов давлением: продольная, поперечная и винтовая прокатка, горячее прессование, холодная листовая штамповка, ковка, горячая объемная штамповка, волочение, выдавливание характеризуются нестационарностью, неравномерностью распределения деформаций, напряжений и температурных полей, неоднородностью граничных условий, воздействием большого числа факторов, учесть которые в теоретическом отношении сложно. Значительно большие возможности с точки зрения получения достоверных решений дает применение статистических методов, методов математического планирования экспериментов, методов линейного и динамического программирования, методов сетевого планирования и теории массового обслуживания.

2.2 Статистические методы

Для статистического моделирования систем используют теорию корреляции. **Корреляция** – это такая связь, при которой с изменением одной случайной величины получается определенное распределение вероятностей другой величины. Отыскание уровня уравнения этой связи и является первой основной задачей теории корреляции. Второй задачей является определение тесноты корреляционной связи, т.е. степени близости ее к функциональной. Корреляционные уравнения дают возможность вычислить вероятные значения одной случайной величины в зависимости от отдельных значений других случайных величин (рис. 20).

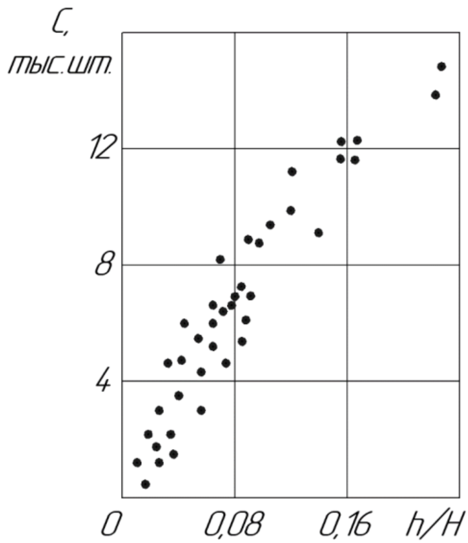


Рис. 20. Поле корреляции стойкости молотового штампа *C* от отношений высоты облойной канавки *h* к высоте поковки *H*

Вычисление вероятностных значений по корреляционным уравнениям имеет большую практическую ценность для тех случаев, когда непосредственное определение изучаемого признака затруднено. Основным способом вычисления коэффициентов корреляционных уравнений является способ наименьших квадратов. Пусть искомое корреляционное уравнение приводится к линейному виду

$$\boldsymbol{C = a + bx}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – неизвестные параметры.

Найдем прямую, которая проходила бы к заданным на границе точкам $\boldsymbol{j}$ ближе любой другой прямой:

$$\boldsymbol{C_j \approx a + bx_j \ (j = \overline{1, n}).}$$

Коэффициенты отыскивают из условия, что сумма квадратов разностей между левой и правой частями приближенного уравнений (1) обращается в минимум, т.е.

$$\boldsymbol{f = \sum_{j=1}^{n}[C_j - (a + bx_j)]^2 => \min}.$$

Значения $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, удовлетворяющие минимуму функции $\boldsymbol{f}$**,** определяются из уравнений

$$\boldsymbol{\delta f/\delta a = 0 \text{ и } \delta f/\delta b = 0.}$$

Производя соответствующие выкладки, получаем систему двух уравнений первой степени относительно неизвестных $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} C_j = na + b\sum_{j=1}^{n} x_j};$$

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} C_j x_j = a\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} x_j{}^2}.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты корреляционных уравнений степенного вида $\boldsymbol{C = ax^b}$, показательного вида $\boldsymbol{C = ab^x}$, логарифмического вида $\boldsymbol{C = a + b \lg x}$ и периодического вида

$$\boldsymbol{C = a + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\cos kx).}$$

Для численного выражения степени тесноты между двумя случайными величинами *x* и *C* используется коэффициент корреляции

$$\boldsymbol{r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(C_i - C_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 \sum_{i=1}^{n}(C_i - C_0)^2}}}, \text{ где } \boldsymbol{x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}.$$

В случае линейной зависимости между *x* и *C* коэффициент $\boldsymbol{r = \pm 1}$ при полном отсутствии связи $\boldsymbol{r = 0}$.

При решении вопроса, будет ли вычисленный коэффициент корреляции *r* указывать на какую-либо корреляцию между *x* и *C*, применяют критерий Стьюдента

$$\boldsymbol{t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}}, \textbf{ откуда } \boldsymbol{|r| > \frac{t}{\sqrt{t^2 + n - 2}}},$$

где значения t находят из таблиц согласно принятому уровню значимости и числу степеней свободы $\boldsymbol{f = n - 2}$. Если полученное по этому неравенству значение будет меньше расчетного *r*, то можно утверждать наличие зависимости между случайными переменными $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{C}$.

При исследовании более двух случайных величин применяется метод математической статистики, называемый **множественной корреляцией**. Особенность и преимущества этого метода заключается в том, что его применение не требует проведения специальных лабораторных исследований, когда в целях изучения влияния одного фактора стремятся остальные факторы создать постоянными. Для применения метода множественной корреляции вариация многочисленных факторов не представляет какой-либо трудности. Поэтому указанный метод является наиболее эффективным при исследовании закономерностей процессов пластического деформирования металлов в реальных, производственных условиях.

Для определения совместного влияния факторов вычисляют коэффициент множественной корреляции

$$R = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{10} \\ r_{22} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{20} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{10} & r_{20} & r_{30} & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{22} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{1k} & r_{2k} & r_{3k} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

Здесь индексы от **1** до k обозначают параметры инструмента, а индекс **0** – стойкость (например, r_{10} – коэффициент корреляции со стойкостью первого параметра).

Определители решаются согласно правилам линейной алгебры. Отсюда следует, что для двух переменных x_1 и x_2 коэффициент рассчитывается по формуле

$$R = \sqrt{\frac{r^2{}_{10} + r^2{}_{20} - 2_{r10r20r12}}{1 - r^2{}_{12}}}.$$

При независимых переменных, т.е. при $r_{12} = 0$, $R = \sqrt{r^2{}_{10} + r^2{}_{20}}$.

По этой же формуле подсчитывается R_i в том случае, когда имеется R_{i-1} для $i - 1$ параметров и необходимо найти R_i при включении i-го параметра, теснота связи которого r_{10}:

$$R_i = \sqrt{R^2{}_{i-1} + r^2{}_{10}}.$$

2.3 Методы многофакторного эксперимента

Весьма актуальным является изучение систем на основе метода многофакторного эксперимента. Поставленная задача решается на основе представления о кибернетической системе, которую называют «черным ящиком» (рис. 21).

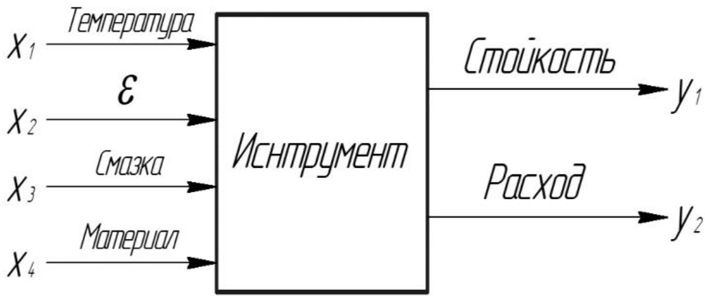


Рис. 21. Описание входных и выходных параметров системы «штамп» в процессе горячей объемной штамповки

Он представляет собой систему связей, недоступную для наблюдения, так как о содержании, механизме процесса нам ничего не известно или известно лишь частично: известны только входы, переменные *x,* участвующие в процессе (факторы), и выходы – результат процесса (параметр оптимизации), обозначенный символом $\boldsymbol{\overline{Y}}$.

Каждый фактор может принимать в опыте одно или несколько значений. Такие значения называются ***уровнями***. Схема «черного ящика» позволяет строить математические уравнения, связывающие параметр оптимизации с факторами:

$$\boldsymbol{Y = f(x_1, x_2, \dots , x_k).}$$

Задача эксперимента состоит в том, чтобы определить численные значения коэффициентов этого уравнения. Обычно функцию $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots , x_k)}$ выбирают в виде степенного ряда. В частности, для двух факторов функция имеет вид полиномов первой степени $\boldsymbol{Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2}$; с неполным квадратным членом $\boldsymbol{Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}\, x_1x_2}$.

Модель должна быть достаточно точной, т.е. близкой к фактической зависимости. Тогда считают, что она адекватна.

При планировании по схеме полного факторного эксперимента реализуются все возможные комбинации факторов на всех выбранных для исследования уровнях. Необходимое количество опытов $\boldsymbol{N}$ при полном факторном эксперименте определяется по формуле $\boldsymbol{N = p^k}$, где $\boldsymbol{p}$ – количество уровней, $\boldsymbol{k}$ – число факторов. Если эксперименты проводятся на двух уровнях, то постановка опытов по плану называется ***полным факторным экспериментом* типа $\boldsymbol{p^k}$.**

Каждый фактор, участвующий в процессе, имеет определенный предел изменения своей величины. Совокупность всех значений, которые принимает фактор, называется **областью определения фактора**. Но в области определения надо найти локальную подобласть для планирования эксперимента, т.е. для каждого фактора необходимо указать тот интервал изменения параметров, в пределах которого проводятся исследования. Для этого на основании априорной информации устанавливаются ориентировочно значения факторов, комбинации которых дают наилучший результат. Этой комбинации значений факторов соответствует многомерная точка в факторном пространстве, которая принимается за исходную при построении плана эксперимента. Координаты этой точки называются **основными уровнями факторов**.

После того, как основной уровень выбран, переходим к следующему шагу – выбору интервалов варьирования. ***Интервалом варьирования*** фактора называется некоторое число, прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровень фактора. Поскольку факторы изучаемого процесса неоднородны и имеют различные единицы измерения, их следует привести к единой системе исчисления путем перехода от действительных значений факторов к кодированным по формуле

$$\boldsymbol{x_j} = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{0j}}{\Delta x_j}, \quad \Delta\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} = \frac{\tilde{x}_{j\,\max} - \tilde{x}_{j\,\min}}{2}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0j}} = \frac{\tilde{x}_{j\,\max} + \tilde{x}_{j\,\min}}{2}.$$

Здесь $\boldsymbol{x_j}$ – кодированное значение фактора; $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}$ – натуральное значение фактора; $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0j}}$ – натуральное значение фактора на основном уровне; $\boldsymbol{j}$ – номер фактора; $\Delta\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}$ – интервал варьирования.

В безразмерной системе координат верхний уровень равен «+1», нижний соответственно «–1», координаты основного уровня равны нулю. Для случая $\boldsymbol{N} = \mathbf{2}^2$ условия проведения эксперимента записываются в виде табл. 3, которую называют **матрицей планирования эксперимента**.

Таблица 3. Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	Y
1	+	–	–	Y_1
2	+	+	–	Y_2
3	+	–	+	Y_3
4	+	+	+	Y_4

Строки в табл. 3 соответствуют различным опытам, столбцы – значениям факторов (единицы для упрощения записи опущены).

Построение матриц планирования основано на правиле чередования знаков. В первом столбце они меняются поочередно, во втором чередуются через два, в третьем – через четыре и т.д. по степеням двойки.

По результатам эксперимента определяются коэффициенты математической модели

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_{ij} x_j}{N}. \qquad (2)$$

Чтобы привести процедуру вычисления коэффициента b_0 в соответствие с формулой (2), в матрицу планирования введен столбец фиктивной x_0, которая во всех опытах принимает значение «+1». Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента $\boldsymbol{b_j}$, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора значение $\bar{Y}$ увеличивается, а если «–», то уменьшается.

Планируя эксперимент, мы стремимся получить линейную модель. Однако у нас нет уверенности в том, что в выбранных интервалах процесс варьирования описывается линейной моделью. Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект (влияние) одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия. Для этого следует, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов (табл. 4).

Таблица 4. Матрица планирования эксперимента 2^2 с эффектом взаимодействия

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1\ x_2\ (x_3)$	Y
1	+	−	−	+	Y_1
2	+	+	−	+	Y_2
3	+	−	+	−	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4

Математическая модель выглядит следующим образом:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}\, x_1x_2.$$

Коэффициент $\boldsymbol{b_{12}}$ вычисляется аналогично по формуле (2).

Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности информации. Параллельно проведенные опыты не дают полностью совпадающих результатов, потому что всегда существует ошибка опыта (ошибка воспроизводимости). Для ее определения опыт воспроизводится по возможности в одинаковых условиях несколько раз, и затем берется среднее арифметическое всех результатов

$$\bar{Y} = \frac{Y_i + Y_2 + \ ... + Y_n}{n},$$

где n – число параллельных опытов.

Отклонение результата любого опыта от среднего арифметического можно представить как разность $(Y_q - Y)$, где Y_q – результат отдельного опыта. Наличие отклонений свидетельствует об изменении значений, полученных при повторных опытах. Для измерения этого различия чаще всего используют дисперсию опыта, описываемую уравнением

$$S_{Y^2} = \sum_{q=1}^{n} \frac{(Y_q - \bar{Y})^2}{f},$$

где f – **число степеней свободы** – понятие, учитывающее в статических ситуациях связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин. Значение f подсчитывается как разность между числом выполненных опытов и числом констант (коэффициентов, средних и т.д.), подсчитанных по результатам тех же опытов. В данном случае $f = n - 1$, так как на вычисление значения $\bar{Y}$ расходуется одна степень свободы.

Для расчета ${S_Y}^2$ опыты, заданные матрицей планирования, дублируют n раз и подсчитывают построчные дисперсии:

$$S_{Yi^2} = \frac{\sum_{l=1}^{n} (Y_{il} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{l=1}^{n}(n-1)},$$

где Y_{il} – результат параметра оптимизации l-го повторения i-го опыта; $\bar{Y}_i$ – среднее арифметическое значение всех повторений i-го опыта,

$$S_{Y^2} = \frac{\sum_{l=1}^{N} {S_{Yi}}^2}{N},$$

т.е. ставится серия одинаковых опытов n, затем проверяется однородность дисперсий, т.е. выясняется, определяются ли различные значения Y с одинаковой точностью по **критерию Кохрена**:

$$\boldsymbol{G}_{\text{расч}} = \frac{\boldsymbol{S^2}_{\boldsymbol{Y}\,\mathbf{max}}}{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{S^2}_{\boldsymbol{Yi}}}.$$

Расчетное значение $\boldsymbol{G}$-критерия сравнивают с табличным в зависимости от уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$, числа степеней свободы $\boldsymbol{f = n - 1}$ и числа опытов $\boldsymbol{N}$. Ряд дисперсий считается однородным, если $\boldsymbol{G}_{\text{расч}} < \boldsymbol{G}_{\text{табл}}$.

Уровень значимости $\boldsymbol{\alpha}$ – мера точности ответа. Для инженерных расчетов подходящим является $\boldsymbol{\alpha} = 0{,}05$, что соответствует вероятности правильного ответа: $\boldsymbol{p = 1 - \alpha = 0{,}95}$ или 95%. При этом считают, что в среднем в 5% случаев возможна ошибка.

Коэффициенты модели $\boldsymbol{b_j}$ считаются значимыми, когда их абсолютная величина больше доверительного интервала, т.е.

$$|\boldsymbol{b_j}| \geq \Delta\boldsymbol{b_j} = \boldsymbol{tS_{bj}},$$

где $\boldsymbol{t}$ – **критерий Стьюдента** (берется из таблиц в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы при определении дисперсии опыта); $\boldsymbol{S_{bj}}$ – среднеквадратичная ошибка определения коэффициентов регрессии; $\boldsymbol{S_{bj}}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{S_y}^{\mathbf{2}}/\boldsymbol{nN}$ – дисперсия в определении коэффициентов.

Статистическая незначимость коэффициента интерпретируется как отсутствие влияния соответствующего фактора в изученных интервалах его изменения. Такие коэффициенты из модели исключаются.

Проверка адекватности модели необходима для того, чтобы ответить на вопрос: можно ли использовать полученное уравнение или необходима более сложная модель.

Адекватность модели проверяют с помощью **критерия Фишера**

$$\boldsymbol{F_{f2f1}} = \boldsymbol{S^2}_{\text{неад}}/\boldsymbol{S_y}^{\mathbf{2}},$$

где $\boldsymbol{S^2}_{\text{неад}}$ – дисперсия неадекватности,

$$\boldsymbol{S^2}_{\text{неад}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{Y}_{i\,\text{расч}} - \boldsymbol{Y}_{i\,\text{эксп}})^2}{\boldsymbol{N-k}}.$$

Здесь $\boldsymbol{Y}_{i\,\text{расч}}$ и $\boldsymbol{Y}_{i\,\text{эксп}}$ – значения параметра оптимизации в $\boldsymbol{i}$-м опыте, соответственно рассчитанные по уравнению регрессии и определенные экспериментально; $\boldsymbol{k}$ – число коэффициентов уравнения регрессии, включая коэффициент $\boldsymbol{b_0}$.

Гипотеза об адекватности уравнения принимается в том случае, когда рассчитанное значение $\boldsymbol{F}$-критерия не превышает табличного для выбранного уровня значимости и числа степеней свободы $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$, с которыми определялись дисперсии неадекватности и опыта, т.е. $\mathbf{F}_{\text{расч}} \leq \mathbf{F}_{\text{табл}}$.

Задача 2. Построить математическую модель, позволяющей контролировать при прессовании заданную геометрию спирального профиля.

Решение. При прессовании профилей формирование спирального оребрения осуществляется путем затекания металла в пазы на матрице, (рис. 22, *а*). При этом движение металла в окружном направлении происходит за счет неравномерности скоростей истечения в пазах с наклонными рабочими поясками одинаковой по сторонам ребра ширины (рис. 22, *б*) или в пазах с поясками параллельными оси прессования, но имеющими различную ширину на противоположных сторонах канала (рис. 22, *в*).

Ребра профиля в процессе закрутки претерпевают определенную деформацию, обусловленную механизмом процесса. Величина деформации кручения зависит, главным образом, от параметров поясков матрицы и геометрии профиля. Поэтому представляет известный интерес изучение совместного влияния этих факторов на угол закрутки (угол закрутки характеризует поворот сечений, разделенных расстоянием в 1 м, относительно друг друга). Для этой цели использовался метод статистического планирования эксперимента. Кроме того, было принято, что ребристый профиль можно представить как совокупность симметрично расположенных элементов. В силу такой симметрии исследовалась закрутка лишь одного элемента ребристого изделия – профиля с поперечным сечением прямоугольника с размерами a и b.

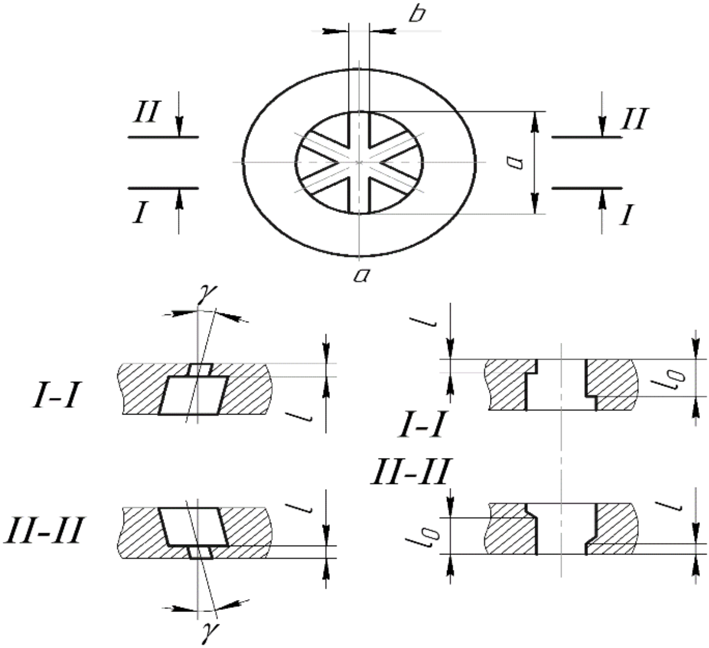


Рис. 22. Матрица для прессования винтовых профилей

Исследование проводилось по плану дробного факторного эксперимента $\mathbf{2^{3-1}}$ с генерирующим соотношением $\boldsymbol{X_3 = X_1 X_2}$ и определяющим контрастом $\mathbf{I} = \boldsymbol{X_1\ X_2\ X_3}$. В качестве исследуемых факторов были взяты: относительная высота рабочего пояска $\boldsymbol{X_1 = l/l_0}$, где $\boldsymbol{l_0}$ – предельная высота, равная 10 мм; угол наклона плоскости рабочих поясков к оси прессования $\boldsymbol{\gamma = X_2}$ (рад); относительная толщина ребра $\boldsymbol{\alpha/b = X_3}$, где α – ширина, b – толщина ребра. Откликом служит угол закрутки Θ (рад/м). Были приняты следующие интервалы варьирования факторов: X_1 = 0,25…0,75; X_2 = 0…0,104 рад; X_3 = 10...15 (табл. 5).

Опыты проводились на вертикальном гидравлическом прессе ПСУ-250 с усилием 250 т на свинце, т.к. угол закрутки не зависит от природы металла.

Таблица 5. Условия проведения и результаты экспериментов

Номер опыта	l/l_0	γ, рад	a/b	Θ, рад/м
1	0,25	0	15	7,38
2	0,25	0,104	10	0,34
3	0,75	0	15	0,70
4	0,75	0,104	10	8,71

Условия проведения эксперимента приведены в табл. 5; число повторных опытов было взято равным двум. Порядок проведения опытов был определен по таблице случайных чисел и имел следующую очередность: 6, 5, 2, 8, 4, 7, 3, l. Прессование слитков осуществлялось без смазки в контейнере диаметром 50 мм. Угол закрутки измерялся с помощью угломера с точностью ±3°.

В результате статистической обработки экспериментальных данных было получено адекватное уравнение регрессии в виде

$$\boldsymbol{\theta = 6,53 - 1,83X_1 + 2,49X_2 + 1,51X_3,}$$

где

$$\boldsymbol{X_1 = \frac{\widetilde{X}_1 - 0,5}{0,25}; X_2 = \frac{\widetilde{X}_2 - 0,052}{0,052};\ X_3 = \frac{\widetilde{X}_3 - 12,5}{2,5}}.$$

Графическая иллюстрация уравнения приведена на рис. 23. Анализируя диаграмму, можно отметить, что угол закрутки увеличивается с ростом утла наклона плоскости рабочих поясков и с уменьшением отношения длин поясков. Наиболее эффективно влияет на угол закрутки угол наклона плоскости рабочих поясков.

Полученная зависимость может быть использована при расчете параметров канала прессовой матрицы, обеспечивающих заданный угол закрутки спирального профиля.

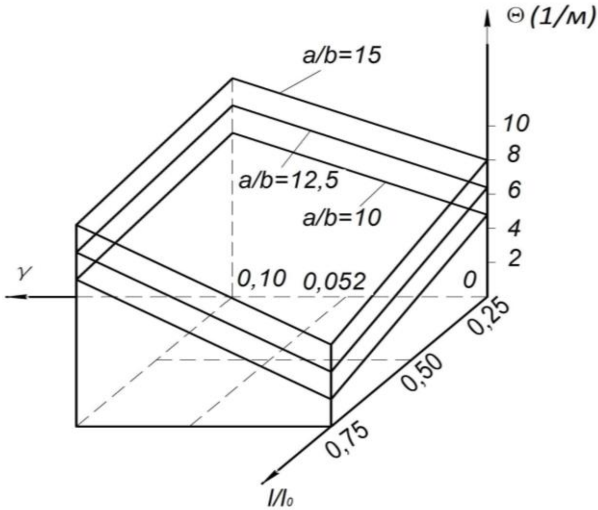


Рис. 23. Влияние параметров матрицы на угол закрутки

2.4 Методы линейного программирования

Один и тот же процесс пластического деформирования металлов может быть по своей экономической эффективности неоднозначным и реализован по различным вариантам, поэтому выбор оптимального варианта можно обосновать только путем вычислений. Для такого обоснования довольно часто используют методы линейного программирования.

Линейное программирование – это раздел высшей математики, занимающийся разработкой методов поиска экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. В качестве целевой функции $\boldsymbol{Y}$ принимают, например, себестоимость изготовления металлических полуфабрикатов, степень загрузки оборудования, длительность обработки изделия, оптимальное использование ресурсов на предприятии и т.п. Целевую функцию записывают в виде

$$\boldsymbol{Y = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n}.$$

На переменные $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ накладывают систему линейных ограничений

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m}$$

и граничные условия $\boldsymbol{x_j \ge 0}$, где $j = \boldsymbol{1, 2}, \ldots;$ $\boldsymbol{n}$ – число переменных; $\boldsymbol{m}$ – число ограничений; $\boldsymbol{a_{ij}, b_j, C_j}$ – постоянные величины.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом: нужно найти неотрицательные значения $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, обращающие целевую функцию $\boldsymbol{Y}$ в экстремум (максимум или минимум) и удовлетворяющие ограничениям. Например, для любого процесса пластического деформирования металлов себестоимость изготовления детали (целевая функция) определяется выражением

$$\boldsymbol{Y = C_{\text{м}} + C_{3} + C_{\text{и}} + C_{\text{об}} \rightarrow \min},$$

где $\boldsymbol{C_{\text{м}}, C_3, C_{\text{и}}, C_{\text{об}}}$ – удельные затраты на основной материал, зарплату производственных рабочих, инструмент и оборудование соответственно. Нужно выбрать такие значения $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ (параметры процесса), при которых себестоимость будет минимальной.

Если система ограничений задачи линейного программирования (**ЗЛП**) представлена в виде системы линейных неравенств с двумя переменными, то такая задача может быть решена графическим методом, который дает наглядное представление о сущности задач линейного программирования.

Алгоритм решения задач линейного программирования графическим методом предполагает последовательное выполнение следующих этапов.

1. Сформулировать задачу линейного программирования.

2. Построить на плоскости $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\}$ прямые линии, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

3. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

4. Найти область допустимых решений в виде выпуклого многоугольника.

5. Найти оптимальное решение задачи путем вычисления значений целевой функции во всех угловых точках. Наибольшее из этих значений и будет максимальным (минимальным) значением целевой функции, а наименьшее минимальным, а координаты соответствующей угловой точки – оптимальным решением.

Существует и другой способ, который позволяет графически найти угловую точку, соответствующую оптимальному решению. Согласно этому способу необходимо построить прямую линию равного уровня $\boldsymbol{C_1 x_1 + C_2 x_2 = a_0}$, где $\boldsymbol{a_0}$ – любое положительное число, желательно такое, чтобы проведенная прямая равного уровня проходила через многоугольник решений. Прямая линия $\boldsymbol{C_1 x_1 + C_2 x_2 = a_0}$ является линией уровня целевой функции $\boldsymbol{L(\overline{x})}$. В каждой точке этой прямой целевая функция принимает одно и то же значение, равное a_0. Вектор $\boldsymbol{\overline{a}}$ – градиент целевой функции

$$\boldsymbol{\overline{a}} = \overline{\mathbf{grad}}\, \boldsymbol{L(\overline{x})} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2}\right)$$

перпендикулярен к линиям уровня и показывает направление, в котором эта функция возрастает с наибольшею скоростью. Перемещая найденную прямую параллельно самой себе в направлении увеличения (при поиске максимума) или уменьшения (при поиске минимума) целевой функции. В результате, либо отыщется точка и ее координаты, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение.

Задача 3. Инструментальный цех предприятия выпускает штампы двух видов: $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$. На эти изделия идут четыре вида материала: $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_3}$ и $\boldsymbol{S_4}$ (табл. 6).

Сколько штампов $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ надо изготовить, чтобы при данных запасах материалов на предприятии получить наибольшую выручку, если стоимость одного штампа $П_1$ составляет $C_1 = 7000$ руб., $П_2 - C_2 = 5000$ руб.?

Таблица 6. Затраты материалов на штампы

Материалы	Запасы материалов, шт.	Штампы	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0

Решение. Предположим, что цех выпускает штампов $\mathbf{П_1} \to \boldsymbol{x_1}$, $\mathbf{П_2} \to \boldsymbol{x_2}$. Тогда целевая функция $\boldsymbol{L = C_1x_1 + C_2x_2} \to \mathbf{max}$, где $\boldsymbol{L}$ – стоимость штампов. На первый штамп $П_1$ израсходуется материала $\boldsymbol{S_1} \to \boldsymbol{a_{11}x_1}$, на второй $\mathbf{П_2}$ – $\boldsymbol{a_{12}x_2}$ на все штампы – $\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1}$, где $\boldsymbol{b_1}$ – запасы материала $\boldsymbol{S_1}$. Аналогичным путем находятся и другие ограничения. В конечном итоге получим

$$\begin{aligned} \mathbf{2}\boldsymbol{x_1} + \mathbf{3}\boldsymbol{x_2} &\leq \mathbf{19}, \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} &\leq \mathbf{13}, \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x_2} &\leq \mathbf{15}, \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x_1} &\leq \mathbf{18}. \end{aligned} \tag{2}$$

Надо найти такие числа x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенствам, при которых целевая функция L имеет наибольшее возможное значение.

Задачу можно решить чисто геометрическим способом в координатах x_1 и x_2. Каждая прямая неравенства (2) делит плоскость на две полуплоскости. По одну сторону от граничной прямой располагаются точки, удовлетворяющие неравенству, по другую – не удовлетворяющие. В совокупности на плоскости x_1x_2 граничные прямые образуют многоугольник – область изменения переменных (рис. 24). После вычисления целевой функции в каждой вершине многоугольника найдем, что наибольшую выручку 50 000 руб. цех получит при изготовлении штампов $П_1 = 5$ шт. и $П_2 = 3$ шт.

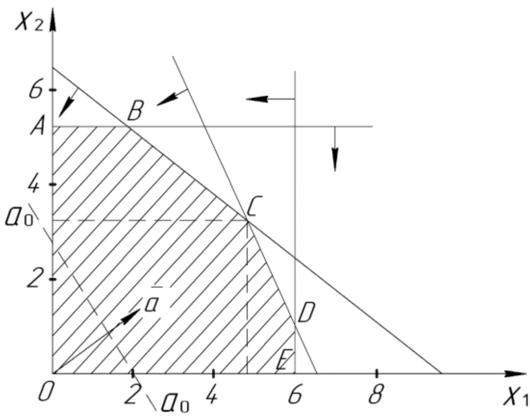


Рис. 24. Графическое представление области решений системы неравенств (2)

2.5 Методы динамического программирования

Технологические процессы пластического деформирования металлов являются многостадийными, включающими, например, операции резки W_{11}, нагрева W_{12}, деформирования W_{13} и т.п.

(рис. 25). При выборе траектории оптимального технологического процесса с точки зрения расхода металла, трудоемкости, дохода, управления запасами можно применять ***динамическое программирование*** как метод оптимизации многошаговых (многоэтапных) процессов, критерий эффективности которых обладает свойством аддитивности.

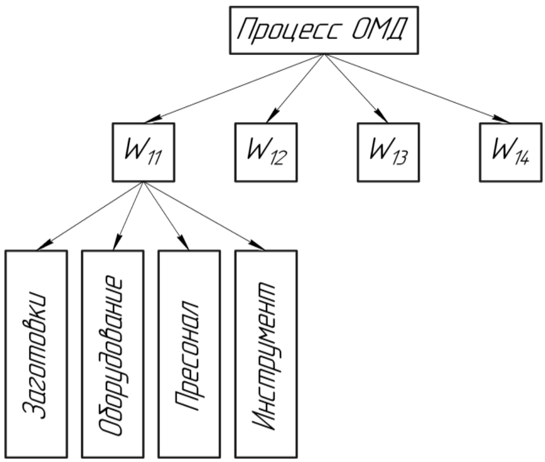


Рис. 25. Схема процессов пластического деформирования

В динамическом программировании рассматриваются многостадийные процессы принятия решений оптимального варианта. Решения принимают на каждой стадии исходя из интересов всего процесса в целом, на основе **принципа оптимальности Беллмана** «Некоторая стратегия (последовательности принятых решений) оптимальна, если в течение данного периода, каковы бы ни были предшествующие решения – решения, которые остается принять, образуют оптимальную стратегию».

Алгоритм метода динамического программирования заключаются в следующем. Пусть дано *n* функций $\boldsymbol{f_1\ (x_1), f_2\ (x_2), \ldots f_n\ (x_n)}$. Нужно определить минимум или максимум функции

$\mathbf{F}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{f_1}\ (\boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{f_2}\ (\boldsymbol{x_3}) + \ldots + \boldsymbol{f_n}\ (\boldsymbol{x_n}) \to \mathbf{min}$, причем на переменные $\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ наложены ограничения, при которых этот минимум существует. Пусть это ограничение в нашем случае есть $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \ldots + \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{A}$. Тогда, чтобы найти $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) =$ $= [\boldsymbol{f_1}\ (\boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{f_2}\ (\boldsymbol{x_2}) + \ldots + \boldsymbol{f_n}\ (\boldsymbol{x_n})]$, нужно вычислить функции поэтапно:

$$\boldsymbol{F_{1,2}}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \mathbf{min}\ [\boldsymbol{f_1}\ (\boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x})];$$
$$\boldsymbol{F_{1,2,3}}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \mathbf{min}\ [\boldsymbol{F_{1,2}}\ (\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f_3}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x})];$$
$$\boldsymbol{F_{1,2,\ldots,n-1}}\ (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \mathbf{min}\ [\boldsymbol{F_{1,2,\ldots,n-2}}\ (\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f_{n-1}}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x})];$$
$$\boldsymbol{F_n}\ (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \mathbf{min}\ [\boldsymbol{F_{1,2,\ldots,n-2}}\ (\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x})].$$

Записанная система уравнений есть функциональные рекуррентные уравнения метода динамического программирования.

При решении задач динамического программирования необходимо выполнить следующие три шага.

1. Разбиение задачи на подзадачи меньшего размера.
2. Нахождение оптимального решения подзадач, используя рекуррентные уравнения.
3. Использование полученного решения подзадач для получения решения исходной задачи.

Задача 4. На рис. 26 показана сеть траекторий технологии изготовления поковок, передвигаясь по которым нужно попасть из начального узла 1 в конечный узел 6. Требуется найти путь, при перемещении по которому затрачивается наименьшее время. Время передвижения от узла к узлу указано у линий, соединяющих узлы.

Решение. Функциональные рекуррентные уравнения для узлов 6, 5, 4, 3, 2, 1 имеют вид

$$f_i = \min\,(t_{i,j} + f_j);\ f_6 = 0;$$
$$f_5 = \min\,(t_{5,6} + f_6) = \min\,(2 + 0) = 2;$$
$$f_4 = \min \begin{Bmatrix} t_{4,5} & + f_5 \\ t_{4,6} & + f_6 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 3 + 2 = 5 \\ 5 + 0 = 5 \end{Bmatrix} = 5;$$

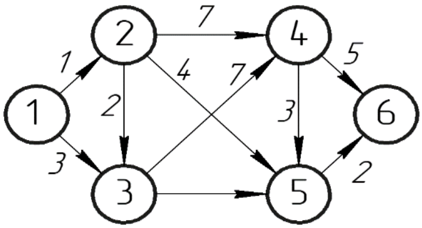


Рис. 26. Сеть траекторий

$$f_3 = \min\begin{Bmatrix} t_{3,4} & + f_4 \\ t_{3,5} & + f_5 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 7+5=12 \\ 3+2=5 \end{Bmatrix} = 5;$$

$$f_2 = \min\begin{Bmatrix} t_{2,4} & + f_4 \\ t_{2,5} & + f_5 \\ t_{2,3} & + f_3 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 7+5=12 \\ 4+2=6 \\ 2+5=7 \end{Bmatrix} = 6;$$

$$f_1 = \min\begin{Bmatrix} t_{1,2} & + f_2 \\ t_{1,3} & + f_3 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 1+6=7 \\ 3+5=8 \end{Bmatrix} = 7,$$

где $\boldsymbol{f_i}$ – наименьшее время, необходимое для передвижения от узла 1 к конечному узлу 6 по допустимым путям с использованием оптимальной стратегии.

Таким образом, наименьшее время равно 7, а траектория проходит через узлы 1 – 2 – 5 – 6.

Пусть эффективность технологического процесса характеризуется показателем W (назовем его выигрыш). Предположим, что выигрыш W складывается из выигрышей на отдельных i – x шагах $\boldsymbol{\omega_i}$:

$$\boldsymbol{W = \sum_{i=1}^{m} \omega_i,}$$

где m – количество шагов.

На каждом шаге мы можем выбрать какие-то параметры, влияющие на его ход и исход соответственно на выигрыш на данном шаге и выигрыш для системы в целом. Будем называть это решение **«шаговым уравнением»** и обозначать буквами $\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$. Управление для системы в целом $\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$. Требуется найти такое управление x, при котором выигрыш W обращается в максимум

$$\boldsymbol{W} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\omega_i} \to \mathbf{max}.$$

То управление x^*, при котором максимум достигается, будем называть **оптимальным управлением**. Оно состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений

$$\boldsymbol{x}^* = \{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \dots, \boldsymbol{x}_n^*\}.$$

Тот выигрыш, который достигается при этом управлении, обозначим

$$\boldsymbol{W}^* = \max_{\boldsymbol{x}}\{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{X})\}.$$

Планируя многошаговую операцию, надо выбирать управление на каждом шаге с учетом всех его будущих последствий на еще предстоящих шагах. Управление на $\boldsymbol{i}$-м шаге выбирается не так, чтобы выигрыш именно на этом шаге был максимален, а так, чтобы была максимальной сумма выигрышей на всех оставшихся до конца шагах плюс данный выигрыш. Последний шаг можно планировать так, чтобы он сам, как таковой, принес наибольший выигрыш. Поэтому процесс динамического программирования обычно разворачивается от конца к началу. Прежде всего планируется последний $\boldsymbol{n}$-й шаг, но мы не знаем условий, в которых приступаем к последнему шагу. Вот тут-то и начинается самое главное. Планируя последний шаг, нужно сделать разные предположения о том, чем кончился последний $(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$ шаг, и для каждого из них найти условное оптимальное управление на $\boldsymbol{n}$-шаге.

Предположим, что мы это сделали, и для каждого из возможных исходов последнего шага знаем условное оптимальное управление и соответствующий ему условный оптимальный выигрыш на $\boldsymbol{n}$-шаге. Теперь можно оптимизировать управление на предпоследнем шаге $\boldsymbol{n-1}$. Снова сделаем предположение о том, чем кончился предыдущий шаг $\boldsymbol{n-2}$, и найдем такое управление на шаге $\boldsymbol{n-1}$, при котором выигрыш за два последние шага максимальный. Далее, двигаясь назад, дойдем до первого шага. Теперь уже можем построить не условное оптимальное, а просто оптимальное уравнение $\boldsymbol{x}^*$, обеспечивающее оптимальный выигрыш $\boldsymbol{W}^*$.

Таким образом, в процессе оптимизации методом динамического программирования расчеты проводятся дважды: первый раз – от конца к началу; второй – от начала к концу.

2.6 Сетевые методы

Решение проблем планирования и управления сложных систем представляет большие трудности в связи с тем, что возникает необходимость в совместной работе нескольких различных коллективов (исполнителей), а также в согласовании сроков выполнения отдельных разделов работы и осуществлении руководства.

Одними из эффективных способов планирования и управления являются **сетевые методы**, широко применяемые как при создании новых систем, так и их моделировании.

Сферы применения сетевых методов: инновационная деятельность; научно-исследовательская работа; технологическое проектирование; опытное и серийное производство; тестирование серийных образцов; модернизация оборудования; исследование конъюнктуры рынка; проектирование опытно-конструкторских разработок.

К достоинствам сетевых методов относят:

1) научно обоснованное планирование работ с учетом стоимости качества и времени окончания, как для каждой отдельной работы, так и для всего комплекса работ в целом;

2) выявление напряженных участков работ и фокусирование внимания на этих работах;

3) возможность контроля сложных планов;

4) четкое разграничение ответственности каждого исполнителя;

5) сравнительную простота, наглядность.

6) применение компьютерных технологий, позволяющих быстро и качественно строить сетевые модели.

Сетевой график – это информационная динамическая модель, отображающая взаимосвязь и процесс выполнения комплекса операций, в который весь комплекс операций расчленяется на отдельные работы, располагаемые в строго технологической последовательности, для достижения четко определенных целей. Целью может являться окончание строительства объекта, создание уникального изделия, выполнение научно-исследовательской работы и т.п.

Работа – протекающий во времени активный процесс, требующий материальных и трудовых ресурсов, например, процесс скальпирования слитков, процесс оформления эскизного проекта и т.п. Обозначается работа на графике стрелкой, над которой пишется цифра – количество дней (или недель, часов и т.п.), необходимое для ее выполнения.

Фиктивная работа – это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие – результат окончания работ, например, заготовка установлена в штамп, технический проект принят комиссией и т.п. Длительность события равна нулю. На графике событие обозначается кружочком (узлом), в который входят и из которого выходят стрелки, обозначающие работу. Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинают проект, называют **исходным**. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется **завершающим.**

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся все входящие в него работы.

Связная совокупность работ и событий образует **сетевой график** (рис. 27). Процесс построения сетевого графика состоит в графическом упорядочении всех работ и событий, т.е. в перечислении для каждой работы начальных и конечных событий.

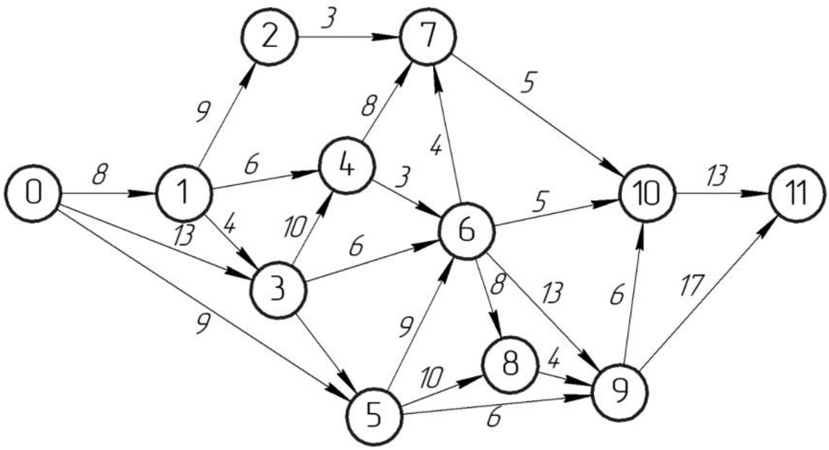


Рис. 27. Сетевая модель

Расчет сетевого графика состоит в вычислении критического пути и сроков начала и конца совершения событий. Любая непрерывная последовательность работ от начального до конечного события образует на сетевом графике **путь.** Начальное событие характеризуется тем, что в него входит ни одна стрелка, а конечное тем, что из него не выходит ни одна стрелка. Начальное событие соответствует началу работ, а конечное – завершению всех работ (достижение поставленной цели). Путь, имеющий наибольшую продолжительность времени, называется **критическим.** Правило кодирования событий и работ приведено на рис. 28.

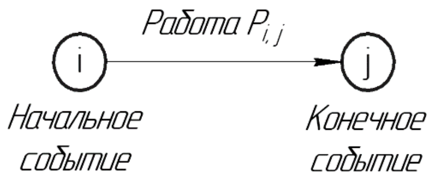


Рис. 28. Схема кодирования событий и работ

Любое событие может наступить только тогда, когда завершены все предшествующие ему работы. Отсюда следует, что **ранний срок свершения события $t_р(i)$** свершения j-го события будет равен сумме всех работ, лежащих на наиболее длинном пути:

$$t_р(j) = \max\,[t_р(i) + t\,(j, i)]. \qquad (3)$$

С другой стороны, поздний срок свершения события $t_п(i)$ свершения i-го события представляет собой самый **поздний возможный срок наступления данного события**, при котором не наступает задержки раннего свершения завершающего события графика:

$$t_п(i) = \min\,[t_п(j) - t\,(i, j)]. \qquad (4)$$

Величина разности между поздним и ранним сроками свершения события называется **резервом времени события P_i** i-го события

$$P_i = t_п(i) - t_р(i). \qquad (5)$$

Под ранним сроком начала работы $t_{рн}(i,\ j)$ подразумевается самый ранний возможный срок начала данной работы, этот срок равен раннему сроку свершения предшествующего события:

$$t_{рн}(i, j) = t_р(i).$$

Ранний срок окончания работы $t_{ро}(i,j)$ – наиболее ранний возможный срок окончания работы; этот срок равен сумме раннего начала и ожидаемой продолжительности работы:

$$t_{ро}(i,j) = t_р(i) + t\,(i,j).$$

Поздний срок окончания работы $t_{\text{по}}(i, j)$ – это самый поздний срок окончания работы, при котором еще не происходит задержка раннего свершения завершающего события:

$$t_{\text{по}}(i, j) = t_{\text{п}}(j).$$

Поздний срок начала работы – $t_{\text{пн}}(i, j)$ наиболее поздний срок начала роботы, не приводящий к задержке свершения завершающего события графика:

$$t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{п}}(i) - t(i, j).$$

Полный резерв времени работы $\mathrm{P}_n(i, j)$ – максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность данной работы, не изменив продолжительности критического пути $t_{\text{кр}}$:

$$\mathrm{P}_n(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t(i, j) - t_{\text{р}}(i).$$

Процесс разработки сетевой модели включает в себя определение списка работ проекта; оценку параметров работ; определение зависимостей между работами (табл. 7).

Таблица 7. Параметры сетевого графика

№	Работа (i,j)	Продолжительность работы Р (i,j)	Сроки начала и окончания работы				Резерв времени $R_n(i,j)$
			$t_{\text{рн}}(i,j)$	$t_{\text{ро}}(i,j)$	$t_{\text{пн}}(i,j)$	$t_{\text{по}}(i,j)$	
1	(0,1)	8					
2	(0,3)	13					
…							
n							

При построении сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил.

1) Правило последовательности изображения работ: сетевые модели следует строить от начала к окончанию, т.е. слева направо.

2) Правило изображения стрелок. В сетевом графике стрелки, обозначающие работы, ожидания или зависимости, могут иметь различный наклон и длину, но должны идти слева направо, не отклоняясь влево от оси ординат, и всегда направляться от предшествующего события к последующему, т.е. от события с меньшим порядковым номером к событию с большим порядковым номером.

3) Правило пересечения стрелок. При построении сетевого графика следует избегать пересечения стрелок: чем меньше пересечений, тем нагляднее график.

4) Правило обозначения работ. В сетевом графике между обозначениями двух смежных событий может проходить только одна стрелка.

5) В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, то есть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события. Здесь либо работа не нужна и ее необходимо аннулировать, либо не замечена необходимость определенной работы, следующей за событием для свершения какого-либо последующего события.

6) Правило расчленения и запараллеливания работ. При построении сетевого графика можно начинать последующую работу, не ожидая полного завершения предшествующей работы. В этом случае нужно «расчленить» предшествующую работу на две, введя дополнительное событие в том месте предшествующей работы, где может начаться новая работа.

7) Правило запрещения замкнутых контуров (циклов, петель). В сетевой модели недопустимо строить замкнутые контуры – пути, соединяющие некоторые события с ними же са-

мими, т.е. недопустимо, чтобы один и тот же путь возвращался в то же событие, из которого он вышел.

8) Правило запрещения тупиков. В сетевом графике не должно быть тупиков, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события (в многоцелевых графиках завершающих событий несколько, но это особый случай).

9) Правило запрещения хвостовых событий. В сетевом графике не должно быть хвостовых событий, т.е. событий, в которые не входит ни одна работа, за исключением начального события.

10) Правило изображения дифференцированно-зависимых работ. Если одна группа работ зависит от другой группы, но при этом одна или несколько работ имеют дополнительные зависимости или ограничения, при построении сетевого графика вводят дополнительные события.

11) Правило изображения поставки. В сетевом графике поставки (под поставкой понимается любой результат, который предоставляется «со стороны», т.е. не является результатом работы непосредственного участника проекта) изображаются двойным кружком либо другим знаком, отличающимся от знака обычного события данного графика. Рядом с кружком поставки дается ссылка на документ (контракт или спецификацию), раскрывающий содержание и условия поставки.

12) Правило учета непосредственных примыканий (зависимостей). В сетевом графике следует учитывать только непосредственное примыкание (зависимость) между работами.

13) Технологическое правило построения сетевых графиков. Для построения сетевого графика необходимо в технологической последовательности установить:

- какие работы должны быть завершены до начала данной работы;

• какие работы должны быть начаты после завершения данной работы;

• какие работы необходимо выполнять одновременно с выполнением данной работы.

14) Правила кодирования событий сетевого графика. Для кодирования сетевых графиков необходимо пользоваться следующими правилами:

1. Все события графика должны иметь свои собственные номера.

2. Кодировать события необходимо числами натурального ряда без пропусков.

3. Номер последующему событию следует присваивать после присвоения номеров предшествующим событиям. Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы. На оставшейся сети вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вновь вычеркивают работы, выходящие из события 2, и так продолжается до завершающего события.

4. Стрелка (работа) должна быть всегда направлена из события с меньшим номером в событие с большим номером.

Для расчета каждое событие графика делится на четыре сектора (рис. 29). В верхнем секторе записывается номер данного события. В левом секторе – наиболее ранний возможный срок совершения данного события, а в правом – наиболее поздний допустимый срок его совершения. В нижнем секторе записывается резерв времени события или номер того из предшествующих событий, которое указывает на направление пути наибольшей продолжительности, ведущего к данному событию. Указание в нижнем секторе даст возможность самым простым образом определить критический путь сетевого графика – после расчета ранних сроков совершения событий.

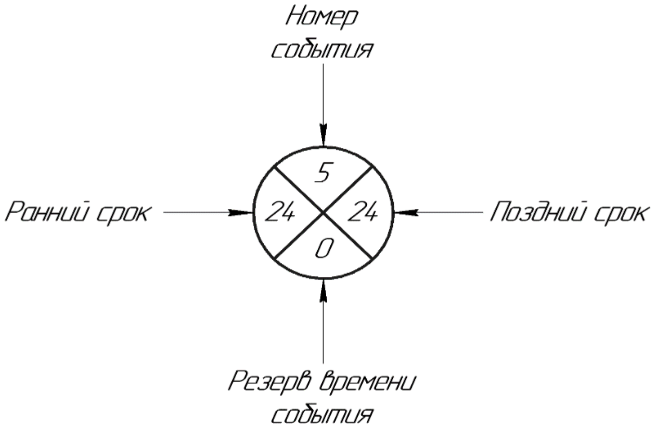


Рис. 29. Представление показателей событий на сетевом графике

Задача 5. На рис. 30 дана сетевая модель изготовления некоторой детали в виде ориентированного графа. Цифры у стрелок – время выполнения работы. Определить критический путь сетевого графика, ранние и поздние сроки выполнения работ и резервы времени событий.

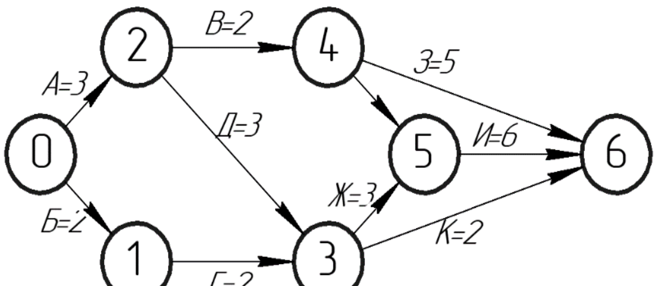


Рис. 30. Сетевая модель процесса изготовления детали

Решение. По формулам (3–5) вычислим ранние и поздние сроки выполнения работ и резервы времени событий и заполним результаты расчета для каждого события, разделенного на 4 сектора. По результатам расчетов на рис. 31 определен критический путь 0-2-4-5-6, указанный жирными линиями.

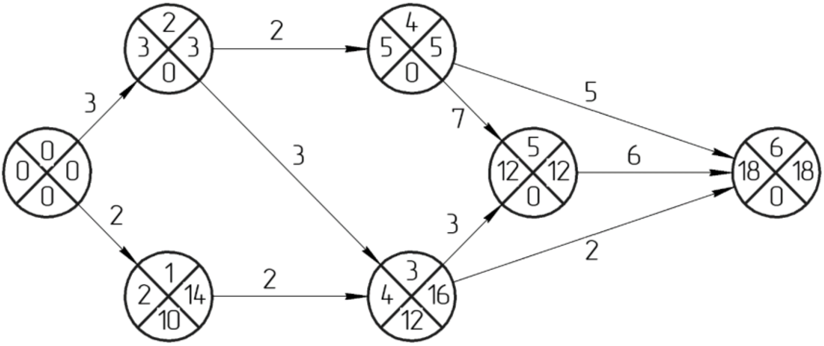


Рис. 31. Результаты расчетов

2.7 Задания для самоконтроля

1. Что такое физическое моделирование систем?

2. Что такое математическое моделирование систем?

3. В чем отличие предметного моделирования от абстрактного моделирования?

4. Перечислите основные математические, статистические и экспериментальные методы исследования систем.

5. Что такой корреляция?

6. Назовите основной способ вычисления коэффициентов корреляционных уравнений?

7. Что отражает величина коэффициента корреляции?

8. В каких случаях используют множественную корреляцию?

9. Что понимают под полным многофакторным экспериментом?

10. Как найти основные уровни факторов?

11. Каким образом выбирают интервал варьирования факторов?

12. Почему все факторы приводят к безразмерному виду?

13. Напишите формулу для кодирования факторов.

14. Что представляет собой матрица планирования эксперимента?

15. Как построить матрицу планирования эксперимента?

16. Перечислите свойства матрицы планирования эксперимента типа 2^k.

17. Каким образом рассчитывают коэффициенты математической модели?

18. Как проводится анализ математической модели?

19. Как оценивается влияние комбинации факторов на параметр оптимизации?

20. Какого типа задачи могут быть решены с помощью линейного программирования?

21. При каких условиях математическую модель можно назвать линейной?

22. Опишите процесс формирования системы ограничений при решении задач линейного программирования.

23. Сущность графического метода решения задач линейного программирования.

25. Что собой представляет область допустимых решений задач линейного программирования?

26. Какие параметры используют в качестве целевой функции?

27. Как формулируется задача линейного программирования?

28. Алгоритм решения задач линейного программирования графическим методом.

29. Область использования задач метода динамического программирования.

30. В чем заключена суть метода динамического программирования?

31. Каким условиям должна удовлетворять задача, чтобы для ее решения мог быть применен алгоритм динамического программирования?

32. Опишите особенности процесса принятия решения в динамическом программировании.

33. Какие операции называются многошаговыми?

34. В чем состоит смысл принципа оптимальности Беллмана?

35. Перечислите достоинства сетевых методов.

36. Что такое сетевой график?

37. Какой путь называют критическим?

38. Что такое событие?

39. Как подсчитать резерв времени события?

40. Что такое работа?

41. Как подсчитать полный резерв времени работы?

42. Перечислите основные правила построения сетевого графика.

43. Сферы применения сетевых графиков.

2.8 Задачи и упражнения

2.1. Как вы считаете, можно ли поставить эксперимент на абстрактной математической модели?

2.2. В исследовании изучалось влияние трех факторов, каждый из которых изменялся на четырех уровнях. Найдите необходимое число опытов.

2.3. В исследовании изучалось влияние трех факторов. Первый фактор изменялся на двух уровнях, второй – на трех уровнях, а третий – на четырех уровнях. Найдите необходимое число опытов.

2.4. План и результаты эксперимента 2^{4-1} представлены матрицей. План и результаты эксперимента 2^{4-1} представлены матрицей в табл. 8.

Таблица 8. Матрица планирования эксперимента 2^{4-1}

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{13}	x_{23}	x_{34}	Y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	296
2	+	+	−	+	−	+	−	−	122
3	+	−	−	+	+	−	−	+	239
4	+	−	+	+	−	−	+	−	586
5	+	+	+	−	+	−	−	−	232
6	+	+	−	−	−	−	+	+	292
7	+	−	−	−	+	+	+	−	539
8	+	−	−	−	−	+	−	+	383

Постройте математическую модель и проведите ее анализ.

2.5. Дана формула $\boldsymbol{C} = \text{к}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{c}}$. Каким образом от указанной модели перейти к линейной модели $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{b_2}\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{b_3}\boldsymbol{x_3}$?

2.6. Цех выпускает металлические винты двух типов. Винты А изготовляются из нержавеющей стали, а винты Б – из мягкой стали. Стоимость винтов А – 2 р., а винтов Б – 1 р. за тысячу. Однако вследствие того, что нержавеющая сталь более твердая, технологический процесс изготовления винтов из такого материала более длительный. За один день на всех станках можно изготовить Б – 100 тыс., винтов А – 20 тыс. Общего количества используемого материала в сутки хватает на изготовление 65 тыс. винтов, причем нержавеющей стали – только на 15 тыс. винтов. Сформулировать задачу линейного программирования и решить ее.

2.7. План и результаты эксперимента 2^2 представлены матрицей в табл. 9.

Таблица 9. Матрица планирования эксперимента 2^2

№	x_0	x_1	x_2	y
1	+	−	−	1,68
2	+	−	+	1,16
3	+	+	−	0,74
4	+	+	+	0,39

Определить коэффициенты модели и дать геометрическую интерпретацию модели.

2.8. Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие А фрезерное 10, токарное 5, шлифовальное 6; изделие В фрезерное 8, токарное 10, шлифовальное 12. Общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования: фрезерное 168, токарное 180, шлифовальное 144. Прибыль от реализации одного изделия А 14 рублей и В 18 рублей. Сформулировать задачу линейного программирования, чтобы получать максимальную прибыль.

2.9. Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере $2, а каждый шахматный набор – в размере $4. На изготовление одной клюшки требуется четыре часа работы на участке А и два часа работы на участке В. Шахматный набор изготавливается с затратами шести часов на участке А, шести часов на участке В и одного часа на участке С. Доступная производственная мощность участка А составляет 120 н-часов в день, участка В – 72 н-часа и участка С – 10 н-часов. Сформулировать задачу линейного программирования: сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль и решить ее.

2.10. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум функции $F = x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$x_1 + 4x_2 \geq 4;$$
$$x_1 + x_2 \leq 6;$$
$$x_1 \geq 2;$$
$$x_2 \geq 2.$$

2.11. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти минимум функции $F = 5x_1 + 6x_2$ при ограничениях

$$2x_1 + x_2 \geq 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 12;$$
$$4x_1 \geq 4;$$
$$4x_2 \leq 12;$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.12. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум функции $F = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 12;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8;$$
$$4x_1 \leq 16;$$
$$4x_2 \leq 12.$$

2.13. Для производства столов и шкафов мебельная фирма использует необходимые ресурсы. Нормы затрат на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида представлены в табл. 10.

Определить, сколько столов и шкафов фирме следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

2.14. Фирма имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика – 4000 руб., пятитонного – 5000 руб. Фирма может выделить для приобретения автомашин 141 тысяч рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Таблица 10. Ресурсы

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина первого вида	0,2	0,1	40
Древесина второго вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-часов)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	60	80	

2.15. Решить графическим методом задачу линейного программирования при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$
$$3x_1 + 8x_2 \leq 240;$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 200;$$
$$9x_1 + 4x_2 \leq 360.$$

2.16. Для производства двух видов продукции используется три вида сырья. Расход сырья на производство единицы каждого вида сырья, запасы, а также прибыль от реализации единицы каждого вида сырья заданы в табл. 11.

2.17. Решить графическим методом задачу линейного программирования

при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$
$$3x_1 + 8x_2 \leq 240;$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 200;$$
$$9x_1 + 4x_2 \leq 360.$$

Таблица 11. Виды продукции

Виды сырья	Виды продукции		Запасы сырья, кг
	1	2	
1	3	8	240
2	4	5	200
3	9	4	360
Прибыль от реализации единицы продукции, у.е.	2	80	

2.18. На рис. 32 даны различные способы изготовления некоторой детали, например, шестерни в виде ориентированного графа, вершины которого разбиты на ***p*** – уровней. Из вершины «Начало» можно попасть в вершину «Конец», двигаясь по стрелкам, соединяющим указанные вершины. Цифры у стрелок – трудоемкость перехода. Выбор технологического процесса состоит в наборе таких вершин. Определить оптимальный технологический процесс, при котором критерий трудоемкости имеет наименьшее значение.

2.19. Требуется выбрать кратчайший путь между двумя городами. Сеть дорог, показанная на рис. 30, представляет возможные маршруты между исходным городом, находящемся в узле 1 и конечным пунктом в узле 7. Маршруты проходят через промежуточные города, обозначенные на сети с узлами с номерами 2–6. Расстояние между городами в километрах проставлены дугами между узлами.

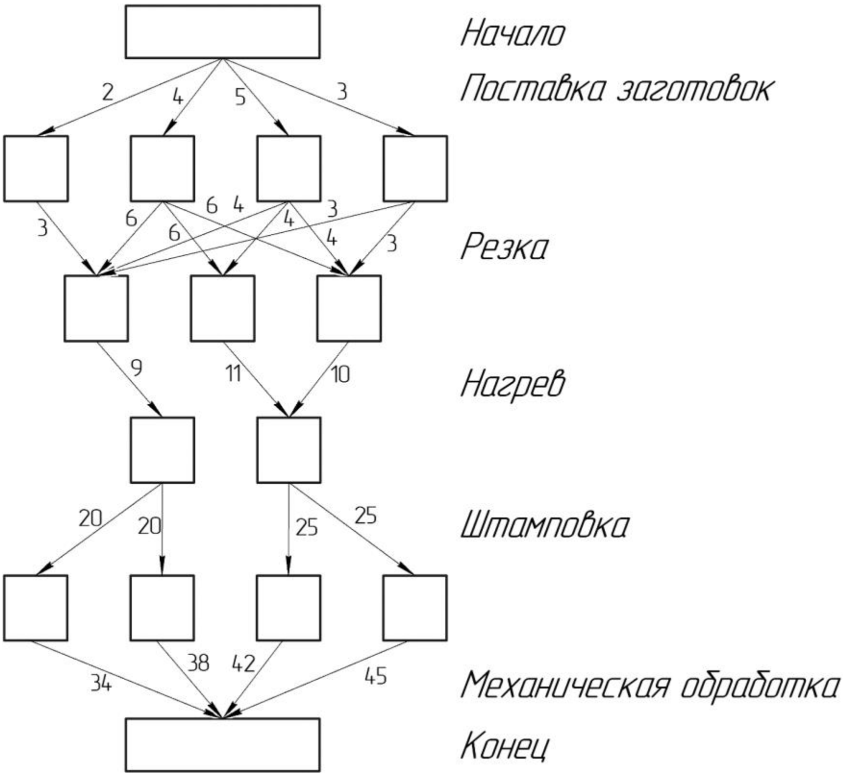


Рис. 32. Выбор оптимального технологического процесса

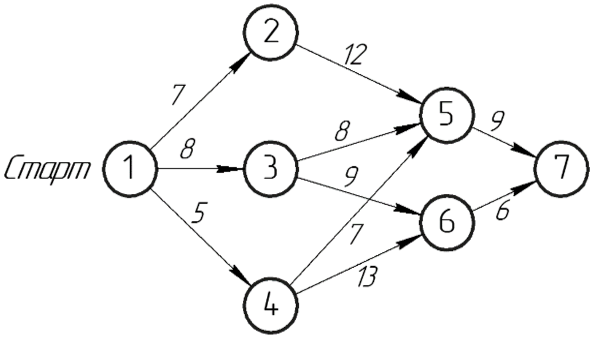


Рис. 33. Сеть дорог между городами

2.20. Инвестор выделяет средства в размере 5 тысяч денежных единиц, которые должны быть распределены между тремя предприятиями. Требуется построить план распределения инвестиций между предприятиями, обеспечивающий наибольшую общую прибыль, если каждое предприятие при инвестировании в него средств x тысяч денежных единиц приносит прибыль pi(x) тысяч денежных единиц (i = 1, 2 и 3) по следующим данным табл. 12:

Таблица 12. Исходные данные

Инвестирование средств (тыс.ден.ед.)	Прибыль (тыс.ден.ед.)		
x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
1	3,22	3,33	4,27
2	3,57	4,87	7,64
3	4,12	5,26	10,25
4	4	7,34	15,93
5	4/85	9,49	16,12

2.21. На рис. 34 приведен сетевой график проведения эксперимента по комплексному исследованию процесса прокатки. Цифрами обозначены события: 0 – получение задания; 1 – изучение литературы; 2 – составление программы эксперимента; 3 – изготовление образцов; 4 – изготовление валков; 5 – сборка валкового узла; 6 – наладка и монтаж тензометрических схем; 7 – изготовление вспомогательного оборудования; 8 – окончательная отладка всех систем; 9 – проведение эксперимента; 10 – получение первичных опытных данных; 11 – продолжение изучения литературы; 12 – разработка методики обработки опытных данных; 13 – обработка опытных данных; 14 – составление технического отчета.

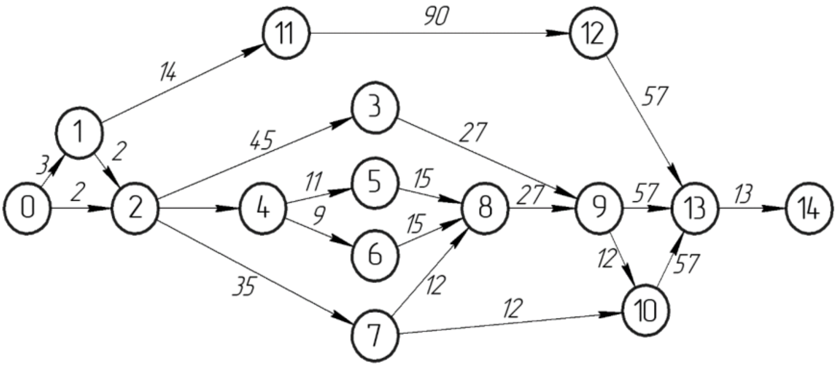


Рис. 34. Сетевой график проведения эксперимента
по комплексному исследованию процесса прокатки

Определить параметры сетевой модели, приведенной на рис. 31: критический путь, ранний и поздний сроки свершения событий резервы времени событий.

2.22. Составить математическую модель об оптимальном производстве деталей.

Для изготовления деталей двух видов требуется проделать ряд операций на трех станках. Время обработки одной детали первого типа на первом станке 11 минут, на втором – 7 минут, на третьем – 6 минут; время обработки одной детали второго типа соответственно 9, 12 и 16 минут на каждом из станков. В течение месяца первый станок работает 9850 минут, второй – 8150 минут, третий – 9600 минут. Одна деталь первого типа приносит доход 900 условных единиц, второго типа – 1000 условных единиц. Сколько нужно ежемесячно производить деталей каждого типа, чтобы иметь общую максимальную прибыль?

2.23. На рис. 35 дана сетевая модель изготовления некоторой детали в виде ориентированного графа. Цифры у стрелок – время выполнения работы. Определить критический путь сетевого графика, ранние и поздние сроки выполнения работ и резервы времени событий.

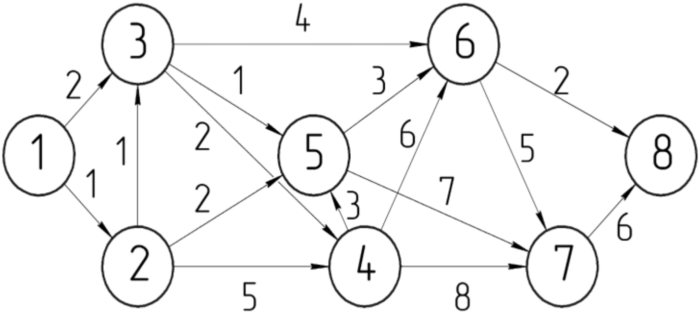


Рис. 35. Сетевой график

3. КРИТЕРИИ ВЫБОРА СИСТЕМ

3.1 Понятие критерия

При анализе и синтезе технических систем возникает множество различных альтернатив, из которых специалисту нужно выбрать оптимальные с точки зрения эффективности (предпочтительности).

Чтобы сравнить различные альтернативы по эффективности, нужно иметь какие-то критерии (показатель эффективности, целевая функция). Критерий должен быть универсальным, количественным, простым и легко вычисляемым, иметь физический смысл. Лучшим будет тот критерий, который в максимальной степени способствует достижению максимальной цели. Очень часто в качестве критериев принимают выходные переменные технической системы. К их числу относят параметры, характеризующие экономическую эффективность процесса, а также технико-экономические параметры, технологические свойства и характеристики готовых изделий (рис. 36).

Чем сложнее система, тем больше критериев, так как в этом случае эффективность не может быть охарактеризована с помощью одного единственного критерия. На помощь приходится привлекать другие, дополнительные. Такие системы называются ***многокритериальными.*** Например, организуется работа кузнечно-штамповочного цеха. Исходя из какого критерия надо выбрать решение? С одной стороны, хочется обратить в максимум валовой объем продукции. Желательно также получить максимально чистый доход, минимальную себестоимость, максимальную производительность труда и т. одновременно удовлетворяющее всем требованиям? Нет! Поэтому формулировка: достигнуть максимум эффекта при минимальных затратах – представляет собой не более, чем фразу, и при научном анализе должна быть отброшена. Как же быть?

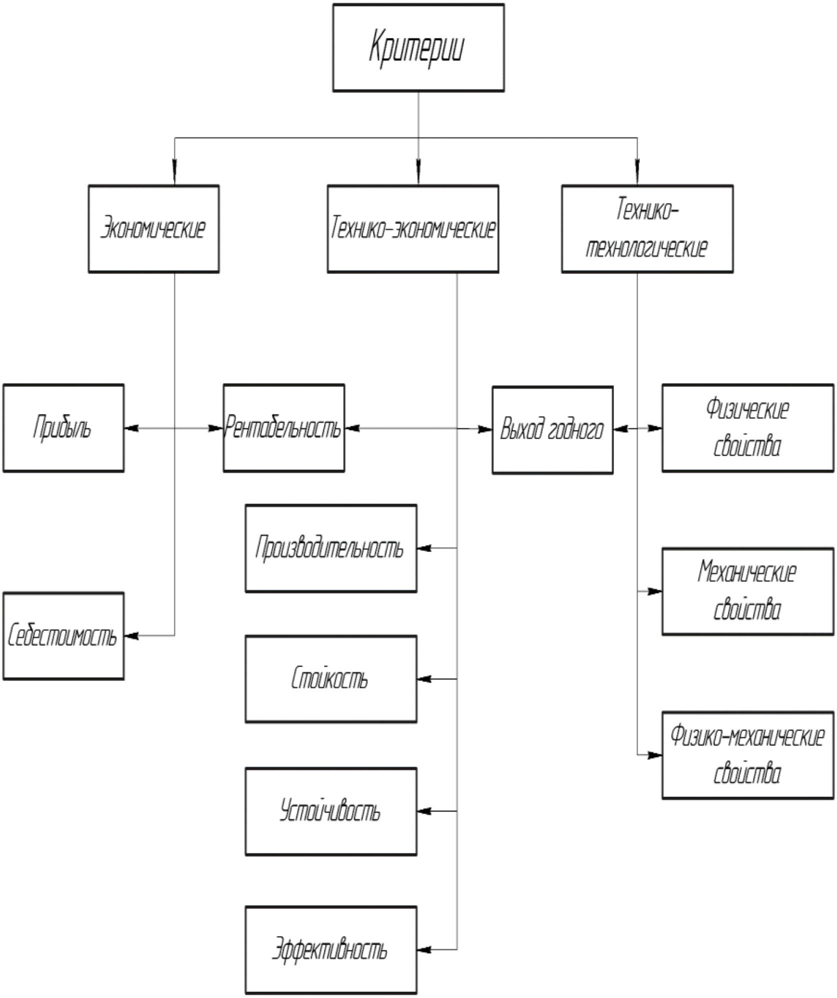


Рис. 36. Классификация целевых величин

Рассмотрим систему с двумя критериями q_1 и q_2. Каждой альтернативе на графике (рис. 37) соответствуют определенные показатели q_1 и q_2, которые, например, надо максимизировать. Эффективные решения – только решения x_2, x_5, x_{10}, x_{11}, лежащие в правой верхней границе. Для всякого другого решения существует хотя бы одно доминирующее, для которого либо q_1, либо q_2, либо оба больше, чем для данного. И только на границе доминирующих не существует. Когда на множестве альтернатив выделены эффективные, то дальнейший выбор строится только на множестве эффективных. Из них решение x_{11} – лучшее по критерию q_1, решение x_2 – по критерию q_2. Дело специалиста, принимающего решение, его прерогатива – выбрать тот вариант, который для него предпочтителен и приемлем по обоим критериям.

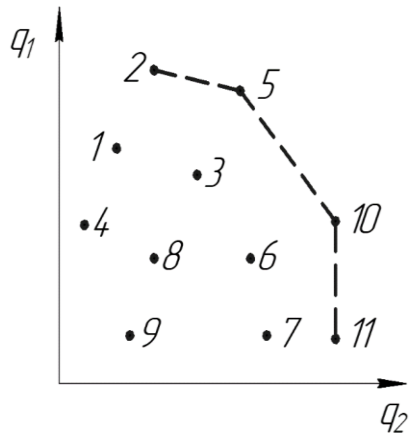


Рис. 37. Система с двумя критериями q_1 и q_2

3.2 Методы формирования обобщенных критериев

Метод обобщенного критерия – процедура, которая синтезирует набор оценок по заданным частным **критериям** системы в единую численную оценку, выражающую итоговую полезность рассматриваемого набора оценок для специалиста принимающего решения.

Сформулируем частные критерии, которые должны быть использованы при формировании обобщенного критерия для задач проектирования и совершенствования процессов пластического деформирования давлением. К числу таких критериев необходимо прежде всего отнести показатели качества изделий (табл. 13), а также параметры технологического процесса и оборудования, определяющие качество изделий и эффективность металлургического производства.

Таблица 13. Показатели качества изделий

Группа	Показатели
Геометрические характеристики изделий	Точность размеров, допуски на размеры. Выполнение формы изделия
Механические характеристики материала изделий	σ_b, σ_t, δ, ψ, α_k, твердость. Изменение механических свойств по длине и по сечению
Качество поверхности	Шероховатость, наличие дефектов
Структура металла	Текстура деформации, величина зерна, однородность структуры
Эксплуатационные характеристики	Коррозионная стойкость, усталостная прочность, красностойкость

Указать универсальный критерий эффективности для процессов пластического деформирования в силу их многоцелевого характера, естественно, невозможно, хотя попытки такого рода предпринимаются довольно часто.

К набору частных критериев, входящих в обобщенный критерий, предъявляются требования полноты, характеризующие все основные аспекты работы технической системы; критерии должны быть однозначно понимаемы, измеримы и доступны оценке; число критериев должно быть ограничено.

Формирование обобщенных критериев для анализа и синтеза, перестав быть только «искусством», основанным на инженерной интуиции, превратились в серьезное научное направление. Путь к единому критерию часто лежит через обобщение.

Пусть имеется множество альтернатив (вариантов построения системы), причем каждая альтернатива $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Имеется совокупность частных критериев $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, отражающих количественно множество свойств системы, т.е. каждая альтернатива характеризуется вектором:

$$\vec{q}(\vec{a}) = [q_1(\vec{a}), q_2(\vec{a}), \ldots q_i(\vec{a}), \ldots, q_n(\vec{a})].$$

Необходимо принять решение о выборе одной из альтернатив. Решение простое – если произвести выбор по одному критерию, сложное – если выбранная альтернатива не является лучшей по какому-либо одному критерию, но может оказаться приемлемой для всей их совокупности. Задача принятия решения по выбору альтернативы на множестве критериев формально сводится к отысканию отображения, которое каждому вектору ставит в соответствие действительное число:

$$E = \varphi\ (\bar{q}) = \varphi\ (q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Оператор φ называется ***интегральным*** **(обобщенным)** ***критерием***. Он присваивает каждому решению по выбору альтернативы соответствующее значение эффективности E, что позволяет упорядочить множество решений по степени предпочтительности.

Стандартный прием «борьбы» с многокритериальным выбором – это переход к однокритериальной задаче с использованием метода свертки критериев.

Обобщенный критерий с ограничением. Наиболее простой и часто применяемый метод заключается в том, что один из наиболее важных с точки зрения цели системы критериев q_k принимается в качестве обобщенного, а все остальные учитываются в виде ограничений, определяющих область допустимых альтернатив:

$$E = q_k,\ q_i \geq q_i^{(0)},\ i = 1, 2 \ldots, l;$$

$$q_i \leq q_i^{(0)},\ i = l + 1,\ l + 2, \ldots, n;\ i \neq k,$$

где $q^0 = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_n^{(0)})$ – вектор, определяющий допустимые значения по всем критериям. Например, нужен сплав, имеющий наибольший уровень жаропрочности и обладающий пластичностью, свариваемостью, коррозионной стойкостью и т.п. не выше заданной. В качестве обобщенного критерия взята жаропрочность, а остальные критерии взяты в виде ограничений. **Основной недостаток метода** – альтернативы оцениваются только по одному критерию, а значения других критериев, если они не удовлетворяют ограничениям, не учитываются.

В ряде случаев обобщенный показатель эффективности записывают, используя аддитивные и мультипликативные (рассчитывается или как произведение частных показателей) преобразования над выбранной системой частных критериев q_i.

Обобщенный критерий в аддитивной форме E рассчитывается как взвешенная сумма частных показателей

$$E = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i q_i, \rightarrow \min(\max),$$

где $b_i, \ldots, b_n$ – положительные или отрицательные коэффициенты, величины которых определяют вес (значимость) по абсолютной шкале, n – число частных критериев q_i, i – номер критерия. Обычно, положительные ставятся при тех критериях, которые желательно максимизировать, а отрицательные – при тех, которые желательно минимизировать, при условии, что ищется E max. Пусть, например, цель состоит в максимизации объема кузнечно-штамповочного цеха q_1 и минимизации объема брака q_2. Тогда показатель эффективности примет вид:

$$E = b_1q_1 - b_2q_2.$$

Поскольку с ростом q_1 возрастает и q_2, то в выражении обобщенного критерия E нужно взять b_1 со знаком плюс, $a - b_2$ со знаком минус, так как объем производства в соответствии с целью оптимизации следует увеличить, а объем брака желательно уменьшить. Выбор «весов» коэффициентов осуществляет специалист на основе анализа степени важности частных критериев q_i.

Частные критерии q_i имеют различную физическую природу и поэтому различную размерность. А значит просто суммировать их некорректно. В связи с этим числовые значения частных критериев q_i делятся на некоторые нормирующие делители, которые назначается следующим образом:

- в качестве нормирующих делителей принимаются директивные значения параметров или критериев, заданные заказчиком. Считается, что значения параметров, заложенные в техническом задании, являются оптимальными или наилучшими;

- в качестве нормирующих делителей принимаются максимальные (минимальные) значения критериев, достигаемые в области допустимых решений.

Размерности самих частных критериев и соответствующих нормирующих делителей одинаковы, поэтому в итоге обобщенный аддитивный критерий получается безразмерной величиной.

Значения b_i можно определить в результате опроса группы экспертов. Каждый j-й эксперт вначале определяет набор чисел C_{ij}, отражающих его мнение об относительной ценности критерия, причем числа записаны в произвольном масштабе. Затем они масштабируются. В результате:

$$b_{ij} = C_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n} C_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1.$$

Окончательные значения коэффициентов b_i получаются в результате осреднения значений b_{ij} (j = 1, 2, … m), полученных от всех экспертов. Если компетентность экспертов в группе считается одинаковой, то

$$b_i = 1 / m \sum_{j=1}^{m} b_{ij}.$$

Преимущество аддитивного критерия: как правило, всегда удается определить единственный оптимальный вариант решения.

Недостатки:

- трудности (субъективизм) в определении весовых коэффициентов;
- аддитивный критерий не вытекает из объектной роли частных критериев и поэтому выступает как формальный математический прием;
- в аддитивном критерии происходит взаимная компенсация частных критериев, т.е. уменьшение одного из них может быть компенсировано увеличением другого критерия.

Обобщенный критерий в мультипликативной форме. В случае использования мультипликативного преобразования обобщенный критерий формируется как произведение частных показателей следующим образом:

$$E = \varphi (q_1, q_2, \ldots, q_n) = \prod_{i=1}^{n} b_i q_i.$$

Преимущества: не требуется нормирование частных критериев; практически всегда определяется одно оптимальное решение.

Недостатки: трудности (субъективизм) в определении весовых коэффициентов частных критериев; перемножение разных размерностей; взаимная компенсация значений частных критериев.

Обобщенный критерий может оцениваться расстоянием между идеальной и рассматриваемой альтернативами. Чем ближе качество рассматриваемой альтернативы к идеальной, тем она лучше. Пусть

$\vec{q} = (q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n)$ – идеальная альтернатива, тогда обобщенный критерий может быть записан в виде суммы отклонений от идеальной альтернативы для частных критериев одной размерности:

$$E = Y(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{l} (q_i^0 - q_i) + \sum_{i=l+1}^{n} (q_i - q_i^0),$$

где q_i, $i = 1, 2, \ldots; l$ – частные критерии, подлежащие максимизации; q_i, $i = l+1, l+2, \ldots; n$ – частные критерии, подлежащие минимизации.

3.3 Шкалы измерений

Все критерии, факторы, параметры имеют свой физический смысл и свою размерность. должны быть количественно измеримы, определены на одной из шкал измерений (рис. 38). Чтобы объединить различные критерии, факторы, параметры приходится вводить для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых критериев, факторов, параметров – это делает их сравнимыми.

Абсолютная шкала считается наиболее совершенной и подразумевает, что у измеряемой величины существует абсолютный ноль и абсолютная единица. Результатом измерения является число, выражающее величину в единицах измерения. В данной шкале начало отсчета и единицы измерения неизменны. Числа, полученные по такой шкале, можно складывать, вычитать, делить, умножать – все эти действия будут осмысленными. Например, в абсолютной шкале вероятность случайного события, количество каких-либо предметов. Абсолютной шкалой является термодинамическая температурная шкала по Кельвину. Для построения обобщенного критерия удобно воспользоваться формулой:

$$E = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} q_i}\ ,$$

где $\prod_{i=1}^{n}$ – произведение частных критериев $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

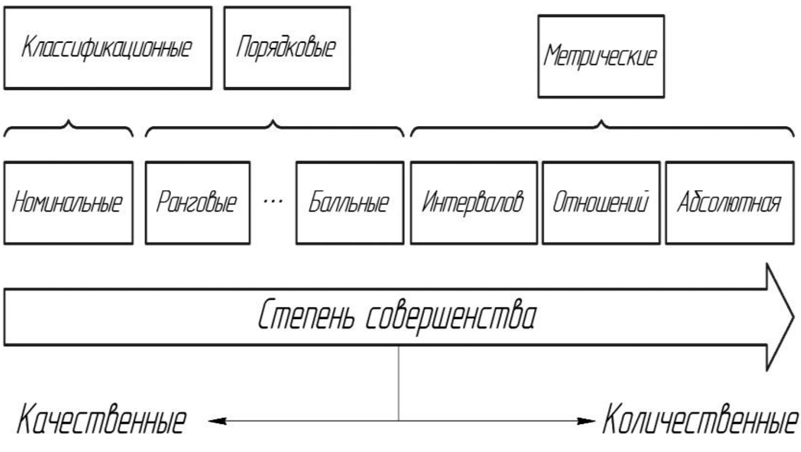


Рис. 38. Классификация шкал измерений

Шкала отношений менее совершенная, чем абсолютная шкала. Она отражает прямую пропорциональную зависимость между измеряемыми в разных шкалах значениями одного и того же признака. Единица масштаба в преобразованиях может изменяться, а начало отчета фиксировано. В этой шкале измеряется сила, скорость перемещения и т.п.

Интервальные шкалы применяются, если упорядочивание критериев, объектов, факторов можно выполнить настолько точно, что известно расстояние между любыми двумя из них. Естественно выражать все измерения в единицах, хотя и произвольных, но одинаковых по всей длине шкалы, поэтому основным признаком интервальной шкалы является задание единичного интервала. Для интервальных шкал характерна произвольная точка отсчета и единица измерения. Основное условие – сохранение отношений между интервалами в разных шкалах В этой шкале измеряют продолжительность выполнения работы, стоимость товаров, величины приращения каких-либо показателей. Примерами шкал интервалов могут быть шкалы для измерения температуры (Цельсия, Кельвина (К = 273 + С), Фаренгейта (Р = 5/9С + 32)), давления и т.п.

Все эти шкалы являются метрическими, а признаки, измеряемые в этих шкалах – количественными. Между значениями признаков можно установить соотношения больше или меньше и ответить на вопрос «насколько или во сколько?».

Следующие по степени совершенства являются **порядковые шкалы**. Их также часто называют **ранговыми** или **бальными** шкалами. В бальных шкалах измеряют качественные изменения признака, где его значения носят условный характер. Например, в системе образования знания обучающихся оценивают в баллах. Задача, решаемая с помощью порядковой шкалы, – это упорядочивание альтернатив, с точки зрения процесса принятия решения по предпочтению. Например, шкала силы ветра. Сила ветра определяется по волнению моря: 0 – штиль, 4 – умеренный ветер, 6 – сильный ветер, 10 – шторм (буря), 12 – ураган.

Ранговые шкалы предполагают присвоение соответствующим значениям признака некоторого ранга, что и позволяет выстроить объекты с этими признаками в ряд убывания или возрастания. Эту операцию часто называют ранжированием. Так классифицируют, например, степень разрушения зданий, попавших в зону разрушения от взрыва.

Классификационная шкала или **шкала наименований** – применяется для отнесения объектов к тому или иному классу. Это означает, что на множестве всех объектов вводится отношение эквивалентности и каждому классу ставится в соответствие некоторый символ.

Наименее совершенной является **классификационная шкала** или **шкала наименований** – применяется для отнесения объектов к тому или иному классу. Это означает, что на множестве всех объектов вводится отношение эквивалентности и каждому классу ставится в соответствие некоторый символ.

Шкалу наименований, например, имеют показатели «Марки кабелей», «Виды стружки» и другие, классы которых могут быть заданы только в виде перечня. В частности, дихотомическая шкала, содержащая всего две градации – «есть» и «нет», «0» – неудовлетворительное качество, «1» – удовлетворительное качество.

Шкалу наименований, например, имеют показатели «Марки кабелей», «Виды стружки» и другие, классы которых могут быть заданы только в виде перечня. В частности, дихотомическая шкала, содержащая всего две градации – «есть» и «нет», «0» – неудовлетворительное качество, «1» – удовлетворительное качество.

Одним из наиболее удобных способов построения шкалы измерений является **обобщенная функция желательности Харрингтона**. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных критериев в безразмерную шкалу желательности:

Желательность	Очень хорошо	Хорошо	Удовлетворительно	Плохо	Очень плохо
Отметки на шкале желательности	1,00–0,80	0,80–0,63	0,63–0,37	0,37–0,20	0,20–0,00

Значение частного критерия, переведенное в безразмерную шкалу желательности, обозначается через d_i (I = 1, 2, …, n). Шкала желательности имеет интервал от нуля до единицы. Значение $d_i = 0$ соответствует абсолютно неприемлемому уровню данного критерия, а значение $d_i = 1$ – самому лучшему значению критерия. Понятию «очень хорошо» соответствуют значения на шкале желательности $1{,}0 > d_i > 0{,}8$, а понятию «очень плохо» – $0{,}0 < d_i < 0{,}2$. Значение $d_i = 0{,}37$ обычно соответствует границе допустимых значений.

На рис. 39 представлены кривые функции желательности для критериев, ограниченных с одной стороны и с двух сторон.

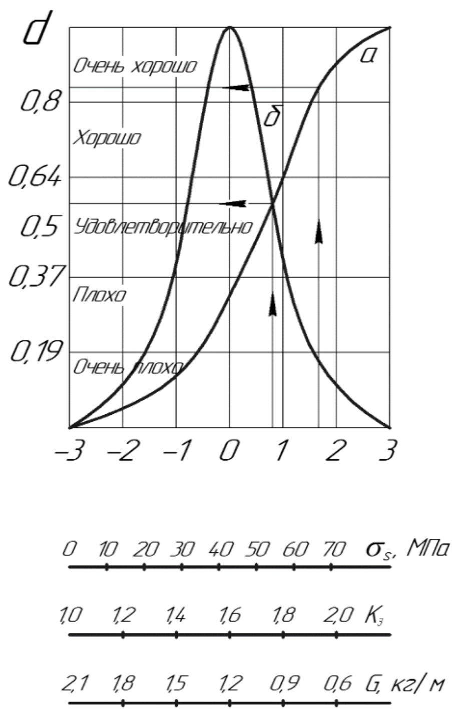


Рис. 39. Функция желательности для критерия, ограниченного с одной стороны (а), и критерия, ограниченного с двух сторон (б)

На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0,0 до 1,0. На оси абсцисс указаны значения критерия, записанные в условном кодированном масштабе. К числу критериев, ограниченных с одной стороны, относят, например, характеристики деформируемого металла: сопротивление деформации σ_s, коэффициент запаса $К_з$, ударная вязкость и т.п. Примерами двустороннего ограничения могут быть погонный вес изделия G, температурный интервал деформирования, размеры заготовки и т.п.

После того, как выбрана шкала желательности и частные критерии q_i преобразованы в частные функции желательности d_i, находят обобщенную функцию желательности:

$$D = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} d_i} \ ,$$

которую можно рассматривать в качестве обобщенного критерия.

Из перечисленных шкал абсолютная шкала является самой сильной.

3.4 Методы экспертных оценок

Методы экспертных оценок – это логические приемы и математические методы, применяемые при сборе, обобщении и анализе информации, полученной от специалистов. Они широко применяются при выборе наилучшего варианта технологического процесса пластического деформирования металлов, оценке качества металлопродукции, определения полезности рассматриваемых критериев.

При решении практических задач пластического деформирования металлов часто оказывается, что различные объекты (критерии, системы, альтернативы, ситуации, факторы) не поддаются непосредственному измерению. Расположение этих объектов в порядке возрастания (или убывания) какого-либо присущего им свойства (критерия) называется **ранжированием**. Ранжирование позволяет выбрать из исследуемой совокупности объектов наиболее существенный объект. Если объекты имеют различную природу и вследствие этого несоизмеримы (т.е. нет общего эталона сравнения), то в таких случаях установление относительной значимости объектов с помощью экспертов облегчает выбор наиболее предпочтительного объекта.

При ранжировании эксперт должен расположить объекты (критерии) в порядке, который представляется ему наиболее рациональным, и приписать каждому из них числа натурального ряда – **ранги**. При этом первый ранг получается наиболее предпочтительный критерий, а последний ранг – наименее предпочтительный. Следовательно, порядковая шкала, получаемая в результате ранжирования, должна удовлетворять условию равенства числа рангов числу ранжируемых объектов N. Для проведения ранжирования применяют анкеты опроса специалистов.

Анкета опроса специалиста

Цель: определение основных факторов, определяющих формирование остаточных сборочных напряжений при изготовлении ребристых многоканальных труб волочением.

На основании обработки литературных данных установлены следующие факторы:

Ранг	Код	Факторы
	x_1	Отношение диаметра к толщине оболочки
	x_2	Отношение пределов текучести материалов сердечника и оболочки
	x_3	Отношение модулей упругости материалов сердечника и оболочки

Ранг	Код	Факторы
	x_4	Вытяжка по оболочке
	x_5	Обжатие по сердечнику
	x_6	Форма и размеры ребра
	x_7	Число ребер сердечника
	x_8	Скорость волочения
	x_9	Диаметр описанной окружности сердечника
	x_{10}	Конфигурация канала волоки (радиусная, коническая)

Вам предлагается расположить все перечисленные выше факторы в порядке убывания степени их влияния на формирование остаточных напряжений. Фактору, оказывающему наибольшее влияние, присвоить ранг «1», последующему ранг «2» и т.д. Присвоенные ранги следует записать в столбец слева против соответствующего фактора.

В тех случаях, когда эксперт не в состоянии указать порядок следования двух или нескольких объектов, он присваивает разным объектам один и тот же ранг, и в результате число рангов оказывается не равным числу ранжируемых объектов. В таких случаях объектам присваивают так называемые **стандартизованные ранги**. Например, шести объектам присвоены следующие ранги:

$$\begin{array}{ccccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x_i & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}$$

Тогда объектам 2 и 5, поделившим между собой 2, 3-е места, приписываются стандартизованные ранги $x_{2+5} = (2+3)/2 = 2{,}5$, а объектам 3, 4 и 6, поделившим 4, 5 и 6-е места, $x_{3+4+6} = (4+5+6)/3 = 5$. В итоге получим

$$\begin{array}{ccccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x_i & 1 & 2{,}5 & 5 & 5 & 2{,}5 & 5 \end{array}$$

Таким образом, сумма рангов S_N, полученных в результате ранжирования n объектов, будет равна сумме чисел натурального ряда, т.е. $S_N = \sum_{i=1}^{n} x_i = [(n+1)n] / 2$, где n – число объектов.

Когда ранжирование проводится несколькими специалистами m, тогда обычно для каждого объекта подсчитывают:

1. Сумму рангов $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$, где x_{ij} – ранжированного объекта, присвоенного j-специалистом (табл. 10).

2. Отклонение суммы рангов от средней суммы рангов

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}.$$

3. Коэффициент конкордации Кендалла

$$W = S/S_{\text{макс}} = 12S \,/\, m^2(n^3 - n),$$

где S – реальная сумма отклонений Δ_i, т.е. $S = \sum_{l=1}^{n} \Delta i$; $S_{\text{макс}}$ – максимально возможная сумма; $S_{\text{макс}} = [m^2(n^3 - n)] \,/\, 12$.

Величина W изменяется от 0 дот 1. При $W = 0$ связь между ранжировками отсутствует, при $W = 1$ – все эксперты дают одинаковые ранжировки.

Если в ранжировках присутствуют совпадающие ранги, то

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12}m^2(n^3-n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j},$$

где $T_j = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(t_i^3 - t_i)$, t_i – число повторений i ранга в j-м ряду.

Установлено, что при $n > 7$ величина $m = (n-1)W$ подчиняется $\boldsymbol{\chi}^2$ распределению с $f = n - 1$, где f – число степеней свободы.

Степень согласованности мнений опрошенных специалистов устанавливают с помощью критерия $\boldsymbol{\chi}^2$, для чего находят расчетное значение $\boldsymbol{\chi}^2_{\text{расч}}$:

$$\boldsymbol{\chi}^2_{\text{расч}} = m(n-1)\; W \geq (\boldsymbol{\chi}^2)^{a,f}_{\text{табл}}\,.$$

Таблица 14. Матрица ранжирования

Эксперт	Объекты					
	1	2	…	i	…	n
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1i}	…	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2i}	…	x_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
j	x_{j1}	x_{j2}	…	x_{ji}	…	x_{jn}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mi}	…	x_{mn}
$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$						
Δ_i						
Δ_i^2						

Если неравенство выполняется, то имеет место согласие мнений специалистов.

Далее строят диаграмму рангов. По оси абсцисс откладывают объект в порядке убывания суммы рангов, а по оси ординат сумму рангов Δ_i. Наивысший ранг (первый) присваивают объекту, получившему наименьшую сумму рангов, и наоборот, объекту, получившему наибольшую сумму рангов, присваивают самый низкий ранг.

Основные этапы подготовки экспертизы:

1) четкое определение цели (если целей несколько, то берут цель более высокого уровня);

2) составление списка объектов для ранжирования;

3) формирование группы специалистов;

4) проведение специалистами ранжирования объектов;

5) оформление результатов опроса специалистов в виде матрицы рангов.

Задача 6. Четырем специалистам было предложено проранжировать восемь критериев $q_1 - q_8$ по степени их полезности. Первый специалист расположил критерии по степени их полезности в следующей последовательности $q_5, q_6, q_7, q_3, q_2, q_1, q_4, q_8$. В соответствии с этой последовательностью критерию q_5 присваивается ранг «1», критерию q_6 – ранг «2» и т.д. Результаты опроса специалистов приведены в табл. 15.

Решение. После математической обработки матрицы рангов получили коэффициент конкордации $W = 0{,}72$ и $x^2_{\text{расч}} = 20{,}2$, что больше $x^2_{\text{табл}} = 14{,}1$. Отсюда следует утверждение, что мнения специалистов согласуются между собой. Из анализа диаграммы рангов (рис. 40) следует, что наиболее полезными критериями являются q_5, q_6, q_7. Остальные критерии менее существенны и их можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 15. Матрица рангов

Эксперты	Факторы							
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
1	6	5	4	7	1	2	3	8
2	7	8	6	4	2	1	3	5
3	4	5	8	7	1	3	2	6
4	6	8	7	5	1	2	4	3
$\sum_{j=1}^{4} q_{ij}$	23	26	25	23	5	8	12	22
Δ_i	5	8	7	5	–13	–10	–6	4
Δ_{i^2}	25	64	49	25	169	100	36	16

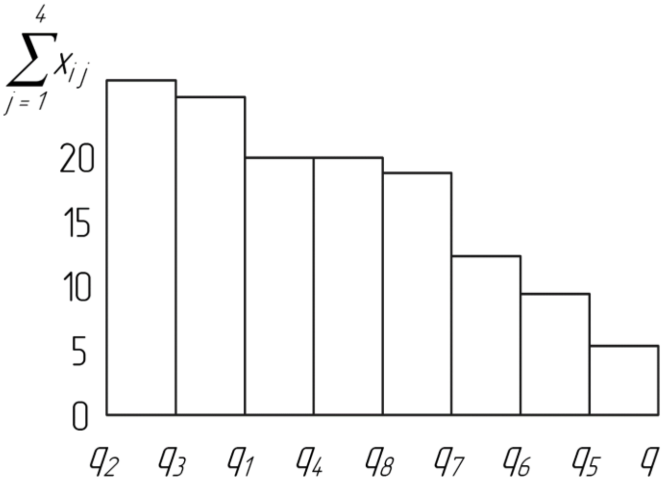


Рис. 40. Диаграмма рангов

3.5 Задания для самоконтроля

1. Какие системы относят к многокритериальным системам?
2. Какие критерии можно отнести к критериям качества изделий?
3. Что лежит в основе функции желательности?
4. Какие существуют методы многокритериального выбора?
5. В каких целях используется шкала наименований?
6. Каковы особенности измерения в ранговой шкале?
7. Как рассчитать показатель эффективности в аддитивной форме?
8. Как формируется обобщенный показатель в мультипликативной форме?
9. Перечислите типы шкал для измерения критериев.
10. Проведите анализ системы с двумя критериями.

11. Как выглядит функция желательности для критерия, ограниченного с одной стороны, и критерия, ограниченного с двух сторон?

12. Что называется ранжированием?

13. В каких координатах строится диаграмма рангов?

14. Что собой представляет матрица рангов?

15. Алгоритм обработки результатов ранжирования.

16. Как рассчитать коэффициент конкордации?

17. Как устанавливают степень согласованности мнений опрошенных специалистов?

18. В каких случаях применяют балльные шкалы?

19. Какие шкалы можно отнести к количественным шкалам, а какие – к качественным шкалам?

20. Достоинства и недостатки интервальных шкал.

21. Что такое метод обобщенного критерия?

3.6 Задачи и упражнения

3.1. Для технологического процесса пластического деформирования металлов назовите критерии, которые должен учесть инженер-технолог. Определите противоречивые критерии.

3.2. Необходимо спроектировать штамп для процесса горячей объемной штамповки. Перечислить критерии, с которыми приходятся конструктору штампов.

3.3. Ниже приведен перечень качеств, необходимых современному специалисту: компетентность($\boldsymbol{x_1}$), умение принимать решения ($\boldsymbol{x_2}$), владеть профессиональными знаниями ($\boldsymbol{x_3}$), изобретательность ($\boldsymbol{x_4}$), коммуникабельность ($\boldsymbol{x_5}$), способность осуществлять критический анализ ($\boldsymbol{x_6}$), умение четко выражать свои мысли ($\boldsymbol{x_7}$), умение работать в команде ($\boldsymbol{x_8}$), владеть информационными технологиями ($\boldsymbol{x_9}$), проводить научные исследования

($\boldsymbol{x_{10}}$). Провести ранжирование по степени их влияния на формирование современного специалиста.

3.4. При разработке нового полимерного материала оценивались следующие критерии: $\boldsymbol{q_1}$ – термостабильность; $\boldsymbol{^0C}$; $\boldsymbol{q_2}$ – морозостойкость, $\boldsymbol{^0C}$; $\boldsymbol{q_3}$ – предел прочности $\boldsymbol{\sigma_b}$, кг/см; $\boldsymbol{q_4}$ – относительное удлинение $\boldsymbol{\delta}$, %. Данные для восьми опытов приведены в табл. 16.

Таблица 16. Исходные данные

Номер опыта	q_1	q_2	q_3	q_4
1	272	–25	215	249
2	187	–23	179	204
3	162	–24	216	220
4	461	–26	198	201
5	267	–21	208	218
6	250	–27	220	264
7	489	–25	201	149
8	380	–23	230	126

Используя обобщенную функцию желательности D, определить наилучшие опыты.

3.5. Используя метод экспертных оценок (табл. 17), выделить существенные факторы.

3.6. Провести выбор эффективных технологических процессов по трем критериям: $E_1 \to \max, E_2 \to \max,\ E_3 \to \min$ (табл. 18) и выбрать наиболее предпочтительный из них.

Таблица 17. Результаты анкетирования

Экс-пере	Объекты											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	5	6	9	12	10	11	5	7	13	8	2
2	2	9	8	14	12	11	6	7	5	10	3	13
3	1	2	6	3	13	4	11	9	7	12	3	5
4	1	8	7	10	12	4	14	11	6	13	3	5
5	1	6	8	11	10	3	14	9	4	13	2	7
6	1	2	2	1	10	2	14	10	10	14	10	14

Таблица 18. Параметры технологических процессов

Критерии	Варианты технологического процесса								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_1	2,0	1,1	1,2	1,9	1,5	1,8	1,6	2,2	1,8
E_2	3,2	3,3	3,2	4,0	3,5	3,7	2,8	3,9	2,9
E_3	0,6	0,7	0,8	0,6	0,7	0,6	0,5	0,8	0,7

3.7. Требовалось получить чугун с пределом прочности $q_1 > 25$, жидкотекучестью $q_2 > 750$, горячеломкостью $q_3 \leq 45$ и твердостью $180 \leq q_4 \leq 250$. Определить лучший сплав с помощью обобщенной функции желательности (табл. 19).

Таблица 19. Исходные данные

Номер сплава	Критерии			
	q_1	q_2	q_3	q_4
1	14,4	455	55,5	295
2	35,0	160	63,0	310
3	29,4	450	52,5	295

Окончание табл. 19

Номер сплава	Критерии			
	q_1	q_2	q_3	q_4
4	12,0	900	35,0	235
5	30,0	540	33,5	277
6	23,6	840	15,0	212

3.8. Составить обобщенный показатель эффективности, если рациональная калибровка инструмента для прессования изделия должна обеспечивать: необходимый по размерам профиль в пределах допускаемых отклонений (допусков); максимальную производительность пресса; минимальный расход энергии; высокую стойкость деформирующего инструмента.

4 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ

4.1 Постановка задач

Процесс оптимизации системы лежит в основе всей практической деятельности, поскольку классические функции специалиста заключаются в том, чтобы, с одной стороны, проектировать более новые, эффективные и менее дорогостоящие технические системы, а с другой – разрабатывать методы повышения качества функционирования существующих систем. В соответствии с методологией системного анализа необходимо в процессе проектирования (совершенствования) выделить, по возможности, все альтернативы, и для каждой системы определить оптимальное решение (рис. 41). Методы оптимизации позволяют избежать полного перебора всех альтернатив и найти из этого множества наилучшие варианты.

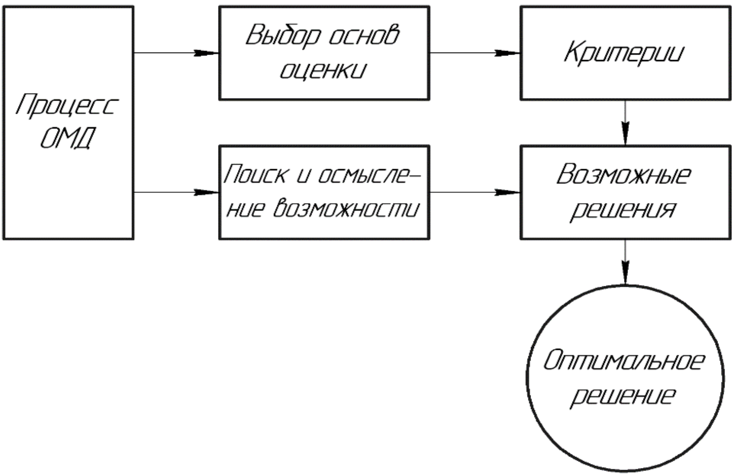


Рис. 41. Формальная схема оптимизации

Трем типичным ситуациям, которые имеют место при разработке систем и обладают иерархической соподчиненностью, соответствует три уровня оптимизации. Первый уровень состоит в выборе наилучшей руководящей технической идеи или принципа действия проектируемой технической системы; второй, называемый структурной оптимизацией, – в поиске наилучшей структуры или схемы в рамках выбранного принципа действия; третий, называемый параметрической оптимизацией – в определении наилучших значений параметров для выбранной структуры. Такая методология решения задач носит название комплексного оптимизационного подхода. Например, требуется изготовить П-образный длинномерный профиль. Возможные альтернативны на первом уровне: прессование, сортовая прокатка, гибка полосы в валках и т.п. Из проведенного анализа выясняется, что наиболее предпочтительным способом изготовления является прессование. Для реализации прессования возможны следующие схемы или структуры: прямое или обратное прессование, изотермическое прессование или прессование с градиентным нагревом и т.п. После поиска наилучшей структуры переходят к параметрической оптимизации, например, по усилию прессования $\boldsymbol{P}$. В качестве управляемых параметров выберем угол конусности матрицы $\boldsymbol{a}$ и скорость прессования $\boldsymbol{v}$. Показателем, характеризующим качество профиля, будем считать, например, максимально допустимое использование ресурса пластичности металла профиля при деформировании.

Теперь задачу параметрической оптимизации можно сформулировать следующим образом: найти такие управляющие параметры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, которые сообщают минимум критерию оптимизации

$$P(a, \boldsymbol{v}) = \min_{a,\boldsymbol{v}} P\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

при ограничении на исчерпание ресурса пластичности материала

$$\psi = \min_{a,\boldsymbol{v}} \psi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) < 1$$

и ограничениях, накладываемых на параметры, в виде неравенств

$$45^0 \leq \boldsymbol{a} \leq 90^0,$$

$$0{,}1\text{м} / \text{мин} \leq \boldsymbol{v} \leq 10\text{м} / \text{мин}.$$

В дальнейшем будут рассматриваться системы, имеющие предпочтительную структуру и различающиеся численными значениями входных $\overline{\boldsymbol{X}} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\}$ и выходных $\overline{\boldsymbol{Y}} = \{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_m}\}$ параметров. $\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}})$ – целевая функция, а область ее определения $\boldsymbol{\Omega}, \overline{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{\Omega}$. Аргументы этой функции – это управляемые параметры системы. На параметры накладываются ограничения вида $\boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{0}$ или $\boldsymbol{x_{\min i}} \leq \boldsymbol{x_i} \leq \boldsymbol{x_{\max i}}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$.

Кроме параметрических ограничений часто присутствуют функциональные ограничения в виде $\boldsymbol{\varphi_j}\ (\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}$, например, зависимость скорости прессования от температуры нагрева заготовки, скорости прессования и скорости истечения и т.п. При решении задач оптимизации необходимо найти $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\Omega}$, образующие $\mathbf{min}_{X \in \Omega} \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}})$ или $\mathbf{max}_{X \in \Omega} \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}})$.

Таким образом, решение задачи оптимизации сводится к поиску экстремума (максимума или минимума – в зависимости от смысла задачи) целевой функции $\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}})$ вектора $\overline{\boldsymbol{X}}$ аргументов $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$, называемых управляющими параметрами.

4.2 Классификация методов оптимизации

Существующие в настоящее время методы оптимизации настолько многочисленны и разнообразны, что не поддаются строгой классификации. В настоящее время существующие методы оптимизации различаются по следующим парам признаков: аналитические и поисковые (численные), направленного и ненаправленного поиска, детерминированные и случайные (вероятные), градиентные и антиградиентные (рис. 42). При этом выделяют следующие классы методов поиска экстремума: линейное и нелинейное программирование, динамическое и квадратичное программирования. В свою очередь, в задачах нелинейного программирования используют условную или безусловную оптимизацию.

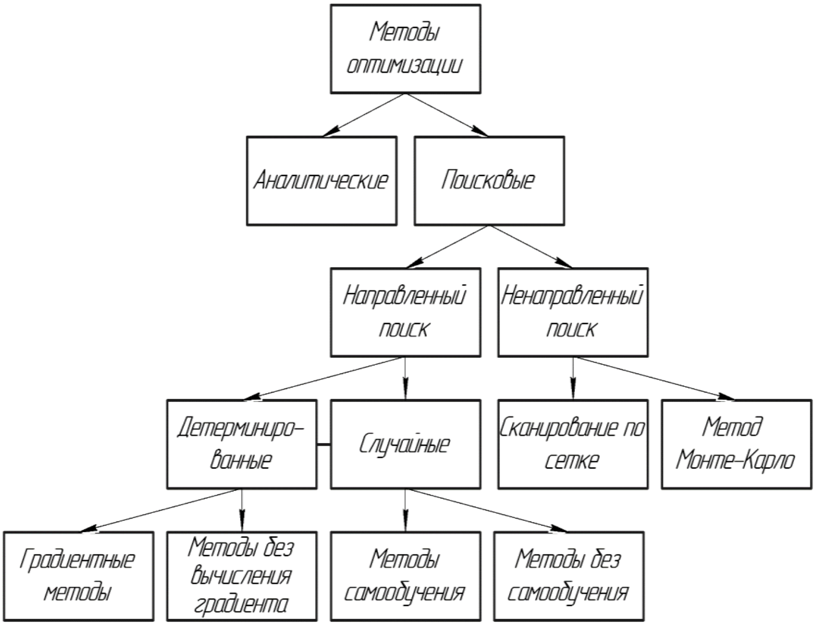


Рис. 42. Классификация методов оптимизации

Поиск оптимума не вызывает особых затруднений в тех случаях, когда целевая функция задана в аналитической форме. Тогда для определения оптимальных условий применяются аналитические методы. Координаты оптимума находят дифференцированием соответствующих уравнений, приравниванием частных производных нулю и решением полученной системы уравнений. К сожалению, ввиду сложности задач пластического деформирования металлов аналитические методы оптимизации используются очень редко. Для технологических процессов пластического деформирования более характерными являются алгоритмические математические модели. В таких случаях чаще всего используют поисковую оптимизацию, при которой поиск цели – экстремальной точки в пространстве управляемых параметров – осуществляется последовательными шагами, ведущими от некоторой исходной точки $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}}$ через некоторые промежуточные отображающие точки $\overline{\boldsymbol{X}}_{\text{к}}$ в окрестность точки экстремума $\overline{\boldsymbol{X}}^{*}$.

При направленном поиске используют рекуррентную зависимость

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k+1}} = \overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}} + \Delta\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}, \Delta\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}},$$

где $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}} = |\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k+1}} - \overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}|$ – длина шага; $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}$ – нормированный направляющий вектор, определяющий направление движения в пространстве параметров; $\Delta\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}$ – вектор приращений параметров на $\boldsymbol{k}$-м этапе поиска; $\boldsymbol{k}$ – номер этапа поиска.

В методах детерминированного поиска компоненты вектора формируются по заранее установленным правилам (рис. 43). В методах случайного поиска на выбор компонент вектора $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}$ оказывает влияние элемент случайности.

В методах случайного поиска траектория случайного поиска не предопределена. В простейшем случае направление поиска $\overline{\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}}$ выбирается случайно, проверяется его перспективность, и при благоприятном результате проверки осуществляется шаг в этом направлении. При отрицательном результате проверки случайным образом выбирается новое направление и далее процесс повторяется.

Случайный выбор направления движения из точки $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}$ выполняется с помощью алгоритмов выработки случайных чисел. Если выработать n значений равномерно или неравномерно распределенной в интервале $[-1,1]$ случайной величины, то можно рассматривать эти значения как элементы n-мерного случайного вектора $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}$, задающего направление в n-мерном пространстве.

Проверка перспективности направления выполняется путем расчета и сопоставления значений целевой функции $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}})$ в двух точках, одной из которых является точка $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}$, другой $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k+1}}$, находящаяся на выбранном направлении и отстоящая от $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}$ на величину шага. При поиске минимума, если $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k+1}}) < \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}})$, то новой отображающей точки будет точка $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k+1}}$. Если попытка неудачна, то вновь возвращаемся к исходной точки $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}$. Поиск обычно прекращают, если выполнено подряд n неудачных попыток продвижения.

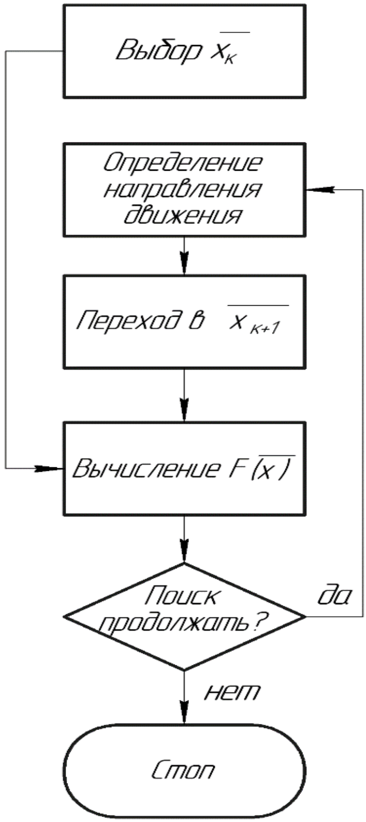


Рис. 43. Схема вычислений при поисковой оптимизации

В тех случаях, когда целевая функция и ограничения линейны, при решении задач оптимизации используют линейное программирование. Методы линейного программирования позволяют существенно сократить объема вычислений путем направленного выбора вариантов с улучшенными значениями целевой функции на каждом шаге перебора. Если рассматривают задачу с целевой функцией в виде квадратичной формы и линейными ограничениями, то при решении задач оптимизации применяют квадратичное программирование.

При решении сложных задач оптимизации нередко оказывается целесообразным принимать решения не сразу, а постепенно, шаг за шагом, так что принятие решения разбивается на несколько этапов. Весьма эффективную реализацию такого прохода во многих задачах обеспечить метод динамического программирования.

Направленный поиск сводится к полному или неполному перебору всех возможных вариантов сочетаний параметров с выбором наилучшего варианта. С помощью ненаправленного поиска находят все точки локальных экстремумов и среди них отбирают точку глобального экстремума.

Ненаправленный поиск проводят методами сканирования и Монте-Карло. В методе сканирования вся допустимая область пространства управляемых параметров разбирается на элементарные подобласти, и в каждой из них осуществляется подсчет целевой функции. Если ячейки достаточно малы, то получается общая карта поведения целевой функции с выявлением всех ее экстремумов. Применение метода Монте-Карло в экстремальных задачах сводится к последовательному анализу случайных точек параметрического пространства.

Широкое применение находят прямые методы поиска экстремума, в которых для поиска точки экстремума используются только значения целевой функции. Различают методы одномерной и многомерной оптимизации. При одномерной оптимизации поиск экстремума проводится только в одном направлении; возможен пассивный и активный поиск.

4.3 Одномерные методы оптимизации

При **пассивном** поиске до проведения расчетов отрезка $[a, b]$ разбивается на участки одинаковой длины $l_N = (b - a)\ /\ (N + 1)$, где N – число расчетных точек. На каждом участке находят значение целевой функции. Методом перебора находят экстремальное значение.

При **активном** поиске выбор очередных значений $\boldsymbol{x}$ на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ зависит от результатов предшествующих опытов. Имеет место накопление и активное использование информации о свойствах целевой функции. Последовательное (пошаговое) проведение опытов более прогрессивно, так как позволяет экономить время и средства. Одними из наиболее простых методов являются методы дихотомии, Фибоначчи и золотого сечения. Идея методов этого класса заключается в том, что по двум значениям $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x_1} < < \boldsymbol{x_2} \leq \boldsymbol{b}$, функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$ можно указать интервал, меньший первоначального, в котором заключена точка экстремума. Таким образом, задача сводится к наиболее удачному выбору промежуточных точек $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$.

При описании методов оптимизации ориентировались на задачу отыскания точки минимума. Однако очевидно, что после замены целевой функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на $-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ эти программы пригодны для отыскания точки максимума $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Метод дихотомии. Сущность метода дихотомии: относительно середины отрезка $[a,b]$ симметрично размещают две пробные точки $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ на расстоянии друг от друга 2Δ

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0,5}(\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{b_i} - \Delta),\ \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{0,5}(\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{b_i} + \Delta),$$

где $\boldsymbol{0,5}(\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{b_i})$ – координата центра отрезка $[a,b]$; $\boldsymbol{i}$ – номер итерации (шага); Δ – по возможности минимальная разница между соседними точками $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$, равная точности вычислений (измерений).

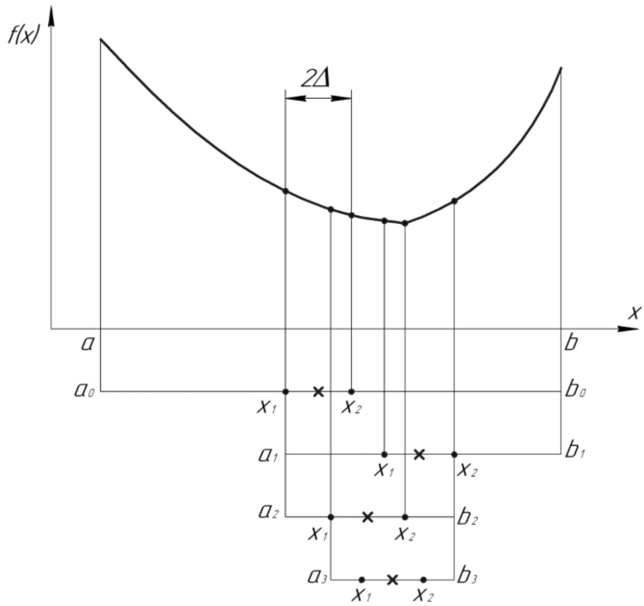


Рис. 44. Схема поиска экстремума по методу дихотомии

Далее для них находят значения целевой функции (рис. 44). Затем процедура расчета (экспериментирования) повторяется, но уже на новом отрезке.

Число итераций n определяется условием

$$\boldsymbol{\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq \ \varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – допустимая погрешность локализации интервала неопределенности, в котором находится точка экстремума.

Координаты пробных точек на последующих этапах исследования определяются по аналогичным формулам с учетом новых границ получаемого интервала неопределенности.

Задача 7. Методом дихотомии найти минимальное значение функции $\boldsymbol{f(x)}$ и точку минимума $\boldsymbol{x_{\min}}$ функции $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 12x}$ на отрезке [0,8]. Точку $\boldsymbol{x_{\min}}$ найти с погрешностью расчета $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$.

Решение. Положим погрешность измерения переменной $\boldsymbol{x}$ Δ = 0,4. В качестве приближенной точки минимума выберем $\boldsymbol{x}_{\min} \approx \mathbf{0,5}(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}})$. Число итераций n определяется условием

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0,5}(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}}) \leq \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}.$$

Итерация 0. Координата средней точки исходного интервала неопределенности равна (0 + 8)/2 = 4. Пробные точки: $x_1^{(0)}$ = 4 – – 0,2= 3,8; $x_2^{(0)}$ = 4 + 0,2 = 4,2. Значения функции в них: $f(x_1^{(0)})$ = = – 16,72; $f(x_2^{(0)})$ = – 15,12. Поскольку $f(x_1^{(0)}) < f\left(x_2^{(0)}\right)$, то отбрасываем часть интервала $[x_2;\ b_0]$. Получаем новый интервал $[a_1;\ b_1]$ = [0; 4,2]. Его длина $b_1 - a_1$= 2,1$\leq$ $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 1; поэтому поиск необходимо продолжить. Результаты остальных итераций сведены в итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$\varepsilon_i = \dfrac{b_i - a_i}{2}$	$x_1^{(i)}$	$x_1^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f\left(x_2^{(i)}\right)$	Примечание
0	0	8	4	3,8	4,2	–16,72	–15,12	$f(x_1^{(0)}) < f\left(x_2^{(0)}\right)$ $b_1 = x_2^{(0)}$
1	0	4,2	2,1	1,9	2,3	–15,58	–17,02	$f(x_1^{(1)}) > f\left(x_2^{(1)}\right)$ $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1,9	4,2	1,15	2,85	3,25	–17,95	–17,875	$f(x_1^{(2)}) < f\left(x_2^{(2)}\right)$ $b_3 = x_2^{(2)}$
3	1,9	3,25	0,675	-	-	-	-	При $\varepsilon_3 <$ ε точность достигнута

Таким образом, выполнено 3 шага, использовано 6 пробных точек. Найден итоговый интервал неопределенности $[a_3, b_3]$ = [1,9; 3,25] длины 0,675. Получим $\boldsymbol{x}_{\mathbf{min}}$ = 0,5(1,9 + 3,25) $\approx$ 2,6, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{min}})$ = $= \boldsymbol{f}(2{,}6)$ = –17,7.

Метод Фибоначчи. Метод Фибоначчи наиболее эффективен, чем метод дихотомии. Применение метода позволяет сократить число вычислений целевой функции при том же конечном интервале неопределенности. Реализация связана с использованием последовательности целых чисел F_N, открытой итальянским математиком Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи (1202 г.). В методе Фибоначчи беру две пробные точки x_1 и x_2, расположенные на равном расстоянии от концов отрезка $[a,b]$, исходя из ряда чисел Фибоначчи:

$$x_1 = a_i + (b_i - a_i)F_N/F_{N+2},$$

$$x_2 = a_i + (b_i - a_i)F_{N+1}/F_{N+2}.$$

Последовательность чисел Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением

$$F_N = F_{N-1} + F_{N-2}, F_0 = F_1 = 1, N = 2,3,4, \ldots$$

N	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_N	0	1	2	3	5	8	13	24	34	55	89

Координаты пробных точек x_1 и x_2 находят следующим образом: каждая пара вычислений проводится в точках x_1 и x_2, причем одно из чисел пары уже определено на предыдущем шаге. В результате n итераций (шагов) интервал неопределенности сокращается до величины

$$l_n = (b - a)\left\{\frac{1}{F_N} + \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}}\varepsilon\right\}.$$

Чтобы при поиске этим методом получить требуемую точность, необходимо задать определенное число итераций. Запишем конечный требуемый интервал неопределенности в виде $l_n = 2\Delta$. Тогда для определения требуемого интервала неопределенности получим следующий алгоритм.

1. Находим, во сколько раз необходимо сократить исходный интервал по формуле $M = (b - a)/\Delta$, где M – вспомогательное число, определяющее масштаб задачи.

2. Задаем наилучшее число Фибоначчи, для которого выполняется условие $M \le F_{N+2}$.

3. Поиск проводим в точках, симметричных относительно середины интервала неопределенности

Задача 8. Методом Фибоначчи найти минимальное значение функции $f(x)$ и точку минимума $x_{\min}$ функции $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ на отрезке [7; 7,5]. Точку $x_{\min}$ найти с погрешностью $\varepsilon = 0{,}05$.

Решение. Определим необходимое число шагов n метода из условия

$$F_{N+2} \ge \boldsymbol{\frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{7{,}5-7}{0{,}05} = 10,}$$

откуда получим число Фибоначчи $F_{N+2} = 13$ и $N + 2 = 7$, следовательно, $N = 5$.

Итерация 1. Пробные точки

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\frac{F_N}{F_N+2} = 7 + (7{,}5 - 7)\frac{5}{13} = 7{,}192;$$

$$x_2 = a_i + (b_i - a_i)F_{N+1}/F_{N+2} = 7 + (7{,}5 - 7)\frac{8}{13} = 7{,}308.$$

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f\left(x_2^{(i)}\right)$	Примечание
1	7	7,50	7,192	7,308	–49,045	–51,734	$f(x_1^{(1)}) > f\left(x_2^{(1)}\right)$ $a_2 = x_1^{(1)}$
2	7,192	7,50	7,308	3,785	–51,734	–53,381	$f(x_1^{(2)}) > f\left(x_2^{(2)}\right)$ $a_3 = x_1^{(2)}$
3	7,308	7,50	7,385	7,423	–53,381	–54,160	$f(x_1^{(3)}) > f\left(x_2^{(3)}\right)$ $a_4 = x_1^{(3)}$
4	7,385	7,50	7,423	7,462	–54,160	–54,908	$f(x_1^{(4)}) > f\left(x_2^{(4)}\right)$ $a_5 = x_1^{(4)}$
5	7,423	7,50	7,462	7,462	–54,908	–54,908	При $i = 5$ точность достигнута

Окончательно, получим $x_{\min}$ = 7,462, $f(x_{\min}) = f(7{,}462) =$ = –54,908.

Метод золотого сечения. Метод золотого сечения занимает промежуточное положение между методами дихотомии и Фибоначчи. В этом методе две пробные точки x_1 и x_2 ,которые используются для сокращения отрезка поиска, выбираются таким образом, чтобы одна из них использовалась с той же целью и на следующем уже сокращенном отрезке (рис. 45). Данное правило выбора пробных точек приводит к тому, что число вычислений целевой функции сокращается вдвое и одна итерация требует расчета только одного нового значения функции. Такими свойствами обладают точки, называемые точками золотого сечения. Согласно определению, точка производит деление отрезка, если отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длин большей части к меньшей.

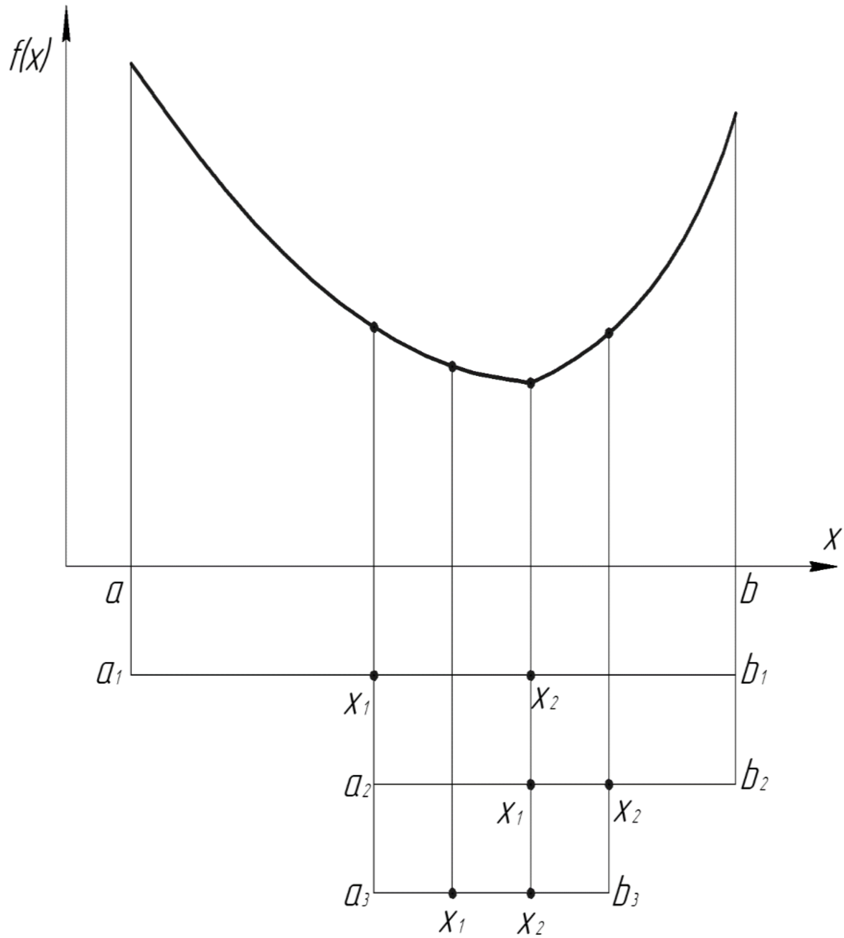


Рис. 45. Схема поиска экстремума по методу золотого сечения

В методе золотого сечения на отрезке $[a,b]$ симметрично относительно его концов выбираются точки x_1 и x_2, такие что

$$x_1 = a_i + (b_i - a_i)\tau^2,\ \tau^2 = 0{,}382;$$

$$x_2 = a_i + (b_i - a_i)\ \tau,\ \tau = 0{,}618.$$

При этом точка x_1 является второй точкой золотого сечения отрезка [a, x_2], а точка x_2 – первой точкой золотого сечения отрезка $[x_1, b]$.

Зная одну из точек золотого сечения отрезка $[a,b]$, другую можно найти по одной из формул

$$x_1 = a_i + b_i - x_2,\ x_2 = a_i + b_i - x_1.$$

Число итераций n определяется условием

$$\varepsilon_n = \tau(b_n - b_n) \le \varepsilon.$$

Задача 9. Методом золотого сечения найти минимальное значение функции $f(x)$ и точку минимума $x_{\min}$ функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке [0,8]. Точку $x_{\min}$ найти с погрешностью расчета ε = 1.

В качестве точки приближения целевой функции выберем $\boldsymbol{x_{\min} = \overline{x_n}}$. Число итераций n определяется из условия

$$\boldsymbol{\varepsilon_n = \tau(b_n - a_n) \le \varepsilon = 1.}$$

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$\varepsilon_i = \dfrac{b_i - a_i}{2}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f\left(x_2^{(i)}\right)$	Примечание
0	0	88	4,944	3,06	4,95	–17,99	–10,44	$f(x_1^{(0)}) < f\left(x_2^{(0)}\right)$ $b_1 = x_2^{(0)}$

i	a_i	b_i	$\varepsilon_i = \frac{b_i - a_i}{2}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f\left(x_2^{(i)}\right)$	Приме-чание
1	0	44,95	3,06	1,89	3,06	–15,53	–17,99	$f(x_1^{(1)}) > f\left(x_2^{(1)}\right)$ $a_2 = x_1^{(1)}$
2	11,89	44,95	1,888	3,06	3,78	–17,99	–16,79	$f(x_1^{(2)}) < f\left(x_2^{(2)}\right)$ $b_3 = x_2^{(2)}$
3	11,89	33,78	1,167	2,61	3,06	–17,69	–17,99	$f(x_1^{(3)}) > f\left(x_2^{(3)}\right)$ $a_4 = x_1^{(3)}$
4	22,61	33,78	0,721	3,06	-	–17,99	-	При $\varepsilon_4 < \varepsilon$ точность достигнута

Окончательно, получим $x_{\min} = \overline{x_4} = 0{,}5(2{,}61 + 3{,}78) \approx 3{,}06$, $f(x_{\min}) = f(3{,}06) = –17{,}99$.

4.4 Многомерные методы оптимизации

К простым методам многомерного поиска экстремума относят метод Гаусса-Зейделя, метод градиента и метод наискорейшего спуска. Эти методы очень широко распространены на практике. При поиске экстремальной точки, в отличие от аналитического исследования, осуществляется локальное изучение поверхности отклика по результатам ряда опытов, специально поставленных около исходной точки. Движение к экстремуму в n-мерном пространстве независимых переменных осуществляется обычно не непрерывно, а шагами. Важным моментом при постановке эксперимента является выбор исходной точки и шага. Здесь необходимо учитывать свойства изучаемого процесса, особенности технологии и методов измерения. Поиск экстремума прекращается в точке, движение из которой в любом направлении не приводит к уменьшению значения выходного параметра (целевой функции $\bar{Y}$).

Метод Гаусса-Зейделя. В основе метода оптимизации лежит идея так называемого покоординатного поиска экстремума (рис. 46, *а*). Направление очередного шага выбирается вдоль какой-либо координатной оси, например, управляющего параметра x_1. Значения остальных параметров фиксированы. Исходную точку $\boldsymbol{\overline{X_0}}$ выбирают на основании результатов предшествующих результатов исследований. Анализ результатов экспериментов проводят графически в натуральной системе координат. Исследования осуществляются в несколько циклов. В первом цикле движение осуществляется вдоль координаты $\boldsymbol{x_1}$ в том направлении, в котором наблюдается уменьшение целевой функции $\boldsymbol{\bar{Y} = F(\bar{X})}$, и до тех пор, пока $\boldsymbol{F(\bar{X})}$ уменьшается. Затем в этой точке производится поворот, и движение ведется далее вдоль новой координатной оси, например, параметра x_2 и т.д. После цикла спусков вдоль всех n координатных осей производится новый цикл, если экстремум еще не найден. Когда ни по одной из осей невозможно перемещение с уменьшением функции $F(\bar{X})$ с шагом $t \geq t_{\min}$, поиск прекращается, и полученная точка $\bar{X}_k$ признается за экстремальную точку $\bar{X}_k^*$. Поиск вдоль координатных осей можно производить методами одномерной оптимизации, рассмотренными выше.

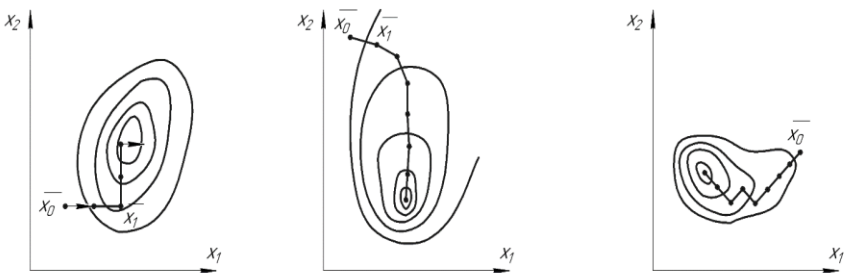
Метод градиента. В градиентном методе компоненты направляющего вектора определяются с помощью производных целевой функции $\bar{Y} = F(\bar{X})$

$$\boldsymbol{\bar{\xi}_i} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{\partial F(\bar{X})}}{\boldsymbol{\partial x_i}}}{\sqrt{\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}(\partial F(\bar{X})^2/dx_i)^2}}}$$

и совпадают с направлением наибыстрейшего возрастания (убывания) целевой функции. В соответствии с методом в каждой отображающей точке рассчитывается градиент целевой функции

$$\boldsymbol{grad\, F(\bar{X}) = (\partial F(\bar{X})/\partial x_1\,,\ \partial F(\bar{X})/\partial x_2\,, \ldots, \partial F(\bar{X})/\partial x_n},$$

и при решении задач поиска $\mathbf{min}\, \boldsymbol{F(\bar{X})}$ шаг осуществляется в антиградиентном направлении – $\boldsymbol{grad\, F(\bar{X})}$ в новую отображающую точку $\boldsymbol{\bar{X}_{k+1}}$ (рис. 44, *б*). Если $\boldsymbol{F(\bar{X}_{k+1}) < F(\bar{X}_k)}$, **то вычисляется** $\boldsymbol{grad\, F(\bar{X}_{k+1})}$ уже в точке $\boldsymbol{\bar{X}_{k+1}}$ и делается новый шаг (рис. 46, *б*). Если $F(\bar{X}_{k+1}) \geq F(\bar{X}_k)$, то поиск продолжают с уменьшенным шагом. Если шаг уменьшен до некоторого заданного предела $t_{\min}$, но по-прежнему $F(\bar{X}_{k+1}) \geq F(\bar{X}_k)$, то точка $\bar{X}_k^*$ – экстремальная.



а *б* *в*

Рис. 46. Многомерные методы поиска экстремума: а – метод Гаусса-Зейделя; б – метод градиента; в – метод наискорейшего спуска

Разновидностью градиентного метода является метод наискорейшего спуска (рис. 46, *в*). Движение в направлении градиента проводится до тех пор, пока не перестанет убывать целевая функция $F(\bar{X})$. В достигнутой точке $\bar{X}_{k+1}$ вычисляется новое направление градиента, и процесс повторяется в том же порядке. Для поиска экстремальной точки $\boldsymbol{\bar{X}}^*$ на каждом направлении применяют одномерный поиск.

Несмотря на существующие различия между градиентными методами, последовательность операций при поиске экстремума во многом одинакова и сводится к следующему:

а) выбирается базисная точка;

б) определяется направление движения от базисной точки;

в) находится размер шага;

г) определяется следующая точка поиска экстремума;

д) значение целевой функции в данной точке сравнивается с ее значением в предыдущей точке;

е) вновь определяется направление движения, и процедура повторяется до достижения оптимального значения.

Метод крутого восхождения представляет собой процедуру последовательного перемещения по пути крутого восхождения, т.е. в направлении наибольшего возрастания целевой функции. Если необходима минимизация, то тогда следует говорить о методе крутого (наискорейшего) спуска.

При поиске оптимальных условий методом крутого восхождения достаточно использовать линейные модели

$$\boldsymbol{Y = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_k x_k.}$$

Необходимо найти входные переменные $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, при которых целевая функция Y обращается в экстремум. Один из кратчайших путей нахождения – это движение в направлении градиента:

$$\boldsymbol{grad\,\overline{Y} = (\partial Y/\partial x_1)\bar{\imath} + (\partial Y/\partial x_2)\bar{\jmath} + \cdots + (\partial Y/\partial x_k)\overline{m},}$$

где $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \dots, \overline{m}$ – единичные векторы в направлении координатных осей факторного пространства.

Из уравнения видно, что частная производная линейной функции по каждой переменной x_i равна соответствующему коэффициенту b_i, т.е.

$$\boldsymbol{grad\,\overline{Y} = b_1\bar{\imath} + b_2\bar{\jmath} + \cdots + b_k\overline{m}.}$$

Следовательно, для осуществления движения по градиенту значения переменных по каждой из осей $\boldsymbol{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \dots, \overline{m}}$ необходимо изменять пропорционально величинам коэффициентов $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, … , $\boldsymbol{b_k}$ с учетом их знака.

Бокс и Уилсон предложили шаговой метод движения в направлении градиента, состоящий в следующем. На основе малой серии опытов находят локальное описание поверхности целевой функции в некоторой исходной области с помощью модели линейного вида. Далее определяют направление градиента. В этом направлении планируют серию мысленных опытов. Серия мысленных опытов рассчитывается последовательным прибавлением к основным уровням значимых входных переменных величин, пропорциональных величинам коэффициентов на соответствующие интервалы варьирования $\boldsymbol{b_j}\,\Delta\,\boldsymbol{x_j}$ по каждой переменной. Потом находят базовую переменную, для которой произведение оказалось наибольшим по абсолютной величине, и для нее вычисляют «единичный шаг» $\Delta_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{x_\sigma}$, где $\boldsymbol{0 \leq \mu \leq 1}$. После этого рассчитывают «единичные шаги» для всех остальных переменных

$$\Delta_{\boldsymbol{j}}/\Delta_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{b_j}\,\Delta\,\boldsymbol{x_j}/\boldsymbol{b_\sigma}\,\Delta\,\boldsymbol{x_\sigma}$$

и округляют расчетные значения. Полученные таким образом шаги последовательно прибавляют или вычитают (в зависимости от знака b_j и того, что ищут: максимум или минимум) к основному уровню каждой переменной. Для качественных переменных фиксируют лучший уровень. Незначимые переменные стабилизируют на любом уровне в интервале «±1». Обычно рассчитывается 5–10 мысленных опытов. Реализацию численных опытов начинают с опыта, условия которого выходят из области эксперимента хотя бы одной из переменных. Из серии рекомендуется проводить 2–3 опыта. По оценке их результатов принимают решения о прекращении или дальнейшем проведении экспериментов.

Если одного линейного приближения недостаточно, то ставится новая серия опытов с центром в точке, которая соответствует наибольшему значению Y, и находится новое направление для движения по поверхности отклика. Такой шаговый процесс продолжается до достижения окрестности экстремума. Об этом обычно свидетельствует неадекватность линейной модели. В таком случае для получения более точной оценки положения экстремума проводят дополнительные эксперименты и строят модели более высокого порядка.

Задача 10. В последние годы для теплообменных и холодильных аппаратов требуются трубы с продольным внешним оребрением. Одним из экономически целесообразных методов изготовления таких труб является прессование. Однако при прессовании ребристых изделий возникают дефекты: гофры, коробление, невыполнение формы трубы и т.д. – поэтому иглу необходимо сконструировать так, чтобы исключить указанные дефекты.

Решение. При прессовании труб с внешним оребрением применяют многоканальные матрицы, у которых совокупность каналов, расположенных на зеркале, можно рассматривать как трубы с внешним оребрением (рис. 47).

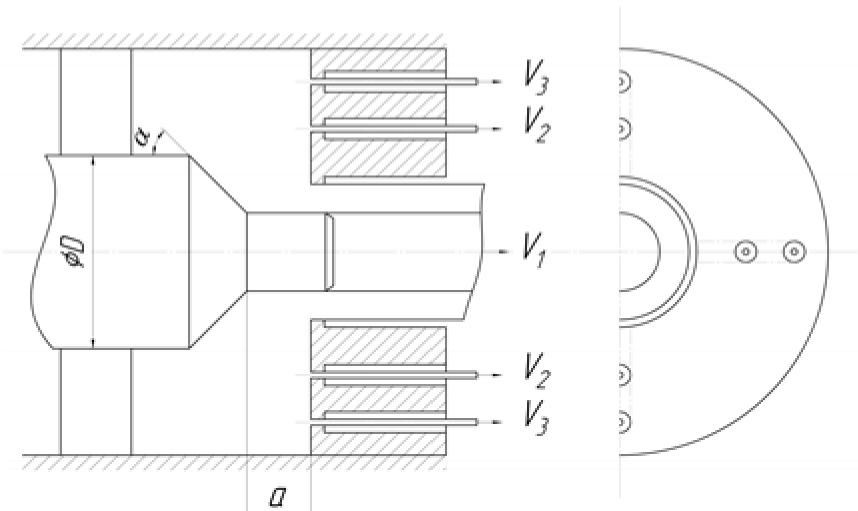


Рис. 47. Схема прессования труб с наружным продольным оребрением

При прессовании в многоканальные матрицы происходит разделение металла в очаге деформации на отдельные потоки по соответствующим каналам. Объемы этих потоков по существу и определяют скорости истечения отдельных «ниток», длина которых в общем случае неодинакова и зависит от параметров иглы, смещения элементов и т.д.

Измерив длину участков $\boldsymbol{l_k}$ на любой стадии процесса, скорость истечения $\upsilon_{\boldsymbol{k}}$ элемента $\boldsymbol{k}$ определяли как

$$\frac{\upsilon_{\boldsymbol{k}}}{\upsilon_{\text{ср}}} = \frac{\boldsymbol{l_k}\ \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \Phi_{\boldsymbol{k}}}{\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \Phi_{\boldsymbol{k}}\ \boldsymbol{l_k}},$$

где $\upsilon_{\text{ср}}$ – средняя скорость истечения,

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \Phi_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{l_k}}{\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \Phi_{\boldsymbol{k}}},$$

$\Phi_{\boldsymbol{k}}$ – площадь $\boldsymbol{k}$-го канала;

$\boldsymbol{N}$ – число элементов, на которые разделен канал трубы.

При скоростях истечения ребра и трубы, отличных друг от друга, возможно появление гофров на трубе и на ребрах, а также больших остаточных напряжений, которые ухудшают механические свойства прессуемых изделий, а иногда приводят к короблению, гофрам или разрушению трубы.

Для выравнивания скоростей истечения целесообразно использовать конически-ступенчатые иглы. Для расчета оптимальных параметров иглы можно использовать условие минимизации дисперсии скоростей истечения в каналы матрицы

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \left(\boldsymbol{1} - \frac{\upsilon_{\boldsymbol{k}}}{\upsilon_{\text{ср}}}\right)^{\boldsymbol{2}}}.$$

Опыты проводили по плану полного факторного эксперимента $\boldsymbol{2^3}$. Были взяты следующие входные переменные (см. рис. 30): $\boldsymbol{x_1}$ – диаметр иглы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{x_2}$ – конусность иглы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{x_3}$ – положение иглы относительно матрицы $\boldsymbol{a}$. Целевой функцией служила $\boldsymbol{U}$. Интервалы варьирования входных переменных (табл. 20) приняты следующими: $x_1 = 15 \dots 25$ мм, $x_2 = 30 \dots 60°$, $x_3 = 4 \dots 10$ мм.

Таблица 20. Условия проведения эксперимента и средние (по двум слиткам) значения *U*

Номер опыта	*D*	α	*a*	*U*
1	15	30	4	0,116
2	15	60	4	0,123
3	25	30	4	0,089
4	25	60	4	0,114
5	15	30	10	0,172
6	15	60	10	0,156
7	25	30	10	0,172
8	25	60	10	0,151

В результате статистической обработки экспериментальных данных адекватное уравнение получим в виде

$$\boldsymbol{U = 0,137 - 0,005x_1 + 0,026x_3 + 0,002x_1x_2 +}$$
$$\boldsymbol{+ 0,004x_1x_3 + 0,009x_2x_3 - 0,003x_1x_2x_3,}$$

где

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\overline{x}_1 - 20}{5};\ x_2 = \frac{\overline{x}_2 - 45}{15};\ x_3 = \frac{\overline{x}_3 - 7}{3}}.$$

Анализируя полученное уравнение, можно отметить, что неравномерность истечения уменьшается с уменьшением значения $\boldsymbol{a}$ и увеличением значения $\boldsymbol{D}$. По сравнению с другими факторами положение иглы относительно матрицы вызывает наибольшее изменение скорости истечения. Приближая конус иглы к матрице, мы уменьшаем скорость истечения гладкой трубы и наоборот, удаляя, увеличиваем скорость истечения. Этим уравнением можно пользоваться в качестве интерполяционного для предсказания размеров иглы.

Осуществим поиск оптимальных размеров конически-ступенчатой иглы методом крутого восхождения. Для этого незначимый фактор – угол конуса иглы стабилизируем на нижнем уровне – $30°$. В движении по градиенту этот фактор участвовать не будет (табл. 21). В качестве единичного шага выбрано изменение на 1 мм положения иглы относительно матрицы. Далее с учетом интервала варьирования определяем значения шага для фактора x_1 и ведем расчет серии «мысленных опытов».

Были реализованы опыты 4 и 5. Оказалось, что крутое восхождение по градиенту привело к уменьшению неравномерности истечения. Оптимальные параметры иглы D = 22 мм, $\alpha = 30°$, a = 3 мм получены по условиям опыта 4.

4.5 Симплекс-метод

Симплекс – это простейший выпуклый многогранник, образованный k + 1 вершинами общего положения в k-мерном пространстве. Например, на плоскости симплекс образует три любые точки, не лежащие на одной прямой, т.е. любой треугольник является симплексом. В трехмерном пространстве симплекс образует четыре точки, не лежащие в одной плоскости, т.е. любая треугольная пирамида также симплекс. Симплекс называется правильным, если все расстояния между вершинами равны.

Из любого симплекса можно, отбросив одну из вершин и используя оставшуюся грань, получить новый симплекс, добавив всего лишь одну точку. Путем последовательного отбрасывания одной из вершин можно осуществлять перемещение симплекса в k-мерном пространстве в направлении экстремума.

Таблица 21. Расчет серии «мысленных опытов»

Уровни	Факторы			Результат
	D	α	a	
Верхний «+1»	25	60	10	
Нижний «−1»	15	30	4	
Основной «0»	20	45	7	
Интервал варьирования	5	15	3	
b_i	0,005	0,0	0,026	
$b_j \, \Delta \, x_j$	0,025	0,0	0,078	
Шаг Δ_j	0,5	0,0	1,0	
Номер мысленного опыта 1	20,5	30	6	
2	21,0	30	5	
3	21,5	30	4	
4	22,0	30	3	0,016
5	22,5	30	2	0,028
6	23,0	30	1	

Если провести расчеты целевой функции в вершинах симплекса, то направление градиента будет проходить из центра через грань, противоположную вершине с минимальным значением Y. Вершина $Y_{\min}$ заменяется на новую вершину $Y_{\text{нов}}$. Для продвижения к экстремуму от исходного симплекса переходят к симплексу, находящемуся в области более высокого значения градиента, путем отбрасывания вершины $Y_{\min}$ и построения нового симплекса (рис. 48). Затем процесс повторяется, в результате чего формируется цепочка симплексов, перемещающихся к экстремуму. Достигнув области экстремума, симплекс начинает вращаться вокруг вершины с максимальным значением $Y_{\max}$. Это явление используется для определения конца процесса оптимизации.

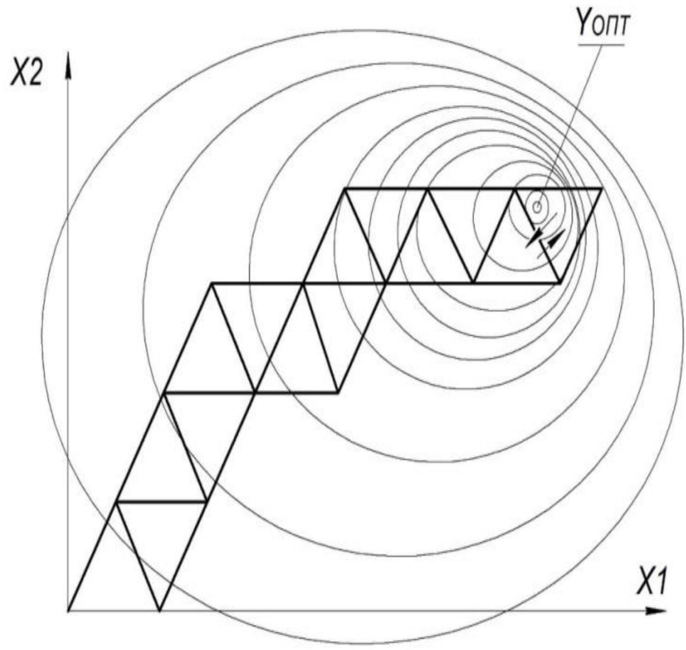


Рис. 48. Оптимизация симплексным методом

К-мерный симплекс с центром в начале координат, ориентированный таким образом, что одна из его вершин лежит на оси $\boldsymbol{x_k}$, а остальные вершины располагаются симметрично относительно координатных осей, можно представить следующей матрицей:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_i & r_{k-1} & r_k \\ -R_1 & r_2 & r_i & r_{k-1} & r_k \\ 0 & -R_2 & r_i & r_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & -R_i & r_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & 0 & -R_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_k \end{vmatrix}$$

где r_i и R_i соответственно радиусы вписанной и описанной гиперсфер для k-мерного симплекса. При длине ребра k-мерного симплекса, равного «1», радиусы гиперсфер, т.е. координаты вершин симплекса равны:

$$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}} \;;$$

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{2i\,(i+1)}} \;,$$

где $i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ k$. Число опытов в симплексной матрице равно числу вершин симплекса. На рис. 49 представлен начальный правильный симплекс при k = 2, в табл. 22 – матрица начального правильного симплекса, в которой указаны координаты точек, соответствующих вершинам исходного симплекса любой размерности.

После реализации расчетов в вершинах начального симплекса строят новый симплекс с новой вершиной, полученной путем зеркального отображения отброшенной вершины, имеющей наихудший результат. Координаты новой вершины в кодовых значениях определяют по формуле

$$x_i' = 2/k\left[x_1 + x_2 + x_{p-1} + x_{p+1} + \cdots + x_{k+1}\right] - x_p,$$

где x_p – координата отбрасываемой вершины. После проведения расчета в новой вершине получают значение целевой функции $Y_{\text{нов}}$. Затем рассматривают его совместно со значением параметров в вершинах нового симплекса, снова отбрасывают вершину с наихудшими значениями Y и аналогично строят новую вершину и т.д.

Таблица 22. Координаты вершин симплекса

Номер вершин симплекса	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_k
1	–0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	$-r_k$
2	0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	$-r_k$
3	0	0,578	0,204	0,158	0,129	$-r_k$
4	0	0	0,612	0,158	0,129	$-r_k$
5	0	0	0	0,632	0,129	$-r_k$
$k+1$	0	0	0	0	0	R_k

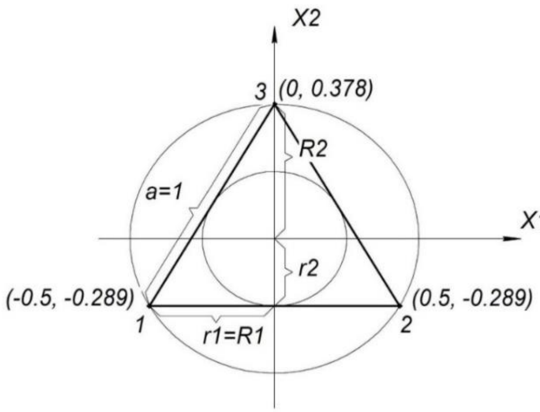


Рис. 49. Двухмерный симплекс

Возможны и другие исходные положения начального симплекса, например, приведенные на рис. 50.

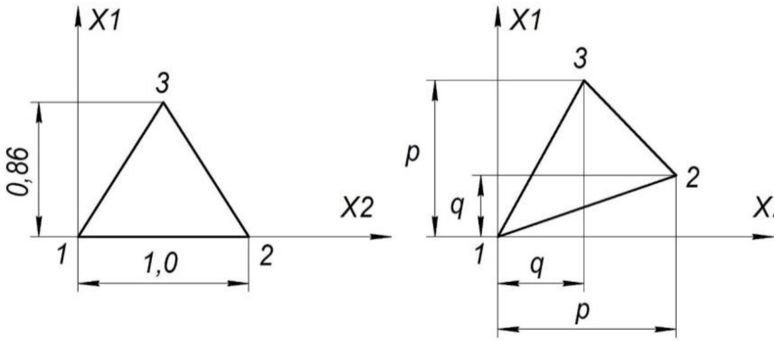


Рис. 50. Некоторые виды начального симплекса

Задача 11. Используя симплексное планирование, оптимизировать процесс резания по критерию стойкости C в зависимости от скорости резания f и подачи при сверлении s:

$$C = F(s, F) => \max.$$

Решение. Основные уровни и интервалы варьирования управляющих факторов приведены в таблице:

Факторы или параметры	Обозначение	Основной уровень	Интервал варьирования
Частота вращения f (об/мин)	X_1	2050	2000
Подача s (мм/об)	X_2	0,003	0,0012

Двухмерный симплекс в данном случае представляет собой равносторонний треугольник ABC. Расстояние между вершинами симплекса прием равным единице. В этом случае высота симплекса будет равна 0,86. Координаты вершины нового симплекса (в кодированных значениях) находятся по формуле:

$$x_{i\ k+2} = \frac{2}{k}\sum_{u} x_{iu} - x_i^*,$$

где x_{ik+2} – координата новой вершины, являющейся зеркальным отображением отбрасываемой вершины; x_i* – координата отбрасываемой вершины; $\frac{2}{k}\sum_u x_{iu}$ – среднее значение координат вершин симплекса, кроме отбрасываемой.

Для нашего примера координаты точки A` будут:

$$x_{14} = \frac{2}{2}(0{,}5 + 1) - 0 = 1{,}5;$$

$$x_{24} = \frac{2}{2}(0{,}86 + 0) - 0 = 0{,}86.$$

Теперь необходимо по кодированным значения точки определить их натуральные значения, т.е. значения факторов при эксперименте в точке. Натуральные и кодированные значения факторов связаны формулой

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0}}{\Delta\tilde{x}_i},$$

где x_i – кодированное значение фактора; $\tilde{x}_i$ – натуральные значения фактора; $\Delta\tilde{x}_i$ – интервал варьирования фактора; $\tilde{x}_{i0}$ – основной уровень фактора.

Подставляя вместо x_i кодированные значения $x_1 = x_{14}$ и $x_2 = x_{24}$, получаем

$$1{,}5 = \frac{\tilde{x}_1 - 2500}{2000}; 0{,}86 = \frac{\tilde{x}_2 - 0{,}003}{0{,}0012},$$

откуда находим: $\tilde{x}_1$ = 5050 об/мин, $\tilde{x}_2$ = 0,004 об/мин. Аналогично находятся значения и для других точек эксперимента.

Действуя далее по аналогичной схеме, отбрасывая вершины с наименьшими значениями стойкости и добавляя новые, получим движение симплекса, описанное в табл. 23.

Таблица 23. Симплексное планирование

	Симплекс	Вершина	Частота вращения X_1		Подача X_2		Стойкость (мин)
			Код.	Об/мин	Код.	мм/об	
1	ABC	A	0	2050	0	0,003	9,0
2	ABC	B	0,5		0,86		13,2
3	ABC	C	1		0		14,6
4	A’BC	A’	1,5		0,86		18,0
5	A’B’C	B’	2		0		17,0
6	A’B’C’	C’	2,5		0,86		21,2
7	A’B’’C’	B’’	2	6050	1,72	0,005	24,8
8	A’’B’’C’	A’’	3		1,72		21,6
9	A’’B’’C’’	C’’	2,5		2,58		22,1
10	A’’’B’’C’’	A’’’	2,5		2,58		22,8
11	A’’’B’’C’’’	C’’’	1		1,72		23,7

Движение симплекса прекращается его вращением вокруг точки B``. Таким образом, наибольшая стойкость достигается в точке B``. Оптимальным режимом при этом является следующий - скорость резания f = 6050 об/мин и подача s = 0,005 об/мин.

4.6 Задания для самоконтроля

1. Перечислите три уровня оптимизации.
2. Что такое направленный поиск?
3. Что такое ненаправленный поиск?
4. Перечислите методы одномерной оптимизации.
5. Что называют золотым сечением отрезка?
6. Какое свойство золотого сечения используется при сокращении интервала неопределенности?
7. Как выполняются первый и последующие шаги в методе золотого сечения?
8. За счет чего метод золотого сечения является более быстрым по сравнению с дихотомией?
9. Какая числовая последовательность называется числами Фибоначчи?
10. Как по заданному масштабу задачи определить число итераций N, необходимое для ее решения по методу Фибоначчи?
11. Чем отличается первый шаг от последующих в методе Фибоначчи?
12. Какая особенность заключается в выполнении последнего шага в методе Фибоначчи?
13. Сущность метода Гаусса-Зейделя.
14. В чем особенности метода крутого восхождения?
15. Что такое симплекс?
16. Сущность оптимизации симплекс-методом.
17. В чем особенность одномерных методов поиска?
18. Перечислите достоинства и недостатки метода дихотомии.
19. Какой из рассмотренных одномерных методов: дихотомии, Фибоначчи или «золотого сечения» наиболее эффективен и почему?
20. Что такое интервал неопределенности?
21. Перечислите основные шаги при поиске экстремума методом Фибоначчи.

22. Зачем требуется определять минимальную длину интервала неопределенности?

23. Чем определяется эффективность метода поиска экстремума?

24. Почему один из методов назван именем Фибоначчи?

25. Когда прекращается поиск в одномерных методах?

26. В чем особенность многомерных методов поиска экстремума?

27. Что такое единичные шаги фактора?

28. Когда целесообразно применять метод Гаусса-Зейделя и почему?

29. Какие из многомерных методов наиболее доступны программированию? Обоснуйте свой ответ.

30. Какие параметры управляют точностью поиска в симплекс-методе?

31. Какие требования к объекту исследования должны выполняться при использовании многомерных методов поиска?

32. Чем руководствуются при выборе шага фактора при поиске экстремума?

33. Для каких типов математических моделей применим метод крутого восхождения?

34. Дайте определение градиента функции.

35. Как выбрать базовый фактор?

36. Как рассчитать единичные шаги факторов?

37. Как спланировать серию мысленных опытов при поиске максимума?

38. Как реализовать серию мысленных опытов?

4.7 Задачи и упражнения

4.1. Реализуйте процедуру одномерного поиска точки оптимума функции

$$f(x) = 3x^2 + (12/x^3) - 5$$

в интервале $0{,}5 \leq x \leq 5/2$, используя: а) метод золотого сечения, б) метод дихотомии, в) метод Фибоначчи. В каждом случае проведите по четыре вычисления значений функции. Сравните результирующие интервалы поиска, полученные с помощью перечисленных выше методов.

4.2. Требуется выбрать цилиндрическую заготовку диаметром D и длиной L для прессования объемом V при наименьшей поверхности трения.

4.3. В табл. 24 представлены некоторые результаты полного факторного эксперимента $N = 2^3$.

Таблица 24. Исходные данные

Факторы	x_1	x_2	x_3
Основной уровень x_j	0,40	40	60
Интервал варьирования $\Delta\, x_j$	0,15	100	10
b_j	20	11,9	–5,3

Для оптимизации процесса методом крутого восхождения выбрать единичные шаги и рассчитать серию «мысленных» опытов в направлении градиента.

4.4. Найти точку экстремума (максимум) функции

$$Y = \begin{cases} e^{3x/2} & 0{,}0 \leq x \leq 0{,}45 \\ 3 - 2{,}3x & 0{,}45 < x \leq 0{,}7 \\ 1 - x^2 & 0{,}7 < x \leq 1 \end{cases}$$

методом дихотомии при $\varepsilon = 0{,}04$ и $N = 8$.

4.5. Остаточные сжимающие напряжения после калибровки металлоизделий в процессе холодного волочения описываются следующим законом:

$$\sigma = 8{,}0 + 26{,}8x_1 + 3{,}1x_2 + 1{,}8x_2^2 + 2{,}8x_1x_2\ .$$

Используя симплекс-метод, найти оптимальные значения параметров x_1 и x_2, обеспечивающие максимум.

4.6. Пользуясь любым из методов одномерного поиска, минимизировать следующие функции с точностью до одного знака после запятой:

$$\text{а) } f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, [0,4];$$

$$\text{б) } f(x) = 4x \sin x, [0, \pi];$$

$$\text{в) } f(x) = 2(x-3)^2 + e^{0,5x^2}, [0,100].$$

4.7. Методом Фибоначчи найти минимальное значение F и точку минимума функции $F(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке [1,5,2]. Точку минимума найти с точностью ε = 0,07.

4.8. Методом деления отрезка пополам найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с точностью ε и минимальное значение f^*:

$$f(x) = x^2 - 3x + x \ln x, [a, b] = [1, 2], \varepsilon = 0,05.$$

4.9. Методом золотого сечения найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с точностью ε и минимальное значение f^*:

$$f(x) = 1/x + e^x + x \ln x, [a, b] = [0,5;1,5], \varepsilon = 0,01.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ашманов, С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – Москва : Наука, 1991. – 448 с.

2. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.

3. Бешелев, С.Д. Математико-статистические методы экспертных оценок / С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гурвиц. – Москва : Статистика, 1980. – 263 с.

4. Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. – Москва : Наука, 1969. – 120 с.

5. Венцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Венцель. – Москва : Высшая школа, 2007. – 208 с.

6. Волкова, В.Н. Теория систем и системный анализ : учебник для академического бакалавриата / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2017. – 462 с.

7. Гречников, Ф.В. Основы научных исследований / Ф.В. Гречников, В.Р. Каргин. – Самара: Издательство СГАУ, 2015. – 115 с.

8. Каргин, В.Р. Основы системного проектирования и совершенствования процессов обработки металлов давлением: учебное пособие / В.Р. Каргин. – Куйбышев: Куйбышевский авиационный институт. – 1990. – 88 с.

9. Лесин, В.В. Основы методов оптимизации: учебное пособие для вузов / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – 3-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2011. – 352 с.

10. Прудковский, Б.А. Зачем металлургу математические модели / Б.А. Прудковский. – Москва : Наука. – 1989. – 192 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения G критерия Кохрена при 5-процентном уровне значимости

N	$f_1 = m - 1$					
	1	2	3	4	5	6
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534
3	0,9669	0,8709	0,0797	0,7454	0,7071	0,6771
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3368
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362

Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$

n–1	α		
	0,10	0,05	0,02
1	6,31	12,7	31,8
2	2,92	4,30	6,96
3	2,35	3,18	4,54
4	2,13	2,78	3,75
5	2,02	2,57	3,36
6	1,94	2,45	3,14

Значения F критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

f_1	f_2				
	1	2	3	4	5
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2
2	18,5	12,2	19,2	19,3	19,3
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4
7	5,5	4,7	4,4	4,1	4,0
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,544

Учебное издание

Каргин Владимир Родионович,
Каргин Борис Владимирович,
Казаков Антон Вячеславович

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Техническое редактирование А.С. Никитиной
Компьютерная верстка А.С. Никитиной

Подписано в печать 31.03.2022. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 9,75.
Тираж 30 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.