

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА

Ю. М. АРЫШЕНСКИЙ

Т Е О Р И Я
ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ
АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Издательство
Саратовского университета
1 9 7 3

А89

Теория листовой штамповки анизотропных материалов.
Арышенский Ю. М. Издательство Саратовского университета, 1973, 112 с.

В книге изложен ряд положений теории пластичности анизотропных сред. Показаны особенности применения инженерных методов при обработке давлением ортотропных материалов. Проведен анализ конкретных операций листовой штамповки: гибки, обтяжки, вытяжки.

Илл. — 37. Табл. — 8. Библ. — 50.

3-12-3
ПЗ-73



Введение

Многие детали современных машин и приборов изготавливаются методами листовой штамповки. При этом используются металлы и сплавы различных структурных групп и марок. Большинство полуфабрикатов (листы, трубы, профили), полученных из этих материалов, обладают явно выраженной анизотропией механических свойств. Особенно она характерна для алюминиевых, магниевых, титановых, бериллиевых и других сплавов.

Зависимость свойств материала от направления оказывает определенное влияние на технологические процессы изготовления изделий, в том числе и на операции листовой штамповки.

Однако влияние анизотропии оценить трудно, так как технологические расчеты, в основном, проводят по формулам теории пластичности изотропных сред. Применение этой теории позволяет упростить расчетные формулы, хотя подобная простота может привести к грубым ошибкам, к неправильному выбору параметров процесса. Особенно это относится к вопросам, связанным с определением предельных возможностей материала в тех или иных операциях обработки давлением.

Анализ опубликованных работ показал, что, во-первых, теория пластичности анизотропных тел разработана еще недостаточно полно. Многие вопросы требуют дальнейшего решения и совершенствования. Во-вторых, пока изучено ограниченное число операций листовой штамповки анизотропных металлов, в основном, процессы вытяжки и частично — формовки и гибки. И, в-третьих, полученные различными исследователями результаты не систематизированы в достаточной степени.

Решению этих проблем и посвящена данная работа.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

k_{ijklm} — компоненты материального тензора;
 σ_{ij} — компоненты тензора напряжений;

- k_{ijlm} — компоненты материального тензора, записанного в главных осях анизотропии;
- μ_{ne} — компоненты поперечной деформации;
- ϵ_{ij} — компоненты тензора деформаций;
- σ_i — интенсивность напряжений;
- ϵ_i — интенсивность деформаций;
- E' — модуль пластичности;
- E — модуль упругости;
- k, p — константы аппроксимирующей кривой упрочнения;
- β — коэффициент Лодэ;
- ν_σ — параметр напряженного состояния;
- ν_ϵ — параметр деформированного состояния;
- k_Π — приведенный коэффициент;
- σ_ρ — радикальное напряжение;
- σ_Θ — тангенциальное напряжение;
- σ_z — осевое напряжение;
- χ — изменение кривизны детали при разгрузке;
- ϵ_n — деформация срединного волокна оболочки;
- M_n — изгибающий момент.
-
-

Глава I

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

§ 1. 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Тензорное исчисление — математическая теория, изучающая величины особого рода — тензоры. Одной из основных задач тензорного исчисления является нахождение аналитических формулировок законов механики, геометрии, физики, не зависящих от выбора координатной системы.

Тензор характеризуется определенным рангом (валентностью) [1]. Наиболее простым является тензор нулевого ранга. Он представляет собой скалярную величину, его единственная компонента a не меняет своего значения при преобразовании базиса (координатной системы). Поэтому тензор нулевого ранга называют также и **и н в а р и а н т о м**.

Вектор — тензор первого ранга. Его можно задать тремя числами a_i , которые при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой преобразуются по формуле $a'_i = \alpha'_{i'j} a_j$, где $\alpha'_{i'j}$ — косинусы углов между новыми и старыми осями. Два повторяющихся индекса означают суммирование от 1 до 3 (в трехмерном пространстве).

Тензором второго ранга называется любая величина, определяемая девятью числами a_{ij} в декартовой системе координат, которые при преобразовании базиса меняются по закону $a'_{i'j'} = \alpha'_{i'j} \alpha'_{j'k} a_{ik}$.

В качестве примера рассмотрим преобразование компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \alpha'_{1'i} \alpha'_{1'j} \sigma_{ij} = \alpha_{11}^2 \sigma_{11} + \alpha_{12}^2 \sigma_{22} + \alpha_{13}^2 \sigma_{33} + \\ &+ 2(\alpha_{11} \alpha_{13} \sigma_{13} + \alpha_{11} \alpha_{12} \sigma_{12} + \alpha_{13} \alpha_{12} \sigma_{32}), \\ \sigma'_{22} &= \alpha_{21}^2 \sigma_{11} + \alpha_{22}^2 \sigma_{22} + \alpha_{23}^2 \sigma_{33} + \\ &+ 2(\alpha_{23} \alpha_{21} \sigma_{31} + \alpha_{21} \alpha_{22} \sigma_{12} + \alpha_{23} \alpha_{22} \sigma_{32}), \\ \sigma'_{33} &= \alpha_{31}^2 \sigma_{11} + \alpha_{32}^2 \sigma_{22} + \alpha_{33}^2 \sigma_{33} + \\ &+ 2(\alpha_{13} \alpha_{33} \sigma_{31} + \alpha_{32} \alpha_{13} \sigma_{12} + \alpha_{33} \alpha_{23} \sigma_{23}).\end{aligned}$$

Между тензорными и обычными обозначениями существуют следующие связи:

$$\sigma_{11} = \sigma_x; \quad \sigma_{22} = \sigma_y; \quad \sigma_{33} = \sigma_z; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy} \text{ и т. д.}$$

Направляющие косинусы задаются таблицей 1.

Таблица 1

$a_{i'l}$	X	Y	Z
X'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Y'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Z'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Между ними имеются такие соотношения [2]:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \quad a_{12} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} = 0$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \quad a_{13} a_{11} + a_{32} a_{12} + a_{33} a_{13} = 0$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \quad a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23} = 0$$

Их использование позволяет получить инварианты тензора напряжений, например: $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z$.

В общем случае для того, чтобы совокупность величин $a_{ijk\dots m}$ была тензором, необходимо и достаточно, чтобы при переходе от одного ортонормированного базиса к другому она изменялась следующим образом:

$$a_{i'j'k'\dots m'} = a_{i'l} a_{j'j} a_{k'k} \dots a_{m'm} a_{ljk\dots m}. \quad (1.1)$$

Над тензором можно проводить определенные алгебраические операции [3]:

Сложение и вычитание. При сложении и вычитании соответствующих компонент тензоров одинаковой валентности получается тензор той же валентности. Для тензоров разной валентности эта операция неприменима.

Умножение. Из тензоров валентности n и m можно составить тензор валентности $n+m$, умножая каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго.

Свертывание. Любой тензор валентности n преобразуется в тензор валентности $n-2$, если обозначить два из его индексов одними и теми же буквами и затем суммировать по ним.

Объединяя операции умножения и свертывания заданных тензоров, можно задать тензоры различной валентности.

Тензорное исчисление оказалось очень полезным при изучении свойств кристаллов и поликристаллических тел. Обычно эти свойства разделяют на два типа.

К первому типу относят такие свойства, которые не зависят от направления (плотность, теплоемкость и т. д.). Их можно описать скалярными величинами.

Свойства второго типа зависят от направления в материале, тело будет считаться анизотропным по отношению к ним. Эти свойства выражаются с помощью тензоров. В некоторых случаях может оказаться, что отдельные характеристики, которые, вообще говоря, относятся ко второму типу, для конкретного тела будут одинаковыми во всех направлениях, и тогда оно является изотропным по отношению к ним. В качестве примера можно указать на модули упругости и пластичности изотропных сред, хотя в общем случае — это свойства второго типа.

Различают полевые и материальные тензоры. Первые из них не зависят от рассматриваемой среды и ее симметрии. В частности, к ним относятся тензоры напряжений и деформации. Один из них описывает внешнее воздействие на тело, а второй — его реакцию на это воздействие.

Материальные тензоры характеризуют свойства конкретного тела. Поэтому анизотропия механических свойств может быть выражена только с помощью материальных тензоров.

Это необходимо учитывать при анализе тензоров и нахождении их инвариантов. Так, если рассматривается материальный тензор, то изменение его компонент при повороте осей не следует связывать, как это иногда делают, с полевым тензором. Преобразование составляющих тензора анизотропии нельзя ставить в зависимость от напряженного состояния. При всех видах напряженного состояния изменения компонент остаются одинаковыми.

§ 1. 2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К КРИТЕРИЯМ ПЛАСТИЧНОСТИ. РАБОТЫ Р. МИЗЕСА И Р. ХИЛЛА

Теория пластичности является одной из наиболее бурно развивающихся областей механики сплошных сред. С одной стороны, расширяется область применения теории, с другой — происходит все более глубокое осмысливание ее основ [4]. В Советском Союзе и за рубежом большое внимание уделяется изучению вопросов, связанных с теорией пластичности неоднородных и анизотропных сред, т. е. сред, которые более реально отражают действительное состояние материала.

В теории пластичности, как и в теории упругости при макроскопическом подходе, по существу, интересуются одними и теми же величинами, т. е. напряжениями, деформациями или их скоростями.

Общие принципы механики в предположении сплошности среды дают три уравнения для определения шести компонент тензора напряжений. Дополнительными уравнениями в упругой области служат уравнения закона Гука.

В пластической области раскрытие статической неопределенности задачи требует, во-первых, установления «критерия

пластичности», т. е. условия, дающего возможность определить то напряженное состояние, при достижении которого возникает пластическая деформация; во-вторых, получения «уравнений пластичности», т. е. уравнений, связывающих в каждой точке напряжения с деформациями или их скоростями. Они в пластической области играют ту же роль, что и закон Гука для упругой области.

Необходимо подчеркнуть, что уравнения равновесия выражаются через компоненты полевых тензоров; следовательно, они будут общими не только для материалов, находящихся в упругом или пластическом состоянии, но и для изотропных и анизотропных тел. Поэтому при разработке теории пластичности основное внимание уделяется уравнениям, которые описываются не только полевыми, но и материальными тензорами, т. е. тензорами, характеризующими свойства среды. К таким величинам относятся «критерии пластичности» и уравнения связи между напряжениями и деформациями (скоростями деформации).

Рассмотрим основные требования, предъявляемые к ним [3].

1. Критерий должен дать условие начала текучести для элемента материала, находящегося в произвольно сложном напряженном состоянии.

2. В аналитическое выражение условия пластичности, помимо компонент напряжений, должны входить величины, характеризующие свойства металла.

3. Критерий должен иметь форму инварианта, образованного из компонент тензора напряжений и материального тензора.

4. Для того чтобы не была внутренне противоречива теория, все вытекающие из нее соотношения между константами материала должны быть инвариантными.

5. Должно быть дано правило пересчета показателей, характеризующих свойства среды, при повороте координатной системы.

6. Критерий должен учитывать такие особенности материала, как различие пределов текучести на растяжение и сжатие, зависимость пределов на сдвиг от направления касательных напряжений.

Исходя из этих требований, можно проанализировать предложенные условия и теории пластичности.

Условия наступления пластического состояния для анизотропных сред исследовались многими учеными. Однако из всех предложенных условий текучести наибольшее применение получил критерий Р. Мизеса. Согласно Р. Мизесу, критерий пластичности при произвольной анизотропии должен быть представлен квадратичной функцией от напряжений. Позднее, поставив требование о том, что функция не должна быть зависящей от всестороннего равномерного давления, автор записал свое условие в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned}
F = \frac{1}{2} [& K_{12}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + K_{23}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + K_{31}(\sigma_z - \sigma_x)^2] - \\
& - \tau_{yz} [K_{24}(\sigma_x - \sigma_y) + K_{34}(\sigma_x - \sigma_z)] - \tau_{xz} [K_{35}(\sigma_y - \sigma_z) + \\
& + K_{15}(\sigma_y - \sigma_x)] - \tau_{xy} [K_{16}(\sigma_z - \sigma_x) + K_{26}(\sigma_z - \sigma_y)] + \\
& + K_{45} \tau_{xz} \tau_{yz} + K_{56} \tau_{xz} \tau_{xy} + K_{64} \tau_{xy} \tau_{yz} + \\
& + \frac{1}{2} (K_{44} \tau_{yz}^2 + K_{55} \tau_{xz}^2 + K_{66} \tau_{xy}^2) = \text{const.} \quad (1.2)
\end{aligned}$$

Р. Мизес в своей работе не сделал никаких предположений относительно физического смысла входящих коэффициентов, что и сдержало дальнейшее развитие теории.

Как будет показано ниже, для металлических полуфабрикатов (листов, лент, труб, профилей и т. д.) характерны ортогональная анизотропия (ортотропные тела) и трансверсальная изотропия.

В первом случае через каждую точку тела можно провести три плоскости симметрии свойств. Во втором через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все направления эквивалентны.

У ортотропного материала, при отражении в плоскости симметрии, коэффициенты анизотропии не должны менять своего значения. Поэтому, если рассматривать условие пластичности в главных осях анизотропии, то его запись упростится [6]. Так, условие Р. Мизеса примет вид

$$\begin{aligned}
F = \frac{1}{2} [& K_{12}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + K_{23}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + K_{31}(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\
& + K_{44} \tau_{yz}^2 + K_{55} \tau_{xz}^2 + K_{66} \tau_{xy}^2] = \text{const.} \quad (1.2a)
\end{aligned}$$

Эту зависимость в дальнейшем исследовал Р. Хилл [7]. Он ввел следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\frac{K_{12}}{2F} = H, \quad \frac{K_{23}}{2F} = \bar{F}, \quad \frac{K_{31}}{2F} = G; \\
\frac{K_{44}}{2F} = 2L; \quad \frac{K_{55}}{2F} = 2M; \quad \frac{K_{66}}{2F} = 2N.
\end{aligned}$$

Далее, полагая, что при линейном растяжении вдоль главных осей анизотропии напряжение начала пластических деформаций равно соответствующему пределу текучести, автор записывает

$$\frac{1}{X^2} = G + H, \quad \frac{1}{Y^2} = H + \bar{F}; \quad \frac{1}{Z^2} = F + G.$$

Из этих соотношений следует:

$$2\bar{F} = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}; \quad 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2};$$

$$2G = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}$$

Затем, последовательно рассматривая чистый сдвиг в трех плоскостях, Р. Хилл находит

$$\frac{1}{R^2} = 2L; \quad \frac{1}{S^2} = 2M; \quad \frac{1}{T^2} = 2N.$$

Все эти преобразования позволили представить условие пластичности Р. Мизеса в виде:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right) (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \right) (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{\tau_{yz}^2}{R^2} + \frac{\tau_{zx}^2}{S^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{T^2} = 1, \quad (1.3)$$

где X, Y, Z, R, S, T — соответствующие пределы текучести на растяжение и сдвиг.

По аналогии с изотропной средой автор находит уравнения связи между напряжениями и приращениями деформаций

$$d\varepsilon_x = d\lambda [H(\tau_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_y)]; \quad d\gamma_{yz} = d\lambda L\tau_{yz}; \\ d\varepsilon_y = d\lambda [\bar{F}(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)]; \quad d\gamma_{zx} = d\lambda M\tau_{zx}; \\ d\varepsilon_z = d\lambda [G(\sigma_z - \sigma_x) + \bar{F}(\sigma_z - \sigma_y)]; \quad d\gamma_{xy} = d\lambda N\tau_{xy}.$$

Для определения множителя $d\lambda$ введено понятие эквивалентного напряжения:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F_0 + G_0 + H_0)}} \sqrt{\bar{F}_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \dots + 2N_0\tau_{xy}^2}.$$

Полагая, что $\bar{\sigma}$ является функцией пластической работы, Р. Хилл показал, что $d\lambda = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} d\varepsilon} = dW$, где $d\varepsilon$ — приращение эквивалентной деформации.

Далее в своей работе Р. Хилл рассматривает плоскую деформацию и возможность существования характеристик. Он установил, что характеристики для напряжений и скоростей те же самые, что и в изотропных телах. Они же есть линии скольжения или направления максимальных скоростей сдвига. Однако в отличие от изотропной среды, здесь характеристики не представляют собой направления максимальных касательных напряжений.

Полученную теорию автор использовал при решении отдельных задач. Например, он проанализировал процесс фестонообразования при глубокой вытяжке листового металла.

Несмотря на то, что запись условия (1.2), предложенная Р. Хиллом, имеет довольно простую форму, она не лишена отдельных недостатков.

1. Условие пластичности, выраженное через главные оси анизотропии, может быть использовано в общем случае лишь тогда, когда дано правило пересчета показателей анизотропии при повороте координатной системы. Такое правило в работе Р. Хилла не приведено, а без этого предлагаемая запись носит частный характер.

2. Для учета упрочнения металла автор вынужден был ввести понятие эквивалентного напряжения. Однако коэффициент $\sqrt{\frac{3}{2(\bar{F}_0 + H_0 + G_0)}}$, а следовательно, и само выражение эквивалентного напряжения не являются инвариантными. Этот факт свидетельствует о неполном физическом обосновании теории.

3. Как условие пластичности Р. Мизеса, так и дальнейшая его интерпретация Р. Хиллом, не отражают различия пределов текучести материала при сжатии и растяжении.

Все это говорит о том, что при разработке теории пластичности анизотропных сред необходим такой подход, который позволил бы перейти от формально математически верных частных случаев к более общим и физически обоснованным выражениям.

§ 1.3. УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ТЕКУЧЕСТИ НА СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ

Любое условие пластичности интерпретируется в виде некоторой гиперповерхности в девятимерном пространстве тензора напряжений.

Исходя из геометрического представления, основанного на физических закономерностях, может быть определено аналитическое выражение критерия пластичности. Подобный подход изложен в ряде работ [31], [32].

Определим вид поверхности пластичности анизотропных сред с разными пределами текучести на сжатие и растяжение. При этом примем условие: добавление гидростатического давления не будет влиять на наступление пластичности металла.

Отложим на девиаторной плоскости (рис. 1.1) по координатным осям соответствующие пределы текучести на растяжение R_i и сжатие S_i . Если соединить полученные точки прямыми линиями, то придем к условию Д. Д. Ивлева [31], которое ото-

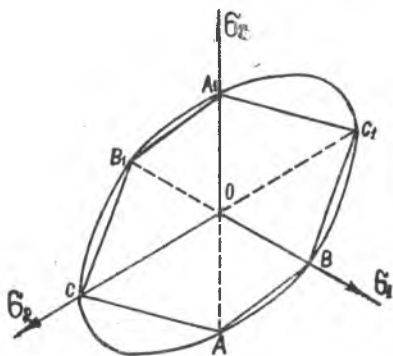


Рис. 1.1. Сечение поверхностей пластичности девиаторной плоскостью

бражается в пространстве главных напряжений в виде шестигранной призмы.

Проведем через те же точки замкнутую кривую линию. Используя обычные приемы аналитической геометрии, нетрудно показать, что поверхность, ограниченная этой линией, математически может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^2}{R_1 S_1} + \frac{\sigma_2^2}{R_2 S_2} + \frac{\sigma_3^2}{R_3 S_3} - \left(\frac{1}{R_1 S_1} + \frac{1}{R_2 S_2} - \frac{1}{R_3 S_3} \right) \sigma_1 \sigma_2 - \\ & - \left(\frac{1}{R_2 S_2} + \frac{1}{R_3 S_3} - \frac{1}{R_1 S_1} \right) \sigma_2 \sigma_3 - \left(\frac{1}{R_3 S_3} + \frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_2 S_2} \right) \sigma_1 \sigma_3 + \\ & + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{S_1} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{S_2} \right) \sigma_2 + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{S_3} \right) \sigma_3 = 1. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Анализ показал, что выражение (1.4) описывает равнонаклонный эллиптический цилиндр со смещенной относительно начала координат осью. Смещение, показанное в данном уравнении с помощью членов первых степеней, и характеризует особенность условия пластичности для материалов с различными пределами текучести на сжатие и растяжение.

Выражение (1.4) носит частный характер, так как главные напряжения совпадают с основными осями анизотропии.

В общем случае условие пластичности анизотропных сред может быть записано в виде

$$F = \frac{1}{2} (k_{ijem} \sigma_{ij} \sigma_{em} + k_{pq} \sigma_{pq}), \quad (1.5)$$

где $\{\sigma_{ij}\}$ — тензор напряжений второго ранга с симметрией $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$;

$\{k_{pq}\}$ — тензор смещения второго ранга, учитывающий разницу в пределах текучести сжатия и растяжения. Его симметрия аналогична указанной выше;

$\{k_{ijem}\}$ — материальный тензор четвертого ранга, у которого

$$\begin{aligned} k_{ijem} &= k_{jilem} \\ k_{ijem} &= k_{ijme} \\ k_{ijem} &= k_{meij} \end{aligned} \quad (1.6)$$

При наложении условия несжимаемости имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} k_{1111} + k_{1122} + k_{3311} &= 0; \\ k_{2222} + k_{1122} + k_{2.33} &= 0; \\ k_{3333} + k_{3311} + k_{2.33} &= 0; \\ k_{1112} + k_{2212} + k_{3312} &= 0; \\ k_{1123} + k_{2213} + k_{3333} &= 0; \\ k_{1131} + k_{2231} + k_{3331} &= 0; \end{aligned}$$

$$k_{11} + k_{22} + k_{33} = 0.$$

Представленный критерий пластичности может быть использован в самом общем случае анизотропии. Однако для металлов и сплавов в этом нет необходимости. Известно, что листы, ленты, трубы имеют определенную симметрию свойств. Вид симметрии зависит от среды и внешнего воздействия на нее [8]. Внешним воздействием может быть механическое поле напряжений, которое выражается тензором с тремя типами симметрии. Использование принципа суперпозиции Кюри показывает, что в металлических полуфабрикатах, полученных прокаткой, волочением или прессованием (определенный тип воздействия), не следует ожидать появления криволинейной анизотропии.

Проведенный теоретический анализ [8] и дальнейшая экспериментальная проверка с помощью рентгенографии и ультразвука показали следующую картину. Текстура проката имеет совокупность элементов симметрии, присущую спичечному коробку, а именно: три оси симметрии второго порядка, совпадающие с направлением проката и двумя перпендикулярными ему направлениями; три плоскости симметрии, одна из которых совпадает с плоскостью прокатки, а другие перпендикулярны к ней. Подобный вид симметрии характерен для ортотропных сред.

У полуфабрикатов, полученных прессованием и волочением, еще более простой вид симметрии из-за наличия кристаллографических направлений, расположенных вдоль оси сжатия или растяжения.

Следовательно, для использования теории пластичности анизотропных сред при обработке металлов давлением достаточно рассмотреть случай ортотропного тела. Причем для простоты уравнения теории можно записать относительно основных осей анизотропии. При необходимости тензорные преобразования позволяют определить все величины и для произвольных осей анизотропии.

С учетом изложенного условие пластичности (1.5) выразится следующим образом:

$$F = \frac{1}{2} [K_{1111} \sigma_{11}^2 + K_{2222} \sigma_{22}^2 + K_{3333} \sigma_{33}^2 + 2(K_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + K_{2133} \sigma_{22} \sigma_{33} + K_{3311} \sigma_{33} \sigma_{11}) + 4(K_{1212} \sigma_{12}^2 + K_{2323} \sigma_{23}^2 + K_{3131} \sigma_{31}^2) + K_{11} \sigma_{11} + K_{22} \sigma_{22} + K_{33} \sigma_{33} + 2(K_{21} \sigma_{21} + K_{32} \sigma_{32} + K_{31} \sigma_{31}), \quad (1.8)$$

где K_{ijem} — материальный тензор, записанный в главных осях анизотропии.

Для установления связи между напряжениями и деформациями воспользуемся ассоциированным законом течения, согласно которому условие пластичности и скорости или приращения

компонент деформации оказываются связанными между собой [9]

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.9)$$

где f — рассматриваемое условие пластичности;
 $d\lambda$ — неопределенный множитель Лагранжа, постоянный для данных значений деформаций.

В результате дифференцирования получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= d\lambda \left(K_{1111} \sigma_{11} + K_{1122} \sigma_{22} + K_{3311} \sigma_{33} + \frac{1}{2} K_{11} \right) \\ d\varepsilon_{22} &= d\lambda \left(K_{1122} \sigma_{11} + K_{2222} \sigma_{22} + K_{2333} \sigma_{33} + \frac{1}{2} K_{22} \right) \\ d\varepsilon_{33} &= d\lambda \left(K_{3311} \sigma_{11} + K_{2333} \sigma_{22} + K_{3333} \sigma_{33} + \frac{1}{2} K_{33} \right) \\ d\varepsilon_{12} &= 2d\lambda \left(K_{1212} \sigma_{12} + \frac{1}{2} K_{12} \right) \\ d\varepsilon_{23} &= 2d\lambda \left(K_{2323} \sigma_{23} + \frac{1}{2} K_{23} \right) \\ d\varepsilon_{31} &= 2d\lambda \left(K_{3131} \sigma_{31} + \frac{1}{2} K_{31} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

При дифференцировании учтено, что σ_{ij} и σ_{ji} физически различны, хотя и равны по величине.

Для практического использования теории необходимо составляющие материального тензора и тензора смещения выразить через технические константы. Здесь возможны различные пути, которые более подробно будут рассмотрены в дальнейшем. Воспользуемся одним из них.

При линейном напряженном состоянии, растяжении и сжатии в первом направлении (например, в направлении проката) из (1.8) получим следующую систему уравнений:

$$F = \frac{1}{2} (K_{1111} R_1^2 + K_{11} R_1)$$

$$F = \frac{1}{2} (K_{1111} S_1^2 - K_{11} S_1),$$

откуда

$$K_{11} = \frac{2F(S_1 - R_1)}{R_1 S_1}; \quad K_{1111} = \frac{2F}{R_1 S_1}, \quad (1.11)$$

где R_1 и S_1 соответственно пределы текучести на растяжение и сжатие.

Аналогично, рассматривая линейное напряженное состояние в двух других направлениях, находим:

$$K_{22} = \frac{2F(S_2 - R_2)}{R_2 S_2}; \quad K_{2222} = \frac{2F}{R_2 S_2}$$

$$K_{33} = \frac{2F(S_3 - R_3)}{R_3 S_3}; \quad K_{333} = \frac{2F}{R_3 S_3} \quad (1.12)$$

Попутно отметим, что из выражения $K_{11} + K_{22} + K_{33} = 0$ вытекает условие

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}. \quad (1.13)$$

Следовательно, если принять условие постоянства объема, то изотропное тело не может иметь различные пределы текучести на сжатие и растяжение.

Из соотношений (1.7) и (1.12) определяем коэффициенты K_{1122} , K_{2233} и K_{1133}

$$\begin{aligned} K_{1122} &= F \left(\frac{1}{R_3 S_3} - \frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_2 S_2} \right) \\ K_{2233} &= F \left(\frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_2 S_2} - \frac{1}{R_3 S_3} \right) \\ K_{1133} &= F \left(\frac{1}{R_2 S_2} - \frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_3 S_3} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Известно, что пределы текучести на сдвиг у анизотропных материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, зависят от направления (знака) касательных напряжений. Поэтому существует два различных предела в каждой плоскости сдвига.

Рассматривая, аналогично линейному напряженному состоянию, чистый сдвиг, получим

$$\begin{aligned} K_{21} &= F \frac{S_{12} - R_{12}}{S_{12} R_{12}}; \quad K_{1212} = \frac{F}{2R_{12} S_{12}} \\ K_{23} &= F \frac{S_{23} - R_{23}}{S_{23} R_{23}}; \quad K_{2323} = \frac{F}{2R_{23} S_{23}} \\ K_{31} &= F \frac{S_{31} - R_{31}}{S_{31} R_{31}}; \quad K_{3131} = \frac{F}{2R_{31} S_{31}}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где R_{ij} — предел текучести на сдвиг соответствует схеме (а) (рис. 1. 2), а S_{ij} — схеме (б).

Найденные значения коэффициентов K_{ijem} и K_{pq} позволяют записать условие пластичности в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{11}^2}{R_1 S_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{R_2 S_2} + \frac{\sigma_{33}^2}{R_3 S_3} - \left(\frac{1}{R_1 S_1} + \frac{1}{R_2 S_2} - \frac{1}{R_3 S_3} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} - \\ &- \left(\frac{1}{R_2 S_2} + \frac{1}{R_3 S_3} - \frac{1}{R_1 S_1} \right) \sigma_{22} \sigma_{33} - \left(\frac{1}{R_3 S_3} + \frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_2 S_2} \right) \sigma_{33} \sigma_{11} + \\ &+ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{S_1} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{S_2} \right) \sigma_{22} + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{S_3} \right) \sigma_{33} + \dots \end{aligned}$$

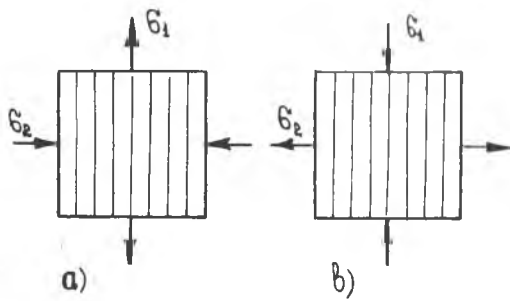


Рис. 1.2. Схемы нагружения при чистом сдвиге

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sigma_{12}^2}{R_{12} S_{12}} + \frac{\sigma_{23}^2}{R_{23} S_{23}} + \frac{\sigma_{31}^2}{R_{31} S_{31}} + \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{S_{12}} \right) \sigma_{12} + \\
 & + \left(\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{S_{23}} \right) \sigma_{23} + \left(\frac{1}{R_{31}} - \frac{1}{S_{31}} \right) \sigma_{31} = 1. \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

Как показывают эксперименты [3], разница между пределами текучести на сдвиг при схемах (а) и (б) невелика, и, по-видимому, их значения можно осреднить. Тогда для расчетов может быть использовано условие пластичности, представленное в такой форме:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1 S_1} + \frac{1}{R_2 S_2} - \frac{1}{R_3 S_3} \right) (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\frac{1}{R_2 S_2} + \frac{1}{R_3 S_3} - \frac{1}{R_1 S_1} \right) (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{R_3 S_3} + \frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_2 S_2} \right) (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{\tau_{xy}^2}{T_{12}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{T_{23}^2} + \frac{\tau_{zx}^2}{T_{31}^2} + \\
 & + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{S_1} \right) (\sigma_x - \sigma_z) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{S_2} \right) (\sigma_y - \sigma_z) = 1, \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

где T_{ij} — предел текучести на сдвиг в соответствующей плоскости.

Отметим, что если выражение (1.16) рассматривать относительно главных напряжений, то оно приобретает уже знакомый вид (1.4).

Параметры анизотропии в условии пластичности можно записать и через деформационные показатели. Но аналогии с теорией упругости анизотропных сред в качестве таких показателей примем коэффициенты (поперечной деформации $\mu_{ке} = -\frac{\epsilon_k}{\epsilon_e}$). Здесь первый индекс показывает направление поперечной деформации, а второй — направление действия силы. Напряженное состояние при этом линейное.

Не вдаваясь в подробности вывода, запишем условие пластичности для частного случая, когда главные напряжения совпадают с основными осями анизотропии:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = R_1 S_1 = & \frac{1}{2} \left[(\mu_{21}^p + \mu_{21}^c)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\mu_{21}^p + \mu_{21}^c) \frac{\mu_{32}^p + \mu_{32}^c}{\mu_{12}^p + \mu_{12}^c} \times \right. \\ & \times (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\mu_{31}^p + \mu_{31}^c)(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \left. \right] + (S_1 - R_1)(\sigma_1 - \sigma_3) + \\ & + \frac{\mu_{21}^p + \mu_{21}^c}{\mu_{12}^p + \mu_{12}^c} (S_2 - R_2)(\sigma_2 - \sigma_3). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Между коэффициентами поперечной деформации, определенными при растяжении $\mu_{ке}^p$ и сжатии $\mu_{ке}^c$, существует ряд соотношений

$$\begin{aligned} \mu_{21}^p + \mu_{31}^p = 1, \quad \mu_{21}^c + \mu_{31}^c = 1, \quad \mu_{12}^p + \mu_{32}^p = 1 \\ \mu_{12}^c + \mu_{32}^c = 1, \quad \mu_{13}^p + \mu_{23}^p = 1, \quad \mu_{13}^c + \mu_{23}^c = 1 \\ \mu_{21}^p + \mu_{21}^c = 1 + \frac{R_1 S_1}{R_2 S_2} - \frac{R_1 S_1}{R_3 S_3} \\ \frac{\mu_{21}^p + \mu_{21}^c}{\mu_{12}^p + \mu_{12}^c} = \frac{R_1 S_1}{R_2 S_2}, \quad \frac{\mu_{31}^p + \mu_{31}^c}{\mu_{13}^p + \mu_{13}^c} = \frac{R_1 S_1}{R_3 S_3} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{(\mu_{32}^p + \mu_{32}^c)(\mu_{13}^p + \mu_{13}^c)}{\mu_{23}^p + \mu_{23}^c} = \frac{(\mu_{12}^p + \mu_{12}^c)(\mu_{31}^p + \mu_{31}^c)}{\mu_{21}^p + \mu_{21}^c}$$

Явно выраженным различием пределов текучести на растяжение и сжатие обладают полуфабрикаты только некоторых металлов, в основном — алюминивно-магниевого [6] и магниевых сплавов [10]. В частности, пределы текучести на сжатие (катаные плиты) у этих сплавов приблизительно в 2 раза ниже, чем при растяжении. Подобное явление объясняют различием механизмов пластической деформации. Так, при растяжении наблюдается процесс скольжения, а при сжатии — двойникования.

Для большинства металлов и сплавов пределы текучести на растяжение и сжатие примерно равны. Причем, если наблюдается небольшое расхождение между ними, то для технологических расчетов обработки давлением это различие не имеет существенного значения.

Таким образом, наибольшую практическую ценность будет иметь теория пластичности ортотропных сред с одинаковыми пределами текучести на сжатие и растяжение, которая и рассмотрена ниже.

**§ I. 4. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД
С ОДИНАКОВЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ТЕКУЧЕСТИ НА СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ
(Общий случай)**

Если пренебречь различием пределов текучести на сжатие и растяжение, то в уравнении (1.5) исчезнет тензор смещения и оно примет вид

$$F = \frac{1}{2} k_{ijem} \sigma_{ij} \sigma_{em}. \quad (1.20)$$

Уравнения связи между напряжениями и деформациями можно представить в форме

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda k_{ijem} \sigma_{em}. \quad (1.21)$$

При простом нагружении, когда отношение компонент напряжений в процессе деформирования не изменяется, между приращениями деформации наблюдается линейная зависимость типа $d\varepsilon_1 = \text{const} d\varepsilon_2$. Она будет иметь место и при конечных деформациях, если компоненты k_{ijem} сохраняют свое значение. Тогда приращение деформаций можно заменить деформациями, а вместо $d\lambda$ использовать λ .

Учитывая изложенное, для ортотропных тел при записи относительно основных осей анизотропии находим

$$F = \frac{1}{2} [K_{1111} \sigma_{11}^2 + K_{2222} \sigma_{22}^2 + K_{3333} \sigma_{33}^2 + 2(K_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + K_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + K_{3311} \sigma_{33} \sigma_{11}) + 4(K_{1212} \sigma_{12}^2 + K_{2323} \sigma_{23}^2 + K_{3131} \sigma_{31}^2)] \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \lambda (K_{1111} \sigma_{11} + K_{1122} \sigma_{22} + K_{3311} \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \lambda (K_{1122} \sigma_{11} + K_{2222} \sigma_{22} + K_{2333} \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \lambda (K_{3311} \sigma_{11} + K_{2333} \sigma_{22} + K_{3333} \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{12} &= 2\lambda K_{1212} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} &= 2\lambda K_{2323} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= 2\lambda K_{3131} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Таким образом, получено условие пластичности, аналогичное условию Р. Мизеса (1.2а), однако представленное в тензорной форме.

Как уже отмечалось, для практического использования уравнений теории необходимо составляющие материального тензора выразить через технические константы. Покажем несколько возможных вариантов такого выражения.

1. Если принять F величиной безразмерной, то коэффициенты K_{ijem} получат размерность, обратную квадрату напряжения, а λ — напряжения.

Условие пластичности примет вид

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_{s_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{s_2}^2} - \frac{1}{\sigma_{s_3}^2} \right) (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{s_2}^2} + \frac{1}{\sigma_{s_3}^2} - \frac{1}{\sigma_{s_1}^2} \right) (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sigma_{s_3}^2} + \frac{1}{\sigma_{s_1}^2} - \frac{1}{\sigma_{s_2}^2} \right) (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \frac{\sigma_{12}^2}{T_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{T_{23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{T_{31}^2} = 1 \quad (1.20a)$$

2. Представим, что F имеет размерность квадрата напряжения. Тогда K_{ijem} суть величины безразмерные, а λ должна иметь размерность, обратную напряжению.

Этот путь и использован в теории пластичности изотропных сред. Оставляя такой подход для теории пластичности анизотропных тел, получим аналогичную запись основных соотношений (табл. 2).

Таблица 2

изотропное тело	анизотропное тело
условие пластичности	
$\sigma_i^2 = \delta_{ijem} \sigma_{ij} \sigma_{em}$	$\sigma_i^2 = K_{ijem} \sigma_{ij} \sigma_{em}$
Уравнения связи между напряжениями и деформациями	
$\varepsilon_{ij} = \lambda \delta_{ijem} \sigma_{em}$	$\varepsilon_{ij} = \lambda K_{ijem} \sigma_{em}$
интенсивность деформаций	
$\varepsilon_i^2 = B_{ijem} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{em}$	$\varepsilon_i^2 = A_{ijem} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{em}$

Здесь $\{\delta_{ijem}\}$ и $\{B_{ijem}\}$ — материальные тензоры изотропной среды, у которых $\delta_{iiii} = 1$, $\delta_{ijij} = -\frac{1}{2}$, $\delta_{ijji} = \frac{3}{4}$, $B_{iiii} = \frac{4}{9}$, $B_{iile} = -\frac{2}{9}$, $B_{ijij} = \frac{4}{3}$, а остальные компоненты равны нулю.

Фактически получены общие выражения теории пластичности как изотропных, так и анизотропных тел вследствие того, что тензоры $\{\delta_{ijem}\}$ и $\{B_{ijem}\}$ являются частными видами аналогичных тензоров $\{K_{ijem}\}$, $\{A_{ijem}\}$.

Для установления технических констант анизотропии воспользуемся уравнениями связи между напряжениями и деформациями, из которых определим так называемые «деформационные» показатели. С этой целью последовательно рассмотрим линейное растяжение во всех главных направлениях симметрии материала. При этом получим

в направлении 1

$$\varepsilon_{11} = \lambda K_{1111} \sigma_{11}; \quad \varepsilon_{22} = \lambda K_{1122} \sigma_{11}; \quad \varepsilon_{33} = \lambda K_{3311} \sigma_{11}$$

в направлении 2

$$\varepsilon_{11} = \lambda K_{1122} \sigma_{22}; \quad \varepsilon_{22} = \lambda K_{2222} \sigma_{22}; \quad \varepsilon_{33} = \lambda K_{2233} \sigma_{22}$$

в направлении 3

$$\varepsilon_{11} = \lambda K_{3311} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{22} = \lambda K_{2233} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{33} = \lambda K_{3333} \sigma_{33}.$$

Данные уравнения позволяют использовать различные показатели. Так, в качестве констант анизотропии можно применить коэффициенты поперечной деформации (см. § 1, 3). Их всего шесть:

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= -\frac{K_{1122}}{K_{1111}}; & \mu_{12} &= -\frac{K_{1122}}{K_{2222}}; & \mu_{13} &= -\frac{K_{3311}}{K_{3333}} \\ \mu_{31} &= -\frac{K_{3311}}{K_{1111}}; & \mu_{32} &= -\frac{K_{2233}}{K_{2222}}; & \mu_{23} &= -\frac{K_{2233}}{K_{3333}}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

При этом независимыми из них являются только два, так как

$$\begin{aligned} \mu_{12} + \mu_{32} &= 1, & \mu_{21} + \mu_{31} &= 1, & \mu_{13} + \mu_{23} &= 1, \\ \mu_{13} \mu_{21} \mu_{32} &= \mu_{12} \mu_{23} \mu_{31}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

В качестве технических констант часто принимают коэффициенты, учитывающие отношение двух поперечных деформаций при действии вдоль образца растягивающей силы

$$R_e = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_s} \quad \text{или} \quad r_e = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b},$$

где ε_b и ε_s — соответственно деформации по ширине и толщине образца.

Например:

$$R_1 = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \frac{K_{2211}}{K_{3311}} = \frac{1}{r_1}. \quad (1.26)$$

Естественно, что между коэффициентами μ_{ke} и R_e или r_e существует взаимосвязь. Так,

$$R_1 = \frac{\mu_{21}}{\mu_{31}} = \frac{1}{\mu_{31}} - 1; \quad r_1 = \frac{1}{\mu_{21}} - 1. \quad (1.27)$$

Показатели анизотропии обычно определяют при линейном напряженном состоянии. Однако для этого можно использовать и другие виды механических испытаний, в частности, испытания на чистый сдвиг по напряжениям.

Если принять $\sigma_{11} = 0$; $\sigma_{22} = -\sigma_{33}$, то

$$\gamma_{12} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = -\frac{K_{3311} - K_{1122}}{K_{2222} - K_{2233}}; \quad \gamma_{12} = \frac{2\mu_{21} - 1}{2\mu_{12}} (2 - \mu_{12}). \quad (1.28)$$

При изотропном материале этот показатель равен нулю.

Наконец, коэффициенты анизотропии листового материала определяют и при гидростатическом выпучивании. Так, если $\sigma_3 = 0$; $\sigma_1 = \sigma_2$, то

$$C_{12} = \frac{K_{1111} + K_{1122}}{K_{2222} + K_{1122}} = \frac{1 - \frac{1}{\mu_{21}}}{1 - \frac{1}{\mu_{12}}} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (1.29)$$

Таким образом, константы, характеризующие анизотропию металла, могут быть выражены через различные показатели, которые являются равноценными и переходят друг в друга при условии постоянства объема.

3. Если предположить, что F имеет размерность напряжения, то коэффициенты $K_{\text{лем}}$ получают размерность, обратную напряжению, а λ станет величиной безразмерной.

В данной работе для определения компонент материального тензора принят путь, когда F имеет размерность квадрата напряжения, а константы анизотропии выражаются через коэффициенты поперечной деформации $\mu_{\text{ре}}$.

Запишем составляющие материального тензора через коэффициенты поперечной деформации, для чего воспользуемся формулами (1.24) и (1.25):

$$\begin{aligned} K'_{2233} &= \frac{1 - \mu_{12}}{\mu_{12}} K_{1122}; & K'_{3311} &= \frac{1 - \mu_{21}}{\mu_{21}} K_{1122} \\ K'_{1111} &= -\frac{1}{\mu_{21}} K_{1122}; & K'_{2222} &= -\frac{1}{\mu_{12}} K_{1122} \\ K'_{3333} &= -\frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12}\mu_{21}} K_{1122}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Попутно отметим, что как формулы (1.30), так и выражения для показателей $\mu_{\text{ре}}$ справедливы не только в главных, но и в произвольных осях анизотропии.

Для определения компонент K_{1212} , K_{2323} и K_{3131} обратимся к формулам преобразования.

При повороте относительно оси 3 имеем

$$\begin{aligned} K'_{1111} &= K_{1111} \cos^4 \varphi + K_{2222} \sin^4 \varphi + 2(K_{1122} + 2K_{1212}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ K'_{2222} &= K_{1111} \sin^4 \varphi + K_{2222} \cos^4 \varphi + 2(K_{1122} + 2K_{1212}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ K'_{1122} &= K_{1122} + [K_{1111} + K_{2222} - 2(K_{1122} + 2K_{1212})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Если угол поворота φ принять равным 45° , то

$$\begin{aligned} K'_{1111} &= K'_{2222} = \frac{1}{4} (K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122}) + K_{1212} \\ K'_{1122} &= \frac{1}{4} (K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122}) - K_{1212} \end{aligned}$$

или

$$\frac{K_{1122}^1}{K_{1111}^1} = \frac{K_{1112}'}{K_{2222}'} = \frac{K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122} - 4K_{1212}}{K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122} + 4K_{1212}}$$

Отсюда

$$-\mu_{12}^{45} = -\mu_{21}^{45} = -\mu_1 = \frac{2 - \frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{21}} - 4 \frac{K_{1212}}{K_{1122}}}{2 - \frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{21}} + 4 \frac{K_{1212}}{K_{1122}}}$$

и

$$K_{1212} = -K_{1122} \frac{1}{4} \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12}\mu_{21}} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}. \quad (1.31)$$

Преобразование коэффициентов последовательно вокруг осей 2 и 1 приводит к следующим выражениям:

$$K_{2323} = -K_{2233} \frac{1}{4} \frac{\mu_{23} + \mu_{32} - 2\mu_{23}\mu_{32}}{\mu_{23}\mu_{32}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2}$$

$$K_{3131} = -K_{3311} \frac{1}{4} \frac{\mu_{13} + \mu_{31} - 2\mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{13}\mu_{31}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3}$$

С помощью (1.25) они приводятся к виду:

$$K_{2323} = -\frac{1}{4} K_{1122} \frac{1}{\mu_{21}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \quad (1.32)$$

$$K_{3131} = -\frac{1}{4} K_{1122} \frac{1}{\mu_{12}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3},$$

где μ_1 — коэффициент поперечной деформации под углом 45° к осям 1 и 2;

μ_2 — коэффициент поперечной деформации под углом 45° к осям 2 и 3;

μ_3 — коэффициент поперечной деформации под углом 45° к осям 3 и 1.

Таким образом, составляющие материального тензора записаны через единый коэффициент K_{1122} .

Для того, чтобы все соотношения теории были инвариантными, необходимо этот коэффициент выразить через один из инвариантов тензора $\{k_{ijem}\}$. Например

$$\begin{aligned} I_0 &= k_{ijem} \delta_{ij} \delta_{em} = k_{1111} + k_{2222} + k_{3333} + 2(k_{1122} + k_{2233} + k_{3311}) = 0, \\ I &= k_{ijem} \delta_{ijem} = k_{1111} + k_{2222} + k_{3333} - (k_{1122} + k_{2233} + k_{3311}) + \\ &\quad + 3(k_{1212} + k_{2323} + k_{3131}) = K_{1111} + K_{2222} + K_{3333} - \\ &\quad - (K_{1122} + K_{2233} + K_{3311}) + 3(K_{1212} + K_{3131} + K_{2323}) \quad (1.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3}(I - I_0) = k_{1212} + k_{2323} + k_{3131} - k_{1122} - k_{2233} - k_{3311} = \\ &= K_{1212} + K_{2323} + K_{3131} - K_{1122} - K_{2233} - K_{3311}, \end{aligned}$$

где

$\{\delta_{ij}\}$ — единичный тензор; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$,

а $\{\delta_{ijem}\}$ — материальный тензор изотропного тела.

Следует отметить, что составляющие последнего тензора не изменяются при повороте осей, т. е. он играет роль шарового тензора.

Используя выражение инварианта I_1 , найдем K_{1122} :

$$K_{1122} = -4I_1 \frac{\mu_{12} \mu_{21}}{\varphi_{12}};$$

$$\varphi_{12} = 4(\mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{12} \mu_{21}) + (\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} +$$

$$+ \mu_{12} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} + \mu_{21} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3}.$$

Для корректности теории необходимо и достаточно принять любой из инвариантов $\{K_{ijem}\}$, отличный от нуля, равным соответствующему инварианту материального тензора изотропного тела. В частности, $I_1 = \frac{15}{4}$.

Итак, найдены все составляющие материального тензора в главных осях анизотропии, которые включают в себя пять технических констант μ_{12} , μ_{21} , μ_1 , μ_2 и μ_3 . В произвольных осях эти составляющие определяются формулами преобразования тензоров четвертого ранга.

За интенсивность напряжений примем следующий инвариант:

$$\sigma_i = \sqrt{2F}. \quad (1.34)$$

В развернутом виде он выглядит так:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{15}{\varphi_{12}}} \sqrt{\mu_{12} \sigma_{11}^2 + \mu_{21} \sigma_{22}^2 + [\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})] \sigma_{33}^2 -$$

$$- 2[\mu_{12} \mu_{21} \sigma_{11} \sigma_{12} + \mu_{21}(1 - \mu_{12}) \sigma_{22} \sigma_{33} + \mu_{12}(1 - \mu_{21}) \sigma_{33} \sigma_{11}] +$$

$$+ [\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2 + \mu_{12} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \sigma_{23}^2 + \mu_{21} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31}^2}$$

или при использовании зависимостей (1.7)

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{15}{\varphi_{12}}} \mu_{12} \mu_{21} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \times$$

$$\times (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\right] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2 +$$

$$+ \frac{1}{\mu_{21}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \sigma_{23}^2 + \frac{1}{\mu_{12}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31}^2}. \quad (1.34a)$$

Для определения интенсивности деформаций ε_i и множителя

$\lambda = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$ приведем уравнения связи к виду:

$$\varepsilon_{11} = \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} [\mu_{12} \mu_{21} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \mu_{12} (1 - \mu_{21}) (\sigma_{11} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{22} = \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} [\mu_{12} \mu_{21} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \mu_{21} (1 - \mu_{12}) (\sigma_{22} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{33} = \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} [\mu_{12}(1-\mu_{21})(\sigma_{33}-\sigma_{11}) + \mu_{21}(1-\mu_{12})(\sigma_{33}-\sigma_{22})]$$

$$\varepsilon_{12} = \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} \cdot \frac{1}{2} (\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{23} = \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} \cdot \frac{1}{2} \mu_{12} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{31} = \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} \cdot \frac{1}{2} \mu_{21} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31}.$$

Из этой системы и дополнительного соотношения $(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) = 0$ найдем разности нормальных напряжений, выраженные через деформации. После подстановки их в условие пластичности получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15}} \sqrt{\frac{1}{(1-\mu_{12}\mu_{21})^2} \left\{ \mu_{12}\mu_{21} \left[\varepsilon_{11} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) - \varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \right]^2 + \right.} \\ & \left. + \mu_{21}(1-\mu_{12}) \left[\varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) - \varepsilon_{33} \right]^2 + \mu_{12}(1-\mu_{21}) \left[\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \right]^2 \right\} +} \\ & \left. + \frac{4(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[\mu_{12}(1-\mu_{21}) + \mu_{21}(1-\mu_{12})]} \varepsilon_{12}^2 + \frac{4(1-\mu_2)}{\mu_{12}(1+\mu_2)} \varepsilon_{23}^2 + \frac{4(1-\mu_3)}{\mu_{21}(1+\mu_3)} \varepsilon_{31}^2 \right)^2 \end{aligned}$$

Если воспользоваться условием несжимаемости, то выражение интенсивности деформаций можно упростить

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15}} \sqrt{\frac{1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}} \right) +} \\ & \left. + \frac{4(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[\mu_{12}(1-\mu_{21}) + \mu_{21}(1-\mu_{12})]} \varepsilon_{12}^2 + \frac{4(1-\mu_2)}{\mu_{12}(1+\mu_2)} \varepsilon_{23}^2 + \frac{4(1-\mu_3)}{\mu_{21}(1+\mu_3)} \varepsilon_{31}^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Интенсивность деформаций в произвольных осях анизотропии определяется формулой: $\varepsilon_i^2 = A_{ijem} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{em}$.

Как известно, для применения в расчетах обработки металлов давлением основных уравнений теории пластичности необходимо знать функциональную зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ конкретного материала. Обычно с этой целью проводят испытания в условиях линейной схемы напряжений. При этом ГОСТом рекомендуется вырезать образцы вдоль основных осей симметрии полуфабриката.

С этих позиций и рассмотрим уравнения (1.34а) и (1.35). При растяжении материала вдоль оси 1 (например, проката), когда все напряжения, исключая σ_{11} , равны нулю, получим

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{15\mu_{12}}{\varphi_{12}}} \sigma_{11} \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15\mu_{12}}} \varepsilon_{11}.$$

Когда линейное напряженное состояние создается в направлении 2, то

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{15\mu_{21}}{\varphi_{12}}} \sigma_{22}, \quad \text{а} \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15\mu_{21}}} \varepsilon_{22}.$$

И, наконец, при испытаниях вдоль оси 3 имеем

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{15\mu_{31} \mu_{12}}{\varphi_{12} \mu_{13}}} \sigma_{33}, \quad \text{а} \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{\varphi_{12} \mu_{13}}{15\mu_{31} \mu_{12}}} \varepsilon_{33}.$$

Как видно из полученных выражений, интенсивности напряжений и деформаций не совпадают с величинами напряжений и деформаций линейного растяжения. Это не дает возможности прямого использования кривых упрочнения, полученных при испытаниях в направлении главных осей анизотропии.

В связи с этим введем понятие интенсивностей главных направлений. Обозначим отношение $\frac{\sigma_i}{\sqrt{\frac{15\mu_{12}}{\varphi_{12}}}}$ через σ_{i1} , а $\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15\mu_{12}}}}$ через ε_{i1} .

Тогда будем иметь

$$\sigma_{i1} = \sqrt{\mu_{21}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \frac{1}{\mu_{21}} - 1)(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\right] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2 + \frac{1}{\mu_{21}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \sigma_{23}^2 + \frac{1}{\mu_{12}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31}^2} \quad (1.36)$$

$$\varepsilon_{i1} = \sqrt{\mu_{12}} \sqrt{\frac{1}{1 - \nu_{12} \mu_{21}} \left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}} \right) +$$

$$+ \frac{4(1 - \mu_1)}{(1 + \mu_1) [\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})]} \varepsilon_{12}^2 + \frac{4(1 - \mu_2)}{\mu_{12}(1 + \mu_2)} \varepsilon_{23}^2 + \frac{4(1 - \mu_3)}{\mu_{21}(1 + \mu_3)} \varepsilon_{31}^2} \quad (1.37)$$

Аналогично можно получить

$$\sigma_{i2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\frac{15\mu_{21}}{\varphi_{12}}}}; \quad \varepsilon_{i2} = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15\mu_{21}}}} \quad (1.38)$$

и

$$\sigma_{i3} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\frac{15\mu_{31} \mu_{12}}{\varphi_{12} \mu_{13}}}}; \quad \varepsilon_{i3} = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\frac{\varphi_{12} \mu_{13}}{15\mu_{31} \mu_{12}}}} \quad (1.39)$$

Введенные интенсивности направлений будут инвариантными, так как они от σ_i и ε_i отличаются лишь постоянным множителем.

Между ними существуют зависимости

$$\sigma_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \sigma_{i1}; \quad \sigma_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}} \sigma_{i1}; \quad \varepsilon_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \varepsilon_{i1}; \quad \varepsilon_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \varepsilon_{i1}. \quad (1.40)$$

Полученные соотношения позволяют выразить уравнения связи между напряжениями и деформациями в такой форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} [(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - \mu_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} [(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - \mu_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} [(\sigma_{33} - \sigma_{22}) - \mu_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Если ввести обозначения

$$E'_1 = \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}}; \quad E'_2 = \frac{\sigma_{i2}}{\varepsilon_{i2}} \quad \text{и} \quad E'_3 = \frac{\sigma_{i3}}{\varepsilon_{i3}},$$

то физические уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E'_1} \sigma_{11} - \frac{\mu_{12}}{E'_2} \sigma_{22} - \frac{\mu_{13}}{E'_3} \sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E'_2} \sigma_{22} - \frac{\mu_{23}}{E'_3} \sigma_{33} - \frac{\mu_{21}}{E'_1} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E'_3} \sigma_{33} - \frac{\mu_{31}}{E'_1} \sigma_{11} - \frac{\mu_{32}}{E'_2} \sigma_{22} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2E'_3} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2E'_1} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2E'_2} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

При этом модули пластичности E'_i связаны между собой следующим образом:

$$E'_1 \mu_{12} = E'_2 \mu_{21}; \quad E'_1 \mu_{13} = E'_3 \mu_{31}.$$

Для сравнения приведем запись обобщенного закона упругости для ортотропного тела [12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_z & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_z & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_3} \sigma_z - \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_y & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{31}} \tau_{zx}, \end{aligned}$$

где E_i — модули Юнга по главным направлениям анизотропии;
 ν_{ij} — коэффициенты Пуассона.

Отсюда видно, что в основу теории упругости и деформационной теории пластичности ортотропных сред можно положить зависимость аналогичной формы записи.

Далее, как показал А. А. Ильюшин [13], интенсивность напряжений, возникающая в теле при любой деформации (упругой или пластической), для каждого материала есть определенная непрерывная функция интенсивности деформаций $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. В упругой области она имеет вид $\sigma_i = E \varepsilon_i$, а в пластической $\sigma_i = E' \varepsilon_i$. Это касалось изотропных сред.

Ортотропное тело имеет три главных направления, в каждом из которых существуют свои модули упругости и пластичности. В связи с этим и появляются три вида связей $\sigma_{i1} = \Phi_1(\varepsilon_{i1})$, $\sigma_{i2} = \Phi_2(\varepsilon_{i2})$, $\sigma_{i3} = \Phi_3(\varepsilon_{i3})$ действительных как в упругой, так и в пластической области.

Запись уравнений теории пластичности с помощью трех модулей является удобной при решении конкретных задач, особенно если это решение учитывает и упругие деформации.

§ 1.5. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

(напряжение σ_{33} совпадает с главной осью анизотропии)

При анализе большинства операций листовой штамповки можно принять допущение о том, что напряжение, направленное по толщине материала, будет всегда оставаться перпендикулярным плоскости полуфабриката или иметь отклонение, которое для технологических расчетов можно пренебречь.

Наложение такого условия приведет к тому, что $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$ и условие пластичности в основных осях симметрии запишется следующим образом:

$$F = \frac{1}{2} [K_{1111} \sigma_{11}^2 + K_{2222} \sigma_{22}^2 + K_{3333} \sigma_{33}^2 + 2(K_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} +$$

$$+ K_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + K_{3311} \sigma_{33} \sigma_{11}) + 4K_{1212} \sigma_{12}^2]. \quad (1.43)$$

Можно воспользоваться уже выведенными уравнениями, приняв в них $\sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ и $\epsilon_{23} = \epsilon_{31} = 0$.

Однако применение подобных формул при анализе операций листовой штамповки приводит к определенным затруднениям, так как коэффициенты μ_2 и μ_3 определить не удастся.

В связи с этим можно предложить другой путь. Он заключается в использовании при выводе основных уравнений теории инвариантов, полученных путем преобразования компонент материального тензора при повороте вокруг оси 3.

Укажем на некоторые из них:

$$i_0 = K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122} = K_{3333} = -(K_{2233} + K_{3311})$$

$$i_1 = K_{1212} - K_{1122}$$

$$i_2 = K_{2323} + K_{3131}$$

$$i_3 = i_0 + 2i_1 = K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1212}.$$

Инварианты i_0 и i_1 можно определить тем же способом, что и I_0 и I_1 , проводя суммирование только по индексам 1 и 2.

Если воспользоваться значениями i_1 , то все предыдущие формулы сохраняют свое значение, только в них, помимо указанных выше условий, вместо φ_{12} будет входить значение

$$\varphi_1 = 4\mu_{12} \mu_{21} + (\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}.$$

Так, например, $K_{1122} = -4i_1 \frac{\mu_{21}^2 \mu_{12}}{\varphi_1}$. При изотропном материале

$$i_1 = \frac{5}{4}.$$

Весь вывод основных соотношений теории сделан в предположении существования тензора анизотропии (материального тензора). Это положение необходимо подтвердить экспериментально, путем проверки существования инвариантов, не использованных в записях выведенных уравнений.

С этой целью проведем экспериментальную проверку инварианта i_0

$$i_0 = 4i_1 \frac{\mu'_{12} + \mu'_{21} - 2\mu'_{12} \mu'_{21}}{\varphi_2} = 4i_1 \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}}{\varphi_1},$$

где

$$\varphi_2 = 4\mu'_{12} \mu'_{21} + (\mu'_{12} + \mu'_{21} - 2\mu'_{12} \mu'_{21}) \frac{\mu''_{12} + \mu''_{21} + 2\mu''_{12} \mu''_{21}}{\mu''_{12} + \mu''_{21} - 2\mu''_{12} \mu''_{21}},$$

μ'_{21} и μ'_{12} — коэффициенты поперечной деформации в произвольных осях;

μ''_{21} и μ''_{12} — коэффициенты поперечной деформации, определяемые под углом 45° к произвольным осям.

Данные таблицы 3, составленной по нашим работам и исследованиям Тульского политехнического института [11], подтверждают существование инварианта i_0 , что позволяет сделать вывод о правомерности записи основных уравнений теории в тензорной форме. Некоторое расхождение в значениях i_0 , вычисленных в главных и произвольных осях, объясняется погрешностью, сделанной при определении μ .

Таблица 3

Марка сплава	μ_{21} (μ_0)	μ_{15°	μ_{30°	μ_{45°	μ_{60°	μ_{75°	μ_{12} (μ_{90°)	φ_1	φ_2	i_0 в главн. осях	i_0 в произв. осях
Д16АМ	0,36	0,41	0,45	0,46	0,44	0,38	0,34	1,71	1,93	1,31	1,30
ВТ1—2	0,73	0,64	0,70	0,78	0,82	0,77	0,73	5,36	4,43	0,41	0,41
1Х18Н10Т	0,47	0,45	0,50	0,52	0,51	0,48	0,47	2,39	2,40	0,05	0,04
	μ_{21}	$\mu_{22,5^\circ}$	μ_{45°	$\mu_{67,5^\circ}$	μ_{12}	φ_1	φ_2	i_0 в главн. осях	i_0 в произв. осях		
ОТ 4—1	0,72	0,75	0,84	0,87	0,80	6,56	5,54	0,282	0,290		
МА—8	0,58	0,60	0,62	0,65	0,66	3,54	3,55	0,664	0,662		
Л-62 [11]	0,46	0,48	0,51	0,49	0,45	2,37	2,38	1,05	1,05		
08КП [11]	0,57	0,51	0,41	0,59	0,68	0,68	2,9	0,86	0,86		

Инвариант i_0 может быть использован при выводе различных соотношений теории в том случае, когда напряжение σ_{33} совпадает с направлением толщины материала. Примем его, как и при изотропном материале, равным единице.

Тогда

$$\begin{aligned}
 K_{1111} &= \frac{\mu_{12}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}; & K_{2222} &= \frac{\mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}} \\
 K_{3333} &= 1; & K_{1122} &= -\frac{\mu_{21}\mu_{12}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}} \\
 K_{3311} &= -\frac{\mu_1(1 - \mu_{21})}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}; & K_{1212} &= \frac{1}{4} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \\
 K_{2233} &= -\frac{\mu_{21}(1 - \mu_{12})}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}.
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Таким образом, все составляющие материального тензора выражены через коэффициенты поперечной деформации.

Попутно отметим, что если раньше инвариант i_1 был постоян-

ным и равным $\frac{5}{4}$, то теперь он будет менять свое значение в зависимости от марки сплава, т. е.

$$t_1 = K_{1212} - K_{1122} = \frac{1}{4} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} + \frac{\mu_{12} \mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}}.$$

Чисто линейное напряженное состояние простым стандартным испытанием на растяжение можно создать только в образцах, вырезанных в направлениях главных осей анизотропии. В связи с этим встречаются затруднения при нахождении μ_1 . Поэтому выразим коэффициент K_{1212} через более доступную величину $m = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}$. Ее можно получить при испытаниях образцов, ось которых составляет угол 45° с направлениями 1 и 2, и когда

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} = 0; \quad \epsilon_{12} = 0.$$

Тогда уравнения связи между напряжениями и деформациями примут вид

$$\epsilon_{11}^{45} = \lambda (K_{1111}^{45} \sigma_{11} + 2K_{1112}^{45} \sigma_{12})$$

$$\epsilon_{22}^{45} = \lambda (K_{1122}^{45} \sigma_{11} + 2K_{2212}^{45} \sigma_{12})$$

$$\epsilon_{12}^{45} = \lambda (K_{1112}^{45} \sigma_{11} + 2K_{1212}^{45} \sigma_{12}) = 0,$$

откуда

$$m = \frac{-K_{1122}^{45} K_{1212}^{45} + (K_{1112}^{45})^2}{K_{1111}^{45} K_{1212}^{45} - (K_{1112}^{45})^2}.$$

Подставляя сюда значение коэффициентов из формул преобразования, найдем:

$$m = \frac{(4K_{1212} - 1)(K_{1111} + K_{2222} - 2K_{1122}) + (K_{2222} - K_{1111})^2}{(4K_{1212} - 1)(K_{1111} + K_{2222} - 2K_{1122}) - (K_{2222} - K_{1111})^2}.$$

Обозначая

$$\frac{(K_{2222} - K_{1111})^2}{K_{1111} + K_{2222} - 2K_{1122}} = \frac{(\mu_{21} - \mu_{12})^2}{(\mu_{21} + \mu_{12})^2 - 4\mu_{21}^2 \mu_{12}^2} = \nu,$$

получим:

$$K_{1212} = (1 - \nu) \frac{1}{4} \frac{1 + m}{1 - m}. \quad (1.45)$$

Определим величину расхождения между коэффициентами μ_1 и m . С этой целью воспользуемся записью K_{1212} через тот и другой коэффициент.

В результате незначительных преобразований найдем

$$\mu_1 = \frac{2m - \nu(1 + m)}{2 - \nu(1 + m)}.$$

Экспериментальные данные показывают, что ν близко к нулю ($0 \div 0,05$), и поэтому для технических расчетов можно принять $\mu_1 \cong m$ и тогда

$$K_{1212} = \frac{1}{4} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \approx \frac{1}{4} \frac{1 + m}{1 - m}. \quad (1.46)$$

Теперь остается выразить через полученные константы основные уравнения теории. Они приобретают следующий вид:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\mu_{12} \mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\right] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2} \quad (1.47)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}}\right) \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} + 4 \frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1} \varepsilon_{12}^2} \quad (1.48)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} [(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - \mu_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\mu_{23}}{\mu_{32}} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} [(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - \mu_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} [(\sigma_{33} - \sigma_{22}) - \mu_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{22})]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}. \quad (1.49)$$

Если перейти к интенсивностям направлений, то здесь действительны формулы (1.36—1.42) с учетом того, что $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ и $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$.

Во многих случаях теоретический анализ процессов листовой штамповки можно проводить с учетом лишь главных напряжений, если их направления считать известными. Причем, когда металл анизотропен, желательно главные напряжения совместить с основными осями симметрии материала. В этом случае в уравнениях теории пластичности исчезнут касательные напряжения и соответствующие им сдвиги.

В заключение отметим, что и при ортогональной анизотропии уравнения связи между напряжениями и деформациями, подобно изотропным телам, могут быть записаны через разности главных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2 \right] \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right] \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left[\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1 \right], \end{aligned} \quad (1.50)$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \varepsilon_2}{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \varepsilon_2 - \varepsilon_3} \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \varepsilon_1} \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \varepsilon_1}.\end{aligned}\tag{1.51}$$

§ 1. 6. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Для ряда полуфабрикатов (прутки, трубы и т. д.), в силу особенностей их изготовления, характерна трансверсальная изотропия. Она выражена в том, что механические свойства в поперечном направлении примерно одинаковы, но отличны от свойств продольного направления.

Практически этот вид анизотропии может быть принят и для листов, если разница свойств в их плоскости невелика. И даже в том случае, когда металл ортотропен, для определения отдельных параметров холодной штамповки применяют усреднение показателей анизотропии в одной из плоскостей, принимая условно расчетную схему трансверсальной изотропии.

Все это говорит о том, что данный вид симметрии деформируемой среды встречается довольно часто и представляет определенный теоретический и практический интерес в обработке металлов давлением.

В общем случае в зависимости от ориентировки могут наблюдаться три варианта расположения плоскостей изотропии. Однако достаточно проанализировать лишь один из них, так как меняя индексацию осей, получим аналогичные результаты и при других вариантах.

Рассмотрим, как изменяются основные соотношения теории пластичности ортотропной среды, когда плоскость, в которой все свойства одинаковы, проходит через направления 1 и 2.

Показатели анизотропии окажутся связанными между собой следующим образом:

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad \mu_{31} = \mu_{32} = 1 - \mu_{12}, \quad \nu_{23} = \mu_{13} = 0,5.$$

Очевидно, что для трансверсально изотропных сред независимым остается лишь коэффициент поперечной деформации. Указанная связь между показателями анизотропии упрощает за-

пись основных уравнений теории. Так, например, если рассматривать условие пластичности в главных направлениях, то оно примет вид

$$\sigma_{i3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1-\mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (1.52)$$

$$\sigma_{i1} = \sigma_{i2} = \sqrt{1-\mu_{12}} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1-\mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Аналогично, интенсивности деформаций приобретают следующую форму:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3} &= \sqrt{\frac{2}{1+\mu_{12}}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\mu_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}, \\ \varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} &= \frac{1}{\sqrt{1-\mu_{12}^2}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\mu_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} \end{aligned} \quad (1.53)$$

И, наконец, физические уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} [(\sigma_1 - \sigma_3) - \mu_{12}(\sigma_2 - \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} [(\sigma_2 - \sigma_3) - \mu_{12}(\sigma_1 - \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Если принять $\mu_{ке} = 0,5$, все уравнения теории приобретают обычный вид, свойственный изотропному телу.

§ 1. 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ТЕОРИИ

Любая теория характерна определенным комплексом принятых положений и допущений, которые желательно экспериментально подтвердить, хотя бы для частных случаев.

Нам необходимо проверить

принятый характер изменения показателей анизотропии в процессе деформации;

независимость функциональной связи интенсивностей напряжений и деформаций от характера напряженного состояния, когда металл является анизотропным;

возможность взаимного перехода кривых упрочнения в различных направлениях при использовании соответствующих коэффициентов анизотропии;

принятый характер изменения поверхности пластичности при различной величине деформации.

Отметим, что два последних положения в конечном итоге связаны с вопросом подтверждения инвариантности функциональной связи $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$.

Для проверки изложенного использованы как наши эксперименты, так и данные, опубликованные в научно-технической литературе.

Изменение характера показателей анизотропии в процессе деформирования

В качестве констант анизотропии в теории пластичности были использованы либо пределы текучести разных направлений, либо «деформационные» показатели и, в частности, коэффициенты поперечной деформации.

Об изменении пределов текучести определенных направлений можно судить по характеру кривых упрочнения.

Аналогично основным механическим характеристикам $\sigma_{0,2}$, σ_b , δ_p , Ψ и т. д., коэффициенты $\mu_{ке}$ наиболее удобно определять по результатам одноосного растяжения. При этом дело сводится не только к отысканию их числовых значений, но и к выявлению характера изменения этих показателей в процессе деформирования, т. е. к нахождению $\mu_{ке} = -\frac{d\epsilon_k}{d\epsilon_e}$. Другими словами, $\mu_{ке}$ необходимо рассматривать как первую производную найденной экспериментальной функции связи поперечной и продольной деформаций. И только в случае независимости коэффициента анизотропии от деформации его можно определять по отношению конечных величин, т. е. $\mu_{ке} = -\frac{\epsilon_k}{\epsilon_e}$.

Для экспериментальных исследований были выбраны сплавы Д16АМ, АД1, МА-8, 1Х18Н10Т, ВТ1-2, ОТ4-1, ВТ3. Все испытания проводились на универсальной машине ЦДМУ-30 (ГДР) в диапазоне скоростей, соответствующем статическому нагружению.

Результаты экспериментов представлены на рис. 1.3. Как видно из графика, величина показателей анизотропии в пределах исследованных значений остается постоянной, о чем свидетельствует линейный характер зависимости $\epsilon_k = f(\epsilon_e)$. Диапазон использованных деформаций в основном соответствовал формоизменению при листовой штамповке.

Было также установлено, что коэффициенты поперечной деформации исследованных сплавов отличаются от 0,5 (изотропное тело) и лежат в пределах $0,35 \div 0,8$ (рис. 1.4).

О характере функциональной связи $\sigma_1 = \Phi(\epsilon_1)$ анизотропных сред

Одним из проявлений анизотропии свойств материала служит то, что связь $\sigma_1 = \Phi(\epsilon_1)$, полученная при испытаниях с

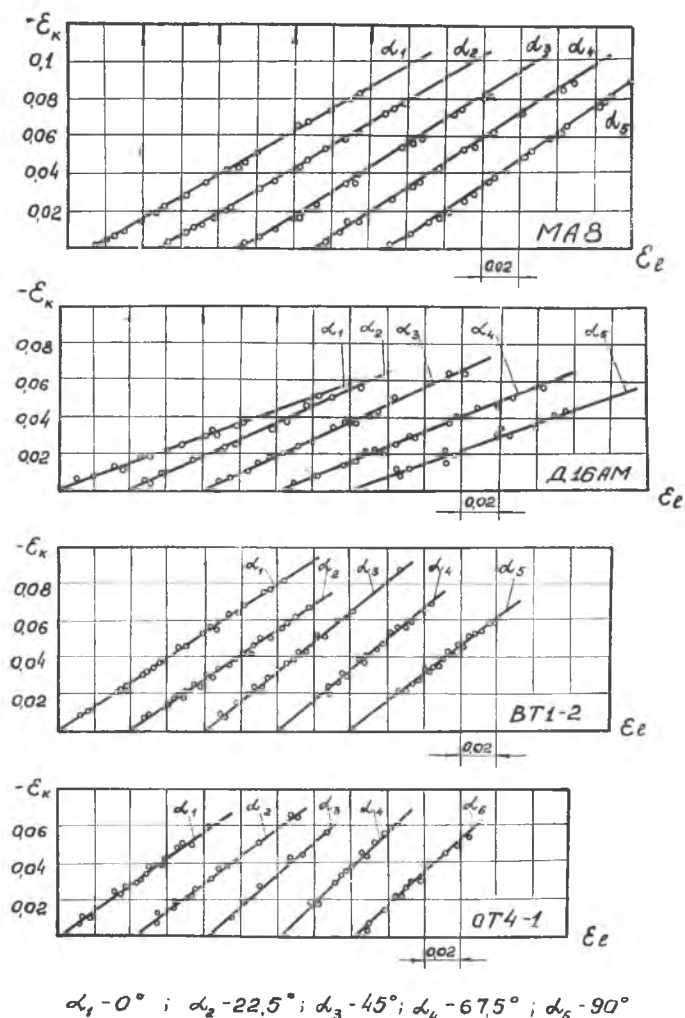


Рис. 13. Зависимость продольных и поперечных деформаций при линейном напряженном состоянии

различными схемами напряжений, не одинакова (рис. 1.5) [14]. В то же время можно привести ряд экспериментальных данных, например А. М. Жукова [32], говорящих о том, что диаграмма деформирования металла не зависит от типа напряженного состояния (рис. 1.6).

Рассматривая испытания на одноосное растяжение образцов, вырезанных вдоль и поперек проката, можно установить, что и здесь часто наблюдается расхождение кривых упрочнения

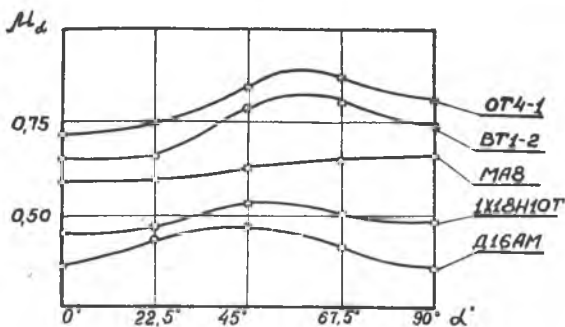


Рис. 1.4. Изменение коэффициентов поперечной деформации в зависимости от расположения оси образца по отношению к направлению прокатки

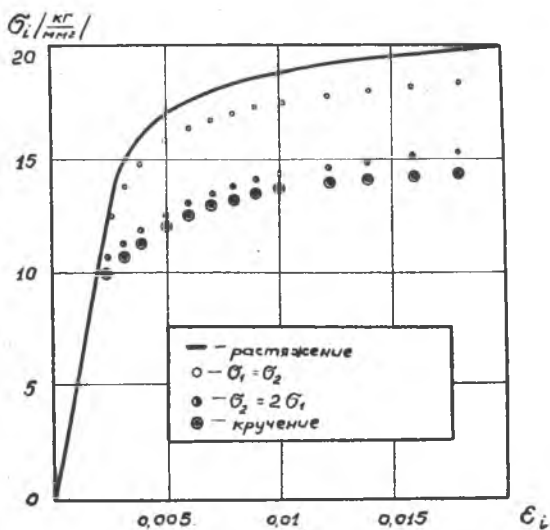


Рис. 1.5. Зависимость $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$ от схем нагружения

(рис. 1.7) [14]. В этом случае несовпадение кривых уже нельзя объяснить влиянием схемы напряженного состояния.

Таким образом, даже из этих примеров ясно, что разница $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$ для всех простых нагружений получается за счет анизотропии механических свойств. Иначе говоря, на характер диаграмм деформирования влияет только материальный тензор, при учете которого можно получить единую связь $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$. Это будет говорить о том, что гипотеза независимости диаграммы деформирования от вида напряженного состояния сохранит свое значение и для анизотропных сред.

Уравнения связи между напряжениями и деформациями записываются с помощью коэффициентов $\lambda = \frac{\epsilon_i}{\sigma_i}$

$\lambda_1 = \frac{\epsilon_{i1}}{\sigma_{i1}}$ или $\lambda_2 = \frac{\epsilon_{i2}}{\sigma_{i2}}$, которые переходят друг в друга при учете показателей анизотропии. Следовательно, для того, чтобы пользоваться уравнениями теории пластичности, достаточно получить любую из взаимосвязей $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$, $\sigma_{i1} = \Phi_1(\epsilon_{i1})$, $\sigma_{i2} = \Phi_2(\epsilon_{i2})$. Тогда эту кривую, например $\sigma_{i1} = \Phi_1(\epsilon_{i1})$, будем считать основной, а результаты других испытаний следует пересчитать и отнести к ней.

Пересчет одних кривых упрочнения в другие, в том числе и тех, которые подсчитаны по формулам изотропного тела, можно вести по формуле

$$\sigma_{iu3} \epsilon_{iu3} = \sigma_{ian} \epsilon_{ian} = \sigma_{i1} \epsilon_{i1} = \sigma_{i2} \epsilon_{i2} \quad (1.55)$$

Ее нетрудно получить, если рассмотреть приращение работы при пластической деформации.

При линейном напряженном состоянии $\sigma_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sigma_{i2}$, а $\epsilon_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \epsilon_{i2}$, поэтому, чтобы при переводе получить точку на кривой $\sigma_{i1} = \Phi(\epsilon_{i1})$, необходимо любое значение ϵ_{i2} разделить на коэффициент $\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}}$, а соответствующую ему интенсивность

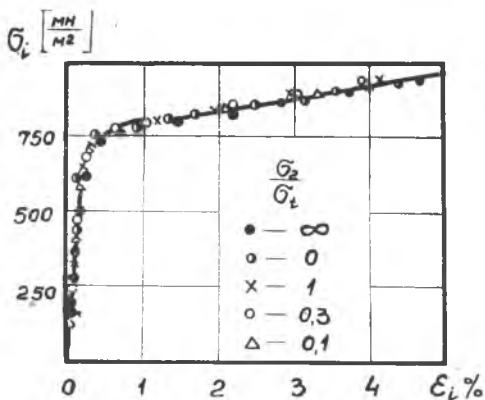
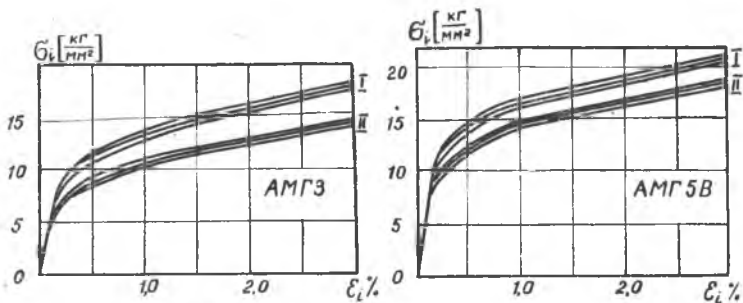


Рис. 1.6. Результаты опытов при испытании хромо-никелевых сталей



I - продольные образцы
II - поперечные образцы

Рис. 1.7. Кривые упрочнения, построенные вдоль и поперек волокон

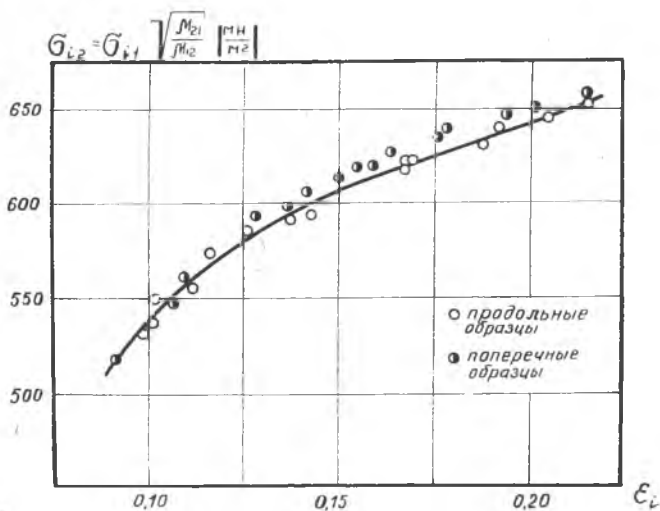


Рис. 1.8. Взаимный переход кривых растяжения разных направлений (сплав ВТ1-2)

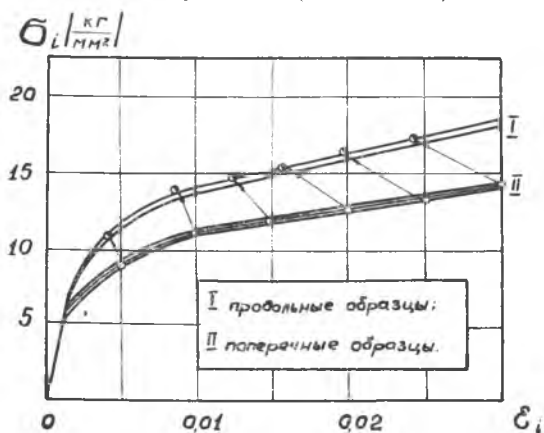


Рис. 1.9. Взаимный переход кривых растяжения разных направлений (сплав АМг3) [14]

напряжений σ_{i2} умножить на этот же коэффициент. Указанное положение подтверждается экспериментально (рис. 1.8 и 1.9).

В том случае, когда напряженное состояние является сложным, для пересчета кривых необходимо знать показатель схемы напряженного либо деформированного состояния ν_ϵ .

Если воспользоваться упрощенной записью условия пластичности для ортотропной среды (2.18).

$$\sigma_{i1} = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{\nu_\sigma^2 - 2D\nu_\sigma + C}}{2 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}}}$$

и изотропного материала

$$\sigma_{iu3} = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{\nu_\sigma^2 + 3}}{2},$$

то для пересчета получим отношение

$$\frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{iu3}} = \sqrt{\frac{\nu_\sigma^2 - 2D\nu_\sigma + C}{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}(\nu_\sigma^2 + 3)}} = \bar{K}. \quad (1.56)$$

Отношение интенсивностей деформаций представляет собой обратную величину

$$\frac{\epsilon_{i1}}{\epsilon_{iu3}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}(\nu_\sigma^2 + 3)}{\nu_\sigma^2 - 2D\nu_\sigma + C}} = \frac{1}{\bar{K}}. \quad (1.57)$$

Дальнейший пересчет тот же самый, что и при линейном напряженном состоянии.

В частных случаях, как это принято, например, при трубчатых образцах и образцах из тонкого листа, напряжением по толщине обычно пренебрегают и считают $\sigma_3 = 0$. Тогда, если обозначить через m_1 отношение $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, то получим $\nu_\sigma = 2m_1 - 1$.

и

$$\frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{iu3}} = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_{21}m_1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}m_1^2}{1 - m_1 + m_1^2}} = \bar{K}. \quad (1.58)$$

Если испытания проводились при сохранении деформированного состояния, то следует использовать связь $\nu_\sigma = f(\nu_\epsilon)$ и указанные выше формулы.

Для экспериментального подтверждения были проанализированы опыты В. П. Дегтярева [14] (рис. 1.10), а также использовались значения, полученные нами (рис. 1.11). Данные испытаний трубчатых образцов из сплава ВТЗ (рис. 1.11) и расчеты по

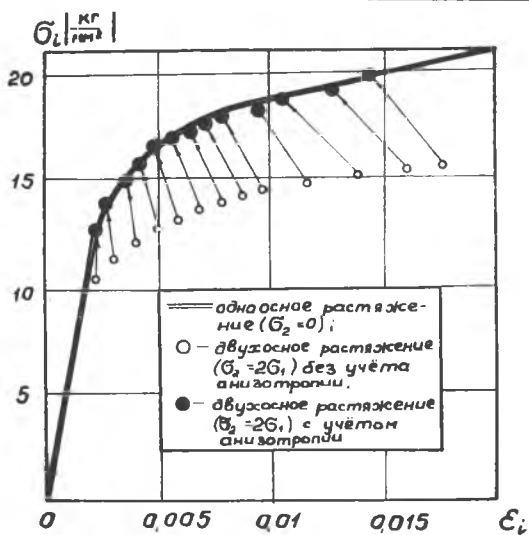


Рис. 1.10. Экспериментальное подтверждение независимости связей $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$ от вида деформированного состояния

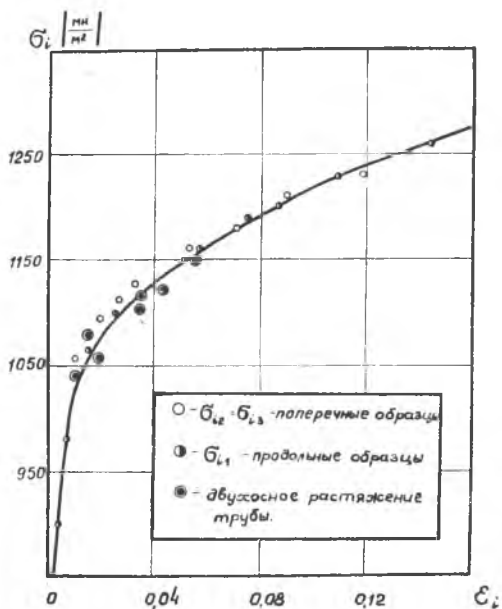


Рис. 1.11. Экспериментальное подтверждение инвариантности $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$ на трубчатых образцах из сплава ВТЗ

формулам анизотропного тела показали их практическую сходимость.

Для удобства использования в уравнениях теории пластичности кривые упрочнения обычно аппроксимируют определенной

зависимостью, например, $\sigma_i = K \varepsilon_i^n$, где $n = \frac{\lg \frac{\sigma_B}{\sigma_{0,2}}}{\lg \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_{0,2}}}$ и $K = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_B^n}$ —

константы материала.

Покажем характер перехода друг в друга аппроксимирующих функций, отражающих диаграммы деформирования разных направлений.

Рассмотрим два направления — вдоль и поперек проката. В этом случае можно записать $\sigma_{i1} = K_1 \varepsilon_{i1}^{n_1}$; $\sigma_{i2} = K_2 \varepsilon_{i2}^{n_2}$.

Существующие связи между интенсивностями различных направлений позволяют получить

$$\sigma_{i1} = K_1 \varepsilon_{i1}^{n_1}; \quad \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \sigma_{i1} = K_2 \left(\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \right)^{n_2} \varepsilon_{i1}^{n_2}.$$

Поделив уравнения, найдем

$$\frac{K_1}{K_2} \left(\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \right)^{\frac{n_2+1}{2}} (\varepsilon_{i1})^{n_1-n_2} = 1.$$

Если считать, что коэффициенты $\mu_{ке}$ остаются постоянными в диапазоне применяемых деформаций, то эта формула справедлива лишь в том случае, когда $n_1 = n_2$ (1.54).

Отсюда можно сделать вывод о том, что при указанных условиях характер упрочнения материала не зависит от рассматриваемого направления. Кроме того,

$$K_1 \mu_{12}^{\frac{n+1}{2}} = K_2 \mu_{21}^{\frac{n+1}{2}}. \quad (1.59)$$

При использовании линейной зависимости типа $\sigma_i = \sigma_{s_0} + \Pi \varepsilon_i$

$$\frac{\sigma_{S_{01}}}{\sigma_{S_{01}}} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \quad \text{и} \quad \frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}. \quad (1.60)$$

В заключение отметим, что проведенные эксперименты подтвердили гипотезу независимости диаграммы деформирования от вида напряженного состояния.

Поверхность пластичности и ее изменение в зависимости от величины деформации

Для геометрической интерпретации запишем условие пластичности через главные напряжения

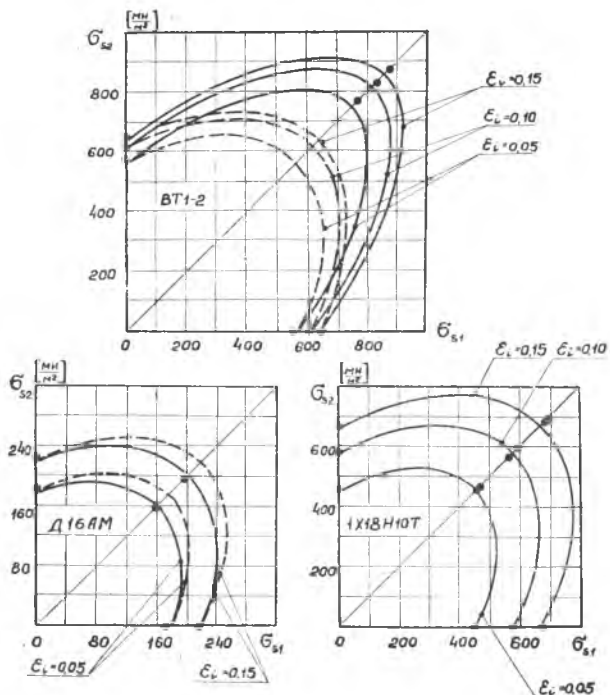


Рис. 1.12. Эллипсы пластичности при различных деформациях, построенные с учетом и без учета анизотропии

$$\sigma_{I_1} = \sqrt{\mu_{21}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Поверхность пластичности будем рассматривать в определенный фиксированный момент, поэтому интенсивность напряжений численно равна соответствующему пределу текучести.

Используя обычные приемы аналитической геометрии [2], нетрудно установить, что поверхность текучести представляет собой эллиптический цилиндр неограниченной длины. Ось цилиндра равнонаклонена к осям главных напряжений (координатные оси) и проходит через их начало. Рассмотрим сечение поверхности плоскостью $\sigma_3 = 0$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$\sigma_1^2 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \sigma_2^2 - 2\mu_{21} \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_{S_1}^2 = 0.$$

Большая и малая оси полученного эллипса имеют следующее значение:

$$\frac{2a}{2b} = \frac{2\sqrt{2} \sigma_{S_1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}}$$

Тангенс угла наклона большой оси $2a$ с координатной осью α определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}{2\mu_{21}}$$

Поскольку испытания проводились на материалах, где может быть принята трансверсальная изотропия, то все формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\bar{\mu}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{S_1}^2 &= 0, \\ \operatorname{tg} \alpha &= 1, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $\bar{\mu}$ — осредненное значение коэффициентов поперечной деформации в плоскости листа.

С учетом выражения (1.61) построены эллипсы пластичности (проведены сплошными линиями) при различных степенях деформации. Пунктирной линией обозначены эллипсы пластичности, не учитывающие анизотропию (рис. 1.12). Как видно из графика, экспериментальные точки располагаются вблизи линий, построенных по формулам анизотропных сред. Причем наибольшее отклонение от изотропии показали сплавы ВТ1-2 и Д16. У сплава 1Х18Н10Т, где величина $\bar{\mu}$ близка к 0,5, эллипсы с учетом и без учета анизотропии практически сливаются друг с другом.

Предварительно можно заключить, что с увеличением деформации (при простом нагружении) поверхность пластичности равномерно расширяется.

По всем экспериментальным исследованиям можно сделать общее заключение о том, что они подтверждают основные принятые допущения теории.

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для решения задач современная деформационная теория пластичности, точнее — теория малых упругопластических деформаций изотропных сред, располагает [9], [15] тремя уравнениями статического равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial X_j} = 0; \quad (2.1)$$

шестью геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right); \quad (2.2)$$

шестью физическими уравнениями

$$\sigma_{jk} - \sigma_{\text{ср}} \delta_{jk} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{jk}, \quad (2.3)$$

где $\sigma_{\text{ср}}$ — среднее напряжение, а

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \text{ — символ Кронекера;}$$

выражением для интенсивности деформаций

$$\varepsilon_i = \left(\frac{2}{3} e_{jk} e_{jk} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

где e_{jk} — компоненты девиатора деформаций и, наконец, уравнением, связывающим интенсивность напряжений с интенсивностью деформаций

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i). \quad (2.5)$$

Если рассматривать состояние равновесия и не использовать компоненты смещения, то взамен шести геометрических

соотношений можно использовать первую группу уравнений неразрывности.

В некоторых случаях вместо шести физических уравнений применяется условие пластичности. Его форма определяется принятой гипотезой начала текучести материала.

Для анизотропных тел количество неизвестных и число уравнений остаются такими же, как и у изотропного материала, что создает предпосылки к использованию их в теоретических расчетах процессов обработки давлением. Причем соотношения (2.1) и (2.2), выраженные с помощью полевых тензоров, являются общими для изотропных и анизотропных сред.

Остальные уравнения включают в себя материальные тензоры, следовательно, они будут иметь различный вид в случаях учета или неучета анизотропии.

Математическая теория пластичности дает необходимый комплекс уравнений и устанавливает общую методику решения задач, связанных с формоизменением металла. Однако решение возникающей при этом сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных связано со значительными, иногда непреодолимыми трудностями. Приходится прибегать к целому ряду упрощений математического, геометрического и физического характера. Одним из основных упрощений является сведение задачи к плоской или осесимметричной.

§ 2. 1. ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Теория плоской деформации изотропного тела является наиболее развитой ветвью математической теории пластичности, что объясняется, по-видимому, ее относительной простотой.

На основе плоской деформации проанализированы такие процессы, как гибка широких листов, простая (поперечная) обтяжка, прокатка и т. д. Решение подобных задач в случае ортотропной среды несколько усложняется вследствие того, что приходится рассматривать три возможных случая связи между напряжениями

$$\begin{aligned} \text{при } \varepsilon_{11} = 0 \quad \sigma_{11} &= \mu_{21} \sigma_{22} + \mu_{31} \sigma_{33}, \\ \text{при } \varepsilon_{22} = 0 \quad \sigma_{22} &= \mu_{32} \sigma_{33} + \mu_{12} \sigma_{11}, \\ \text{при } \varepsilon_{33} = 0 \quad \sigma_{33} &= \mu_{13} \sigma_{11} + \mu_{23} \sigma_{22}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Это ясно из (1.41).

Каждое из этих уравнений можно записать и с помощью разностей напряжений:

$$\text{при } \varepsilon_{11} = 0 \quad \sigma_{11} - \sigma_{33} = \mu_{21} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) = \frac{\mu_{21}}{\mu_{31}} (\sigma_{11} - \sigma_{22}),$$

$$\text{при } \varepsilon_{1,2} = 0 \quad \sigma_{11} - \sigma_{33} = \frac{1}{\mu_{32}} (\sigma_{11} - \sigma_{12}) = \frac{1}{\mu_{12}} (\sigma_{22} - \sigma_{33}), \quad (2.7)$$

$$\text{при } \varepsilon_{33} = 0 \quad \sigma_{11} - \sigma_{33} = \mu_{23} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \frac{\mu_{23}}{\mu_{13}} (\sigma_{33} - \sigma_{22}).$$

Выражения (2.6) и (2.7) сохраняют свой вид и для случая главных напряжений, если в них σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} заменить на σ_1 , σ_2 , σ_3 , а ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} — на ε_1 , ε_2 и ε_3 .

Использование нескольких видов связей вряд ли можно признать рациональным. Поэтому примем условие, как и при изотропном материале, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Нетрудно показать, что это возможно лишь при $\varepsilon_2 = 0$. Тогда условие пластичности (1.36) выразится следующим образом:

$$\sigma_{i1} = \sqrt{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (2.8)$$

Интенсивность деформаций при $\varepsilon_2 = 0$ примет вид

$$\varepsilon_{i1} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 - \mu_{12} \mu_{21}}}. \quad (2.9)$$

Попутно отметим, что если принять $\varepsilon_{22} = 0$, то $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ и из (1.36) следует

$$\sigma_{i1} = \sqrt{(1 - \mu_{12} \mu_{21})(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \frac{1 + \mu_{13}}{1 - \mu_{13}} \sigma_{31}^2}. \quad (2.8a)$$

Все остальные соотношения теории, как отмечено выше, являются общими для изотропных и анизотропных сред. Типичный пример использования теории пластичности ортотропных сред при плоской деформации приведен в работе [33].

§ 2.2. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Подход к анализу процессов, где используется схема плоского напряженного состояния, должен быть совершенно иным, чем при плоской деформации, так как здесь имеет место самостоятельная задача, которая не является частным случаем общей [16].

Очевидно, что приравнивание нулю одного из напряжений приведет к упрощению уравнений равновесия и сплошности тела. Однако условие пластичности остается таким же трудноприменимым, как и при объемной задаче. Это объясняется тем, что здесь не имеется определенного отношения между нормальными напряжениями. И только по найденным деформациям, используя уравнения связи, можно судить об их величине.

Если металл ортотропен, то в общем возможны три различных случая плоского напряженного состояния, а именно, когда $\sigma_{11} = 0$, либо $\sigma_{22} = 0$, или $\sigma_{33} = 0$.

В § 1.5 рассмотрен частный вид теории пластичности ортотропных сред, когда напряжение σ_{33} совпадает с основной осью симметрии материала. Там же отмечено, что эта теория может

быть использована для анализа операций штамповки, если ось 3 направлена по толщине листа. Дополнительно к этому примем условие, при котором отсутствующим нормальным напряжением всегда будет напряжение σ_{33} . Это сведет изучение теории плоского напряженного состояния к одному случаю. Тогда условие пластичности и физические уравнения (1.47), (1.36), (1.49) примут вид

$$\sigma_i (\sigma_{i3}) = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}} (\sigma_{11}^2 - 2\mu_{21} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \sigma_{22}^2 + \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2)} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{i1} &= \sqrt{\sigma_{11}^2 - 2\mu_{21} \sigma_{11} \sigma_{12} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \sigma_{22}^2 + \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2} \\ \sigma_{11} &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\mu_{12}} + \varepsilon_{21} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\varepsilon_{11} + \frac{\varepsilon_{22}}{\mu_{21}} \right) \\ \sigma_{12} &= 2 \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}} \frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1} \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

При необходимости, если отказаться от указанного условия, могут быть проанализированы и два других случая плоского напряженного состояния.

§ 2. 3. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

При анализе ряда операций листовой штамповки (вытяжка, отбортовка, раздача и др.) обычно рассматривают осесимметричную задачу.

Характерной особенностью этой задачи в случае анизотропного материала является то, что она распадается на две в зависимости от того, будет ли наблюдаться симметрия по деформациям или напряжениям.

Если тело изотропно, то решается одна задача, так как симметрия по напряжениям автоматически приводит к симметрии по деформациям.

При ортотропном материале могут быть решены обе задачи, хотя здесь и встречаются определенные трудности.

Так, при осесимметричной деформации (применяется цилиндрическая система координат) напряжения σ_θ зависят от угла θ . Это получается вследствие того, что коэффициенты поперечной деформации связаны с зависимостью свойств металла от направления.

Условия равновесия, если их рассматривать в главных напряжениях, упрощаются, хотя и сохраняют свою запись через частные производные. При известном пределе текучести и граничных условиях получается замкнутая система уравнений.

В случае симметрии по напряжениям линии главных напряжений представляют собой эллипсы и гиперболы, а не окружности и прямые лучи, как это наблюдается при изотропном материале. При этом условия равновесия необходимо рассматривать в эллиптической ортогональной системе координат.

Если металл трансверсально изотропен или условно трансверсально изотропен (свойства в плоскости осреднены), то анализ осесимметричных задач подобен анализу при изотропном теле. Следует только при этом учесть разницу свойств среды в плоскости, где они эквивалентны, и перпендикулярного ей направления.

Так как для решения осесимметричной задачи используется цилиндрическая система координат, то в условии пластичности необходимо изменить индексацию. Считая, что ось Θ совпадает с осью 1, а ось ρ — с осью 2 в системе главных напряжений, получим

$$\sigma_i(\sigma_{i3}) = \sigma_{iz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{\rho\Theta}}{1-\mu_{\rho\Theta}} (\sigma_\Theta - \sigma_\rho)^2 + (\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\Theta)^2}$$

или (2.12)

$$\sigma_{i1} = \sigma_{i\rho} = \sigma_{i\Theta} = \sqrt{1-\mu_{\rho\Theta}} \sqrt{\frac{\mu_{\rho\Theta}}{1-\mu_{\rho\Theta}} (\sigma_\Theta - \sigma_\rho)^2 + (\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\Theta)^2}.$$

Очевидно, что здесь не имеет значения, какой из индексов заменить на ρ или Θ . Индексацию коэффициентов поперечной деформации можно было бы оставить и прежней, так как $\mu_{12} = \mu_{\Theta\rho}$ и т. д. В частном случае, когда $\sigma_\Theta = \sigma_\rho$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho - \sigma_z &= \sigma_{iz} \\ \sigma_\rho - \sigma_z &= \sqrt{2(1-\mu_{\rho\Theta})} \sigma_{i\rho} \end{aligned} \quad (2.13)$$

В заключение следует отметить, что условие пластичности может быть записано в параметрической форме и применено при решении задач осесимметричного деформирования [35].

§ 2. 4. УПРОЩЕННАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

При решении конкретных задач обработки металлов давлением в основном применяется упрощенная линейная запись условия пластичности через два крайних напряжения

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta \sigma_l, \quad (2.14)$$

где β — коэффициент Лодэ, учитывающий среднее по величине напряжение.

Если металл изотропен, то интервал изменения β невелик и составляет примерно 15% (от 1 до $\frac{2}{\sqrt{3}}$). Поэтому для анализа различных процессов используют либо максимальное, либо ми-

нимальное его значения, хотя они и соответствуют только частным видам напряженно-деформированного состояния.

Помимо этого у изотропного тела все направления эквивалентны с точки зрения механических свойств, следовательно, величина β не зависит от расположения главных напряжений.

Другое дело, если металл ортотропен. Здесь возможны различные случаи ориентации главных напряжений относительно осей анизотропии. В одних из них σ_{\max} может совпадать с направлением проката, в других — с направлением поперек его, а в третьих — с направлением толщины металла. То же самое можно сказать и относительно $\sigma_{\text{ср}}$, σ_{min} .

Эта особенность будет сказываться и на величине β . В общем, возможны шесть вариантов взаимного расположения главных напряжений относительно зафиксированных (условно принятых по индексации) осей анизотропии. Рассмотрим один из них.

Пусть σ_{\max} совпадает с направлением 1 (вдоль проката), $\sigma_{\text{ср}}$ — с направлением 2 (поперек проката), а σ_{min} — с направлением 3. Тогда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. В этом случае величина, характеризующая напряженное состояние, ν_σ запишется следующим образом:

$$\nu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}. \quad (2.15)$$

Отсюда среднее напряжение σ_2 равно

$$\sigma_2 = \nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (2.15a)$$

Подставляя это выражение в условие пластичности (1.47), получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_l(\sigma_{i3}) \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}}}{\sqrt{\nu_\sigma^2 + 2(1 - 2\mu_{12})\nu_\sigma + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - 4\mu_{12} + 1}}.$$

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$1 - 4\mu_{12} + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} = C \quad 2\mu_{12} - 1 = D.$$

Тогда

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}}}{\sqrt{\nu_\sigma^2 - 2D\nu_\sigma + C}} \sigma_l. \quad (2.16)$$

Следовательно, здесь

$$\beta = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}}}{\sqrt{\nu_\sigma^2 - 2D\nu_\sigma + C}}. \quad (2.17)$$

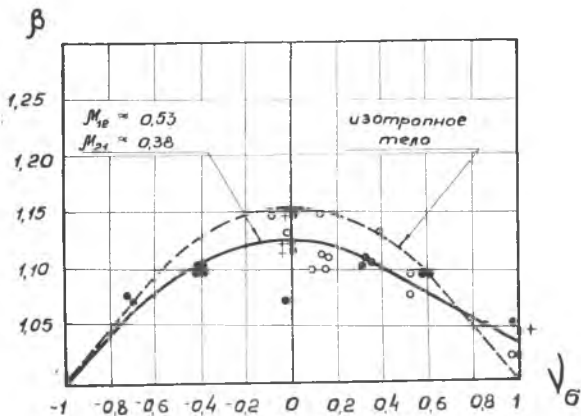


Рис. 2.1. Изменение коэффициента β в зависимости от схемы напряженного состояния

Можно выразить упрощенную форму условия пластичности и через другие направления. Например,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1 \sigma_{i1}, \quad (2.18)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}}}{\sqrt{v_\sigma^2 - 2Dv_\sigma + C}}. \quad (2.19)$$

При $\mu_{ke} = 0,5$ C будет равен 3, а D — нулю. Тогда соотношения (2.17) и (2.19) принимают обычную форму записи изотропного тела

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + v_\sigma^2}}.$$

Однако, как показали опыты В. Лоде [17], характер изменения β отличен от принятого при изотропном теле (рис. 2.1). Экспериментальные точки расположены ближе к кривой, построенной с учетом анизотропии.

Аналогично рассматривая другие комбинации расположения главных напряжений относительно осей анизотропии, получим подобные записи условия пластичности и соответствующие им коэффициенты β или β_1 .

Все шесть указанных случаев можно выразить одним уравнением, записанным через интенсивности разных направлений

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta_1 \sigma_{i \max}, \quad (2.20)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{\max \text{ ср.}}}{\mu_{\text{ср. max}}}}}{\sqrt{v_\sigma^2 + 2(1 - 2\mu_{\max \text{ ср.}})v_\sigma + 4 \frac{\mu_{\max \text{ ср.}}}{\mu_{\text{ср. max}}} - 4\mu_{\max \text{ ср.}} + 1}}; \quad (2.21)$$

$\sigma_{i\max}$ — интенсивность напряжений направления, по которому действует максимальное напряжение;

$\mu_{\max\text{-ср}}$ — коэффициент поперечной деформации, где первый индекс показывает, что поперечная деформация рассматривается в направлении действия максимального напряжения, а линейное растяжение производится в направлении среднего напряжения.

При нахождении упрощенной записи условия пластичности возможен и другой подход. За основу принимают направления главных напряжений. Будем считать, что всегда σ_1 максимальное, σ_2 — среднее по величине, а σ_3 — минимальное напряжение. Этим в дальнейшем и определяется индексация осей анизотропии, которую следует вводить позднее, при анализе конкретного процесса.

Такой подход более рационален. Он освобождает нас от шести видов линейной записи условия пластичности, которое будет представлено одним выражением

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_2 \quad (2.16)$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1 \sigma_{11} \quad (2.18)$$

Теперь рассмотрим, в каком случае β принимает экстремальное значение. Для этого необходимо, чтобы производная функции $\beta = f(v_\sigma)$ была равна нулю или обращалась в бесконечность.

Найдем производную

$$f(v_\sigma) = - \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}} (v_\sigma - D)}}{[v_\sigma^2 - 2D v_\sigma + C]^{3/2}}$$

Следовательно, значения v_σ^* , удовлетворяющие необходимому условию экстремума, могут быть получены из уравнений:

$$v_\sigma^* - D = 0 \quad \text{и} \quad (v_\sigma^*)^2 - 2D v_\sigma^* + C = 0.$$

Последнее при $\mu_{12} \neq 0$, $\mu_{21} \neq 0$, $\mu_{12} \neq 1$ и $\mu_{21} \neq 1$ действительных решений не имеет, так как дискриминант уравнения меньше нуля. Это значит, что β имеет экстремальное значение при $v_\sigma^* = D = 2\mu_{12} - 1$ и оно составляет

$$\beta_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12} \mu_{21}}}.$$

Среднее напряжение при $v_\sigma^* = D$ получает значение $\sigma_2 = \sigma_1 \mu_{12} + \sigma_3 (1 - \mu_{12})$, что соответствует случаю плоской деформации.

Таким образом, как и при изотропном материале, коэффициент β получает экстремальное значение при плоской деформации.

Некоторые авторы [18] при анализе процессов листовой штамповки используют упрощенную форму записи условия пластичности, в которой величина β принимается равной средненнтегральному значению $\bar{\beta}$. Для изотропного тела она равна

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{2}{\sqrt{3 + v_{\sigma}^2}} dv_{\sigma} = \ln(v_{\sigma} + \sqrt{3 + v_{\sigma}^2}) \Big|_{-1}^{+1} = 1,0986 \approx 1,1.$$

В случае ортотропного материала величина $\bar{\beta}$ определяется из аналогичного соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} dv_{\sigma}}{\sqrt{v_{\sigma}^2 + 2v_{\sigma} (1 - 2\mu_{12}) + 4 \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - 4\mu_{12} + 1}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} \ln \frac{\sqrt{1 - 2\mu_{12} + \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} + 1} - \mu_{12}}{\sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - \mu_{12}}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Значения β , β_1 и $\bar{\beta}$ для некоторых материалов приведены в таблице 4.

Таблица 4

Марка сплава	μ_{12}	μ_{21}	Интервал изменения β	Интервал изменения β_1	$\bar{\beta}$
Д16АМ	0,34	0,36	1 ÷ 1,23	0,86 ÷ 1,06	1,17
ВТ1-2	0,72	0,65	0,775 ÷ 1,07	1 ÷ 1,38	0,97
1Х18Н10Т	0,47	0,47	1 ÷ 1,13	0,94 ÷ 1,06	1,11
ОТ4-1	0,8	0,72	0,68 ÷ 1,043	1 ÷ 1,535	0,92
МА-8	0,66	0,58	0,85 ÷ 1,08	1 ÷ 1,27	1,05
Л-62	0,45	0,46	1 ÷ 1,185	0,95 ÷ 1,13	1,12
08КП	0,68	0,57	0,836 ÷ 1,07	1 ÷ 1,28	0,99

Таким образом, энергетическое условие пластичности ортотропного тела может быть представлено в линейной форме, как и при изотропном материале. Однако здесь коэффициент β учитывает не только напряженное состояние, но и свойства материала. При этом необходимо обращать внимание как на минимальное, так и на максимальное значение этого коэффициента.

Рассмотрим кусочно-линейное условие пластичности Д. Д. Ивлева [31]. Запишем его через коэффициенты поперечной деформации (рис. 1.1):

$$(\sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} (\sigma_3 - \sigma_2) = \pm \sigma_{S_1} \quad (AB \text{ и } A_1B_1)$$

$$(\sigma_2 - \sigma_1) - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} (\sigma_3 - \sigma_1) = \pm \sigma_{S_2} \quad (AC \text{ и } A_1C_1)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} (\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \sigma_{S_1} \quad (BC_1 \text{ и } CB_1)$$

Данное условие пластичности может быть так же, как и энергетическое, выражено через два крайних напряжения. Напрямер:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \alpha_2 \sigma_{S_1}, \quad (AB \text{ и } A_1B_1),$$

где

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} (\nu_\sigma + 1) + (1 - \nu_\sigma)}}$$

§ 2. 5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ НАДАИ-ЛОДЕ НАПРЯЖЕННОГО ν_σ И ДЕФОРМИРОВАННОГО ν_ϵ СОСТОЯНИЯ

Для успешного использования упрощенной записи условия пластичности желательно знать точное значение ν_σ и его связь с показателем деформированного состояния ν_ϵ , что особенно важно при использовании схемы плоского напряженного состояния, так как в этом случае величина ν_σ может быть определена только через деформации.

При изотропном материале связь между показателями напряженного и деформированного состояний проста — $\nu_\sigma = \nu_\epsilon$. У изотропного тела из-за влияния анизотропии такое равенство не наблюдается. Можно только сказать, что ν_σ является определенной функцией от ν_ϵ . Установим эту зависимость.

В основу вывода положим условие, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Запишем параметр Надаи-Лодде в следующем виде:

$$\nu_\sigma = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

Выразим разности главных напряжений с помощью деформаций, для чего воспользуемся уравнениями (1.50). Тогда после подстановки получим

$$\nu_\sigma = \frac{2 \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \epsilon_2 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \epsilon_1 - \epsilon_3}{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \epsilon_1 - \epsilon_3}$$

Применяя условие постоянства объема, заменим ε_2 деформациями ε_1 и ε_3 , обозначая их отношение через $\alpha = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}$.

$$\nu_{\sigma} = \frac{\left(\frac{2}{\mu_{21}} + \frac{1}{\mu_{12}} - 3\right)\alpha + \frac{2}{\mu_{21}} - 1}{1 - \left(\frac{11}{\mu_2} - 1\right)\alpha} \quad (2.23)$$

Показатель направляющего тензора деформаций также запишем с помощью α

$$\nu_{\sigma} = 3 \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

Отсюда следует

$$\alpha = \frac{\nu_{\sigma} - 3}{\nu_{\sigma} + 3}.$$

Подставим значения α в уравнение (2.23)

$$\nu_{\sigma} = \frac{\left(1 - 4\mu_{12} + 4\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)\nu_{\varepsilon} + 3(2\mu_{12} - 1)}{(2\mu_{12} - 1)\nu_{\varepsilon} + 3}$$

или

$$\nu_{\sigma} = \frac{C\nu_{\varepsilon} + 3D}{D\nu_{\varepsilon} + 3} \quad (2.24)$$

либо

$$\nu_{\varepsilon} = \frac{3(D - \nu_{\sigma})}{D\nu_{\sigma} - C}. \quad (2.24a)$$

При изотропном материале $C=3$, $D=0$ и $\nu_{\sigma} = \nu_{\varepsilon}$

В таблице 5 приведены значения коэффициентов C и D для некоторых материалов. По этим данным построен график зависимости $\nu_{\sigma} = f(\nu_{\varepsilon})$ (рис. 2.2).

Таблица 5

Марка сплава	μ_{12}	μ_{21}	C	D
Д16АМ	0,34	0,36	3,44	-0,32
ВТ1-2	0,72	0,65	2,55	0,44
1Х18Н10Т	0,47	0,47	3,12	-0,06
ОТ4-1	0,8	0,72	2,24	0,6
МА-8	0,66	0,58	2,92	0,32
Л-62	0,45	0,46	3,12	-0,1
08КП	0,68	0,57	3,06	0,36

Из таблицы 5 и графика видно, что только сплавы Л62 и 1Х18Н10Т имеют коэффициенты C и D , а следовательно, и зависимость $\nu_{\sigma} = f(\nu_{\varepsilon})$, близкие к изотропным телам.

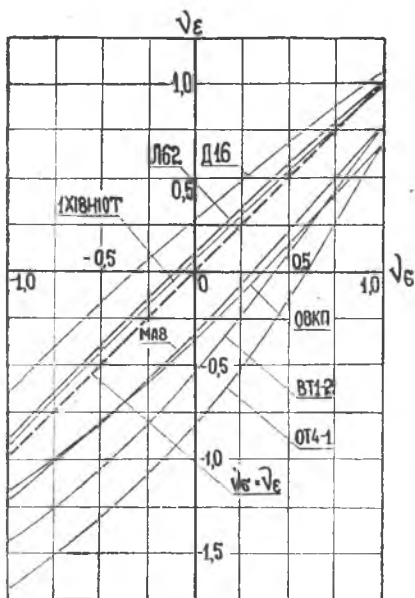


Рис. 2.2. Связь между v_σ и v_ϵ

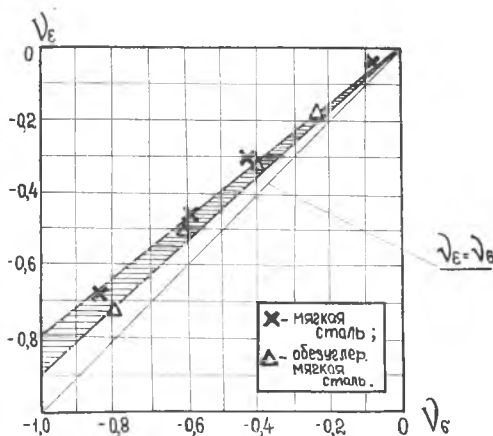


Рис. 2.3. Связь между v_σ и v_ϵ по данным [17]

Для проверки взаимосвязи параметров напряженного и деформированного состояния были использованы опытные данные В. Лоде [17], Г. Тейлора и Куинни [19] (рис. 2.3 и рис. 2.4).

Из графиков видно, что экспериментальные точки располагаются вблизи теоретических зависимостей, построенных с учетом анизотропии тела (заштрихованная область предполагаемых значений $\bar{\mu} = 0,37 \div 0,42$). Во всяком случае, они далеки от прямой $v_\sigma = v_\epsilon$.

§ 2. 6. МЕТОД СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ С УСЛОВИЕМ ПЛАСТИЧНОСТИ

В § 2.1—2.5 рассмотрены вопросы, которые лежат в основе так называемых «инженерных» методов, широко используемых при теоретическом анализе различных процессов обработки металлов давлением. Наиболее распространенным из них является метод совместного решения уравнений равновесия с условием пластичности.

Известно, что точность полученных решений при использовании любого метода зависит от характера принятых допущений. Наиболее общим допущением является замена объемной задачи плоской или осесимметричной, иначе число неизвестных превышает число уравнений.

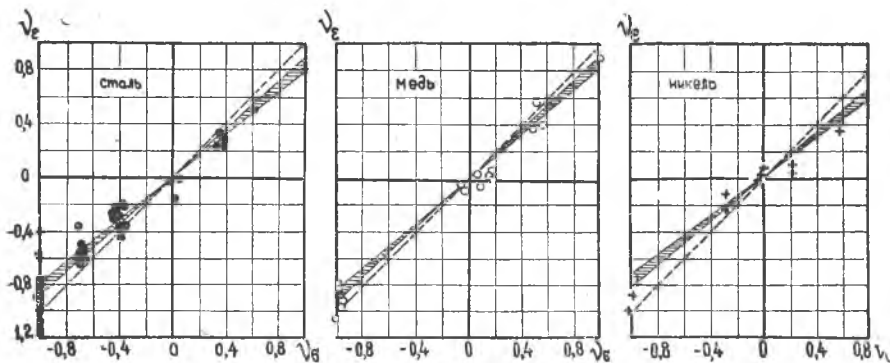


Рис. 2.4. Связь между $\nu\sigma$ и $\nu\epsilon$ по данным [19]

Помимо того, решение в замкнутом виде может быть получено, исходя из условия пластичности, лишь для частных случаев, когда касательные напряжения на контакте либо равны нулю, либо постоянны. Это справедливо как для изотропных, так и анизотропных тел.

В качестве примера, подтверждающего указанное положение, рассмотрим случай плоской деформации идеально пластичного материала.

Для решения задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{\sigma_{s1}^2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \frac{(1 + \mu_3)}{(1 - \mu_3)} \tau_{xy}^2}$$

Последнее из них является преобразованным условием пластичности (2.8а).

Продифференцируем первое уравнение по Y , а второе по X и рассмотрим разность

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}$$

Подставляя сюда условие пластичности, получим

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{\sigma_{s1}^2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \frac{(1 + \mu_3)}{(1 - \mu_3)} \tau_{xy}^2} \quad (2.26)$$

Выражение (2.26) имеет точное решение только тогда, когда величина τ_{xy} близка к нулю и ею можно пренебречь, либо когда она постоянна. В этом случае форма записи выражения

(2.26) будет иметь такой же вид, как и при изотропном материале

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0.$$

Дальнейшее решение этого уравнения подробно освещено В. С. Смирновым [8], [34].

В тех случаях, когда разность нормальных напряжений зависит от касательного напряжения, встает вопрос об использовании приближенных форм условия пластичности. Решение здесь сводится к тому, чтобы оценить величину погрешности, которая возникает при приравнивании касательных напряжений τ_{xy} нулю, либо принятии их максимальными по значению.

Первый случай эквивалентен утверждению о том, что направления осей координат мало отличаются от главных. Тогда

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm \frac{\sigma_{s1}}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}}. \quad (2.27)$$

Если же касательные напряжения на контакте являются постоянными и максимальными по значению, то условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm \frac{\sigma_{s1}}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{T_{31}^2}}, \quad (2.28)$$

где $T_{31} = \sigma_{s1} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \frac{1 - \mu_3}{1 + \mu_3}}$ — предел текучести на сдвиг в плоскости 1—3.

Когда $\tau_{xy} = T_{31}$, подкоренное выражение обращается в нуль и можно пользоваться следующим условием:

$$\sigma_x = \sigma_y. \quad (2.29)$$

Дифференцируя уравнения (2.27), (2.29), получаем в обоих случаях

$$d\sigma_x = d\sigma_y. \quad (2.30)$$

Е. П. Унков [20] показал, что условие пластичности в форме (2.27) отличается от точного на 10% при τ_k больших нуля, но меньших 0,7 предела текучести на сдвиг. Если контактные напряжения превышают указанные значения, то с той же степенью точности пользуются условием пластичности в форме (2.29).

При решении конкретных задач стремятся также упростить и уравнения равновесия, чтобы от частных перейти к обычным производным. Физически это будет означать, что одно из нормальных напряжений станет независимым от какой-то координаты, например X (гипотеза тонких сечений) [34].

Наиболее распространенные формы уравнений равновесия подробно изложены в технической литературе при анализе тех или иных процессов [20], [21], [22] и др.

Таким образом, окончательное решение задачи сводится к операции интегрирования общего дифференциального уравнения. Следует отметить, что при нахождении постоянной интегрирования, исходя из граничных условий, следует учитывать влияние анизотропии. Это в дальнейшем и было сделано при анализе операций листовой штамповки.

§ 2. 7. МЕТОД СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ (СПДМ)

Этот метод разработан ленинградской школой профессора Г. А. Смирнова-Аляева [23]. Он используется для решения задач на конечное формоизменение при монотонной и приближенно монотонной деформации тела.

Под монотонным (протекающим однозначно) подразумевается такой процесс деформации рассматриваемой малой материальной частицы, когда две ее точки либо все время приближаются, либо удаляются друг от друга и если при этом вид деформации (растяжение, сжатие, сдвиг и т. д.), определяемый показателем ν_ϵ , остается неизменным [24].

Для сравнения рассмотрим сущность данного метода, считая металл изотропным.

Так как по условию монотонности соотношения главных деформаций не изменяются в течение всего процесса, то в качестве характеристики деформированного состояния можно принять конечные деформации.

Тогда справедливо записать

$$\frac{e_1 - e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{e_1 - e_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \rho = \frac{1}{2G'} \quad (2.31)$$

где e_1, e_2, e_3 — конечные логарифмические деформации.

При простом нагружении $\nu_\sigma = \nu_\epsilon$, поэтому, зная конечные деформации, можно определить показатель напряженного состояния

$$\nu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{e_2 - \frac{e_1 + e_3}{2}}{\frac{e_1 - e_3}{2}} \quad (2.32)$$

а по нему — и точное значение β из выражения

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}$$

Это позволяет использовать упрощенную форму записи условия пластичности $\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i$.

Значение истинного предела текучести σ_i определяется из связи $\sigma_i = \Phi(e_i)$. При этом величина e_i находится также по значениям результирующей деформации

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_1 - e_3)^2}$$

В итоге для определения напряжений имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_3 &= \beta \sigma_i \\ 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 &= \nu_\epsilon (\sigma_1 - \sigma_3).\end{aligned}\quad (2.33)$$

В качестве третьего уравнения можно взять одно из условий равновесия [24].

В частном случае, при плоском напряженном состоянии, задача упрощается. Для ее решения достаточно использовать уравнения связи между напряжениями и деформациями

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (2e_1 + e_2), \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (2e_2 + e_1)\end{aligned}\quad (2.34)$$

Прежде, чем перейти к анализу возможностей применения метода СПДМ при ортотропном материале, покажем, что условие монотонности из-за влияния анизотропии нарушаться не будет. Действительно, в случае ортотропной среды по главным осям анизотропии свойства тела постоянны и не меняются от точки к точке, т. е. тело остается однородным в этом направлении. А так как все основные соотношения теории записаны применительно к направлениям анизотропии, то их можно использовать, как и в изотропном теле, для конечных деформаций.

Теперь рассмотрим, как изменятся указанные выше уравнения, если металл ортотропен.

Выражение (2.31) запишется в виде

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) e_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) e_1 - e_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \\ &= \frac{\mu_{13} (1 - \mu_{12} \mu_{21})}{\mu_{31} \mu_{12}} \frac{e_i}{\sigma_i} = \frac{1 - \mu_{12} \mu_{21}}{\mu_{12}} \frac{e_{i1}}{\sigma_{i1}} = \rho'.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Интенсивность деформаций можно определить по формуле

$$e_i = \sqrt{\frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}} \sqrt{\frac{e_1^2}{\mu_{12}} + 2e_1 e_2 + \frac{e_2^2}{\mu_{21}}},\quad (2.36)$$

либо

$$e_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}} \sqrt{\frac{e_1^2}{\mu_{12}} + 2e_1 e_2 + \frac{e_2^2}{\mu_{21}}}.\quad (2.37)$$

Затем, зная экспериментальную зависимость $\sigma_{i1} = \Phi_1(e_{i1})$, найдем величину σ_{i1} или σ_i .

Использование функциональной связи между показателями напряженного и деформированного состояния $\nu_\sigma = f(\nu_\epsilon)$ позволяет, как и при изотропном материале, найти точное значение β .

Это в свою очередь дает возможность применить упрощенную запись условия пластичности.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i \text{ или}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1 \sigma_{i1}.$$

Таким образом, и при ортотропном материале задача сводится к аналогичной (2.33) системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \beta \sigma_i (\sigma_{s3}), \\ 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 &= (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{C\nu_\epsilon + 3D}{D\nu_\epsilon + 3}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В случае плоского напряженного состояния можно использовать следующие связи:

$$\sigma_1 = \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(\frac{1}{\mu_{12}} e_1 + e_2 \right) \quad (2.39)$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(\frac{1}{\mu_{21}} e_2 + e_1 \right),$$

либо

$$\sigma_1 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{e_{i1}} \left(\frac{1}{\mu_{12}} e_1 + e_2 \right) \quad (2.39a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{e_{i1}} \left(\frac{1}{\mu_{21}} e_2 + e_1 \right)$$

Глава III

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ НА ОТДЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ

При проектировании технологических процессов обработки металлов давлением приходится решать целый комплекс вопросов, связанных с нахождением оптимальных условий выполнения конкретной операции. В техническом отношении эти условия выражаются через определенные параметры, характеризующие данный процесс:

1) силовые параметры (усилие, работа, мощность), которые положены в основу выбора оборудования и проектирования инструмента;

2) параметры, определяющие допустимую степень деформации. Предельное формоизменение оказывает существенное влияние на вид и характер самого процесса изготовления детали. Знание допустимой степени деформации позволяет рассчитать рациональное число и последовательность переходов штамповки;

3) оптимальные размеры и форма заготовки, обеспечивающие экономичный раскрой материала, заданные свойства и качество готового изделия. Правильный выбор размеров и формы заготовки дает возможность уменьшить объем или полностью ликвидировать отдельные ручные и доводочные работы;

4) точность, которую может обеспечить данный технологический процесс.

Следует подчеркнуть, что большинство параметров взаимосвязаны и оказывают влияние друг на друга. Например, точность отштампованной детали зависит от заданной степени деформации, приложенного усилия (давления), формы заготовки и инструмента.

Это говорит о необходимости комплексного изучения всех вопросов, относящихся к разработке оптимальных режимов технологического процесса изготовления изделия. В действительности наблюдается несколько иная картина. До последнего времени большое внимание уделялось определению усилия деформирования. Такое положение, по-видимому, можно объяснить от-

носителем несложностью расчетов силовых параметров. Методы определения деформирующего усилия, основанные на применении теории пластичности изотропных сред, сейчас достаточно изучены и не вызывают сомнения. Они дают возможность рассчитать усилие с ошибкой, не превышающей 15—20%, т. е. соответствующей колебаниям механических свойств штампуемого материала [25]. Если при этом учесть, что производственное оборудование выбирается, как правило, с запасом на 25—30%, то такую точность расчетов следует признать удовлетворительной.

Другие вопросы расчета технологических параметров, особенно когда они связаны с предельным формоизменением и точностью листовой штамповки, разработаны менее фундаментально.

В данной работе сделана попытка осветить основные положения теории листовой штамповки в равной степени с учетом влияния анизотропии материала.

§ 3. 1. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ СХЕМЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКЕ

При теоретическом анализе вопросов, связанных с листовой штамповкой, используются кривые истинных напряжений, которые обычно аппроксимируются в виде некоторых функций, например,

$$\sigma_i = K \varepsilon_i^n, \quad (3.1)$$

где K и n — константы, выраженные через механические свойства металла. Они находятся из испытаний образцов на линейное растяжение.

В случае простого нагружения величины σ_i и ε_i можно записать через коэффициенты, отражающие отношение главных напряжений или деформаций [36]. Для анизотропного тела такая запись выглядит следующим образом:

$$\sigma_{i1} = \sigma_1 \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sqrt{(1 - m_1)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(m_1 - m_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(m_2 - 1)^2}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{i1} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{\frac{1}{\mu_{12}} + 2\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\mu_{21}}}, \quad (3.3)$$

где $m_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, $m_2 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$, $\alpha_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Теперь, подставляя значения σ_{i1} и ε_{i1} в формулу (3.1), получим

$$\sigma_1 = K_1 \frac{\left[\left(\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \right) \left(\frac{1}{\mu_{12}} + 2\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\mu_{21}} \right) \right]^{\frac{n}{2}}}{\mu_{21}^{\frac{1}{2}} \left[(1 - m_1)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) (m_1 - m_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) (m_2 - 1)^2 \right]^{1/2}} \varepsilon_1^n. \quad (3.4)$$

Обозначим

$$K_1 = \frac{\left[\left(\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \right) \left(\frac{1}{\mu_{12}} + 2\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\mu_{21}} \right) \right]^{\frac{n}{2}}}{\mu_{21}^{1/2} \left[(1 - m_1)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) (m_1 - m_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) (m_2 - 1)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.5)$$

через K_n — приведенный коэффициент, и найдем, что

$$\sigma_1 = K_n \varepsilon_1^n. \quad (3.6)$$

Коэффициент K_n учитывает влияние схемы напряженно-деформированного состояния (отличие ее от линейной) и свойства анизотропного материала.

Известно, что при анализе процессов листовой штамповки в качестве основных схем напряженно-деформированного состояния принимают.

- плоскую схему напряжений при объемной деформации;
- плоскую схему деформаций при объемном или плоском напряженном состоянии;
- осесимметричное напряженное и деформированное состояние.

Рассмотрим, как изменится величина K_n в указанных случаях. При плоском напряженном состоянии $\sigma_3 = 0$, а следовательно и m_2 , равны нулю. Поэтому

$$K_n = K_1 \frac{\left[\left(\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \right) \left(\frac{1}{\mu_{12}} + 2\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\mu_{21}} \right) \right]^{\frac{n}{2}}}{\left(1 - 2m_1\mu_{21} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} m_1^2 \right)^{1/2}}.$$

Учитывая в данном случае наличие однозначной связи между напряжениями и деформациями, коэффициент K_n можно выразить следующим образом:

$$K_n = \frac{K_1}{(m_1\mu_{21} - 1)^n \left(1 - 2m_1\mu_{21} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} m_1^2 \right)^{\frac{1-n}{2}}}. \quad (3.7)$$

При трансверсальной изотропии ($\mu_{12} = \mu_{21}$) это выражение несколько упростится:

$$K_n = \frac{K_1}{(m_1\mu_{21} - 1)^n \left(1 - 2n\mu_{12} + m_1^2 \right)^{\frac{1-n}{2}}}. \quad (3.8)$$

На рис. 3.1 показан характер изменения отношения $\frac{K_n}{K_1}$ в зависимости от величины m_1 . Проанализируем полученный график. Во-первых, кривые изменения $\frac{K_n}{K_1}$ имеют точки максимумов. Эти экстремальные значения получаются при

$$m_1 = \frac{\left[1 + \mu_{12}^2 + n(\mu_{12}^2 - 1) \right]}{2\mu_{12}} \pm \sqrt{\frac{\left[1 + \mu_{12}^2 + n(\mu_{12}^2 - 1) \right]^2}{4\mu_{12}^2} - 1}.$$

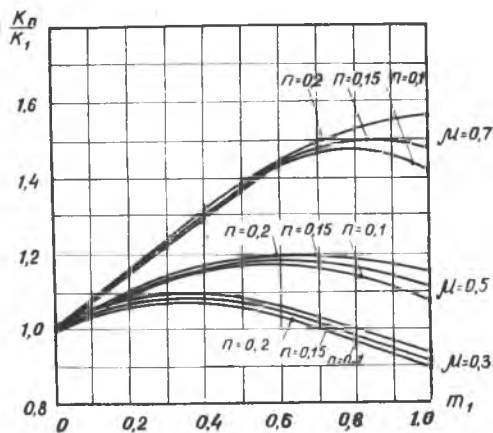


Рис. 3.1. Зависимость отношения $\frac{K_n}{K_1}$ от величин m_1 , μ и n

Отсюда ясно, что положение точек экстремума зависит как от анизотропии материала, так и от его упрочнения. Однако, как это видно из графика, наибольшее влияние оказывает анизотропность механических свойств. Причем происходит не только смещение максимума в сторону увеличения m_1 , но значительно повышается отношение $\frac{K_n}{K_1}$. Во-вторых, кривые, у которых $\mu_{12} < 0,5$, лежат ниже зависимостей, свойственных изотропному материалу в области значений $\frac{K_n}{K_1}$, близких к единице. Следовательно, для технологических расчетов таких материалов можно использовать приближенно линейную зависимость. Наоборот, для металлов с $\mu_{12} > 0,5$ кривые расположены в области, где $\frac{K_n}{K_1}$ значительно отличается от единицы и, естественно, принятие линейной зависимости во всем диапазоне m_1 приведет к большим погрешностям.

Из графиков также видно, что в диапазоне значений m_1 , близких к нулю ($0 < m_1 \leq 0,15 \div 0,20$), для расчетов параметров техпроцесса приближенно может быть взята схема линейного растяжения.

Если в качестве расчетной принята схема плоской деформации, то ϵ_2 и α_1 равны нулю, а $m_1 = (1 - \mu_{12})m_2 + \mu_{12}$.

Тогда

$$K_n = \frac{K_1}{(1 - m_2)(1 - \mu_{12}\mu_{21})^{\frac{n+1}{2}}} \quad (3.9)$$

Подставляя это значение в (3.6), получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{K_1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})^{\frac{n+1}{2}}} \varepsilon_1^n, \quad (3.10)$$

В частном случае, когда напряжением σ_3 пренебрегают, $m_2 = 0$, то

$$K_n = \frac{K_1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (3.11)$$

Как уже отмечалось, у ортотропных материалов может наблюдаться осевая симметрия по напряжениям, или по деформациям.

Если рассмотреть осесимметричное деформированное состояние, то в уравнении (3.5) необходимо принять $\alpha = 1$. Тогда

$$K_n = K_1 \times \quad (3.12)$$

$$\times \frac{(\mu_{21} + 2\mu_{12}\mu_{21} + \mu_{12}^2)^{\frac{n}{2}}}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})^{\frac{n}{2}} \mu_{21}^{\frac{n+1}{2}} \left[(1 - m_1)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) (m_1 - m_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) (m_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

При осевой симметрии по напряжениям $m_1 = 1$ и

$$K_n = K_1 \frac{\left[\left(\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \right) \left(\frac{1}{\mu_{12}} + 2\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\mu_{21}} \right) \right]^{\frac{n}{2}}}{(1 - m_2) \left(1 - 2\mu_{21} + \frac{\mu_{21}^2}{\mu_{12}} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.13)$$

И, наконец, когда тело трансверсально изотропно, то возникает симметрия как по напряжениям, так и по деформациям. В этом случае $\alpha_1 = 1$, $m_1 = 1$, $\mu_{21} = \mu_{12}$.

$$K_n = K_1 \frac{2^{\frac{1+n}{2}} (1 - \mu_{12})^{\frac{1-n}{2}}}{1 - m_2}. \quad (3.14)$$

При $\sigma_3 = 0$ (плоская задача)

$$K_n = K_1 2^{\frac{1+n}{2}} (1 - \mu_{12})^{\frac{1-n}{2}}. \quad (3.15)$$

§ 3.2. ХАРАКТЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПРОЦЕССАХ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ, СВЯЗАННЫХ С ГИБКОЙ МЕТАЛЛА

Все операции листовой штамповки можно объединить в две основные группы: разделительные и формоизменяющие [21].

Группа формоизменяющих операций, в свою очередь, может быть разбита на несколько подгрупп, для которых характерны определенные общие признаки. Так, можно выделить операции, в основе которых лежит гибка. К ним следует отнести гибку моментом, гибку с растяжением (сжатием), обтяжку листов и т. д.

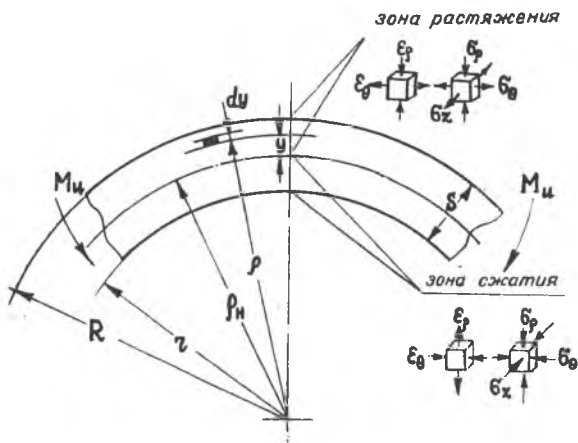


Рис. 3.2. Схема ггиба моментом

При гбике моментом (рис. 3.2) часть заготовки в продольном направлении получает растяжение, а другая — сжатие. Здесь возникают тангенциальные напряжения σ_θ , которые меняют свой знак на так называемой «нейтральной поверхности напряжений». Одновременно с этим отдельные слои заготовки оказывают давление друг на друга, что приводит к появлению радиальных напряжений σ_ρ . Их величина зависит от кривизны детали. С увеличением кривизны напряжение σ_ρ возрастает.

Окончательная схема напряженно-деформированного состояния зависит от формы и размеров изгибаемого полуфабриката. В связи с этим различают гибку узких и широких заготовок.

Гибка широких заготовок, в частности листов, характерна тем, что поперечная деформация ϵ_z у них затруднена, поэтому возникают аксиальные напряжения σ_z .

Обычно при теоретическом анализе такого процесса изменением поперечных размеров пренебрегают и принимают в качестве расчетной схему плоской деформации ($\epsilon_z=0$).

Так же используют следующие допущения:

принимают, что главные оси напряжений и деформаций совпадают соответственно с радиальным (ось 3), тангенциальным (ось 1) и аксиальным (ось 2) направлениями. Тогда на нормальных к ним площадках отсутствуют касательные напряжения, что значительно упрощает анализ процесса;

при гбике на большие радиусы ($\frac{r}{s} > 2$) считают справедливой гипотезу плоских сечений.

Используя указанные допущения, уравнение равновесия можно выразить следующим образом:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \quad (3.16)$$

Гибка, как правило, производится в холодном состоянии, поэтому при теоретическом анализе необходимо учесть упрочнение металла. Выразим его в виде (3.6)

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = K_n \varepsilon_\theta^n.$$

При учете схемы напряженно-деформированного состояния (3.10) получим

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \frac{K_\theta}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})^{\frac{n+1}{2}}} \varepsilon_\theta^n = K'_\theta \varepsilon_\theta^n \quad (3.17)$$

Теперь следует задать закон изменения ε_θ . Точное решение указанной задачи из-за наличия зоны немонотонной деформации затруднительно. Однако, если учитывать, что при рабочих радиусах гибок эта зона сравнительно мала, то можно принять [21]

$$\varepsilon_\theta = \ln \left(\frac{\rho}{\rho_n} \right), \quad (3.18)$$

где ρ_n — радиус нейтральной поверхности.

Поэтому условие пластичности можно записать в виде

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = K'_\theta \left(\ln \frac{\rho}{\rho_n} \right)^n. \quad (3.19)$$

Проводя совместное решение уравнений равновесия и пластичности, придем к следующему выражению:

$$\sigma_\rho = \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_n} \right)^{n+1} + C. \quad (3.20)$$

Для нахождения постоянной C используем граничные условия: когда $\rho = R$ и $\rho = r$ $\sigma_\rho = 0$,

тогда

$$C = - \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \frac{R}{\rho_n} \right)^{n+1} \quad (3.21)$$

$$C = - \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \frac{r}{\rho_n} \right)^{n+1}.$$

Отсюда определим связь между нейтральным, внешним и внутренним радиусами. Для этого приравняем правые части уравнений (3.21)

$$\left(\ln \frac{R}{\rho_n} \right)^{n+1} = \left(\ln \frac{r}{\rho_n} \right)^{n+1}.$$

При извлечении корня степени $n+1$ будем иметь

$$\pm \ln \left(\frac{R}{\rho_n} \right) = \pm \ln \left(\frac{r}{\rho_n} \right) = \pm \ln \left(\frac{\rho_n}{r} \right). \quad (3.22)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что n — степень нечетная, так как нечетной является сама функция $\sigma_1 = K\epsilon_1^n$ ($\sigma_1 = K_{\text{II}}\epsilon_1^n$). В действительности при сжатии деформации и напряжения принимаются отрицательными. В то же время известно, что корней четной степени из отрицательных чисел не существует. Следовательно, степень n может быть только нечетной.

Учтя это замечание, из выражения (3.22) находим

$$\rho_n = \sqrt[n]{Rr}. \quad (3.23)$$

Таким образом, получена известная формула для определения положения нейтрального слоя. Другими словами, на положение нейтральной поверхности анизотропия и упругие свойства металла влияния оказывать не будут.

Подставляя в (3.20) значение C , определим σ_ρ , а затем из (3.19) и σ_θ :

$$\sigma_\rho = \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \frac{\rho}{\sqrt{Rr}} \right)^{n+1} - \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}. \quad (3.24)$$

$$\sigma_\theta = K'_\theta \left(\ln \frac{\rho}{\sqrt{Rr}} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \ln \frac{\rho}{\sqrt{Rr}} \right) - \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}.$$

Проанализируем полученные уравнения.

При $\rho = r$ $\sigma_\rho = 0$, а $\sigma_\theta = K'_\theta \left(\ln \sqrt{\frac{r}{R}} \right)^n = -K'_\theta \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^n$.

При $\rho = R$ $\sigma_\rho = 0$ и $\sigma_\theta = K'_\theta \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^n = K'_\theta \left(\ln \sqrt{1 + \frac{s}{r}} \right)^n$. (3.25)

Наконец, когда $\rho = \rho_n = \sqrt[n]{Rr}$

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = - \frac{K'_\theta}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}.$$

Таким образом, на внутренней и внешней поверхности изгибаемого листа радиальные напряжения отсутствуют, а тангенциальные — равны, но противоположны по знаку. На нейтральной поверхности деформаций $\sigma_\rho = \sigma_\theta$. Причем здесь σ_ρ достигает своего наибольшего значения, взятого по абсолютной величине.

Волокна, где σ_θ меняет свой знак, расположены несколько ближе к внешней поверхности, чем нейтральный слой. Исследование выражения (3.24) также показало, что на нейтральном слое наблюдается перегиб кривой σ_θ , а в точке $\rho = \rho_n e^{-1/n}$ тангенциальные напряжения достигают своего минимального значения (наибольшего по абсолютной величине)

$$\sigma_\theta = - \frac{K'_\theta}{n+1} \left[n^n + \left(\ln \sqrt{1 + \frac{s}{r}} \right)^{n+1} \right]. \quad (3.26)$$

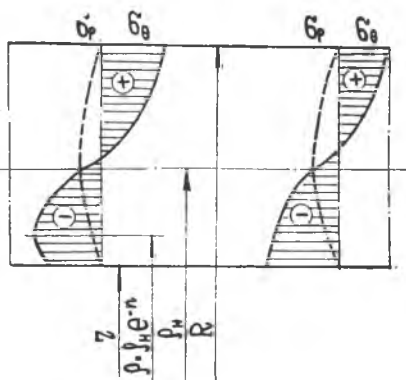


Рис. 3.3. Эпюры распределения напряжений по толщине листа

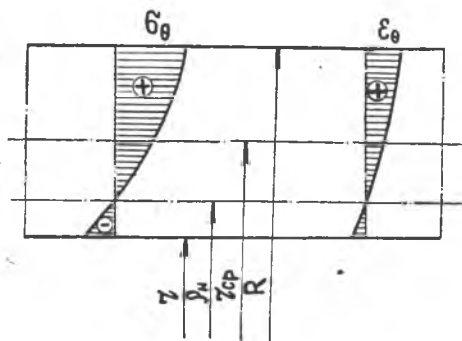


Рис. 3.4. Эпюры распределения напряжений и деформаций при гибке с растяжением

Точка минимума расположена в зоне толщины листа только при малых относительных радиусахгиба у металлов с незначительным μ . Поэтому возможны два вида эпюр распределения напряжений (рис. 3.3).

Из выражений (3.25), (3.26) видно, что с увеличением относительного радиусагиба тангенциальные, а также и радиальные напряжения уменьшаются. В связи с этим все больше слоев металла будут испытывать не пластические, а чисто упругие деформации. Это приводит к росту пружинения и, как следствие, к снижению точности отштампованной детали. Для увеличения тангенциальных напряжений приходится прикладывать дополнительное растягивающее усилие, т. е. применять способ гибки с растяжением, а для оболочек двойной кривизны — обтяжку.

Естественно, при этом изменится напряженно-деформированное состояние металла и соответственно — эпюры распределения напряжений и деформаций по толщине листа (рис. 3.4). Приложение растягивающего усилия смещает нейтральное волокно к внутренней поверхности и может быть случай, когда оно станет фиктивным. Тогда деформации и напряжения станут одного знака. Кроме того, дополнительное усилие вызывает деформацию по оси Z .

Изложенное выше позволяет при расчетах взять за основу схему плоского напряженного состояния. При этом важно установить величину отношения между напряжениями. В качестве примера рассмотрим обтяжку с растяжением (продольную обтяжку).

Как и большинство технологических процессов листовой штамповки, обтяжка характерна неравномерным распределением деформаций и напряжений в различных зонах изделия. Подобная неравномерность обусловлена наличием трения между

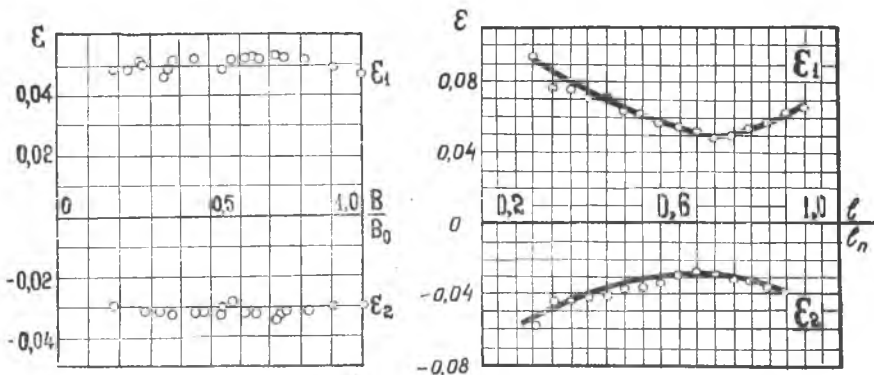


Рис. 3.5. Характер распределения деформаций вдоль и поперек образца при его обтяжке

заготовкой и пуансоном. Для анализа величины возникающих напряжений и деформаций используем метод СПДМ. Значение конечных деформаций определим по искажению координатной сетки, нанесенной на поверхность образцов. Как видно из графика (рис. 3.5), наибольшая неравномерность наблюдается вдоль заготовки, в то время как деформация по ширине не имеет больших колебаний. Затем, используя выражение интенсивности деформаций (1.37) и функциональную зависимость типа (3.1), по физическим уравнениям (2.11) проведем расчет напряжений в различных точках детали. Типичный характер распределения напряжений показан на рис. 3.6. Здесь можно сделать вывод о том, что напряжения σ_2 значительно меньше напряжений σ_1 (вдоль действия растягивающего усилия).

Многочисленные эксперименты позволили установить значение m для обшивок, изготавливаемых методом обтяжки с растяжением. Оно обычно не превышает $0,1 \div 0,15$, поэтому при расчете некоторых технологических параметров, учитывая рис. 3.1, можно принять схему линейного напряженного состояния.

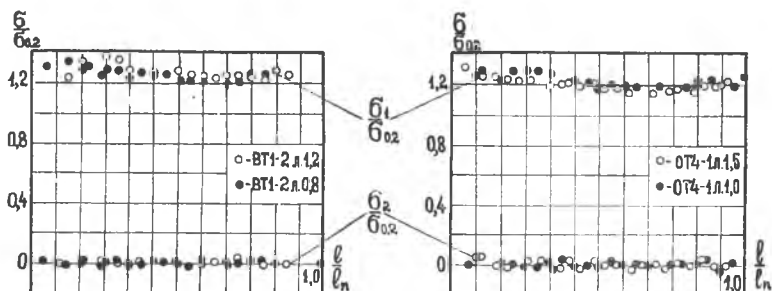


Рис. 3.6. Характер распределения напряжений в образце при обтяжке с растяжением

Аналогичную картину можно получить и при изучении процесса гибки с растяжением. Отличительной особенностью в этом случае будет только то, что из-за наличия одинарной кривизны распределение деформаций и напряжений по ширине детали будет равномерным.

Все изложенное выше позволяет считать, что из трех процессов (гибка, гибка с растяжением, обтяжка) наиболее общим будет процесс обтяжки, так как, принимая вторую кривизну равной нулю, получим гибку с растяжением, а исключая растягивающее усилие — обычную гибку моментом.

В такой последовательности и изучались данные процессы.

§ 3.3 ОБТЯЖКА С РАСТЯЖЕНИЕМ (ПРОДОЛЬНАЯ ОБТЯЖКА) ЛИСТОВЫХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

При изготовлении деталей летательных аппаратов типа обшивок, обтекателей и т. д. широко применяют процесс обтяжки листовых металлов. Существует несколько разновидностей обтяжки: простая (поперечная), круговая, кольцевая и обтяжка с растяжением, которая и рассматривается в данной работе. Сущность ее заключается в том, что заготовка, закрепленная с двух противоположных концов, сначала изгибается по пуансону, а затем приобретает окончательную форму за счет растягивающего усилия.

С использованием указанной выше схемы напряженно-деформированного состояния проведен теоретический анализ определения основных параметров, характеризующих процесс.

Расчет формы заготовки

При получении деталей методом обтяжки с растяжением обычно используется заготовка прямоугольной формы. Однако применение такой заготовки из-за неравномерного характера распределения напряжений и деформаций приводит к появлению разнотолщинности материала в различных зонах изделия. Чрезмерное утонение листа в отдельных местах ограничивает предельное деформирование как в целом за процесс, так и за один переход. В некоторых случаях оно не позволяет вообще изготовить деталь. В связи с этим желательно использовать такую форму заготовки, которая позволила бы получить примерно одинаковую деформацию на всей обшивке.

Рассмотрим характер действия сил при обтяжке, приняв схему линейного напряженного состояния (рис. 3.7).

Нормальное давление элемента заготовки составляет

$$dN = qBdl,$$

где $B = f(\varphi)$ — ширина заготовки, q — удельное давление, а $dl = = R_1 d\varphi$ — дифференциал дуги

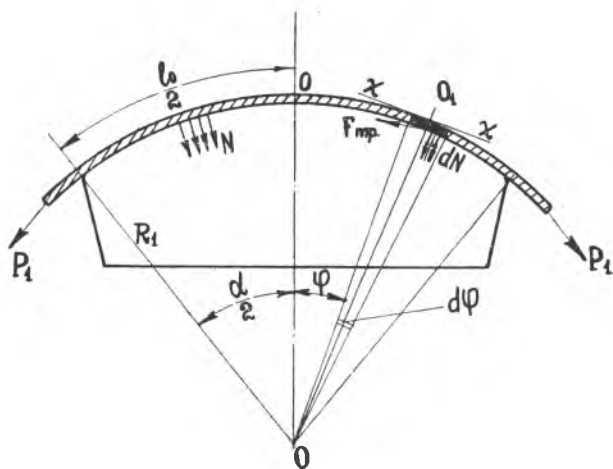


Рис. 3.7. Действие сил при обтяжке

Выразим удельное давление через σ_1 с помощью известного уравнения Лапласа $q = \frac{\sigma_1 S}{R_1}$.

Тогда получим

$$dN = \sigma_1 SBd\tau.$$

Запишем выражение элементарной силы трения

$$dF_{\text{тр}} = fdN,$$

где f — коэффициент трения.

Подставляя в эту формулу значение dN , найдем

$$dF_{\text{тр}} = \sigma_1 SBfd\tau.$$

Теперь запишем уравнение равновесия элемента заготовки, вырезанного углом $d\tau$. Для этого спроектируем силы на ось $x-x$

$$\sigma_1 BS + d(\sigma_1 BS) - dF_{\text{тр}} - \sigma_1 BS = 0.$$

Если задано условие $\sigma_1 = \text{const}$ (по углу), то и $S = \text{const}$, следовательно, можно записать

$$dB - Bfd\tau = 0.$$

Интегрируя и подставляя начальные условия ($\varphi = 0, B = B_0$ — срединная ширина заготовки), имеем

$$B = B_0 e^{f\varphi}. \quad (3.27)$$

Ввиду того, что угол φ обычно не превышает $6-9^\circ$, с достаточной для практики точностью можно воспользоваться приближенной формулой

$$B = B_0(1 + f\varphi) \quad (3.28)$$

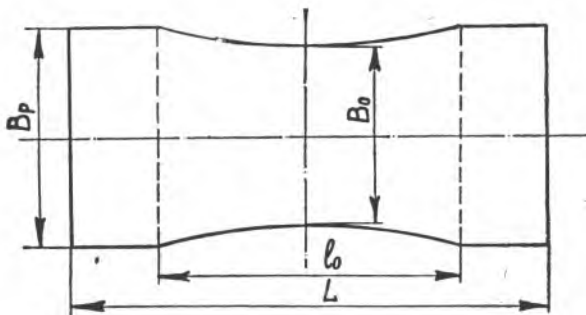


Рис. 3.8. Форма специальной заготовки

или

$$B = B_0 \left(1 + f \frac{l}{2R_1} \right).$$

Серединная ширина B_0 должна соответствовать ширине заготовки прямоугольной формы, которую определяют из выражения

$$B_0 = B_p (1 + \varepsilon_2) + 2\Pi,$$

где B_p — ширина развертки детали;

Π — односторонний технологический припуск на обрезку;

ε_2 — деформация сужения материала при обтяжке.

Деформация ε_2 выбирается в зависимости от требуемой степени растяжения вдоль продольной оси заготовки. Для ее определения следует умножить ε_1 на коэффициент поперечной деформации μ_{21} , т. е.

$$\varepsilon_2 = \mu_{21} \varepsilon_1.$$

Таким образом, на ширину заготовки влияют кривизна детали, контактное трение и анизотропия материала. Причем варьировать можно только величиной контактного трения, которое следует уменьшать путем подбора соответствующей смазки. В этом случае вырез в заготовке будет незначительным. Примерная форма предложенной заготовки показана на рис. 3.8.

Предельное формоизменение при обтяжке и определение числа переходов

Одним из наиболее важных вопросов теории и практики листовой штамповки является вопрос об определении предельных возможностей того или иного процесса.

Допустимая степень деформирования в процессе обработки металлов давлением зависит от многих причин: структуры и химического состава сплава, температуры и скорости деформации, характера напряженного состояния и т. д. При теоретическом анализе предельного формоизменения один из этих показателей следует положить в основу, а затем, базируясь на нем, рассмотреть и влияние всех других факторов.

С. И. Губкин предложил в качестве основы принять схему напряженно-деформированного состояния, возможные виды которого он свел в диаграммы аналогичного названия [29]. Рассмотрим этот подход более подробно.

Как известно, тензор напряжений может быть представлен в виде двух тензоров—шарового и девиатора: $T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma}$. Его можно записать и в безразмерных показателях, поделив компоненты на величину, пропорциональную квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжений.

С. И. Губкин с этой целью использовал октаэдрическое касательное напряжение τ_l . Тогда

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\tau_l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\tau_l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{\tau_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\tau_l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\tau_l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{\tau_l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma}{\tau_l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2 - \sigma}{\tau_l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3 - \sigma}{\tau_l} \end{pmatrix}$$

или в других обозначениях

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_3 \end{pmatrix},$$

где $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ — среднее напряжение.

Компоненты \bar{d}_k можно выразить [13] через величину показателя напряженного состояния v_{σ} следующим образом:

$$\bar{d}_1 = \pm \frac{3 - v_{\sigma}}{\sqrt{2(3 + v_{\sigma}^2)}}; \bar{d}_2 = \mp \frac{2v_{\sigma}}{\sqrt{2(3 + v_{\sigma}^2)}}; \bar{d}_3 = \pm \frac{3 + v_{\sigma}}{\sqrt{2(3 + v_{\sigma}^2)}}.$$

Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= \sigma^0 + \frac{3 - v_{\sigma}}{\sqrt{2(3 + v_{\sigma}^2)}} \\ \sigma_2^0 &= \sigma^0 + \frac{2v_{\sigma}}{\sqrt{2(3 + v_{\sigma}^2)}} \\ \sigma_3^0 &= \sigma^0 - \frac{3 + v_{\sigma}}{\sqrt{2(3 + v_{\sigma}^2)}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Таким образом, влияние схемы напряженно-деформированного состояния оценивается двумя показателями: средним относительным напряжением σ^0 и девиаторной величиной v_{σ} .

В отдельных частных случаях (плоское напряженное состояние, плоская деформация, осевая симметрия) наблюдается однозначная связь между σ^0 и v_{σ} и тогда достаточно знать толь-

ко один из показателей. Так, при плоском напряженном состоянии возможны следующие случаи:

двухосное растяжение ($\sigma_1^0 > \sigma_2^0 > 0, \sigma_3^0 = 0$)

$$\sigma^0 = \frac{3 + \nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}} \quad (3.30)$$

или, если использовать обозначение напряжений $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = m_1$, то

$$\sigma^0 = \frac{m_1 + 1}{\sqrt{2} \sqrt{m_1^2 - m_1 + 1}}; \quad (3.31)$$

разноименная схема напряжений ($\sigma_1^0 > 0, \sigma_3^0 < 0, \sigma_2^0 = 0$).

$$\sigma^0 = -\frac{2\nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}} \quad (3.32)$$

или при $m_2 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$

$$\sigma^0 = \frac{m_2 + 1}{\sqrt{2} \sqrt{m_2^2 - m_2 + 1}}; \quad (3.33)$$

двухосное сжатие ($\sigma_1^0 = 0, \sigma_2^0 < 0, \sigma_3^0 < 0$)

$$\sigma^0 = \frac{\nu_\sigma - 3}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}}, \quad (3.34)$$

а при $m_3 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$

$$\sigma^0 = -\frac{m_3 + 1}{\sqrt{2} \sqrt{m_3^2 - m_3 + 1}}. \quad (3.35)$$

Как видно из полученных выражений, напряженное состояние при плоской схеме напряжений может быть охарактеризовано либо средним относительным напряжением, либо показателем ν_σ или отношением главных напряжений m_1 .

Теперь, если при геометрической интерпретации уравнений (3.29) по одной из осей отложить величину показателя направляющего тензора ν_σ , а по другой — среднее относительное напряжение σ^0 , то каждая точка, определяемая этими координатами, будет отвечать тензору относительных главных напряжений. Полученная таким способом диаграмма носит название диаграммы видов напряженного состояния. Рассмотренные частные случаи (3.30—3.35) выражаются на диаграмме линиями.

Если вместо ν_σ откладывать ν_ϵ , то придем к диаграмме видов деформированного состояния. Приняв в дальнейшем плоскость диаграммы за основу (как бы положив ее горизонтально) и откладывая на вертикалях предельную деформацию, получим в принципе объемную фигуру, ограниченную поверх-

ностью предельных состояний. Характер этой поверхности различен в зависимости от того, какая задача ставится и какой показатель или свойства используются.

Переходя к операциям листовой штамповки, можно отметить, что они обычно ограничиваются

потерей устойчивости вследствие образования складок, гофр, коробления и т. п. явлениями (первый вид потери устойчивости);

образованием «шейки» или чрезмерным утонением, приводящим к браку изделия (второй вид потери устойчивости);

возникновением трещин, надрывов;

комбинированным действием указанных факторов.

Естественно, что поверхности предельных состояний при потере устойчивости первого и второго вида будут резко различны. Так, при увеличении доли растягивающих напряжений возможность потери устойчивости первого вида будет уменьшаться, а второго — увеличиваться.

Предельные возможности процесса обтяжки характеризуются вторым видом потери устойчивости, т. е. определенным утонением (деформацией по толщине листа ε_3), которое задается техническими условиями на поставку изделия. В качестве показателя, характеризующего форму обшивки, обычно принимают коэффициент обтяжки $K_{обт} = \frac{l_{max}}{l_{min}}$. Он связан с деформацией в направлении растягивающей силы следующим соотношением [26], [37]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = K_{обт} - 1 = \frac{l_{max}}{l_{min}} - 1, \quad (3.36)$$

где l_{max} и l_{min} — максимальная и минимальная длина образующих детали. Обозначим отношение деформаций по толщине материала и в направлении растягивающей силы через

$\alpha_2 = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{1 - K_{обт}}$ и свяжем его с напряженным состоянием. С

этой целью воспользуемся либо физическими уравнениями (2.11), либо уравнениями связи показателей напряженного и деформированного состояния.

После несложных преобразований будем иметь

$$\alpha_2 = \frac{\mu_{21}(m_1 - \mu_{12})}{\mu_{12}(1 - \mu_{21}m_1)} + 1 \quad (3.37)$$

или

$$\alpha_2 = \frac{\nu_\sigma(D-1) + (D-C)}{\nu_\sigma(D+1) - (D+C)}, \quad (3.38)$$

Эти уравнения несколько упрощаются в случае материала с $\mu_{12} \approx \mu_{21}$

$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon_3}{1 - K_{обт}} = \frac{m_1 - \mu_{12}}{1 - \mu_{12}m_1} + 1 \quad (3.39)$$

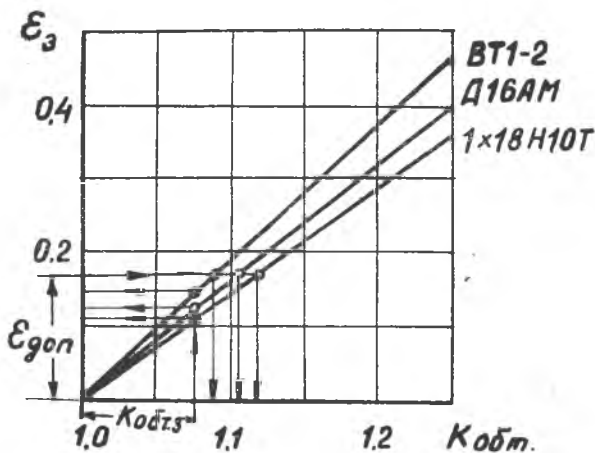


Рис. 3.9. Зависимость утонения обшивки от обтягиваемого материала

$$\alpha_2 = \frac{(\nu_\sigma + 3)(\mu_{12} + 1)}{\mu_{12}(\nu_\sigma + 1) - 2} \quad (3.40)$$

Полученные соотношения устанавливают зависимость геометрических параметров изделия, утонения материала, его анизотропии с напряженным состоянием. Покажем эту зависимость графически (рис. 3.9) для сплавов

Д16АМ с $\mu_{12} \approx \mu_{21} = 0,35$

ВТ1—2 с $\mu_{12} \approx \mu_{21} = 0,70$

1Х18Н10Т с $\mu_{12} \approx \mu_{21} = 0,47$

Величину m_1 , основываясь на данных параграфа 3.2, возьмем равной 0,1.

Из графика видно, что при одинаковом геометрическом коэффициенте обтяжки утонение металла тем меньше, чем больше μ_{12} . Другими словами, при одинаковом утонении листа для материалов с большими значениями μ_{12} можно допускать более высокий коэффициент обтяжки. Отсюда ясно, что анизотропия, наряду с другими факторами, оказывает заметное влияние на предельное формоизменение при данной операции.

Теперь рассмотрим, как определяется предельное формоизменение, которое характеризуется при обтяжке суммарно-допустимой степенью деформации по толщине листа, либо связанным с ней удлинением наружного волокна.

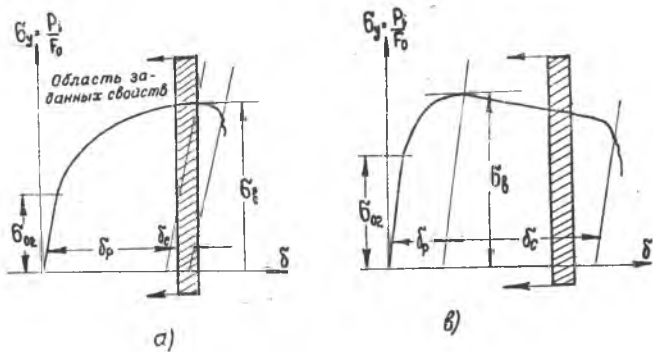


Рис. 3.10. Типовые диаграммы растяжения: а — сплав АМгб; б — сплав ОТ4-1

На предельное формоизменение оказывают влияние следующие факторы:

характер поведения металла при его деформировании. Например, необходимо рассматривать соотношения равномерного и сосредоточенного удлинения, пределов текучести и прочности, деформаций по ширине и толщине испытуемого образца и т. д.;

характер эксплуатации изделия и связанный с этим необходимый запас прочности и пластичности;

изменение свойств материала в процессе промежуточной и окончательной термообработки.

Следует подчеркнуть, что перечисленные факторы взаимосвязаны и в общем случае их нужно изучать комплексно.

Упрощенно можно сказать, что, если к изделию не предъявляются повышенные эксплуатационные требования, в качестве характеристики предельно-допустимой степени деформации может быть использована величина равномерного удлинения δ_p , хотя у некоторых металлов при такой деформации практически исчерпывается запас пластичности.

Однако при изготовлении ответственных деталей, входящих в силовые узлы летательных аппаратов, δ_p не может быть однозначно принята в качестве предельной характеристики металла при его штамповке. Это связано с тем, что готовое изделие должно обладать вполне определенным комплексом свойств, который и накладывает свои ограничения при назначении допустимого формоизменения.

Рассмотрим данный вопрос более подробно на примерах алюминиевых (АМгб) и титановых (ОТ4-1) сплавов. С этой целью проанализируем их типовые диаграммы растяжения (рис. 3.10). Из сравнения диаграмм видно, что после деформации на δ_p запас пластичности и прочности указанных материалов резко различен. Так, у АМгб ($\delta_p \approx 20\%$, $\delta_{10} \approx 28\%$) об-

ласть сосредоточенной деформации невелика, а $\sigma_v = \frac{P_{max}}{F_0}$ и $\sigma_k = \frac{P_k}{F_0}$ близки друг к другу, поэтому при дальнейшей незначительной деформации материал может разрушиться. Следовательно, здесь $\epsilon_{доп}$ должен быть меньше δ_r .

У сплава ОТ4-1 иная картина. После деформирования на величину δ_r остается большой запас пластичности за счет сосредоточенной деформации. В связи с этим можно допустить дальнейшее удлинение металла без его разрушения. А поскольку область сосредоточенной деформации велика, то при наличии нужного запаса пластичности (прочности), формоизменение обшивки возможно и при $\epsilon_{доп} > \delta_r$.

На практике техническими условиями задают определенные механические характеристики, учитывающие необходимый запас прочности и пластичности.

Однако этого еще недостаточно, чтобы сделать окончательный вывод о той или иной степени допустимого формоизменения. Необходимо также учесть характер отношения деформаций по ширине и толщине образца как в равномерной, так и в сосредоточенной области (рис. 3.11), что является прямым следствием проявления анизотропии свойств металла.

Из графиков видно, что процесс образования шейки начинается в направлении наибольшего утонения. Так у сплава АМгб ($\mu_{12} \approx \mu_{21} = 0,42 \div 0,45$) шейка возникает по толщине образца, однако общепринятый подход к определению равномерного удлинения не учитывает этого явления. Поэтому δ_r фактически будет меньше, чем рассчитанное по моменту образования шейки в направлении ширины образца. Их относительная разница составляет 20—25%.

Наоборот, у титанового сплава ОТ4-1 ($\mu_{12} \approx 0,75$) шейка развивается в направлении ширины, что сразу и выявляется при стандартных испытаниях.

Для установления числа переходов при обтяжке с растяжением необходимо:

1) определить допустимую степень деформации за первый переход ϵ_L , исходя из положений, рассмотренных выше. Например, листы из АМгб, учитывая условия

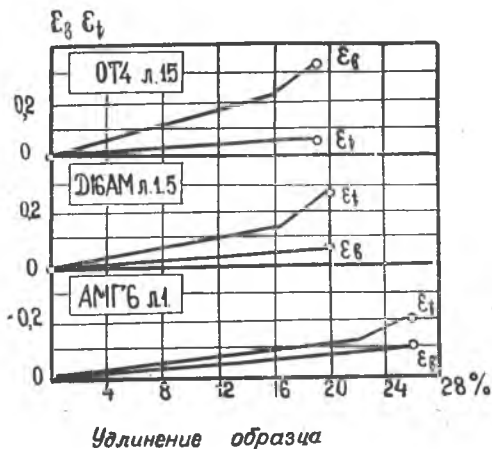


Рис. 3.11. Характер распределения деформаций по толщине и ширине образца

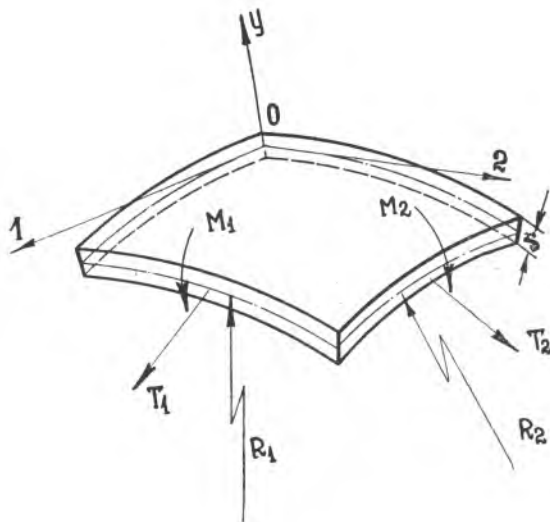


Рис. 3.12: Схема нагружения при обтяжке

сохранения механических свойств, нельзя деформировать более 6—8%. У титановых сплавов в качестве предельно допустимой степени за первый переход может быть принято δ_p [38];

2) выяснить, как и насколько изменяются (восстанавливаются) механические свойства при межоперационной термической обработке. Здесь вопрос сводится к тому, чтобы найти предельную деформацию за переход $\epsilon_{тер.}$, при которой нагартовка полностью снимается отжигом.

Зная указанные величины, а также суммарно-допустимую степень деформации $\sum_{n=1}^m \epsilon_n$, нетрудно получить формулу для определения числа переходов

$$n = 1 + \frac{\sum_{n=1}^m \epsilon_n - \epsilon_I}{\epsilon_{тер.}} \quad (3.41)$$

$\sum_{n=1}^m \epsilon_n$ находится, как уже отмечалось, из трех условий (а, б и в).

Отметим, что помимо допустимой степени деформирования нужно учитывать деформацию, обеспечивающую необходимую точность процесса. Их сравнение позволяет судить о возможности изготовления детали методом обтяжки.

Пружинение при обтяжке с растяжением

Возникающее после снятия внешних сил пружинение детали происходит за счет упругих деформаций. Следовательно, для

нахождения его величины необходимо решить упругую задачу на основе теоремы о разгрузке А. А. Ильюшина (13). И хотя при этом приходится прибегать к использованию уравнений пластичности, здесь они нужны лишь для нахождения момента начала разгрузки.

Определение пружинения при обтяжке в строгом решении представляет собой довольно сложную задачу из-за наличия у обшивки двойной кривизны. В связи с этим приходится прибегать к некоторым упрощениям. Так, если рассмотреть общую схему

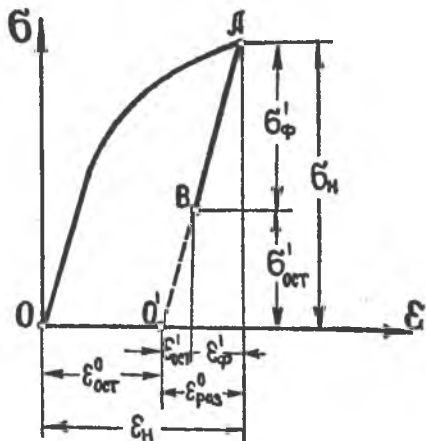


Рис. 3.13. Схема разгрузки

нагружения (рис. 3.12), то в ней можно пренебречь (по причинам, указанным ранее) величиной растягивающего усилия T_2 . Будем также считать, что оболочка в продольном направлении имеет радиус R_1 , а в поперечном — R_2 . Вследствие незначительной кривизны и малой толщины оболочки радиус нейтральной поверхности примерно равен радиусу срединной поверхности.

И, наконец, при решении задачи примем обычные допущения технической теории оболочек [13], [39]:

совокупность материальных частиц, расположенных на нормали к срединной поверхности до деформации, расположена также на нормали и после деформации;

все компоненты напряжений, имеющие направление нормали к срединной поверхности, малы и при расчете не учитываются.

Прежде чем приступить к определению величины пружинения, рассмотрим схему напряжений и деформаций при разгрузке (рис. 3.13).

В результате нагрузки в точке тела возникли напряжения σ_n и соответствующие им деформации ϵ_n . При этом обшивка получает форму поверхности обтяжного пуансона.

После снятия внешних сил полной разгрузки не происходит из-за влияния геометрии детали. Следовательно, фактически разгрузка происходит до какой-то точки B , что соответствует уменьшению деформации на величину $\epsilon'_ф$, а напряжений — на $\sigma'_ф$. Поэтому в детали будут иметь место остаточные упругие деформации $\epsilon'_{ост}$ и напряжения $\sigma'_{ост}$.

Для нахождения изменения формы и размеров оболочки при ее разгрузке необходимо найти деформацию $\epsilon'_ф$. Она может

быть определена из следующей алгебраической суммы упругих деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{1 \text{ ост}} &= \varepsilon'_{1\phi} + \varepsilon^0_{1 \text{ раз}}, \\ \varepsilon'_{2 \text{ ост}} &= \varepsilon'_{2\phi} + \varepsilon^0_{2 \text{ раз}}.\end{aligned}\quad (3.42)$$

По гипотезе нормалей имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{1\phi} &= \varepsilon'_1 + \alpha_1 y \\ \varepsilon'_{2\phi} &= \varepsilon'_2 + \alpha_2 y,\end{aligned}\quad (3.43)$$

где ε'_1 и ε'_2 — упругие деформации срединной поверхности; α_1 и α_2 — изменение кривизны вследствие разгрузки.

Деформации полной разгрузки $\varepsilon^0_{1 \text{ раз}}$ и $\varepsilon^0_{2 \text{ раз}}$ определяются из закона Гука для ортотропных тел [12]:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{1 \text{ раз}} &= -\left(\frac{\sigma_{1н}}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{2н}\right) \\ \varepsilon^0_{2 \text{ раз}} &= -\left(\frac{\sigma_{2н}}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{1н}\right),\end{aligned}\quad (3.44)$$

где E_1 и E_2 — модули упругости соответствующих направлений, а $\nu_1 = \nu_{21}$ и $\nu_2 = \nu_{12}$ — коэффициенты Пуассона. Знак минус показывает на то, что деформация при разгрузке противоположна нагрузке.

Теперь, подставляя в формулы (3.42) значения $\varepsilon'_{1\phi}$, $\varepsilon'_{2\phi}$, $\varepsilon^0_{1 \text{ раз}}$ и $\varepsilon^0_{2 \text{ раз}}$, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{1 \text{ ост}} &= \varepsilon'_1 + \alpha_1 y - \left(\frac{\sigma_{1н}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{2н}}{E_2}\right) \\ \varepsilon'_{2 \text{ ост}} &= \varepsilon'_2 + \alpha_2 y - \left(\frac{\sigma_{2н}}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{1н}}{E_1}\right).\end{aligned}\quad (3.45)$$

Остаточные упругие напряжения вычисляются также по закону Гука

$$\begin{aligned}\sigma'_{1 \text{ ост}} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon'_{1 \text{ ост}} + \nu_2 \varepsilon'_{2 \text{ ост}}) \\ \sigma'_{2 \text{ ост}} &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon'_{2 \text{ ост}} + \nu_1 \varepsilon'_{1 \text{ ост}})\end{aligned}\quad (3.46)$$

или, заменяя в этих формулах остаточные деформации их значениями из (3.45), найдем

$$\begin{aligned}\sigma'_{1 \text{ ост}} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} [(\varepsilon'_1 + \nu_2 \varepsilon'_2) + (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) y] - \sigma_{1н} \\ \sigma'_{2 \text{ ост}} &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} [(\varepsilon'_2 + \nu_1 \varepsilon'_1) + (\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1) y] - \sigma_{2н}.\end{aligned}\quad (3.47)$$

Как известно, внутренние усилия и моменты определяются из выражений

$$T_1 = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \sigma_1 dy, \quad M_1 = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \sigma_1 y dy, \quad M_2 = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \sigma_2 y dy. \quad (3.48)$$

Подставляя в (3.48) соотношения (3.47) и проводя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} T'_{1 \text{ ост}} &= C_{11} \varepsilon'_1 + C_{12} \varepsilon'_2 - T_{1н} \\ M'_{1 \text{ ост}} &= D_{11} \varkappa_1 + D_{12} \varkappa_2 - M_{1н} \\ M'_{2 \text{ ост}} &= D_{22} \varkappa_2 + D_{12} \varkappa_1 - M_{2н}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь введены общепринятые обозначения

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1 S}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{12} = C_{21} = \frac{E_1 \nu_2 S}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{E_2 \nu_1 S}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ D_{11} &= \frac{E_1 S^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)} \quad D_{22} = \frac{E_2 S^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12} = D_{21} = \\ &= \frac{E_1 \nu_2 S^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)} = \frac{E_2 \nu_1 S^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}. \end{aligned}$$

Входящие в систему (3.49) $T_{1н}$, $M_{1н}$ и $M_{2н}$ также вычисляются по формуле (3.48), однако для этого необходимо знать величины деформаций $\varepsilon_{1н}$ и $\varepsilon_{2н}$, чтобы по ним определить напряжения $\sigma_{1н}$ и $\sigma_{2н}$.

Так как при развитых пластических деформациях (§ 3.2) схема напряженного состояния срединной поверхности оболочки близка к линейной, то $\varepsilon_2 = -\mu_{21} \varepsilon_1$, где ε_1 и ε_2 — пластические деформации срединного слоя.

По гипотезе Кирхгофа-Лява [39] имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1н} &= \varepsilon_1 + \frac{y}{R_1}, \\ \varepsilon_{2н} &= -\mu_{21} \varepsilon_1 + \frac{y}{R_2}. \end{aligned}$$

Из уравнений связи между напряжениями и деформациями в случае плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E'_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_1 + \mu_{12} \varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E'_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_2 + \mu_{21} \varepsilon_1), \end{aligned}$$

найдем

$$\sigma_{1н} = \frac{E'_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left[(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \varepsilon_1 + y \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) \right].$$

$$\sigma_{2H} = \frac{E'_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} y \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right).$$

Принимая степенной закон упрочнения в виде $\sigma_{i1} = K_1 \varepsilon_{i1}^n$ или $\sigma_1 = K_n \varepsilon_1^n$ и учитывая, что $\varepsilon_{i1} \approx \varepsilon_1$, а K_n близок к K_1 , получим

$$\sigma_{1H} = K_1 \varepsilon_1^{n-1} \left[\varepsilon_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) \right] \frac{y}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad (3.50)$$

$$\sigma_{2H} = K_1 \varepsilon_1^{n-1} y \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right) \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}.$$

Подставим значение этих напряжений в формулы (3.48). Тогда

$$M_{1H} = K_1 \varepsilon_1^{n-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{S^3}{12}, \quad (3.51)$$

$$M_{2H} = K_1 \varepsilon_1^{n-1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right) \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{S^3}{12}.$$

Теперь уравнение (3.49) можно записать в виде

$$M'_{1\text{ост}} = \frac{S^3}{12} \left[\frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} (x_1 + \nu_2 x_2) - K_1 \varepsilon_1^{n-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \right], \quad (3.52)$$

$$M'_{2\text{ост}} = \frac{S^3}{12} \left[\frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} (x_2 + \nu_1 x_1) - K_1 \varepsilon_1^{n-1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right) \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \right]$$

или

$$M'_{1\text{ост}} = \frac{S^3}{12} \left[\frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} (x_1 + \nu_2 x_2) - \frac{E'_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) \right], \quad (3.52a)$$

$$M'_{2\text{ост}} = \frac{S^3}{12} \left[\frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} (x_2 + \nu_1 x_1) - \frac{E'_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right) \right],$$

где

$$E'_1 = \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}}; \quad E'_2 = \frac{\sigma_{i2}}{\varepsilon_{i2}}.$$

Изменения кривизны x_1 и x_2 вычислим из условия равенства нулю остаточных моментов. При этом их величина будет несколько завышена, так как в действительности $M'_{\text{ост}} \neq 0$.

Исходя из принятого допущения, получим следующую систему уравнений:

$$x_1 + \nu_2 x_2 = \frac{E'_1 (1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right)$$

$$\kappa_2 + \nu_1 \kappa_1 = \frac{E_2' (1 - \nu_1 \nu_2)}{E_2 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right),$$

откуда найдем

$$\kappa_1 = \left[\frac{E_1'}{E_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) - \frac{\nu_2 E_2'}{E_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right) \right] \frac{1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \quad (3.53)$$

$$\kappa_2 = \left[\frac{E_2'}{E_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_{21}}{R_1} \right) - \frac{\nu_1 E_1'}{E_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_{12}}{R_2} \right) \right] \frac{1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}.$$

Учитывая, что $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$ и $E_1 \mu_{12} = E_2 \mu_{21}$, перепишем соотношения (3.53) в виде

$$\kappa_1 = \frac{E_1'}{E_1} \left[\frac{1}{R_1} (1 - \mu_{12} \nu_1) + \frac{\mu_{12}}{R_2} \left(1 - \frac{\nu_1}{\mu_{21}} \right) \right] \frac{1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \quad (3.54)$$

$$\kappa_2 = \frac{E_2'}{E_2} \left[\frac{1}{R_2} (1 - \mu_{21} \nu_2) + \frac{\mu_{21}}{R_1} \left(1 - \frac{\nu_2}{\mu_{12}} \right) \right] \frac{1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}.$$

При чисто упругом деформировании после снятия нагрузки лист восстанавливает свою первоначальную форму. Следовательно, остаточная кривизна у детали будет отсутствовать. Тогда $E_1' = E_1$, а формулы (3.54) приобретают вид

$$\frac{1}{R_{1 \text{ ост}}} = \left[(\nu_1 - \mu_{21}) \frac{1}{R_1} - \left(1 - \frac{\nu_1}{\mu_{21}} \right) \frac{1}{R_2} \right] \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}$$

$$\frac{1}{R_{2 \text{ ост}}} = \left[(\nu_2 - \mu_{12}) \frac{1}{R_2} - \left(1 - \frac{\nu_2}{\mu_{12}} \right) \frac{1}{R_1} \right] \frac{\mu_{21}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}.$$

Естественно, что $\frac{1}{R_{1 \text{ ост}}}$ и $\frac{1}{R_{2 \text{ ост}}}$ равны нулю лишь при $\nu_1 = \mu_{21}$ и $\nu_2 = \mu_{12}$.

При анализе гибки с растяжением (деформация поверхностей одинарной кривизны) в уравнениях (3.54) следует положить либо $\kappa_1 = 0$, либо $\kappa_2 = 0$. При этом получаем равенства $\nu_1 = \mu_{21}$ и $\nu_2 = \mu_{12}$.

Рассмотрим, как в общем случае меняются значения ν_k и μ_{ke} в процессе пластического нагружения и последующей разгрузки.

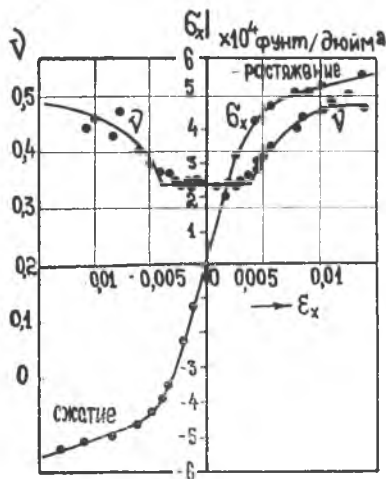


Рис. 3.14. Изменение коэффициента поперечной деформации в упругой и пластической области

Коэффициенты $\mu_{ке}$ вычисляются по изменению размеров образца после снятия нагрузки, следовательно, они соответствуют остаточной деформации. Они могут быть приняты постоянными при различных степенях формоизменения (см. § 1.7).

Для вычисления результирующего коэффициента поперечной деформации ν воспользуемся уравнением, приведенным в работе [41]:

$$\nu = \nu'' - \frac{(\nu'' - \nu') \epsilon_x'}{\epsilon_x}, \quad (3.55)$$

где ϵ_x' — упругая часть деформации;

ϵ_x — полная деформация, состоящая из упругой ϵ_x' и остаточной ϵ_x'' ;

ν' и ν'' соответствуют упругой и остаточной деформации.

Уравнение (3.55) хорошо подтверждается экспериментально [41] (рис. 3.14). Его можно записать несколько иначе:

$$\frac{\nu}{\nu''} = 1 - \left(1 - \frac{\nu'}{\nu''}\right) \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_x''}{\epsilon_x'}}. \quad (3.55a)$$

В начале нагружения в упругой области остаточная деформация отсутствует, т. е. $\frac{\epsilon_x''}{\epsilon_x} = 0$. Из выражения (3.55a) следует, что $\nu = \nu_1$. Таким образом, здесь результирующий коэффициент является коэффициентом Пуассона. При дальнейшем нагружении в пластической зоне ϵ_x'' возрастает быстрее, чем упругая часть деформации. Это очевидно из того факта, что модуль пластичности имеет тенденцию к уменьшению, а модуль упругости остается постоянным. В связи с этим отношение $\frac{\epsilon_x''}{\epsilon_x}$ увеличивается, что в свою очередь приводит к уменьшению выражения $\left(1 - \frac{\nu'}{\nu''}\right) \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_x''}{\epsilon_x'}}$ и стремлению его к нулю при

больших пластических деформациях. Поэтому разница между ν и ν'' становится незначительной и при практических расчетах ею можно пренебречь и считать $\nu \approx \nu''$. Заметим, что точное совпадение результирующего и остаточного коэффициентов, как это следует из (3.55a), получается при полной разгрузке образца; упругая часть деформации уменьшается, происходит изменение коэффициента ν .

Если считать, что при полной разгрузке восстанавливается первоначальный объем, то [41]

или

$$(1 - 2\nu') \epsilon_x' = -(1 - 2\nu'') \epsilon_x''$$

$$\frac{\varepsilon_x''}{\varepsilon_x'} = - \frac{1 - 2\nu'}{1 - 2\nu''} \quad (3.56)$$

В этот момент должно соблюдаться равенство

$$\nu = \nu'' \quad (3.57)$$

Подставляя (3.56) и (3.57) в уравнение (3.55а), получим

$$\frac{1 - \frac{\nu'}{\nu''}}{1 - \frac{1 - 2\nu'}{1 - 2\nu''}} = 0.$$

Отсюда следует, что $\nu' = \nu''$.

В действительности, особенно при деформировании оболочек двойной кривизны, полной разгрузки не происходит. Поэтому между ν' и ν'' наблюдается определенное несовпадение. Возможные значения ν' находят в диапазоне результирующих (в начале разгрузки) и остаточных коэффициентов. Для практических расчетов примем равенство $\nu' = \nu''$, заранее зная, что это приведет к несколько завышенным результатам при определении пружинения.

Тогда уравнения (3.54) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{E_1'}{E_1} \frac{1}{R_1} \\ \alpha_2 &= \frac{E_2'}{E_2} \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{1 \text{ ост}}} &= \left(1 - \frac{E_1'}{E_1}\right) \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_{2 \text{ ост}}} &= \left(1 - \frac{E_2'}{E_2}\right) \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (3.58a)$$

Проанализируем полученные соотношения. С этой целью рассмотрим кривую истинных напряжений (рис.3.15). Как видно из графика, с увеличением деформации происходит уменьшение тангенса наклона прямой, определяющей модуль пластичности E' , в то время как модуль упругости остается постоянным. Следовательно, отношение $\frac{E'}{E}$ будет уменьшаться с ростом деформации и, как видно из уравнений, это приведет к повышенной точности изделия. Ясно также, что для получения заданной величины пружинения γ материалов с разными модулями упругости необходимо, чтобы отношение $\frac{E'}{E}$ при прочих равных условиях было одинаковым. А это возможно лишь за счет изменения

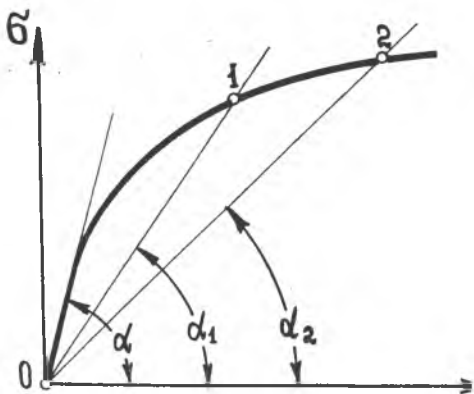


Рис. 3.15. Изменение модуля упругости и пластичности в зависимости от деформации

(рис. 3.16):

$$\delta_1 = \sqrt{R_{1\text{ост}}^2 - (R_{1\text{ост}} - R_1)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - R_1 - (R_{1\text{ост}} - R_1) \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\delta_2 = \sqrt{R_{2\text{ост}}^2 - (R_{2\text{ост}} - R_2)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} - R_2 - (R_{2\text{ост}} - R_2) \cos \frac{\beta}{2}$$

или

$$\delta_1 = R_{1\text{ост}} \sqrt{1 - \left(\frac{R_{1\text{ост}} - R_1}{R_{1\text{ост}}}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - R_1 - (R_{1\text{ост}} - R_1) \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\delta_2 = R_{2\text{ост}} \sqrt{1 - \left(\frac{R_{2\text{ост}} - R_2}{R_{2\text{ост}}}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} - R_2 - (R_{2\text{ост}} - R_2) \cos \frac{\beta}{2}.$$

Так как отношения $\left(\frac{R_{1\text{ост}} - R_1}{R_{1\text{ост}}}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ и $\left(\frac{R_{2\text{ост}} - R_2}{R_{2\text{ост}}}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$ малы по сравнению с единицей (близки к нулю), то ими можно пренебречь и тогда величины зазоров можно определять по формулам

$$\delta_1 \approx (R_{1\text{ост}} - R_1) \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right), \quad (3.59)$$

$$\delta_2 \approx (R_{2\text{ост}} - R_2) \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right).$$

В случае трансверсально изотропного тела и равенства углов охвата и радиусов R_1 и R_2 , $\delta_1 = \delta_2$.

Тогда

$$\delta = (R_{\text{ост}} - R) \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.60)$$

модуля пластичности, иначе говоря — за счет изменения величины пластической деформации. Величина E' должна учитывать влияние анизотропии металла и второй кривизны оболочки.

В практике вместо изменения кривизны часто задается допуск на величину зазора между обшивкой и макетом. Тогда из геометрических соображений можно получить

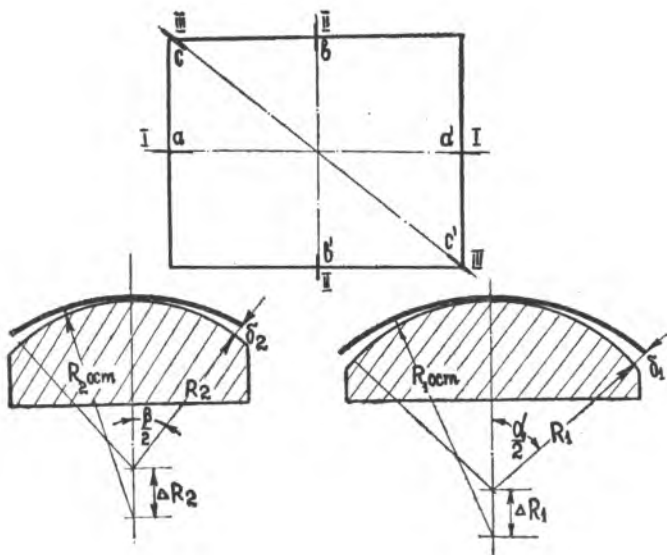


Рис. 3.16. Схема упругой отдачи при обтяжке

Полученная формула для учета величины пружинения прошла экспериментальную проверку. С этой целью были спроектированы пуансоны, форма и размеры которых выбраны в результате анализа обшивок ряда изделий. Опыты проводились по технологии, принятой на производстве, с использованием промежуточного отжига и калибровочной операции. При расчете учтено, что входящая в модуль пластичности интенсивность напряжения определяется по деформации калибровочной операции, а не по суммарной за все переходы, так как отжиг снимает упрочнение металла.

Экспериментальная проверка (рис. 3.17) показала, что наблюдается практическая сходимость значений δ , полученных из опыта и рассчитанных по формулам (3.60).

Контроль процесса обтяжки

В процессе обтяжки с растяжением необходимо фиксировать момент,

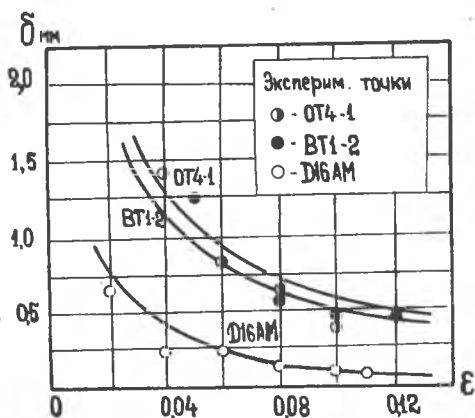


Рис. 3.17. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по отклонению обшивки от макета

когда заготовка примет заданную форму и размеры, с учетом влияния пружинения металла. Этот момент обычно определяется либо по величине усилия, развиваемого прессом, либо по значениям результирующих деформаций на поверхности обшивки. Поэтому необходимо знать взаимосвязь усилия или деформации наружных волокон с геометрическими параметрами детали и допустимым отклонением δ . Естественно, при этом следует учесть и свойства материала.

Покажем эту возможность. Пусть контроль процесса проводят по деформациям. Тогда, воспользовавшись формулой (3.58а), выразим $R_{\text{ост}}$ и соответственно δ через константы металла и размеры изготавливаемой оболочки*.

$$\delta_1 = R_1 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \frac{E_1'}{E_1 - E_1'}. \quad (3.61)$$

Учитывая, что $E_1' = K_1 \varepsilon_1^{n-1}$, из (3.61) найдем

$$\varepsilon_1 = \left\{ \frac{\delta_1 E_1}{K_1 \left[\delta_1 + R_1 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \right]} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.62)$$

Теперь, имея связь между деформациями наружного $\varepsilon_{\text{н}}$ и среднего ε_1 волокон

$$\varepsilon_{\text{н}} = \varepsilon_1 + \frac{S}{2R_1},$$

запишем формулу (3.62) в следующем виде:

$$\varepsilon_{\text{н}} = \left\{ \frac{\delta_1 E_1}{K_1 \left[\delta_1 + R_1 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \right]} \right\}^{\frac{1}{n-1}} + \frac{S}{2R_1}. \quad (3.63)$$

Выражение (3.63) целесообразно представить в несколько иной форме:

$$\varepsilon_{\text{н}} = \left(\frac{K_1}{E_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[1 + \frac{R_1}{\delta_1} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \right]^{\frac{1}{1-n}} + \frac{S}{2R_1}, \quad (3.64)$$

где $A = \frac{K_1}{E_1}$ — учитывает свойства металла;

$B = 1 + \frac{R_1}{\delta_1} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$ — характеризует геометрию детали и допустимое отклонение;

$C = \frac{S}{2R_1}$ — относительная толщина материала, показывающая разницу в деформациях наружного и среднего волокон.

* Здесь и в дальнейшем будем считать материал трансверсально изотропным.

Таким образом, формулу (3.63) в сокращенной форме можно записать так:

$$\epsilon_n = A^{\frac{1}{1-n}} B^{\frac{1}{1-n}} + C. \quad (3.65)$$

Рассмотрим случай, когда контроль процесса производится по усилию, которое может быть подсчитано по формуле

$$P = F(1 - \psi) \sigma_i e^{f \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.66)$$

где F — площадь поперечного сечения заготовки;

ψ — относительное сужение материала при требуемой степени деформирования;

$e^{f \frac{\alpha}{2}}$ — коэффициент, учитывающий влияние сил трения.

Формулу (3.66) можно несколько упростить, если воспользоваться следующим разложением:

$$e^{f \frac{\alpha}{2}} \approx 1 + f \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \psi = \frac{1}{1 + \epsilon_1} \approx 1 - \epsilon_1.$$

При обтяжке с растяжением угол $\frac{\alpha}{2}$ обычно невелик ($8-10^\circ$). Если учесть также, что при деформировании большинства сплавов коэффициент их трения с материалом пуансона f не превышает 0,2, то слагаемое $f \frac{\alpha}{2}$ будет меньше 0,03. Поэтому для практических расчетов формулу (3.66) можно записать в виде

$$P = F \sigma_i (1 - \epsilon_1). \quad (3.67)$$

Заменим σ_i известным выражением $\sigma_i = K_1 \epsilon_1^n$.

Тогда

$$\frac{P}{F} = K_1 \epsilon_1^n (1 - \epsilon_1).$$

Используя уравнение (3.62), получим

$$\frac{P}{F} = \frac{E_1 (1 - \epsilon_1) \epsilon_1}{1 + \frac{R_1}{\delta_1} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{K_1 (1 - \epsilon_1) \epsilon_1}{AB}. \quad (3.68)$$

Из (3.68) видно, что если задать значения ϵ_1 и вычислить параметры A и B , то получим величину удельного усилия, при котором необходимо прекращать процесс обтяжки.

Формулу (3.66) можно преобразовать, выразив деформацию через указанные коэффициенты:

$$\frac{P}{FK_1} = A^{\frac{n}{1-n}} B^{\frac{n}{1-n}} \left(1 - A^{\frac{1}{1-n}} B^{\frac{1}{1-n}}\right). \quad (3.69)$$

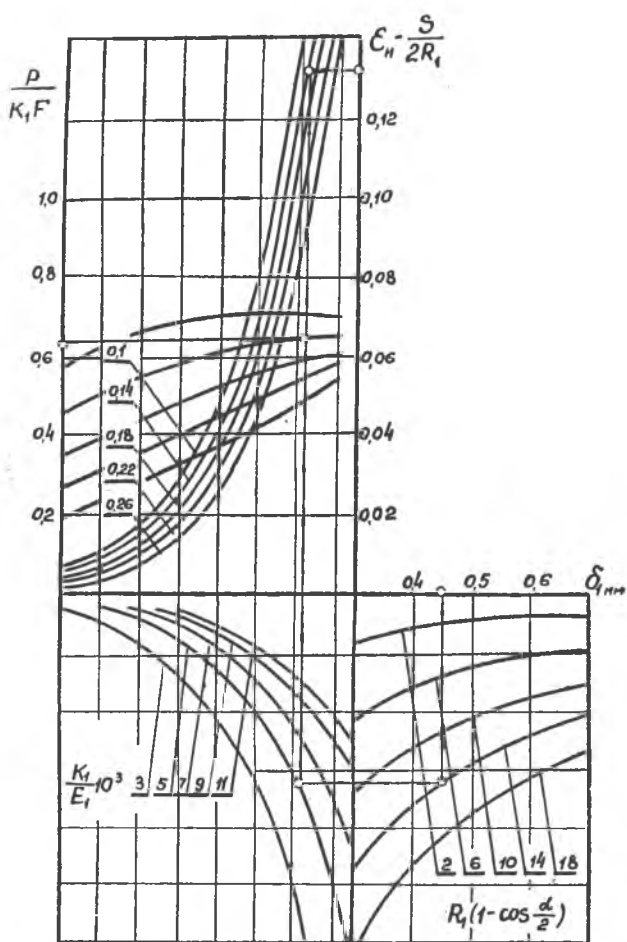


Рис. 3.18. Номограмма для определения пружинения

Для уменьшения объема технологических расчетов формулы (3.63) и (3.69) представим в виде номограммы (рис. 3.18).

В общем случае для определения P и ϵ_n можно применить вычисление на ЭВЦМ.

Ниже приложена программа расчета уравнений (3.63) — F_1 и (3.69) — F_2 (рис. 3.19), написанная на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 для ЭВЦМ «БЭСМ-4» (транслятор ТА-1М).

§ 3. 4. ГИБКА ШИРОКИХ ЛИСТОВ

Для определения основных параметров гибки используем схему напряженно-деформированного состояния и уравнения (3.24), изложенные в § 3.2.

поэтому $\rho = y + \rho_n$. Помимо того, вместо логарифмических здесь можно использовать относительные деформации, что и приводит к выражению

$$\sigma_{\Theta} = \frac{K'_{\Theta}}{\rho_n^n} y^n. \quad (3.70)$$

Подставляя (3.70) в формулу (3.48a), после интегрирования найдем изгибающий момент на единицу ширины

$$M_n = \frac{K'_{\Theta} S^2}{2^{n+1} (n+2) \left(\frac{\rho_n}{S}\right)^n}. \quad (3.71)$$

Второй случай характерен тем, что радиальными напряжениями пренебрегать нельзя. Практически это может быть при небольших относительных радиусах изгиба, особенно если материал имеет μ_{12} и $\mu_{21} > 0,5$.

Согласно (3.24)

$$\sigma_{\Theta} = K'_{\Theta} \left(\ln \frac{\rho}{\sqrt{Rr}} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \ln \frac{\rho}{\sqrt{Rr}} \right) - \frac{K'_{\Theta}}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}.$$

Из-за дробности показателя степени n выражение (3.24) перед интегрированием приходится упрощать.

Радиальные напряжения смещают нейтральный слой относительно срединного (см. рис. 3.3) в сторону внутренней поверхности на некоторую величину C , т. е. $C = r_{cp} - \rho_n$ и тогда можно записать $\frac{\rho}{\rho_n} = 1 + \frac{y+c}{\rho_n}$. Поэтому

$$\sigma_{\Theta} = K'_{\Theta} \left[\ln \left(1 + \frac{y+c}{\rho_n} \right) \right]^n \left[1 + \frac{1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{y+c}{\rho_n} \right) \right] - \frac{K'_{\Theta}}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}.$$

Разложим натуральный логарифм в ряд по известной формуле

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \dots \quad (-1 < x \leq +1),$$

в результате получим

$$\sigma_{\Theta} = K'_{\Theta} \left(\frac{c+y}{\rho_n} \right)^n \left[1 - \frac{c+y}{2\rho_n} + \frac{(c+y)^2}{3\rho_n^2} \right]^n \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} \left[\frac{c+y}{\rho_n} - \frac{(c+y)^2}{2\rho_n^2} + \frac{(c+y)^3}{3\rho_n^3} \right] \right\} - \frac{K'_{\Theta}}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}.$$

Здесь можно пренебречь величиной $\frac{(c+y)^3}{3(n+1)\rho_H^3}$ ввиду ее малости в сравнении с единицей. Кроме того, воспользуемся приближенной формулой типа $(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$. Проведя указанные преобразования, найдем

$$\sigma_\Theta = K'_\Theta \left(\frac{c+y}{\rho_H} \right)^n \left\{ 1 + n \left[\frac{(c+y)^2}{3\rho_H^2} - \frac{c+y}{2\rho_H} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} \left[\frac{c+y}{\rho_H} - \frac{(c+y)^2}{2\rho_H^2} \right] \right\} - \frac{K'_\Theta}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}.$$

После перемножения и отбрасывания членов со вторыми и третьими степенями выражение σ_Θ примет вид

$$\sigma_\Theta = \frac{K'_\Theta}{\rho_H^n} (c+y)^n \left[1 + \frac{(2-n)(c+y)}{2\rho_H(n+1)} \right] - \frac{K'_\Theta}{n+1} \left(\ln \sqrt{\frac{R}{r}} \right)^{n+1}$$

Подставим найденное значение σ_Θ в формулу изгибающего момента

$$M_H = \frac{K'_\Theta}{\rho_H^n} \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} (c+y)^n y dy + \frac{K'_\Theta(2-n)}{2(n+1)\rho_H^{n+1}} \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} (c+y)^{n+1} y dy.$$

Интегрируя и подставляя пределы, получим

$$M_H = \frac{K'_\Theta}{\rho_H^n(n+1)(n+2)} \left\{ (C+0,5S)^{1+n} [0,5S(n+1) - C] + \right. \\ \left. + (C-0,5S)^{1+n} [0,5S(n+1) + C] - \frac{2-n}{2\rho_H} \left[(C+0,5S)^{n+2} \left(0,5S - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{C+0,5S}{n+3} \right) + (C-0,5S)^{n+2} \left(0,5S - \frac{0,5S-C}{n+3} \right) \right] \right\} \quad (3.72)$$

Нетрудно видеть, что при $C=0$ приходим к формуле (3.71). Выражение (3.72) можно несколько упростить, если использовать разложение $(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$. С этой целью через α обозначим отношение $\frac{C}{0,5S}$; учтем, что $n+1$ — степень четная, а $n+2$ — нечетная. Тогда

$$M_H = \frac{K'_\Theta(0,5S)^{n+2}}{\rho_H^n(n+1)(n+2)} \left[2(n+1)(1-\alpha)^2 + \frac{(2-n)S\alpha(4n+3)^2}{2\rho_H(n+3)} \right].$$

Пренебрегая значениями α^2 и $2\alpha n^2$, после несложных преобразований будем иметь

$$M_H = \frac{K'_\Theta S^2}{2^{n+1} \left(\frac{\rho_H}{S} \right)^n (n+2)} \left[1 + \frac{n+2}{2(n+1)} \left(\frac{r_{cp}}{\rho_H} - 1 \right) \right]. \quad (3.73)$$

Сравнивая формулы (3.71) и (3.73), замечаем, что они отличаются друг от друга величиной

$$\frac{K'_\Theta S^2}{2^{n+1}(n+2)\left(\frac{\rho_n}{S}\right)^n} \left(\frac{r_{\text{ср}}}{\rho_n} - 1\right). \quad (3.74)$$

При больших относительных радиусах гйба, когда ρ_n практически совпадает с $r_{\text{ср}}$, выражение (3.74) близко к нулю и расчет изгибающего момента следует производить по формуле (3.71).

Упругая отдача листового металла после гибки

Согласно теореме о разгрузке А. А. Ильюшина, для определения упругой отдачи можно воспользоваться двумя формулами

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_n - \sigma_{\text{раз}} \quad \text{или} \quad \epsilon_{\text{ост}} = \epsilon_n - \epsilon_{\text{раз}},$$

где σ_n и ϵ_n определяются по уравнениям теории пластичности, а $\sigma_{\text{раз}}$ и $\epsilon_{\text{раз}}$ — теории упругости.

При использовании закона Гука для ортотропного тела и принятой схемы напряженно-деформированного состояния будем иметь

$$\sigma_{\text{раз}} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \kappa y. \quad (3.75)$$

Следует подчеркнуть, что при выводе формул для определения величины пружинения изотропного тела часто используют закон Гука в форме $\sigma = E\epsilon$. Такой подход в случае ортотропного материала следует исключить, так как он может привести к значительным ошибкам.

Если не учитывать влияние радиальных напряжений, то согласно (3.70),

$$\sigma_n = \sigma_\Theta = \frac{K'_\Theta}{\rho_n^n} y^n,$$

тогда получим

$$\sigma_{\text{ост}} = \frac{K'_\Theta}{\rho_n^n} y^n - \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \kappa y$$

и

$$M_{\text{ост}} = \frac{K'_\Theta S^{n+2}}{\rho_n^n (n+2) 2^{n+1}} - \frac{E_1 S^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)} \kappa.$$

Считая, что после разгрузки остаточный момент равен нулю, найдем изменение кривизны

$$\kappa = \frac{K'_\Theta S^{n-1} (1 - \nu_1\nu_2) \cdot 3}{E_1 \rho_n^n (n+2) 2^{n-1}} \quad (3.76)$$

или

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho_{\text{н}}} - \frac{3(1 - \nu_1\nu_2) K'_{\Theta} S^{n-1}}{2^{n-1} (n+2) \rho_{\text{н}}^n E_1} \quad (3.76a)$$

Точно к такому же уравнению придем и при использовании зависимости $\epsilon_{\text{ост}} = \epsilon_{\text{н}} - \epsilon_{\text{раз}}$. При этом $\epsilon_{\text{раз}}$ можно выразить в виде известной формулы теории упругости

$$\epsilon_{\text{раз}} = \frac{M_{\text{н}}(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1 I_1} \quad (3.77)$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho_{\text{н}}} - \frac{M_{\text{н}}(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1 I_1} \quad (3.78)$$

где $\frac{E_1 I_1}{1 - \nu_1\nu_2}$ — цилиндрическая жесткость.

Из уравнения (3.76) найдем

$$\rho_{\text{ост}} = \frac{\rho_{\text{н}}}{1 - \frac{3K'_{\Theta}(1 - \nu_1\nu_2)}{(n+2)E_1} \left(\frac{2\rho_{\text{н}}}{S}\right)^{1-n}} \quad (3.79)$$

Отметим, что при гибке моментом приближенного равенства $1 - \nu_1\nu_2 \approx 1 - \mu_{12}\mu_{21}$ не наблюдается, так как здесь пластические деформации невелики, а эпюра σ_{Θ} имеет зоны разного знака.

Угол пружинения определим из условия сохранения длины нейтрального волокна до и после разгрузки $\alpha_{\rho_{\text{н}}} = \alpha_{\text{ост}} \rho_{\text{ост}}$. Отсюда

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{\text{ост}} = \left(1 - \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_{\text{ост}}}\right) \alpha.$$

Заменяя $\rho_{\text{ост}}$ его значением, определим угол пружинения

$$\Delta\alpha = \frac{3K'_{\Theta}(1 - \nu_1\nu_2)}{(n+2)E_1} \left(\frac{2\rho_{\text{н}}}{S}\right)^{1-n} \alpha. \quad (3.80)$$

Для практических целей вместо $\rho_{\text{н}}$ удобнее пользоваться внутренним радиусом r . Тогда

$$\Delta\alpha = \frac{3K'_{\Theta}(1 - \nu_1\nu_2)}{(n+2)E_1} \left(\frac{2r}{S} + 1\right)^{1-n} \alpha. \quad (3.81)$$

Для углагиба 90° приведем расчет пружинения по различным формулам с использованием наших экспериментов и значений, приведенных в работе [40], которые представлены в таблице 6.

Определение усилия при гибке

Значение величины изгибающего момента позволяет определить усилие при различных способахгиба широких листовых заготовок.

Материал	z раб.	$\Delta\alpha$ по формуле (3.81)	$\Delta\alpha$ без учета анизотропии	$\Delta\alpha$ эксперим.
Д16АМ	2	2,5°	2,7°	2,55 ÷ 2,85°
ВТ1—2	3	9,3°	7,2°	10 ÷ 10,5°
ОТ4—1	3,5	11,1°	8,1°	≈ 12°

Усилие деформирования металла зависит от схемыгиба, и в каждом конкретном случае оно находится различным образом, что исключает получение единой формулы.

В качестве примера рассмотрим процесс штамповки-гибки материала резиной по формблоку. Теоретические вопросы, связанные с этим процессом, наиболее полно изложены в книге Е. И. Исаченкова [22], которую и возьмем за основу.

Давление резины, необходимое для изгиба заготовки, может быть определено из условия равенства моментов внутренних и внешних сил. $M_{в}$ определяется формулой (3.71). Внешние силы создают следующий момент единичной ширины (рис: 3.20)

$$M_{н} = \frac{q_{\varphi} a^2}{2}, \quad \text{где } a = A - \rho_{н} \varphi.$$

$$\text{Тогда } M_{н} = \frac{q_{\varphi} (A - \rho_{н} \varphi)^2}{2}.$$

Приравнивая моменты, найдем значение потребного давления резины

$$q_{\varphi} = \frac{K'_{\theta} S^2}{2^n (n+2) \left(\frac{\rho_{н}}{S}\right)^n (A - \rho_{н} \varphi)^2}. \quad (3.82)$$

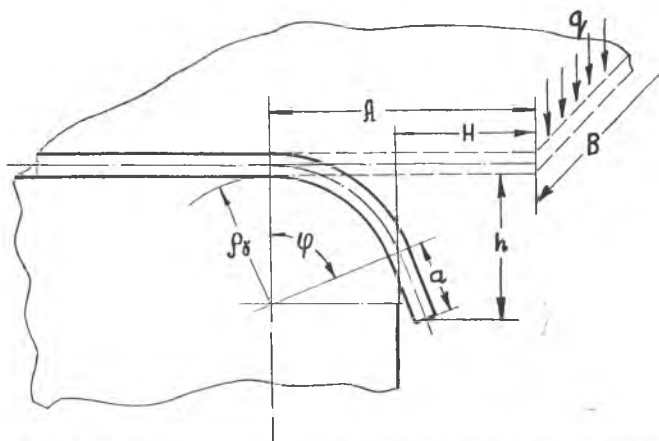


Рис. 3.20. Расчетная схема действия сил при гибке резиной

При гибке на прямой угол для плотного прилегания борта необходим дополнительный припуск материала. Величину припуска, значение параметров A и a определяют по формулам, указанным в работе [22]. Из таблицы 7 видно влияние анизотропии на потребное давление резины.

Таблица 7

Материал	$q_p (A - r_n \varphi)^2$ [кг] с учетом анизотропии	$q_p (A - r_n \varphi)^2$ [кг] без учета анизотропии
Д16АМ	12,5	13,6
ВТ1—2	51	40
ОТ4—1	60	44,5

Пределные возможности гибки

Пределные возможности гибки характеризуются минимально допустимым радиусомгиба, в основу определения которого положен критерий начала разрушения металла. Наиболее опасным местом с точки зрения возможного разрушения является наружная выпуклая поверхность изгибаемого листа. Здесь наблюдается двухосное растяжение, в то время как остальные слои материала (по толщине) испытывают более «мягкие» схемы с наличием сжимающих напряжений. Поэтому значение минимального радиусагиба определится допустимой деформацией на внешнем растягивающем волокне.

Вопрос о минимальном радиусегиба исследовался многими учеными ([21], [26], [27], [28] и др.). Несмотря на это, пока нет единого мнения о том, какие характеристики стандартных испытаний можно принять за основу при расчете r_{\min} и каким образом учесть схему напряженного состояния.

В связи с этим остановимся на одном из методов определения минимального радиусагиба, предложенном Г. А. Смирновым-Аляевым [23].

Для учета схемы напряженно-деформированного состояния автор вводит коэффициент жесткости

$$П = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}$$

Экспериментальные данные Г. А. Смирнова-Аляева и его сотрудников позволили установить связь критической деформации $(e_i)_{кр}$ при различных схемах напряженного состояния с деформацией разрушения одноосного растяжения в виде

$$(e_i)_{кр} = 2(e_i)_p e^{-0,72n}. \quad (3.83)$$

В итоге им получено следующее выражение относительного минимального радиусагиба

$$\frac{r_{\min}}{S} = \frac{1 - 0,5(1 - \psi_m)^{-0,47}}{(1 - \psi_m)^{-0,47} - 1}. \quad (3.84)$$

Следует отметить, что показатель жесткости Г. А. Смирнова-Аляева по сути дела является величиной пропорциональной относительному среднему напряжению σ^0 , т. е.

$$\Pi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1} = \sqrt{2} \sigma^0.$$

Ввиду этого им практически удобно пользоваться лишь при частных видах напряженно-деформированного состояния, например, при плоской деформации или плоском напряженном состоянии.

На выпуклой поверхности изгибаемого листа, как уже отмечалось, возникает двухосное растяжение. При этом соотношение между σ_θ и σ_z определяется наличием плоской деформации, т. е. $\sigma_z = \mu_{12} \sigma_\theta$. Из (3.30) очевидно, что

$$\Pi = \frac{m_1 + 1}{\sqrt{m_1^2 - m_1 + 1}}.$$

Подставляя значение напряжений, получим

$$\Pi = \frac{1 + \mu_{12}}{\sqrt{1 - \mu_{12} + \mu_{12}^2}}.$$

Выражение (3.83) представим в виде

$$(e_i)_{кр} = (e_i)_p \cdot K, \quad (3.85)$$

где

$$K = f(\Pi), \quad \text{а } (e_i)_p = \ln \frac{1}{1 - \psi_{ш}},$$

$\psi_{ш}$ — сужение металла при разрыве образца.

При свободном гйбе листа главные компоненты деформации на выпуклой поверхности равны

$$e_\theta = \ln \frac{r + S}{r + 0,5S}; \quad e_\rho = -e_\theta; \quad e_z = 0.$$

Для ортотропного материала в случае плоской деформации

$$e_{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} e_\theta$$

или

$$e_{i\theta} = \beta_1 \ln \frac{\frac{r}{S} + 1}{\frac{r}{S} + 0,5},$$

где $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}}$.

Подставляя значение e_{10} в формулу (3.85) и решая относительно $\frac{r}{S}$, найдем

$$\frac{r_{\min}}{S} = \frac{1 - 0,5(1 - \psi_{\text{ш}})^{\frac{K}{\beta_1}}}{(1 - \psi_{\text{ш}})^{\frac{K}{\beta_1}} - 1}. \quad (3.86)$$

Принимая $K = 2e^{-0,72n}$, получим

$$\frac{r_{\min}}{S} = \frac{1 - 0,5(1 - \psi_{\text{ш}})^t}{(1 - \psi_{\text{ш}})^t - 1}, \quad (3.87)$$

где

$$t = -2\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \exp - \sqrt{\frac{(1 + \mu_{12})0,72}{1 - \mu_{12} + \mu_{12}^2}}. \quad (3.88)$$

Из формулы видно, что минимальный радиусгиба зависит от схемы напряженно-деформированного состояния, пластических свойств металла ($\psi_{\text{ш}}$) и его анизотропии (μ_{12} , μ_{21}).

В заключение приведем расчетные величины минимальных радиусовгиба с учетом и без учета анизотропии для некоторых авиационных листовых сплавов (таблица 8).

Таблица 8

Материал	μ_{12}	μ_{21}	$\psi_{\text{ш}}$	$\frac{r_{\min}}{S}$ (аниз.)	$\frac{r_{\min}}{S}$ (изотр.)
ВТ1-2	0,72	0,65	0,45 ÷ 0,5	3 ÷ 2,5	1 ÷ 0,8
ОТ4-1	0,8	0,72	0,4 ÷ 0,5	5,5 ÷ 3,5	2 ÷ 0,8
МА-8	0,66	0,58	0,3	3,8	2

Из таблицы 8 видно, что неучет анизотропии металла приводит к явно заниженным значениям $\frac{r_{\min}}{S}$. К практическим данным [30] ближе величины $\frac{r_{\min}}{S}$ (аниз.).

§ 3. 5. ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ЛИСТОВОГО МЕТАЛЛА НА ПРОЦЕСС ГЛУБОКОЙ ВЫТЯЖКИ

Одной из самых распространенных операций листовой штамповки является вытяжка без принудительного утонения стенки. При проектировании и отладке данного процесса важно правильно установить величину допустимого коэффициента вытяжки

Вытяжка со значениями коэффициентов ниже предельных приводит к браку по трещинам и отрыву данной части, а применение коэффициентов с большим запасом прочности вызывает повышение числа переходов. Последнее связано с увеличением

количества необходимых штампов, оборудования и возрастанием цикла изготовления.

Если учесть, что себестоимость штампуемых деталей определяется главным образом затратами на металл и штамповую оснастку, то вопрос правильного определения допустимых коэффициентов вытяжки является важным не только с точки зрения качества детали, но и с позиций экономики производства, рационального использования производственных площадей и оборудования.

Оптимальные коэффициенты вытяжки определяются величиной их предельного значения $m_{пр} = \frac{D_{изд}}{D_0}$ и зависят от геометрических параметров, физико-механических условий процесса (трения, подогрева и т. д.) и свойств материала. Характер и степень влияния указанных факторов на величину предельного коэффициента вытяжки весьма различны.

Анизотропия металла вызывает при вытяжке не только образование фестонов (ушек) на изделии, но и в значительной мере определяет величину предельного коэффициента. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Для упрощения теоретического анализа обычно показатели анизотропии в плоскости листа осредняют, принимая условно материал как бы трансверсально изотропным. Обычно средний показатель анизотропии вычисляют по трем $\varphi = 0-45^\circ-90^\circ$, либо по пяти направлениям $\varphi = 0-22,5^\circ-45^\circ-67,5^\circ-90^\circ$ [42]. В данной работе принято

$$\mu_{ср} = \frac{\frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} + \mu_{45} + \mu_{22,5} + \mu_{67}}{4}. \quad (3.89)$$

Для анализа влияния анизотропии на предельный коэффициент вытяжки воспользуемся известным положением о том, что максимальное осевое усилие, возникающее при свертке фланца, P'_{max} не превышает усилия, вызывающего разрыв в наиболее опасном месте вытянутого участка изделия P''_{max} .

При предельном коэффициенте вытяжки $m_{пр} = \frac{D_{изд}}{D_0}$ имеем равенство $P'_{max} = P''_{max}$.

Примем в наиболее опасном месте (участок перехода стенки в дно) схему плоской деформации $\varepsilon_2 = 0$ (отсутствует тангенциальная деформация).

Для нахождения эффективного растягивающего напряжения воспользуемся методом совместного решения уравнений равновесия и условия пластичности.

Согласно (2.8) условие пластичности будет иметь вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_{t1}}{\sqrt{1 - \mu_{ср}^2}}, \quad (3.90)$$

где σ_1, σ_3 — главные напряжения, возникающие в шейке.

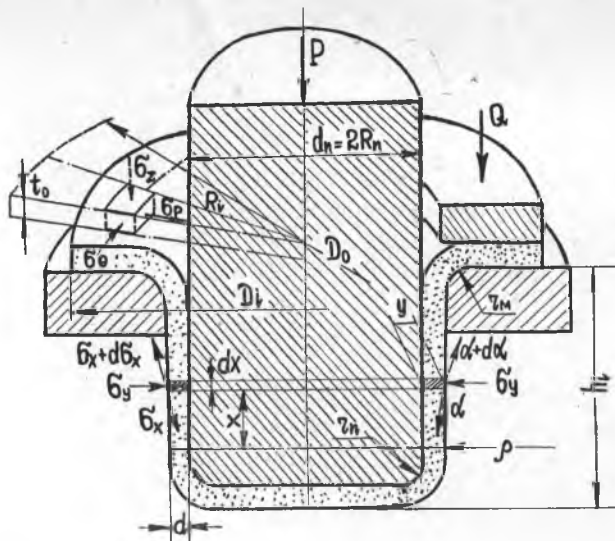


Рис. 3.21. Расчетная схема действия при его обтяжке

Уравнение равновесия выделенного элемента (рис. 3.21) при граничных условиях ($\frac{dy}{dx} = 0$, $y = a$, $d\sigma_x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$, $\sigma_y = \sigma_3$, $\sigma_x = \sigma_1 = q_0$) имеет вид

$$\sigma_3 = -\sigma_1 \frac{(2R_n + a)a}{2\rho \cdot 2(R_n + a)}, \quad (3.91)$$

где R_n — радиус пуансона;
 a — толщина изделия в шейке;
 ρ — радиус кривизны в шейке.

Обычно в реальных процессах вытяжки отношение $\frac{2R_n}{S_0}$, а следовательно, и $\frac{2R_n}{a}$ весьма велико (более 20), поэтому можно принять $\frac{2R_n + a}{2(R_n + a)} \approx 1$.

Тогда выражение (3.91) можно записать следующим образом:

$$\sigma_3 = -\sigma_1 \frac{a}{2\rho}. \quad (3.92)$$

Решая совместно уравнения (3.90) и (3.92), получим

$$\sigma_1 = q_0 = \frac{\sigma_{i1}}{\sqrt{1 - \mu_{cp}^2 \left(1 + \frac{a}{2\rho}\right)}}. \quad (3.93)$$

Максимальное усилие P''_{\max} , соответствующее моменту потери устойчивости и началу разрушения, будет составлять

$$P''_{\max} = \frac{\sigma_B F_0}{\sqrt{1 - \mu_{\text{ср}}^2} \left(1 + \frac{a}{2\rho}\right)}. \quad (3.94)$$

Теперь, если известны величины a и ρ , нетрудно подсчитать P''_{\max} . Однако эксперименты показали, что толщина стенки a по отношению к радиусу профиля шейки ρ пренебрежимо мала, поэтому формулу (3.94) можно упростить

$$P''_{\max} = \frac{\sigma_B F_0}{\sqrt{1 - \mu_{\text{ср}}^2}}. \quad (3.95)$$

В случае изотропного материала ($\mu_{\text{ср}} = 0,5$) получим известное соотношение

$$P''_{\max} = 1,15\sigma_B F_0.$$

Максимальное усилие P'_{\max} можно определить по формуле

$$P'_{\max} = p_1 F_0, \quad (3.96)$$

где p_1 — максимальное удельное давление при свертке фланца, находится из следующего выражения [21], [18]:

$$p_1 = (\sigma_\rho + \sigma_{\text{тр}})(1 + 1,6f) + \sigma_{\text{н}};$$

σ_ρ — радиальное растягивающее напряжение, непосредственно связанное с сопротивлением металла деформированию;

$\sigma_{\text{тр}}$ — удельное сопротивление трения от силы прижима;

f — коэффициент трения;

$\sigma_{\text{н}}$ — удельное сопротивление от изгиба на входной кромке матри-

цы, равное [21]
$$\sigma_{\text{н}} = \frac{\sigma_B}{2 \frac{r_M}{S_0} + 1}.$$

На основании анализа, проведенного А. А. Шофманом [18], экстремальные значения σ_ρ могут быть определены из выражения

$$\sigma_\rho = \varphi_1 \left(\frac{1}{m_{\text{нр}}} - \varphi_1' \right) \sigma_B \alpha', \quad (3.97)$$

где σ_B , φ_1 , φ_1' — константы деформируемого металла,

$\alpha' = \frac{\bar{\beta}}{1,1}$ — коэффициент, учитывающий влияние анизотропии

$$\bar{\beta} = \sqrt{\frac{2}{1 - \mu_{\text{ср}}}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \mu_{\text{ср}}}}{\sqrt{1 + \mu_{\text{ср}}}}. \quad (2.22)$$

Отметим, что формула (3.96) не учитывает относительной толщины изделия, поэтому и окончательное выражение, учитывающее анизотропию, будет страдать этим же недостатком. Можно было бы воспользоваться выводами других авторов,

например, Е. А. Попова [21], однако в работе для упрощения анализа этого не делается, так как основная задача заключается в показе влияния анизотропии.

Значение $\sigma_{тр}$ может быть выражено через величину радиальных растягивающих напряжений, если принять положение И. А. Норицына о том, что радиальное усилие прижима составляет $\approx 0,25$ усилия вытяжки [43]. В этом случае выражение (3.96) примет вид

$$P'_{max} = \sigma_b F_0 \left[\varphi_1 \left(\frac{1}{m_{пр}} - \varphi'_1 \right) \alpha' \eta + \frac{S_0}{2r_m + S_0} \right], \quad (3.98)$$

где η — коэффициент, учитывающий влияние трения на прижиме и радиусе матрицы

$$\eta = \frac{2(1 + 1,6f)}{2 - f(1 + 1,6f)}; \quad (3.99)$$

r_m — радиус закругления матрицы;

S_0 — толщина заготовки.

Приравнявая (3.95) и (3.98) и решая полученное уравнение относительно $\frac{1}{m_{пр}} = K_{пр}$, получим

$$K_{пр} = \frac{1}{m_{пр}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{ср}^2}} - \frac{S_0}{2r_m + S_0} \right) \frac{1}{\varphi'_1 \alpha' \eta} - \varphi'_1 \quad (3.100)$$

На графике (рис. 3.22) приведены зависимости величины предельной вытяжки от степени анизотропии и коэффициента

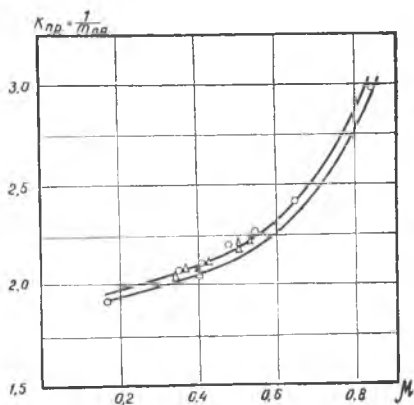


Рис. 3.22. Зависимость предельной вытяжки от коэффициента анизотропии материала

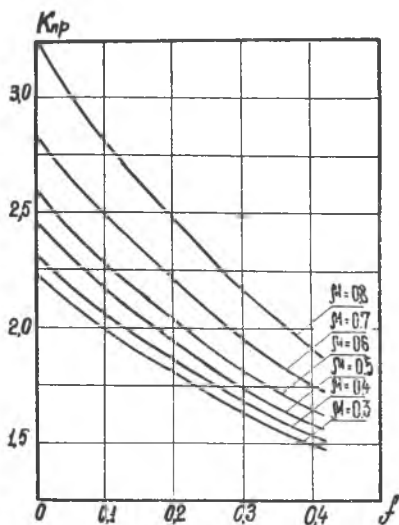


Рис. 3.23. Зависимость предельной вытяжки от коэффициента трения и степени анизотропии материала

трения для материалов с равномерным сужением $\Psi_p \approx 15 \div 25\%$. Из графика видно, что материалы, имеющие $\mu_{ср} > 0,5$, обладают большей способностью к вытяжке, чем материалы при $\mu_{ср} < 0,5$. Однако положительное влияние анизотропии может быть сведено на нет трением, возникающим при вытяжке. Отметим также, что уменьшение трения особенно эффективно для материалов с высокими значениями $\mu_{ср}$. Этим можно объяснить поведение некоторых листовых материалов при глубокой вытяжке. Например, у титановых сплавов с $\mu_{ср} \approx 0,8$ при смазке полиэтиленом $K_{пр} = 3,0$ [42]. В производственных условиях, где отмечается даже налипание металла на матрицу (при очень больших значениях коэффициента трения), величина $K_{пр} \approx 1,8 \div 2,0$ [30].

Для подтверждения теоретических зависимостей можно воспользоваться результатами экспериментов [42], [44] по определению предельной вытяжки ряда листовых материалов с различной степенью анизотропии (рис. 3.23). На графике видно довольно неплохое совпадение теоретических зависимостей и экспериментальных данных.

В заключение можно отметить, что полученная зависимость $K_{пр}$ от величин анизотропии, трения, свойств материала позволяет более правильно анализировать и проектировать процессы глубокой вытяжки.



Литература

1. Аквис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. «Наука», М., 1969.
2. Мухелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. «Высшая школа», М., 1967.
3. Гольдсвлат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. «Машиностроение», М., 1968.
4. Ольшак В. и др. Теория пластичности неоднородных тел. «Мир», М., 1964.
5. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung und Kristallen ZAMM, В8, НЗ, 1928.
6. Лицензи Е. К. Анизотропия машиностроительных материалов. «Машиностроение», Л., 1969.
7. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ГИТТИ, М., 1956.
8. Смирнов В. С., Дурнев В. Д. Текстурирование металлов при прокатке. «Металлургия», М., 1971.
9. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. «Наука», М., 1969.
10. Микляев Н. Г., Фридман Я. Б. Деформация и разрушение металлов с учетом анизотропии их механических свойств. Сб. МИФИ «Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях», вып. 11. «Атомиздат», М., 1968.
11. Шевелев В. В. Расчет контура заготовки при вытяжке анизотропного материала. Сб. «Исследования пластичности и обработки металлов давлением», Тула, 1968.
12. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. «Гостехиздат», М., 1947.
13. Ильющин А. А. Пластичность. «Гостехиздат», М., 1948.
14. Дегтярев В. П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. «Машиностроение», М., 1967.
15. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. «Высшая школа», М., 1968.
16. Фрейденталь А. и Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды «Физматгиз», М., 1962.
17. Lode W. Versuch über den Einfluss der mittleren Haupt auf das Fließen der Metalle-Eisen, Kupfer und Nickel Z. Physik, Bd 36; S 193, 1926. См. сб. «Теория пластичности» под ред. Ю. Н. Работнова, Ил, м., 1948.
18. Шофман Л. А. Теория и расчеты процессов холодной штамповки. «Машиностроение», М., 1964.
19. Taulrr G. and Quinney H. The Plastic Distortion of Metals Trans. Roy. Soc. (London) Series A vol, 230, 1939.
20. Губкин С. И. и др. Основы теории обработки металлов давлением. «Машгиз», М., 1959.
21. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. «Машиностроение», М., 1968.
22. Исаченков Е. И. Штамповка резиной и жидкостью. «Машиностроение», М., 1967.

23. Смирнов-Аляев Г. А. Механические основы пластической обработки металлов, «Машиностроение», Л., 1968.

24. Сторожев М. В., Попов Е. К. Теория обработки металлов давлением. «Машиностроение», М., 1971.

25. Шофман Л. А. Проблемные вопросы теории листовой штамповки. Сб. «Прогрессивная технология глубокой вытяжки листовых материалов», Тула, 1968.

26. Горбунов Н. Н. Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве летательных аппаратов. «Машиностроение», М., 1970.

27. Катков В. Ф., Шумакова Л. С. Об определении минимального радиусагиба по результатам испытаний на одноосное растяжение. «Кузнечно-штамповочное производство», № 6 М., 1967.

28. Романовский В. П. Справочник по холодной штамповке. «Машиностроение», М., 1965.

29. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов, том I. «Металлургия», М., 1961.

30. Никольский Л. А. Горячая штамповка из титановых сплавов. «Машиностроение», М., 1964.

31. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. «Наука», М., 1966.

32. Жуков А. М. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. «Инженерный сборник», т. XX, М., 1954.

33. Арышенский Ю. М., Уваров В. В., Юшков А. В. Анализ влияния анизотропии на напряжения при прокатке. «Известия вузов. Цветная металлургия», № 3, Орджоникидзе, 1970.

34. Смирнов В. С. Теория прокатки. «Металлургия», М., 1967.

35. Уваров В. В., Мордасов В. И. Некоторые вопросы анализа операций осесимметричного деформирования тонкостенных изделий из анизотропных материалов. Материалы конференции КуАИ, Куйбышев, 1972.

36. Лысов Н. И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. «Машиностроение», М., 1966.

37. Грмова А. Н., Завьялова В. И., Коробов В. К. Изготовление деталей из листов и профилей при серийном производстве. «Оборонгиз», М., 1960.

38. Юреник Т. А. Исследование влияния особенностей пластического деформирования титановых сплавов на определение технологических параметров формообразования. Автореферат кандидатской диссертации. Куйбышев, 1971.

39. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее применение в технике. «Гостехиздат», М., 1949.

40. Сапаровский С. В., Комаров А. Д., Смеляков Е. П., Фарманова В. Н. Штамповка резины. Куйбышев, 1964.

41. Надиу А. Пластичность и разрушение твердых тел, том 2. «Мир», М., 1969.

42. Wilson D V Peastic anisotropy in sheel metals J. Iust Metals, № 3, 1966.

43. Норцины И. А. Исследование глубокой вытяжки листового металла на первой и последующих операциях. Труды Московского вечернего машиностроительного института. Вып. II, «Советская наука», М., 1955.

44. Wilson D. V., Butler R. D. The roll of cup-drawing tests in measuriugdrawability I. Iust. Metals, № 12, 1962.

Кроме указанной литературы были использованы статьи, опубликованные автором совместно с сотрудниками кафедры в последние годы:

45. Арышенский Ю. М., Калужский И. И., Уваров В. В. Некоторые вопросы теории пластичности ортотропных сред. Известия вузов «Авиационная техника» № 2, Казань, 1969.

46. Арышенский Ю. М., Уваров В. В. О поверхности пластичности анизотропных сред. Материалы научно-технической конференции, Куйбышев, 1970.

47. Арышенский Ю. М., Уваров В. В. Частные выражения условия пластичности ортотропных материалов. Материалы научно-технической конференции, Куйбышев, 1970.

48. Арышенский Ю. М., Уваров В. В., Калужский И. И. Особенности пластического формоизменения листовых анизотропных металлов. Труды КуАИ, вып. 41, 1970.

49. Арышенский Ю. М., Уваров В. В., Калужский И. И. Анализ влияния анизотропии листового металла на коэффициент вытяжки. Труды КуАИ, вып. 41, 1971.

50. Арышенский Ю. М., Уваров В. В., Калужский И. И. К вопросу теории пластичности ортотропных сред. Труды КуАИ, вып. 41, 1970.

Оглавление

Введение	3
Глава I. Теория пластичности анизотропных сред	
§ 1.1. Некоторые сведения из тензорного исчисления	5
§ 1.2. Общие требования к критериям пластичности. Работы Р. Мизеса и Р. Хилла	7
§ 1.3. Условие пластичности анизотропных материалов с различными пределами текучести на сжатие и растяжение	11
§ 1.4. Теория пластичности ортотропных сред с одинаковыми пределами текучести на сжатие и растяжение (общий случай)	18
§ 1.5. Частный случай теории пластичности ортотропной среды (напряжение σ_{33} совпадает с главной осью анизотропии)	27
§ 1.6. Основные соотношения теории пластичности трансверсально изотропных тел	32
§ 1.7. Экспериментальная проверка основных положений теории	33
Глава II. Некоторые особенности применения инженерных методов расчета процессов листовой штамповки анизотропных материалов	
§ 2.1. Плоское деформированное состояние	45
§ 2.2. Плоское напряженное состояние	46
§ 2.3. Осесимметричное напряжение и деформированное состояние	47
§ 2.4. Упрощенная форма записи условия пластичности	48
§ 2.5. Связь между параметрами Надаи-Лоде напряженного $v\sigma$ и деформированного $v\epsilon$ состояния	53
§ 2.6. Метод совместного решения уравнений равновесия с условием пластичности	55
§ 2.7. Метод сопротивления материалов пластическим деформациям (СПДМ)	58

Глава 3. Влияние анизотропии на отдельные процессы листовой штамповки

§ 3.1. Учет влияния схемы напряженно-деформированного состояния при листовой штамповке	62
§ 3.2. Характер распределения напряжений и деформаций при процессах листовой штамповки, связанных с гибкой металла	65
§ 3.3. Обтяжка с растяжением (продольная обтяжка) листовых металлов и сплавов	71
§ 3.4. Гибка широких листов	92
§ 3.5. Влияние анизотропии листового металла на процесс глубокой вытяжки	101
Л и т е р а т у р а	107



Юрий Михайлович Арышенский

ТЕОРИЯ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ
АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Редактор *И. С. Кольшева*
Технический редактор *Н. М. Каленюк*
Корректор *Т. И. Щёлокова*

НГ71212. Подписано в печать 11.X.73 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 7.
Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 500 экз. Цена 76 коп.

Издательство Саратовского университета,
г. Саратов, ул. Университетская, 42.

Тип. изд-ва «Волжская коммуна», г. Куйбышев,
проспект Карла Маркса, 201. Заказ № 3244.