ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

Е. А. ДЕНИСКИНА, П. Э. КОЛОМИЕЦ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Учебное пособие

САМАРА 2006

УДК 519.2(075)

Денискина Е.А., Коломиец П.Э. **Статистический анализ данных:** Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2006. 64 с.

ISBN 5–7883–0339–7

Учебное пособие составлено в соответствии с действующей программой по курсу математики для инженерно – технических специальностей вузов и обеспечивает теоретическую и методическую поддержку расчетно–графической работы «Статистический анализ данных». В пособии описаны основные методы математической статистики, необходимые для исследования статистических данных различной природы.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов всех факультетов и специальностей СГАУ. Пособие может быть рекомендовано студентам для самостоятельной работы и подготовки к экзаменам, а также преподавателям для подготовки и проведения практических занятий по теме «Математическая статистика».

Табл.5. Ил. 13. Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, проф. А.И. Жданов;
канд. физ.-мат.наук, доц. Е.Я. Горелова

ISBN 5–7883–0339–7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистика – это прикладная математическая дисциплина, примыкающая к теории вероятностей. Она базируется на понятиях и методах теории вероятностей, но решает свои специфические задачи специальными методами.

Основная задача математической статистики – получить обоснованные выводы о параметрах, видах распределений и других свойствах случайных величин по конечной совокупности наблюдений над ними.

В учебном пособии рассматриваются основные методы анализа одномерных статистических данных: определение точечных и интервальных оценок параметров распределения, проверка гипотез о виде распределения. Рассматриваются также элементы корреляционного и регрессионного анализа двумерных статистических данных.

ЗАДАНИЕ

Часть 1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ ДАННЫХ

Дана выборка значений случайной величины X (выборка объема n из генеральной совокупности).

1. Найти выборочную оценку математического ожидания случайной величины X, указать свойства этой оценки.

2. Найти выборочные оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины X, указать свойства этих оценок.

3. Составить группированный вариационный ряд, разбив выборку на N равных интервалов.

4. Построить гистограмму и полигон относительных частот. На их основе выдвинуть нулевую гипотезу H_0 о виде распределения.

5. На одном чертеже с гистограммой построить график теоретической плотности вероятностей в соответствии с выдвинутой гипотезой H_0. Сделать

вывод о визуальном совпадении гистограммы с графиком плотности вероятностей.

6. Найти эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ и построить ее график.

7. На одном чертеже с эмпирической функцией распределения построить график теоретической функции распределения в соответствии с выдвинутой гипотезой H_0. Сделать вывод о визуальном совпадении графиков эмпирической и теоретической функций распределения.

8. С помощью критерия согласия χ^2 Пирсона проверить гипотезу H_0 о виде распределения генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$. Сделать статистический вывод.

9. Построить доверительные интервалы для неизвестных математического ожидания и дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами $m = \bar{x}$ и $\sigma = S_0$ при уровнях значимости $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$. Сделать вывод о ширине доверительного интервала в зависимости от уровня значимости α.

Указание: все вычисления проводить с точностью до 0,0001.

Часть 2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ДАННЫХ

Дана выборка из n наблюдений случайного вектора (X, Y). При этом $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

1. Определить выборочный коэффициент корреляции величин X и Y.

2. Составить уравнение линейной регрессии Y на X. Построить график уравнения линейной регрессии на одном чертеже с опытными данными.

3. Оценить качество линейной модели регрессии по коэффициенту детерминации R^2.

4. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ найти доверительный интервал, в который попадает прогнозное значение фактора y для $x^* = x_{\max} + 1$.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ ДАННЫХ

1.1. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА

В математической статистике рассматриваются случайные эксперименты, которые состоят в проведении n повторных независимых наблюдений над некоторой случайной величиной X, имеющей неизвестное распределение вероятностей.

Генеральной совокупностью называют множество всех возможных значений случайной величины X, наблюдаемой в эксперименте.

Выборкой называют часть генеральной совокупности $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то есть конечное подмножество значений случайной величины из множества элементов генеральной совокупности.

Объемом выборки n называют количество содержащихся в ней значений случайной величины X.

Задача математической статистики состоит в исследовании свойств выборки и обобщении этих свойств на всю генеральную совокупность. Требуется на основании выборочных данных приближенно определить закон распределения и проверить гипотезу о том, что случайная величина X подчинена именно этому закону.

Для того чтобы по выборке можно было достаточно уверенно судить о генеральной совокупности, выборка должна быть ***представительной*** (***репрезентативной***), то есть достаточно полно представлять признаки и параметры генеральной совокупности. Репрезентативность выборки улучшается при увеличении ее объема.

Выборка является исходной информацией для статистического анализа и принятия решений о неизвестных вероятностных характеристиках случайной величины X. Для этих целей на выборку следует смотреть как на набор реализаций n независимых одинаково распределенных случайных величин.

1.2. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $X_n = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ – выборка объема n из генеральной совокупности значений случайной величины X с математическим ожиданием M_X, дисперсией D_X и среднеквадратическим отклонением $\sigma_X = \sqrt{D_X}$.

Выборочным средним называется среднее арифметическое элементов выборки $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Согласно закону больших чисел при увеличении объема выборки среднее арифметическое сходится по вероятности к математическому ожиданию генеральной совокупности, то есть

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - M_X \right| \geq \varepsilon \right) = 0 .$$

Таким образом, среднее арифметическое может служить приближением (оценкой) математического ожидания M_X генеральной совокупности.

Выборочной дисперсией называется

$$S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 .$$

Модифицированной выборочной дисперсией называется

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n \cdot S^2}{n-1} .$$

Все эти выборочные числовые характеристики зависят от выборки и поэтому являются случайными величинами. Их значения лишь приближенно равны соответствующим числовым характеристикам генеральной совокупности.

Статистикой называется любая функция, зависящая от выборки. Таким образом, выборочное среднее $\bar{x}$, выборочная дисперсия S^2 и модифицированная выборочная дисперсия S_0^2 – это статистики.

Точечной оценкой $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ распределения случайной величины X называется такая функция от выборки (статистика) $\tilde{\theta}(X_n) = \tilde{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которой принимается за приближенное значение истинного параметра, то есть $\tilde{\theta}(X_n) \approx \theta$.

Оценки параметров принято обозначать символом с тильдой наверху: $\tilde{\theta}$.

Существует несколько методов нахождения точечных оценок: метод наименьших квадратов, метод моментов, метод максимального правдоподобия и другие. Таким образом, для каждого неизвестного параметра может быть несколько оценок, полученных различными методами. Для того чтобы точечная оценка давала хорошее приближение оцениваемому параметру, она должна обладать следующими свойствами:

1. Оценка $\tilde{\theta}$ параметра называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру θ:

$$M\left[\tilde{\theta}\right] = \theta.$$

Для нормального закона распределения известно, что $\bar{x}$ – несмещенная оценка математического ожидания M_X, S^2 – смещенная оценка дисперсии и S_0^2 – несмещенная оценка дисперсии D_X.

2. Оценка $\tilde{\theta}$ параметра называется ***состоятельной***, если она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемого параметра θ, то есть

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\tilde{\theta} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \ (\forall \varepsilon > 0).$$

Для нормального закона распределения состоятельной оценкой математического ожидания M_X является выборочное среднее $\bar{x}$, а состоятельными оценками дисперсии D_X – выборочная дисперсия S^2 и модифицированная выборочная дисперсия S_0^2.

3. Несмещенная оценка $\tilde{\theta}$ параметра называется ***эффективной***, если она имеет минимальную дисперсию среди всех несмещенных оценок этого

параметра. Для нормального закона распределения эффективной оценкой математического ожидания M_X является среднее арифметическое $\bar{x}$, а эффективных оценок дисперсии не существует. Однако S_0^2 и S^2 являются асимптотически эффективными оценками дисперсии D_X для этого закона.

П Р И М Е Р 1 (Задание, ч.1, пп. 1 и 2):

Пусть дана выборка значений случайной величины X (выборка объема $n = 100$ из генеральной совокупности) (табл.1).

Таблица 1

2,88	2,78	4,90	4,41	4,86	4,46	4,76	4,48	4,71	4,70
2,94	5,37	7,48	-3,32	5,79	8,55	8,27	5,65	7,23	7,95
2,95	2,44	7,89	2,45	5,90	2,45	2,67	2,50	2,67	2,51
5,16	4,40	9,12	5,52	1,56	8,46	1,34	5,69	9,57	-1,07
5,20	4,99	9,00	8,47	6,55	2,88	6,78	5,72	6,10	0,13
4,23	5,15	6,39	4,39	6,56	5,78	6,85	4,40	6,23	0,56
4,23	2,99	6,46	6,88	9,63	4,22	3,58	6,57	5,83	9,35
4,33	3,24	9,97	6,99	5,22	8,93	3,69	6,58	7,09	5,68
4,38	3,27	7,19	1,73	5,29	1,96	3,71	1,99	2,31	2,30
5,67	3,90	7,38	3,94	5,33	3,98	3,79	4,08	4,12	4,12

Требуется найти точечные оценки математического ожидания M_X, дисперсии D_X и среднеквадратического отклонения $\sigma_X = \sqrt{D_X}$ случайной величины X. Указать свойства этих оценок.

Оценкой математического ожидания случайной величины X служит выборочное среднее $\tilde{m}_X = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{100} \cdot 491{,}2900 = 4{,}9129$. Данная оценка $\tilde{m}_X = \bar{x}$ является несмещенной, эффективной и состоятельной.

Оценкой неизвестной дисперсии D_X случайной величины X служат выборочная дисперсия и модифицированная выборочная дисперсия, вычисляемые по формулам:

$$S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100} \cdot 2985{,}1739 - 4{,}9129^2 = 5{,}7152;$$

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n \cdot S^2}{n-1} = \frac{100 \cdot 5{,}7152}{99} = 5{,}7729.$$

Оценка S_0^2 является несмещенной, асимптотически эффективной и состоятельной, а S^2 – смещенная, асимптотически эффективная и состоятельная оценка. Следовательно, S_0^2 дает несколько лучшее приближение оцениваемой дисперсии, поэтому в дальнейших расчетах в качестве оценки дисперсии используется S_0^2: $\widetilde{D}_X = S_0^2$.

Оценка среднеквадратического отклонения, являющаяся несмещенной, асимптотически эффективной, состоятельной:

$$\widetilde{\sigma}_X = \sqrt{\widetilde{D}_X} = \sqrt{S_0^2} = S_0 = 2{,}4027.$$

Найденные оценки параметров распределения можно найти с помощью статистических функций СРЗНАЧ, ДИСП, ДИСПР и СТАНДОТКЛОН пакета прикладных программ EXCEL.

1.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Пусть $X_n = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ – выборка объема n из генеральной совокупности значений случайной величины X.

Разность между наибольшим и наименьшим элементами выборки $R = x_{\max} - x_{\min}$ называют ***размахом выборки.***

Статистическим рядом называется совокупность пар (i, x_i), полученных в результате эксперимента. Обычно статистические ряды оформляются в виде таблицы (табл.2), в первом столбце которой стоит индекс i (номер опыта), а во втором – наблюденное значение случайной величины x_i, которое называется ***вариантой***.

Если одна и та же варианта встречается в выборке несколько раз, то статистический ряд удобнее записывать в виде табл.3.

Таблица 2

Индекс i	Варианта x_i
1	x_1
2	x_2
...	...
n	x_n

Таблица 3

Индекс i	Варианта x_i	Частота n_i	Относит. частота $\overline{n}_i$
1	x_1	n_1	$\overline{n}_1$
2	x_2	n_2	$\overline{n}_2$
...	...	...	...
k	x_k	n_k	$\overline{n}_k$

Частотой n_i $(i=\overline{1,k})$ варианты x_i называется число повторений варианты x_i в выборке, причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Относительной частотой или ***весом*** $\overline{n}_i$ $(i=\overline{1,k})$ варианты x_i называется отношение частоты варианты x_i к объему выборки n, то есть $\overline{n}_i = \frac{n_i}{n}$, причем $\sum_{i=1}^{k} \overline{n}_i = 1$.

При большом числе наблюдений простой статистический ряд перестает быть удобной формой записи статистических данных. Для придания ему большей компактности и наглядности статистические данные подвергают дополнительной обработке – строят вариационные ряды или группированные вариационные ряды.

Вариационным рядом называется ***упорядоченная*** совокупность вариант x_i $(i=\overline{1,k})$ с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами $\overline{n}_i$.

Для построения ***группированного*** вариационного ряда интервал изменения выборочных значений случайной величины $[\, x_{\min}; x_{\max}\,]$ разбивают на N непересекающихся интервалов $[\, u_1 = x_{\min}; u_2\,]$, $(\, u_2; u_3\,]$, ..., $(\, u_N; u_{N+1} = x_{\max}\,]$, называемых ***частичными интервалами*** или ***разрядами***. Число интервалов группировки зависит от объема выборки и определяется по правилу:

$$N \geq [\, 1 + 3{,}32 \cdot \lg n\,] + 1,$$

где n – объем выборки, а квадратные скобки обозначают целую часть числа. Разбиение на малое число интервалов может привести к неверным статистическим выводам. Согласно этой формуле, необходимо брать не менее 8 интервалов на 100 наблюдений.

Интервалы могут быть как одинаковой длины, так и различной. Для упрощения дальнейшей обработки статистических данных интервалы можно делать одинаковой длины:

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N} = \frac{R}{N}.$$

Частотой n_i $(i = \overline{1, N})$ интервала $(\, u_i; u_{i+1}\,]$ называется число вариант x_i, попавших в этот интервал, при этом $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$. При группировке выборочных значений по разрядам возникает вопрос о том, к какому интервалу отнести значение, находящееся на границе двух разрядов. В этих случаях считают данное значение принадлежащим к левому интервалу.

Относительной частотой или ***весом*** $\overline{n}_i$ $(i = \overline{1, N})$ интервала $(\, u_i; u_{i+1}\,]$ называется отношение частоты интервала к объему выборки n: $\overline{n}_i = \frac{n_i}{n}$, при этом $\sum_{i=1}^{N} \overline{n}_i = 1$.

Накопленной относительной частотой w_i $(i=\overline{1,N})$ интервала $(u_i; u_{i+1}]$ называется сумма относительных частот первых i интервалов, то есть $w_i = \sum_{j=1}^{i} \overline{n}_j$.

Группированным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность непересекающихся интервалов с соответствующими им частотами n_i, относительными частотами $\overline{n}_i$ и накопленными относительными частотами w_i (табл.4).

Таблица 4

Индекс i	Интервал $(u_i; u_{i+1}]$	Частота n_i	Относит. частота $\overline{n}_i$	Накопл. относит. частота w_i
1	$[u_1; u_2]$	n_1	$\overline{n}_1$	$w_1 = \overline{n}_1$
2	$(u_2; u_3]$	n_2	$\overline{n}_2$	$w_2 = \overline{n}_1 + \overline{n}_2$
...	...	...	...	...
N	$(u_N; u_{N+1}]$	n_N	$\overline{n}_N$	$w_N = 1$
$\sum_{i=1}^{N}$		n	1	

ПРИМЕР 2 (Задание, ч.1, п.3):

Требуется составить группированный вариационный ряд для выборки из генеральной совокупности значений случайной величины X (табл.1), разбив выборку на $N = 10$ равных интервалов.

Данная выборка имеет объем $n = 100$.

Определим интервал изменения случайной величины X. Для этого в табл.1 находим максимальный и минимальный элементы:

$$x_{\max} = 9{,}97\,,\ x_{\min} = -3{,}32.$$

Определим размах выборки:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 13{,}29.$$

Для удобства дальнейшей обработки статистических данных округляем $x_{\max}$ и $x_{\min}$ до ближайших целых чисел таких, что $x_{\max}$ и $x_{\min}$ вошли бы в новый интервал:

$$x^{\circ}_{\max} = 10, \qquad x^{\circ}_{\min} = -4.$$

Тогда новый размах выборки $R^{\circ} = x^{\circ}_{\max} - x^{\circ}_{\min} = 14$.

Разбиваем выборку на $N = 10$ равных интервалов. Длина каждого частичного интервала равна $\Delta = \dfrac{R^{\circ}}{N} = \dfrac{14}{10} = 1{,}4$.

Частичные интервалы приведены во втором столбце табл.5.

Найдем количество вариант, попавших в каждый частичный интервал разбиения, и заполним третий столбец табл.5. Сумма всех частот должна быть равна $n = 100$.

Найдем относительные частоты $\overline{n}_i = \dfrac{n_i}{n}$ и накопленные относительные частоты $w_i = \sum_{j=1}^{i} \overline{n}_j$ (четвертый и пятый столбцы табл.5).

Группированный вариационный ряд оформим в табл.5.

Из табл.5 видно, что данная выборка имеет одну изолированную точку $x_{\min} = -3{,}32$, удаленную от группы других экспериментальных точек. В таком случае можно считать эту изолированную точку аномальным наблюдением, грубой ошибкой измерения и удалить ее из выборки. Тогда объем выборки уменьшится и будет равен $n = 99$. Изменятся также и

выборочные характеристики (в дальнейших расчетах будут использоваться именно эти значения): $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 4{,}9961,$

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 5{,}1332, \quad S_0 = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{5{,}1332} = 2{,}2657.$$

Таблица 5

Индекс i	Интервал $(u_i; u_{i+1}]$	Частота n_i	Относит. частота $\overline{n}_i$	Накопл. относит. частота w_i
1	[-4,0; -2,6]	1	0,01	0,01
2	(-2,6; -1,2]	0	0	0,01
3	(-1,2; 0,2]	2	0,02	0,03
4	(0,2; 1,6]	3	0,03	0,06
5	(1,6; 3,0]	18	0,18	0,24
6	(3,0; 4,4]	20	0,2	0,44
7	(4,4; 5,8]	24	0,24	0,68
8	(5,8; 7,2]	16	0,16	0,84
9	(7,2; 8,6]	9	0,09	0,93
10	(8,6; 10,0]	7	0,07	1
Сумма		100	1	

Замечание: Проверка гипотезы об аномальности наблюдения проводится следующим образом: значение x_m признается аномальным и выбрасывается из выборки объема n, если $|x_m - \bar{x}| \geq C_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}$, где значение квантили C_p определяется для данной доверительной вероятности p по таблице нормального распределения (см. приложение, табл.П3). Выберем доверительную вероятность $p = 0{,}95$ и по табл.П3 найдем $C_{0,95} = 1{,}645$. Значения $\bar{x}$ и S_0 определяются по выборке уменьшенного объема, то есть $\bar{x} = 4{,}9961$ и $S_0 = 2{,}2657$.

Проверим гипотезу об аномальности $x_{\min} = -3{,}32$:

$$| x_m - \bar{x} | = | -3{,}32 - 4{,}9961 | = 8{,}3161,$$

$$C_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1{,}645 \cdot 2{,}2657 \cdot \sqrt{\frac{101}{100}} = 3{,}7457.$$

Так как условие $| x_m - \bar{x} | \geq C_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ выполняется, точку $x = -3{,}32$ можно из выборки исключить. Соответственно в табл.5 можно исключить два первых интервала. Заметим, что число оставшихся интервалов группировки оказалось равно 8, что соответствует условию

$$N \geq [\, 1 + 3{,}32 \cdot \lg n \,] + 1 = [\, 1 + 3{,}32 \cdot \lg 99 \,] + 1 = 8.$$

В противном случае число интервалов пришлось бы увеличить.

Новое разбиение на интервалы оформим в табл.6.

Таблица 6

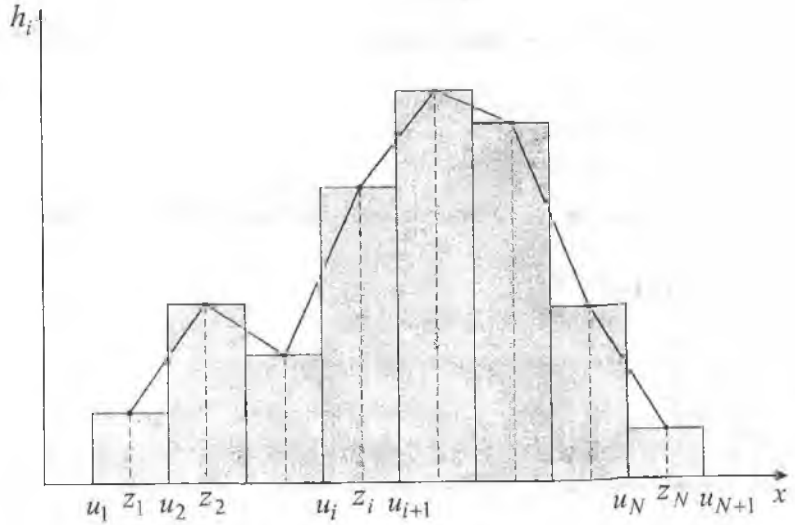
Индекс i	Интервал $(u_i; u_{i+1}]$	Частота n_i	Относит. частота $\bar{n}_i$	Накопл. относит. частота w_i
1	(-1,2; 0,2]	2	0,0202	0,0202
2	(0,2; 1,6]	3	0,0303	0,0505
3	(1,6; 3,0]	18	0,1818	0,2323
4	(3,0; 4,4]	20	0,2020	0,4343
5	(4,4; 5,8]	24	0,2424	0,6768
6	(5,8; 7,2]	16	0,1616	0,8384
7	(7,2; 8,6]	9	0,0909	0,9293
8	(8,6; 10,0]	7	0,0707	1,0000
Сумма		99	1,0000	

1.4. ГИСТОГРАММА И ПОЛИГОН ЧАСТОТ

Пусть $X_n = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ – выборка объема n из генеральной совокупности значений случайной величины X с неизвестной плотностью вероятностей $f(x)$. Приближением (оценкой) неизвестной плотности

вероятностей могут служить ***гистограмма*** или ***полигон относительных частот***. Гистограмма и полигон относительных частот служат для графического изображения группированного вариационного ряда.

Гистограмма относительных частот представляется в виде примыкающих друг к другу прямоугольников с основаниями $\Delta = \frac{R}{N}$, равными ширине интервалов группировки, и высотами $h_i = \frac{\overline{n}_i}{\Delta} = \frac{n_i}{n \cdot \Delta}$ (рис.1). Для гистограммы относительных частот площадь ступенчатой фигуры соответствует сумме вероятностей и равна 1. Площадь любого прямоугольника гистограммы приближенно равна вероятности попадания значений рассматриваемой случайной величины в интервал, соответствующий основанию прямоугольника.



Р и с. 1. Гистограмма и полигон относительных частот

Полигоном относительных частот называется ломаная, соединяющая точки (z_1, h_1), (z_2, h_2), ..., (z_N, h_N) (рис.1), где $z_i = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$ –

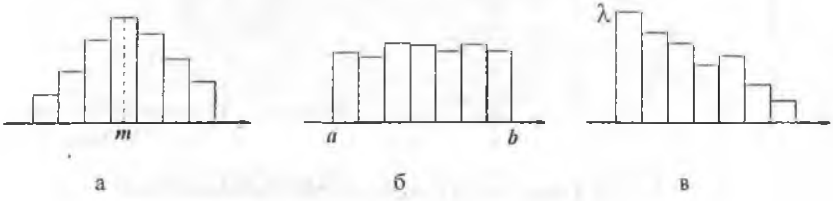
середины интервалов группировки; $h_i = \frac{n_i}{n \cdot \Delta}$ – высоты прямоугольников гистограммы.

При увеличении объема выборки и уменьшении длин интервалов гистограмма и полигон относительных частот приближаются к графику неизвестной функции $f(x)$ – плотности вероятности генеральной совокупности.

По виду гистограммы или полигона частот можно выдвинуть гипотезу о виде распределения генеральной совокупности. Например, если гистограмма имеет вид, представленный на рис.2,а, то можно предположить, что генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения с плотностью вероятностей $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$;

гистограмма на рис.2,б – равномерное распределения с плотностью вероятностей $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a;b], \\ 0, x \notin [a;b] \end{cases}$;

гистограмма на рис.2,в – показательное распределение с плотностью вероятностей $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, x \le 0. \end{cases}$



Р и с. 2. Виды гистограмм

П Р И М Е Р 3 (Задание, ч.1, пп. 4 и 5):

Требуется построить гистограмму и полигон относительных частот для известного группированного вариационного ряда (табл.6). На их основе выдвинуть нулевую гипотезу H_0 о виде распределения генеральной совокупности. На одном чертеже с гистограммой построить график теоретической плотности вероятностей в соответствии с выдвинутой гипотезой. Сделать вывод о визуальном совпадении гистограммы с графиком плотности вероятностей.

Для удобства заполним табл.7. В третий столбец табл.7 занесены середины интервалов $z_i = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$, в четвертый – относительные частоты интервалов $\overline{n}_i = \frac{n_i}{n}$, в пятый – высоты прямоугольников гистограммы относительных частот $h_i = \frac{\overline{n}_i}{\Delta} = \frac{n_i}{n \cdot \Delta}$.

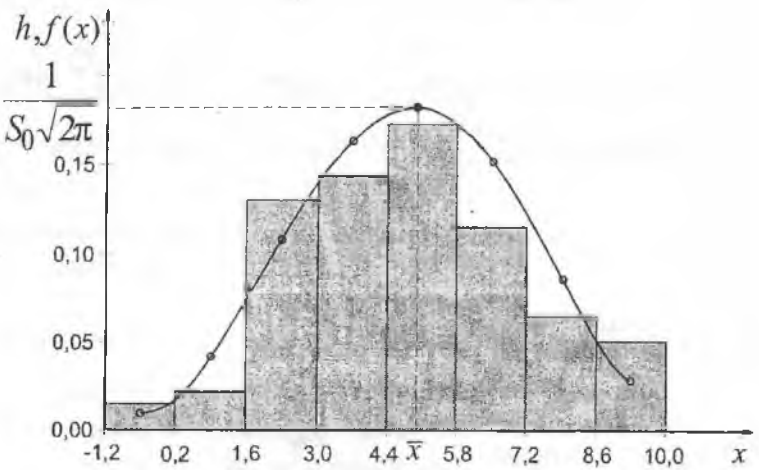
Таблица 7

Индекс i	Интервал $(u_i; u_{i+1}]$	Середина интервала z_i	Относит. частота $\overline{n}_i$	Высота прямоуг. h_i
1	(-1,2; 0,2]	-0,5	0,0202	0,0144
2	(0,2; 1,6]	0,9	0,0303	0,0216
3	(1,6; 3,0]	2,3	0,1818	0,1299
4	(3,0; 4,4]	3,7	0,2020	0,1443
5	(4,4; 5,8]	5,1	0,2424	0,1732
6	(5,8; 7,2]	6,5	0,1616	0,1154
7	(7,2; 8,6]	7,9	0,0909	0,0649
8	(8,6; 10,0]	9,3	0,0707	0,0505
Сумма			1,0000	1,0000

По данным табл.7 построим гистограмму. Для этого в прямоугольной системе координат на оси абсцисс откладываем значения границ интервалов

разбиения и на каждом интервале с номером i строим прямоугольник с высотой h_i (рис.3).

Для такой гистограммы площадь ступенчатой фигуры приближенно равна сумме вероятностей и равна 1. Площадь каждого прямоугольника гистограммы приближенно равна вероятности попадания случайной величины в интервал, соответствующий основанию прямоугольника.

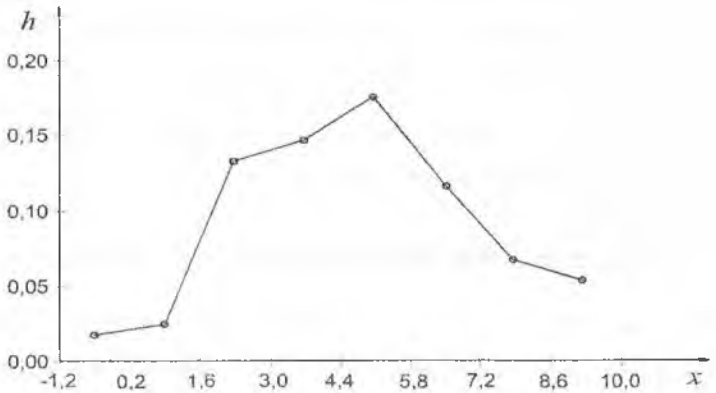


Р и с. 3. Гистограмма относительных частот и кривая теоретической плотности вероятностей

Полигон относительных частот – ломаная, соединяющая точки (z_i, h_i), $i = \overline{1, N}$ (рис.4).

Гистограмма и полигон относительных частот, являющиеся статистическими оценками плотности вероятностей генеральной совокупности, схожи с кривой плотности вероятностей нормального закона. На основании этого выдвигаем нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой взята выборка, распределена по нормальному закону с параметрами $m = \overline{x} = 4{,}9961$, $\sigma = S_0 = 2{,}2657$, то есть теоретическая плотность

вероятностей имеет вид: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.



Р и с. 4. Полигон относительных частот

Вычислим значения теоретической плотности вероятностей в точках z_i – серединах интервалов по табл.П2. Результаты вычислений занесем в табл.8.

Заметим, что $f_{\max}(x)=f(\overline{x})=\frac{1}{S_0\sqrt{2\pi}}=0{,}1761$.

Таблица 8

i	z_i	$t_i=\frac{z_i-\overline{x}}{S_0}$	$f_0(t_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t_i^2}{2}}$	$f(z_i)=\frac{f_0(t_i)}{S_0}$
1	-0,5	-2,4258	0,0210	0,0093
2	0,9	-1,8079	0,0778	0,0344
3	2,3	-1,1900	0,1965	0,0867
4	3,7	-0,5721	0,3387	0,1495
5	5,1	0,0459	0,3985	0,1759
6	6,5	0,6638	0,3201	0,1413
7	7,9	1,2817	0,1755	0,0774
8	9,3	1,8996	0,0657	0,0290
	$\overline{x}=4{,}9961$	0,0000	0,3989	0,1761

Последний столбец табл.8 можно вычислить сразу по серединам интервалов z_i с помощью статистической функции НОРМРАСП пакета EXCEL с логическим значением ЛОЖЬ.

Для построения теоретической плотности вероятностей на рис.3 поставим точки $(z_i; f(z_i))$, $i=\overline{1,N}$ и $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ и соединим их плавной линией.

Из рис.3 видно, что график теоретической плотности вероятностей и гистограмма достаточно хорошо совпадают.

1.5. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – выборка объема n из генеральной совокупности случайной величины X, имеющей функцию распределения $F(x)$, $x \in \Re$.

Неизвестную функцию распределения генеральной совокупности $F(x)$ называют ***теоретической функцией распределения***.

Эмпирической функцией распределения группированной выборки X_n называется функция $F_n(x)$, определяющая для любого $x \in \Re$ относительную частоту события $(X < x)$, то есть $F_n(x) = \sum_{z_i < x} \bar{n}_i$, где $z_i = \dfrac{u_i + u_{i+1}}{2}$ – середины интервалов группировки; $\bar{n}_i$ – относительные частоты тех интервалов, середины которых меньше x.

По определению $F_n(x)$ зависит от выборки и обладает свойствами обычной функции распределения случайной величины. В частности $F_n(x)$:

1) неубывающая функция;
2) непрерывная слева;
3) имеет значения, принадлежащие отрезку $[0,1]$;
4) при $x \le z_1$ $F_n(x) = 0$, а при $x > z_N$ $F_n(x) = 1$.

Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $(X < x)$, а эмпирическая функция $F_n(x)$ определяет относительную частоту этого же события, найденную по данной выборке.

Значение эмпирической функции распределения определяется следующим утверждением.

Теорема Гливенко: Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$. Тогда для любого $x \in \Re$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

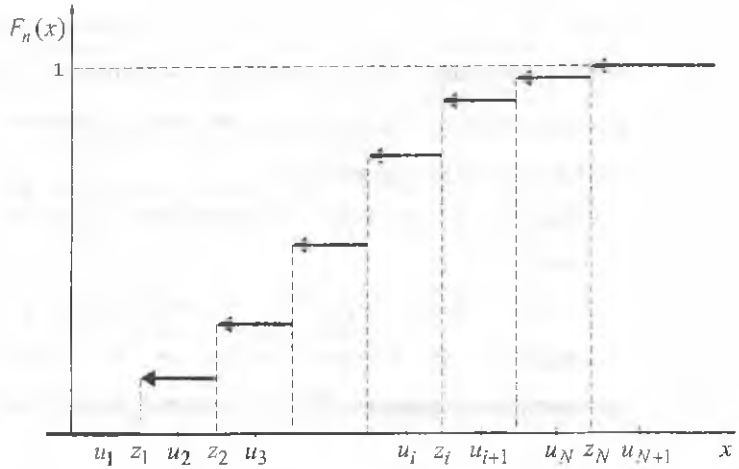
Таким образом, при каждом x $F_n(x)$ сходится по вероятности к $F(x)$ и, следовательно, при большом объеме выборки может служить приближенным значением (оценкой) функции распределения генеральной совокупности в каждой точке x.

Обычно эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ группированной выборки записывают в виде

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le z_1, \\ w_1, & z_1 < x \le z_2, \\ w_2, & z_2 < x \le z_3, \\ \cdots \\ w_N = 1, & z_N < x. \end{cases}$$

где w_i $\left(i = \overline{1,N}\right)$ – накопленные относительные частоты (табл.4).

График эмпирической функции распределения $F_n(x)$ имеет ступенчатый вид (рис.5).



Р и с. 5. Эмпирическая функция распределения

П Р И М Е Р 4 (Задание, ч.1, пп. 6 и 7):

Требуется найти эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ группированной выборки (табл.6) и построить ее график. На одном чертеже с эмпирической функцией распределения построить график теоретической функции распределения. Сделать вывод об их визуальном совпадении.

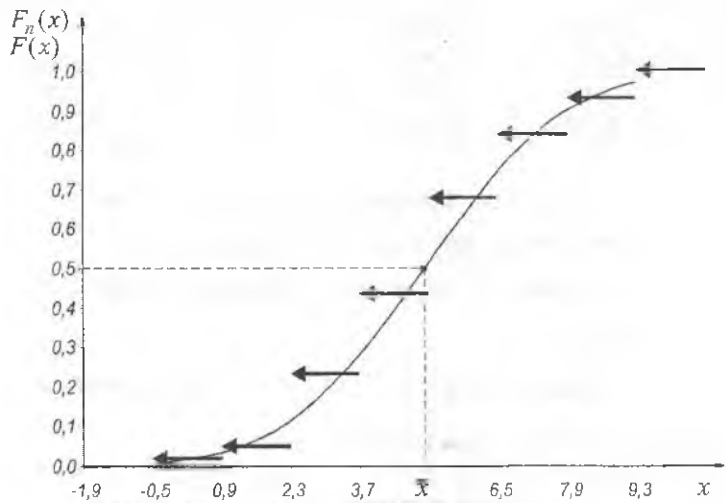
Взяв значения накопленных относительных частот из табл.6, а значения середин интервалов из табл.7, найдем эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ и построим ее график (рис.6):

$$F_n(x)=\begin{cases} 0{,}0000, & x\le -0{,}5,\\ 0{,}0202, & -0{,}5<x\le 0{,}9,\\ 0{,}0505, & 0{,}9<x\le 2{,}3,\\ 0{,}2323, & 2{,}3<x\le 3{,}7,\\ 0{,}4343, & 3{,}7<x\le 5{,}1,\\ 0{,}6768, & 5{,}1<x\le 6{,}5,\\ 0{,}8384, & 6{,}5<x\le 7{,}9,\\ 0{,}9293, & 7{,}9<x\le 9{,}3,\\ 1{,}0000, & x>9{,}3. \end{cases}$$

Согласно выдвинутой гипотезе о виде распределения генеральной совокупности теоретическая функция распределения генеральной совокупности является функцией распределения нормального закона:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt=\Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\frac{1}{2},$$

где $\Phi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ – функция Лапласа (табл.П1). Здесь, как и ранее, $m=\overline{x}=4,9961$, $\sigma=S_0=2,2657$.



Р и с. 6. Эмпирическая и теоретическая функции распределения

На одном чертеже с эмпирической функцией распределения построим график теоретической функции распределения. Для этого найдем значения теоретической функции распределения в точках z_i. Для удобства вычислений значений теоретической функции распределения заполним табл.9.

Значения функции Лапласа $\Phi_0(t_i)$, по которой вычисляются значения функции распределения $F(z_i)$, приведены в табл.П1.

Значения функции распределения $F(z_i)$ в точках z_i можно также найти с помощью пакета прикладных программ EXCEL, используя статистическую функцию НОРМРАСП с логическим значением ИСТИНА.

Таблица 9

i	z_i	$t_i = \frac{z_i - \bar{x}}{S_0}$	$\Phi_0(t_i)$	$F(z_i) = \Phi_0(t_i) + \frac{1}{2}$
1	-0,50	-2,4258	-0,4924	0,0076
2	0,90	-1,8079	-0,4649	0,0351
3	2,30	-1,1900	-0,3830	0,1170
4	3,70	-0,5720	-0,2157	0,2843
5	5,10	0,0459	0,0160	0,5160
6	6,50	0,6638	0,2454	0,7454
7	7,90	1,2817	0,3997	0,8997
8	9,30	1,8997	0,4713	0,9713
	$\bar{x} = 4,9961$	0,0000	0,0000	0,5000

График теоретической функции распределения строим на рис.6 по второму и пятому столбцам табл.9, соединив точки плавной линией. Заметим, что точка перегиба кривой теоретической функции распределения имеет координаты $(\bar{x}; 0,5)$.

Сравнивая графики $F_n(x)$ и $F(x)$ (рис.6) можно сделать вывод, что $F_n(x)$ является статистическим аналогом $F(x)$.

1.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ χ^2 И СТЬЮДЕНТА

Рассмотрим некоторые виды специальных распределений, используемых в математической статистике. Сначала введем определение.

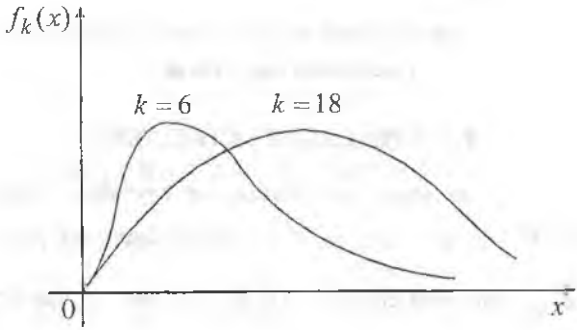
Квантилью, соответствующей вероятности p, называется такое значение x_p, при котором выполняется соотношение

$$F(x_p) = P\left(X < x_p\right) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx = p,$$

где $f(x)$ – плотность вероятностей соответствующего закона распределения (слово квантиль – женского рода). Геометрическое пояснение смысла квантили, отвечающей вероятности p, приведено на рис. 8.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ χ^2

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – нормально распределенные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднеквадратическое отклонение – единице, то есть $X_i \sim N(0,1)$. Тогда сумма квадратов этих величин $\chi^2(k) = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ распределена по закону χ^2 («хи-квадрат») с k степенями свободы.



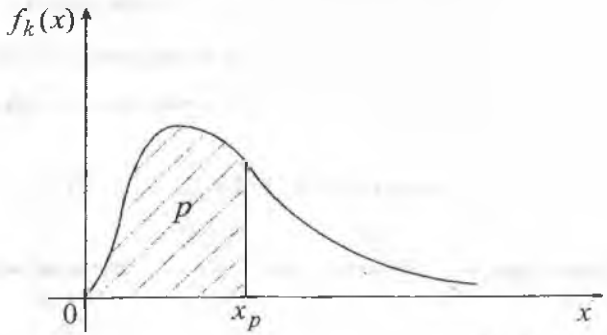
Р и с. 7. Графики плотности вероятностей распределения χ^2

Плотность вероятностей этого распределения имеет вид:

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \quad (x > 0),$$

где $\Gamma(k/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{k/2-t} dt$ - гамма- функция.

График плотности вероятностей $f_k(x)$ при малом числе степеней свободы k имеет длинный правый «хвост», а с ростом k становится почти симметричным (рис.7). Квантили распределения χ^2, отвечающие вероятности p, обозначаются $x_p = \chi^2_p(k)$ (рис.8) и находятся по таблицам (табл.П5).



Р и с. 8. Геометрическое пояснение смысла квантили x_p, отвечающей вероятности p

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

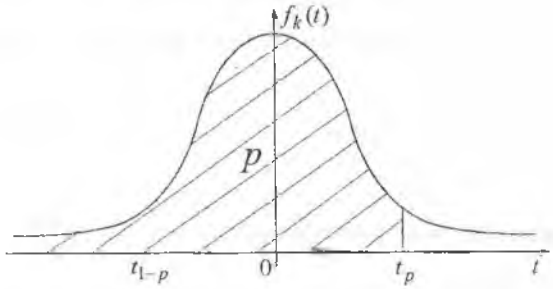
Пусть U – нормально распределенная случайная величина, причем $U \sim N(0,1)$, а V – независимая от U случайная величина, распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда известно, что случайная величина $T = \dfrac{U\sqrt{k}}{\sqrt{V}}$ имеет t-распределение или распределение Стьюдента с k степенями свободы. Плотность вероятностей этого распределения (рис 9) имеет вид

$$f_k(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

При $k \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному и при $k \geq 30$ практически не отличается от нормального $N(0,1)$.

Квантили распределения Стьюдента t_p находят по таблицам (табл.П4) в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы k. Так как график плотности вероятностей распределения Стьюдента симметричен относительно прямой $t = 0$, то $t_p = -t_{1-p}$ (рис.9).

Квантили распределений Стьюдента и χ^2 можно найти с помощью статистических функций СТЬЮДРАСПОБР и ХИ2ОБР пакета прикладных программ EXCEL.



Р и с. 9. Плотность вероятностей и квантили распределения Стьюдента

1.7. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Для получения обоснованных выводов о параметрах, виде распределения и других свойствах случайных величин необходимо проверить гипотезу о соответствии эмпирической функции распределения одному из известных теоретических законов.

Статистической гипотезой называют любое утверждение о виде или о параметрах распределения генеральной совокупности. Например, статистическими являются гипотезы:

1. Генеральная совокупность распределена по нормальному закону или любому другому конкретно заданному закону (гипотеза о виде распределения);

2. Если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону, то параметры нормального закона равны выборочным характеристикам: $m = \tilde{m}_X = \overline{x}$, $\sigma = \tilde{\sigma}_X = S_0$ (параметрическая гипотеза).

Гипотезу о виде распределения выдвигают на основе схожести гистограммы или полигона частот с соответствующей кривой одного из теоретических законов (нормального, равномерного, Пуассона и т. п.).

Когда предположение о виде распределения генеральной совокупности принято, следует проверить гипотезу о параметрах этого распределения.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Альтернативными называют гипотезы, которые противоречат нулевой. Если отвергается H_0, то принимается одна из альтернативных гипотез. При проверке статистических гипотез могут быть допущены ошибки двух родов с вероятностями:

1) α – вероятность отклонить гипотезу H_0, при условии, что она верна (ошибка первого рода);
2) β – вероятность принять гипотезу H_0, при условии, что она неверна (ошибка второго рода).

Например, в радиолокации α – вероятность пропуска сигнала, β – вероятность ложной тревоги.

Ясно, что чем меньше будут ошибки первого и второго рода, тем точнее статистический вывод. Однако при заданном объеме выборке одновременно уменьшить α и β невозможно. Единственный способ одновременного уменьшения α и β состоит в увеличении объема выборки.

Если формулируется только одна гипотеза H_0 и требуется проверить, согласуются ли статистические данные с этой гипотезой или они ее опровергают, то критерии, используемые для этого, называют ***критериями согласия***. В таких критериях не выставляется конкретная альтернативная гипотеза.

Прежде чем привести схему проверки статистической гипотезы, дадим используемые ниже определения новых понятий.

Статистикой критерия называется специально подобранная функция выборки $K = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая служит для проверки гипотезы H_0 и имеет известное распределение. Статистика K является мерой расхождения экспериментальных данных с теоретическим распределением.

Перед анализом статистики критерия задается ***уровень значимости*** α – вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы H_0. Обычно полагают $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}001$.

Критической областью K_α называется совокупность значений статистики K, при которых нулевая гипотеза отвергается. Обычно критическую область выбирают из условия $P(K \in K_\alpha) = P\left(K \geq K_{кр}\right) = \alpha$. Критическую точку (порог) $K_{кр}$ находят по таблицам распределения статистики критерия.

Схема проверки статистической гипотезы с помощью критерию согласия:

1) формулировка нулевой гипотезы H_0;

2) выбор уровня значимости α;

3) выбор статистики критерия K;

4) определение критической области, порогового значения $K_{кр}$ и области принятия гипотезы;

5) вычисление выборочной статистики $K_{выб}$ и проверка гипотезы;

6) принятие статистического решения: если $K_{выб} \geq K_{кр}$, то гипотеза отклоняется, а если $K_{выб} < K_{кр}$, то гипотеза принимается.

1.8. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ χ^2 ПИРСОНА

Для проверки гипотез о виде распределения применяются критерии согласия χ^2 («хи-квадрат») К. Пирсона или критерий Колмогорова. Ограничимся описанием применения критерия χ^2 Пирсона для проверки

гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий аналогично применяется и для других распределений).

Схема применения критерия согласия χ^2:

1. Выдвигается гипотеза H_0: генеральная совокупность имеет нормальное распределение с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

с параметрами $m=\tilde{m}_X=\overline{x}$, $\sigma=\tilde{\sigma}_X=S_0$, то есть выборочное среднее $\overline{x}$ и модифицированная выборочная дисперсия S_0^2 принимаются соответственно за математическое ожидание m и дисперсию σ^2 нормально распределенной случайной величины X.

2. По выборке наблюдений случайной величины X составляется группированный вариационный ряд (табл.4).

3. Вычисляются вероятности p_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$ попадания значений случайной величины X в i-й интервал.

Для нормального закона

$$p_i=P\left(u_i<X\le u_{i+1}\right)=\Phi_0\left(\frac{u_{i+1}-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{u_i-m}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi_0(x)$ – функция Лапласа, значения которой находят по таблицам.

4. Статистикой критерия Пирсона является функция выборки

$$K=\chi_n^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(n_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i},$$

где n – объем выборки; N – число интервалов группировки; n_i – частота i-го интервала; p_i – теоретическая вероятность попадания значений случайной величины X в i-й интервал.

Английский математик К. Пирсон доказал, что независимо от вида распределения генеральной совокупности статистика χ_n^2 имеет предельное (при $n \to \infty$) распределение «хи–квадрат» χ^2 с $k = N - s - 1$ степенями свободы, где N – число интервалов разбиения, s – число оцениваемых параметров теоретического закона распределения. Для нормального закона $s = 2$ (параметры m и σ).

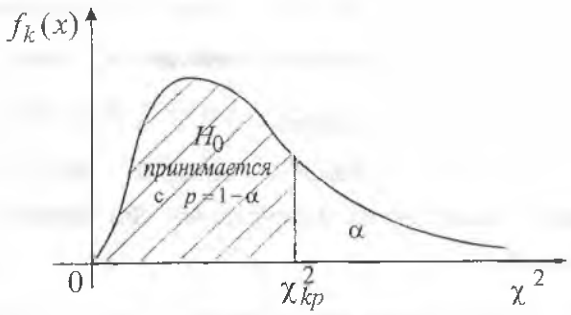
Поскольку значения теоретических вероятностей p_i и относительных частот интервалов $\overline{n}_i = \dfrac{n_i}{n}$ сближаются при $n \to \infty$, в случае оправданности гипотезы H_0 разности $(n_i - n \cdot p_i)$ не должны быть слишком велики и значение статистики χ_n^2 не должно существенно отличаться от нуля. Поэтому критическую *область* K_α критерия χ^2 выбирают при заданном уровне значимости α из условия

$$P\left(K \in K_\alpha\right) = P\left(K \geq K_{кр}\right) = P\left(\chi_n^2 \geq \chi_{кр}^2\right) = \int_{\chi_{кр}^2}^{+\infty} f_k(x)dx = \alpha,$$

где $f_k(x)$ - плотность вероятностей распределения ««хи-квадрат»».

Из этой формулы следует, что критическая точка (порог критерия) $\chi_{кр}^2$ равна квантили распределения «хи–квадрат» χ_p^2, отвечающей вероятности $p = 1 - \alpha$ с числом степеней свободы $k = N - s - 1$ (табл.П5). Область принятия гипотезы H_0 для критерия «хи–квадрат» имеет вид, представленный на рис.10.

Таким образом, если вычисленная по выборке статистика удовлетворяет условию $\chi_n^2 < \chi_{кр}^2$, то гипотеза H_0 принимается. Если $\chi_n^2 \geq \chi_{кр}^2$, то гипотеза H_0 отвергается.



Р и с. 10. Область принятия гипотезы в критерии согласия

Статистический вывод неверно формулировать в виде: генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения. Можно лишь утверждать, что данная выборка *согласуется* с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности с параметрами $m = \tilde{m}_\chi = \bar{x}$, $\sigma = \tilde{\sigma}_\chi = S_0$ при уровне значимости α.

З а м е ч а н и е: критерий χ^2 использует тот факт, что случайная величина $\dfrac{n_i - n \cdot p_i}{\sqrt{n \cdot p_i}}$ имеет распределение, близкое к нормальному. Чтобы это утверждение было достаточно точным, необходимо выполнение условия $n \cdot p_i \geq 5$ для всех интервалов. Интервалы, для которых это условие не выполняется, следует объединить с соседними.

П Р И М Е Р 5 (Задание, ч.1, п.8):

Требуется для выборки (табл.1) с помощью критерия согласия Пирсона χ^2 проверить гипотезу H_0 о виде распределения генеральной совокупности (нормальное распределение) при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$. Сделать статистический вывод.

Для данной выборки объема $n = 99$ ранее были вычислены выборочное среднее $\bar{x} = 4{,}9961$ и модифицированная выборочная дисперсия $S_0^2 = 5{,}1332$,

составлен группированный вариационный ряд (табл.6), а также выдвинута гипотеза H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности.

Вычислим теперь вероятности p_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$ попадания значений случайной величины X в i-й интервал и выборочное значение статистики критерия χ^2: $K=\chi^2_n=\sum_{i=1}^{N}\frac{(n_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}$.

Результаты вычислений занесем в табл.10.

Таблица 10

i	u_i	n_i	$t_i=\frac{u_i-\overline{x}}{S_0}$	$\Phi_0(t_i)$	p_i	$n\cdot p_i$
1	-1,2		-2,7348	-0,4968		
2	0,20	2	-2,1169	-0,4830	0,0138	1,3662
3	1,60	3	-1,4989	-0,4332	0,0498	4,9302
4	3,00	18	-0,8810	-0,3106	0,1226	12,1374
5	4,40	20	-0,2631	-0,1026	0,2080	20,5920
6	5,80	24	0,3548	0,1368	0,2394	23,7006
7	7,20	16	0,9728	0,3340	0,1972	19,5228
8	8,60	9	1,5907	0,4441	0,1101	10,8999
9	10,00	7	2,2086	0,4864	0,0423	4,1877

Пятый столбец табл.10 можно вычислить с помощью статистической функции НОРМРАСП пакета EXCEL. Шестой столбец представляет собой разности значений из пятого столбца: $p_i=\Phi_0(t_{i+1})-\Phi_0(t_i)$.

Заметим, что в табл.9 вычислялись значения функции Лапласа в серединах интервалов, а в табл.10 для проверки критерия χ^2 – именно в концах интервалов разбиения.

Так как в двух первых и в последнем интервалах не выполняется условие $n\cdot p_i\geq 5$, то объединим эти интервалы с соседними. При объединении интервалов значения n_i и $n\cdot p_i$ суммируются (табл.11).

Таблица 11

i	n_i	$n \cdot p_i$	$\chi_i^2 = \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$
1	5	6,2964	0,2669
2	18	12,1374	2.8317
3	20	20,5920	0,0170
4	24	23,7006	0,0038
5	16	19,5228	0,6357
6	16	15,0876	0,0552
Сумма	99		3,8103

Суммируя элементы последнего столбца табл.11, получим $\chi_n^2 = 3{,}8103$.

Область принятия гипотезы (рис.10) можно записать в виде

$$P\left(K < K_{кр}\right) = P\left(\chi_n^2 < \chi_{кр}^2\right) = \int_0^{\chi_{кр}^2} f_k(x)dx = 1 - \alpha = p,$$

откуда следует, что критическое значение $\chi_{кр}^2$ совпадает с квантилью $\chi_p^2(k)$ распределения ««хи-квадрат»» с доверительной вероятностью $p = 1 - \alpha$ и числом степеней свободы k.

В нашем случае $\alpha = 0{,}1$ и $p = 1 - \alpha = 0{,}9$. Число степеней свободы после укрупнения табл.10 равно $k = N - s - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ ($N = 6$, так как в укрупненной таблице 6 интервалов). По табл.П5 (или функции ХИ2ОБР) находим значение квантили распределения (критической точки) $\chi_{кр}^2 = \chi_{0,9}^2(3) = 6{,}251$. Так как $\chi_n^2 = 3{,}8103 < 6{,}251$, то при данном уровне значимости гипотеза H_0 принимается.

Статистический вывод: данная выборка согласуется с гипотезой о нормальном распределении с параметрами $m = \bar{x} = 4{,}9961$, $\sigma = S_0 = 2{,}2657$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$. Уровень значимости означает, что вероятность отвергнуть гипотезу H_0, при условии, что она верна, равна $0{,}1$.

1.9. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интервальное оценивание параметров распределения генеральной совокупности состоит в построении доверительных интервалов.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал со случайными границами (θ_1, θ_2), содержащий истинное значение параметра с заданной вероятностью $p = 1-\alpha$, т.е. $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1-\alpha$. Число $p = 1-\alpha$ при этом называется ***доверительной вероятностью***, а значение α – ***уровнем значимости***.

При построении доверительных интервалов вводят в рассмотрение специально подобранную статистику K, распределение которой известно. Наиболее распространенными являются статистики, имеющие нормальное, Стьюдента и χ^2 распределения.

Методика построения доверительных интервалов для отдельных параметров распределения генеральной совокупности зависит как от вида распределения, так и от знания значений остальных параметров закона распределения.

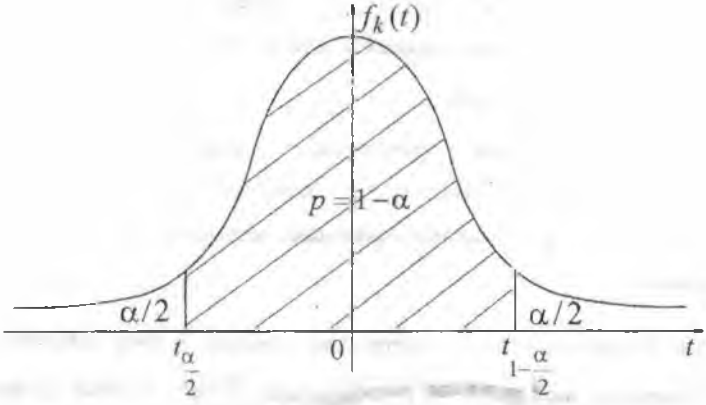
1.9.1. Рассмотрим задачу построения **доверительного интервала для математического ожидания** M_X нормально распределенной генеральной совокупности при неизвестной дисперсии D_X.

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами M_X и $\sqrt{D_X}$. Найдем доверительный интервал $\Delta_\alpha(M_X)$ для математического ожидания M_X в предположении, что дисперсия D_X неизвестна и задан уровень значимости α.

В качестве оценок математического ожидания и дисперсии выберем среднее арифметическое и выборочную дисперсию: $\tilde{M}_X = \overline{x}$, $\tilde{D}_X = S_0^2$.

Английский математик Госсет (псевдоним Стьюдент) доказал, что статистика $T = \dfrac{\overline{x} - M_X}{S_0}\sqrt{n}$ имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы. Так как кривая плотности вероятностей распределения Стьюдента $f_k(t)$ симметрична относительно прямой $t = 0$, будем искать симметричный доверительный интервал для математического ожидания, основываясь на равенстве:

$$P\left(|T| < \tau\right) = P\left(-\tau < T < \tau\right) = \int_{-\tau}^{\tau} f_k(t)\,dt = p = 1-\alpha.$$



Р и с. 11. Геометрическое пояснение смысла квантилей распределения Стьюдента

Из рис.11 видно, что площадь под графиком каждого из симметричных «хвостов» распределения Стьюдента равна $\dfrac{\alpha}{2}$, поэтому значения границ интервала совпадут с квантилями

$$\left(-\tau\,;\,\tau\right) = \left(t_{\alpha/2}\,;\,t_{1-\alpha/2}\right) = \left(-t_{1-\alpha/2}\,;\,t_{1-\alpha/2}\right).$$

Таким образом, имеем:

$$P\left(t_{\alpha/2} < T < t_{1-\alpha/2}\right) = P\left(-t_{1-\alpha/2} < \frac{\overline{x} - M_X}{S_0}\sqrt{n} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

Подставим в неравенство под знаком вероятности значения $t_{1-\alpha/2}$, $\overline{x}$, S_0, n и разрешим это неравенство относительно M_X:

$$P\left(\overline{x} - \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2} < M_X < \overline{x} + \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

Таким образом, доверительный интервал для неизвестного математического ожидания M_X нормально распределенной случайной величины X с неизвестной дисперсией D_X и заданным уровнем значимости α имеет вид:

$$\Delta_\alpha(M_X) = \left(\overline{x} - \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}\ ;\ \overline{x} + \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}\right).$$

Длина доверительного интервала характеризует точность оценивания и зависит от объема выборки n и доверительной вероятности $p = 1-\alpha$. Чем меньше длина доверительного интервала, тем надежнее оценка. При увеличении объема выборки длина доверительного интервала уменьшается.

П Р И М Е Р 6 (Задание, ч.1, п.9):

Требуется построить доверительный интервал $\Delta_\alpha(M_X)$ для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами $m = \overline{x}$ и $\sigma = S_0$ при уровнях значимости $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$.

Общее выражение для доверительного интервала в данном случае имеет вид $\Delta_\alpha(M_X) = \left(\overline{x} - \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}\ ;\ \overline{x} + \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}\right)$.

Вычислим этот интервал для различных уровней значимости.

$\alpha = 0{,}1$: $\quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}05, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95,$

$k = n - 1 = 99 - 1 = 98$ – число степеней свободы.

В табл.П4 приведены значения $t_p(k)$ в зависимости от доверительной вероятности p и числа степеней свободы $k = n - 1$. Так как в табл.П4 нет числа степеней свободы $k = 98$, то для вычисления $t_p(k)$ можно воспользоваться одним из трех методов.

1. Известно, что при $k \geq 30$ $t_p(k) \approx C_p$, где C_p – квантиль нормального распределения (табл.П3). Тогда

$$t_{1-\alpha/2}(98) = t_{0,95}(98) \approx C_{0,95} = 1,645,$$

$$t_{\alpha/2}(98) = t_{0,05}(98) \approx -C_{0,95} = -1,645.$$

2. Можно использовать линейную интерполяцию между точками табл.П4 $(k_1; t_1) = (60; 1,671)$ и $(k_2; t_2) = (120; 1,658)$. Значение квантили при $k = 98$ найдем по формуле линейной интерполяции:

$$t_{0,95}(98) = \frac{t_2 - t_1}{k_2 - k_1} \cdot (k - k_1) + t_1 = \frac{1,658 - 1,671}{120 - 60} \cdot (98 - 60) = 1,663.$$

Тогда $t_{\frac{\alpha}{2}}(98) = t_{0,05}(98) = -1,663.$

3. Статистическая функция СТЬЮДРАСПОБР пакета EXCEL дает значение квантили $t_{0,95}(98) = 1,661$. Нужно иметь в виду, что в EXCEL вычисляются значения $t_p(k)$ двусторонних «антиквантилей» $P(|T| > t_p(k)) = p$. Поэтому, чтобы получить значение односторонней квантили $t_{0,95}(98)$, нужно в этой функции задать вероятность $p = 2 \cdot (1 - 0,95) = 0,1$ (см. справку к функции СТЬЮДРАСПОБР).

В дальнейших расчетах используем значения, даваемые EXCEL:

$$t_{1-\alpha/2}(98) = t_{0,95}(98) = 1,661, \qquad t_{\alpha/2}(98) = t_{0,05}(98) = -1,661.$$

Подставим значения этих квантилей и вычисленные ранее значения $\overline{x} = 4,9961$ и $S_0 = 2,2657$ в формулу доверительного интервала:

$$\Delta_\alpha(M_X) = \left(\overline{x} - \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2} \; ; \; \overline{x} + \frac{S_0}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2} \right) =$$

$$= \left(4,9961 - \frac{2,2657}{\sqrt{99}} \cdot 1,661 \; ; \; 4,9961 + \frac{2,2657}{\sqrt{99}} \cdot 1,661 \right) =$$

$$= (4,6178 \; ; \; 5,3743).$$

Таким образом, неизвестное математическое ожидание $M_X \in (\, 4,6178 \; ; \; 5,3743 \,)$ с вероятностью $p = 0,9$.

Аналогично найдем доверительные интервалы для математического ожидания при уровнях значимости $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$.

$\underline{\alpha = 0,05}$: $\quad \frac{\alpha}{2} = 0,025, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975, \quad k = n - 1 = 99 - 1 = 98,$

$$t_{1-\alpha/2}(98) = t_{0,975}(98) = 1,984, \qquad t_{\alpha/2}(98) = t_{0,025}(98) = -1,984,$$

$$\Delta_\alpha(M_X) = \left(4,9961 - \frac{2,2657}{\sqrt{99}} \cdot 1,984 \; ; \; 4,9961 + \frac{2,2657}{\sqrt{99}} \cdot 1,984 \right) =$$

$$= (4,5442 \; ; \; 5,4479).$$

Таким образом, неизвестное математическое ожидание $M_X \in (\, 4,5442 \; ; \; 5,4479 \,)$ с вероятностью $p = 0,95$.

$\underline{\alpha = 0,01}$: $\quad \frac{\alpha}{2} = 0,005, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995, \quad k = n - 1 = 99 - 1 = 98,$

$$t_{1-\alpha/2}(98) = t_{0,995}(98) = 2,627, \qquad t_{\alpha/2}(98) = t_{0,005}(98) = -2,627,$$

$$\Delta_\alpha(M_X) = \left(4,9961 - \frac{2,2657}{\sqrt{99}} \cdot 1,984 \; ; \; 4,9961 + \frac{2,2657}{\sqrt{99}} \cdot 1,984 \right) =$$

$$= (4,5442 \; ; \; 5,4479).$$

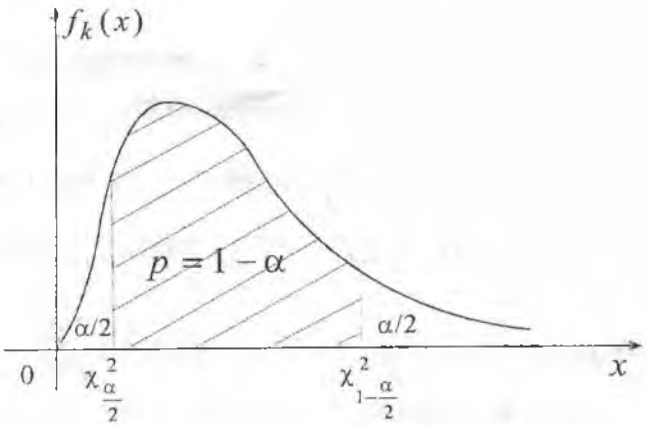
Таким образом, неизвестное математическое ожидание $M_X \in (\ 4{,}3978\ ;\ 5{,}5948\ )$ с вероятностью $p = 0{,}99$.

1.9.2. Определим теперь **доверительный интервал** $\Delta_\alpha(D_X)$ **для неизвестной дисперсии** D_X нормально распределенной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием при заданном уровне значимости α.

В этом случае рассматривается статистика $B = \dfrac{S_0^2}{D_X}(n-1)$, имеющая распределение χ^2 с $k = n-1$ степенями свободы, где n – объем выборки. Будем искать доверительный интервал для D_X основываясь на равенстве

$$P\big(\ B \in (b_1\,;b_2)\ \big) = P(\ b_1 < \frac{S_0^2}{D_X}(n-1) < b_2\ ) = \int_{b_1}^{b_2} f_k(x)dx = p = 1-\alpha\,,$$

где $f_k(x)$ - плотность вероятностей распределения χ^2 с $k = n-1$ степенями свободы.



Р и с. 12. Квантили распределения χ^2

Как и в предыдущем случае, будем считать площади под «хвостами» кривой распределения $f_k(x)$ равными по $\frac{\alpha}{2}$ каждая (рис.12). Тогда границы интервала b_1 и b_2 совпадут с квантилями распределения χ^2:

$$b_1 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1), \quad b_2 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1).$$

Таким образом, получаем

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < \frac{S_0^2}{D_X}(n-1) < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

Подставим в неравенство под знаком вероятности значения $\chi^2_{\alpha/2}$, $\chi^2_{1-\alpha/2}$, S_0^2, n и разрешим это неравенство относительно D_X:

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < D_X < \frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

Получили доверительный интервал для неизвестной дисперсии D_X нормально распределенной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием при заданном уровне значимости α:

$$\Delta_\alpha(D_X) = \left(\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\ ;\ \frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right).$$

Следует отметить, что если математическое ожидание генеральной совокупности известно, то доверительный интервал для дисперсии будет иметь другой вид.

Длина доверительного интервала характеризует точность оценивания и зависит от объема выборки n и доверительной вероятности $p = 1-\alpha$. Чем

меньше длина доверительного интервала, тем надежнее оценка. При увеличении объема выборки длина доверительного интервала уменьшается.

П Р И М Е Р 7 (Задание, ч.1, п.9):

Требуется построить доверительный интервал $\Delta_\alpha(D_X)$ для неизвестной дисперсии D_X нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами $m = \bar{x}$ и $\sigma = S_0$ при уровнях значимости $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$.

Общее выражение для доверительного интервала в данном случае имеет вид $$\Delta_\alpha(D_X) = \left(\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} ; \frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right).$$

Вычислим этот интервал для различных уровней значимости.

$\underline{\alpha = 0{,}1}$: $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$, $k = n - 1 = 99 - 1 = 98$.

В табл.П5 приведены значения квантилей $\chi^2_p(k)$ в зависимости от доверительной вероятности p и числа степеней свободы k. Так как в табл.П5 нет числа степеней свободы $k = 98$, то для вычисления $\chi^2_p(k)$ можно воспользоваться одним из способов:

1. Известно, что при $k \geq 30$ $\chi^2_p(k) \approx \frac{(C_p + \sqrt{2k-1})^2}{2}$, где C_p – квантиль нормального распределения (табл.П3). По этой формуле получим:

$$\chi^2_{\alpha/2}(98) = \chi^2_{0{,}05}(98) \approx \frac{(C_{0{,}05} + \sqrt{2\cdot 98 - 1})^2}{2} = 75{,}882,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(98) = \chi^2_{0{,}95}(98) \approx \frac{(C_{0{,}95} + \sqrt{2\cdot 98 - 1})^2}{2} = 121{,}824.$$

2. Статистическая функция ХИ2ОБР пакета EXCEL дает следующие значения квантилей распределения «хи-квадрат»:

$$\chi^2_{0,05}(98)=76,164, \qquad \chi^2_{0,95}(98)=122,108.$$

Следует иметь в виду, что в функции ХИ2ОБР вычисляются значения χ^2_p «антиквантилей» по формуле $P\left(B>\chi^2_p\right)=p$. Чтобы получить значение обычной квантили $\chi^2_{0,05}(98)$, нужно ввести обратную вероятность $p=0,95$.

В дальнейших расчетах используются значения квантилей, вычисленные в EXCEL. Подставим значения этих квантилей и вычисленное ранее значение $S_0^2=5,1332$ в формулу доверительного интервала:

$$\Delta_\alpha(D_X)=\left(\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\ ;\ \frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)=$$

$$=\left(\frac{98\cdot 5,1332}{122,108}\ ;\ \frac{98\cdot 5,1332}{76,164}\right)=(4,1197\ ;\ 6,6049).$$

Таким образом, неизвестная дисперсия $D_X\in(4,1197\ ;\ 6,6049)$ с вероятностью $p=0,9$.

Аналогично найдем доверительные интервалы для дисперсии при уровнях значимости $\alpha=0,05$ и $\alpha=0,01$.

$\underline{\alpha=0,05}$: $\quad \frac{\alpha}{2}=0,025, \quad 1-\frac{\alpha}{2}=0,975, \quad k=n-1=99-1=98,$

$$\chi^2_{\alpha/2}(98)=\chi^2_{0,025}(98)=72,501, \qquad \chi^2_{1-\alpha/2}(98)=\chi^2_{0,975}(98)=127,282,$$

$$\Delta_\alpha(D_X)=\left(\frac{98\cdot 5,1332}{127,282}\ ;\ \frac{98\cdot 5,1332}{72,501}\right)=(3,9523\ ;\ 6,9386).$$

Таким образом, неизвестная дисперсия $D_X\in(3,9523\ ;\ 6,9386)$ с вероятностью $p=0,95$.

$\alpha = 0{,}01$: $\quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}005, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995, \quad k = n - 1 = 99 - 1 = 98,$

$$\chi^2_{\alpha/2}(98) = \chi^2_{0{,}005}(98) = 65{,}693, \quad \chi^2_{1-\alpha/2}(98) = \chi^2_{0{,}995}(98) = 137{,}803,$$

$$\Delta_\alpha(D_X) = \left(\frac{98 \cdot 5{,}1332}{137{,}803} \; ; \; \frac{98 \cdot 5{,}1332}{65{,}693} \right) = (3{,}6505 \; ; \; 7{,}6576).$$

Таким образом, неизвестная дисперсия $D_X \in (3{,}6505 \; ; \; 7{,}6576)$ с вероятностью $p = 0{,}99$.

Заметим, что выборочная дисперсия $S_0^2 = 5{,}1332$ попадает во все найденные доверительные интервалы, причем, чем меньше уровень значимости α, тем больше длина соответствующего доверительного интервала.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ДАННЫХ

В практических применениях теории вероятностей очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами. Изучение каждой из этих случайных величин отдельно от другой может привести к недопустимому упрощению вероятностной модели явления. В данном разделе рассматриваются такие методы статистического анализа двумерных данных, как корреляционный и регрессионный анализ.

2.1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТИ

Рассмотрим зависимость случайной величины Y от одной величины X (случайной или детерминированной).

Если каждому возможному значению X соответствует единственное возможное значение Y, то Y называют ***функцией*** аргумента X. Строгая функциональная зависимость между двумя случайными величинами

реализуется редко, так как обе величины могут быть подвержены воздействию случайных факторов.

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение закона распределения другой.

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

Если статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной величины изменяется среднее значение (математическое ожидание) другой, то зависимость называется ***корреляционной***.

Между функциональной и корреляционной зависимостями случайных величин существует связь.

1. Если случайные величины X и Y функционально зависимы, то они коррелированы. Обратное утверждение в общем случае неверно.

2. Если X и Y независимы, то они некоррелированы. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Таким образом, корреляционная зависимость занимает промежуточное значение между функциональной зависимостью и независимостью. Поэтому корреляционную зависимость считают «слабой» зависимостью между случайными величинами.

2.2. ЛИНЕЙНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Пусть имеется n наблюдений случайного вектора (X,Y). При этом $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

По данным наблюдениям можно вычислить следующие статистики:

$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ – выборочное среднее случайной величины X;

$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$ – выборочное среднее случайной величины Y;

$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ – выборочное среднее произведений случайных величин;

$\widetilde{D}_X = \widetilde{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ – выборочная дисперсия случайной величины X;

$\widetilde{D}_Y = \widetilde{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ – выборочная дисперсия случайной величины Y;

$\widetilde{K}_{XY} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}$ – выборочный корреляционный момент.

Все эти статистики являются вычисленными по данной выборке наблюдений ***оценками*** соответствующих числовых характеристик генеральной совокупности. Заметим, что последние три формулы являются смещенными оценками, однако именно они согласно методу наименьших квадратов используются в уравнении линейной регрессии.

Выборочным коэффициентом корреляции $\widetilde{r}_{XY}$ называется отношение выборочного корреляционного момента $\widetilde{K}_{XY}$ к произведению выборочных среднеквадратических отклонений величин X и Y:

$$\widetilde{r}_{XY} = \frac{\widetilde{K}_{XY}}{\widetilde{\sigma}_X \cdot \widetilde{\sigma}_Y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\widetilde{\sigma}_X \cdot \widetilde{\sigma}_Y}.$$

Выборочный коэффициент корреляции можно вычислить с помощью функции КОРРЕЛ пакета EXCEL.

Выборочный коэффициент корреляции $\widetilde{r}_{XY}$ является ***оценкой*** неизвестного истинного коэффициента корреляции r_{XY}, который характеризует степень линейной зависимости между случайными величинами. Если случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью

$$Y = aX + b,$$

то $r_{XY} = \pm 1$, причем знак «плюс» или «минус» берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент a. В общем случае, когда величины X и Y связаны произвольной вероятностной зависимостью, коэффициент корреляции может принимать значения в пределах

$$-1 \le r_{XY} \le 1.$$

В случае $r_{XY} > 0$ говорят о ***положительной корреляции*** между величинами X и Y, а в случае $r_{XY} < 0$ – об ***отрицательной корреляции***. Положительная корреляция между случайными величинами означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем возрастать; отрицательная корреляция означает, что при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем убывать.

Если коэффициент корреляции $r_{XY} = 0$, то случайные величины называются ***некоррелированными***. Из независимости случайных величин следует некоррелированность, то есть для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю. Обратное утверждение в общем случае неверно: из некоррелированности случайных величин не всегда следует их независимость.

Являясь оценкой истинного коэффициента корреляции, выборочный коэффициент корреляции $\tilde{r}_{XY}$ обладает аналогичными свойствами и может характеризовать степень линейной зависимости. По его величине можно судить о тесноте связи между случайными величинами X и Y: если значение $\tilde{r}_{XY}$ по модулю близко к единице, то связь достаточно тесная; если $\tilde{r}_{XY} \approx 0$, то связь между случайными величинами слабая.

П Р И М Е Р 8 (Задание, ч.2, п.1):

В табл.12 представлены результаты наблюдений двух случайных величин X и Y. Требуется определить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать результаты.

Таблица 12

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	4,08	2,14	11	4,31	6,29
2	6,91	3,00	12	2,34	5,52
3	7,42	1,73	13	3,82	3,11
4	3,58	4,24	14	3,98	5,70
5	5,16	3,27	15	3,24	2,60
6	5,19	2,83	16	2,88	5,13
7	4,10	4,22	17	6,19	1,44
8	5,37	4,40	18	5,86	2,20
9	5,02	2,19	19	2,67	3,58
10	6,19	3,20	20	4,36	3,90

Найдем выборочные оценки числовых характеристик распределения:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20} \cdot 92,67 = 4,6335,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{20} \cdot 70,69 = 3,5345,$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \frac{1}{20} \cdot 306.9292 = 15,3465,$$

$$\widetilde{\sigma}_X = \sqrt{\widetilde{D}_X} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{20} \cdot 37,6767} = 1,3725,$$

$$\widetilde{\sigma}_Y = \sqrt{\widetilde{D}_Y} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{20} \cdot 35,8161} = 1,3381,$$

$$\widetilde{K}_{XY} = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 15,3465 - 4,6335 \cdot 3,5345 = -1,0306.$$

Найдем теперь выборочный коэффициент корреляции:

$$\widetilde{r}_{XY} = \frac{\widetilde{K}_{XY}}{\widetilde{\sigma}_X \cdot \widetilde{\sigma}_Y} = \frac{-1,0306}{1,3725 \cdot 1,3381} = -0,5611.$$

Анализ полученного выборочного коэффициента корреляции позволяет выдвинуть следующую гипотезу: связь между случайными величинами не

очень тесная (значение выборочного коэффициента корреляции по модулю значительно отличается от единицы). Так как выборочный коэффициент корреляции отрицателен, то при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию в среднем убывать.

2.3. УРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Пусть имеется n наблюдений случайного вектора (X,Y). При этом $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Будем считать величину X неслучайной (детерминированной), поскольку при сопоставлении величин X и Y можно отнести все случайные ошибки лишь к величине Y. Тогда ошибка наблюдения будет складываться из собственной случайной ошибки величины Y и из «ошибки сопоставления», возникающей из-за того, что с величиной Y сопоставляется не совсем то значение X, которое имело место на самом деле.

В модели линейной регрессии зависимость между величинами X и Y представляется в виде

$$y_i = a \cdot x_i + b + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n},$$

где x_i – детерминированная (неслучайная) величина, ε_i - случайные ошибки наблюдений, причем $M[\varepsilon] = 0$. Значение дисперсии ошибок наблюдений $D[\varepsilon] = \sigma^2$ неизвестно, ее оценка определяется по результатам наблюдений.

Задача линейного регрессионного анализа состоит в том, чтобы по данным наблюдений $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1,n}$:

1) получить точечные и интервальные оценки неизвестных параметров a и b,

2) проверить статистические гипотезы о параметрах модели,

3) проверить адекватность модели результатам наблюдений,

4) получить точечный y^* и интервальный прогноз для заданного значения x^*.

Для нахождения оценок параметров используют метод наименьших квадратов, согласно которому в качестве оценок параметров a и b принимаются значения $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, минимизирующие сумму квадратов отклонений выборочных значений y_i от расчетных значений $(a \cdot x_i + b)$:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right]^2 \to \min.$$

Для нахождения минимума функции двух переменных требуется вычислить частные производные по этим переменным и приравнять их к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

В результате получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = b \cdot n + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии:

$$\tilde{a} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\tilde{\sigma}_X^2} = \tilde{r}_{XY} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\sigma}_X},$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \tilde{a} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{y} - \tilde{r}_{XY} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\sigma}_X} \cdot \bar{x}.$$

Критериями качества способа оценивания являются требования состоятельности, несмещенности и эффективности оценок, найденных данным способом. Оценки параметров уравнения регрессии, полученные по методу наименьших квадратов, удовлетворяют всем этим требованиям.

Коэффициент $\tilde{a} = \tilde{r}_{XY} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\sigma}_X}$ называется ***коэффициентом регрессии*** Y на X, а уравнение $y - \bar{y} = \tilde{r}_{XY} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\sigma}_X}(x - \bar{x})$ называется ***уравнением линейной регрессии*** Y на X.

Аналогично получается уравнение линейной регрессии X на Y:

$$x - \bar{x} = \tilde{r}_{XY} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_X}{\tilde{\sigma}_Y}(y - \bar{y}).$$

Обе прямые регрессии проходят через точку $(\bar{x}, \bar{y})$, которая называется ***центром совместного распределения*** величин X и Y. Если $\tilde{r}_{XY} = \pm 1$, то обе прямые регрессии совпадают.

Уравнения линейной регрессии можно получить с помощью пакета прикладных программ EXCEL, воспользовавшись статистической функцией ЛИНЕЙН.

Главным показателем адекватности регрессионной модели является ***коэффициент детерминации***:

$$R^2 = \frac{1}{\tilde{D}_Y} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{y}(x_i) - \bar{y} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\tilde{D}_Y} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{y}(x_i) - y_i \right)^2.$$

Значения коэффициента детерминации изменяются от нуля до единицы $\left(0 \le R^2 \le 1\right)$. Если значение R^2 близко к единице, то уравнение регрессии хорошо описывает фактические данные. Если значение R^2 близко к нулю, то линейная связь между случайными величинами отсутствует, а уравнение линейной регрессии плохо описывает данные наблюдений.

По уравнению регрессии можно оценить прогнозное значение y^* для заданного значения x^* и получить ***точечный прогноз***: $\tilde{y}(x^*) = \tilde{a} \cdot x^* + \tilde{b}$. Однако точечное прогнозное значение не дает представления о точности

прогноза. Поэтому точечный прогноз дополняется интервальной оценкой прогнозного значения – доверительным интервалом.

Известно, что прогнозируемое значение y^* с доверительной вероятностью $p = 1 - \alpha$ принадлежит интервалу прогноза:

$$\left(\tilde{y}(x^*) - t_p(k) \cdot \mu \;\; ; \;\; \tilde{y}(x^*) + t_p(k) \cdot \mu \right),$$

где $\tilde{y}(x^*)$ – точечный прогноз; $t_p(k)$ – квантиль распределения Стьюдента, определяемый по табл.П4 в зависимости от доверительной вероятности и числа степеней свободы $k = n - 2$; μ – средняя ошибка прогноза, вычисляемая по формуле

$$\mu = \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\sigma}_X} \cdot \sqrt{\frac{1 - R^2}{n - 2} \cdot \left[(n+1) \cdot \tilde{D}_X + (x^* - \bar{x})^2 \right]}.$$

<u>П Р И М Е Р 9</u> (Задание, ч.2, пп. 2, 3 и 4):

Требуется составить уравнение линейной регрессии Y на X для данных из табл.12; оценить адекватность модели по коэффициенту детерминации; найти доверительный интервал при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$, в который попадает прогнозное значение y^* для $x^* = x_{\max} + 1$.

Уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид

$$y - \bar{y} = \tilde{r}_{XY} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\sigma}_X} (x - \bar{x}).$$

Подставляя найденные ранее значения, получим следующее уравнение:

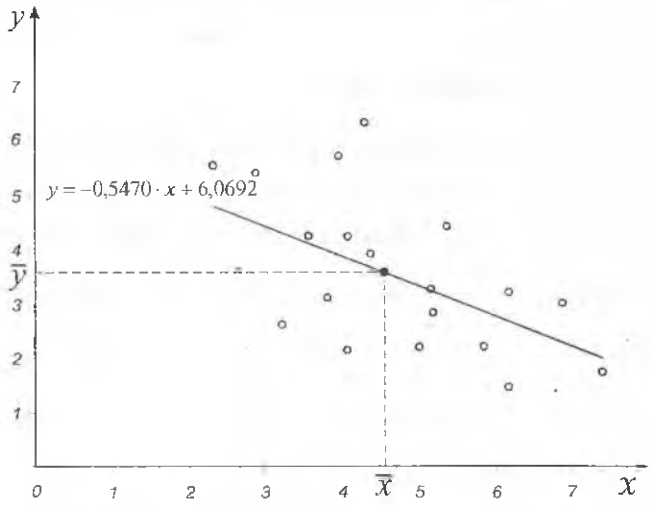
$$y - 3{,}5345 = -0{,}5611 \cdot \frac{1{,}3381}{1{,}3725} (x - 4{,}6335).$$

Разрешив данное уравнение относительно y, получим уравнение линейной регрессии Y на X:

$$y = -0{,}5470 \cdot x + 6{,}0692.$$

График прямой регрессии и опытных данных приведены на рис.13. Из этого рисунка видно, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию в среднем убывать, о чем свидетельствует и отрицательный выборочный коэффициент корреляции.

В нашем случае коэффициент детерминации имеет достаточно малое, далекое от 1 значение: $R^2 = \tilde{r}_{XY}^2 = 0{,}3148$, что свидетельствует о том, что линейная регрессия не соответствует опытным данным.



Р и с. 13. Опытные данные и прямая регрессии

Найдем теперь доверительный интервал, в который попадает прогнозное значение y^* для $x^* = x_{\max} + 1 = 8{,}42$. Точечный прогноз

$$\tilde{y}(x^*) = -0{,}5470 \cdot 8{,}42 + 6{,}0692 = 1{,}4635,$$

ошибка прогноза

$$\mu = \frac{1{,}3381}{1{,}3725} \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}3148}{18} \cdot \left[21 \cdot 1{,}8837 + \left(8{,}42 - 4{,}6335\right)^2\right]} = 1{,}3964.$$

При $\alpha = 0{,}1$ и $k = 20 - 2 = 18$ квантиль распределения Стьюдента $t_p(k) = t_{0{,}9}(18) = 1{,}33$ (табл.П4). Подставив все найденные значения в

формулу доверительного интервала прогнозного значения, получим, что прогнозное значение y^* для $x^* = x_{max} + 1 = 8{,}42$ с доверительной вероятностью $p = 1 - \alpha$ принадлежит интервалу:

$$\left(1{,}4635 - 1{,}33 \cdot 1{,}3964 \;;\; 1{,}4635 + 1{,}33 \cdot 1{,}3964\right) = \left(-0{,}3937 \;;\; 3{,}3207\right).$$

Вследствие того, что между случайными величинами Y и X существует слабая зависимость, далекая от линейной, по линейному уравнению регрессии получен слишком широкий интервал изменений прогнозного значения. Таким образом, в данном случае прогноз по линейной модели не соответствует характеру изменения опытных данных.

В этом случае можно построить уравнение регрессии с использованием функций более сложного вида, чем линейная. Класс математических функций для описания связи двух переменных достаточно широк. Наиболее часто используют квадратичную параболу $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$, кубическую параболу $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$; гиперболу $y = a + b/x$; степенную функцию $y = a \cdot x^b$; показательную функцию $y = a \cdot b^x$; логарифмическую функцию $y = a + b \cdot \ln x$ и т.д.

На практике предпочтение отдается простым видам функций, ибо они в большей степени поддаются интерпретации и требуют меньшего объема наблюдений. Результаты многих исследований подтверждают, что число наблюдений должно как минимум в 7 раз превышать число коэффициентов при переменной x в модели. Например, для квадратичной параболы $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ требуется не менее 14 наблюдений. Статистические оценки коэффициентов уравнения нелинейной регрессии находятся также с помощью метода наименьших квадратов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А. Теория вероятностей и прикладная статистика. – М.: Изд-во ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2002.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2004.
5. Сборник задач по математике для втузов «Теория вероятностей и математическая статистика» / Под ред. А.В. Ефимова. Ч. 3. – М.: Наука, 1990.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Функция Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0800	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3261	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3485	0,3508	0,3583	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998

Функция распределения нормального закона $N(0,1)$ $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$.

Таблица П2

Значения функции плотности нормального закона $N(0,1)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблица П3

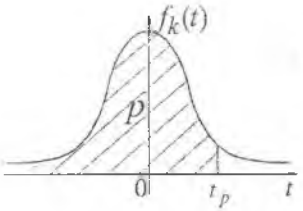
Нормальное распределение

Квантили распределения C_p: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{C_p} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = p$

p	C_p	p	C_p	p	C_p
0,50	0,000	0,860	1,080	0,9910	2,366
0,55	0,126	0,870	1,126	0,9920	2,409
0,60	0,253	0,880	1,175	0,9930	2,457
0,65	0,385	0,890	1,227	0,9940	2,512
0,70	0,524	0,900	1,282	0,9950	2,576
0,75	0,674	0,910	1,341	0,9955	2,612
0,76	0,706	0,920	1,405	0,9960	2,652
0,77	0,739	0,930	1,476	0,9965	2,697
0,78	0,772	0,940	1,555	0,9970	2,748
0,79	0,806	0,950	1,645	0,9975	2,807
0,80	0,842	0,960	1,751	0,9980	2,878
0,81	0,878	0,970	1,881	0,9985	2,968
0,82	0,915	0,975	1,960	0,9990	3,090
0,83	0,954	0,980	2,051	0,9995	3,291
0,84	0,994	0,985	2,170	0,9999	3,720
0,85	1,036	0,990	2,326	0,99999	4,265

Примечание. Если $0 < p < 0{,}5$, то $C_p = -C_{1-p}$.

Таблица П4



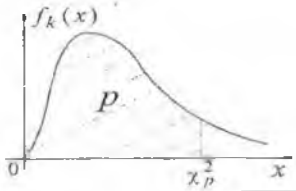
Распределение Стьюдента $f_k(t)$

Квантили распределения t_p: $\int_{-\infty}^{t_p} f_k(t)dt = p$

Число степеней свободы k	Вероятность, p					
	0,9	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,9995**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,977	4,140
16	1,337	1,746	2,120	2,584	2,921	4,015
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Примечание. При $k \geq 30$ $t_p(k) \approx C_p$, где C_p – квантиль нормального распределения (табл.П3).

Таблица П5



Распределение хи – квадрат χ^2

Квантили распределения χ^2_p: $\int_0^{\chi^2_p} f_k(x)dx = p$

Число степеней свободы k	Вероятность, p						
	0,001	**0,005**	**0,01**	**0,02**	**0.025**	**0,05**	**0,01**
1	0,0000016	0,000039	0,00016	0,00063	0,00098	0,004	0,016
2	0,002	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211
3	0,024	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584
4	0,091	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204
7	0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490
9	1,152	1,735	2,008	2,532	2,700	3,325	4,168
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865
11	1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578
12	2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547
16	3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312
17	4,416	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085
18	4,905	6,265	7,015	7,096	8,231	9,390	10,865
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651
20	5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041
23	7,529	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848
24	8,085	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114
28	10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599

Распределение хи – квадрат χ^2

Число степеней свободы k	Вероятность, p						
	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,999
1	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

Примечание. При $k \geq 30$ $\chi_p^2(k) \approx \dfrac{(C_p + \sqrt{2k-1})^2}{2}$, где C_p – квантиль нормального распределения (табл.П3).

Учебное издание

Денискина Екатерина Александровна

Коломиец Павел Эдуардович

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Учебное пособие

Редактор Л. Я. Чегодаева

Подписано в печать 30.01.2006 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,7. Усл. кр.-отт. 3,8. Уч.-изд.л. 4,0.
Тираж 800 экз. Заказ 8. . Арт. С-3/2006.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.