

САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени академика
С.П. КОРОЛЕВА

А.Н. Гусев

**Современная теория
управления**

САМАРА
2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

А.Н. Гусев

Современная теория управления

Учебное пособие

УДК 629.7: 62-50 7.01

Современная теория управления: Учебное пособие/ А.Н. Гусев.
Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. 58с.

ISBN 5-7883-0100-9

Изложены основы теории модального управления, наблюдающих устройств и оптимальной фильтрации. Даны рекомендации по выбору оптимального расположения полюсов замкнутой системы. Рассмотрены примеры синтеза оптимальных в избранном смысле систем при полной и неполной информации о векторе состояния.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 0405 и 1905. Работа подготовлена на кафедре динамики полета и систем управления.
Ил. 19. Библиогр.: 6 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензенты: И.В. Дьянгепский, Л.И. Калакутский

ISBN 5-7883-0100-9

© Самарский государственный
аэрокосмический университет,
2000

Введение

Сложность исследования систем достаточно высокого порядка путем непосредственного решения описывающих их дифференциальных уравнений при отсутствии быстродействующих ЭВМ вызвала в свое время, как мы уже знаем, появление аппарата передаточных функций и частотных характеристик.

Передаточная функция определяет зависимость выходного сигнала системы или звена от входного и, таким образом, исследование ведется по системе “вход-выход”. Промежуточные величины, характеризующие собой значения производных выходного сигнала, никак не контролируются, и при проверке результатов синтеза путем моделирования или натуральных испытаний может оказаться, что они выходят за рамки установленных ограничений. Приходится возвращаться в исходную точку и уточнять расчеты. Таким образом, синтез систем осуществляется известным методом проб и ошибок.

Появление быстродействующих ЭВМ вызвало революцию в методах анализа и синтеза систем управления и привело к исключительным последствиям: выяснилась неприемлемость во многих случаях старых методов и самого подхода к синтезу систем, был дан толчок к разработке новых методов, составивших существо современной теории управления. Для характеристики системы эта группа методов использует понятие пространства состояний, расчет системы сводится к отысканию оптимальных в некотором смысле значений ее параметров, например путем нахождения экстремума некоторого функционала. Хотя этот подход может рассматриваться как обобщение методов классической теории, связанных с минимизацией линейной интегральной квадратичной оценки или среднеквадратического значения ошибки, на самом деле он гораздо более совершенен и фактически является совершенно новым.

Среди различных направлений теории систем управления, основанных на методе пространства состояний, можно выделить два, получивших наибольшее распространение в инженерной практике. Одно из них образуется методами оптимизации систем путем сведения к минимуму некоторого функционала, характеризующего качество управления при учете ограничений, наложенных на координаты состояния. Другое направление связано с оптимизацией системы методами модального управления, т.е. с методами формирования цепей обратных связей, придающих замкнутой системе заранее выбранное расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости.

Целью данного раздела дисциплины “Основы теории автоматического управления” является ознакомление студентов с некоторыми методами и результатами современной теории управления, в частности с методами теории модального управления, наблюдающих устройств и оптимальной фильтрации.

1. Основные понятия современной теории управления

1.1. Переменные состояния и уравнения состояния динамической системы

Состояние динамической системы - это совокупность физических переменных $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, характеризующих поведение системы в будущем при условии, что известны ее начальное состояние и приложенные воздействия.

Динамическая система может быть описана системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m + n_1(t), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m + n_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m + n_n(t). \end{aligned} \right\}$$

Введем эту систему в матричной форме

$$\dot{X} = AX + BU + n(t). \quad (1.1)$$

В этом выражении $X - n \otimes 1$ - матрица параметров (координат) состояния, $A - n \otimes n$ - матрица состояния, составленная из коэффициентов системы уравнений, $B - n \otimes m$ - матрица управления, $U - m \otimes 1$ - матрица управляющих воздействий, $n(t)$ - вектор возмущений размерности $n \otimes 1$.

Все или только некоторые параметры состояния для использования в целях управления должны быть измерены приборами специальной измерительной системы. Поэтому для полного описания динамической системы уравнение состояния (1.1) должно быть дополнено уравнением, связывающим переменные состояния $x_i(t)$ и выходные переменные измерительной системы

$y_i(t)$. Эти выходные переменные в общем случае являются линейной комбинацией параметров состояния с некоторыми весами и связь между ними выражается системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \\ i &= 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В векторно-матричной форме уравнение (1.2) можно записать следующим образом:

$$Y = CX. \quad (1.3)$$

Матрицу-столбец $Y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T$ называют выходным вектором или вектором наблюдения. Матрица C размера $p \otimes n$ называется матрицей выхода или матрицей наблюдения.

Решение векторно-матричного уравнения (1.1) при $n(t)=\theta$ можно найти так же, как и решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = ax + bu.$$

В изображениях по Лапласу получим

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s).$$

Отсюда

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a} U(s).$$

Используя процедуру обратного преобразования Лапласа, получим

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau. \quad (1.4)$$

Решение векторного уравнения (1.1) определяется аналогично.

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s).$$

Отсюда

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s).$$

В этом выражении I -единичная матрица. По аналогии с (1.4) запишем

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau. \quad (1.5)$$

Функция $\varphi(t) = e^{At}$ называется фундаментальной или переходной матрицей.

Методы вычисления фундаментальной матрицы.

а) Метод разложения в ряд.

$$\varphi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

Ограничившись конечным числом членов ряда и произведя их суммирование, можно получить приближенное выражение для фундаментальной матрицы.

б) Метод, основанный на определении собственных значений матрицы состояния.

В соответствии с преобразованием Лапласа получим

$$L\{\varphi(t)\} = \Phi(s) = L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1},$$

и следовательно

$$\varphi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}. \quad (1.6)$$

Определение фундаментальной матрицы сводится к вычислению собственных значений матрицы состояния и последующему использованию процедуры обратного преобразования Лапласа.

в) Метод, основанный на теореме Сильвестра.

Предположим, что имеется некоторая функция $f(A)$ от матрицы A , которую можно представить в виде степенного ряда

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k A^k.$$

Допустим, что все собственные числа матрицы A различны. Тогда согласно теореме Сильвестра

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) F(\lambda_i), \quad \text{где}$$

$$F(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{A - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Здесь λ_i — собственные числа матрицы состояния A .

В частном случае, когда $f(A) = \varphi(t) = e^{At}$, получим

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} F(\lambda_i). \quad (1.7)$$

После определения фундаментальной матрицы строится решение (1.5).

Часто возникает задача найти описание системы в понятиях пространства состояний, если известна ее передаточная функция в обычном понимании, т.е. в системе “вход-выход”. Пусть эта передаточная функция имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Дифференциальное уравнение в изображениях по Лапласу будет следующим:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)X(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m)U(s).$$

Допустим вначале, что $m=n$.

Сделаем замену $\dot{x}_i = x_{i+1} + k_i$ и перейдем к системе уравнений первого порядка.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+1} + k_i u, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1 + k_n u. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Для определения неизвестных коэффициентов k_i проделаем следующие операции:

- а) перейдем в системе (1.8) к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях;
- б) найдем характеристический определитель полученной алгебраической системы уравнений;
- в) решим эту систему уравнений относительно переменной x_1 ;
- г) учитывая, что $x = x_1 + k_0 u$, найдем выражения для $x(s)$ и, приравняв числитель полученного выражения числителю исходной передаточной функции, получим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов k_i .

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= b_0, \\ k_1 &= b_1 - a_1 k_0, \\ k_2 &= b_2 - a_1 k_1 - a_2 k_0, \\ &\vdots \\ k_i &= b_i - \sum_{m=0}^{i-1} a_{i-m} k_m. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

В практических приложениях всегда $m < n$ и при использовании формул (1.9) нужно полагать все коэффициенты от b_0 до b_{n-m-1} включительно равными нулю.

При известных k_i система уравнений (1.8) описывает динамику САУ в пространстве состояний.

1.2. Матричная передаточная функция

Матричные уравнения (1.1) и (1.2) в изображениях по Лапласу при $n(t)=0$ образуют систему

$$\left. \begin{aligned} sX(s) &= A(s)X(s) + X(0) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

При нулевых начальных условиях, исключая из системы $X(s)$, получим

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s).$$

Матрицу

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (1.11)$$

устанавливающую связь между вектором выхода $Y(s)$ и вектором входа $U(s)$ называют матричной передаточной функцией (МПФ).

1.3. Понятия управляемости и наблюдаемости системы

Управлять состоянием системы $\bar{x}(t)$ можно изменением вектора $\bar{u}(t)$, а наблюдать ее состояние можно, измеряя вектор выхода $\bar{y}(t)$.

Система называется управляемой, если она может быть переведена из произвольного состояния $\bar{x}(t_0)$ в любое другое желаемое состояние $\bar{x}(t_1)$ за конечный интервал времени $T = t_1 - t_0$ путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\bar{u}(t)$.

Рассмотрим уравнение состояния

$$\dot{X} = AX + BU.$$

Будем считать, что матрица A имеет все различные собственные значения. Определим матрицу собственных векторов V и осуществим линейное преобразование

$$X^* = V^{-1}X.$$

После подстановки в исходное уравнение получим

$$V\dot{X}^* = AVX^* + BU.$$

Умножим слева полученное выражение на V^{-1} .

$$\dot{X}^* = V^{-1}AVX^* + V^{-1}BU.$$

Доказано, что $V^{-1}AV$ есть диагональная матрица Λ , элементами которой являются собственные числа матрицы A .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{X}^* = \Lambda X^* + B^*U, \quad (1.12)$$

$$B^* = V^{-1}B.$$

Уравнения (1.12) называются каноническими. Эта форма записи уравнений удобна тем, что в ней отсутствует взаимосвязь между каноническими переменными состояния. Из (1.12) следует, что система, заданная в канонической форме, управляема, если ни одна из строк матрицы B^* не является нулевой. С физической точки зрения это означает, что в управляемой системе вектор управления воздействует на каждый параметр состояния. Это условие не выполняется, если хотя бы одна строка вышеуказанной матрицы является нулевой. Рассмотренный критерий называется критерием управляемости Гильберта.

Доказана также другая формулировка критерия управляемости, не связанная с диагонализацией матрицы A .

Система является управляемой, если матрица управляемости Q_y имеет ранг, равный n .

$$\text{rang} Q_y = \text{rang} [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (1.13)$$

Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость требует, чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал. Может быть так, что некоторая переменная состояния x_j не связана непосредственно с выходом и по наблюдению выхода y ее определить невозможно. Но для управления необходимо располагать сведениями о всех текущих значениях вектора состояния. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях, наблюдая векторы входа и выхода, можно найти переменные состояния x ?

Систему называют наблюдаемой, если по данным измерения или наблюдения векторов $\bar{y}(t)$ и $\bar{u}(t)$ на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ можно однозначно определить начальное состояние $x(t_0)$. Систему называют полностью наблюдаемой, если наблюдаемы все ее состояния в любые моменты времени.

После диагонализации исходной системы можно записать

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^* &= \Lambda x^* + B^* U, \\ y &= C^* x^*. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Здесь $C^* = CV$.

Исходя из выше данного определения можно заключить, что система (1.14) наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы C^* не является нулевым.

Таким образом, система наблюдаема, если все ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Ненаблюдаемая система не может быть идентифицирована в пространстве состояний, т.к. невозможна идентификация параметров, относящихся к ненаблюдаемым состояниям.

Система полностью наблюдаема, если ранг матрицы наблюдения R равен порядку системы n .

$$\text{rang}R = \text{rang}\left[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T\right] = n. \quad (1.15)$$

Очевидная аналогия между критериями управляемости и наблюдаемости позволяет сделать вывод об их дуальности. Назовем два объекта S и S^* дуальными, если их можно описать соответственно уравнениями:

$$S: \left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx; \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

$$S^*: \left. \begin{array}{l} \dot{z} = A^T z + C^T u, \\ w = B^T z. \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

Из уравнений (1.13), (1.15), (1.16) и (1.17) следует, что если S управляема в t_0 , то S^* наблюдаема в t_0 и наоборот.

Таким образом, наблюдаемость одной из систем можно проверить анализом управляемости дуальной ей системы.

В заключение отметим, что понятия управляемости и устойчивости не связаны между собой. Устойчивость в пространстве состояний также определяется корнями характеристического уравнения системы (собственными числами матрицы состояния)

$$\det\{sI - A\} = 0. \quad (1.18)$$

2. Методы модального управления

Помещение всех корней (полюсов) замкнутой системы в любые наперед заданные положения составляет предмет теории модального управления. Происхождение термина "модальное управление" объясняется тем, что каждому корню соответствует определенная составляющая свободного движения системы, называемая модой. При использовании методов модального управления прежде всего возникает вопрос о расположении корней системы, к которому следует стремиться. Этот вопрос в каждом конкретном случае может решаться по-разному, в зависимости от свойств объекта управления и других обстоятельств. Рассмотрим только один метод, дающий рекомендации по расположению корней системы и полностью справедливый в случае, если передаточная функция замкнутой системы не имеет нулей [1,3,4]. Необходимо отметить, что и в случае наличия нулей выполнение рекомендаций излагаемого ниже метода

стандартных коэффициентов дает решения, близкие к оптимальным в рассматриваемом смысле.

2.1. Метод стандартных коэффициентов

Рассмотрим замкнутую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{dx^{(n)}}{dt^n} + a_1 \frac{dx^{(n-1)}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = g(t). \quad (2.1)$$

Примем, что $g(t)=1(t)$, а начальные условия нулевые. Чтобы обеспечить в некотором смысле "оптимальное" протекание реакции $X(t)$, предложены различные распределения корней характеристического уравнения

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.2)$$

а) Биномиальные стандартные формы.

Это предложение заключается в обеспечении одинаковости всех корней уравнения (2.2), причем n -кратный корень должен быть вещественным и отрицательным со значением модуля ω_0 , определяемым требованиями к быстродействию системы (чем больше ω_0 , тем меньше время регулирования). Тогда левая часть характеристического уравнения обращается в бином Ньютона $(s + \omega_0)^n$, разворачивая который, получаем стандартные (желаемые) значения коэффициентов характеристического уравнения. Например, для систем до 8-го порядка включительно характеристический полином имеет вид:

$$\begin{aligned} & s + \omega_0 \\ & s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 \\ & s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\ & s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 6\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\ & s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\ & s^6 + 6\omega_0 s^5 + 15\omega_0^2 s^4 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^4 s^2 + 6\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\ & s^7 + 7\omega_0 s^6 + 21\omega_0^2 s^5 + 35\omega_0^3 s^4 + 35\omega_0^4 s^3 + 21\omega_0^5 s^2 + \\ & \quad + 7\omega_0^6 s + \omega_0^7 \\ & s^8 + 8\omega_0 s^7 + 28\omega_0^2 s^6 + 56\omega_0^3 s^5 + 70\omega_0^4 s^4 + 56\omega_0^5 s^3 + \\ & \quad + 28\omega_0^6 s^2 + 8\omega_0^7 s + \omega_0^8. \end{aligned}$$

Реакции системы при биномиальном распределении являются монотонными и достаточно медленно протекающими, что во многих случаях не является оптимальным. На рис. 2.1 приводятся реакции на ступенчатое воздействие биномиальных систем от первого до восьмого порядка.

б) Стандартные формы Баттерворта.

Предложение Баттерворта состоит в том, что корни при соблюдении одинаковости угловых расстояний распределяются по полуокружности радиуса ω_0 в левой полуплоскости. Одинаковость угловых расстояний следует понимать в следующем смысле: угол, составленный с мнимой осью радиусом-вектором ближайшего к ней корня, равен половине угла между радиусами-векторами соседних корней.

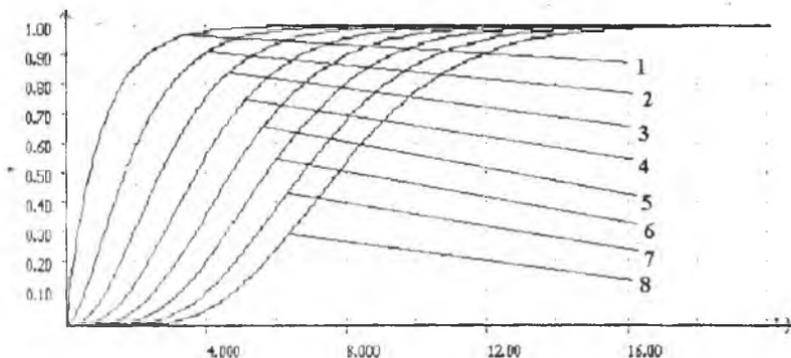


Рис. 2.1. Реакции систем с биномиальными коэффициентами на ступенчатое воздействие

Стандартные формы Баттерворта для систем с 1-го по 8-й порядок имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & s + \omega_0 \\
 & s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2 \\
 & s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\
 & s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\
 & s^5 + 3.24\omega_0 s^4 + 5.24\omega_0^2 s^3 + 5.24\omega_0^3 s^2 + 3.24\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\
 & s^6 + 3.86\omega_0 s^5 + 7.46\omega_0^2 s^4 + 9.13\omega_0^3 s^3 + 7.46\omega_0^4 s^2 + 3.86\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\
 & s^7 + 4.5\omega_0 s^6 + 10.1\omega_0^2 s^5 + 14.6\omega_0^3 s^4 + 14.6\omega_0^4 s^3 + 10.1\omega_0^5 s^2 + 4.5\omega_0^6 s \\
 & \quad + \omega_0^7 \\
 & s^8 + 5.12\omega_0 s^7 + 13.14\omega_0^2 s^6 + 21.84\omega_0^3 s^5 + 25.69\omega_0^4 s^4 + 21.84\omega_0^5 s^3 + \\
 & \quad + 13.14\omega_0^6 s^2 + 5.12\omega_0^7 s + \omega_0^8.
 \end{aligned}$$

Реакции систем Баттерворта по сравнению с биномиальными более колебательны, но обеспечивают большее быстродействие и во многих случаях со-

ответствуют интуитивному представлению об оптимальном переходном процессе.

Реакции систем Баттерворта с первого по восьмой порядок включительно на единичное ступенчатое воздействие приведены на рис. 2.2.

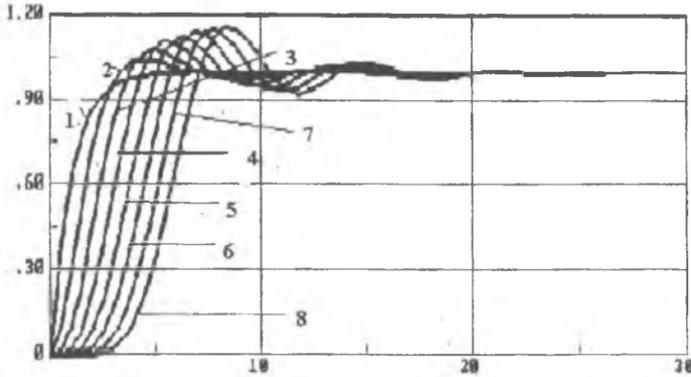


Рис. 2.2. Реакции систем Баттерворта на ступенчатое воздействие

в) Стандартные формы, обеспечивающие минимум линейной квадратичной интегральной оценки.

Стандартные формы в данном случае обеспечивают минимум оценки

$$J_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$

и имеют, например, вид:

$$\begin{aligned} & s + \omega_0 \\ & s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2 \\ & s^3 + \omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\ & s^4 + \omega_0 s^3 + 3\omega_0^2 s^2 + 2\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\ & s^5 + \omega_0 s^4 + 4\omega_0^2 s^3 + 3\omega_0^3 s^2 + 3\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\ & s^6 + \omega_0 s^5 + 5\omega_0^2 s^4 + 4\omega_0^3 s^3 + 6\omega_0^4 s^2 + 3\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\ & s^7 + \omega_0 s^6 + 6\omega_0^2 s^5 + 5\omega_0^3 s^4 + 10\omega_0^4 s^3 + 6\omega_0^5 s^2 + \\ & \quad + 4\omega_0^6 s + \omega_0^7 \\ & s^8 + \omega_0 s^7 + 7\omega_0^2 s^6 + 6\omega_0^3 s^5 + 15\omega_0^4 s^4 + 10\omega_0^5 s^3 + \\ & \quad + 10\omega_0^6 s^2 + 4\omega_0^7 s + \omega_0^8 . \end{aligned}$$

Реакции системы на ступенчатое воздействие в данном случае обладают несколько большей колебательностью по сравнению с реакциями Баттерворта и показаны на рис. 2.3.

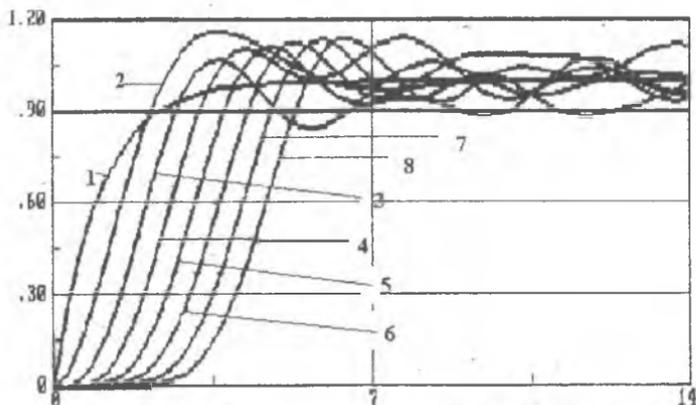


Рис. 2.3. Реакции систем, оптимизированных по критерию

$$J_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, \text{ на ступенчатое воздействие}$$

1) Стандартные формы, дающие минимум интегральной оценке

$$J_3 = \int_0^{\infty} t |\varepsilon(t)| dt.$$

В данном случае реакции системы на ступенчатое воздействие по сравнению с реакциями биномиальной системы характеризуются значительно большим быстродействием, а по сравнению с реакциями Баттерворта — существенно меньшей колебательностью. Приведем примеры рассматриваемых стандартных форм:

$$\begin{aligned} & s + \omega_0 \\ & s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2 \\ & s^3 + 1.75\omega_0 s^2 + 2.15\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\ & s^4 + 2.1\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.7\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\ & s^5 + 2.8\omega_0 s^4 + 5\omega_0^2 s^3 + 5.5\omega_0^3 s^2 + 3.4\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\ & s^6 + 3.25\omega_0 s^5 + 6.6\omega_0^2 s^4 + 8.6\omega_0^3 s^3 + 7.45\omega_0^4 s^2 + \\ & \quad + 3.95\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\ & s^7 + 4.47\omega_0 s^6 + 10.42\omega_0^2 s^5 + 15.08\omega_0^3 s^4 + 15.54\omega_0^4 s^3 + \\ & \quad + 10.64\omega_0^5 s^2 + 4.58\omega_0^6 s + \omega_0^7 \\ & s^8 + 5.20\omega_0 s^7 + 12.80\omega_0^2 s^6 + 21.60\omega_0^3 s^5 + 25.75\omega_0^4 s^4 + \end{aligned}$$

$$+ 22.2\omega_0^5 s^3 + 13.3\omega_0^6 s^2 + 5.15\omega_0^7 s + \omega_0^8.$$

Данные стандартные формы находят достаточно широкое применение на практике, но какого-либо алгоритма их не существует и получены они экспериментально. Реакции рассматриваемых систем на ступенчатое воздействие приведены на рис. 2.4.

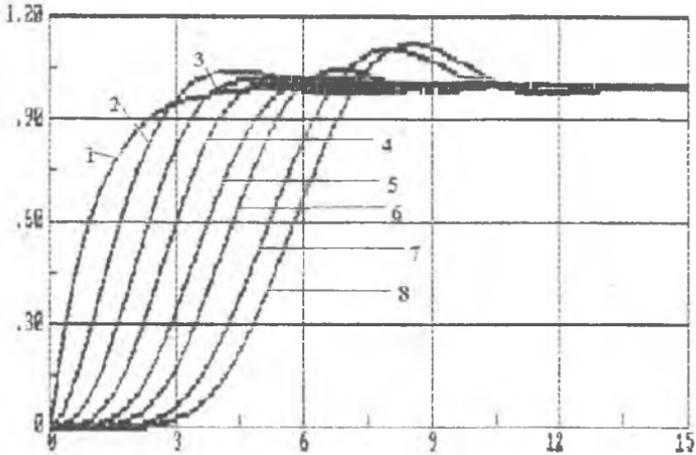


Рис. 2.4. Реакции систем, оптимизированных по критерию

$$J_3 = \int_0^{\infty} t|\varepsilon(t)|dt, \text{ на ступенчатое воздействие}$$

Существуют рекомендации [1,5] по расположению корней на действительной оси, обеспечивающему удовлетворительный характер переходной функции при наличии нулей у передаточной функции. При передаточной функции с одним нулем корни рекомендуется располагать на отрицательной вещественной полуоси по арифметической прогрессии, а при передаточной функции с двумя нулями - по геометрической прогрессии.

2.2. Управление корнями при полной информации о векторе состояния

2.2.1. Объект с одним входом

Рассмотрим линейный стационарный объект

$$\left. \begin{aligned} X'(t) &= AX(t) + BU(t), \\ Y(t) &= CX(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

В современной теории управления термин "объект" следует понимать более широко, чем обычно. К объекту будем относить также исполнительные

органы и предшествующие им усилители (входные сигналы усилителей образуют вектор U).

К объекту следует относить и чувствительные элементы, принимая их выходные сигналы в качестве составляющих выходного вектора $\bar{Y}(t)$.

Будем полагать, что все переменные состояния объекта поддаются непосредственному измерению и используются в качестве выходных сигналов. Тогда матрица C обращается в единичную матрицу I , так что $\bar{Y} = \bar{X}$.

Передаточная функция объекта будет

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}B. \quad (2.4)$$

Регулятор, присоединяемый к объекту, получает в данном случае переменные состояния и вырабатывает управления, прикладываемые к объекту. Будем считать, что регулятор линейно преобразует поступившие сигналы и выдает в качестве выхода их линейные комбинации. Выходные сигналы регулятора могут быть поданы на объект в тех же точках, что и измеримые внешние воздействия. Обозначим эти воздействия через $\bar{V}(t)$, а $m \otimes n$ матрицу преобразования регулятора- через P . Тогда получим

$$\bar{U} = \bar{V} - P\bar{X}. \quad (2.5)$$

Знак "-" указывает на отрицательную обратную связь. Объединяя уравнения (2.3) и (2.5), получим

$$X'(t) = (A - BP)X(t) + BV(t). \quad (2.6)$$

Перейдя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях из (2.6) получим матричную передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = (sI - A + BP)^{-1}B. \quad (2.7)$$

В практических задачах матрицу P выбирают так, чтобы придать матрице замкнутой системы $A-BP$ требуемые свойства, например, заданное расположение собственных значений. Это возможно только при полной управляемости системы.

Рассмотрим случай, когда объект имеет только один входной сигнал. В уравнении (2.3) вместо вектора $U(t)$ будет теперь скалярная величина $u(t)$, а вместо матрицы B типа $n \otimes m$ будет матрица-столбец b . Прямоугольная матрица P преобразуется в матрицу-строку p . Такая же замена произойдет и в матричной передаточной функции замкнутой системы. Представим передаточную функцию объекта в следующем виде:

$$W(s) = \frac{g(s)}{F(s)}, \quad (2.8)$$

где $F(s) = \det(sl - A)$, g -матрица-столбец, полученная перемножением присоединенной матрицы и матрицы b .

Структурная схема замкнутой системы примет вид, показанный на рис. 2.5.

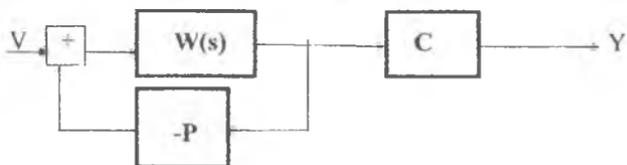


Рис. 2.5. Структурная схема системы

Характеристическое уравнение системы будет

$$1 + P \frac{g(s)}{F(s)} = 0, \quad (2.9)$$

где порядок следования матричных сомножителей взят таким, чтобы произведение было скалярной величиной. Приведя левую часть (2.9) к общему знаменателю и учитывая, что получившийся числитель равен характеристическому полиному $H(s)$ замкнутой системы, получим

$$pg(s) = H(s) - F(s). \quad (2.10)$$

В этом выражении неизвестной является только матрица-строка p . Полином $H(s)$ определен желаемым расположением корней замкнутой системы и может быть выбран в виде одной из стандартных форм. Приравнявая коэффициенты левой и правой частей выражения (2.10) при одинаковых степенях оператора s получим систему алгебраических уравнений, из которой можно найти все элементы матрицы регулятора p , обеспечивающие заданное расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Пример.

Рассмотрим объект, который описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} + C_1 \dot{\psi} &= -C_2 \delta, \\ T \dot{\delta} + \delta &= ku. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Обозначим $\delta = x_1$, $\dot{\psi} = x_2$, $\psi = x_3$. После преобразований получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} T\dot{x}_1 + x_1 &= ku, \\ \dot{x}_2 + C_1 x_3 &= -C_2 x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

В матричной форме можно записать

$$\dot{X} = AX + bu,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{k}{T} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Численные значения коэффициентов уравнений взяты произвольно. Матрица управляемости имеет вид

$$Q_y = (b, Ab, A^2b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен порядку объекта ($n=3$), объект полностью управляем и существует возможность построения регулятора, обеспечивающего любое желаемое расположение корней замкнутой системы. Полином $F(s)$ и матрица-столбец $g(s)$ определяются из матричной передаточной функции (МПФ) объекта

$$W(s) = (sI - A)^{-1}b = \frac{1}{(s+1)(s^2+2)} \begin{pmatrix} s^2+2 \\ -s \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{g(s)}{F(s)}.$$

Примем в качестве желаемого характеристического полинома биномиальную стандартную форму

$$H(s) = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3.$$

Подставив $g(s)$, $F(s)$, $H(s)$ в уравнение (2.10), после перемножения получим

$$p_1(s^2 + 2) - p_2s - p_3 = s^3 + 3\omega_0s^2 + 3\omega_0^2s + \omega_0^3 - (s + 1)(s^2 + 2).$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях s в левой и правой частях, получим

$$\left. \begin{aligned} 2p_1 - p_3 &= \omega_0^3 - 2, \\ -p_2 &= 3\omega_0^2 - 2, \\ p_1 &= 3\omega_0 - 1. \end{aligned} \right\}$$

Выберем $\omega_0 = 1$, и получим: $p_1 = 2$; $p_2 = -1$; $p_3 = 5$.

Учитывая выражение (2.5) для системы стабилизации величины ψ , получим закон управления

$$u = -(2\delta - \psi' + 5\psi).$$

2.2.2. Управление объектом с несколькими входами

На некоторые объекты подача внешних воздействий возможна в нескольких различных точках. Такие объекты называются многомерными или объектами с несколькими входами.

Будем предполагать, что этот объект полностью управляем, а все составляющие его вектора состояния доступны прямому измерению, т.е. $C=I$. Задача по-прежнему состоит в нахождении такой $m \otimes n$ матрицы P , при которой замкнутая система получает наперед заданное расположение корней характеристического уравнения. Из (2.7) следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\det(sI - A + BP) = 0. \quad (2.13)$$

Сведем задачу к ранее рассмотренной задаче синтеза регулятора для одномерного объекта. Положим, что $P=qp$, где q -матрица-столбец размера $m \otimes 1$, а p -матрица-строка размера $1 \otimes n$. Тогда из (2.13) получим

$$\begin{aligned} \det(sI - A + Bqp) &= 0, \quad \text{или} \\ \det(sI - A + bp) &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $b=Bq$ -матрица-столбец размера $n \otimes 1$. Отсюда следует вывод:

Корни замкнутой системы, образованной многомерным объектом с матрицами A, B и многомерным регулятором с матрицей P , совпадают с корнями замкнутой системы, которая образуется одномерным объектом с матрицами A и $b=Bq$ и одномерным регулятором с матрицей p , причем $P=qp$.

Синтез многомерного регулятора может быть выполнен по следующей методике:

1. Выбираем $m \otimes 1$ матрицу q . Этот выбор в общем случае произволен.

2. Способом, изложенным выше, находим $1 \otimes n$ -матрицу p одномерного регулятора для одномерного объекта (A, Bq) .

3. Матрицу P многомерного регулятора для многомерного объекта (A, B) получаем как $P=qp$.

Доказано, что матрица P многомерного регулятора зависит только от отношений элементов q_1 матрицы-столбца q , абсолютные значения этих элементов на матрицу P не влияют. Поэтому можно матрицу - столбец q назвать вектором относительной глубины обратных связей. При нежелательности обратной связи по какому-либо входу, что может быть вызвано трудностями реализации, достаточно соответствующий элемент матрицы q положить равным нулю.

Изложенный метод синтеза справедлив, если ранг матрицы P равен единице. Возможны методы, свободные от этого ограничения.

Пример.

Задан полностью управляемый объект:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть, например,

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } W(s)q &= (sI - A)^{-1}Bq = \\ &= \frac{1}{s(s+5)} \begin{pmatrix} (q_1 + 4q_2)s + 10q_2 \\ (2q_1 + 3q_2)s - 5q_2 \end{pmatrix} = \frac{g(s)}{F(s)}. \end{aligned}$$

Выберем характеристический полином замкнутой системы в виде

$$H(s) = (s + a)(s + b).$$

Учитывая выражение (2.10), можно записать

$$\begin{aligned} p_1[(q_1 + 4q_2)s + 10q_2] + p_2[(2q_1 + 3q_2)s - 5q_2] &= \\ = (s + a)(s + b) - s(s + 5). \end{aligned}$$

Пусть требуется поместить корни замкнутой системы в точки $s_1 = -a$ и $s_2 = -b$, где $a \neq 0$. Определяя при этих значениях из полученных уравнений элементы p_1 и p_2 , получим следующую матрицу двумерного регулятора:

$$P = qp = \begin{pmatrix} a & -a \\ 5q_2 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица P существует лишь при $q_2 \neq 0$. В этом и заключается ограничение на выбор элементов матрицы q в рассматриваемом примере.

2.3. Управление корнями при неполной информации о векторе состояния

В большинстве случаев вектор состояния объекта трудно или вовсе невозможно измерить полностью. Обычно доступны прямому измерению лишь некоторые переменные состояния, которые и образуют вектор выходного сигнала Y , размерность r которого меньше, чем размерность вектора состояния X .

По результатам наблюдения сигнала Y часто удается восстановить весь вектор состояния и использовать его при синтезе регулятора так, как было показано выше. Однако для упрощения аппаратуры целесообразно желаемое качество управления обеспечивать созданием обратных связей лишь по некоторым из переменных состояния.

Свободное движение замкнутой системы определяется в основном небольшим числом полюсов, которые принято называть доминирующими. Доказано, что используя r обратных связей из общего числа n теоретически возможных, можно поместить в желаемое положение r полюсов замкнутой системы. Поэтому к синтезу специального наблюдающего устройства, восстанавливающего все n параметров состояния из r измеренных, следует переходить, только если возможности улучшения системы по неполному вектору состояния исчерпаны.

2.3.1. Объекты с одним входом

Пусть имеется полностью управляемый и наблюдаемый объект с одним входом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= AX + bu, \\ Y &= CX. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Здесь C - матрица размера $r \times n$, причем $r < n$.

Матричная передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{F(s)} M(s). \quad (2.16)$$

В этом выражении $F(s) = \det(sI - A) = s^n + d_n s^{n-1} + \dots + d_1$, а

$M(s)$ - присоединенная матрица, умноженная на матрицы C и b . Если учесть, что присоединенная матрица содержит члены с оператором s в степени до $(n-1)$ включительно, то в результате получим

$$M(s) = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12}s + \dots + m_{1n}s^{n-1} \\ \vdots \\ m_{r1} + m_{r2}s + \dots + m_{rn}s^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Уравнение регулятора примем в виде $u = v - kY$, где v — командный сигнал, k — матрица-строка размера $1 \otimes r$. Получим характеристический полином замкнутой системы. Учитывая уравнение регулятора, получим

$$\dot{X} = AX + b(v - ky) = AX - bkCX + bv.$$

$$X(s) = (sI - A + bkC)^{-1}bV.$$

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = (sI - A + bkC)^{-1}b.$$

$$H(s) = \det(sI - A + bkC)^{-1} = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1.$$

Согласно предыдущему (см. выражение 2.10)

$$kM(s) = H(s) - F(s) \text{ или}$$

$$\sum_{i=1}^r k_i M_i(s) = H(s) - F(s). \quad (2.17)$$

Подставив в это выражение $H(s)$, $F(s)$, $M_i(s)$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой частях полученного уравнения, можно записать

$$M^T k^T = a - d. \quad (2.18)$$

Здесь M — матрица размера $r \otimes n$, элементами которой служат коэффициенты полиномов $M_i(s)$.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{1n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ m_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{rn} \end{pmatrix};$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (2.18) соответствует системе из n уравнений с r неизвестными k_1, k_2, \dots, k_r . Эта система имеет решение лишь в случае совместности уравнений, т.е. когда решение подсистемы из r уравнений удовлетворяет оставшимся $n - r$ уравнениям.

Рассмотрим ранее выведенную передаточную функцию (2.8). Пусть входящая в эту функцию матрица-столбец $g(s)$ имеет вид

$$g(s) = \begin{pmatrix} l_{11} + l_{12}s + \dots + l_{1n}s^{n-1} \\ \vdots \\ l_{m1} + l_{m2}s + \dots + l_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.4) и (2.16) следует, что $M(s) = Cg(s)$. Отсюда следует, что $M = CL$, где L -неособая матрица, составленная из коэффициентов полиномов, входящих в (2.19):

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & l_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \dots & l_{mn} \end{pmatrix}.$$

Подставив $M = CL$ в уравнение (2.18), получим

$$L^T C^T k^T = a - d.$$

Умножим последнее выражение слева на $(L^T)^{-1}$:

$$E k^T = I(L^T)^{-1}(a - d). \quad (2.20)$$

Здесь обозначено: $C^T = E$, I -единичная матрица.

Выберем из матрицы E r линейно независимых строк и сформируем из них $r \otimes r$ матрицу E_B . Выбирая в матрице I соответствующие строки, получим из них $r \otimes n$ матрицу I_B . Уравнение (2.20) теперь можно разбить на два уравнения:

$$E_B k^T = I_B(L^T)^{-1}(a - d), \quad (2.21)$$

$$E_H k^T = I_H (L^T)^{-1} (a - d). \quad (2.22)$$

В этих выражениях E_H и I_H соответственно $(n-r) \otimes r$ и $(n-r) \otimes n$ матрицы, образованные из оставшихся строк матриц E и I .

Решив уравнение (2.21) относительно k^T и подставив результат в (2.22), получим следующее условие совместности уравнений (2.18):

$$\alpha a = \beta. \quad (2.23)$$

Матрица α размера $(n-r) \otimes n$ определяется выражением

$$\alpha = (I_H - E_H E_B^{-1} I_B) (L^T)^{-1} = S (L^T)^{-1}, \quad (2.24)$$

$$S = I_H - E_H E_B^{-1} I_B.$$

Матрица $\beta = \alpha d$ представляет собой $(n-r)$ -вектор. Матрица S зависит только от C , а матрица L — только от A и b . Для объекта с одним входом $r=1$ и матрица C_B представляет собой ненулевой элемент матрицы C . Уравнение (2.23) накладывает $n-r$ ограничений на коэффициенты a_1, \dots, a_n характеристического полинома замкнутой системы, выполнение которых обеспечивает существование регулятора с матрицей k . Так как матрица α неособая, эти ограничения сводятся к $n-r$ независимым линейным алгебраическим уравнениям относительно a_i . Если ограничения на вектор a выполняются, то система уравнений (2.18) совместна и матрица k может быть найдена из уравнения (2.21):

$$k^T = R (L^T)^{-1} (a - d), \quad (2.25)$$

$$\text{где } R = E_B^{-1} I_B = (C_B^T)^{-1} I_B. \quad (2.26)$$

Рассмотрим частный случай, когда матрица выхода C состоит из некоторых строк единичной матрицы размера $n \otimes n$ и составляющими выходного вектора Y являются некоторые переменные состояния объекта. В этом случае матрица α в (2.23) значительно упрощается. Действительно, матрица $E_B = C_B^T$ формируется из строк матрицы C^T , один из элементов которых равен единице, а все остальные элементы строки матрицы C^T состоят из нулей, так что $E_H = C_H^T = 0$. Учитывая это, из (2.24) получим

$$\alpha = I_H (L^T)^{-1}. \quad (2.27)$$

Матрица-строка k , характеризующая регулятор, определяется соотношением

$$k^T = (E_B)^T I_B (L^T)^{-1} (a - d). \quad (2.28)$$

При упорядоченном следовании строк, когда матрица E_B становится единичной матрицей, получим, что

$$k^T = I_B(L^T)^{-1}(a - d). \quad (2.29)$$

Кроме условий совместности (2.23), другие ограничения на коэффициенты a_i характеристического полинома $H(s)$ замкнутой системы обуславливаются тем, что при синтезе некоторым его корням придаются наперед выбранные значения. Пусть характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$H(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1. \quad (2.30)$$

Если желателен какой-либо простой корень λ , то на основании выражения (2.30) можно записать

$$(1 \ \lambda \ \lambda^2 \ \dots \ \lambda^{n-1}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\lambda^n. \quad (2.31)$$

Линейное относительно a_i уравнение (2.31) представляет из себя одно из рассматриваемых ограничений на характеристический полином замкнутой системы. Если корень комплексно-сопряженный, то условие (2.31) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & r \cos \varphi & r^2 \cos 2\varphi & \dots & r^{n-1} \cos (n-1)\varphi \\ 0 & r \sin \varphi & r^2 \sin 2\varphi & \dots & r^{n-1} \sin (n-1)\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -r^n \cos n\varphi \\ -r^n \sin n\varphi \end{bmatrix}.$$

$$\lambda = \rho \pm j\omega; \quad r = \sqrt{\rho^2 + \omega^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\rho}.$$

Если для замкнутой системы желателен m -кратный корень, то ограничения на коэффициенты характеристического полинома можно получить, если подставить этот корень в полином $H(s)$ и его первые $m-1$ производные по s и приравнять полученные выражения нулю.

Показано, что помещение p корней замкнутой системы в предписанные положения ($p < n$) дает p линейных ограничений на коэффициенты a_i . Эти ограничения можно выразить уравнением

$$\Theta a = \omega. \quad (2.32)$$

Здесь Θ — постоянная $p \otimes n$ матрица, образованная из первых сомножителей уравнения вида (2.31), Ω — постоянная матрица-столбец, образованная из правых частей этих уравнений.

Задача придания нескольким корням замкнутой системы заранее выбранных значений сводится к нахождению вектора $\vec{a} = \vec{a}_0$, удовлетворяющего как условию совместности (2.23), так и условию помещения корней в заданные положения (2.32). Оба эти условия можно объединить в одно уравнение

$$\Phi a = \gamma, \quad (2.33)$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}$; $\gamma = \begin{pmatrix} \beta \\ \omega \end{pmatrix}$. Матрица Φ имеет размер

$(n - r + p) \otimes n$, а γ -матрица-столбец размера $(n - r + p) \otimes 1$.

Точное решение уравнения (2.33) возможно только для квадратной матрицы Φ , т.е. если $p=r$. При этом условии

$$a_0 = \Phi^{-1} \gamma. \quad (2.34)$$

В соответствии с (2.21), получим

$$k^T = (C_B^T)^{-1} I_B (L^T)^{-1} (\Phi^{-1} \gamma - d). \quad (2.35)$$

Правая часть последнего выражения зависит от известных параметров объекта и выбранных значений для p корней замкнутой системы.

Пример.

Применяя неполную обратную связь по состоянию, необходимо два корня объекта 3-го порядка, описываемого уравнением

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} u, \quad (2.36)$$

поместить в положение $-1 \pm j$.

Так как перемещению подлежат два корня, то в цепи обратной связи необходимо передавать два входных сигнала. Пусть этими сигналами будут x_1 и x_2 . Тогда

$$Y = CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Для МПФ объекта можно записать

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}b = \frac{1}{F(s)}g(s) =$$

$$= \frac{1}{s^3 + 10s^2 + s + 10} \begin{pmatrix} 10 \\ 10s \\ 10s^2 + 10 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу L из коэффициентов $g(s)$ и вектор d из коэффициентов $F(s)$.

$$L = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$(L^T)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица C состоит из строк единичной матрицы, то матрица α определяется формулой (2.27). Транспонировав матрицу C и воспользовавшись уравнением (2.20), найдем матрицу I_H .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} k^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (L^T)^{-1} (a - d),$$

$$I_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\alpha = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение совместности имеет вид

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

После упрощений получим

$$(0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 10. \quad (2.37)$$

Следовательно, при использовании переменных x_1 и x_2 характеристический полином $H(s)$ должен подчиняться ограничению $a_3 = 10$.

Перейдем теперь к ограничениям, накладываемым на коэффициенты характеристического уравнения заданными значениями корней. Эти ограничения с учетом того, что для заданных значений корней

$$r = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4},$$

примут вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Объединяя (2.37) и (2.38), получим ограничения на коэффициенты a_i , удовлетворяющие условию (2.34):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Решение уравнения (2.39) имеет вид

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином синтезированной системы будет

$$H(s) = s^3 + 16s^2 + 18s + 10.$$

Матрица обратной связи определится из выражения

$$k^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.7 \end{pmatrix}.$$

2.3.2. Объекты с несколькими входами

Основной недостаток обратной связи по неполному вектору состояния - невозможность обеспечить желаемое расположение всех корней и необходимость оценки значений и влияния неуправляемых корней. Этот недостаток может быть устранен или переходом к обратной связи по полному вектору состояния, или использованием нескольких входов объекта.

Предположим, что объект n -го порядка имеет m входов и, что из n переменных состояния можно подавать в цепи обратной связи r переменных. Задача заключается в синтезе многомерного регулятора, обеспечивающего заданное расположение всех корней замкнутой системы.

Эту задачу можно решить сведением многомерной системы (A, B, C) к эквивалентной одномерной системе (A, Bq, C) -см. (2.13) и (2.14)-и использованием свободы выбора элементов вектора q . Элементы этого вектора выбирают так, чтобы уравнение совместности (2.18) удовлетворялось при $a = a_{жс}$, где элементами матрицы $a_{жс}$ служат коэффициенты желаемого характеристического полинома замкнутой системы.

В эквивалентной одномерной системе матрица g , а следовательно и матрица L , являются функциями m -вектора q , так что уравнение совместности для этой системы принимает вид

$$\alpha(q)a = \beta(q). \quad (2.40)$$

Этому матричному уравнению соответствует система из $n-r$ скалярных уравнений, содержащая в качестве переменных соотношения q_i q_m , где q_m , например, последний элемент матрицы-столбца q , выбираемый произвольно. Чтобы система была разрешима, общее число переменных $m-1$ должно подчиняться условию

$$m - 1 \geq n - r.$$

Отсюда следует, что для обеспечения желаемого расположения всех корней замкнутой системы число m входных и число r выходных сигналов, привлекаемых для формирования обратных связей, должны подчиняться условию $m + r - 1 \geq n$.

Пример.

Задан объект

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу обратной связи k по выходному вектору Y , которая обеспечивает замкнутой системе трехкратный корень, равный -3 . Решение этой задачи возможно, так как условие $m+r-1 \geq n$ выполняется ($2+2-1=3$).

Примем, что $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, и получим для эквивалентной одномерной

системы передаточную функцию по вектору состояния

$$\begin{aligned} W(s)q &= (sI - A)^{-1} Bq = \frac{1}{F(s)} g(s) = \\ &= \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 29s + 33} \begin{pmatrix} (q_1 - 2q_2)s + (3q_1 - 8q_2) \\ q_1 s^2 + (6q_1 - 2q_2)s + (9q_1 - 2q_2) \\ q_2 s^2 + (2q_1 + 2q_2)s + (6q_1 - 5q_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы, необходимые для составления уравнения совместности, имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 3q_1 - 8q_2 & q_1 - 2q_2 & 0 \\ 9q_1 - 2q_2 & 6q_1 - 2q_2 & q_1 \\ 6q_1 - 5q_2 & 2q_1 + 2q_2 & q_2 \end{pmatrix};$$

$$E = C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad E_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad I_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E_H = (0 \ 0); \quad I_H = (1 \ 0 \ 0).$$

Используя эти матрицы, в соответствии с (2.24) получим

$$\begin{aligned} \alpha &= (I_H - E_H E_B^{-1} I_B) (L^T)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\begin{pmatrix} -2q_1^2 + 4q_1 q_2 - 2q_2^2 & 6q_1^2 - 14q_1 q_2 + 2q_2^2 \\ -18q_1^2 + 56q_1 q_2 - 14q_2^2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\text{где } \Delta = 2q_2^3 \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} - \frac{4q_1}{q_2} + 6 \right).$$

Отсюда следует, что корни эквивалентной системы доступны управлению только при соблюдении условий

$$q_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{q_1^2}{q_2^2} - \frac{4q_1}{q_2} + 6 \neq 0.$$

Квадратичный полином в данном случае не имеет вещественных корней. Следовательно, ограничения сводятся к требованию отличия от нуля элемента q_2 . Желаемый характеристический полином имеет вид

$$H(s) = s^3 + 9s^2 + 27s + 27.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a}_{\text{ж}} = \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Подставив выражения для α, Δ и $\mathbf{a}_{\text{ж}}$ в уравнение совместности, получим

$$\begin{pmatrix} \left(-2 \frac{q_1^2}{q_2^2} + 4 \frac{q_1}{q_2} - 2\right) & \left(6 \frac{q_1^2}{q_2^2} - 14 \frac{q_1}{q_2} + 2\right) & \left(-18 \frac{q_1^2}{q_2^2} + 56 \frac{q_1}{q_2} - 14\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} = -54 \frac{q_1^2}{q_2^2} + 230 \frac{q_1}{q_2} - 134.$$

После упрощений получим, что $\frac{q_1}{q_2} + 2 = 0$. Отсюда $\frac{q_1}{q_2} = -2$.

Примем, что $q_2 = 1$, и тогда для вектора \mathbf{q} можно записать

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу $\mathbf{K} = \mathbf{q}\mathbf{k}$ многомерного регулятора. Сначала определим матрицу \mathbf{k} одномерного регулятора в соответствии с выражениями (2.25) и (2.26), в которых матрица $(L^T)^{-1}$ вычисляется при полученных значениях q_1 и q_2 , а в качестве вектора \mathbf{a} берется $\mathbf{a}_{\text{ж}}$. Получим

$$k^T = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 27 & -99 \\ 2 & -7 & 20 \\ 4 & -14 & 58 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 33 \\ 29 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Многомерный регулятор характеризуется матрицей

$$K = qk = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \quad -1) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверкой можно показать, что характеристический полином полученной многомерной системы совпадает с принятым при синтезе

$$H(s) = \det(sI - A + BKC) = (s + 3)^3.$$

3. Наблюдение детерминированных объектов

В предыдущем разделе было показано, что если все переменные состояния объекта представляют собой измеримые физические величины, то синтез замкнутой системы с заданным распределением полюсов не представляет какой-либо трудности. Однако в большинстве случаев доступны приборному измерению лишь некоторые переменные состояния. Кроме того, использование измерительных приборов не всегда желательно. Некоторые измерительные устройства описываются сложными уравнениями, существенно изменяющими структуру объекта управления. Решение задачи управления по неполной обратной связи может не дать требуемого качества. Эти обстоятельства указывают на необходимость способов, которые косвенно позволили бы оценить переменные состояния, мало доступные или вовсе недоступные прямому измерению. Такие способы основаны на использовании уравнений движения объекта. Эти уравнения предполагаются известными. Устройства для определения координат состояния объекта, в основу которых положены уравнения его движения называются наблюдающими устройствами.

3.1. Наблюдающее устройство как замкнутая система

Предположим, что уравнения объекта имеют вид

$$\dot{X} = AX + BU. \quad (3.1)$$

Доступный измерению скалярный выходной сигнал

$$y(t) = CX(t), \quad (3.2)$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Доступный измерению матричный входной сигнал обозначим как $u(t)$. Размеры матриц соответственно равны:

$$A - n \otimes n, \quad B - n \otimes m, \quad C - 1 \otimes n, \\ X - n \otimes 1, \quad u - m \otimes 1.$$

Опираясь на знание сигналов $y(t)$, $u(t)$ и матриц A и B необходимо оценить вектор состояния объекта $X(t)$.

Обозначим оценочное значение вектора состояния как \hat{X} . Тогда оценочное значение выходного сигнала будет $C\hat{X}$. Оценка содержит ошибку, если $C\hat{X}$ отличается от результата, полученного реальным измерением сигнала y .

Задача состоит в том, чтобы ошибку $y - C\hat{X}$ свести к нулю.

Зная $A, B, U(t)$ и начальное значение вектора состояния, можно оценить координаты состояния, если подвести сигнал $U(t)$ к электронной модели объекта

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU. \quad (3.3)$$

Схема модели может быть изображена следующим образом (рис.3.1).

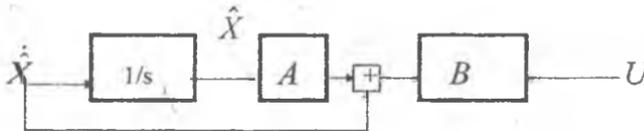


Рис.3.1. Схема электронной модели системы

Недостаток оценивающего устройства (3.3) состоит в том, что оно работает по разомкнутому циклу и, поскольку данные об A, B и $U(t)$ неточны, после некоторого времени работы это устройство будет давать слишком неточную оценку вектора состояния. Чтобы при сохранении линейности данного устройства устранить отмеченный недостаток, введем ошибку $y - C\hat{X}$ в каждое из уравнений системы (3.3):

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + K(y - C\hat{X}), \quad (3.4)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Схема наблюдающего устройства примет вид (рис.3.2).

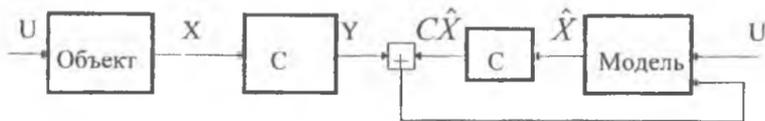


Рис. 3.2. Схема наблюдающего устройства

Устройство, описываемое уравнением (3.4), оценивает вектор состояния по замкнутому циклу и, в дальнейшем, называется наблюдающим. Определим ошибку, оценивания как

$$\Delta X = \hat{X} - X, \quad (3.5)$$

и вычтем уравнение (3.1) из уравнения (3.4):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X} &= A\hat{X} + Bu + K(CX - C\hat{X}) - AX - Bu = \\ &= A(\hat{X} - X) - KC(\hat{X} - X) = (A - KC)\Delta X. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выбрав коэффициенты k_1, k_2, \dots, k_n так, чтобы система (3.6) была устойчивой, получим, что $\Delta X(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Другими словами, с ростом времени t оценка $\hat{X}(t)$ стремится к оцениваемому вектору $X(t)$.

3.2. Общая теория наблюдающих устройств

Рассмотрим вначале задачу наблюдения свободного объекта S_1 , т.е. объекта, входной сигнал которого равен нулю. Если имеющиеся в распоряжении выходы этого объекта используются в качестве входов линейной системы S_2 , то последняя почти всегда может служить в качестве наблюдающего устройства объекта S_1 в том смысле, что ее состояние отслеживает линейное преобразование вектора состояния объекта (рис.3.3).

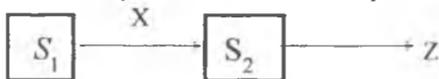


Рис. 3.3. Объект и наблюдающее устройство

Пусть S_1 свободный объект с уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad (3.7)$$

воздействует на систему S_2 , которая описывается уравнением

$$\dot{Z}(t) = FZ(t) + HX(t). \quad (3.8)$$

Предположим, что существует матрица преобразования T , удовлетворяющая уравнению

$$TA - FT = H. \quad (3.9)$$

Умножим слева уравнение (3.7) на T и вычтем его из уравнения (3.8):

$$\dot{Z}(t) - TX(t) = FZ(t) + HX(t) - TAX(t).$$

Подставив вместо H выражение (3.9), приходим к уравнению

$$\dot{Z}(t) - TX(t) = F(Z(t) - TX(t)). \quad (3.10)$$

Обозначим: $Z(t) - TX(t) = \gamma(t)$. Тогда из (3.10) следует, что

$$\dot{\gamma}(t) = e^{Ft}\gamma(0).$$

Если $Z(0) = TX(0)$, то $\gamma(0) = 0$ и условие $Z(t) = TX(t)$ выполняется для всех $t \geq 0$. В более общем случае, когда $Z(0) \neq TX(0)$, получим

$$Z(t) = TX(t) + e^{Ft}(Z(0) - TX(0)). \quad (3.11)$$

При отрицательных собственных числах матрицы F $Z(t) \rightarrow TX(t)$.

Можно доказать, что уравнение (3.9) имеет единственное решение T , если у матриц A и F нет общих собственных значений. Таким образом, некоторая система S_2 , корни которой отличны от корней объекта S_1 , может служить для этого объекта наблюдающим устройством в том смысле, что ее вектор состояния $Z(t)$ связан с вектором состояния объекта соотношением $Z=TX$, где матрица T , определяемая из уравнения (3.9), зависит от параметров систем S_1 и S_2 .

Аналогично можно получить наблюдающее устройство и для случая возмущенного объекта, когда $U(t) \neq 0$. Для этого нужно, чтобы сигнал $U(t)$, подведенный к наблюдающему устройству, поддавался измерению. В этом случае объект S_1 описывается уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t),$$

а наблюдающее устройство-

$$\dot{Z}(t) = FZ(t) + HX(t) + TBU(t). \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) будет по-прежнему иметь решением выражение (3.11). Отсюда следует, что наблюдающее устройство для возмущенного объекта можно синтезировать, полагая вначале объект свободным, а затем добавляя входной сигнал, как это показано в (3.12).

3.3. Наблюдающее устройство идентификации

Это наблюдающее устройство характеризуется тем, что матрица преобразования T , связывающая вектор состояния наблюдающего устройства с вектором состояния наблюдаемого объекта, единичная. Тогда

$Z(t)=TX(t)=IX(t)=X(t)$, т.е. наблюдающее устройство идентифицирует вектор состояния объекта. Требование $T=I$ может быть выполнено выбором матриц F и H .

Подставив $T=I$ в (3.9), получим $F=A-H$. Отсюда следует, что наблюдающее устройство и объект имеют один и тот же порядок. Матрица H определяется не только порядком измеряемого вектора выходных сигналов объекта, но и структурой входа наблюдающего устройства.

Если объект с r -мерным выходом $Y(t)$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t), \\ Y(t) &= CX(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

а наблюдающее устройство- уравнением

$$\dot{Z}(t) = FZ(t) + KY(t),$$

то $H=KC$. При синтезе наблюдающего устройства $r \otimes n$ матрица C фиксирована, а $n \otimes r$ матрица K произвольна. Следовательно, наблюдающее устройство идентификации S_2 однозначно определяется выбором матрицы K и в случае возмущенного объекта описывается уравнением

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - KC)\hat{X}(t) + KY(t) + BU(t).$$

Структурная схема этого наблюдающего устройства показана на рис 3.4.

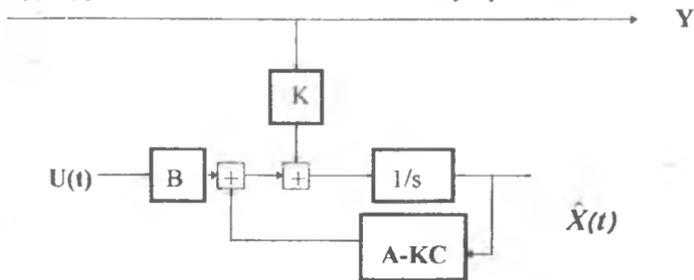


Рис. 3.4. Наблюдающее устройство идентификации

Собственные колебания наблюдающего устройства определяются собственными значениями матрицы $(A-KC)$. Следовательно, матрицу K нужно выбирать так, чтобы обеспечить устойчивость наблюдающего устройства, в частном случае задать его корням требуемые значения. Последнее возможно, если система (3.13) полностью наблюдаема.

3.4.Разделение собственных значений

Докажем теперь, что корни замкнутой системы, образованной объектом, наблюдающим устройством идентификации, которое используется в качестве измерительного устройства переменных состояния, и регулятором, разбиваются

на две независимые группы. Одна группа- это корни замкнутой системы "объект-регулятор", синтезированной в предположении непосредственного измерения всех переменных состояния объекта; другая группа- корни наблюдающего устройства, представляющего независимую динамическую систему. В данном случае уравнения всей системы будут

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= AX + bu, \\ Y &= CX, \\ \dot{\hat{X}} &= (A - KC)\hat{X} + KY + bu, \\ u &= -P\hat{X}, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где первое и второе уравнения описывают объект с одним входом и одним выходом, а третье и четвертое уравнения- наблюдающее устройство идентификации и регулятор. Вводя вместо переменных X, \hat{X} переменные X, \tilde{X} , где $\tilde{X} = \hat{X} - X$, уравнения (3.14) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= (A - bP)X - bP\tilde{X}, \\ \dot{\tilde{X}} &= (A - KC)\tilde{X}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Второе уравнение системы (3.15) получается вычитанием первого уравнения системы (3.14) из третьего и заменой Y на CX . Первое уравнение системы (3.15) образуется подстановкой $u = -PX$ в первое уравнение системы (3.14) и последующей заменой $\hat{X} = X + \tilde{X}$.

Система уравнений (3.15) имеет треугольную матрицу

$$\begin{bmatrix} A - bP & -bP \\ 0 & A - KC \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что характеристический полином этой системы

$$\det(sI - A + bP)\det(sI - A + KC)$$

представляет собой произведение характеристического полинома замкнутой системы "объект-регулятор" и характеристического полинома наблюдающего устройства.

Таким образом, регулятор P можно синтезировать, предполагая идеальное точное непосредственное измерение переменных состояния объекта, а параметры наблюдающего устройства выбирать, руководствуясь только желаемыми динамическими свойствами этого устройства. Обычно матрица K выбирается такой, чтобы корни наблюдающего устройства были несколько более отрицательными, чем корни замкнутой системы, состоящей из объекта S_1 и регулятора, формирующего по выходному сигналу наблюдающего устройства закон регулирования.

Пример. Рассмотрим объект, структурная схема которого показана на рис.3.5. Записывая согласно схеме дифференциальные уравнения отдельных звеньев, получим следующие уравнения объекта в переменных состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3.16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

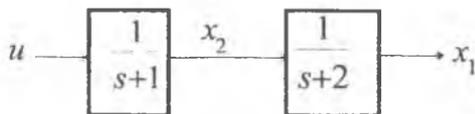


Рис. 3.5. Объект второго порядка

Поскольку выход объекта $y = x_1$ — скалярная величина, матрица K , характеризующая вход наблюдающего устройства идентификации, должна быть типа $(2 \otimes 1)$, т.е.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица этого наблюдающего устройства будет

$$A - KC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & 1 \\ -k_2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином наблюдающего устройства

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + (3 + k_1)s + 2 + k_1 + k_2. \quad (3.18)$$

Предположим, что для наблюдающего устройства желателен двукратный корень -3 . В этом случае желаемым характеристическим полиномом этого устройства будет

$$(s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9. \quad (3.19)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в уравнениях (3.18) и (3.19), получим: $k_1 = 3$, $k_2 = 4$. Следовательно, наблюдающее устройство идентификации описывается уравнением

$$\begin{bmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

3.5. Редуцированное наблюдающее устройство

Наблюдающее устройство идентификации обладает некоторой степенью избыточности. Эта избыточность выражается в том, что данное устройство оценивает весь вектор состояния объекта $X(t)$, хотя часть этого вектора можно определить и по результатам непосредственного измерения выходного сигнала y . Избыточность можно устранить, синтезируя редуцированное наблюдающее устройство, т.е. устройство, порядок которого более низок, чем порядок наблюдаемого объекта.

Если вектор $y(t)$ выходных сигналов объекта, поддающихся измерению, имеет размерность r , то для оценки всего n -мерного вектора состояния объекта $X(t)$ достаточно синтезировать наблюдающее устройство порядка $n-r$, характеризуемое вектором состояния $Z(t)$ размерности $n-r$.

Пусть T -матрица типа $(n-r) \otimes n$, преобразующая вектор X в вектор Z . Тогда оценку всего вектора состояния можно получить из уравнения

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \hat{x}(t).$$

Решая это уравнение относительно оценки вектора состояния, получим

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix},$$

где в правой части находится измеряемый вектор $[z | y]^T$.

Редуцированное наблюдающее устройство можно синтезировать следующим образом. Пусть объект описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t), \\ Y(t) &= CX(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Без потери общности можно считать, что r выходов объекта линейно независимы. Это эквивалентно тому, что матрица C имеет ранг r . Имеется возможность такой замены переменных, при которой матрицу C можно преобразовать к виду $C = [I \mid 0]$, где I - единичная матрица типа $r \otimes r$, а O - матрица типа $r \otimes (n-r)$, все элементы которой равны нулю. Замену переменных можно осуществить следующим образом.

1. Выберем такую матрицу D типа $(n-r) \otimes n$, что матрица

$$M = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \text{ получается неособой.}$$

2. Матрицу M используем для следующего преобразования вектора состояния X в новый вектор \bar{X} согласно формуле $\bar{X} = MX$.

3. Подставим в формулу (3.20) выражение $X = M^{-1}\bar{X}$ и получим новые матрицы A и C , причем подбором элементов матрицы M матрицу приведем к требуемой форме.

Теперь вектор состояния объекта можно представить в виде

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ W \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

где Y, W - векторы с размерностями r и $n-r$. Действительно, уравнение

$Y=CX$, переписываемое в этом случае как $Y = [I \mid O] \begin{bmatrix} Y \\ W \end{bmatrix}$, не лишено

смысла и просто означает, что $Y=Y$. Представляя матрицу A в блочной форме

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где матрица A_{11} имеет размер $r \otimes r$, и учитывая (3.21), уравнения (3.20)

можно записать в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= A_{11}Y(t) + A_{12}W(t) + B_1U(t), \\ \dot{W}(t) &= A_{21}Y(t) + A_{22}W(t) + B_2U(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Идея синтеза редуцированного наблюдающего устройства заключается в следующем. Выходной вектор объекта $Y(t)$ доступен измерению, так что дифференцированием можно получить его производную, являющуюся правой частью первого уравнения системы (3.23). Так как вектор входных воздействий $U(t)$ тоже измеряемый, из указанного уравнения найдем вектор $A_{12}W$, все составляющие которого измеряемы. Отведем этому вектору такую же роль, какую выполняет вектор $CX(t)$ в правой части второго уравнения системы (3.20), а второе уравнение системы (3.23) будем рассматривать как уравнение наблюдаемого объекта.

Это матричное уравнение характеризуется вектором состояния $W(t)$, представляющим не поддающуюся непосредственному измерению часть вектора состояния исходного объекта, и имеет в качестве измеримого внешнего воздействия $A_{21}Y(t) + B_2U(t)$. Синтезируя наблюдающее устройство идентификации для объекта, описываемого вторым уравнением системы (3.23), можно оценить вектор $W(t)$ и тем самым решить задачу оценки недостающих составляющих вектора состояния $X(t)$ исходного объекта. Если система (C, A)

полностью наблюдаема, то полностью наблюдаема и подсистема (A_{12}, A_{22}) . Отсюда вытекает возможность синтеза для объекта, характеризующегося вторым уравнением системы (3.23), наблюдающего устройства идентификации порядка $n-r$ с любыми желаемыми значениями корней.

Выше уже говорилось, что за выходной сигнал преобразованного объекта принимаем сигнал $A_{12}W(t)$. Этот сигнал аналогичен сигналу

$Y = CX$, причем матрица A_{12} выполняет ту же роль, что и матрица C .

Подставляя в общее уравнение наблюдающего устройства идентификации вместо A, C, K соответственно A_{22}, A_{12} и L и учитывая, что в наблюдаемом преобразованном объекте роль выходного сигнала Y выполняет сигнал

$A_{12}W = Y(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t)$, получим следующее уравнение наблюдающего устройства $(n-r)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & (A_{22} - LA_{12})\dot{W}(t) + L(Y'(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t)) + \\ & + A_{21}Y(t) + B_2U(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выбором матрицы L корням наблюдающего устройства (3.24) можно придать любые желаемые значения. Когда входной сигнал $U(t)$ не доступен измерению, матрицу L целесообразно выбирать из других соображений. Ее нужно брать такой, чтобы передаточная функция $B_2 - LB_1$ обратилась в ноль. В этом случае редуцированное наблюдающее устройство будет инвариантным в отношении приложенных к объекту внешних воздействий.

Структурная схема наблюдающего устройства, соответствующая уравнению (3.24), показана на рис.3.6.

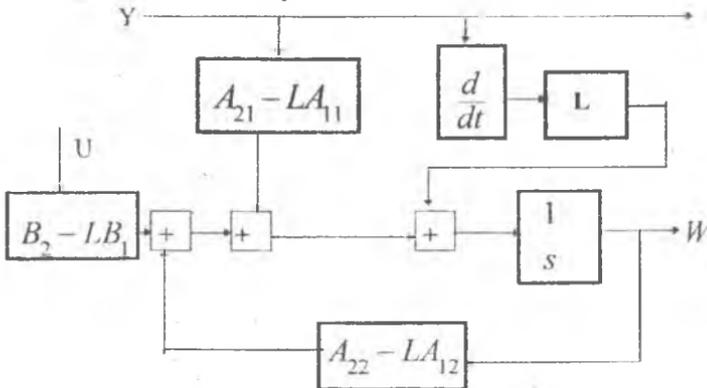


Рис.3.6.Редуцированное наблюдающее устройство, использующее производные

Дифференцирования вектора Y можно избежать, если точку суммирования перенести со входа интегратора на его выход. В результате получим окончательную структурную схему редуцированного наблюдающего устройства, приведенную на рис.3.7. Этой схеме соответствует уравнение

$$\dot{Z}(t) = (A_{22} - LA_{12})Z(t) + (A_{22} - LA_{12})LY(t) + (A_{21} - LA_{11})Y(t) + (B_2 - LB_1)U(t), \quad (3.25)$$

где $Z(t) = \hat{W}(t) - LY(t)$ есть $n-r$ вектор состояния наблюдающего устройства, а $\hat{W}(t)$ - его выходной вектор.

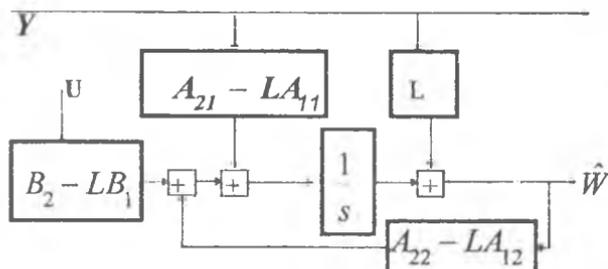


Рис.3.7. Редуцированное наблюдающее устройство без дифференцирования

Пример. Продолжим рассмотрение объекта, показанного на рис.5. Этот объект представляет собой систему второго порядка с одним выходным сигналом $y = x_1$, поддающимся непосредственному измерению. Для получения такой же оценки второй переменной состояния синтезируем редуцированное наблюдающее устройство первого порядка. Матрица C уже имеет требуемую форму $C = [I \mid O]$. Учитывая (3.22), на основании (3.16,3.17) можно прийти к выводу, что входящие в систему (3.23) матрицы в данном случае обращаются в скаляры:

$$A_{11} = -2, A_{12} = 1, A_{21} = 0, A_{22} = -1, B_1 = 0, B_2 = 1. \quad (3.26)$$

Придадим наблюдающему устройству собственное значение -3, для чего, как это видно из (3.25) и(3.26), необходимо положить $L=2$. Приняв схему наблюдающего устройства, показанную на рис.3.7, определим для звеньев этой схемы следующие передаточные функции:

$$B_2 - LB_1 = 1, A_{21} - LA_{11} = 4, A_{22} - LA_{12} = -3.$$

Учитывая, что в принятой схеме наблюдающего устройства роль сигнала y выполняет измеряемый выходной сигнал объекта x_1 , приходим к схеме, приведенной на рис. 3.8.

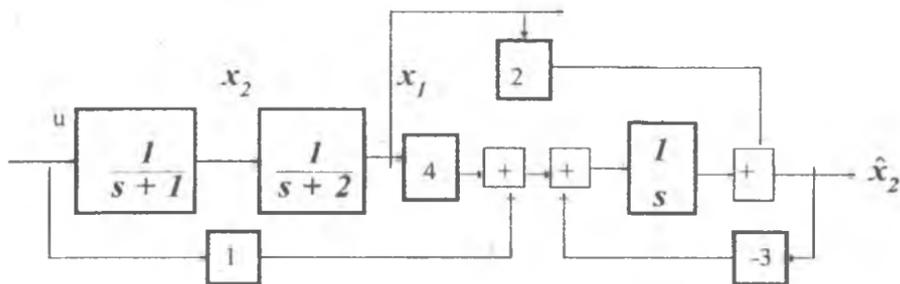


Рис.3.8. Редуцированное наблюдающее устройство с объектом

4. Наблюдение объектов при случайных помехах

Требуемым выходным сигналом $W(t)$ проектируемой системы является результат выполнения некоторой операции L над полезным сигналом $S(t)$.

$$W(t) = LS(t). \quad (4.1)$$

Действительным выходным сигналом системы является некоторая случайная функция $W^*(t)$, которая представляет собой результат преобразования данной системой входной функции $Z(t) = S(t) + N(t)$, где $N(t)$ - случайная помеха.

$$W^*(t) = AZ(t). \quad (4.2)$$

Здесь A - оператор системы. Ошибка системы определится выражением

$$E(t) = W^*(t) - W(t). \quad (4.3)$$

Оптимальной системой, предназначенной для выполнения операции L над входным сигналом, будет такая система, ошибка которой имеет минимальное в определенном смысле значение.

Ошибка, определяемая выражением (4.3), является случайной функцией времени. Поэтому она не может непосредственно служить оценкой точности системы и естественно в качестве этой меры точности взять ее в вероятностном смысле среднее значение. Так как знак ошибки в большинстве случаев нас не интересует, то за характеристику точности принимают математическое ожидание среднего квадрата ошибки

$$m_e = M\{E^2(t)\}. \quad (4.4)$$

Положительное значение корня квадратного из этой величины называется средним квадратическим отклонением (СКО).

Критерий минимума СКО является с математической точки зрения простейшим и обычно приводит к наиболее простым методам определения оптимальных систем. Важным обстоятельством является то, что при нормальном распределении полезных сигналов и помех оптимальная линейная система, найденная по критерию минимума СКО, оказывается оптимальной и с точки зрения других критериев.

4.1. Общее условие минимума СКО

Предположим, что в некотором классе систем R требуется найти оптимальную систему, для которой СКО имеет минимально возможное значение. Обозначим через A оператор оптимальной системы в классе R , а через B -оператор любой системы в этом же классе. Сигналы систем можно записать в виде

$$W^*(t) = AZ(t), \quad (4.5)$$

$$W_1^*(t) = BZ(t). \quad (4.6)$$

Вычислим СКО произвольной системы и для краткости опустим аргумент t .

$$\begin{aligned} M\{(W_1^* - W)^2\} &= M\{(W^* - W + W_1^* - W^*)^2\} = \\ &= M\{(W^* - W)^2\} + M\{(W_1^* - W^*)^2\} + \\ &\quad + 2M\{(W^* - W)(W_1^* - W^*)\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Предположим теперь, что в классе R имеется такая система с оператором A , выходная переменная которой W^* удовлетворяет условию

$$M\{(W^* - W)(W_1^* - W^*)\} = 0. \quad (4.8)$$

Равенство (4.7) примет вид

$$M\{(W_1^* - W)^2\} = M\{(W^* - W)^2\} + M\{(W_1^* - W^*)^2\}. \quad (4.9)$$

Правая часть этого равенства представляет собой сумму двух неотрицательных слагаемых. Отбрасывая второе слагаемое, получим

$$M\{(W_1^* - W)^2\} \geq M\{(W^* - W)^2\}. \quad (4.10)$$

Следовательно, СКО системы, выходная переменная которой удовлетворяет равенству (4.8) для выходных переменных W_1^* всех систем класса R , не может быть больше СКО какой-нибудь другой системы класса R , т.е. система, удовлетворяющая равенству (4.8), всегда является оптимальной. Условие (4.8) является, таким образом, достаточным условием минимума СКО.

Рассмотрим схему, представляющую собой параллельное соединение некоторых систем B_i , принадлежащих классу R , с весовыми коэффициентами C_i (рис.4.1).

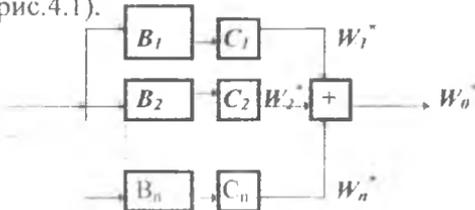


Рис.4.1. Параллельное соединение систем B_i

Для этой системы можно записать

$$W_0^* = \sum_{i=1}^n B_i C_i = \sum_{i=1}^n W_i^*. \quad (4.11)$$

Будем считать, что множество, образованное выходными сигналами всех систем класса R , приведенных на рисунке 4.1, образует линейное пространство. Это означает, что любая линейная комбинация элементов этого множества также принадлежит этому множеству и, следовательно, эта линейная комбинация является выходной величиной системы класса R . В этом случае разность $W_1^* - W^*$ также является выходной переменной произвольной системы класса R и ее можно обозначить как W_1^* . Тогда достаточное условие минимума СКО может быть записано в виде

$$M\{(W^* - W)W_1^*\} = 0. \quad (4.12)$$

Докажем теперь, что условие (4.12) является не только достаточным, но и необходимым. Для этого нужно доказать, что при невыполнении условия (4.12) величина W^* не может быть выходной переменной оптимальной системы. Предположим, что в классе R существует система с оператором B_0 , для выходной переменной которой W_0^* достаточное условие минимума СКО не выполнено (рис.4.2).

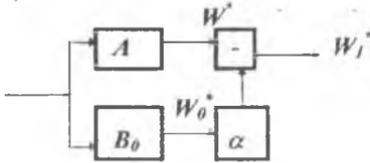


Рис.4.2. Система, в которой не выполняется условие (4.12)

Для определенности рассмотрим случай, когда

$$M\{(W^* - W)W_0^*\} > 0. \quad (4.13)$$

Покажем, что коэффициент усиления α всегда можно выбрать так, что система, показанная на рисунке 4.2, была лучше предполагаемой оптимальной в случае выполнения неравенства (4.13) или противоположного неравенства. Из рисунка следует

$$W_1^* = W^* + \alpha W_0^*;$$

$$W_1^* - W^* = \alpha W_0^*;$$

$$M\{(W_1^* - W^*)^2\} = \alpha^2 M\{W_0^*\}.$$

$$M\{(W^* - W)(W_1^* - W^*)\} = \alpha M\{(W^* - W)W_0^*\}.$$

Подставляя эти выражения в (4.7), получим

$$M\{(W_1^* - W)\} = M\{(W^* - W)^2\} + \alpha\{2M\{(W^* - W)W_0^*\} + \alpha M\{(W_0^*)^2\}\}. \quad (4.14)$$

Если взять достаточно малое по абсолютной величине отрицательное значение α , то при выполнении неравенства (4.13) выражение в квадратных скобках будет положительным и, следовательно, второе слагаемое в правой части (4.14) будет отрицательным. Отбрасывая это слагаемое, мы получим

$$M\{(W_1^* - W)^2\} < M\{(W^* - W)^2\}. \quad (4.15)$$

Это неравенство показывает, что при любом достаточно малом по абсолютной величине отрицательном значении коэффициента α система, изображенная на рис.4.2, будет лучше предполагаемой оптимальной при выполнении неравенства (4.13). Если выбрать неравенство, противоположное неравенству (4.13), то аналогичное доказательство можно провести для достаточно малого положительного числа α .

Итак, доказано, что если класс R , в котором ищется оптимальная система, является линейным пространством, то необходимым и достаточным условием оптимальности системы по критерию минимума СКО является выполнение условия (4.12).

4.2. Интегральное уравнение Винера-Хопфа

Интегральное уравнение Винера-Хопфа для многомерной нестационарной линейной динамической системы (ДС) можно представить в обобщенном виде как линейный фильтр, на вход которого поступает r -мерный вектор наблюдения $y(t)$, а на выходе линейного фильтра вырабатывается оценка $\hat{x}(t)$ n -мерного вектора состояния $x(t)$. Пусть H и H^* - соответственно операторы оптимального и неоптимального линейных фильтров; $\hat{x}(t)$ и $\hat{x}^*(t)$ - соответственно оптимальная и неоптимальная оценки вектора состояния $x(t)$.

Тогда можно записать

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= Hy(t), \\ \hat{x}^*(t) &= H^*y(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Обозначив матричные импульсные переходные характеристики оптимального и неоптимального операторов как $h(t, \tau_1)$ и $h^*(t, \lambda)$, получим

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \int_0^t h(t, \tau_1)y(\tau_1)d\tau_1, \\ \hat{x}^*(t) &= \int_0^t h^*(t, \lambda)y(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Примем в качестве критерия оптимальности фильтрации критерий минимума СКО, который может быть записан в виде

$$M\left\{\left[x(t) - \hat{x}(t)\right]\left[\hat{x}^*(t)\right]^T\right\} = 0. \quad (4.18)$$

Подставим последнее выражение в (4.17), и после преобразований получим

$$\int_0^t h^*(\tau, \lambda) \left[M\{x(\tau)y^T(\lambda)\} - \int_0^{\tau} h(\tau, \tau_1) M\{y(\tau_1)y^T(\lambda)\} d\tau_1 \right] d\lambda.$$

Для любой матричной импульсной переходной характеристики $h^*(\tau, \lambda)$ нестационарного линейного фильтра условие оптимальности (4.18) будет выполняться при равенстве нулю выражения в квадратных скобках. Введем обозначения:

$$\begin{cases} M\{x(\tau)y^T(\lambda)\} = K_{xy}(\tau, \lambda), \\ M\{y(\tau_1)y^T(\lambda)\} = K_y(\tau_1, \lambda). \end{cases} \quad (4.19)$$

В этом выражении $K_{xy}(\tau, \lambda)$ — матричная взаимная ковариационная функция нестационарных многомерных векторов $x(t)$ и $y(t)$;

$K_y(\tau_1, \lambda)$ — матричная ковариационная функция нестационарного случайного многомерного вектора $y(t)$. С учетом (4.19) из равенства нулю указанного выражения в скобках получим

$$\int_0^t h(\tau, \tau_1) K_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 = K_{xy}(\tau, \lambda). \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) является обобщенным интегральным уравнением Винера-Хопфа для нестационарного многомерного линейного физически возможного фильтра.

Решение уравнения (4.20) позволяет определить оптимальную матрицу импульсных переходных характеристик $h(\tau, \tau_1)$ нестационарного линейного фильтра. Решение интегрального уравнения Винера-Хопфа представляет собой чрезвычайно трудоемкую задачу даже с применением современных цифровых машин, что ограничивает практический синтез нестационарных фильтров. В связи с этим практическое применение теории оптимальной фильтрации Винера целесообразно в основном для одномерных случайных процессов. Практическая реализация фильтра Винера затруднена, так как до окончания решения интегрального уравнения нельзя оценить структуру фильтра. Аналитический расчет фильтров Винера для систем высокого порядка очень трудоемок, а использование ЭВМ ограничено в связи с синтезом оптимального фильтра в частотной области изменения аргумента, что наиболее существенно при решении конкретных технических задач.

4.3. Уравнения нестационарной фильтрации Калмана-Бьюси

Пусть требуется оценить вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ многомерного линейного объекта с переменными параметрами, описываемого уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Здесь $\mathbf{w}(t)$ - действующее на объект случайное возмущение типа "белый шум" с нестационарной матричной корреляционной функцией

$$\mathbf{Q}_w(t, \tau) = \mathbf{M}\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t - \tau)\} = \mathbf{Q}(t)\delta(\tau). \quad (4.22)$$

Ошибки измерения $\mathbf{v}(t)$ также предполагаются в виде нестационарного "белого шума" с матричной корреляционной функцией

$$\mathbf{R}_v(t, \tau) = \mathbf{M}\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t - \tau)\} = \mathbf{R}(t)\delta(\tau). \quad (4.23)$$

Предусматриваемое формулами (4.22) и (4.23) усреднение необходимо проводить по ансамблю реализаций (нестационарные матричные корреляционные функции имеют смысл только в этом случае).

Корреляционная матрица измерительного шума $\mathbf{R}(t)$ предполагается в дальнейшем положительно-определенной. Диагональные члены \ddot{ii} этой матрицы представляют собой дисперсии измерительных шумов в i -х каналах измерения. Вследствие отсутствия корреляции между измерительными шумами в разных каналах недиагональные члены матрицы $\mathbf{R}(t)$ равны нулю.

4.3.1. Вывод дифференциального уравнения оптимального фильтра Калмана-Бьюси

Продифференцируем полученное выше уравнение Винера-Хопфа по времени и обратимся к рассмотрению его правой части

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_{xy}(t, \lambda) = \mathbf{M}\left\{\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)\mathbf{y}^T(\lambda)\right\} = \mathbf{M}\{\mathbf{x}'(t)\mathbf{y}^T(\lambda)\}.$$

Подставив сюда выражение для $\mathbf{x}'(t)$ из первого уравнения системы (4.21) и приняв обычное предположение об отсутствии корреляции между измеряемым вектором $\mathbf{y}(t)$ и белым шумом $\mathbf{w}(t)$, получим

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{y}^T(\lambda)\} = \mathbf{A}(t)\mathbf{M}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{y}^T(\lambda)\}. \quad (4.24)$$

В соответствии с правилом дифференцирования под интегралом по параметру для левой части уравнения Винера-Хопфа можно записать

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t, \tau_1) \mathbf{K}_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 = \\ & \int_0^t \frac{\partial(t, \tau_1)}{\partial t} \mathbf{K}_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 + \mathbf{h}(t, t) \mathbf{K}_y(t, \tau_1), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$t > \lambda > 0.$$

Входящая в состав этого выражения матрица $K_y(t, \lambda)$ определяется как

$$K_y(t, \lambda) = M\{y(t)y^T(\lambda)\}.$$

Подставляя сюда, вместо $y(t)$ его значение из второго уравнения системы (4.21) и принимая предположение о некоррелированности измерительных шумов и измеряемых параметров, получим

$$\begin{aligned} K_y(t, \lambda) &= M\{[C(t)x(t) + v(t)]y^T(\lambda)\} = \\ &= C(t)M\{x(t)y^T(\lambda)\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Это выражение представляет собой правую часть уравнения Винера-Хопфа, умноженную на матрицу выхода $C(t)$, а выражение (4.24) - эту же правую часть, умноженную на матрицу системы $A(t)$. Подставляя в уравнение (4.24) вместо $M\{x(t)y^T(\lambda)\}$ левую часть уравнения (4.20), находим

$$- \frac{d}{dt} \left[\int_0^t h(t, \tau_1) K_y(\tau_1, \lambda) \right] + A(t) \int_0^t h(t, \tau_1) K_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 = 0.$$

Заменим первый член этой формулы выражением (4.25), а в последнем члене полученного уравнения матрицу $K_y(t, \lambda)$ - выражением (4.26), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[A(t)h(t, \tau_1) - \frac{\partial h(t, \tau_1)}{\partial t} \right] K_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 - h(t, t)K_y(t, \lambda) = \\ &= \int_0^t \left[A(t)h(t, \tau_1) - \frac{\partial h(t, \tau_1)}{\partial t} \right] K_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 - \\ &- h(t, t)C(t)M\{x(t)y^T(\lambda)\} = 0. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем члене этого уравнения $M\{x(t)y^T(\lambda)\}$ левой частью уравнения (4.20), приходим к уравнению

$$\int_0^t \left[A(t)h(t, \tau_1) - \frac{\partial h(t, \tau_1)}{\partial t} - h(t, t)C(t)h(t, \tau_1) \right] K_y(\tau_1, \lambda) d\tau_1 = 0. \quad (4.27)$$

Поскольку $R(\tau_1, \lambda)$ - произвольная функция, то уравнение (4.27) будет удовлетворяться только при равенстве нулю выражения в квадратных скобках. Следовательно,

$$A(t)h(t, \tau_1) - \frac{\partial h(t, \tau_1)}{\partial t} - h(t, t)C(t)h(t, \tau_1) = 0. \quad (4.28)$$

Фильтр с оптимальной импульсной переходной матрицей $h(t, \tau_1)$ даст в качестве оптимальной оценки вектора состояния в конечный момент t выражение

$$\hat{x}(t) = \int_0^t h(t, \tau_1)y(\tau_1)d\tau_1. \quad (4.29)$$

Дифференцируя это выражение по t , получим

$$\dot{\hat{x}}(t) = \int_0^t \frac{\partial h(t, \tau_1)}{\partial t} y(\tau_1)d\tau_1 + h(t, t)y(t). \quad (4.30)$$

Из уравнения (4.28) находим выражение для частной производной

$$\frac{\partial h(t, \tau_1)}{\partial t} = A(t)h(t, \tau_1) - h(t, t)C(t)h(t, \tau_1).$$

Подставив его в (4.30), получим

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A(t) \int_0^t h(t, \tau_1)y(\tau_1)d\tau_1 - h(t, t)C(t) \int_0^t h(t, \tau_1)y(\tau_1)d\tau_1 + \\ & + h(t, t)y(t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Подставив (4.29) в (4.31), найдем дифференциальное уравнение оптимального фильтра Калмана - Бьюси:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)]. \quad (4.32)$$

Здесь функция $h(t, t)$ заменена на $K(t)$ для приведения к общепринятому обозначению.

Первый член в правой части последнего уравнения представляет собой априорную оценку вектора состояния, основанную только на уравнении объекта, а второй член - поправку к этой оценке, равную взвешенной разности между априорной оценкой $C(t)\hat{x}(t)$ выходного сигнала и измеренным значением $y(t)$ этого сигнала. Детерминированный входной сигнал $u(t)$ влияет только на априорную оценку и его легко учесть, вводя в уравнение (4.32) в качестве третьего члена $B(t)u(t)$.

4.3.2. Определение оптимального коэффициента усиления фильтра

Линейная оптимальная фильтрация случайных процессов допускает векторное представление, при котором условие оптимальности рассматривается в соответствии с принципом ортогональных проекций.

Если имеются два вектора, то их скалярное произведение запишется в виде

$$z = xy \cos(x \wedge y).$$

Скалярное произведение равно нулю при $(x \wedge y) = 90^\circ$. Векторы x и y в этом случае называются ортогональными и записывается это следующим образом: $x \perp y$. Допустим, что в некотором пространстве N задана плюс-

кость измерительных векторов y_1, y_2 и в этом пространстве определен вектор (рис.4.3) x , который необходимо оценить, используя любой из векторов плоскости y_1, y_2 . Обозначим проекцию вектора x на плоскость y_1, y_2 как \hat{x} и назовем эту величину оценкой вектора x . Ошибка оценивания запишется как $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Если $\tilde{x} \perp y$, то вследствие того, что перпендикуляр является кратчайшим расстоянием от точки до плоскости, ортогональность векторов \tilde{x} и плоскости y_1, y_2 и является условием оптимальности оценки, что можно записать следующим образом:

$$(x - \hat{x}) \perp y, \quad \hat{x}, y \in y_1, y_2.$$

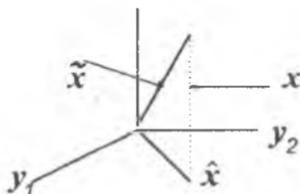


Рис.4.3. К определению оценки вектора x

Под оптимальным коэффициентом усиления подразумевается матрица $K(t)$, выполняющая роль весового множителя в поправочном члене уравнения Калмана. Так как $K(t)$ не зависит от добавляемого детерминированного сигнала $B(t)u(t)$, в дальнейшем при определении оптимального коэффициента усиления будем использовать не измененное уравнение (4.32).

Определим ошибку оценивания следующим образом:

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t). \quad (4.33)$$

Используя (4.29) и (4.33), преобразуем выражение

$$\begin{aligned} M\{\tilde{x}(t)y^T(\lambda)\} &= M\left\{\int_0^t h(t, \tau_1)y(\tau_1)y^T(\lambda)d\tau_1 - x(t)y^T(\lambda)\right\} = \\ &= \int_0^t h(t, \tau_1)M\{y(\tau_1)y^T(\lambda)\}d\tau_1 - M\{x(t)y^T(\lambda)\} = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Равенство нулю этого выражения вытекает из уравнения Винера-Хопфа.

Левая часть уравнения (4.34) - скалярное произведение ошибки оценивания \tilde{x} и измеренного вектора y . Равенство нулю этого произведения показывает, что ошибка оптимального оценивания ортогональна пространству измерений y . Поскольку $\hat{x}(t)$ - линейная функция $y(t)$, ошибка оценивания ортогональна также пространству $\hat{x}(t)$, т.е.

$$M\{\tilde{x}(t)\hat{x}^T(t)\} = 0. \quad (4.35)$$

Полагая в уравнении (4.34) $\lambda = t$, после замены $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ получим

$$M\{\tilde{x}(t)y^T(t)\} = M\{\hat{x}(t)y^T(t)\} - M\{x(t)y^T(t)\} = 0$$

или

$$M\{x(t)y^T(t)\} = M\{\hat{x}(t)y^T(t)\}. \quad (4.36)$$

Подставив второе уравнение системы (4.21) в левую, а выражение (4.29) в правую части уравнения (4.36), найдем

$$\begin{aligned} M\{x(t)[C(t)x(t)]^T\} + M\{x(t)y^T(t)\} &= \\ &= \int_0^t h(t, \tau_1)M\{y(\tau_1)y^T(t)\}d\tau_1 = \\ &= \int_0^t h(t, \tau_1)M\{[C(\tau_1)x(\tau_1) + v(\tau_1)][C(t)x(t) + v(t)]^T\}d\tau_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что корреляция между $x(t)$ и $v(t)$ отсутствует и корреляционная функция измерительного шума равна $R(t)\delta(t - \tau)$, получим

$$\begin{aligned} M\{x(t)[C(t)x(t)]^T\} &= \\ &= \int_0^t h(t, \tau_1)M\{[C(\tau_1)x(\tau_1)][C(t)x(t)]^T\}d\tau_1 + h(t, t)R(t) = \\ &= \int_0^t h(t, \tau_1)M\{y(\tau_1)[C(t)x(t)]^T\}d\tau_1 + h(t, t)R(t) = \\ &= M\{\hat{x}(t)[C(t)x(t)]^T\} + h(t, t)R(t). \end{aligned}$$

Здесь при последнем переходе было использовано уравнение (4.29). Переносим первый член из правой части в левую и используя уравнения (4.33) и (4.35), находим

$$\begin{aligned} M\{-\tilde{x}(t)[C(t)x(t)]^T\} &= M\{-\tilde{x}(t)[C(t)\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)]^T\} = \\ &= M\{-\tilde{x}(t)[\dot{\hat{x}}^T(t) - \tilde{x}^T(t)]C(t)\} = M\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)C^T(t)\} = K(t)R(t). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Здесь снова использовано обычное обозначение $K(t)$.

Введем в рассмотрение корреляционную матрицу ошибок оценивания

$$P(t) = M\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\}. \quad (4.38)$$

Тогда на основании выражения (4.37) можно записать

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t). \quad (4.39)$$

В правой части этого уравнения все величины, за исключением корреляционной матрицы ошибок оценивания, известны.

Корреляционная матрица ошибок оценивания определяется решением матричного уравнения Рикатти [2,3,4].

$$\frac{dP}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + B(t)Q(t)B^T(t). \quad (4.40)$$

В этом уравнении все коэффициенты- известные функции времени. Решая данное уравнение, находим корреляционную матрицу ошибок оценивания $P(t)$, необходимую для вычисления по уравнению (4.39) оптимального коэффициента усиления $K(t)$ фильтра Калмана.

4.3.3. Анализ уравнений оптимальной непрерывной фильтрации

Полная система уравнений оптимальной непрерывной фильтрации включает в себя уравнения объекта (4.21), уравнение оптимальной фильтрации Калмана- Бьюси (4.32), уравнение для вычисления оптимального коэффициента усиления (4.39) и уравнение для вычисления корреляционной матрицы ошибок оценивания (4.40). Последние два уравнения определяют только вычислительные процедуры и влияния на динамику системы управления не оказывают.

Структурные схемы непрерывного объекта управления и соответствующего фильтра Калмана с учетом управляющего воздействия $B(t)u(t)$ приведены соответственно на рис.4.4,а,б. Формирование оптимального коэффициента усиления по уравнениям (4.39) и (4.40) на рисунках не отражено.

Нетрудно видеть, что структурная схема оптимального фильтра содержит в качестве составной части структурную схему объекта наблюдения, на которую действует "взвешенный" сигнал рассогласования между действительно измеренным значением $y(t)$ выходного сигнала и его прогнозированным значением $\hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t)$.

"Взвешивание" производится звеном, передаточная функция K которого равна оптимальному коэффициенту усиления фильтра. Это звено входит в замкнутый контур, так что устойчивость этого контура, т.е. устойчивость фильтра Калмана, зависит от корреляционных матриц Q и R белых шумов, представляющих случайные воздействия на объект и ошибки измерения выходного сигнала. Фильтр устойчив, если его матрица $(A - KC)$ имеет собственные значения с отрицательными вещественными частями.

При модальном управлении вектор состояния можно оценивать при помощи фильтра Калмана. Вся замкнутая система управления в целом описывается тогда уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t); \\ y(t) &= C(t)x(t) + v(t); \\ \hat{\dot{x}}(t) &= (A(t) - K(t)C(t))\hat{x}(t) + K(t)y(t) + B(t)u(t); \\ u(t) &= v_1(t) - P\hat{x}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Под $v_1(t)$ понимается вектор задающих воздействий, а под P - матрица преобразования регулятора.

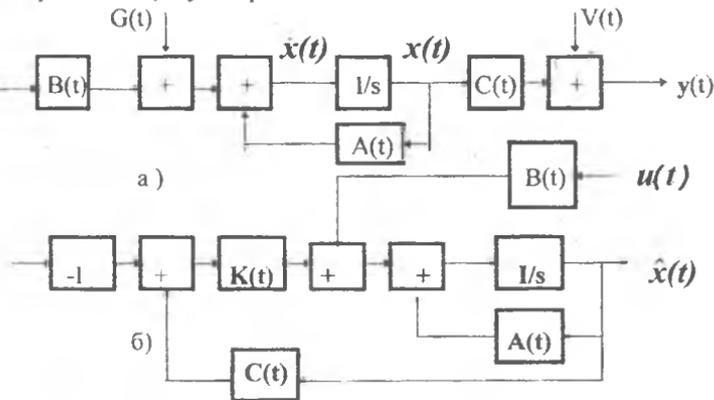


Рис.4.4. Структурные схемы непрерывного объекта (а) и фильтра Калмана (б)

Внешнее случайное воздействие и измерительный шум не оказывают влияния на устойчивость системы и при дальнейших преобразованиях они опущены.

Докажем теперь, что корни замкнутой системы совпадают с собственными значениями матриц $(A(t) - B(t)P)$ и $(A(t) - K(t)C(t))$. Введем вместо переменной $\hat{x}(t)$ переменную $E(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ и после преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(t) - B(t)P)x(t) + B(t)PE(t) + B(t)v_1(t); \\ \dot{E}(t) &= (A(t) - K(t)C(t))E(t) - B(t)v_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Система уравнений (4.41) имеет треугольную матрицу

$$\begin{bmatrix} A - BP & BP \\ 0 & A - KC \end{bmatrix}$$

откуда следует, что характеристический полином этой системы $\det(sI - A + BP)\det(sI - A + KC)$

имеет корни, совпадающие с собственными числами указанных матриц. В последних выражениях, с целью упрощения записи, параметр t опущен.

Полученный результат показывает, что если дело идет о смещении корней замкнутой системы к предписанным значениям, то наблюдающее устройство никак не нарушает этого процесса, а просто добавляет к имеющимся корням системы свои корни. Структурная схема всей системы управления, составленная по уравнениям (4.41), показана на рис.4.5.

Сделаем в системе (4.41) эквивалентные преобразования. В третье уравнение системы вместо $\dot{\hat{x}}$ подставим его значение $\dot{\hat{x}} = C^{-1}(t)\hat{y}$ и в результате получим

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) - K(t)C(t))C^{-1}(t)\hat{y} + K(t)y + B(t)u$$

или

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)(y - \hat{y}) + B(t)u.$$

Преобразованная структурная схема системы, построенная по последнему выражению (рис.4.6), показывает, что фильтр Калмана представляет собой не что иное, как модель наблюдаемого объекта, дополненную звеном $K(t)$. Основная трудность в создании этого фильтра заключается именно в определении коэффициента $K(t)$.

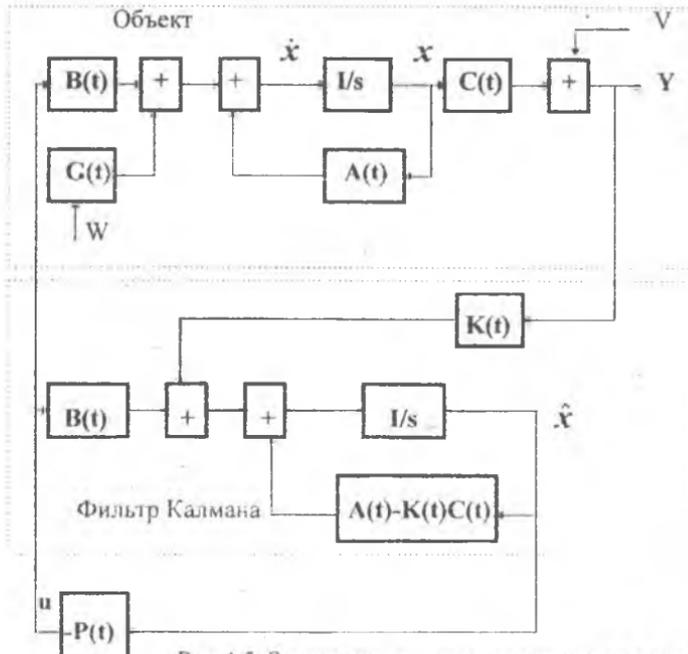


Рис.4.5. Замкнутая система, содержащая в качестве наблюдающего устройства фильтр Калмана

Когда действующие на объект случайные возмущения и ошибки измерения - белые шумы, коэффициент $K(t)$ можно рассчитать по ранее выведенным уравнениям. Если действующие на объект возмущения $w_1(t)$ представляются "цветным шумом", а ошибки измерения - "белым шумом", то по сравнению с предыдущим случаем дополнительных трудностей не возникает. Необходимо просто к уравнениям объекта добавить уравнение формирующего фильтра, предназначенного для получения "цветного шума" из белого.

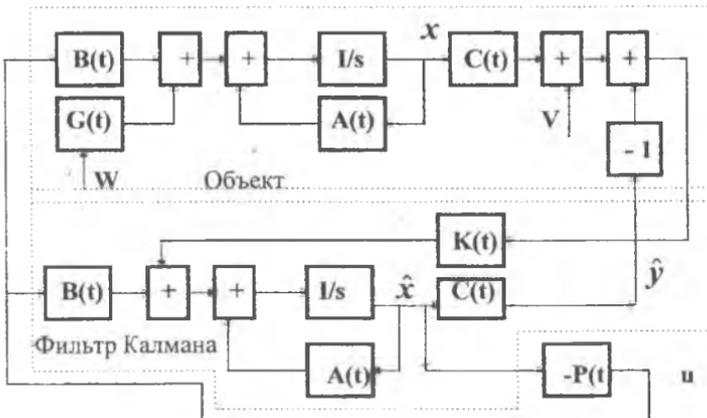


Рис.4.6. Система, эквивалентная изображенной на рис. 4.5

Исходный объект и формирующий фильтр образуют расширенный объект управления. Выходной сигнал формирующего фильтра с требуемой кривой спектральной плотности входного сигнала рассматривается как часть переменных состояния расширенного объекта. Таким образом, благодаря формирующему фильтру задача сводится к прежнему случаю, когда возмущающие воздействия представляют собой "белый шум".

Статистическая обработка информации, основанная на теории оптимальной фильтрации Калмана-Бьюси, предполагает техническую реализацию на базе цифровых ЭВМ. Следовательно, особый интерес в прикладных задачах имеет дискретная оптимальная фильтрация. Результаты непрерывной оптимальной фильтрации Калмана-Бьюси могут быть распространены на дискретные динамические системы [2,3]. Приведем без вывода уравнения дискретного оптимального фильтра Калмана-Бьюси.

Математическая модель объекта:

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} u_{k-1} + w_{k-1}$$

Математическая модель измерений:

$$y_k = C_k x_k + v_k$$

Уравнения фильтра:

$$\hat{x}_k = \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} + \Gamma_{k, k-1} u_{k-1} + K_k [y_k - C_k \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} - C_k \Gamma_{k, k-1} u_{k-1}].$$

Оптимальный коэффициент усиления:

$$K_k = P'_k C_k^T [C_k P'_k C_k^T + R_k]^{-1}.$$

Априорная корреляционная матрица ошибок оценивания:

$$P'_k = \Phi_{k, k-1} P_{k-1} \Phi_{k, k-1}^T + Q_{k-1}.$$

Апостериорная корреляционная матрица ошибок оценивания:

$$P_k = [I - K_k C_k] P'_k.$$

В приведенных уравнениях :

x_k — n -мерный вектор состояния;

$\Phi_{k, k-1}$ — переходная матрица состояния размерности $n \otimes n$;

$\Gamma_{k, k-1}$ — матрица входного воздействия.

Библиографический список

1. Доброленский Ю.П., Иванова В.И., Поспелов Г.С. Автоматика управляемых снарядов. М.: Оборонгиз, 1963. 518с.
2. Венгеров А.А., Щаренский В.А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. М.: Энергоиздат, 1982. 190с.
3. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184с.
4. Кузовков Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1976. 304с.
5. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Госэнергоиздат, 1962.
6. Солодовников В.В. Основы теории и элементов систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1985. 510с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Основные понятия современной теории управления.....	4
1.1. Переменные состояния и уравнения состояния динамической системы.....	4
1.2. Матричная передаточная функция.....	7
1.3. Понятия управляемости и наблюдаемости системы.....	8
2. Методы модального управления.....	10
2.1. Метод стандартных коэффициентов.....	11
2.2. Управление корнями при полной информации о векторе состояния.....	15
2.2.1. Объект с одним входом.....	15
2.2.2. Управление объектом с несколькими входами.....	19
2.3. Управление корнями при неполной информации о векторе состояния.....	21
2.3.1. Объект с одним входом.....	21
2.3.2. Объекты с несколькими входами.....	29
3. Наблюдение детерминированных объектов.....	32
3.1. Наблюдающее устройство как замкнутая система.....	32
3.2. Общая теория наблюдающих устройств.....	34
3.3. Наблюдающее устройство идентификации.....	35
3.4. Разделение собственных значений.....	36
3.5. Редуцированное наблюдающее устройство.....	39
4. Наблюдение объектов при случайных помехах.....	43
4.1. Общее условие минимума СКО.....	43
4.2. Интегральное уравнение Винера-Хопфа.....	46
4.3. Уравнение нестационарной фильтрации Калмана-Бьюси.....	48
4.3.1. Вывод дифференциального уравнения оптимального фильтра Калмана-Бьюси.....	48
4.3.2. Определение оптимального коэффициента усиления фильтра.....	50
4.3.3. Анализ уравнений оптимальной фильтрации.....	53
Библиографический список.....	57
Оглавление.....	58

Учебное издание

Гусев Александр Николаевич

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Л.Я. Чегодаева

Корректор Л.Я. Чегодаева

Лицензия ЛР N 020301 от 30.12.96г.

Подписано в печать 25.05.2000г. Формат 60x84¹/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл.печ.л. 3,48. Усл.кр.-отт. 3,60. Уч.-изд.л. 3,75

Тираж 200 экз. Заказ 57. Арт.С-4(Д1)/2000.

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического
университета имени академика С.П. Королева,
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.