МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра алгебры и геометрии

Р.М. Рудман

РАНГ. ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Конспект лекций

Издательство «Самарский университет»
2003

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

ББК 22.143
УДК 512.643
Р 832

Рудман Р.М. Ранг. Линейная независимость. Общее решение систем линейных уравнений: Конспект лекций. Самара: Издательство «Самарский университет», 2003. 32 с.

Данная работа представляет собой конспект лекций по линейной алгебре. В ней приводятся основные теоретические положения трех важных разделов. Четко определены важные понятия: линейная зависимость и независимость систем векторов, базис и ранг системы векторов, критерий совместности систем линейных уравнений, фундаментальная система решений и т.д. Все свойства и теоремы аккуратно доказаны, что позволяет читателям самостоятельно ознакомиться с важными математическими понятиями.

Данное пособие адресовано студентам математических специальностей, но будет полезно и студентам других факультетов, изучающим соответствующие разделы алгебры.

БКК 22.143
УДК 512.643

Рецензент ст. преп. кафедры алгебры СГПУ И.В.Алешина

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка, макет Р.М.Рудман

Лицензия ИД № 061786 от 01.11.2001. Подписано в печать 28.04.03. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,86, уч.-изд. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ № 978
Издательство «Самарский университет», 443011, Самара, ул.Акад. Павлова, 1.
Отпечатано на УОП СамГУ.

Ранг

Линейная зависимость и независимость систем.

Определение линейной зависимости.

При изучении этой темы под выражением n - мерный вектор мы будем понимать или строку длины n, состоящую из чисел (вещественных или комплексных - не важно), или столбец высоты n. В одних задачах удобнее брать строки, в других столбцы.

1. **Линейной комбинацией** n **- мерных векторов** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_s$ называется выражение $t_1\bar{a}_1 + t_2\bar{a}_2 + \ldots + t_s\bar{a}_s$, где $t_1, t_2, ..., t_s$ числа. Это тоже n - мерный вектор.

2. Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_s$ называется **линейно-зависимым**, если существует такая линейная комбинация этих векторов, значение которой равно нулевому вектору, но не все коэффициенты при этом нулевые. То есть:

$$t_1\bar{a}_1 + t_2\bar{a}_2 + \ldots + t_s\bar{a}_s = \bar{0},$$

хотя бы для одного из индексов k имеем $t_k \neq 0$.

3. Отрицание условия из второй части определения приводит к понятию **линейной независимости**. Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_s$ называется линейно-независимым, если в нуль может обратиться только линейная комбинация этих векторов с нулевыми коэффициентами и никакая другая.

То есть если из равенства нулю линейной комбинации обязательно вытекает равенство нулю коэффициентов, уравнение

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_s\bar{a}_s = \bar{0}$$

(относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_s$) имеет ровно одно решение $x_1 = x_2 = ... = x_s = 0$.

Пример. Предположим, что столбцы прямоугольной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{pmatrix}$ линейно независимы. Тогда из последней части определения следует, что система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots &= 0 \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{ps}x_s &= 0 \end{cases}$$

совместная и определенная, то есть имеет ровно одно решение (и это решение нулевое $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$).

Целью изучения этой темы является обобщение этого факта на произвольные (в том числе не обязательно однородные) системы и получение конкретных "вычислительных" правил, с помощью которых можно "решать" такие системы.

Лемма о линейной зависимости двух векторов.

Набор из двух векторов является линейно зависимым тогда и только тогда, когда он пропорционален. (То есть один вектор получается из другого умножением на некоторое число).

Доказательство. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ пропорциональны. Пусть $\bar{a}_1 = t\bar{a}_2$ (второй случай $\bar{a}_2 = t\bar{a}_1$ аналогичен) тогда $1\bar{a}_1 + (-t)\bar{a}_2 = \bar{0}$. Это соотношение дает линейную зависимость, так как первый из коэффициентов отличен от нуля.

Наоборот, пусть векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ линейно зависимы. Тогда можно записать $t_1\bar{a}_1 + t_2\bar{a}_2 = \bar{0}$, причем хотя бы одно из двух чисел t_1, t_2 не равно 0. Пусть $t_1 \neq 0$ (случай $t_2 \neq 0$ аналогичен). Тогда $\bar{a}_1 = (-\frac{t_2}{t_1})\bar{a}_2$ - что и означает пропорциональность. Лемма доказана.

Обобщением этой леммы служит следующая теорема.

Критерий линейной зависимости.

Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_s$ является линейно зависимым тогда и только тогда, когда хотя бы **один** из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Доказательство. Из определения очевидным образом следует, что если менять местами векторы, то условие линейной зависимости (или независимости) не нарушается. Будем использовать этот факт.

Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ...\bar{a}_s$ линейно зависимы. Тогда можно написать $t_1\bar{a_1} + t_2\bar{a_2} + \ldots + t_s\bar{a_s} = \bar{0}$, причем среди чисел $t_1, t_2, ..., t_s$ хотя бы одно не равно нулю. Поменяем (если надо) местами векторы так, чтобы $t_1 \neq 0$. Тогда $\bar{a}_1 = +(-\frac{t_2}{t_1})\bar{a}_2 + ... + (-\frac{t_s}{t_1})\bar{a}_s$ Первый вектор - линейная комбинация остальных.

Достаточность. Предположим, что один из векторов равен линейной комбинации остальных. Опять, поменяв векторы местами (если надо), поставим этот вектор на первое место. Итак, получим: $\bar{a}_1 = c_2\bar{a}_2 + ... + c_s\bar{a}_s$. Отсюда $1\bar{a}_1 + (-c_2)\bar{a}_2 + ... + (-c_s)\bar{a}_s = \bar{0}$. Из этого последнего соотношения вытекает линейная зависимость, так как в нем первый коэффициент равен 1, что и требовалось доказать.

Критерий равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбы (или строки) линейно зависимы.

Доказательство достаточности. Докажем для строк (для столбцов матрицу достаточно транспонировать). Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ строки квадратной матрицы А. Пусть они линейно зависимы. Тогда по критерию одна из строк равна линейной комбинации остальных. Если это не первая строка, то ее можно с первой поменять местами, тогда определитель только сменит знак (а мы сравниваем его с нулем). Итак, пусть первая строка - линейная комбинация остальных $\bar{a}_1 = c_2\bar{a}_2 + ... + c_n\bar{a}_n$. Выполним теперь следующую цепочку преобразований. Из первой строки вычтем вторую, умноженную на c_2, затем третью, умноженную на c_3, и т.д. со всеми строками до последней - последнюю вычтем, умноженную на c_n. На каждом шаге определитель не изменился, но в последнем определителе первая строка состоит из нулей. Значит определитель равен нулю.

Для исследования линейно зависимых наборов (систем) векторов некоторые "лишние" векторы приходиться выбрасывать. Вопрос о том, какие векторы лишние, какие векторы можно выбросить, решается следующим определением.

Определение базиса. Базис некоторого набора n-мерных векторов - это такая **линейно независимая часть** этого набора, в виде линейной комбинации которой можно представить **всякий** вектор набора.

Пример. Если набор $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ линейно независимый, то он *сам в себе* является *базисом*, так как всякий вектор можно представить в виде линейной комбинации, в которой один из коэффициентов равен единице, а остальные нулю, например:

$\bar{a}_1 = 1\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 ... + 0\bar{a}_n$,

$\bar{a}_2 = 0\bar{a}_1 + 1\bar{a}_2 ... + 0\bar{a}_n$ и т.д.

Основная теорема о ранге системы векторов.

Любые два базиса одной и той же системы векторов содержат одно и то же количество элементов. Это количество **называется рангом системы.**

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько новых понятий и несколько дополнительных вспомогательных теорем.

Пусть A - произвольная прямоугольная матрица, D_1 ее минор порядка p.

Окаймляющим минором для минора D_1 в матрице A называется минор D_2 порядка $p+1$ в этой матрице, который содержит все элементы этой матрицы, входящие в D_1 и элементы еще какой-нибудь дополнительной строки и еще одного дополнительного столбца.

Базисным минором для матрицы A называется такой ненулевой минор D, для которого **все** окаймляющие миноры равны нулю.

Теорема о базисном миноре.

Пусть D - базисный минор матрицы A. Тогда столбцы матрицы A, содержащие элементы минора D, составляют базис системы столбцов матрицы A. То же самое верно и для строк.

Доказательство.

Докажем утверждение теоремы для столбцов. Утверждение теоремы для строк получится, если матрицу A транспонировать (при этом миноры не изменятся). Для простоты обозначений будем предполагать, что базисный минор D находится в левом верхнем углу (в противном случае можно поменять местами строки и столбцы). Пусть r -порядок минора D. Тогда

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1q} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{r.1} & \ldots & a_{rr} & a_{r.r+1} & \ldots & a_{rq} \\
\hline
a_{r+1.1} & \ldots & a_{r+1.r} & a_{r+1.r+1} & \ldots & a_{r+1,q}\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{p1} & \ldots & a_{pr} & a_{p.r+1} & \ldots & a_{pq}
\end{array}\right)$$

Обозначим через $\bar{a}_1, ... \bar{a}_r, \bar{a}_{r+1}, ..., \bar{a}_q$ столбцы матрицы A. Докажем, что первые r столбцов составляют базис.

Часть 1 доказательство линейной независимости.

Обозначим через $\bar{b}_1, ... \bar{b}_r$ столбцы минора D. Предположим противное, то есть пусть $\bar{a}_1, ... \bar{a}_r$ - линейно зависимы. Значит, есть ненулевое решение у уравнения

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_s\bar{a}_s = \bar{0}.$$

Так как векторы $\bar{b}_1, ... \bar{b}_r$ это составные части векторов $\bar{a}_1, ... \bar{a}_r$, то для них верно такое же соотношение

$$x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \ldots + x_s\bar{b}_s = \bar{0}.$$

Поэтому столбцы минора D линейно зависимы. По уже доказанной части (достаточности) критерия равенства нулю определителя получаем $D = 0$, что противоречит определению базисного минора. Значит $\bar{a}_1, ... \bar{a}_r$ линейно независимы.

Часть 2 доказательство "полноты".

Пусть $\bar{a}_k$ произвольный столбец. Докажем, что он линейно выражается через систему (1): $\bar{a}_1, ... \bar{a}_r$ первых r столбцов. Если $k \leq r$, то этот столбец входит в (1), а значит и линейно выражается через нее. Итак, пусть $k > r$. Обозначим через D_i для каждого i, $1 \leq i \leq q$ определитель порядка $r + 1$:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Если $i \leq r$, то в этом определителе две одинаковые строки, а значит, он равен нулю.

Если $i > r$, то D_i - это окаймляющий минор для D. Отсюда следует, что он равен нулю (так как D -базисный). Итак, во всех случаях $D_i = 0$. Разложим этот определитель по последней строке:

$$D_i = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + ... + a_{ir}A_r + a_{ik}A_{r+1} = 0,$$

где через $A_1, A_2, ..., A_{r+1}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителя D_i. Когда мы вычисляем эти алгебраические дополнения, мы вычеркиваем последнюю строку в D_i и один из столбцов. Но после вычеркивания последней строки все оставшиеся элементы от i зависеть не будут. Значит, все коэффициенты $A_1, A_2, ..., A_{r+1}$ от i не зависят. Отсюда, в равенстве

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + ... + a_{ir}A_r + a_{ik}A_{r+1} = 0$$

мы можем менять i в пределах от 1 до p, оставляя неизменными числа $A_1, A_2, ..., A_{r+1}$. Это означает, что справедливо соотношение между столбцами

$$\bar{a}_1 A_1 + \bar{a}_2 A_2 + ... + \bar{a}_r A_r + \bar{a}_k A_{r+1} = 0$$

Вычислим последний коэффициент A_{r+1}. Он равен $A_{r+1} = D \cdot (-1)^{(r+1)+(r+1)} = D(-1)^{2r+2} = D$ так как $D \neq 0$, то отсюда находим

$$\bar{a}_k = -\frac{A_1}{D}\bar{a}_1 - \frac{A_2}{D}\bar{a}_2 - ... - \frac{A_r}{D}\bar{a}_r,$$

то есть во всех случаях $\bar{a}_k$ линейно зависит от системы (1), то есть доказали, что система (1) базис.

Следствие о вычислении ранга матрицы.

Рангом матрицы называется ранг системы ее столбцов. Ранг матрицы равен порядку базисного минора.

Теорема об однородных системах с маленьким количеством уравнений.

Если в однородной системе количество уравнений меньше количества неизвестных, то система имеет **ненулевое решение**.

Доказательство. Обозначим через D базисный минор основной матрицы системы. Строки матрицы A, содержащие элементы минора D, образуют базис системы всех строк матрицы (назовем их базисными). Значит, каждая строка линейная комбинация базисных. Поэтому каждое уравнение - линейная комбинация базисных (соответствующих базисным строкам). Значит, каждое из уравнений, не входящих в число базисных - это следствие базисных уравнений. Поэтому, выбрасывая каждое из этих уравнений, мы не меняем множества решений. Итак, выбросим все "лишние" уравнения. Оставим в левых частях только те слагаемые, которые соответствуют элементам минора D, перенесем остальные в правую часть. Обозначим через $x_1, x_2, ...x_r$ те неизвестные, которые мы оставили в левой части, а через $x_{r+1}, ..., x_q$ остальные неизвестные. Выбрасывая уравнения, мы можем только уменьшить их количество. Следовательно, всегда $r < q$. Поэтому в правой части есть хотя бы одна неизвестная. Назовем неизвестные из правой части параметрами. Подставим вместо всех параметров ненулевые числа. Получим уравнения вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r &= b_2 \\ \qquad .... & \quad ... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r &= b_r \end{cases},$$

где $b_1, ..., b_r$ какие-то числа, а определитель этой системы совпадает с базисным минором D. Так как $D \neq 0$, то последнюю систему можно решить по формулам Крамера. Добавляя к найденным значениям неизвестных $x_1, x_2, ... x_r$ выбранные значения параметров $x_{r+1}, ..., x_q$, мы получим ненулевое решение исходной системы.

Определение линейной зависимости одной системы от другой.

Предположим, что заданы два набора векторов (две системы). Будем говорить, что первая система зависит от второй, если всякий вектор первой системы линейно выражается через вторую (то есть может быть представлен в виде линейной комбинации векторов второй системы).

Лемма 1. Всякая система векторов по определению зависит от своего базиса.

Лемма 2. Если система (1) является частью системы (2), то она от нее линейно зависит (часть зависит от целого).

Доказательство.

Пусть $\bar{a}_1, ... \bar{a}_s$ система (1), $\bar{a}_1, ... \bar{a}_s, \bar{a}_{s+1}, ... \bar{a}_t$ система (2). Берем вектор из системы (1)

$$\bar{a}_k = 0\bar{a}_1 + ... + 1\bar{a}_k + 0\bar{a}_s + ... + 0\bar{a}_t.$$

Значит, $\bar{a}_k$ -линейно выражается через (2). А это и означает, что (1) зависит от (2).

Основная лемма "о замене векторов". Если система векторов (1) линейно независима и линейно зависит от системы (2), то количество элементов в этой первой системе не больше, чем во второй (линейно независимые системы "наиболее оптимальные" в смысле количества элементов среди систем, зависящих друг от друга).

Доказательство.

Предположим, что $\bar{a}_1, ... \bar{a}_q$ (1), $\bar{b}_1, ... \bar{b}_p$ (2) две указанные системы. Нужно доказать, что $q \leq p$. Предположим противное, пусть

$p < q$. Система (1) зависит от (2) это означает, что существуют такие числа c_{ik}, для которых

$$\begin{cases} \bar{a}_1 &= c_{11}\bar{b}_1 + c_{21}\bar{b}_2 + ... + c_{p1}\bar{b}_p \\ \bar{a}_2 &= c_{12}\bar{b}_1 + c_{22}\bar{b}_2 + ... + c_{p2}\bar{b}_p \\ .... & ... \ .... \\ \bar{a}_q &= c_{1q}\bar{b}_1 + c_{2q}\bar{b}_2 + ... + c_{pq}\bar{b}_p \end{cases} \qquad (*)$$

Здесь у c_{ik} первый индекс - номер вектора $\bar{b}_i$ на который это число умножается, второй индекс - номер вектора $\bar{a}_k$, который раскладываем. Векторы $\bar{a}_1, ...\bar{a}_q$ линейно независимы. Это означает, что уравнение $x_1\bar{a}_1 + ... + x_q\bar{a}_q = \bar{0}$ имеет только нулевое решение $x_1 = ... = x_q = 0$. Перепишем это уравнение по другому, умножив равенства (*) на неизвестные и сложив.

$$(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1q}x_q)\bar{b}_1 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2q}x_q)\bar{b}_2 +$$

$$+ ... + (c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + ... + c_{pq}x_q)\bar{b}_p = \bar{0}.$$

Докажем, что в последнем равенстве все выражения в круглых скобках, которые умножаются на векторы $\bar{b}_1, ...\bar{b}_p$ можно сделать равными нулю, если выбрать некоторые подходящие ненулевые значения неизвестных $x_1, ..., x_q$. А это приведет к противоречию с линейной независимостью (1), так как даст ненулевое решение уравнения $x_1\bar{a}_1 + ... + x_q\bar{a}_q = \bar{0}$. Итак, осталось доказать существование ненулевого решения у системы уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1q}x_q &= 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2q}x_q &= 0 \\ .... & .. \ .. \\ c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + ... + c_{pq}x_q &= 0 \end{cases}$$

Но в этой однородной системе число уравнений меньше числа неизвестных ($p < q$). Значит, по предыдущей теореме она имеет ненулевое решение, что и требовалось. Итак, получили утверждение, противоречащее линейной независимости системы (1). Значит, предположение $p < q$ было неверным, и на самом деле $q \leq p$.

Доказательство основной теоремы о ранге системы векторов.

Пусть $\bar{a}_1, ...\bar{a}_n$ (1) произвольная система векторов, $(\bar{b}_1, ...\bar{b}_r)$ (2) и $(\bar{c}_1, ...\bar{c}_s)$ (3) -два ее базиса. Нам нужно доказать, что $r = s$.

Во-первых, все векторы системы (1) линейно выражаются через (2) (так как система (2) -базис). Система (3) это часть системы (1). Значит, все векторы системы (3) линейно выражаются через (2). Таким образом, система (3) линейно зависит от системы (2). Кроме того, система (3) линейно независима (так как это базис). Значит, по лемме о замене, $s \leq r$. Теперь можно повторить все рассуждения, поменяв базисы (2) и (3) ролями. Тогда получим обратное неравенство $r \leq s$. Значит, $r = s$.

Окончание доказательства критерия равенства нулю определителя: доказательство необходимости.

Докажем, что если определитель равен нулю, то его столбцы (и строки тоже) линейно зависимы. Итак, пусть A квадратная матрица, определитель которой равен нулю ($|A| = 0$). Обозначим через D базисный минор в A. Так как $|A| = 0$, то D содержит не все элементы матрицы A, то есть его порядок меньше порядка матрицы.

По теореме о базисном миноре отсюда следует, что в базис системы столбцов входят не все столбцы. Значит, есть столбец, который не входит в базис, но равен линейной комбинации базисных. Значит, в системе столбцов матрицы A есть столбец, равный линейной комбинации других. По критерию линейной зависимости получаем, что система линейно зависима.

Для того, чтобы упростить задачу вычисления ранга матриц, нам понадобиться использование ряда свойств ранга. Разберем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма о транзитивности отношения линейной зависимости.

Предположим, что выбраны три такие системы векторов, что вторая линейно зависит от первой, а третья - от второй. Тогда третья система линейно зависит от первой.

<u>Доказательство.</u>

Пусть $\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_p$ (1), $\bar{b}_1, \ldots \bar{b}_q$ (2), $\bar{c}_1, \ldots \bar{c}_t$ (3) данные три системы. Тогда существуют числа $(x_{ij}), (y_{jk})$ такие, что

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{b}_1 & = & x_{11}\bar{a}_1 + x_{21}\bar{a}_2 + \ldots + x_{p1}\bar{a}_p \\ \bar{b}_2 & = & x_{12}\bar{a}_1 + x_{22}\bar{a}_2 + \ldots + x_{p2}\bar{a}_p \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_q & = & x_{1q}\bar{a}_1 + x_{2q}\bar{a}_2 + \ldots + x_{pq}\bar{a}_p \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{c}_1 & = & y_{11}\bar{b}_1 + y_{21}\bar{b}_2 + \ldots + y_{q1}\bar{b}_q \\ \bar{c}_2 & = & y_{12}\bar{b}_1 + y_{22}\bar{b}_2 + \ldots + y_{q2}\bar{b}_q \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{c}_t & = & y_{1t}\bar{b}_1 + y_{2t}\bar{b}_2 + \ldots + y_{qt}\bar{b}_q \end{array}\right.$$

Теперь подставив выражения для векторов $\bar{b}_1, \ldots \bar{b}_q$ в правые части выражений для векторов $\bar{c}_1, \ldots \bar{c}_t$ и вынеся общие векторные множители за скобки, получим

$$\begin{cases} \bar{c}_1 & = & z_{11}\bar{a}_1 + z_{21}\bar{a}_2 + ... + z_{p1}\bar{a}_p \\ \bar{c}_2 & = & z_{12}\bar{a}_1 + z_{22}\bar{a}_2 + ... + z_{p2}\bar{a}_p \\ .... & ... & .... \\ \bar{c}_t & = & z_{1t}\bar{a}_1 + z_{2t}\bar{a}_2 + ... + z_{pt}\bar{a}_p \end{cases},$$

где z_{ik} - некоторые числа, например, $z_{11} = x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + ... + x_{1q}y_{q1}$. Аналогично вычисляются остальные z_{ik}. Но это означает, что система (3) линейно зависит от системы (2).

Лемма о ранге системы, линейно зависящей от другой. Пусть выбраны две системы векторов. Если первая система линейно зависит от второй, то ранг первой системы не больше, чем ранг второй.

Доказательство.

Пусть $\bar{a}_1, ...\bar{a}_p$ (1), $\bar{b}_1, ...\bar{b}_q$ (2) две указанные системы.

Пусть $\bar{c}_1, ...\bar{c}_r$ (3) базис системы (1), $\bar{u}_1, ...\bar{u}_t$ (4) -базис системы (2). Таким образом, $r = rang(1)$, $t = rang(2)$,

система (3) зависит от (1) (так как это ее часть),

система (1) зависит от (2) (по условию),

система (2) зависит от (4) (так как (4) это базис).

В силу транзитивности (предыдущая лемма) получаем, что система (3) зависит от (4). Кроме того, система (3) - линейно независима (так как является базисом). Значит, по "лемме о замене" получаем неравенство $r \leq t$, то есть $rang(1) \leq rang(2)$, что и требовалось.

Следствие о ранге эквивалентных систем.

Две системы векторов называются эквивалентными, если каждая зависит от другой. Ранги эквивалентных систем равны.

Доказательство.

Пусть r и t ранги этих двух систем. Так как каждая зависит от другой, то по предыдущей лемме получаем $r \leq t$ и $t \leq r$. Отсюда $t = r$

Теорема об основных преобразованиях, не меняющих ранг матрицы. Ранг матрицы не меняется при любом из следующих преобразованиях:

1) при транспонировании матрицы;

2) при любой перестановке строк (столбцов);

3) при умножении одной строки на ненулевую константу;

4) при элементарном преобразовании, состоящем в прибавлении к одной из строк матрицы другой, умноженной на произвольное число (то же для столбцов).

Часть 1.

Из определений следует, что при транспонировании базисный минор переходит в базисный минор (так как при транспонировании определители не меняют своих значений). Значит, порядок базисного минора, а следовательно, и ранг не меняется.

Часть 2.

Меняя местами столбцы $a_1, ..., a_s$ мы получаем другую систему столбцов $b_1, ..., b_s$, которая эквивалентна исходной (так как состоит из тех же самых столбцов). Согласно последнему следствию (о ранге эквивалентных систем) ранги этих двух систем (а значит, и двух матриц) равны.

Часть 3.

Так как столбцы можно менять местами, будем для простоты обозначений считать, что умножается первый столбец на константу $c \neq 0$. Итак, пусть $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_s$ исходные столбцы, $\bar{b}_1, ..., \bar{b}_s$ столбцы новой матрицы. Тогда $\bar{b}_1 = c\bar{a}_1$, $\bar{b}_2 = \bar{a}_2$,...,$\bar{b}_s = \bar{a}_s$. Из этих равенств следует, что вторая система зависит от первой. Так как эти равенства можно обратить: $\bar{a}_1 = \frac{1}{c}\bar{b}_1$, $\bar{a}_2 = \bar{b}_2$, ..., $\bar{a}_s = \bar{b}_s$, то первая система зависит от второй, то есть они эквивалентны и имеют одинаковый ранг.

Часть 4.

Опять меняя местами, если нужно, столбцы, считаем, что к первому столбцу прибавляется второй, умноженный на c. Пусть $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_s$; $\bar{b}_1, ..., \bar{b}_s$ эти две системы столбцов (старой и новой матриц). Тогда $\bar{b}_1 = \bar{a}_1 + c\bar{a}_2$, $\bar{b}_2 = \bar{a}_2$, ..., $\bar{b}_s = \bar{a}_s$. Значит, вторая система зависит от первой. Равенства эти можно обратить: $\bar{a}_1 = \bar{b}_1 + c\bar{b}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{b}_2$, ..., $\bar{a}_s = \bar{b}_s$. Значит, первая система зависит от второй, то есть они эквивалентны и имеют одинаковый ранг.

Задача.

Рассмотрим задачу нахождения ранга матрицы при различных значениях параметра λ.

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

При нахождении ранга будем использовать доказанные выше факты.

Шаг 1. Воспользуемся теоремой об основных преобразованиях, не меняющих ранг матрицы. Вычтем из третьего столбца второй, из четвертого столбца второй, умноженный на четыре. На следующем шаге разделим третий столбец на три, а четвертый на минус пять. Так как третий и четвертый столбы стали одинаковыми, один из них может быть заменен на нулевой столбец (он линейно зависим, следовательно ранг матрицы меньше или равен трем). Из второго столбца вычтем новый третий. Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 4 & 6 & -15 \\ 1 & 7 & 10 & -25 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что существует минор второго порядка, не содержащий λ, отличный от нуля. Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим миноры третьего порядка, окаймляющие его. При этом сначала добавим первую строку и первый столбец.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так этот минор равен нулю, рассмотрим еще один возможный. Для этого к минору второго порядка добавим элементы второй строки и первого столбца.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(3\lambda - 6 + 6) = -3\lambda.$$

Итак, если $\lambda = 0$, то все окаймляющие определители третьего порядка нулевые, а следовательно, ранг матрицы равен двум.

Если $\lambda \neq 0$, то следовательно, нашелся определитель третьего порядка отличный от нуля, значит, ранг матрицы равен трем.

Общая теория систем линейных уравнений.

Лемма о дополнении линейно независимой части до базиса. Если одна линейно независимая система векторов является частью другой и не является в ней базисом, то ее можно превратить в базис, добавив несколько векторов из второй системы.

Доказательство.

Основной факт. В предположениях леммы к первой (линейно независимой) части всегда можно добавить некоторый вектор из второй системы, сохранив при этом условие линейной независимости. Итак, пусть $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_p$ (1) линейно независимая часть системы $\bar{b}_1, ..., \bar{b}_q$ (2), которая не является в ней базисом. Раз это не базис, значит, существует вектор $\bar{b}_k$ из (2), который линейно не выражается через (1). Докажем, что расширенная система $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_p, \bar{b}_k$ (3) -линейно независима.

Пусть $c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_p\bar{a}_p + c\bar{b}_k = \bar{0}$ и не все коэффициеты нулевые. Тогда обязательно $c \neq 0$ (в противном случае получаем линейную зависимость системы (1), то есть противоречие). Отсюда находим

$$\bar{b}_k = -\frac{c_1}{c}\bar{a}_1 - \frac{c_2}{c}\bar{a}_2 - ... - \frac{c_p}{c}\bar{a}_p.$$

Это противоречит выбору вектора $\bar{b}_k$. Итак, мы доказали линейную независимость системы (3), то есть доказали основной факт.

Окончание доказательства леммы.

Будем доказывать лемму "от противного". Предположим, что линейно независимую систему $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_p$ (1) дополнить до базиса нельзя.

Добавим к ней, используя основной факт, вектор $\bar{u}_1$ из системы (2) с сохранением линейной независимости. Новую систему $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_p, \bar{u}_1$ тоже нельзя дополнить до базиса. Значит, можно добавить еще один вектор $\bar{u}_2$. Систему $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_p, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ тоже дополнить до базиса нельзя. Значит, с ней можно поступить, как и раньше. В итоге мы получим бесконечную систему векторов из системы (2), в которой элементы не повторяются (в силу линейной независимости на каждом шаге). Так как в системе (2) конечное (q) число элементов, это дает противоречие и доказывает лемму.

Теорема Кронекера - Капелли. Критерий совместности систем.

Произвольная система линейных уравнений совместна (то есть имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг основной ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Пусть система уравнений, о которой идет речь в теореме, имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1q}x_q &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2q}x_q &= b_2 \\ .... & ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pq}x_q &= b_p \end{cases}, \qquad (*)$$

Обозначим через A и B основную и расширенную матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1q} \\ ... & .... & ... \\ a_{p1} & ... & a_{pr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1q} & |b_1 \\ ... & .... & ... & | \\ a_{p1} & ... & a_{pr} & |b_p \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q$ (1) столбцы основной матрицы, через $\bar{b}$ столбец свободных членов. Тогда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q, \bar{b}$ (2) это система столбцов матрицы B. Воспользуемся тем, что ранг системы (1) равен $rangA$, ранг системы (2)= $rangB$. Кроме того, из определений следует, что числа $x_1, ..., x_q$ удовлетворяют системе уравнений (*) тогда и только тогда, когда справедливо соотношение между столбцами:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_q\bar{a}_q = \bar{b}. \qquad (**)$$

Доказательство необходимости.

Предположим, что система уравнений (*) совместна. Но тогда из равенства (**) следует, что вектор b линейно зависит от системы (1) столбцов матрицы A. Все остальные векторы из расширенной системы (2) входят в систему (1), значит от нее линейно зависят. Поэтому система (2) линейно зависит от системы (1). Так как система (1) это часть системы (2), то система (1) линейно зависит от (2) по лемме о линейной зависимости части от целого. Значит, эти две системы эквивалентны и $rang(1) = rang(2)$. Следовательно, $rangA = rangB$.

Доказательство достаточности.

Предположим, что $rangA = rangB$. Обозначим через r это число. Тогда в ситеме (1) столбцов матрицы A есть базис из r элементов. Пусть $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r$ (3) этот базис. Тогда (3) -это часть системы (1), а значит и часть расширенной системы (2) столбцов B, причем это линейно независимая часть. Если эта часть в (2) не является базисом, то по последней лемме (о дополнении до базиса) ее можно превратить в базис этой системы (2), добавив несколько элементов. Итак, имеем $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r, \bar{u}_{r+1}, ..., \bar{u}_s$ -базис системы (2), причем $s > r$, но последнее неравенство невозможно, так как $s = rangB$, $r = rangA$, а по предположению эти числа равны. Итак мы доказали, что система $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r$ (3) это базис системы (2). Но система (3) зависит от (1) (как часть от целого), система (2) зависит от (3) (раз это базис). Значит, система (2) зависит от (1), в частности вектор $\bar{b}$ можно представить в виде линейной комбинации системы (1), то есть равенство (**) $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_q\bar{a}_q = \bar{b}$ выполняется для некоторых чисел $x_1, ..., x_q$. Раньше мы доказали, что это равносильно совместности системы уравнений $(*)$.

Критерий определенности систем уравнений.

Совместная система линейных уравнений имеет ровно одно решение, то есть является определенной тогда и только тогда, когда ранг ее матриц (основной и расширенной) равен количеству неизвестных.

Воспользуемся обозначениями из доказательства предыдущей теоремы. В этих обозначениях набор чисел $(x_1, ..., x_q)$ удовлетворяет системе $(*)$ тогда и только тогда, когда для него справедливо векторное равенство

$$x_1\bar{a_1} + x_2\bar{a_2} + \ldots + x_q\bar{a_q} = \bar{b}. \qquad (**)$$

Будем использовать этот основной факт.

Доказательство необходимости.

Предположим, что система уравнений $(*)$ имеет ровно одно решение. Докажем от противного, что ранг r матриц равен числу q неизвестных. Ясно, что неравенство $r > q$ невозможно. Поэтому если предположить, что $r \neq q$, то обязательно $r < q$. Это означает, что в системе столбцов, например, основной матрицы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q$ есть базис из $r < q$ элементов, то есть базис, в который попадут не все векторы. Значит, хотя бы один вектор этой системы линейно выражается через другие векторы, то есть равен некоторой линейной комбинации остальных векторов системы. По критерию линейной зависимости получаем линейную зависимость столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_q$. По определению это означает, что существуют числа $(z_1, ..., z_q)$ не все равные нулю, такие, что $z_1\bar{a_1} + z_2\bar{a_2} + \ldots + z_q\bar{a_q} = \bar{0}$. Пусть $(x_1, ..., x_q)$ какое-нибудь решение нашей системы уравнений, то есть $x_1\bar{a_1}+x_2\bar{a_2}+\ldots+x_q\bar{a_q} = \bar{b}$.

Сложив это равенство с последним из полученных, получаем

$$(x_1 + z_1)\bar{a_1} + (x_2 + z_2)\bar{a_2} + \ldots + (x_q + z_q)\bar{a}_q = \bar{b}$$

но это означает, что набор чисел $y_1 = x_1+z_1, y_2 = x_2+z_2, \ldots, y_q = x_q+z_q$ дает тоже решение нашей системы, причем отличное от первоначально взятого. Это противоречит определенности системы и, следовательно, доказывает равенство $r = q$.

Доказательство достаточности.

Предположим, что ранг r основной и расширенной матриц равен q числу неизвестных. Докажем (опять от противного) определенность системы уравнений. Итак, предположим, что есть два разных решения у системы:

$$(x_1, \ldots, x_q) \neq (y_1, \ldots, y_q).$$

Тогда справедливы два равенства:

$x_1\bar{a_1} + x_2\bar{a_2} + \ldots + x_q\bar{a_q} = \bar{b}$

$y_1\bar{a_1} + y_2\bar{a_2} + \ldots + y_q\bar{a_q} = \bar{b}.$

Вычтем из второго первое:

$(y_1 - x_1)\bar{a_1} + (y_2 - x_2)\bar{a_2} + \ldots + (y_q - x_q)\bar{a_q} = \bar{0}$

В этом равенстве не все коэффициенты $z_1 = y_1 - x_1, \ldots, z_q = y_q - x_q$ равны нулю, по выбору решений. Значит, столбцы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_q$ линейно зависимы. Значит, в базис входят не все векторы. Поэтому $r < q$, что противоречит условию задачи и доказывает теорему.

Прежде чем исследовать произвольные системы уравнений разберем сначала случай однородных систем более подробно, так как общий случай к ним легко сводится.

Теорема об основных свойствах однородных систем.

(1) Сумма любых двух решений однородной системы линейных уравнений - это решение той же системы.

(2) При умножении любого решения однородной системы на любое число мы снова получаем решение той же системы.

Доказательство.

Будем использовать обозначения последних двух теорем. Если $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_q)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_q)$ два решения однородной системы (*), то

$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_q\bar{a}_q = \bar{0}$

$y_1\bar{a}_1 + y_2\bar{a}_2 + \ldots + y_q\bar{a}_q = \bar{0}$. (вектор $\bar{b} = \bar{0}$, так как система однородная). Сложим эти два равенства, получим

$$(x_1 + y_1)\bar{a}_1 + (x_2 + y_2)\bar{a}_2 + \ldots + (x_q + y_q)\bar{a}_q = \bar{0}.$$

Это означает, что $\bar{x} + \bar{y}$ решение той же системы (*). Теперь умножив, например, первое из написанных равенств на число c, получим:

$cx_1\bar{a}_1 + cx_2\bar{a}_2 + \ldots + cx_q\bar{a}_q = \bar{0}$.

Это доказывает, что вместе с вектором $\bar{x}$ вектор $c\bar{x}$ обязан быть решением системы (*).

Полученная теорема показывает, что если однородная система имеет хотя бы одно ненулевое решение, то этих решений бесконечно много. Чтобы описать это бесконечное множество в каких-то конечных терминах, нам понадобится еще одно понятие.

Определение фундаментальной системы решений (ФСР).

Фундаментальной системой решений для неопределенной однородной системы уравнений называется такой линейно независимый набор решений, через который линейно выражается любое решение этой системы.

Теорема о ФСР. Любая неопределенная однородная система линейных уравнений имеет фундаментальные системы решений. Количество элементов в любой из них равно $q-r$, где q -число неизвестных, r ранг матрицы этой системы.

Доказательство .

Рассмотрим однородную неопределенную систему уравнений. Из критерия определенности следует, что ранг матрицы r меньше числа неизвестных q. Выберем какой-нибудь базисный минор D в основной матрице. Будем предполагать для простоты обозначений, что он находиться в левом верхнем углу (иначе мы можем поменять местами уравнения и переобозначить номера неизвестных и снова добиться того же).

При этом предположении первые r строчек основной матрицы составляют в ней базис. Значит, остальные строчки являются их линейными комбинациями. Поэтому последние $p-r$ уравнений это следствия первых r, и мы их выбросим, не меняя множества решений. Запишем оставшуюся систему уравнений, перенеся последние $q-r$ слагаемых в правую часть:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r &= -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1q}x_q \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r &= -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2q}x_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad\qquad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{pr}x_r &= -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rq}x_q \end{cases}, \qquad (1)$$

Переменные $y_1 = x_{r+1}, y_2 = x_{r+2}, \ldots, y_s = x_{r+s}$, стоящие в правой части можно выбрать в качестве параметров, потому что каждый раз, подставляя вместо них конкретные числа, мы превращаем систему (1) в систему из r уравнений с r неизвестными, которая однозначно решается по формулам Крамера, так как ее определитель это базисный минор D, который отличен от нуля.

Для того, чтобы получить одну из ФСР, поступим следующим образом. Каждому из параметров y_k сопоставим некоторый вектор $\bar{f}_k$ по следующему правилу: $\bar{f}_k = (\underbrace{*, *, ..., *}_{r}, 0, ..., \underbrace{1}_{r+k}, ...0)$, на $r+k$-м месте в этом векторе поставим единицу, на остальных последних $s-1$ местах поставим нули, а первые r координат найдем из системы (1), подставив в нее выбранные значения параметров. То есть подставляем $y_k = 1$, $y_i = 0$ при $i \neq k$. По построению векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_s$ это решения нашей однородной системы. Докажем, что они составляют ФСР.

Доказательство линейной независимости.

Предположим, что $c_1\bar{f}_1 + c_2\bar{f}_2 + ... + c_s\bar{f}_s = \bar{0}$. Тогда

$$(*, *, ..., *, c_1, ..., ...0) + (*, *, ..., *, 0, c_2, ..., ...0) + ... + (*, *, ..., *, 0, ..., c_s) =$$

$$= (*, *, ..., *, c_1, c_2, ..., c_s) = \bar{0}.$$

Значит, последние s чисел этой строки нулевые, то есть $c_1 = c_2 = ... = c_s$. Это доказывает (по определению) линейную независимость.

Доказательство полноты.

Пусть $\bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_q)$ произвольное решение нашей однородной системы. Переобозначим $c_1 = u_{r+1}, c_2 = u_{r+2}, ..., c_s = u_{r+s}$. Обозначим через $\bar{v}$ вектор $\bar{v} = c_1\bar{f}_1 + c_2\bar{f}_2 + ... + c_s\bar{f}_s$. Докажем, что $\bar{u} = \bar{v}$ (именно это нам и нужно). Для этого рассмотрим разность $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}$. Из построения следует, что $\bar{w} = (\underbrace{*, *, ..., *}_{r}, \underbrace{0, ..., ...0}_{s})$ где * стоят на r местах, а нули s на местах. Из теоремы о свойствах однородных систем следует, что $\bar{w}$ - это решение той же системы (1). Чтобы получить первые r чисел, входящие в $\bar{w}$, мы должны вместо параметров

$y_1, ..., y_s$ в систему уравнений (1) подставить нули. Но тогда формулы Крамера дадут нулевые значения для $x_1, ..., x_r$, так как в правых частях стоят нули. Итак, мы получили, что $\bar{w} = \bar{0}$, то есть доказали, что $\bar{u} = c_1\bar{f}_1 + c_2\bar{f}_2 + ... + c_s\bar{f}_s$.

Доказательство второй части теоремы.

Итак, пусть $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_t$ какая-то другая ФСР. Из определения ФСР следует, что эти две системы линейно эквивалентны $(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_s) \sim (\bar{g}_1, ..., \bar{g}_t)$. Значит, они имеют одинаковый ранг. А так как они линейно независимы, то ранг равен количеству элементов, то есть $t = s = q - r$.

Теорема о связи решений однородных и неоднородных систем и об общем решении неоднородной системы.

Рассмотрим произвольную неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1q}x_q &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2q}x_q &= b_2 \\ \qquad .... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pq}x_q &= b_p \end{cases} \qquad (1)$$

Назовем присоединенной однородной системой к системе (1) систему уравнений с этой же самой левой частью и нулевой правой

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1q}y_q &= 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2q}y_q &= 0 \\ \qquad .... \\ a_{p1}y_1 + a_{p2}y_2 + ... + a_{pq}y_q &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

1) Разность любых двух решений неоднородной системы (1) является решением присоединенной системы (2).

2) Сумма любого решения неоднородной системы (1) и любого решения присоединенной однородной системы (2) является решением

исходной неоднородной системы (1).

3) Пусть $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ...\bar{f}_s$ некоторая ФСР присоединенной системы (2) (где $s = q - r$, r - ранг основной матрицы). Пусть $\bar{f}_0$ некоторое фиксированное решение неоднородной системы (1). Тогда всякое решение $\bar{f}$ неоднородной системы (1) ровно одним способом можно записать в виде суммы

$$\bar{f} = \bar{f}_0 + c_1\bar{f}_1 + c_2\bar{f}_2 + ... + c_s\bar{f}_s.$$

Используя прежние обозначения, получаем, что система (1) эквивалентна векторному равенству

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_q\bar{a}_q = \bar{b}, \tag{$*$}$$

а система (2) эквивалентна равенству

$$y_1\bar{a}_1 + y_2\bar{a}_2 + \ldots + y_q\bar{a}_q = \bar{0}, \tag{$**$}$$

<u>Доказательство пункта 1.</u>

Пусть $\bar{x} = (x_1, ..., x_q)$, $\bar{z} = (z_1, ..., z_q)$ два решения системы (1). Тогда:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_q\bar{a}_q = \bar{b},$$

$$z_1\bar{a}_1 + z_2\bar{a}_2 + \ldots + z_q\bar{a}_q = \bar{b}.$$

Вычтя, получаем:

$$(x_1 - z_1)\bar{a}_1 + (x_2 - z_2)\bar{a}_2 + \ldots + (x_q - z_q)\bar{a}_q = \bar{0},$$

значит, $\bar{x} - \bar{z}$ - это решение системы (2).

<u>Доказательство пункта 2.</u>

Пусть решение $\bar{x} = (x_1, ..., x_q)$ решение (1), $\bar{y} = (y_1, ..., y_q)$ - решение (2). Тогда

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_q\bar{a}_q = \bar{b},$$

$$y_1\bar{a_1} + y_2\bar{a_2} + \ldots + y_q\bar{a_q} = \bar{0}.$$

Сложив, получим

$$(y_1 + x_1)\bar{a_1} + (y_2 + x_2)\bar{a_2} + \ldots + (y_q + x_q)\bar{a_q} = \bar{b}$$

Значит, $\bar{x} + \bar{y}$ - решение системы (1).

<u>Доказательство пункта 3.</u>

Пусть $\bar{f}_1, ..., \bar{f}_s$ ФСР для системы (2), $\bar{f}_0$ некоторое фиксированное решение системы (1). Пусть $\bar{f}$ произвольное решение системы (1). Тогда по первой части теоремы разность $\bar{g} = \bar{f} - \bar{f}_0$ это решение системы (2). По определению ФСР существуют числа $c_1, ..., c_s$, такие что $\bar{g} = \bar{f} - \bar{f}_0 = c_1\bar{f}_1 + c_2\bar{f}_2 + ... + c_s\bar{f}_s$. Перенеся $\bar{f}_0$ в правую часть, получим требуемое выражение. Единственность коэффициентов $c_1, ..., c_s$ легко получить из линейной независимости ФСР.

Теорема о ранге произведения матриц.

1) Ранг произведения двух матриц не больше ранга каждого из сомножителей.

2) Если один из сомножителей невырожденная (с ненулевым определителем) квадратная матрица, то ранг произведения равен рангу другого сомножителя.

Доказательство.

Пусть A, B, C три матрицы, $C = AB$, тогда $c_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\gamma=1}^{q} a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}$, если A размера $p \times q$, B размера $q \times t$, тогда C размера $p \times t$. Фиксируем в этом равенстве индекс β, меняем α:

$$\begin{cases} c_{1\beta} &= \sum\limits_{\gamma=1}^{q} a_{1\gamma}b_{\gamma\beta} \\ c_{2\beta} &= \sum\limits_{\gamma=1}^{q} a_{2\gamma}b_{\gamma\beta} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ c_{p\beta} &= \sum\limits_{\gamma=1}^{q} a_{p\gamma}b_{\gamma\beta} \end{cases}.$$

Отсюда следует, что если через $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_q$ обозначить столбцы матрицы A, через $\bar{c}_1, ..., \bar{c}_q$ столбцы матрицы C, то

$$c_\beta = \sum_{\gamma=1}^{q} \bar{a}_\gamma b_{\gamma\beta} = b_{1\beta}\bar{a}_1 + b_{2\beta}\bar{a}_2 + ... + b_{q\beta}\bar{a}_q$$

Это означает, что система столбцов матрицы C линейно зависит от системы столбцов матрицы A. По лемме "о ранге системы, линейно зависящей от другой" из этого факта следует, что ранг системы столбцов C не больше, чем ранг системы столбцов A, то есть $rangC \le rangA$.

Докажем теперь, что $rangC \le rangB$. Для этого воспользуемся тем, что при транспонировании ранг не меняется:

$$rangC = rangC^t = rang(AB)^t = rang(B^t A^t) \le rangB^t = rangB$$

.

<u>Доказательство второй части.</u>

Предположим, что A - невырожденная матрица (аналогично для B). Тогда существует A^{-1}. Поэтому $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB)$. Значит, $rangB \le rang(AB) = rangC$. Неравенство $rangC \le rangB$ мы доказали в первой части, значит, $rangB = rangC$.

Пример:

Рассмотрим задачу на нахождение общего решения неоднородной системы уравнений. Пусть задана система:

$$\begin{cases} 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 3 \\ 4x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = 1 \\ 8x_1 & -6x_2 & -x_3 & -5x_4 & = 9 \\ 7x_1 & -3x_2 & +7x_3 & +17x_4 & = \lambda \end{cases}$$

Надо исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значений параметра λ.

Шаг 1. Определим с помощью метода элементарных преобразований ранги основной и расширенной матриц. Для того, чтобы одновременно это сделать, а также получить возможный вид решений, если они существуют, будем делать элементарные преобразования в расширенной матрице **только** со строками.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & \lambda-2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 10 & 26 & -6 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right).$$

На данном шаге видно, что если параметр λ отличен от нуля, то, по теореме Кронекера Капелли, система несовместна, так как ранг расширенной матрицы больше ранга основной матрицы.

Шаг 2. Если $\lambda = 0$, то система совместна. Продолжим преобразование расширенной матрицы для нахождения ранга, считая параметр равным нулю. Имеем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \end{array}\right)$$

Шаг 3. Итак ранги основной и расширенной матриц равны двум, система неопределена, выберем свободные переменные. Так как определитель, составленный из коэффициентов при первой и второй переменных, отличен от нуля, оставим их в левой части, а x_3 и x_4 перенесем в правую часть. Получим

$$\begin{cases} x_1 \ -x_2 \ = \ x_3 + 3x_4 + 2 \\ \qquad 2x_2 \ = \ -7x_3 - 19x_4 - 7 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения вторую переменную, подставим ее значение в первое уравнение, получим вид общего решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \ = \ (-5x_3 - 13x_4 - 3)/2 \\ x_2 \ = \ (-7x_3 - 19x_4 - 7)/2 \end{cases}$$

В данном конспекте представлена лишь часть университетского курса по высшей алгебре, поэтому целесообразно обращение к таким известным учебникам, как:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгбры;

2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре;

3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра;

4. Боревич З.И. Определители и матрицы.

Чтобы научиться применять полученные знания на практике, необходимо прорешать задачи по данным разделам. Их можно найти в следующих задачниках:

1. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре;

2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре;

3. Демин И.В. Задачи по алгебре. Практикум для студентов механико-математического факультета. 1 семестр.