МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

В.В.КУЛИКОВ

П Р Е Д Е Л Ы
РАЦИОНАЛЬНЫХ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ
ФУНКЦИЙ

Программированное учебное пособие

Рассмотрено и одобрено редакционным советом института
12 января 1972 года

Куйбышев 1972

Пособие предназначено для студентов первого курса. Оно представляет собой разветвленную обучающую программу, рассчитанную на два практических занятия по теме " Пределы рациональных и иррациональных функций " и на два домашних задания.

При изложении материала применяются методы программированного и проблемного обучения.

ПРЕДЕЛЫ
РАЦИОНАЛЬНЫХ И
ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ
ФУНКЦИЙ

Программированное учебное пособие

Отв. редактор - доц. Г.Д. Трошин

Редактор - И.С.Колышева
Тех.ред. - Н.М.Каленюк
Корректор - Л.В.Сидорова

Подписано в печать IO/X-72 г. ЕО 00288
Формат 60х84 I/I6. Объем 4 п.л.
Тираж I500 экз. Цена 20 коп.

Куйбышевский авиационный институт
им. С.П.Королева, г.Куйбышев,улица
Молодогвардейская, I5I.

Ротапринтный цех типографии им.Мяги,
ул.Венцека, 60. Заказ № 8489.

Цель пособия - научить студентов вычислять пределы рациональных и иррациональных функций, используя теоремы о пределах и свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин. Для работы с пособием требуется знать определение предела функции, определения бесконечно малой и бесконечно большой величин, теоремы о пределах (о пределе алгебраической суммы, произведения, частного, сложной функции).

Пособие нельзя читать как обычную книгу. Изучив часть материала, нужно решить задачу или ответить на вопрос и перейти на ту страницу, номер которой указан после одного из предлагаемых ответов.

В процессе работы учащиеся должны неуклонно выполнять все указания. Это условие является необходимым для достижения намеченной цели.

Занятие I

Пределы рациональных и иррациональных функций при $x \to a$

§ I. Необходимые сведения из теории

Какая функция называется бесконечно малой величиной?

Что из себя представляет алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых?

Какой величиной является произведение ограниченной функции на бесконечно малую?

Какова связь между бесконечно малой и бесконечно большой величинами?

Сформулируйте теорему о пределе алгебраической суммы функций.

Как формулируется теорема о пределе произведения?

Дайте формулировку теоремы о пределе частного двух функций.

Попробуйте ответить на эти вопросы. В правильности своих ответов вы можете убедиться, прочитав внимательно стр. 4.

I. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. (или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

3. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

4. Если при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) $\alpha(x)$ - бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая величина; если $f(x)$ - бесконечно большая величина, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая величина.

5. Предел алгебраической суммы определенного числа функций, каждая из которых имеет конечный предел, равен алгебраической сумме пределов этих функций.

6. Предел произведения определенного числа функций, имеющих конечные пределы, равен произведению пределов этих функций.

7. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если эти пределы конечны и предел знаменателя отличен от нуля.

Знание этих фактов необходимо для успешной работы. Вам нужно их хорошо запомнить.

Переходите на стр. 5а.

а) В дальнейшем мы напомним и другие теоретические положения, на которые будем опираться при вычислении пределов.

Сначала ответьте на такой вопрос.

Будет ли $\frac{1}{1000000}$ - бесконечно малой величиной?

Ответы: I. Да . стр.6в

2. Нет. стр.8 г

Если вы считаете верным первый ответ, то смотрите стр.6в; если второй, то переходите на стр. 8 г.

б) Неправильно. Теорему о пределе частного для отыскания $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ применить нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)$ = (по теореме о пределе разности) $= \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2 = 2-2 = 0.$

Чтобы решить задачу, рассмотрим обратную величину $\frac{I}{\left(\frac{x}{x-2}\right)}$, т.е. $\frac{x-2}{x}$, и найдем $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x}$. Здесь уже применима теорема о пределе частного

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что при $x\to 2$ $\frac{x-2}{x}$ есть бесконечно малая величина. Но величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая $_I$(см.стр.4).

Значит , $\frac{I}{\left(\frac{x-2}{x}\right)} = \frac{x}{x-2}$ - бесконечно большая величина при $x\to 2$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2} = \infty$.

Теперь попробуйте найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}.$$

Свое решение проверьте на стр. I2 б.

а) Неверно.

Если вы представили разность в виде дроби, то начало вашего решения было правильным. Проверьте еще раз свои вычисления и вернитесь к ответам на стр. I7 в.

б) Неправильно.

Однако вы верно подметили, что предел знаменателя равен нулю. А чему равен предел числителя? Найдя его, вы почувствуете, что для решения задачи нужно произвести какое-то тождественное преобразование.

Вычислив предел, вернитесь на стр. I2 а.
Если вам требуется помощь, то обратитесь к стр. 8 б.

в) Неверно.

Давайте вспомним определение бесконечно малой величины. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ ($\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).
Отсюда следует, что если предел некоторой величины не равен нулю, то она не является бесконечно малой.
Кроме того, известно, что предел постоянной равен самой постоянной, т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} C = C$.

Найдите $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{1}{1000000}$ и, сделав нужный вывод, перейдите на стр. 8 г.

г) Сначала найдите предел числителя и предел знаменателя. Затем для выделения в знаменателе множителя $(x - 2)$ примените следствие из теоремы Безу (см. Приложение I на стр. 60). Чтобы выделить множитель $(x - 2)$ в числителе, воспользуйтесь формулой

$(a - в)(a^4 + a^3в + a^2в^2 + ав^3 + в^4) = a^5 - в^5$, положив

$a = \sqrt[5]{x}$, $в = \sqrt[5]{2}$.

Вернитесь на стр. 2I б.

Хорошо. Проверьте свои решения.

I) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2+4}{x^4-x^2-1}$

Установив, что дробно-рациональная функция определена в точке $x=\sqrt{3}$, вычисляем предел непосредственной подстановкой в выражение функции значения $x=\sqrt{3}$.

Т.о., здесь мы пользуемся правилом: если дробно-рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ определена в точке x = а, то её предел при $x \to$ а равен значению функции в точке а.

(доказательство приведено на стр. I3)

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2+4}{x^4-x^2-1} = \frac{(\sqrt{3})^2+4}{(\sqrt{3})^4-(\sqrt{3})^2-1} = \frac{7}{9-3-1} = \frac{7}{5}.$$

Этот предел можно было найти, применяя теоремы о пределах алгебраической суммы, произведения и частного.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Т.к. функция не определена в точке x = I, то приведенным выше правилом воспользоваться нельзя. Теорема о пределе частного также не применима, т.к. предел знаменателя равен нулю. Поскольку и числитель стремится к нулю, выделяем и в числителе и в знаменателе множитель x - I и сокращаем на него дробь

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-\mathrm{I})^2}{(x-\mathrm{I})\cdot(x+\mathrm{I})\cdot x} =$$

(Почему можно сократить на x - I ?) $= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x+\mathrm{I})\cdot x} =$

(На каком основании ?) $= \dfrac{\mathrm{I}-\mathrm{I}}{2} = 0.$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ = (Здесь, как и в предыдущей задаче, имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{6(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})} =$

$= \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2\cdot(4x^2+2x+1)}{6\cdot(x-\frac{1}{3})} = \dfrac{2(1+1+1)}{6(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})} = 6.$

Приступайте к выполнению 2-й части домашнего задания.

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

Решив эти задачи, переходите на страницу, номер которой равен сумме ваших ответов плюс $3\frac{3}{4}$.

а) <u>Зерно.</u> Теорему о пределе частного применить нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю : $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)$ = (по теореме о пределе разности) = $\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2 = 2 - 2 = 0$.

Как же найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$?

Давайте рассмотрим обратную величину $\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{x-2}\right)}$, т.е. $\dfrac{x-2}{x}$, и найдем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x}$.

Здесь можно применить теорему о пределе частного.

Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x}$, а затем, пользуясь одной из теорем, приведенных на стр.4, определите, какой величиной является функция $\dfrac{1}{\left(\dfrac{x-2}{x}\right)} = \dfrac{x}{x-2}$ при $x \to 2$.

Решение проверьте на стр.12 в.

б) Разложите числитель на множители, сократите дробь и найдите предел.

Затем сравните свой ответ с приведенными на стр. 12 а.

в) <u>Не совсем так.</u> Вы допустили ошибку в первой задаче, когда производили вычитание дробей. Проверьте свои вычисления и вернитесь на стр. 21 б.

г) <u>Правильно.</u>

$\dfrac{1}{1\ 000\ 000}$ не является бесконечно малой величиной , т.к.

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{1}{1\ 000000} = \frac{1}{1\ 000000} \neq 0$$

(ибо предел постоянной равен самой постоянной, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} C = C$).

Переходите к стр.9.

§ 2. Вычисление предела рациональной функции при $x \to a$.

Определение. Функция называется рациональной, если её значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число сложений, вычитаний, умножений и делений.

Например, $y = \dfrac{5x^3 + \frac{1}{x} - \sqrt{3}}{\frac{1}{x^2} - 2} - 4x.$

С помощью тождественных преобразований всякую рациональную функцию $R(x)$ можно представить в виде дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$ (n, m - целые неотрицательные числа).

В частном случае, когда $Q(x) = C = const$, функция $R(x)$ представляет собой многочлен.

Займемся выяснением вопроса как вычислить предел любой рациональной функции, когда $x \to a$, где a - действительное число.

Начнем с такого примера.

Найти $\lim\limits_{x \to 3}\left(2x - \dfrac{x^2}{x+1}\right)$.

Здесь функция представляет собой разность двух функций. Применим теорему о пределе алгебраической суммы

$$\lim_{x \to 3}\left(2x - \frac{x^2}{x+1}\right) = \lim_{x \to 3} 2x - \lim_{x \to 3}\frac{x^2}{x+1}.$$

А применима ли эта теорема?

Да, применима, т.к. каждое из слагаемых имеет конечный предел. Докажем это.

$\lim\limits_{x \to 3} 2x =$ (по теореме о пределе произведения)

$= \lim\limits_{x \to 3} 2 \cdot \lim\limits_{x \to 3} x = 2 \cdot 3 = 6$, т.к. предел постоянной равен самой постоянной, а $\lim\limits_{x \to a} x = a$ (на это указывает запись $x \to a$).

Для вычисления $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2}{x+1}$ попробуем применить теорему о пределе частного.

Переходите на стр. 10 а.

а) Для этого найдем предел числителя и предел знаменателя:

$\lim\limits_{x \to 3} x^2 =$ (по теореме о пределе произведения)

$$= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x = 3 \cdot 3 = 9 ,$$

$\lim\limits_{x \to 3} (x + 1) =$ (по теореме о пределе суммы) $=$

$= \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 1 = 3 + 1 = 4 .$

Т.к. числитель и знаменатель имеют конечные пределы и предел знаменателя не равен 0, то теорема о пределе частного применима.

Значит, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 3} x^2}{\lim\limits_{x \to 3} (x+1)} = \dfrac{9}{4}$.

Итак, $\lim\limits_{x \to 3} \left(2x - \dfrac{x^2}{x+1} \right) = \lim\limits_{x \to 3} 2x - \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x+1} = 6 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{15}{4}$

Теперь самостоятельно найдите $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2}$.

Можно ли здесь применить теорему о пределе частного ?

Ответы :
1. Можно стр. 5 б .
2. Нельзя стр. 8 а .

б) Вы допустили ошибку при разложении числителя на множители.

Проверьте свои вычисления и вернитесь к ответам на стр.15 а.

в) Неверно. Здесь нельзя применить теорему о пределе частного, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Поскольку и числитель стремится к нулю, ничего не дает и рассмотрение обратной дроби.

Для решения задачи разложите числитель на множители и сократите дробь.

Найдя предел, вернитесь к ответам на стр. 12 а.

а) Неверно.

Очевидно вы без особых затруднений выделили в знаменателе множитель x - I. А вот для выделения такого множителя в числителе нужно было умножить числитель и знаменатель дроби не на $(\sqrt[3]{x} + 1)$, а на $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$ и затем воспользоваться известной формулой $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Найдите ещё раз $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ и на стр. 2I а выберите нужный ответ.

б) Не совсем так.

Вы верно определили, что при $n = 2$ $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{27x^3 + 1}{(3x + 1)^n} = \infty$.

Но разве только при $n = 2$ функция $\frac{27x^3+1}{(3x+1)^n}$ является бесконечно большой величиной при $x \to -\frac{1}{3}$?

Подумайте ещё. Получив более полный ответ, вернитесь на стр. I7 б.

в) Правильно.

Сначала находим предел числителя и предел знаменателя:

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 6) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0,$

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 12x + 20) = 2^2 - 12 \cdot 2 + 20 = 0.$ Эти пределы мы нашли, подставляя в выражение функции вместо x его предельное значение 2. Значит, нам нужно раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разлагая числитель и знаменатель на множители (для этого потребуются корни числителя и знаменателя) и сокращая дробь на $x - 2$, получим $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} =$

(т.к $x \to 2$, но $x \neq 2$, то $x - 2 \neq 0$) $= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-3}{x-10} =$

(применяем теоремы о пределах разности и частного или правило, указанное на стр. I2 а) $= \frac{2 - 3}{2 - 10} = \frac{1}{8}$.

Переходите на стр. I5 а.

а) Итак, мы установили, что если дробно- рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ определена в точке x = а, то её предел при $x \to$ а равен значению функции в точке а.

Например, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{2x^3+3} = \frac{1^2-1-6}{2\cdot 1^3+3} = -\frac{6}{5}$, так как функция определена в точке x = I.

Теперь найдите самостоятельно $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

Решив задачу, сравните свой ответ с приведенными ниже (среди них один верный).

Ответы:		
	I. ∞	стр. 6 б.
	2. 6	стр.I6 б.
	3. 0	стр.I0 в.

б) Для вычисления $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}$ находим предел числителя и предел знаменателя: $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$ = (по теореме о пределе суммы) = $\lim\limits_{x\to 1}x + \lim\limits_{x\to 1}2 = 1+2=3$,

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1=1-1=0.$$

Значит, теорема о пределе частного не применима. Найдем предел обратной величины, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)} = \frac{0}{3} = 0$.

Отсюда следует, что $\frac{x-1}{x+2}$ - бесконечно малая при $x \to$ I. Тогда обратная ей величина $\frac{x+2}{x-1}$ - бесконечно большая.

Значит, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1} = \infty$.

Переходите на стр. I3.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x}$ = (по теореме о пределе частного) = $\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}x} = \frac{0}{2} = 0$.

Значит, при $x \to 2$ функция $\frac{x-2}{x}$ есть бесконечно малая. Но величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая. Поэтому $\frac{1}{\left(\frac{x-2}{x}\right)} = \frac{x}{x-2}$ - бесконечно большая величина при $x \to 2$. Это записывают так:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2} = \infty.$$

Переходите на стр. I3 .

Пользуясь теоремами о пределах, можно обосновать правило нахождения предела многочлена (целой рациональной функции) при $x \to a$.

Сначала найдем $\lim\limits_{x \to a}(x^5 - 3x^2 + \sqrt{2}x - 1)$, где а - любое действительное число.

$\lim\limits_{x \to a}(x^5 - 3x^2 + \sqrt{2}x - 1)$ = (по теореме о пределе алгебраической суммы)

$$= \lim_{x \to a} x^5 - \lim_{x \to a} 3x^2 + \lim_{x \to a} \sqrt{2}x - \lim_{x \to a} 1 =$$

= (по теореме о пределе произведения и по её следствию :

$\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$, где n - натуральное число)

$$= \left[\lim_{x \to a} x\right]^5 - \lim_{x \to a} 3 \cdot \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x + \sqrt{2} \cdot \lim_{x \to a} x - 1 =$$

$$= a^5 - 3a^2 + \sqrt{2}a - 1 .$$

Итак, $\lim\limits_{x \to a}(x^5 - 3x^2 + \sqrt{2}x - 1) = a^5 - 3a^2 + \sqrt{2}a - 1$.

Можно заметить, что значение многочлена $x^5 - 3x^2 + \sqrt{2}x - 1$ при x = а также равно $a^5 - 3a^2 + \sqrt{2}a - 1$.

Подобное совпадение можно было усмотреть и раньше в процессе решения задач. Нельзя ли это обобщить на любой многочлен ?

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным при решении примера, можно доказать, что если $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$,

то $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

Таким образом, чтобы найти предел многочлена при $x \to a$ (а- действительное число), достаточно в выражение функции (т.е. многочлена) подставить вместо аргумента x его предельное значение а.

Это правило отыскания предела можно распространить и на дробно-рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$, если только она определена при $x =$ а, т.е. если $Q(a) \neq 0$.

В самом деле, если $Q(a) \neq 0$, то по теореме о пределе частного имеем:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} P(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} .$$

Переходите к стр. I2 а.

Правильно.

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Данная иррациональная функция представляет дробь. Т.к.предел знаменателя равен нулю при $x\to 5$, то теорему о пределе частного применить нельзя.

Находим предел числителя:

$\lim\limits_{x\to 5}(\sqrt{x-1}-2)$ = (По теореме о пределе разности)

$=\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1}-\lim\limits_{x\to 5}2=\sqrt{\lim\limits_{x\to 5}(x-1)}-2=\sqrt{5-1}-2=0$ (согласно формуле,приведенной на стр. I9)

Поскольку знаменатель и числитель дроби стремятся к нулю,необходимы дополнительные преобразования

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

= (сокращаем на $x-5$,что допустимо, т.к. при $x\to 5$ $x-5\neq 0$) $=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}$ = (какие теоремы о пределах применяем ?) $=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)(\sqrt{x^2+1}+1)}=$$

(Почему мы не можем обойтись без этих преобразований ?)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=$$

(какие теоремы о пределах применяем ?) $=\dfrac{8}{2}=4.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ = (Здесь для выделения в знаменателе множителя, стремящегося к нулю,воспользуемся формулой $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, положив $a=\sqrt[3]{1+x}$, а $b=\sqrt[3]{1-x}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})\cdot\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}{1+x-1+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]=$$

$$=2\left(\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}(1+x)^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}(1-x^2)}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}(1-x)^2}\right)=2\cdot 3=6.$$

Теперь вам осталось выполнить последнюю часть домашнего задания.

Переходите на стр. 2I б.

а)

Решение последних двух задач, когда мы раскрывали неопределенность вида $\frac{0}{0}$, приводит нас к следующему правилу. Чтобы найти предел дробно-рациональной функции, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю при $x \to a$, надо и в числителе и в знаменателе выделить множитель $x - a$, сократить дробь на него и перейти к пределу.

Это правило основывается на следствии из теоремы Безу (доказательство теоремы и следствие приведены на стр. 60), согласно которому, если $x = a$ есть корень многочлена $P(x)$, т.е. $P(a) = 0$, то $P(x)$ делится без остатка на $x - a$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^3 + 5x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 + x + 1}$.

Т.к. числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \to -1$, то имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Замечая, что $x = -1$ есть корень обоих многочленов, выделяем и в числителе и в знаменателе множитель $x + 1$. Для этого каждый многочлен разделим на $x + 1$:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+5x^2+x-1 & x+1 \\ \underline{3x^3+3x^2} & \overline{3x^2+2x-1} \\ \quad 2x^2+x-1 & \\ \quad \underline{2x^2+2x} & \\ \qquad -x-1 & \\ \qquad \underline{-x-1} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4+x^3+x+1 & x+1 \\ \underline{x^4+x^3} & \overline{x^3+1} \\ \qquad x+1 & \\ \qquad \underline{x+1} & \\ \qquad\ 0 & \end{array}$$

Итак, $$\lim_{x \to -1} \frac{3x^3+5x^2+x-1}{x^4+x^3+x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(3x^2+2x-1)}{(x+1)(x^3+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-1}{x^3+1}.$$

Завершите решение примера и сравните свой ответ с приведенными ниже. Ответы: 1. $-4/9$ стр. 10 б

2. $-4/3$ стр. 20 б

б) Не совсем так.

Ваша ошибка состояла в том, что для получения разности кубов в числителе нужно было числитель и знаменатель умножить на $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$, а не на $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)$.

Исправив ошибку, вернитесь к ответам на стр. 21 а.

а) __Неверно.__

Давайте разберемся . $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ (Почему здесь можно сокращать на x ?)

Можно ли здесь применить теорему о пределе частного?

Завершите решение задачи и вернитесь на стр. 18 а.

б) __Правильно.__ Прочитайте внимательно объяснение.

Т.к. функция $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ не определена при $x = 3$, то её предел при $x \to 3$ нельзя найти при помощи указанного выше правила, т.е. путем подстановки значения $x = 3$ в выражение функции . Теорему о пределе частного применить здесь также нельзя, т.к. предел знаменателя равен 0.

Найдем предел числителя :

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9) = 3^2 - 9 = 0$. Таким образом, при $x \to 3$ мы имеем отношение двух бесконечно малых величин, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя.

Дробь, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю, называется неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Нахождение предела такой дроби (или установление его отсутствия) называется раскрытием этой неопределенности.

Для решения задачи сделаем тождественное преобразование : $\dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3.$

Это преобразование справедливо при всех значениях $x \neq 3$. Но нас и интересует изменение функции, когда x стремится к 3 , но $x \neq 3$ (согласно определению предела функции). Поэтому можно записать :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3 + 3 = 6.$$

Переходите к стр. 17 а.

а) Решите задачу.

Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Ответы : 1. $\frac{1}{8}$ стр. 11 в.

2. Число, отличное от $\frac{1}{8}$. стр. 20 в.

Если вам нужны указания к решению задачи, то смотрите стр. 25 б.

б) Задача.

При каких натуральных значениях n

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3+1}{(3x+1)^n}=\infty$?

Ответы: 1. $n = 1$ стр. 18 б.

2. $n = 2$ стр. 11 б.

3. $n \geq 2$ стр. 22.

в) Вы правы. Для нахождения $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-9}}\right)$ теорему о пределе разности применить нельзя, т.к. слагаемые не имеют конечных пределов. В самом деле, функция $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ при $x\to 3$ является бесконечно большой величиной как обратная по отношению к бесконечно малой величине $\sqrt{x-3}$.

По той же причине $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{\sqrt{x^2-9}}=\infty$.

Таким образом, функция $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-9}}\right)$ при $x\to 3$ есть разность двух бесконечно больших величин (причем одного знака). В таком случае говорят, что имеется неопределенность вида $\infty-\infty$, т.к. ничего определенного о пределе функции без специального исследования сказать нельзя.

Теперь, сделав очевидные тождественные преобразования, найдите

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-9}}\right).$$

Ответы: 1. 0 стр. 25 в.

2. ∞ стр. 23.

3. Ответ, отличный от приведенных выше стр. 6 а.

а) Решите задачу

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Ответы: I. $\frac{I}{2}$ стр.I6 а

2. Число, отличное от $\frac{I}{2}$. стр.2I в.

б) Вы ошибаетесь. Если $n = I$, то $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3+I}{3x+I} =$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{(3x+I)(9x^2-3x+I)}{3x+I} = \lim_{x\to -\frac{1}{3}}(9x^2-3x+I) = 3.$$

Таким образом, предел равен 3, а не ∞.
Значит, $n = I$ не подходит.

Попробуйте найти $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3+1}{(3x+I)^n}$ при другом натуральном значении n. При этом вам следует вспомнить теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

Проанализировав свое решение, вы сможете ответить на вопрос задачи, помещенной на стр. I7 б.

в) Правило нахождения предела дробно- рациональной функции при $x\to$ а.

При отыскании $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, а а- действительное число, могут быть три случая:
I) $Q(a)\neq 0$; 2) $Q(a)=0,\ P(a)\neq 0$; 3) $Q(a)=0, P(a)=0$.

В первом случае (как было доказано на стр.I3)

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Во втором случае, когда предел знаменателя равен 0, а предел числителя отличен от нуля, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$.

В третьем случае, когда имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, нужно сократить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на множитель, стремящийся к нулю. Получив дробь, которая уже не сокращается на x - а, мы приходим либо к первому случаю, либо ко второму. Это правило можно применять для нахождения предела любой рациональной функции, т.к. всякую рациональную функцию можно представить в виде отношения многочленов.

Переходите на стр.I9.

§ 3. Вычисление предела иррациональной функции при $x \to a$.

Определение. Если в формуле $y = f(x)$ в правой части производится конечное число операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция y от x называется иррациональной.

Например, $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$, $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{2x+3}}$.

В дальнейшем для решения задач нам потребуется следующая формула: $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и $f(x) \geqslant 0$ при $x \to a$.

Если n - нечетное число, то формула верна и при $f(x) < 0$.

(Доказательство этой формулы приведено на стр.6I)

Пример I. $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x-3} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 7}(x-3)} = \sqrt{7-3} = 2.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Т.к. предел знаменателя равен 0, то теорема о пределе частного не применима. Найдем предел числителя:

$$\lim_{x\to 7}(2-\sqrt{x-3}) = \lim_{x\to 7}2 - \lim_{x\to 7}\sqrt{x-3} = 2-\sqrt{7-3} = 0.$$

Значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределенности выделим и в числителе и в знаменателе множитель $x - 7$, стремящийся к нулю, и сократим на него дробь.

Чтобы выделить в числителе множитель $x - 7$, умножаем числитель и знаменатель на $2 + \sqrt{x-3}$.

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{(x-7)(x+7)}\,\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} =$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} =$$

(применяем теоремы о пределах (какие?) и приведенную выше формулу) $= \dfrac{-1}{(7+7)(2+2)} = -\dfrac{1}{56}$.

Переходите на стр.I8 а.

а)

Вы ошиблись. Запись на стр. 25 а означает применение теоремы о пределе разности, а этого делать нельзя, т.к. слагаемые не имеют конечных пределов. В самом деле, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{\sqrt{x^2-9}} = \infty$. (Почему?).

Повторите формулировку теоремы о пределе алгебраической суммы (см.стр.4) и переходите на стр. I7 в.

б)

Совершенно верно.

Вы правильно подметили, что опять имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности снова выделяем в числителе и в знаменателе множитель x + I и сокращаем на него:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-1}{x^3+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{3x-1}{x^2-x+1}$$ (здесь нет сокращения на нуль, т.к. $x \to -1$, но $x \neq -1$)

(Т.к. полученная дробно -рациональная функция определена в точке $x = -1$, то её предел можно найти непосредственной подстановкой значения $x = -1$ в аналитическое выражение функции.

Возможен и другой способ: применение теорем о пределах)=

$$= \frac{3\cdot(-1)-1}{1+1+1} = -\frac{4}{3}.$$

Переходите к стр. I7 б.

в)

Неправильно.

Вы, наверно, обнаружили, что числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \to 2$. Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ сделаем тождественное преобразование:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} =$$

(т.к. $x \to 2$, но $x \neq 2$, то $x - 2 \neq 0$)

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-3}{x-10}$. Можно ли теперь применить теорему о пределе частного ?

Завершите вычисление предела и переходите на стр. IIв.

а) Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

Ответы: I. I стр. II а.

2. $\frac{2}{3}$ стр. 24 б

3. 2 стр. I5 б

б) Третья часть задания.

Найти пределы:

I) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{7-x^2}{x^2-5x+4}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2}}{x^3-3x^2+4}$

Решив эти задачи, найдите комбинацию правильных ответов среди указанных ниже:

I) 2, 2) 0 — стр. 25 г

I) ∞, 2) ∞ — стр. 8 в

I) 2, 2) ∞ — стр. 26

Если вам нужны указания к решению второй задачи, то смотрите стр. 6 г.

в) Вы правы, если оказалось, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=0$.

В самом деле, выяснив сначала, что при $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, заключаем, что никакие теоремы о пределах сразу применить нельзя. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x^2}+1$, чтобы затем сократить дробь на множитель, стремящийся к нулю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=$ (сокращаем на x, что допустимо, т.к. $x\to 0$, но $x\neq 0$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=$ (теперь можно применить известные теоремы о пределах. Назовите их).

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)}+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Переходите на стр. 2I а.

<u>Правильно.</u> Проверьте свое решение.

Функция $\dfrac{27x^3+1}{(3x+1)^n}$ (где n – натуральное число, т.е. $n = 1,2,3,\ldots$) при $x \to -\frac{1}{3}$ представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскроем её :

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{27x^3+1}{(3x+1)^n}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{(3x+1)(9x^2-3x+1)}{(3x+1)(3x+1)^{n-1}}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{9x^2-3x+1}{(3x+1)^{n-1}}$$

Т.к. n принимает натуральные значения, то возможны лишь 2случая: 1) $n-1=0$, 2) $n-1>0$.

Если $n-1=0$, т.е. если $n=1$, то

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{9x^2-3x+1}{(3x+1)^{n-1}}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{9x^2-3x+1}{1}=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1=3.$$

Значит, $n = 1$ не подходит.

Если $n-1>0$, т.е. если $n = 2,3\ldots$, то знаменатель дроби $\dfrac{9x^2-3x+1}{(3x+1)^{n-1}}$ стремится к нулю при $x \to -\frac{1}{3}$, а числитель, как и в первом случае стремится к числу 3. Здесь нельзя применить теорему о пределе частного. Но применяя эту теорему для нахождения предела обратной величины, получаем, что

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{(3x+1)^{n-1}}{9x^2-3x+1}=\frac{0}{3}=0$$

. Значит, $\dfrac{(3x+1)^{n-1}}{9x^2-3x+1}$ есть бесконечно малая величина при $x \to -\frac{1}{3}$.

Тогда данная функция является бесконечно большой величиной, и поэтому $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3+1}{(3x+1)^n}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-3x+1}{(3x+1)^{n-1}}=\infty$ при $n = 2,3,\ldots$, т.е. при всех натуральных значениях $n \geqslant 2$.

<u>Подведем итоги</u>

В § 2 (используя теоремы о пределах) мы установили, что если $P(x)$ – многочлен, то $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$, где a – действительное число. Кроме того, мы видели, что при нахождении предела дробно-рациональной функции, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, могут быть три случая.

Какие? Попробуйте сформулировать правило нахождения предела дробно-рациональной функции при $x \to a$.

Затем переходите на стр. 18 в .

Правильно.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{2}{\sqrt{x^2-9}}\right) =$$ (Приводя дроби к общему знаменателю, представляем их разность в виде частного) =

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x^2-9}} = \infty$$, т.к. обратная величина

$\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x+3}-2}$ является бесконечно малой при $x \to 3$.

В самом деле, $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-9}}{\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+3}-2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}-2} = \frac{0}{\sqrt{6}-2} = 0.$$

Итак, в § 3 мы рассмотрели вычисление пределов некоторых иррациональных функций, когда $x \to a$ (где a - действительное число). При этом можно было заметить, что если функция определена в точке $x = a$, то её предел находится при помощи теорем о пределах и формулы

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Если же функция не определена при $x = a$, то для нахождения её предела требуются дополнительные преобразования и приемы . В частности, при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ в числителе и в знаменателе нужно выделить множитель, стремящийся к нулю, и сократить на него дробь. При этом может быть полезной формула

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$ где

n - натуральное число.

(В справедливости этой формулы можно убедиться, перемножив выражения в скобках).

На этом занятие I заканчивается.

Прежде чем приступить к занятию 2, вам нужно выполнить домашнее задание.

Домашнее задание № I

При выполнении домашнего задания, которое состоит из трех частей, вы продолжаете пользоваться данным пособием.

Переходите на стр. 24 а.

а) <u>Первая часть задания.</u> Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2+4}{x^4-x^2-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ 4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Эти задачи не труднее тех, которые были решены раньше. Поэтому вы должны с ними справиться. Вычисляя пределы, старайтесь обосновывать каждый свой шаг. Это гарантирует глубокое и прочное усвоение материала.

Чтобы узнать, правильно ли решены задачи, <u>сложите полученные ответы и перейдите на страницу, номер которой равен сумме ответов.</u> Там вы найдете не только правильные ответы, но и решения этих задач. (Если сумма ваших ответов не приведет на нужную страницу, то еще раз проверьте свои решения).

На той же странице вам будет предложена вторая часть домашнего задания.

б) <u>Правильно.</u>

Установив, что числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \to 1$ (т.е. имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$), вы правильно поступили, умножив числитель и знаменатель на $(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$. Благодаря этому удается, выделив в числителе и в знаменателе множитель $x-1$, сократить на него дробь

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} =$$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$ = (Почему можно сокращать на $x - 1$?)

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$ = (Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1} x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$, применяем теоремы о пределах суммы, произведения и частного) $= \dfrac{1+1}{1+1+1} = \dfrac{2}{3}$.

Эту задачу можно решить и другими способами.

Например, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt[6]{x})^2-1}{(\sqrt[6]{x})^3-1} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1)} = \frac{2}{3}.$$

Переходите на стр.25 а.

а) В заключение самостоятельно попробуйте найти

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-9}}\right).$$

Сначала установите, верна ли следующая запись:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-9}}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{x^2-9}}\ ?$$

<u>Ответы:</u> I. Неверна стр. I7 в.
2. Верна стр. 20 а.

б) Найдите предел числителя и предел знаменателя. Затем для раскрытия неопределенности разложите числитель и знаменатель на множители и сократите дробь на множитель, стремящийся к нулю.

Решив задачу, вернитесь на стр. I7 а.

в) <u>Неверно.</u>

Если вы считали, что $\infty-\infty=0$, то совершили грубую ошибку, т.к. символ ∞ не есть число, поэтому лишено смысла говорить о каких -либо действиях над этим символом.

Если же вы представили данную функцию в виде дроби, то были на верном пути.

Проверьте свои вычисления и рассуждения, а затем вернитесь к ответам на стр. I7в.

г) В первой задаче вы получили верный ответ, а при решении второй задачи – ошиблись.

После выделения в числителе и в знаменателе множителя, стремящегося к нулю, и сокращения на него должно получиться

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^2-x-2)(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{2x^3}+\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt[5]{8x}+\sqrt[5]{16})}.$$

Проверьте свои вычисления. Затем, найдя предел знаменателя, сделайте вывод, какой величиной является полученная дробь.

После этого на стр. 2I б найдите комбинацию верных ответов.

Вы получили верные ответы. Но порой к верному ответу можно придти путем ошибочных рассуждений. Посмотрите, правильно ли вы рассуждали, решая эти задачи.

I) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-3x+2} - \dfrac{7-x^2}{x^2-5x+4}\right)$.

Данная функция при $x \to$ I представляет собой разность двух бесконечно больших величин (причем одного знака : если $x <$ I, то обе дроби положительны; если $x >$ I , то они отрицательны). Поэтому теорему о пределе алгебраической суммы применить нельзя. Производя вычитание дробей, представим данную рациональную функцию в виде дроби:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{7-x^2}{x^2-5x+4}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-4)-(7-x^2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} =$$

(Теперь нужно раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$)$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-x-6)}{(x-1)(x-2)(x-4)} =$

(равенство $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - \text{I})(x^2 - x - 6)$ получается на основании деления многочлена x^3-2x^2-5x+6 на $x-1$)

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{(x-2)(x-4)} = 2.$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x^3-3x^2+4}$.

Установив, что числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \to 2$, заключаем, что необходимы дополнительные преобразования. Чтобы выделить в числителе множитель $x - 2$, воспользуемся формулой

$(a - в)(a^4 + a^3в + a^2в^2 + aв^3 + в^4) = a^5 - в^5$, полагая $a = \sqrt[5]{x}$, $в = \sqrt[5]{2}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2})(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})}{(x-2)(x^2-x-2)(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x^2-x-2)\cdot(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{2x^3}+\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt[5]{8x}+\sqrt[5]{16})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\text{I}}{(x^2-x-2)\cdot(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{2x^3}+\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt[5]{8x}+\sqrt[5]{16})} = \infty.$$

В самом деле, знаменатель является бесконечно малой величиной при $x \to 2$ (его предел равен 0), поэтому полученная дробь является бесконечно большой величиной.

Итак, с домашним заданием вы справились. Теперь можно переходить к занятию 2.

Занятие 2

Пределы рациональных и иррациональных функций при $x \to \infty$.

На предыдущем занятии вы учились находить пределы рацио - нальных и иррациональных функций, когда независимая переменная стремится к числу а. Теперь займемся изучением поведения этих функций при $x \to \infty$.

Запись $x \to \infty$ означает, что аргумент x принимает зна- чения, <u>по абсолютной величине превосходящие всякое заданное положительное число.</u>

Частными случаями записи $x \to \infty$ (x стремится к бес- конечности) являются записи : $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Первая запись, $x \to +\infty$, означает, что аргумент x при- нимает значения, большие всякого заданного положительного числа. При этом говорят, что x неограниченно возрастает.

Если x становится меньше всякого заданного отрицательно- го числа, то говорят, что x стремится к отрицательной бес- конечности, и записывают $x \to -\infty$.

§ 4. Вычисление предела рациональной функции при $x \to \infty$.

Известно, что с помощью тождественных преобразований вся- кую рациональную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов. Поэтому основной задачей § 4 будет изучение поведения дробно - рациональной функции

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$ (n и m - целые неотрицательные числа) при $x \to \infty$.

Прежде чем приступать к решению этой задачи, вам нужно ответить на вопросы § I (стр. 3), а также вспомнить, опреде - ление и свойства бесконечно большой величины.

Сформулируйте определение бесконечно большой величины при $x \to +\infty$.

Переходите на стр. 28.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любого заданного числа $M > 0$ существует такое число N, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > N$ ($x < N$), выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Аналогично дается определение бесконечно большой величины при $x \to \infty$ и при $x \to a$. (См. Приложение II на стр.60). Тот факт,что функция $f(x)$ есть бесконечно большая при $x \to \infty$ (или при $x \to a$) условно записывают так: $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (x \to a)}} f(x) = \infty$, хотя функция $f(x)$ и не имеет предела в обычном смысле.

Если, например при $x \to +\infty$, $f(x)$ есть бесконечно большая величина и положительна (отрицательна) для всех значений x, превосходящих некоторое число, то $f(x)$ называется положительной (отрицательной) бесконечно большой величиной. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right)$.

В том случае, когда нас интересует не знак функции $f(x)$, а только то, что $|f(x)|$ неограниченно возрастает, будем писать $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Пользуясь определением бесконечно большой величины и определением предела функции, можно доказать следующие очевидные свойства бесконечно больших величин.

Свойство I. Сумма бесконечно больших величин одного знака есть величина бесконечно большая.

Свойство 2. Произведение бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.

Свойство 3. Если функция $f(x)$ - бесконечно большая, а c - постоянная, причем $c \neq 0$, то $c \cdot f(x)$ есть величина бесконечно большая.

Переходите на стр. 29.

Свойство 4. Сумма или разность бесконечно большой величины и функции, имеющей конечный предел, есть величина бесконечно большая.

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x)$.

Теорема о пределе алгебраической суммы здесь не применима, т.к. слагаемые не имеют конечных пределов. В самом деле, если $x \to +\infty$ (т.е. x неограниченно возрастает), то x есть бесконечно большая положительная величина; тогда x^2 и $3x$ являются бесконечно большими величинами: x^2 как произведение бесконечно больших x и x, а $3x$ как произведение постоянной и бесконечно большой.

Т.к. x^2 и $3x$ являются положительными бесконечно большими величинами, то функция $x^2 - 3x$ есть разность двух бесконечно больших величин одного знака. Значит, имеется неопределенность вида $\infty - \infty$.

Чтобы выяснить поведение функции $x^2 - 3x$ при $x \to +\infty$, преобразуем её например так: $x^2 - 3x = x (x - 3)$. Согласно свойству 4 разность $x - 3$ есть бесконечно большая величина, и тогда на основании свойства 2 делаем вывод, что произведение $x \cdot (x - 3)$ является бесконечно большой величиной. Поэтому $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x (x - 3) = \infty$.

Функция $x^2 - 3x$ при $x \to +\infty$ является положительной бесконечно большой величиной, т.к. $x^2 - 3x > 0$ при $x > 3$. Поэтому можно записать $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$.

> Найдите самостоятельно $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3x)$
> и определите, какие из следующих путей приводят к решению.
> I. Применить свойство I бесконечно больших величин.
> 2. Сделать преобразование $x^2 - 3x = x \cdot (x - 3)$
> 3. Сделать преобразование $x^2 - 3x = x^2 (1 - \frac{3}{x})$

Если вы считаете, что каждый путь приводит к решению, то смотрите стр. 32 б.

В противном случае смотрите стр. 31 б.

Ответы к задачам 2-й части домашнего задания 2.

I.	0	4.	2
2.	- 72	5.	0
3.	∞	6.	I/2

Если вы получили такие же ответы и можете обосновать решение каждой задачи, то вправе поставить себе положительную оценку и приступить к выполнению третьей (последней) части домашнего задания, помещенной на стр. 57 б.

В противном случае учтите указания к решению задач и решите ещё раз те задачи, где получились другие ответы.

Указания

I. Если первая задача вызвала какие-то затруднения, то посмотрите решение подобной задачи, помещенной на стр. 37 а.

2. Для решения второй задачи члены дроби следует разделить на старшую степень x , т.е. на x^5. Лучше всего это сделать так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3\cdot(3x-2)^2}{5-x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x+1}{x}\right)^3\cdot\left(\frac{3x-2}{x}\right)^2}{\frac{5}{x^5}-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{\frac{5}{x^5}-1}=\ldots$$

3. См. стр.49 и решение задач, помещенных на стр.41 в и 4I а.

4. См. решение аналогичной задачи на стр. 5I а.

5,6. См. решение аналогичной задачи на стр. 4I г.

Справившись со второй частью домашнего задания, приступайте к выполнению третьей части, помещенной на стр. 57 б.

а) Неверно.

Если вы начинали решать задачу тем же методом, что и предыдущую, то были на верном пути. Найдите еще раз пределы числителя и знаменателя и вспомните, как мы поступали раньше в подобных случаях.

Затем вернитесь на стр. 41а

б) Не совсем так.

Видимо, вы воспользовались вторым способом и получили:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(x-3)=+\infty$. Это верно. Но разве только так можно решить задачу?

Что вы можете сказать о сумме бесконечно больших величин x^2 и $(-3x)$?

Подумайте еще о других способах и переходите на стр. 32 б

в) Неверно.

Если при нахождении $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^3+1}$ вы сразу применили теорему о пределе частного, то допустили грубую ошибку, показав тем самым незнание условий этой теоремы. Теорема о пределе частного применима лишь тогда, когда пределы числителя и знаменателя конечны и предел знаменателя отличен от нуля. А в нашем случае $\lim\limits_{x\to\infty}(5x-2)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1)=\infty$, т.к. всякий многочлен при $x\to\infty$ является бесконечно большой величиной.

Еще следует помнить, что символ ∞ (а также символы $+\infty$ и $-\infty$) не является числом. Он вводится только для сокращенного выражения того факта, что функция является бесконечно большой величиной. Поэтому никаких арифметических действий с символом ∞ производить нельзя.

Если вы руководствовались указаниями, приведенными на стр. 38в, то еще раз найдите предел числителя преобразованной дроби. Затем вернитесь к ответам на стр. 37а.

а) Неправильно.

Решение задачи следует начать с преобразования числителя первой дроби по формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+n)n}{2(n+2)} - \frac{n}{2}\right].$$

Полученную разность приведите к такому виду, чтобы можно было применить известное правило.

Решив задачу, вернитесь на стр. 40 а.

б) Правильно. Для вычисления $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x)$ можно применить любой из указанных способов.

Первый способ.

Функция $x^2 - 3x = x^2 + (-3x)$ при $x\to-\infty$ (т.е. когда x принимает любые отрицательные значения, по абсолютной величине превосходящие всякое заданное положительное число) представляет сумму двух положительных бесконечно больших величин. В самом деле, по свойству 2 (стр. 28) x^2 есть бесконечно большая величина, причем $x^2>0$, а $(-3x)$ есть также бесконечно большая величина (как произведение бесконечно большой x и постоянной -3), причем $-3x>0$, т.к. x принимает отрицательные значения.

На основании свойства I делаем вывод, что сумма двух положительных бесконечно больших величин x^2 и $(-3x)$ есть величина бесконечно большая и притом положительная. Значит,

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x)=+\infty.$$

Второй способ. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot(x-3) =$ $=$ (применяем свойства 4 и 2) $= +\infty$.

Третий способ. $x^2 - 3x = x^2\cdot\left(1 - \frac{3}{x}\right)$.

При $x\to-\infty$ x^2 есть бесконечно большая величина, а $\frac{1}{x}$ как обратная к бесконечно большой есть бесконечно малая. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}1 - 3\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 1-3\cdot 0 = 1$$

Значит, функция $x^2\cdot\left(1 - \frac{3}{x}\right)$ является произведением бесконечно большой величины и функции, имеющей конечный предел, отличный от нуля. Такое произведение представляет собой бесконечно большую величину. Это основано на следующем свойстве бесконечно больших величин.

Переходите на стр.33.

а)

<u>Свойство 5.</u> Произведение бесконечно большой величины и функции, имеющей конечный предел, отличный от нуля, есть величина бесконечно большая.

Или: если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$, а $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x) = в \neq 0$,

то $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)g(x)=\infty$.

<u>Доказательство</u>.

Записав произведение в виде дроби $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]}$, замечаем, что $\dfrac{I}{f(x)}$ есть бесконечно малая величина как обратная к бесконечно большой $f(x)$.

Рассмотрим функцию $\dfrac{I}{f(x)\cdot g(x)} = \dfrac{\left[\frac{1}{f(x)}\right]}{g(x)}$ и найдем её предел:

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{1}{f(x)g(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{\left[\frac{1}{f(x)}\right]}{g(x)} =$$

(по теореме о пределе частного) $= \dfrac{0}{в} = 0$.

Значит, функция $\dfrac{I}{f(x)g(x)}$ есть бесконечно малая при $x\to a$ (или при $x\to\infty$). Тогда $f(x)\cdot g(x)$ является бесконечно большой величиной.

Теперь повторите свойства I – 4 бесконечно больших величин (стр. 29-30) и найдите среди них то, которое можно считать частным случаем свойства 5.

Затем перейдите на стр. 34 а.

б) Представьте многочлен в виде произведения двух сомножителей путем вынесения за скобку старшего члена a_0x^n. Определив пределы сомножителей, воспользуйтесь свойством 5 бесконечно больших величин.

Решив задачу, переходите на стр. 36 б.

а) Свойство 3 является частным случаем свойства 5, т.к. постоянную С можно рассматривать как функцию, принимающую одно и то же значение, причем $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} C = C$.

Решите задачу.

Доказать, что любой многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (где n - натуральное число и $a_0 \neq 0$), является бесконечно большой величиной при $x\to\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = \infty.$$

Свое решение вы можете проверить на стр. 36 б.

Если вы не знаете, с чего начать решение, то обратитесь к стр.33б

б) Неверно.

Если ваше решение содержало преобразование

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to\infty}(5x-2)\frac{1}{x^3+1}$, то вы должны были заметить, что ($5x - 2$) есть бесконечно большая величина, а

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3+1} = 0.$$

Ваша ошибка состоит в том, что вы делаете необоснованный вывод о пределе такого произведения.

Здесь нельзя применить теорему о пределе произведения, т.к. множитель ($5x - 2$) не имеет конечного предела при $x\to\infty$. Свойство 5 бесконечно больших величин также не применимо, потому что имеется произведение бесконечно большой величины и бесконечно малой.

О таком произведении, как и о частном двух бесконечно больших величин, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя.

Таким образом, ваше преобразование к цели не приводит. Сделав другое преобразование (деление числителя и знаменателя на x^3), вы получите $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}$.

Найдите предел этой дроби и на стр. 37 а выберите нужный ответ.

а) Правильно

При $x \to +\infty$ функция $\sqrt{x^2+3x} - x$ представляет разность двух бесконечно больших величин одного знака. Поэтому нельзя применить ни теорему о пределе разности, ни свойство I бесконечно больших величин.

Преобразование $\sqrt{x^2+3x} - x = x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 1\right)$ не приводит к цели, т.к. получается произведение бесконечно большой величины x на бесконечно малую $\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 1\right)$. А о таком произведении без дополнительного исследования ничего определенного сказать нельзя.

Сделаем преобразование: умножим и разделим данную функцию на сопряженное выражение.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

(теперь разделим члены дроби на x)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}.$$

Переходите на стр. 38 а

б) Вы допустили две ошибки.

Во-первых, вы использовали теорему о пределе разности, а она не применима, т.к. уменьшаемое и вычитаемое не имеют конечных пределов. Данная функция $\left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$ при $x \to \infty$ представляет разность двух бесконечно больших величин (причем одного знака), а о такой разности без дополнительного исследования ничего определенного сказать нельзя. В подобных случаях говорят, что имеется неопределенность вида $\infty - \infty$.

Во-вторых, вы считали, что $\infty - \infty = 0$, а это уже никуда не годится. Запомните, что символ ∞ не является числом. Он вводится только для сокращенного выражения того факта, что функция является бесконечно большой величиной. Поэтому никаких арифметических действий с символом ∞ производить нельзя.

Произведите вычитание дробей и найдите предел. Затем вернитесь к ответам на стр. 4I в.

а) Совершенно верно.

$a = -6$. В самом деле, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+3x+5}{3x^2-x+1} =$

(делим числитель и знаменатель на x^2)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{a+0+0}{3-0+0} = \frac{a}{3}.$$

Далее из равенства $\frac{a}{3} = -2$ находим, что $a = -6$.

Переходите на стр. 37 в.

б) Проверьте свое решение.

При $x\to\infty$ многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (где n - натуральное число и $a_0 \neq 0$) представляет сумму постоянной a_n и бесконечно больших величин $a_0x^n, a_1x^{n-1}, \ldots, a_{n-1}x$, которые могут иметь разные знаки. Поэтому, вообще говоря, здесь нельзя применить свойство I бесконечно больших величин.

Следующее преобразование позволяет в любом случае решить вопрос о пределе многочлена: $P(x) = a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)$.

Т.к. $x\to\infty$, т.е. x неограниченно возрастает по абсолютной величине, то a_0x^n есть бесконечно большая величина, а $\frac{1}{x}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ - бесконечно малые. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right) = 1+0+\ldots+0 = 1$.

Значит, многочлен $P(x)$, представляющий произведение бесконечно большой величины a_0x^n и функции, предел которой равен I, согласно свойству 5 является бесконечно большой величиной. Итак, доказано, что

$$\lim_{x\to\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n) = \lim_{x\to\infty} a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right) = \infty.$$

Учитывая то, что выражение в скобках принимает положительные значения (близкие к I) при достаточно больших значениях $|x|$, делаем вывод: многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ есть бесконечно большая величина того же знака, что и его старший член a_0x^n.

Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5 + x^2 - 4x - 1) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{4}{3x^4} - \frac{1}{3x^5}\right) = -\infty,$

т.к. при $x\to-\infty$ старший член $3x^5$ принимает отрицательные значения. Переходите на стр. 37 а.

а) Теперь приступим к решению основной задачи § 4 - вычислению

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} .$$

Если вы знаете, как решается эта задача в общем случае, то можете сразу перейти на стр. 47 б.

В противном случае вам следует начать с задачи частного вида.

Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x-2}{x^3+1}$.

Ответы:			
	I.	∞	стр. 34 б
	2.	0	стр. 40 б
	3.	I	стр. 31 в

Если вам нужны указания к решению задачи, то смотрите стр. 38 в.

б) Вы считаете, что предел равен $-\frac{3}{2}$.

Нет, такой ответ здесь никак не получится. Видимо, вы совсем не думали над решением и выбрали ответ наугад.

Если вы устали, то отдохните минуты две. Представьте себе, что сейчас морозное солнечное утро. Вы хорошо выспались, чувствуете бодрость, прилив сил и готовы справиться с любой задачей.

Раз вы готовы, то возвращайтесь на стр.38 а и продолжайте работу.

Кстати, вам осталось решить всего две задачи.

в) Проанализируйте решение трех последних задач и сформулируйте правило нахождения предела дробно - рациональной функции при $x \to \infty$.

Какую связь вы заметили между пределом этой функции и степенями многочленов, стоящих в числителе и в знаменателе?

В справедливости своих выводов вы можете убедиться, прочитав стр. 45.

а) **Решите задачу .**

Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.

Ответы:

1. ∞ стр. 53 а
2. $-\frac{3}{2}$ стр. 37 б
3. $\frac{3}{2}$ стр. 51 в.

б) **Неправильно.**

Видимо, вы совсем не думали над решением задачи и выбрали ответ наугад. Такое несерьезное отношение к делу приведет к тому,что вы ничему не научитесь и зря потеряете время.

Воспользуйтесь методом решения предыдущей задачи (а не ответом) и вернитесь на стр. 41 а.

в) Разделите числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на x^3 , и воспользуйтесь известными теоремами о пределах.

Найдя предел,сравните свой ответ с приведенными на стр. 37 а.

г) Вы ошиблись в процессе преобразования функции. А почему здесь необходимы преобразования?

Вам следует учесть,что если $x\to-\infty$, то $x<0$. Кроме того, следует рассматривать арифметическое значение корня. В связи с этим, например

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=-\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} \text{ при } x<0 .$$

Исправьте свою ошибку и вернитесь к стр. 52 б.

<u>Правильно</u>. Посмотрите внимательно решение.

Сначала проанализируем числитель и знаменатель дроби. Числитель ($\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x}$) есть бесконечно большая величина как сумма двух положительных бесконечно больших величин при $x\to+\infty$. Определим старшую степень x в числителе:

$$\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x}=\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x}\right).$$

Итак, мы представили числитель в виде произведения бесконечно большой величины $x^{\frac{3}{2}}$ и функции, имеющей при $x\to+\infty$ конечный предел, отличный от нуля. Поэтому старшая степень x в числителе есть $x^{\frac{3}{2}}$. А в знаменателе старшая степень x есть x^2 , т.к.

$$\sqrt[4]{x^3+x}-x^2=x^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}-x^2=x^2\left(\frac{1}{x^{5/4}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)=$$

$x^2\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}}-1\right)$.Отсюда следует, что и знаменатель данной дроби при $x\to+\infty$ является бесконечно большой величиной. Таким образом,данная дробь есть отношение двух бесконечно больших величин.

Для раскрытия неопределенности разделим члены дроби на x^2 :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}}-1}$$

Учитывая,что при $x\to+\infty$ $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x\sqrt{x}}, \frac{1}{x^5}, \frac{1}{x^7}$ – бесконечно малые, и применяя теоремы о пределе алгебраической суммы, корня и частного, получаем

$$=\frac{\sqrt{0+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1}=\frac{0}{-\mathrm{I}}=0.$$

Приведем другой способ решения задачи

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}}-1}=0\cdot\frac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1}=0\cdot(-1)=0.$$

Переходите на стр. 4I г.

а) **Задача**

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$

(здесь аргумент n принимает натуральные значения)

Ответы: I. $-\frac{1}{2}$ стр.48 а

2. Ответ, отличный от предыдущего . стр.32 а

Если эта задача вызывает большие затруднения, то сначала попробуйте решить задачу на стр. 4I в.

б) **Правильно .**

Числитель и знаменатель дроби $\frac{5x-2}{x^3+1}$ при $x\to\infty$ являются бесконечно большими величинами. Т.к. они не имеют конечных пределов, то теорему о пределе частного применить нельзя.

Об отношении бесконечно больших величин, так же как и об отношении бесконечно малых, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Поэтому отношение бесконечно больших величин называют неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Для вычисления предела сначала разделим числитель и знаменатель на старшую степень x , которая имеется в членах дроби.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}$ (здесь мы предполагаем, что $x\neq 0$, т.к. изучаем данную функцию при достаточно больших значениях $|x|$)

Теперь можно применить известные теоремы.Т.к. при $x\to\infty$ величины x^2 и x^3 - бесконечно большие, то $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) =$ (по теоремам о пределах произведения и разности) $= 5\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} - 2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(I + \frac{I}{x^3} \right) = I + 0 = I.$

Поскольку числитель и знаменатель имеют конечные пределы и предел знаменателя отличен от нуля, можно применить теорему о пределе частного.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Переходите на стр.4I а.

а) Решите задачу.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - I}{x + 2}$.

Ответы: I. 3 стр. 3I а
2. 0 стр 38 б
3. ∞ стр. 44 а.

б) Задача.

При каком значении а справедливо
равенство $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2 + 3x + 5}{3x^2 - x + I} = -2$?

Ответы: I. а = - 6 стр. 36 а
2. а $\neq$ - 6 стр. 46 а.

в) Решите задачу.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 - 1} - \dfrac{x^2}{2x + 1} \right)$.

Ответы: I. ∞ стр. 43 в
2. 0 стр. 35 б
3. I/4 стр. 48 б.

г) Задача.

Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Ответы: I. 0 стр. 52 г
2. 3/2 стр. 35 а.

а) Ответы к задачам третьей части домашнего задания 2.

I. $-\infty$

2. $\frac{1}{2}$

3. $+\infty$

4. $-\frac{5}{2}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\sqrt{3}$

Указания к решению этих задач.

I. См. решение подобной задачи на стр. 38 а.
2. Найдите предел подкоренного выражения и воспользуйтесь теоремой о пределе корня (см. стр.6I и замечание на стр. 62).
3. См. решение аналогичной задачи на стр. 5Iб.
4. См. решение подобной задачи на стр. 52 б.
5. Преобразуйте выражение в скобках по формуле суммы членов арифметической прогрессии: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.
6. Разделите числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на $x^{\frac{1}{2}}$.

Выполнив третью часть задания, переходите на стр.58, где можете проверить решение задач I, 3, 5, 6.

б) Неверно. При делении членов дроби $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ на x (причем $x > 0$) подкоренное выражение нужно разделить на x^2. В результате получим: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$.

Завершив решение задачи, вернитесь к ответам на стр. 5I а.

в) Вы считаете, что при $x \to \infty$ (вспомните, что означает эта запись) предел существует.

А чему он равен?

Вы ошибаетесь.

Лишь в том случае, когда $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = в$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = в$, можно считать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = в$.

Переходите на стр. 5I б.

а) Неверно.

Если вы считали, что старшая степень x в числителе и в знаменателе есть x^3, то в этом ваша первая ошибка. Другую ошибку вы допустили в процессе деления членов дроби на x^3.

Вам следует заново решить задачу и вернуться к ответам на стр. 51б.

б) Неверно.

Разделив члены данной дроби на x, вы допустили ошибку в преобразовании числителя, считая, что $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

При $x<0$ это равенство неверно, т.к. правая часть положительна, а левая отрицательна (поскольку рассматривается арифметическое значение корня).

Исправьте свою ошибку и переходите на стр. 47 а.

в) Неправильно.

Производя вычитание дробей, вы должны были получить :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$$

(Подумайте, почему здесь необходимы преобразования?)

Теперь можно перемножить многочлены в знаменателе и применить известное правило или сразу разделить члены дроби на x^3 (причем первый множитель в знаменателе, т.е. $(2x^2-1)$, следует разделить на x^2, а второй - на x).

Исправьте свою ошибку и, доведя решение до конца, на стр. 41 в найдите нужный ответ.

а) Правильно

Т.к. числитель и знаменатель дроби являются бесконечно большими величинами, то для раскрытия неопределенности разделим числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3-0=3$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0+0=0$,
т.к. при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $2\cdot\frac{1}{x^2}$ являются бесконечно малыми.

Таким образом, теорема о пределе частного здесь не применима.

Найдем предел обратной величины:
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=$ (по теореме о пределе частного)
$=\frac{0}{3}=0$. Но величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая. Значит, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\infty$.

Эту задачу можно было решить и другими способами. Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\,\frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=\infty,$$

т.к. произведение бесконечно большой величины x и функции $\frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$, предел которой равен 3, является бесконечно большой величиной (см. свойство 5 на стр. 33а)

Теперь решите задачу на стр. 41 б

б) Установив, что числитель и знаменатель являются бесконечно большими величинами, воспользуйтесь правилом, которое применяли раньше при нахождении предела дробно- рациональной функции (когда $x\to\infty$).

Подумайте, какова старшая степень x в числителе.

Вернитесь на стр. 51 а.

Правило нахождения предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ нужно и числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x и применить теоремы о пределах.

Необходимость такого преобразования вызвана тем, что находится предел отношения бесконечно больших величин.

Это правило мы будем использовать и при вычислении пределов некоторых иррациональных функций. Поэтому его следует запомнить.

Анализ решения трех последних задач еще нам подсказывает, какой предел имеет дробно- рациональная функция (в общем случае) в зависимости от степеней n и m многочленов, стоящих в числителе и в знаменателе. Оказывается, что при $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n<m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n=m \\ \infty, & \text{если } n>m. \end{cases}$$

В справедливости этого предложения можно убедиться, воспользовавшись указанным выше правилом.

Таким образом решается задача вычисления предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$ в общем виде.

Если вы самостоятельно сформулировали указанное предложение (т.е. установили зависимость предела от степеней n и m многочленов), то докажите его и переходите на стр. 46 б.

Если же вам не удалось самим подметить эту закономерность, то примите к сведению это утверждение и перейдите на стр. 4I в.

а) <u>Неверно.</u>

Найдите еще раз $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+3x+5}{3x^2-x+1}$ и приравняйте полученный результат числу (-2). Из последнего равенства можно легко найти значение а.

Решив задачу, переходите на стр. 36 а.

б) Докажем, что при $a_0\neq 0$ и $b_0\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n=m\\ 0, & \text{если } n<m\\ \infty, & \text{если } n>m.\end{cases}$$

Для этого наряду с указанным правилом можно воспользоваться видоизмененным приемом, который заключается в том, что сначала выносим за скобку старшую степень x в числителе и в знаменателе, а затем после сокращения применяем теоремы о пределах.

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{x^m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}\right).$$

Если $n=m$, то $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=$

$=\frac{a_0}{b_0}$, т.к. $\frac{a_1}{x},\ldots,\frac{a_n}{x^n},\frac{b_1}{x},\ldots,\frac{b_m}{x^m}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$, а $b_0\neq 0$.

Если $n<m$, то $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{m-n}}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=$

= (по теореме о пределе произведения)

$=0\cdot\frac{a_0}{b_0}=0.$

Если $n>m$, то $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=$

= (по свойству 5, см.стр.33а) $=\infty$, т.к. при $x\to\infty$ и при $n>m$ первый сомножитель x^{n-m} есть бесконечно большая величина, а второй имеет предел $\frac{a_0}{b_0}$, отличный от нуля.

Теперь решите задачу на стр. 40 а.

а) <u>Правильно.</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ = (Выделяем в числителе и в знаменателе старшую степень x)

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(2+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})} =$$

(Т.к. мы рассматриваем арифметическое значение корня, то $\sqrt{x^2} = |x|$. Учитывая, что $x\to-\infty$, заключаем, что $x<0$ и поэтому $|x| = -x$)

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1+0}}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

Если в этой задаче сразу разделить члены дроби на x, то следует иметь в виду, что $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ при $x<0$ (т.к. рассматривается арифметическое значение корня).

Итак, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} = -\frac{1}{2}$, а раньше мы установили, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Какой можно сделать вывод о существовании предела этой функции при $x\to\infty$?

<u>Ответы:</u> 1. Предел существует. стр. 42 в

2. Предел не существует. стр. 51 б

б) Сформулируйте правило нахождения предела дробно-рациональной функции при $x\to\infty$.

Какая существует связь между пределом этой функции и степенями многочленов, стоящих в числителе и в знаменателе?

В правильности своих ответов вы можете убедиться, прочитав стр. 45.

Если вы затрудняетесь ответить на эти вопросы, то вернитесь на стр. 37 а.

а) Верно.

Преобразовав числитель первой дроби по формуле суммы членов арифметической прогрессии, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+n)n}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right]$$

Т.к. имеем разность двух бесконечно больших величин (причем положительных), то сразу нельзя применить ни теорему о пределе разности, ни свойство I бесконечно больших величин. Для раскрытия неопределенности (вида $\infty-\infty$) представим данную рациональную функцию в виде дроби и воспользуемся правилом нахождения предела дробно-рациональной функции (или предложением, доказанным на стр. 46 б).

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+n)\cdot n}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right]=$$ (Производим вычитание дробей)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}=\frac{-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

Переходите на стр. 49.

б) Правильно.

Данная рациональная функция при $x\to\infty$ представляет разность двух бесконечно больших величин (причем одного знака : если $x\to-\infty$, то обе дроби отрицательны, а при $x\to+\infty$ они положительны).

Поэтому теорему о пределе разности или какую-либо другую теорему сразу применить нельзя.

Производя вычитание дробей, представим данную функцию в виде дроби:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=$$ (Теперь можно воспользоваться правилом нахождения предела дробно-рациональной функции или предложением, приведенным на стр.45).

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=$$ (на основании каких теорем ?) $$=\frac{1}{4}.$$

Переходите на стр.49.

Подведем итоги § 4.

Мы установили, что всякий многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ (где n - натуральное число, а $a_0 \neq 0$) при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной, причем того же знака, что и его старший член a_0x^n .

Кроме того, мы сформулировали следующее правило нахождения предела дробно- рациональной функции при $x \to \infty$.

Для вычисления

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

нужно и числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x и применить теоремы о пределах.

В § 4 была решена в общем виде задача вычисления предела дробно- рациональной функции при $x \to \infty$.

Теперь мы знаем, как вычислить предел любой рациональной функции при $x \to \infty$, поскольку всякую рациональную функцию можно представить с помощью тождественных преобразований (если есть в этом необходимость) в виде дробно - рациональной функции.

Переходите на стр. 50
к изучению § 5 .

§ 5. Вычисление предела иррациональной функции при $x \to \infty$.

Прежде всего убедимся, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Доказательство

Воспользуемся определением бесконечно большой величины. Пусть задано любое число $M>0$. Докажем, что для этого числа $M>0$ найдется такое число N , что как только $x>N$, так выполняется неравенство $\sqrt[n]{x} > M$.

Неравенство $\sqrt[n]{x} > M$ будет выполнено, если $x > M^n$. Значит, за число N можно принять M^n .

Следовательно, при $x \to +\infty$ $\sqrt[n]{x}$ есть положительная бесконечно большая величина.

Отметим ещё, что если n - нечетное число, то можно рассматривать поведение функции $\sqrt[n]{x}$ и при $x \to -\infty$.

Тогда $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$.

В самом деле, при нечетном n

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-1 \cdot (-x)} = -\sqrt[n]{-x}$, а $\sqrt[n]{-x}$ при $x \to -\infty$

по доказанному выше является положительной бесконечно большой величиной. Значит, $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ есть отрицательная бесконечно большая величина.

Пример . Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+1}$.

Сделаем замену переменной, положив $x^2 + 1 = u$. Т.к. при $x \to \infty$ многочлен $x^2 + 1$ есть положительная бесконечно большая величина, то $u \to +\infty$.

Тогда на основании теоремы о замене переменной под знаком предела (см. стр.61) имеем :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{u \to +\infty} \sqrt{u} = \text{(по доказанному выше)} = +\infty .$$

Переходите на стр. 51 а.

а) Решите задачу.

Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$.

Ответы: I. ∞ стр. 42 б.

2. $\dfrac{1}{2}$ стр. 53 б.

Если вам нужны указания к решению задачи, то смотрите стр. 44 б.

б) Совершенно верно. Данная функция не имеет предела при $x \to \infty$, т.е. когда x, принимая как положительные, так и отрицательные значения, становится сколь угодно большим по абсолютной величине.

Приступайте к решению следующей задачи.

Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}$.

Ответы: I. ∞ стр. 52 в

2. I стр. 43 а

3. 0 стр. 39

в) Неверно

Если вы воспользовались методом решения предыдущей задачи, то допустили ошибку в процессе преобразования функции. Вы не учли того, что теперь функцию исследуем при $x<0$, и поэтому

$$\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}} = -\sqrt{1+\frac{3}{x}}\ .$$

Исправьте свою ошибку и решите задачу до конца.

Еще подумайте, нужны ли сделанные вами преобразования? Нельзя ли сразу воспользоваться свойством I бесконечно больших величин (стр. 28)?

Вернитесь на стр. 38 а.

а)

Задача

Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$.

Ответы: I. $-\dfrac{1}{2}$ стр. 47 а

2. $\dfrac{1}{2}$ стр. 43 б

б)

Задача

Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x})$.

Ответы: I. 2 стр. 38 г

2. -2 стр. 54

в) Неверно

Сначала убедитесь в том, что числитель и знаменатель дроби являются бесконечно большими величинами. Затем, определив старшую степень x в членах дроби, воспользуйтесь известным приемом.

Вернитесь к задаче на стр. 5I б

г) Неправильно

Разве здесь применима теорема о пределе разности? Нет, т.к. уменьшаемое и вычитаемое не имеют конечных пределов.

Если же вы сделали преобразование $\sqrt{x^2+3x}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1\right)$, то на каком основании заключаете, что полученное произведение стремится к нулю при $x\to+\infty$? Разве можно здесь воспользоваться теоремой о пределе произведения или свойством 5 бесконечно больших величин (стр. 33 а)?

Для решения задачи сначала умножьте и разделите данную функцию на $(\sqrt{x^2+3x}+x)$.

Вернитесь на стр. 4I г.

а) Верно.

При $x \to -\infty$ данную функцию можно рассматривать как сумму двух положительных бесконечно больших величин $\sqrt{x^2+3x}$ и ($-x$). Но сумма бесконечно больших величин одного знака есть величина бесконечно большая.

Значит, $\sqrt{x^2+3x}+(-x)$ есть бесконечно большая величина, причем положительная. Поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=+\infty$

Эту задачу можно решить и другими способами, представляя данную функцию в виде произведения или дроби.

В заключение решите задачу на стр. 52 б.

б) Правильно.

Данная функция $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ при $x \to +\infty$ представляет отношение бесконечно больших величин. Поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Поступим так же, как при нахождении предела дробно- рациональной функции, когда $x \to \infty$.

Заметив, что $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ при $x>0$, разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ на наивысшую степень x, встречающуюся в членах дроби, т.е. на x :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$. Здесь уже применима теорема о пределе частного, т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x}) = 2+0 = 2 \neq 0$, а

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} =$ (согласно теореме о пределе корня, приведенной на стр. 61 - 62) $= \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^2})} = \sqrt{1+0} = 1.$

Переходите на стр. 52 а.

Совершенно верно.

При $x \to -\infty$ функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин. В самом деле, раньше (стр. 36 б) мы установили, что всякий многочлен степени $n \geq 1$ при $x \to \infty$ есть бесконечно большая величина, причем того же знака, что и его старший член. Кроме того, известно (стр.50), что $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} =$ (Делаем замену, полагая , $x^2+x+1 = u$) $= \lim\limits_{u \to +\infty} \sqrt{u} = +\infty$ и

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-3x} = \lim_{v \to +\infty} \sqrt{v} = +\infty .$$

Таким образом, для нахождения $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-3x})$ нельзя применить ни теорему о пределе разности, ни свойство I бесконечно больших величин.

Для раскрытия неопределенности (вида $\infty - \infty$) сделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-3x})}{(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-3x})} =$$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-3x}}$. Получив отношение двух бесконечно больших величин, определим старшую степень x в знаменателе :

$$\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-3x} = |x| \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right).$$

Т.к. $x \to -\infty$, то $x<0$, и поэтому $|x| = -x$.

Итак, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-3x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x+1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} =$

Чтобы раскрыть эту неопределенность (вида $\frac{\infty}{\infty}$), разделим члены дроби на x и воспользуемся теоремами о пределах (какими ?)

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} = \frac{4+0}{-(\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1-0})} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Нетрудно заметить, что если $x \to +\infty$, то данная функция $(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-3x}) \to 2$.

На этом занятие 2 заканчивается.

Домашнее задание помещено на стр. 55.

Домашнее задание № 2.

Прежде всего вам следует ответить на некоторые вопросы, которые приходилось решать на занятиях I и 2 в процессе работы с пособием.

I. Можно ли сказать что - нибудь определенное о разности двух бесконечно больших величин одного знака?

2. А что можно сказать о произведении $f(x).g(x)$, где $f(x)$ - бесконечно большая, а $g(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ (или при $x \to \infty$)?

3. Чему равен $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{1}{f(x)}$, если известно, что $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$).

4. Чему равен $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{g(x)}{\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} g(x) = b \neq 0$,

а $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = 0$, причем $\varphi(x)$ не обращается в нуль при $x \to a$ (или при $x \to \infty$).

5. Как формулируется правило нахождения предела дробно - рациональной функции, когда $x \to \infty$?

6. В каком случае это правило оказывается пригодным для нахождения предела иррациональной функции ?

Правильные ответы на эти вопросы приведены на следующей странице.

Ответы.

I, 2. Без специального исследования ничего определенного сказать нельзя ни о разности двух бесконечно больших величин одного знака, ни о произведении бесконечно большой величины на бесконечно малую. Упомянутая разность (или произведение) может оказаться бесконечно большой величиной, функцией, имеющей конечный предел, а также функцией , не имеющей никакого предела (ни конечного, ни бесконечного).

3. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} 0 \cdot f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} 0 = 0$.

4. ∞ . Можно воспользоваться свойством 5 (см. стр. 33) или известным приемом, с помощью которого доказывается это свойство.

5. См. стр. 49.

6. Правило оказывается пригодным для нахождения предела иррациональной функции при $x \to \infty$, когда функцию можно представить в виде отношения бесконечно больших величин.

Теперь приступайте к выполнению второй части задания. Попробуйте её выполнить минут за 30-35 как контрольную работу. Старайтесь обосновать каждый свой шаг. Через 30-35 минут после начала работы сверьте свои ответы с правильными, помещенными на стр. 30.

Затем , оценив свою работу, вы получите на этой странице дальнейшие указания.

Переходите на стр. 57 а.

а)

Вторая часть домашнего задания.

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000\,x}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^3\cdot(3x-2)^2}{5-x^5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-2x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$

Ответы находятся на стр. 30.

б)

Третья часть домашнего задания.

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^4-x+1}{2x^4+x^2+3}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6+1}}{\sqrt{x^4+3}-\sqrt[4]{x^3+4}}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2-2x-1}-\sqrt{2x^2-7x})$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$

   (n принимает натуральные значения)

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Ответы и указания находятся на стр. 42 а.

Проверьте решение некоторых задач третьей части задания.

I. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty$.

В самом деле, при $x\to-\infty$ выражение в скобках как сумма двух положительных бесконечно больших величин $\sqrt{x^2+1}$ и $(-x)$ есть положительная бесконечно большая величина. На основании свойства 2 (см. стр. 28) заключаем, что произведение $x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$ является бесконечно большой величиной, причем отрицательной. (Почему?)

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+1}}{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[4]{x^3+4}}.$$

Установив, что числитель есть положительная бесконечно большая величина, замечаем, что знаменатель есть также бесконечно большая, если $x\to-\infty$ (см, свойство I на стр. 28). Если же $x\to+\infty$, то знаменатель представляет разность двух бесконечно больших величин одного знака (неопределенность вида $\infty-\infty$).

Преобразуем знаменатель :

$$\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[4]{x^3+4}=\sqrt[3]{x^4\left(1+\frac{3}{x^4}\right)}-\sqrt[4]{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}=$$
$$=x^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-x^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{4}{x^3}}=x^{\frac{4}{3}}\left[\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-\frac{1}{x^{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}}\sqrt[4]{1+\frac{4}{x^3}}\right].$$

На основании свойства 5 (см. стр. 33 а) заключаем, что знаменатель есть бесконечно большая величина (причем положительная) как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$, т.к. получили произведение положительной бесконечно большой величины $x^{\frac{4}{3}}$ на функцию, предел которой равен I при $x\to\infty$.

Итак, данная функция есть отношение положительных бесконечно больших величин, причем старшая степень x в знаменателе - $x^{\frac{4}{3}}$, а в числителе - x^2.

Переходите на стр. 59.

Для раскрытия неопределенности разделим члены дроби на x^2 и воспользуемся известными теоремами.(Какими?)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+1}}{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^6}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^6}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x^7}+\frac{4}{x^{10}}}}=+\infty,$$

т.к. предел обратной дроби равен 0.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(1+2+3+\ldots+n)$

Поскольку имеем произведение бесконечно малой величины $\frac{1}{n^2}$ на бесконечно большую (или отношение бесконечно больших $1+2+3+\ldots+n$ и n^2), необходимо сделать преобразования:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Т.к. числитель и знаменатель являются бесконечно большими величинами, теорему о пределе частного применить нельзя. Разделив члены дроби на $x^{\frac{1}{2}}$, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}=$$

(теперь можно применить теоремы о пределах корня, суммы и частного)

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}\right)}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}}=\sqrt{3}.$$

<u>Наша работа с пособием закончена.</u>

Приобретенные знания и умения помогут вам успешно справляться и с другими задачами на вычисление пределов.

Приложение I.

Теорема Безу.

При делении многочлена $P(x)$ на разность $x-a$ получается остаток, равный $P(a)$.

Доказательство. При делении $P(x)$ на $x-a$ частным будет многочлен $P_1(x)$, степень которого на единицу ниже степени $P(x)$, а остатком будет постоянное число R. Тогда мы можем написать равенство : $P(x) = (x-a).P_1(x) + R$ (I)
Это равенство справедливо при всех $x \neq a$ (деление на $x-a$ при $x = a$ не имеет смысла).

Переходя в равенстве (I) к пределу при $x \to a$, получим $P(a) = 0.P_1(a) + R$, т.е. $R = P(a)$.

Следствие. Если число a есть корень многочлена $P(x)$, т.е. $P(a)=0$, то $P(x)$ делится без остатка на $x-a$.

Значит, в этом случае $P(x)$ представляется в виде произведения

$$P(x) = (x-a)\,P_1(x),$$ где $P_1(x)$ - многочлен.

Пример. Многочлен $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 2$ при $x = -1$ обращается в нуль, т.е. $P(-1) = 0$, поэтому $P(x)$ делится без остатка на $x+1$: $3x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+1).(3x^2 - x + 2)$.

Приложение II .

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to \infty$, если для любого заданного числа $M > 0$ существует такое число N, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to a$, если для любого заданного числа $M > 0$ существует такое $\delta > 0$, что выполняется неравенство $|f(x)| > M$, как только $|x-a| < \delta$ и $x \neq a$.

Приложение III.

Теорема о пределе сложной функции

(или теорема о замене переменной под знаком предела).

Пусть $y = \mathcal{F}(u)$, $u = f(x)$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = u_0$, причем при $x \to a$ $f(x) \neq u_0$, а $\lim\limits_{u \to u_0} \mathcal{F}(u) = y_0$, то $\lim\limits_{x \to a} \mathcal{F}[f(x)] = y_0$, т.е. имеет место формула

$$\lim_{x \to a} \mathcal{F}[f(x)] = \lim_{u \to u_0} \mathcal{F}(u).$$

(здесь а, u_0, y_0 - числа или символы $\infty, +\infty, -\infty$)

Замечания.

1. Условие $f(x) \neq u_0$ при $x \to a$ следует изъять, если u_0 - один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.
2. Это условие $f(x) \neq u_0$ при $x \to a$ будет лишним и в том случае, когда $\lim\limits_{u \to u_0} \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_0)$ (u_0 - число).

Теорема о пределе корня

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует и $f(x) \geqslant 0$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$; причем эта формула верна и при $f(x) < 0$, если n - нечетное число.

Доказательство основано на теореме о пределе сложной функции и на следующем утверждении:

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, если $a \geqslant 0$, причем формула верна и при $a < 0$, если n - нечетное число.

Равенство $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (где а- число) можно доказать, пользуясь определением предела функции.

Здесь возможны три случая:

I) $a > 0$, 2) $a = 0$, 3) $a < 0$, причем третий случай следует рассматривать, когда n - нечетное число, т.к. при четном n функция $\sqrt[n]{x}$ не определена в окрестности точки а.

Переходите на стр. 62.

Пусть $a > 0$. В этом случае достаточно рассмотреть значения $x \geqslant 0$.

Выберем произвольно число $\varepsilon > 0$ и докажем, что для него найдется такое $\delta > 0$, что как только $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$, так выполняется неравенство $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$.

Рассмотрим

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}})|}{|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}|} =$$

$$= \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \ldots + \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}},$$

т.к. все слагаемые в знаменателе неотрицательные.

Итак, неравенство $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$ будет выполнено, как только $\frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \varepsilon$, т.е. когда $|x-a| < \varepsilon \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}$. Значит можно принять $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}$ (или $0 < \delta < \varepsilon \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}$).

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Во втором случае, когда $a = 0$, используя определение предела функции, можно легко доказать равенство

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{0} = 0.$$

В третьем случае, когда $a < 0$ и n - нечетное число, доказательство аналогично приведенному выше (для первого случая).

Итак, доказано, что $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

<u>Доказательство теоремы.</u>

Рассмотрим сложную функцию $y = \sqrt[n]{u}$, $u = f(x)$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует и равен u_0 и выполнены остальные условия теоремы.

Согласно доказанному выше имеем: $\lim\limits_{u \to u_0} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{u_0}$. Тогда на основании теоремы о пределе сложной функции (с учетом замечания 2) получаем

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{u \to u_0} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{u_0} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Итак,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

<u>Замечание</u>. Теорема о пределе корня справедлива и в случае, когда $x \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА .

I. А.Ф. Бермант. Краткий курс математического анализа для втузов, " ФМ ", Москва, 1961 .

2. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, том I, " Наука ", Москва, 1965.

3. И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики."ФМ", Москва, Ленинград, 1963.

4. Ю.С. Очан и В.Е.Шнейдер. Математический анализ, Учпедгиз , Москва, 1961.

5. И.А. Каплан. Практические занятия по высшей математике, часть II, ХГУ, Харьков, 1963.

6. Г.И. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу, " Высшая школа", Москва, 1966.

7. Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа, " Наука ", Москва, 1967.

8. Под редакцией Б.П. Демидовича. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов, " Наука", Москва, 1970.

СОДЕРЖАНИЕ