

**САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**
имени академика
С. П. КОРОЛЕВА

**А. Н. Гусев,
В. А. Вьюжанин,
В. Д. Закаблукровский**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

САМАРА

1996

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

А.Н.Гусев, В.А.Вьюжанин, В.Д.Закаблукровский

ОСНОВЫ ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций

Самара 1996

УДК 518.714:629.7

Основы теории автоматического управления: Конспект лекций / А. Н. Гусев, В. А. Вьюжанин, В. Д. Заблукowski; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1996. III с.

ISBN 5-230-16995-8

Излагается курс лекций по основам теории автоматического управления для студентов специальностей 13.01, 13.06, 13.07.

Приводятся необходимые сведения о методах анализа систем автоматического управления и некоторые методы синтеза их структур и параметров.

Работа подготовлена на кафедре динамики полета и систем управления.

Ил. 62. Табл. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева

Рецензенты: В. В. Дмитриев, В. А. Петров

ISBN 5-230-16995-8



Самарский
государственный
аэрокосмический
университет, 1996

Введение

ОСНОВЫ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Управление - это такая организация того или иного процесса, которая обеспечивает достижение определенных целей.

Любой процесс управления включает в себя следующие этапы:

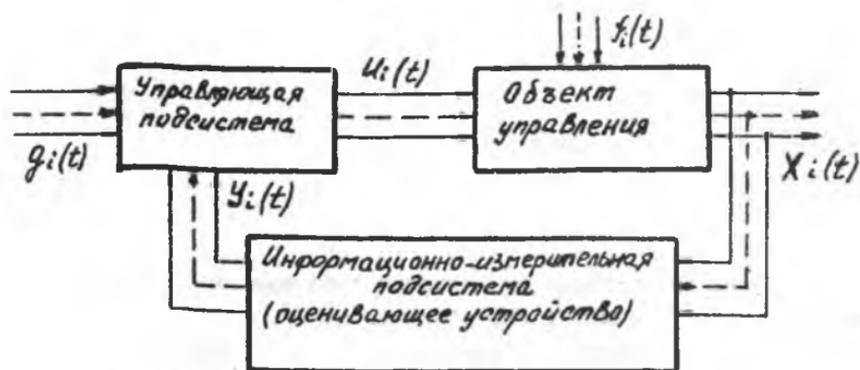
- сбор и обработка информации в целях оценки сложившейся ситуации;
- принятие решения о наиболее целесообразных действиях;
- исполнение принятого решения.

Все перечисленные этапы могут быть очень сложными и должны выполняться в кратчайшее время с высокой точностью. Решить такие задачи непосредственно человеку, в силу физиологических ограничений, невозможно, и на помощь ему приходят системы автоматического управления - САУ.

Автоматическое управление - это управление, осуществляемое без участия человека.

Развитие методов и систем автоматического управления происходит на базе общей теории управления - кибернетики. Часть кибернетики, связанная с изучением вопросов управления в технических устройствах, называется технической кибернетикой. Предметом технической кибернетики является анализ информационных процессов управления техническими объектами, синтез алгоритмов управления ими и создание систем управления, реализующих эти алгоритмы. Таким образом, кибернетика включает в себя как составную часть теорию систем автоматического управления и регулирования. Отличие САУ от систем автоматического регулирования - САР заключается в том, что первые значительно сложнее как в отношении выполняемых задач, так и структуры. САР предназначены для реализации относительно простых функций управления отдельными величинами и процессами сами.

Всякий процесс управления подразумевает наличие объекта управления (регулируемого), управляющей части (подсистемы) и информационно-измерительной подсистемы (оценивающее или наблюдающее устройство (рис. 1).



Р и с. 1. Общая схема САУ

В системе управления можно выделить следующие группы переменных.

1. Переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ характеризуют состояние объекта управления и носят название переменных состояния. Эти переменные образуют вектор состояния $\bar{X}(t)$.

2. Управляющие переменные $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ являются координатами вектора управления $\bar{U}(t)$.

3. Измеримые (задающие) внешние входные воздействия $g_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, l$ образуют вектор $\bar{G}(t)$.

4. Возмущающие воздействия $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, описывают вектор возмущений $\bar{F}(t)$.

5. Измеряемые (наблюдаемые) переменные $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, представляющие собой те r из параметров состояния или их линейные комбинации, сведения об изменении которых поступают в управляющую подсистему. Эти переменные являются координатами вектора наблюдения $\bar{Y}(t)$.

В современной теории управления термин объект управления следует понимать более широко, чем обычно: к объекту относят исполнительные органы и предшествующие им усилители, а также чувствительные элементы измерительных устройств, принимая их выходные сигналы в качестве составляющих вектора состояния.

Рассмотрим случай, когда задачей управления является выполнение условия

$$\bar{X}(t) - \bar{G}(t).$$

Основной причиной, нарушающей это соотношение, является вектор возмущения. Отсюда возникла следующая идея управления: измерить вектор $\bar{F}(t)$ и на основании этого сформировать такой вектор управления $\bar{U}(t)$, который обеспечит достижение цели управления. Такой принцип, впервые предложенный французским ученым Понселе в XIX веке, носит название принципа управления по возмущению. При реализации этого принципа переменные состояния не используются, т.е. цепь от объекта управления до управляющей подсистемы разомкнута. Такие системы получили название разомкнутых систем. Для них характерна функциональная зависимость

$$\bar{U} = \bar{U}(\bar{G}, \bar{F}).$$

Разомкнутым системам характерны следующие недостатки:

- инвариантность (независимость) переменных состояния обеспечивается только по отношению к тем компонентам вектора возмущения, которые могут быть измерены;

- инвариантность по отношению к контролируемым возмущениям обеспечивается только при строгом соответствии параметров объекта и управляющей подсистемы их расчетным значениям.

Естественное желание избавиться от этих недостатков привело к широкому использованию САУ, работающих по отклонению.

В управляющей подсистеме вырабатывается вектор отклонения, и вектор управления в этом случае является функцией вектора входа и состояния

$$\bar{U}(t) = \bar{U}(\bar{E}) = \bar{U}(\bar{G}, \bar{X})$$

Задача САУ в данном случае состоит в обеспечении минимума отклонения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{E}(t)| < \bar{E}_{\text{дон}}.$$

Реализация принципа управления по отклонению возможна только при замыкании цепи отрицательной обратной связи, т.е. цепи от выхода объекта до управляющей подсистемы со знаком минус. Возникает замкнутый контур управления. Такие САУ получили название замкнутых. Замкнутые САУ по сравнению с разомкнутыми обладают следующими преимуществами:

они инвариантны по отношению ко всем возмущениям, так как вектор отклонения \bar{E} несет информацию о влиянии всех компонент вектора возмущения на процесс управления;

снижаются требования к стабильности характеристик объекта и управляющей подсистемы, так как их изменение немедленно приводит к появлению отклонения и его компенсации за счет выработки управляющего воздействия.

Этим и объясняется то, что в настоящее время системой автоматического управления в широком смысле называется система, стремящаяся сохранить в допустимых пределах вектор отклонения за счет использования принципа отрицательной обратной связи. Данное определение не исключает возможности использования и комбинированных САУ.

В свете рассмотренного кратко охарактеризуем основные задачи теории автоматического управления (ТАУ).

1. Разработка методов синтеза САУ, удовлетворяющих заданным требованиям.

2. Разработка методов анализа САУ.

3. Разработка принципов построения и методов коррекции динамических свойств САУ.

Описание некоторых методов решения указанных задач ТАУ является целью предлагаемого курса лекций.

Системы автоматического управления можно классифицировать по следующим признакам.

1. По наличию или отсутствию дополнительных источников энергии САУ подразделяются на системы прямого и непрямого регулирования.

Системы прямого регулирования - это системы, в которых для приведения в действие регулирующего органа не требуется дополнительных источников энергии, т.е. чувствительный элемент непосредственно перемещает регулируемый орган. Примером такой системы может служить регулятор заданного уровня воды в паровом котле, изобретенный русским механиком И.И.Ползуновым в 1765 г.

В противном случае САУ является системой непрямого действия. Эти САУ используются в подавляющем числе случаев, так как почти всегда сигнал ошибки $E(t)$ недостаточен по мощности для управления регулирующим органом.

2. По характеру сигналов, циркулирующих в системе, САУ подразделяются на непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные (гибридные).

3. По виду уравнений, описывающих систему, САУ бывают линейными и нелинейными. Важнейшим свойством линейных систем является свойство (принцип) суперпозиции, который определяется выражением

$$A \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n c_i A x_i(t).$$

Иными словами, для линейной системы при любом операторе A линейной комбинации входных сигналов соответствует та же линейная комбинация выходных сигналов.

4. По характеру изменения задающего (входного) воздействия САУ делятся на системы стабилизации, следящие системы и программные САУ.

Системы стабилизации - это САУ, которые обеспечивают поддержание требуемого значения регулируемой величины относительно неизменного заданного значения $q(t) = q_{\text{const}}$.

Следящие системы предназначены для изменения регулируемой величины $x(t)$ по закону, который заранее неизвестен, так как величина $q(t)$ переменна и, в общем случае, случайна.

Программные САУ - это системы, в которых входное воздействие изменяется по заранее заданной программе

$$q(t) = q_{\text{пр}}(t).$$

Нетрудно заметить, что системы стабилизации и программные САУ являются частным случаем следящих систем.

5. По величине и характеру ошибки $\varepsilon(t)$ САУ бывают статическими и астатическими.

В системах, статических по отношению к какому-либо воздействию, ошибка, вызванная этим воздействием, после окончания процесса регулирования становится равной некоторой постоянной величине $\varepsilon_{\text{ст}}$, называемой статической ошибкой.

В системах, астатических по отношению к какому-либо воздействию, после окончания процесса регулирования ошибка, вызванная этим воздействием, равна нулю.

6. По числу замкнутых контуров регулирования САУ делятся на одноконтурные и многоконтурные.

7. С точки зрения возможностей изменения параметров управляющей подсистемы, в зависимости от изменяющихся в процессе функционирования параметров объекта управления, САУ бывают обыкновенными и самонастраивающимися (адаптивными).

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ САУ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Математические модели САУ

Математическим аппаратом исследования САУ являются дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения описывают движение системы и, с этой точки зрения, являются уравнениями динамики. Из уравнений динамики можно получить уравнения статики, если положить в первых все производные равными нулю. Уравнения статики описывают поведение САУ в установившемся режиме.

Дифференциальные уравнения САУ, составленные в соответствии с физическими законами функционирования ее элементов и факторами, от которых зависят переменные уравнений, практически всегда являются нелинейными. Дифференциальные уравнения САУ, записанные в виде системы уравнений либо в виде одного дифференциального уравнения высокого порядка, представляют собой математическую модель системы. Математическая модель является основой для анализа свойств системы и степени их соответствия поставленным требованиям. Возможности исследования математических моделей САУ во многом определили направления развития теории автоматического управления. Одно из них связано с отсутствием однозначных аналитических методов решения исходных нелинейных дифференциальных уравнений, что не позволяет создать эффективные методы анализа и синтеза САУ. Это положение послужило причиной развития идеи линеаризации, т.е. замены исходной нелинейной модели линейной, близкой по решению к исходной в определенном диапазоне изменения начальных условий и параметров. Линеаризацию исходной нелинейной модели наиболее часто проводят по методу малого отклонения, который основан на разложении нелинейной функции в ряд Тейлора.

Пусть САУ описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = f_i(x, q), \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1.1)$$

В этом уравнении нелинейная функция $f(x, q)$ непрерывно дифференцируема по каждой из переменных. При нулевых или постоянных векторах x_0 и q_0 уравнение равновесия будет таким:

$$0 = f_i(x_0, q_0). \quad (1.2)$$

Представим векторы переменных в виде

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + \Delta x(t) \\ q(t) &= q_0 + \Delta q(t) \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Подставим (1.3) в (1.1), получим

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_0 + \Delta x(t), q_0 + \Delta q(t)). \quad (1.4)$$

Разложим нелинейную функцию в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}(t) &= f_i(x_0 + q_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, q_0) \Delta x + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial q}(x_0, q_0) \Delta q + R_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В этом выражении R_{n+1} представляет собой остаточный член, включающий в себя составляющие со степенями Δx и Δq выше первой. Предположим, что величины отклонений $\Delta x(t)$ и $\Delta q(t)$ настолько малы, что их степени выше первой и их произведения являются бесконечно малыми величинами высших порядков малости по сравнению с $\Delta x(t)$ и $\Delta q(t)$ и ими можно пренебречь. Тогда $R_{n+1} = 0$. Уравнение

$$\dot{x}_0 = f_i(x_0, q_0) \quad (1.6)$$

является уравнением установившегося режима, в частном случае определяемым выражением (1.2). Вычитая (1.6) из (1.5), получаем

$$\Delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, q_0) \Delta x + \frac{\partial f_i}{\partial q}(x_0, q_0) \Delta q, \quad (1.7)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, q_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}(x_0, q_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (1.7) является линейным дифференциальным уравнением относительно отклонений от невозмущенного (установившегося) движения. Итак, невозмущенным движением называется теоретическая траектория, отвечающая уравнению (1.6) установившегося режима при заданных параметрах, начальных условиях и воздействиях. Уравнение в отклонениях (1.7) опи-

сывает возмущенное движение САУ, являющееся результатом действия каких-либо возмущений, приводящих к появлению отклонений от невозмущенного движения.

Система линейных уравнений (1.7) может быть сведена к одному уравнению высокого порядка. Сложность аналитического решения дифференциальных уравнений высокого порядка без применения вычислительной техники и невозможность в этом случае создать общие методы анализа и синтеза САУ привели к широкому использованию на первом этапе развития ТАУ методов, связанных с применением математического аппарата преобразований Лапласа и Фурье. Эти методы и составили сущность так называемой классической теории автоматического управления. Появление и широкое распространение быстродействующих ЭВМ позволило разработать новые методы исследования САУ, определившие современную теорию управления, связанную с понятием пространства состояний.

1.2. Передаточные функции САУ

Понятие передаточной функции системы или какой-либо ее части является одним из основных в классической теории автоматического управления.

Пусть система описывается линейным дифференциальным уравнением n -го порядка.

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = \quad (1.8)$$

$$= b_0 \frac{d^m q}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} q}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dq}{dt} + b_m q.$$

Перейдя в этом выражении к изображениям по Лапласу, при нулевых начальных условиях получим

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) X(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) G(s) \quad (1.9)$$

или

$$A(s)X(s) = B(s)G(s). \quad (1.10)$$

В этих выражениях S - оператор Лапласа; $X(s)$ - изображение выходной величины; $G(s)$ - изображение входной величины;

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n;$$

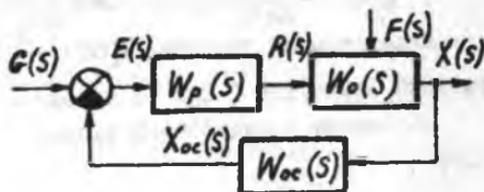
$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m.$$

Из (I.10) можно получить

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (I.11)$$

Передаточной функцией линейной системы или звена называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим САУ, в состав которой входят автоматический регулятор с передаточной функцией $W_p(s)$, объект управления с передаточной функцией $W_o(s)$ и некоторое звено отрицательной обратной связи с передаточной функцией $W_{oc}(s)$. На схеме



Р и с. I.1. Структурная схема САУ (рис. I.1) обозначено: $E(s)$ - изображение ошибки регулирования; $R(s)$ - изображение выходного сигнала автоматического регулятора; $X_{oc}(s)$ - изображение выходного сигнала звена обратной связи; $F(s)$ - изображение действующего возмущения.

Если обозначить передаточные функции звеньев как $W_p(s) = \frac{N(s)}{B(s)}$, $W_o(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$, то система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} A(s)X(s) &= C(s)R(s) + M(s)F(s) \\ B(s)R(s) &= N(s)E(s) \\ E(s) &= G(s) - W_{oc}(s)X(s) \end{aligned} \right\} \quad (I.12)$$

Здесь $M(s)$ - оператор, характеризующий воздействие возмущения. Оставив в правых частях только входное воздействие и возмущение, получим

$$\left. \begin{aligned} A(s)X(s) - C(s)R(s) &= M(s)F(s) \\ B(s)R(s) - N(s)E(s) &= 0 \\ W_{oc}(s)X(s) + E(s) &= G(s) \end{aligned} \right\} \quad (I.13)$$

Характеристический определитель системы

$$\mathcal{D}(s) = \begin{vmatrix} A(s) & -C(s) & 0 \\ 0 & B(s) & -N(s) \\ W_{oc}(s) & 0 & 1 \end{vmatrix} = A(s)B(s) + C(s)N(s)W_{oc}(s). \quad (I.14)$$

Найдя замещенный определитель по $X(s)$ и решив систему (I.13), будем иметь

$$X(s) = \frac{N(s)C(s)}{\mathcal{D}(s)} G(s) + \frac{M(s)B(s)}{\mathcal{D}(s)} F(s). \quad (I.15)$$

Передаточная функция $\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{N(s)C(s)}{D(s)}$ называется передаточной функцией замкнутой САУ по задающему воздействию. Передаточная функция $\Phi_f(s) = \frac{M(s)B(s)}{D(s)}$ называется передаточной функцией замкнутой САУ по возмущению.

Разрешив систему (I.13) относительно ошибки, получим

$$E(s) = \frac{A(s)B(s)}{D(s)} G(s) + \frac{W_{oc}(s)B(s)M(s)}{D(s)} F(s). \quad (I.16)$$

Передаточная функция $\Phi_f(s) = \frac{A(s)B(s)}{D(s)}$ называется передаточной функцией замкнутой САУ по ошибке от задающего воздействия.

Обозначим передаточную функцию прямой цепи регулирования как $W_n(s)$:

$$W_n(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = W_p(s) W_0(s) = \frac{N(s)C(s)}{A(s)B(s)}$$

и найдем зависимость $X_{oc}(s)$ от сигнала ошибки

$$X_{oc}(s) = \frac{N(s)C(s)}{A(s)B(s)} W_{oc}(s) E(s). \quad (I.17)$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{N(s)C(s)}{A(s)B(s)} W_{oc}(s) = W_n(s) W_{oc}(s)$ называется передаточной функцией разомкнутой САУ.

Разделив (I.15) и (I.16) на $A(s)B(s)$, получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{W_n(s)}{1 + W(s)} \\ \Phi_f(s) &= \frac{1}{1 + W(s)} \end{aligned} \right\} \quad (I.18)$$

Нетрудно видеть, что при единичной обратной связи

$$(W_{oc}(s) = 1) \quad W(s) = W_n(s) \quad \text{и} \quad \Phi_f(s) = 1 - \Phi(s). \quad (I.19)$$

Если САУ используется при ненулевых начальных условиях, то, учитывая известное выражение [9]

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0),$$

можно вынести начальные условия в правые части уравнений (I.13) и считать их возмущающими воздействиями.

1.3. Основные понятия современной теории управления

С математической точки зрения анализ систем в пространстве состояний означает применение методов матричного исчисления и векторного анализа к использованию решений систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть САУ описывается системой

$$\dot{X} = AX + BG. \quad (1.20)$$

Здесь X - вектор состояния; G - вектор входа; A - матрица размера $n \times n$; B - матрица размера $n \times m$.

Состоянием системы в момент t_0 является информация, которая вместе с некоторой входной функцией, заданной для $t_0 < t < t_1$, определяет единственную выходную функцию при любом $T > t_0$.

Для полного описания САУ к (1.20) необходимо добавить уравнения, устанавливающие связь между вектором состояния и выходным вектором $Y(t)$ информационной подсистемы

$$Y = CX, \quad (1.21)$$

где C - матрица размера $k \times n$, называемая матрицей выхода или матрицей наблюдения.

Основными понятиями современной теории управления являются понятия управляемости и наблюдаемости.

Система (1.20) называется полностью управляемой, если существует ограниченное управление $G(t)$, позволяющее перевести систему за конечное время $0 < T \leq t_1$ из произвольного начального состояния $X(0)$ в произвольное конечное состояние $X(T)$.

Система является полностью управляемой тогда и только тогда, когда матрица управляемости R_y имеет ранг n :

$$\text{rang } R_y = \text{rang} [B, AB, (A^2)B, \dots, (A)^{n-1}B] = n. \quad (1.22)$$

Система называется наблюдаемой, если по измерениям векторов $Y(t)$ и $G(t)$ на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ можно однозначно определить начальное состояние $X(t_0)$. Систему называют полностью наблюдаемой, если наблюдаемы все ее состояния в любые моменты времени. Система полностью наблюдаема, если ранг матрицы наблюдаемости R_n равен n :

$$\text{rang } R_n = \text{rang} [C^T, A^T C^T, (A^2)^T C^T, \dots, (A)^{n-1} C^T] = n. \quad (1.23)$$

Понятие наблюдаемости позволяет определить минимальный состав измерительных устройств, необходимый для решения задачи управляемости.

2.1. Временные характеристики САУ

Временные характеристики представляют собой зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход некоторого типового воздействия. В ТАУ используются понятия переходной характеристики и импульсной переходной характеристики.

Переходной характеристикой $h(t)$ называется зависимость выходного

сигнала системы от времени при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия $1(t)$ (рис. 2.1). Данное входное воздействие определяется выражением

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Изображение единичного ступенчатого воздействия по Лапласу будет $1(t) \rightarrow 1/s$. Обозначив как

$H(s)$ изображение переходной характеристики, получим

$$H(s) = W(s) L(1(t)) = W(s) \frac{1}{s}, \quad (2.2)$$

где $W(s)$ - передаточная функция системы.

Переходная характеристика может быть найдена либо непосредственным решением дифференциального уравнения системы, либо путем обратного преобразования Лапласа, в том числе и с помощью таблиц.

При неединичном ступенчатом воздействии $g(t) = N 1(t)$, где $N = \text{const}$, в соответствии с принципом суперпозиции выходная реакция системы будет

$$x(t) = N h(t). \quad (2.3)$$

Импульсной переходной функцией $k(t)$ называется зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход единичного импульса (δ -функции) $\delta(t)$.

Единичный импульс (рис. 2.2) определяется выражением

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \infty, & t = \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (2.4)$$

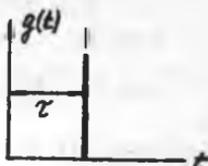
где может быть и $\tau = 0$.

Для δ -функции справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (2.5)$$

т.е. площадь этой функции равна 1. Легко показать, что δ -функция и единичное ступенчатое воздействие связаны соотношением

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}(1(t)). \quad (2.6)$$



Р и с. 2.2. Единичный импульс

В соответствии с этим

$$L(\delta(t)) = L\left(\frac{d}{dt}(1(t))\right) = sL(1(t)) = 1. \quad (2.7)$$

Поэтому импульсная переходная характеристика определяется выражением

$$K(s) = W(s), \quad (2.8)$$

таким образом, передаточная функция САУ является изображением ее функции веса.

Из уравнений (2.8) и (2.2) следует

$$k(t) = \frac{d}{dt}(h(t)). \quad (2.9)$$

Пример. Найти переходную характеристику и функцию веса системы с передаточной функцией $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$,

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{k}{s(Ts + 1)} = k \frac{d}{s(s + d)},$$

где $d = \frac{1}{T}$.

По таблицам преобразования ЛАПЛАСА находим

$$h(t) = k(1 - e^{-dt}) = k(1 - e^{-t/T}),$$

$K(s) = \frac{k}{Ts + 1} = k \frac{d}{s + d}$ и, воспользовавшись таблицами, получаем $k(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$.

Такое же выражение для $k(t)$ получим, продифференцировав функцию $h(t)$.

Импульсную переходную характеристику удобно использовать для определения реакции системы на воздействие $f(t)$ произвольного вида:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) k(t - \tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Последнее выражение носит название интеграла Дюамеля [7, 5].

Естественно, что сигнал на выходе физически реализуемой САУ не может появиться раньше входного сигнала, т.е. $k(t) = 0$ при $t < 0$. С точки зрения преобразования Лапласа это соответствует условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = 0. \quad (2.11)$$

Если

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (2.12)$$

то условие (2.11) выполняется только при $m < n$. Это и есть выражение принципа физической реализуемости системы.

2.2. Частотные характеристики САУ

Пусть входное воздействие $q(t)$ представляет собой гармоническую функцию вида

$$q(t) = G_m \cos \omega t. \quad (2.13)$$

Используя формулу Эйлера, получим

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

Тогда

$$q(t) = \frac{G_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}. \quad (2.14)$$

Дифференциальное уравнение САУ в изображениях по Лапласу запишется в виде

$$A(s)X(s) = B(s)G(s), \quad (2.15)$$

где $A(s)$ - полином порядка n ; $B(s)$ - полином порядка m .

При $q(t) = \frac{G_m}{2} e^{j\omega t}$ частное решение уравнения (2.15) ищется в форме

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} W(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (2.16)$$

где $W(j\omega)$ - некоторая функция частоты ω .

Подставив $q(t)$ и $x_1(t)$ в (2.15), сократив на $\frac{G_m}{2}$ и $e^{j\omega t}$, получим

$$\begin{aligned} (a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n)W(j\omega) &= \\ &= b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned}$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \quad (2.17)$$

Сравнивая (2.17) и (2.12), можно заключить, что функция $W(j\omega)$ получается из передаточной функции $W(s)$ простой заменой $s=j\omega$.

Функция $W(j\omega)$ называется частотной передаточной функцией системы. Комплексную функцию $W(j\omega)$ представим в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.18)$$

Тогда

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$$

Если в выражение (2.15) подставить функцию $q(t) = \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}$, то по аналогии получим $x_2(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega) e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}$.

Согласно принципу суперпозиции

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = G_m A(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2} = \quad (2.19)$$

$$= G_m A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Последнее выражение показывает, что вынужденные колебания, вызываемые в устойчивой линейной динамической системе гармоническим входным воздействием, представляет собой гармоническую функцию времени, имеющую ту же угловую частоту, что и входное воздействие, но отличающуюся от последнего по амплитуде и по фазе.

Зависимость отношения $A(\omega)$ амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала от частоты называется амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) системы.

Зависимость фазового сдвига $\varphi(\omega)$ между входным и выходным сигналами от частоты называется фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) системы.

С этой точки зрения частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ называют еще амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ). Вычисление частотных характеристик удобно вести по известной передаточной функции системы $W(s)$, сделав в ней замену $s=j\omega$:

$$W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (2.20)$$

Здесь $U(\omega)$ - вещественная частотная характеристика, $jV(\omega)$ - мнимая частотная характеристика. Отсюда следует:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (2.21)$$

Пример. Определим частотные характеристики звена с передаточной функцией $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$.

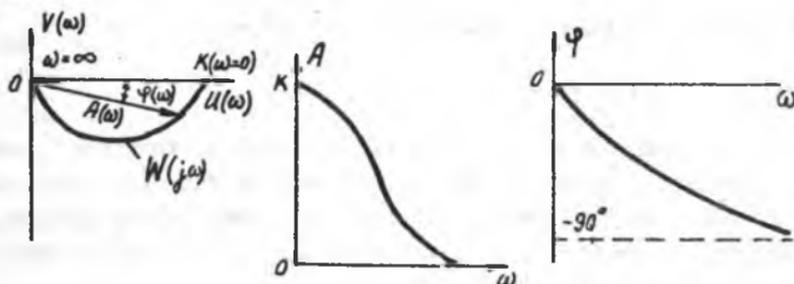
После подстановки $s = j\omega$ будем иметь

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = k \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -k \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega.$$

Этим выражениям соответствуют графики характеристик, показанные на рис. 2.3.



Р и с. 2.3. Частотные характеристики звена с передаточной функцией

2.3. Логарифмические частотные характеристики

Частотные характеристики широко распространены в практике анализа и синтеза САУ и являются основой аппарата классической теории автоматического управления. Недостатком их является сложность построения, так как, особенно для систем высокого порядка, они представляют собой сложные функции частоты и графически отображаются в виде кривых самой различной формы. В целях исключения этого недостатка используются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАХ) называется кривая, соответствующая выражению

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \quad (2.22)$$

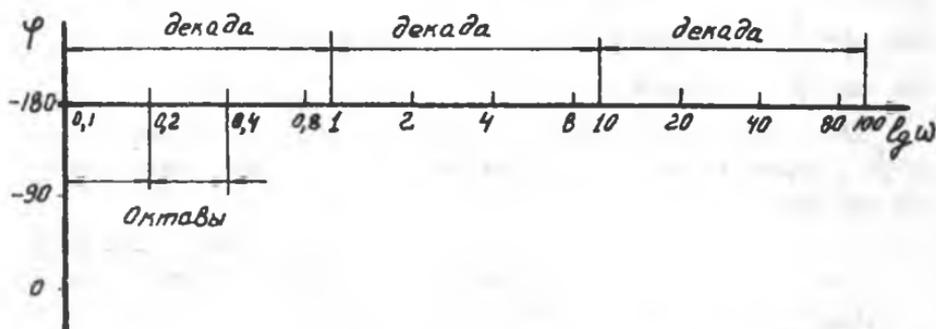
и построенная в логарифмическом масштабе частот.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФХ) называют

фазовую частотную характеристику $\varphi(\omega)$, построенную в логарифмическом масштабе частот.

Величина $L(\omega)$ измеряется в децибелах, $\varphi(\omega)$ - в градусах. Единицей измерения логарифмической оси частот являются октавы и декады.

Октавой называется частотный интервал, соответствующий изменению частоты в два раза и равный $\lg 2$. Декадой называется частотный интервал, соответствующий изменению частоты в 10 раз и равный $\lg 10 = 1$. Легко подсчитать, что в одной декаде содержится 3,32 октавы. Точка, соответствующая $\omega = 0$, лежит слева в бесконечности, так как $\lg 0 = -\infty$. Поэтому ось ординат проводят через любую точку на оси частот так, чтобы справа располагалась та часть ЛЧХ, которую нужно исследовать. Ось частот разбивается в логарифмическом масштабе, но для удобства инженерной практики под точками этой оси пишут значения собственно частот ω (рис. 2.4).



Р и с. 2.4. Оси логарифмической системы координат

Если необходимая частота ω_x не совпадает ни с октавой, ни с декадой, то найти ее положение на оси частот при избранном масштабе m [мм/дек] можно по выражению

$$\omega_x = m \lg \frac{\omega_x}{\omega_0}, \quad (2.23)$$

где ω_0 - частота, соответствующая началу координат.

Обратная задача решается использованием формулы

$$\omega_x = \omega_0 \cdot 10^{\omega_x/m}. \quad (2.24)$$

Важнейшим свойством ЛЧХ является то, что ЛАХ на графиках могут изображаться отрезками прямых линий, наклон которых к оси частот известен.

Во многих случаях передаточную функцию системы можно представить в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$

Тогда $W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}$.

Очевидно, что ЛЧХ системы будут

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega).$$

(2.25)

Пример. Определим ЛЧХ для САУ с передаточной функцией $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$.

Используя результаты предыдущего примера, получим

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

При $\omega < \frac{1}{T}$ величина $T^2\omega^2 \ll 1$ и $L(\omega) = 20 \lg k$.

При $\omega > \frac{1}{T}$ величина $T^2\omega^2 \gg 1$ и $L(\omega) = -20 \lg T\omega$.

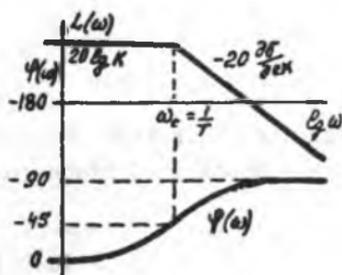
ЛАХ системы состоит из двух прямых, которые сопрягаются в точке $\omega_0 = \frac{1}{T}$. Первая прямая параллельна оси частот, вторая имеет наклон -20 дБ/дек.

Частота ω_0 называется частотой сопряжения. Исходя из удобства определения показателей устойчивости САУ, ось ординат в отношении ЛФХ разбивают так, что с началом координат совпадает точка -180° ; а положительное направление направлено вниз. ЛЧХ для рассматриваемого примера показаны на рис. 2.5. ЛАХ, построенная в виде отрезков прямых, называется асимптотической.

В заключение отметим, что так как для физически реализуемых систем $n > m$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = 0. \quad (2.26)$$

Это означает, что реальные САУ являются фильтрами низких частот.



Р и с. 2.5. ЛЧХ системы с передаточной функцией

3. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

3.1. Динамические звенья автоматических систем

При изучении САУ составляющие их элементы можно классифицировать по функциональному назначению и принципу действия. Но такая классификация не дает ответа на основные вопросы ТАУ - какими динамическими свойствами обладает система и какие действия нужно предпринять, чтобы улучшить эти свойства. С этой точки зрения в ТАУ принято представлять САУ в виде соединения динамических звеньев.

Динамическое звено - это математическая модель элемента или части САУ, записанная в виде одного линейного дифференциального уравнения либо в виде системы дифференциальных уравнений в форме Коши. Такое представление САУ позволяет абстрагироваться от физической их сущности и проводить исследования любых систем, используя единый математический аппарат.

Пусть некоторая САУ описана передаточной функцией

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (3.1)$$

где $B(s)$ - полином порядка m ; $A(s)$ - полином порядка n , причем $m < n$.

Найдя корни полиномов $B(s)$ и $A(s)$, каждый из них можно представить в виде произведения элементарных полиномов, каждый из которых имеет порядок не выше второго. Вещественному корню соответствует полином первого порядка, паре комплексно-сопряженных корней - полином второго порядка. Тогда передаточную функцию САУ можно представить в виде

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)\dots W_n(s), \quad (3.2)$$

где каждая элементарная передаточная функция $W_i(s)$ имеет порядок не выше второго и описывает элементарное динамическое звено. Исходя из (3.1) и (3.2), можно сказать, что элементарное динамическое звено - это искусственно выделяемая часть САУ, соответствующая какому-либо элементарному алгоритму.

В ТАУ принято динамические звенья не выше второго порядка называть типовыми звеньями. Существует восемь типов звеньев:

1. Усилительное или безынерционное звено

$$W(s) = k.$$

2. Идеальное дифференцирующее звено

$$W(s) = k s.$$

3. Идеальное интегрирующее звено

$$W(s) = k/s.$$

4. Аperiodическое звено первого порядка

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

5. Звено второго порядка

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1};$$

а) колебательное звено: $0 < \zeta < 1$;

б) консервативное звено: $\zeta = 0$;

в) аperiodическое звено второго порядка: $\zeta \geq 1$.

6. Форсирующее звено первого порядка

$$W(s) = k(Ts + 1).$$

7. Форсирующее звено второго порядка

$$W(s) = k(Ts^2 + 2T\zeta s + 1).$$

8. Звено чистого запаздывания

$$W(s) = e^{-Ts}.$$

Схема САУ, представленная в виде соединения динамических звеньев, называется структурной схемой.

Динамические звенья обладают направленностью действия - от входа к выходу, что на схемах обозначается стрелками.

3.2. Соединения динамических звеньев

Имеются три основных вида соединения динамических звеньев:

- последовательное;

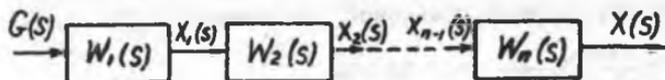
- параллельное;

- встречно-параллельное или соединение в виде обратной связи.

Последовательным называется соединение, когда выходная переменная каждого предыдущего звена является входной переменной для каждого последующего звена (рис. 3.1).

Из рис. 3.1 следует, что

$$X(s) = W_n(s)X_{n-1}(s) = W_n(s)W_{n-1}(s)X_{n-2}(s) = W_1(s)W_2(s)\dots W_n(s)G(s).$$



Р и с. 3.1. Последовательное соединение звеньев

Таким образом, передаточная функция последовательного соединения динамических звеньев равна произведению передаточных функций составляющих звеньев:

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \quad (3.3)$$

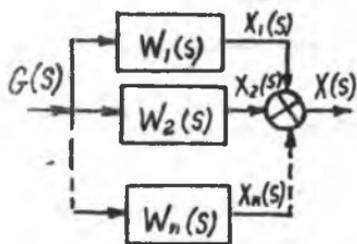
Параллельным называется такое соединение звеньев, при котором входная переменная для всех звеньев одна и та же, а выходная - равна алгебраической сумме выходных переменных всех звеньев.

Очевидно (рис. 3.2), что

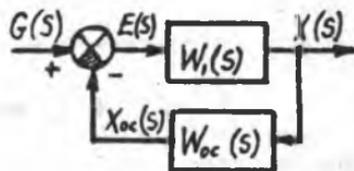
$$\begin{aligned} X(s) &= W_1(s)G(s) + W_2(s)G(s) + \dots + W_n(s)G(s) = \{W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s)\}G(s) = \\ &= \sum_{i=1}^n W_i(s)G(s). \end{aligned}$$

Передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме их передаточных функций:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (3.4)$$



Р и с. 3.2. Параллельное соединение звеньев



Р и с. 3.3. Встречно-параллельное соединение звеньев

Встречно-параллельным называется соединение динамических звеньев, когда сигнал с выхода звена прямой цепи подается на его вход через звено обратной связи.

Из рис. 3.3 следует:

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= W_1(s)E(s) \\ E(s) &= G(s) \pm X_{oc}(s) \\ X_{oc}(s) &= W_{oc}(s)X(s) \end{aligned} \right\} .$$

Разрешив эту систему уравнений относительно $X(s)$, получим

$$X(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_{oc}(s)} G(s) = \Phi(s)G(s), \quad (3.5)$$

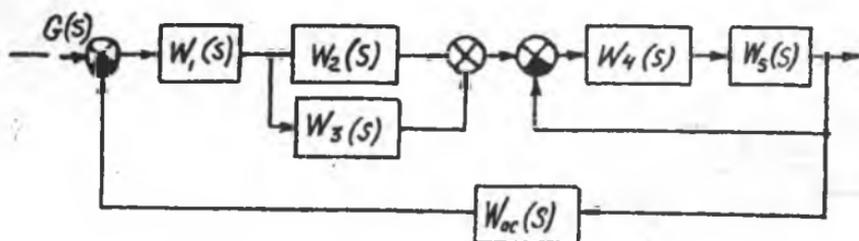
где $\Phi(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_{oc}(s)}$ - передаточная функция замкнутой системы, причем знак "-" соответствует положительной обратной связи, а знак "+" - отрицательной.

Сравнивая с материалами п. 1.2, можно сделать вывод, что передаточная функция $W(s) = W_1(s)W_{oc}(s)$ является передаточной функцией разомкнутой системы. Разрешив систему уравнений относительно изображения ошибки, получим

$$E(s) = \Phi_E(s)G(s) = \frac{1}{1 + W(s)} G(s). \quad (3.6)$$

Полученные выражения позволяют определять передаточные функции сложных многоконтурных САУ по их структурной схеме.

Пример. САУ задана своей структурной схемой (рис. 3.4). Найти передаточные функции САУ.



Р и с. 3.4. Структурная схема САУ

В соответствии с рассмотренными типами соединений звеньев получим

$$W_{23}(s) = W_2(s) + W_3(s); \quad W_{45}(s) = W_4(s) \cdot W_5(s).$$

Передаточная функция прямой цепи будет

$$W_n(s) = W_1(s)W_{23}(s) \frac{W_{45}(s)}{1 + W_{45}(s)}.$$

Передаточные функции замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)},$$

$$\varphi_{\xi}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)}$$

Сворачивание структурных схем по рассмотренным правилам возможно при отсутствии в структурной схеме перекрестных связей. При наличии перекрестных связей от них освобождаются по правилам эквивалентных структурных преобразований. Эти правила приведены в приложении.

3.3. Характеристики типовых динамических звеньев

1. Усилительное звено $W(s) = k$.

Очевидно: $h(t) = k \cdot 1(t)$; $W(j\omega) = k$;

$$k(t) = k \cdot \delta(t); A(\omega) = k;$$

$$L(\omega) = 20 \lg k; \varphi(\omega) = 0.$$

2. Идеальное дифференцирующее звено $W(s) = ks$.

Изображение переходной функции

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s} = k; \text{ поэтому}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{k\} = k \delta(t); k(t) = h'(t) = k \delta'(t).$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega) = jk\omega$, следовательно, $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = k\omega$. Поэтому $A(\omega) = k\omega$; $\varphi(\omega) = +90^\circ$; $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega$. Таким образом, ЛАХ звена представляет собой прямую линию с наклоном $+20$ дБ/дек.

ЛАХ (рис. 3.5) пересекает ось частот в точке ω_c , которая называется частотой среза. Так как в этой точке

$20 \lg k + 20 \lg \omega_c = 0$, то для рассматриваемого звена

$$\omega_c = 1/k. \quad (3.7)$$

3. Идеальное интегрирующее звено

$$W(s) = \frac{k}{s}. \text{ Для этого звена } H(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2}.$$

Тогда $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = kt$; $k(t) = h'(t) = k$;

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}, \text{ т.е. } U(\omega) = 0, V(\omega) = -\frac{k}{\omega}.$$

При этом $A(\omega) = \frac{k}{\omega}$; $\varphi(\omega) = -90^\circ$. $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$ - это уравнение прямой с наклоном -20 дБ/дек (рис. 3.6).

Для этого звена из уравнения $20 \lg k - 20 \lg \omega_c = 0$ следует, что

$$\omega_c = k. \quad (3.8)$$

4. Аperiodическое звено 1-го порядка (характеристики звена рассмотрены в разд. 2.1-2.3).

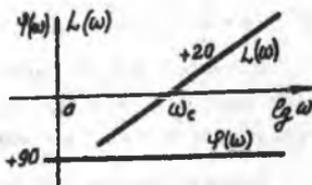


Рис. 3.5. ЛЧХ идеального дифференцирующего звена



Р и с. 3.6. Характеристики идеального интегрирующего звена

5. Звено 2-го порядка

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}$$

Дифференциальное уравнение этого звена можно записать в виде

$$\left(s^2 + 2\zeta/T s + \frac{1}{T^2} \right) X(s) = \frac{k}{T^2} G(s). \quad (3.9)$$

Здесь T - постоянная времени звена, характеризующая его инерционность. Характеристическое уравнение звена имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{1}{T} \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Если корни комплексно-сопряженные, что соответствует случаю $\zeta < 1$, то при $G(s) = 0$ решение уравнения звена имеет вид

$$x(t) = e^{-\frac{\zeta}{T}t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t), \quad (3.10)$$

где $\beta = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Процесс имеет колебательный характер. Поэтому при $\zeta < 1$ звено носит название колебательного звена. Параметр ζ , характеризующий затухание колебаний, называется показателем затухания.

Колебательное звено

Переходная функция, полученная решением уравнения (3.9), имеет вид

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\zeta}{T}t} \left(\frac{d}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right) \right], \quad d = -\frac{\zeta}{T}. \quad (3.11)$$

Тогда

$$k(t) = h'(t) = k \frac{d^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\frac{\zeta}{T}t} \sin \beta t. \quad (3.12)$$

Сделав замену $s = j\omega$, после преобразований получим

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4T^2\zeta^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2}; & \omega < \frac{1}{T}; \\ -180^\circ + \arctg \frac{2T\zeta\omega}{T^2\omega^2-1}; & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

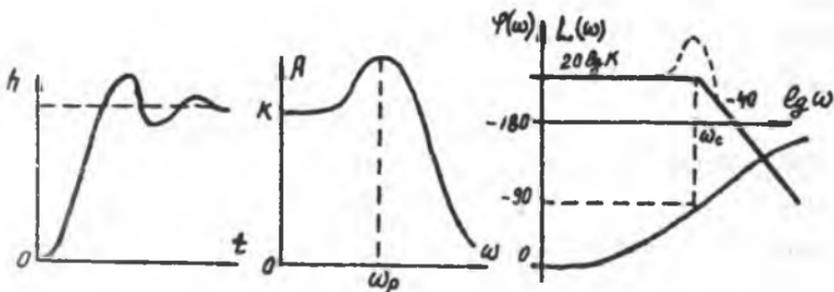
Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4T^2\zeta^2\omega^2}.$$

При

$$\omega < \frac{1}{T}, \quad \omega^2 T^2 \ll 1, \quad 4T^2\zeta^2\omega^2 \ll 1 \quad \text{и} \quad L(\omega) = 20 \lg k.$$

При $\omega > \frac{1}{T}$ $\omega^2 T^2 \gg 1$ и $(\omega^2 T^2)^2 \gg 4T^2\zeta^2\omega^2$. На этом участке $L(\omega) = 20 \lg k = 40 \lg T\omega$, т.е. представляет собой прямую с наклоном -40 дцб/дек (рис. 3.7).



Р и с. 3.7. Характеристики колебательного звена

Частота сопряжения $\omega_0 = \frac{1}{T}$. В окрестности этой точки точная ЛАХ может сильно отличаться от асимптотической, представляемой отрезками прямых. Для уточнения ЛАХ на этом участке разработаны специальные графики, определяющие величину поправки в зависимости от величины ζ .

Резонансная частота определяется выражением

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (3.13)$$

В этой точке

$$L(\omega_p) = 20 \lg \frac{k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (3.14)$$

Апериодическое звено 2-го порядка

Если корни уравнения (3.9) вещественные, что бывает при $\zeta \geq 1$, передаточная функция звена приобретает вид

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_2 > T_1. \quad (3.15)$$

Для этой передаточной функции по таблицам преобразования Лапласа можно получить

$$h(t) = k \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right),$$

$$k(t) = \frac{k}{T_2 - T_1} \left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right). \quad (3.16)$$

Частотные характеристики определяются как для последовательного соединения двух апериодических звеньев I-го порядка.

Характеристики всех типовых звеньев приведены в приложении.

Пример. Передаточная функция летательного аппарата (ЛА) по углу тангажа может быть записана в виде

$$W(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{s(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)} = \frac{k}{s} (T_1 s + 1) \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} = W_1(s) W_2(s) W_3(s).$$

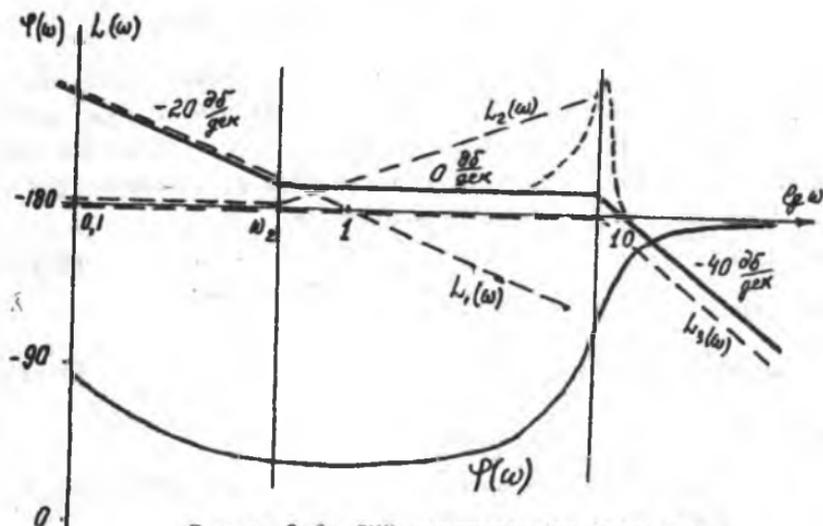
Построим ЛЧХ ЛА ПРИ $k=0,9$; $T_1=1,8$; $T=0,12$; $\zeta=0,1$.
Из предыдущего следует, что

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg T_1 \omega + \begin{cases} -\arctg \frac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}; \\ -180^\circ + \arctg \frac{2T\zeta\omega}{T^2\omega^2-1} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Частоты сопряжения $\omega_{02} = \frac{1}{T_1} = 0,56$; $\omega_{03} = 8,3$.

Построение ЛЧХ показано на рис. 3.8.



Р и с. 3.8. ЛЧХ летательного аппарата

Построение $L(\omega)$ ведется суммированием наклонов $L_1(\omega), L_2(\omega), L_3(\omega)$ в точках сопряжения. Ввиду малости величины ζ , ЛАХ колебательного звена уточняется по специальным графикам, приведенным в приложении.

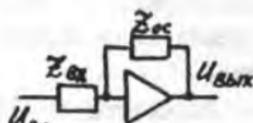
4. ИССЛЕДОВАНИЕ САУ НА АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

4.1. Аналоговые вычислительные машины (АВМ)

Из предыдущего материала видно, что исследование САУ связано с решением дифференциальных уравнений и определения на этой основе их работоспособности и качества. Непосредственное решение дифференциальных уравнений, даже с применением ЦВМ, не всегда оправдано с точки зрения обзорности и наглядности численных результатов и возможностей дискретизации процессов для исследования реальных непрерывных систем.

С этой точки зрения для исследования непрерывных САУ широкое применение нашел метод математического моделирования с использованием АВМ. При математическом моделировании на АВМ реальная система заменяется моделью другой физической природы, причем дифференциальные уравнения, описывающие САУ и ее модель, одинаковы.

Основным элементом АВМ является операционный усилитель (ОУ), который представляет собой усилитель постоянного тока, охваченный глубокой отрицательной обратной связью. На рис. 4.1 обозначено: $Z_{вх}$ - комплексное сопротивление входной цепи; $Z_{ос}$ - комплексное сопротивление обратной связи.



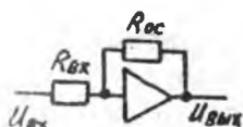
Р и с. 4.1. Операционный усилитель

Комплексный коэффициент передачи ОУ определяется соотношением

$$K = - \frac{Z_{ос}}{Z_{вх}} . \quad (4.1)$$

Рассмотрим основные типы решающих усилителей.

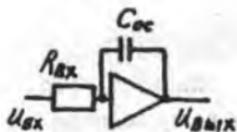
1. Масштабный усилитель показан на рис. 4.2. В этом случае



$$Z_{вх} = R_{вх} , Z_{ос} = R_{ос} \text{ и } U_{вых} = - \frac{R_{ос}}{R_{вх}} U_{вх} . \quad (4.2)$$

Если $R_{ос} = R_{вх}$, то $U_{вых} = -U_{вх}$ и масштабный усилитель называют инвертором.

Р и с. 4.2. Масштабный ОУ



Р и с. 4.3. Интегрирующий ОУ

2. Интегрирующий ОУ представлен на рис. 4.3

В этом случае $Z_{вх} = R_{вх}$, $Z_{oc} = \frac{1}{\omega C_{oc}}$. Можно пока-

$$U_{вых} = \frac{1}{T} \int_0^t U_{вх} dt, \quad T = R_{вх} C_{oc}. \quad (4.3)$$

В частности, если $C_{oc} = 1 \text{ мкФ}$, $R_{вх} = 1 \text{ МОм}$, то $T = 1 \text{ с}$.

3. Суммирующий усилитель показан на рис. 4.4. Для этого усилителя

$$U_{вых} = - \sum_{i=1}^n \frac{Z_{oc}}{Z_{вхi}} U_i. \quad (4.4)$$

Если $Z_{oc} = R_{oc}$, $Z_{вхi} = R_{вхi}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то получим простое суммирование с весами

$R_{oc}/R_{вхi}$. Если $Z_{oc} = \frac{1}{\omega C_{oc}}$, $Z_{вхi} = R_{вхi}$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

то получим интегрирование с суммированием

$$U_{вых} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \int_0^t U_i dt, \quad T_i = R_{вхi} C_{oc}. \quad (4.5)$$

Комбинируя $Z_{вх}$ и Z_{oc} , можно реализовать и другие математические операции.

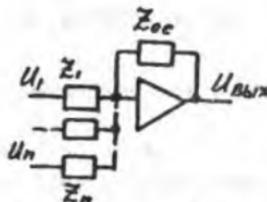
На базе рассмотренных ОУ можно создавать схемы, моделирующие движение достаточно сложных динамических систем. В состав АВМ входят обычно также блоки моделирования нелинейных функций, блоки умножения и деления.

Исследованию САУ предшествует подготовительная работа, которая называется программированием АВМ. В процессе программирования выполняют следующие операции:

- 1) приводят дифференциальные уравнения к виду, удобному для моделирования;
- 2) выбирают масштабные коэффициенты и составляют машинные уравнения;
- 3) составляют структурную схему модели и набирают ее на АВМ.

4.2. Масштабирование переменных

В АВМ все зависимые переменные дифференциального уравнения отображаются машинными переменными в виде электрических напряжений. Поэтому необходимо ввести масштабные коэффициенты, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между исходными уравнениями и их машинным ана-



Р и с. 4.4. Суммирующий ОУ

логом, при котором обеспечивается изменение машинных переменных в допустимом диапазоне в течение всего процесса решения. Соответствие между величиной $X(t)$ и ее аналоговой моделью $U_x(t)$ устанавливается соотношением

$$U_x(t) = m_x x(t), \quad (4.6)$$

где m_x - масштабный коэффициент, имеющий размерность $\left[\frac{\delta}{e_{\text{изм}} x(t)} \right]$.

При выборе масштабных коэффициентов следует учитывать, что чем больше масштаб, тем меньше влияние погрешностей, обусловленных дрейфом нуля ОУ, шумами и т.д. Но при этом должно выполняться условие

$$m_x \leq \frac{U_{\max}}{|x_{\max}|}. \quad (4.7)$$

Для ламповых АВМ типа МН-7 $U_{\max} = 100$ В.

Для АВМ на транзисторах $U_{\max} = 50; 25$ В.

Задачи на АВМ могут решаться в реальном, ускоренном или замедленном масштабе времени:

$$\tau = m_t t, \quad (4.8)$$

где t - реальное время; τ - машинное время; m_t - масштаб времени.

Если $m_t = 1$, то говорят, что АВМ работает в реальном времени. Физически это означает, что скорость реального процесса равна скорости вычислительного процесса, его моделирующего. Если время моделирования меньше времени реального физического процесса, то говорят, что АВМ работает в ускоренном времени. При этом $m_t < 1$. При $m_t > 1$ АВМ работает в замедленном времени. Решение задач в ускоренном времени целесообразно при исследовании медленных процессов, а в замедленном времени - быстротекающих процессов.

Изменение масштаба времени иногда целесообразно использовать с целью изменения значений коэффициентов машинных уравнений, чтобы переменные (или коэффициенты) не выходили за допустимые пределы.

4.3. Машинные уравнения и структурные схемы модели

4.3.1. Общий метод программирования

Данный метод удобен, если в правой части исходного дифференциального уравнения нет производных. Рассмотрим этот метод на примере дифференциального уравнения 4-го порядка

$$a_0 p^4 x(t) + a_1 p^3 x(t) + a_2 p^2 x(t) + a_3 p x(t) + a_4 x(t) = q(t). \quad (4.9)$$

Здесь $p = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования.

Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$p^4 x(t) = \frac{1}{a_0} q(t) - \frac{a_1}{a_0} p^3 x(t) - \frac{a_2}{a_0} p^2 x(t) - \frac{a_3}{a_0} p x(t) - \frac{a_4}{a_0} x(t). \quad (4.10)$$

Введем масштабы m_x, m_q, m_t . При введении масштаба времени необходимо иметь в виду, что $x(\tau) = x(m_t t)$, и поэтому $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = m_t \frac{dx}{d\tau}$,

т.е. $p x(t) = m_t p x(\tau)$.

В общем случае

$$p^i x(t) = m_t^i p^i x(\tau). \quad (4.11)$$

С учетом масштабов из (4.10) получим

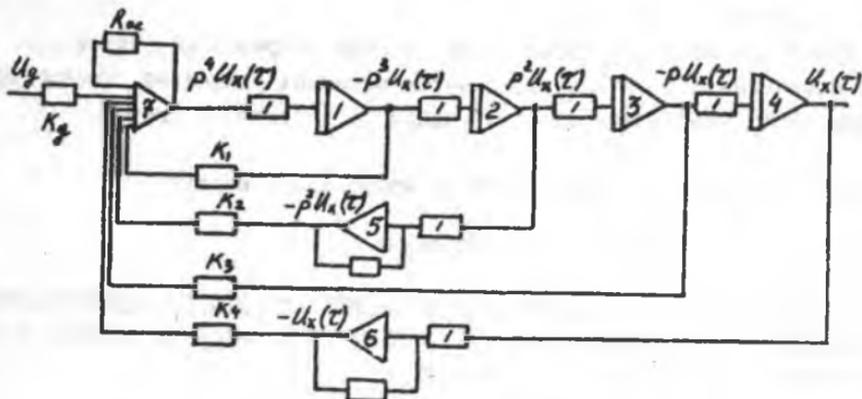
$$p^4 \frac{m_t^4}{m_x} u_x(\tau) = \frac{1}{a_0 m_q} u_q(\tau) - \frac{a_1 m_t^3}{m_x a_0} u_x(\tau) - \frac{a_2 m_t^2}{a_0 m_x} u_x(\tau) - \frac{a_3 m_t}{a_0 m_x} u_x(\tau) - \frac{a_4}{a_0 m_x} u_x(\tau).$$

Окончательно для старшей производной получим

$$p^4 u_x(\tau) = k_q u_q(\tau) - k_1 p^3 u_x(\tau) - k_2 p^2 u_x(\tau) - k_3 p u_x(\tau) - k_4 u_x(\tau);$$

$$k_q = \frac{m_x}{a_0 m_q m_t^4}; \quad k_1 = \frac{a_1}{a_0 m_t}; \quad k_2 = \frac{a_2}{a_0 m_t^2}; \quad k_3 = \frac{a_3}{a_0 m_t^3}; \quad k_4 = \frac{a_4}{a_0 m_t^4} \quad (4.12)$$

Структурная схема модели строится по уравнению (4.12) в предположении, что старшая производная известна. Далее она последовательно интегрируется, и полученные низшие производные подаются на вход с целью формирования старшей производной (рис. 4.5).



Р и с. 4.5. Схема модели при общем методе программирования

Для удобства усилители на схеме обычно нумеруют, причем на наборном поле АВМ они также имеют порядковые номера. Часто входы усилителей на наборном поле тоже нумеруются (например, МН-7), что облегчает набор схемы. После набора схемы на АВМ и установки коэффициентов модель готова к исследованию.

4.3.2. Метод вспомогательной переменной

Данный метод применяется для программирования дифференциальных уравнений, содержащих в правой части производные от входного воздействия, т.е. уравнений вида:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} x(t) = \sum_{i=0}^m b_i p^{m-i} q(t). \quad (4.13)$$

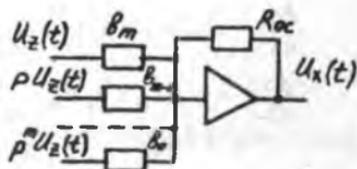
Введем вспомогательную переменную $z(t)$, которая связана с искомой функцией соотношением

$$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i p^{m-i} z(t). \quad (4.14)$$

Подставив (4.14) в (4.13) и сократив на $\sum_{i=0}^m b_i p^{m-i}$, получим:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} z(t) = q(t). \quad (4.15)$$

Программирование уравнения (4.15) можно производить общим методом, а для получения искомой функции $x(t)$ следует использовать схему, изображенную на рис. 4.6.



Р и с. 4.6. Схема участка модели для получения $x(t)$

4.3.3. Метод канонической формы

Название метода определяется тем, что математическим описанием САУ является система дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\frac{d x_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{n+i-j}(t) + b_i q_i(t), \quad (4.16)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Введя масштабы m_i, m_{q_i}, m_t получим,

$$\frac{d U_i(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} m_i}{m_t m_{n+i-j}} U_{n+i-j}(\tau) + \frac{b_i m_i}{m_t m_q} U_{q_i} = F_i(u_j, u_{q_i}), \quad (4.17)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.



Р и с. 4.7. Схема модели при методе канонической формы

Тогда структурная схема модели состоит из n одинаковых каналов, входы которых формируются алгебраическим суммированием выходных переменных каналов с соответствующими коэффициентами (рис. 4.7).

Если описание САУ задано в виде передаточной функции, то необходимо перейти к ее описанию в виде системы дифференциальных уравнений в форме Кови.

Пусть передаточная функция системы

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{X(s)}{G(s)}. \quad (4.18)$$

Будем вначале считать, что $m=n$. Разделив коэффициенты полиномов на a_0 , дифференциальное уравнение запишем в виде

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)x = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n)q. \quad (4.19)$$

Это уравнение приводится к системе уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_i + 1 + k_i q \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \frac{dx_n}{dt} &= -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1 + k_n q \end{aligned} \right\}, \quad (4.20)$$

где $x = x_1 + k_0 q$.

Коэффициенты k_i определяются рекуррентными формулами:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= b_0 \\ k_1 &= b_1 - a_1 k_0 \\ k_2 &= b_2 - a_1 k_1 - a_2 k_0 \\ &\dots \\ k_i &= b_i - \sum_{m=0}^{i-1} a_{i-m} k_m \end{aligned} \right\}. \quad (4.21)$$

Если $m < n$, соответствующие коэффициенты b_0, b_1, \dots полагаются равными нулю.

4.3.4. Структурное программирование

Сущность структурного программирования заключается в независимой аналоговой реализации модели каждого динамического звена системы с последующим соединением полученных моделей в соответствии со структурной схемой. Процесс структурного программирования АВМ состоит из следующих этапов:

1) структурная схема САУ представляется в виде соединения типовых динамических звеньев;

2) каждое динамическое звено представляется в виде аналоговой модели;

3) полученные элементарные модели соединяются в общую схему в соответствии с заданной структурной схемой.

Для моделей типовых динамических звеньев разработаны подробные таблицы, которые приводятся в приложении. Комбинируя соединения активных и реактивных элементов, можно получить и более сложные аналоговые модели динамических звеньев.

В АВМ в качестве реактивных элементов используются емкости. При разработке аналоговых моделей динамических звеньев следует помнить, что последовательное соединение активного и емкостного сопротивления дает комплексное сопротивление

$$Z_1(j\omega) = R + 1/j\omega C = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} \quad (4.22)$$

При параллельном соединении

$$\frac{1}{Z_2(j\omega)} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1 + j\omega RC}{R},$$

а следовательно,

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC} \quad (4.23)$$

Переходя к изображению по Лапласу ($j\omega = s$) получим соответственно

$$\left. \begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{Ts + 1}{Cs} \\ Z_2(s) &= \frac{R}{Ts + 1} \end{aligned} \right\} \quad T = RC \quad (4.24)$$

Пример. Построить аналоговую модель аperiodического звена I-го порядка,

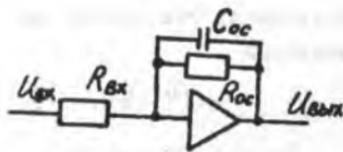
Очевидно, что для данного звена должно быть

$$Z_{oc}(s) = \frac{R_{oc}}{Ts + 1} \quad \text{и} \quad Z_{вх}(s) = R_{вх}.$$

$$\text{Тогда } K(s) = \frac{R_{oc}}{R_{вх}} \frac{1}{Ts + 1} = \frac{k}{Ts + 1},$$

$$\text{где } k = \frac{R_{oc}}{R_{вх}}; \quad T = R_{oc} C_{oc}.$$

Схема аналоговой модели представлена на рис. 4.8.



Р и с. 4.8. Аналоговая модель аperiodического звена I-го порядка

5. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Основные понятия теории устойчивости

В процессе функционирования система подвергается различного рода возмущающим воздействиям, которые вызывают отклонения ее от положения равновесия или заданного движения.

Система автоматического управления называется устойчивой, если после прекращения действия возмущений, вызвавших ее отклонение от положения равновесия, она возвращается в положение равновесия или заданного движения. Следовательно, только устойчивая САУ является работоспособной.

Пусть САУ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dY_k}{dt} = Y_k(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad (5.1)$$

$k=1, 2, \dots, n,$

где y_k - переменные состояния; Y_k - известные функции, определенные в некоторой фиксированной области G пространства состояний при любом $t \geq t_0$.

Обозначим начальные значения переменных как y_{k0} . Каждой системе начальных значений соответствует единственное решение

$$y_k(t) = y_k(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}), \quad (5.2)$$

$k=1, 2, \dots, n.$

Допустим, что среди всех возможных движений нас интересует некоторое заданное $y_k = y_k^*$, $k=1, 2, \dots, n$. В частном случае, когда функции Y_k явно не зависят от времени, решения y_k^* описывают установившееся движение. Им отвечают так называемые очевидные решения, которые находятся из уравнений

$$Y_k(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Введем отклонения

$$x_k = y_k - y_k^*, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Подставив значения отклонений в исходную систему, получим

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (5.5)$$

$k=1, 2, \dots, n,$

где $X_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = Y_k(x_1 + y_1^*, x_2 + y_2^*, \dots, x_n + y_n^*, t)$.

Уравнения (5.5) описывают возмущенное движение системы. Выражение (5.4) определяет преобразование переноса начала координат в точку y_k^* , и поэтому, если решение системы (5.1) сходится к значениям y_k^* , то решение системы (5.5) сходится к нулю:

$$\begin{aligned} x_k &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

По терминологии Ляпунова уравнения (5.6) называют уравнениями невозмущенного движения. При $t = t_0$ переменные x_k принимают свои начальные значения, которые называют возмущениями. Каждой заданной системе таких возмущений отвечает однозначное и непрерывное решение системы (5.5):

$$x_k = x_k(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t). \quad (5.7)$$

Это решение представляет собой возмущенное движение системы.

Изучим разности (5.4) в каждый момент $t > t_0$. Рассмотрим уравнение

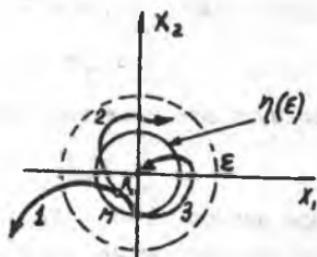
$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = R^2, \quad (5.8)$$

которое является уравнением сферы. Неравенство $\sum_{k=1}^n x_k^2 < R^2$ представляет область, расположенную внутри сферы. Возмущенное движение при $t > t_0$ может протекать следующим образом:

1) изображающая точка M (конец вектора X) все больше удаляется от начала координат, а величина R неограниченно возрастает (кривая 1 на рис. 5.1);

2) изображающая точка M остается внутри некоторой окрестности координат, так что величина R все время имеет ограниченное значение, не превосходящее наперед заданное малое положительное число ϵ , т.е. $R < \epsilon$ (кривая 2 на рис. 5.1);

3) изображающая точка M с течением времени возвращается в начало координат, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} R = 0$. Равновесное состояние системы можно считать устойчивым, если система, получив начальное возмущение, в дальнейшем продолжает оставаться в ближайшей окрестности равновесного состояния



Р и с. 5.1. Виды движения изображающей точки

или же снова возвращается в это состояние. Для придания конкретного смысла понятию "оставаться в ближайшей окрестности" А.М.Ляпунов предложил следующее определение устойчивости.

Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к величинам x_k , если при всяком произвольно заданном положительном числе ε , как бы мало оно не было, найдется другое такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, при котором для возмущений x_{k_0} , удовлетворяющих условиям

$$|x_{k_0}| \leq \eta, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (5.9)$$

возмущенное движение будет удовлетворять неравенствам

$$|x_k(t)| < \varepsilon, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

при любом $t > t_0$. Неравенства (5.9) ограничивают область допустимых начальных отклонений.

Если при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ невозможно найти $\eta(\varepsilon)$, при котором удовлетворяются неравенства (5.10), то система неустойчива.

Если система устойчива и движение ее таково, что $\lim_{t \rightarrow \infty} R = 0$, то говорят, что система асимптотически устойчива.

Возвращаясь к геометрическому смыслу понятия устойчивости, можно сказать, что невозмущенное движение устойчиво, если при любом произвольно заданном $R > 0$, как бы мало оно не было, возможно выбрать такое число $\lambda(R)$, что для всех возмущений x_{k_0} , удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^n x_{k_0}^2 \leq \lambda^2, \quad (5.11)$$

возмущенное движение будет удовлетворять неравенству

$$\sum_{k=1}^n x_k^2(t) < R^2 \quad (5.12)$$

при всяком $t > t_0$. Если выполнение неравенств (5.11) и (5.12) требует ограничения возмущений x_{k_0} их достаточно малыми значениями, то говорят об устойчивости в малом. Если при любых R можно выбрать такое λ , что указанные неравенства выполняются, то рассматривают устойчивость в большом.

Методы исследования устойчивости, разработанные А.М.Ляпуновым, позволяют нам говорить о свойствах возмущенных движений, не прибегая к интегрированию уравнений (5.5), и поэтому указывают путь к рациональному построению автоматических регуляторов.

5.2. Исследование устойчивости по уравнениям первого приближения

Уравнениями первого приближения являются уравнения, полученные в результате линеаризации исходной нелинейной системы

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ki} x_i + F_k(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \quad (5.13)$$

$k=1, 2, \dots, n,$

где F_k - функции, которые не содержат отклонений ниже 2-го порядка малости. Выше уже говорилось, что, пренебрегая значениями F_k , получим линейное дифференциальное уравнение, которое и является уравнением первого приближения. Составив характеристический полином системы (5.13) и приравняв его к нулю, получим характеристическое уравнение. Если САУ задана передаточной функцией, то характеристическим полиномом является знаменатель этой функции.

А.М.Ляпунов доказал теоремы, которые позволяют судить об устойчивости исходной нелинейной системы по ее линеаризованным уравнениям. Все случаи исследования следует разделить на две категории: критические и некритические. К категории некритических случаев относится положение, когда все корни характеристического уравнения имеют вид: $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$, причем $\alpha_k \neq 0$. Для этой категории А.М.Ляпунов доказал две теоремы.

Т е о р е м а 1. Если вещественные части α_k всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов разложения выше I-го порядка малости, т.е. функций F_k .

Переходная составляющая решения линейного дифференциального уравнения может быть записана в виде

$$x_k(t) = \sum_{k=1}^n C_{ki} e^{\lambda_k t}, \quad (5.14)$$

$k=1, 2, \dots, n,$

где C_{ki} - произвольные постоянные. Очевидно, если все $\alpha_k < 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t) = 0$, и отсюда следует вывод об асимптотической устойчивости.

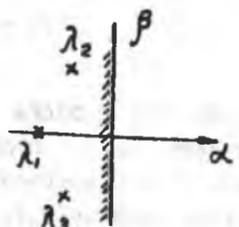
Т е о р е м а 2. Если среди корней λ_k характеристического уравнения первого приближения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов разложения выше I-го порядка малости.

В этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t) = \infty$.

Критические случаи имеют место, когда среди корней характеристического уравнения имеется группа корней, вещественная часть которых равна нулю, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

В этих случаях судить об устойчивости невозмущенного движения по уравнению первого приближения невозможно. Нужно исследовать исходные нелинейные уравнения.

Таким образом, условием устойчивости является расположение корней характеристического уравнения линеаризованной системы слева от мнимой



Р и с. 5.2. Комплексная плоскость и граница устойчивости

оси на комплексной плоскости. С этой точки зрения мнимая ось называется границей устойчивости (рис. 5.2).

Если вещественная часть корня равна нулю, то система находится на границе устойчивости. Интересно случаи, когда система имеет один корень в начале координат (нулевой корень) или когда имеется пара чисто мнимых корней. Нулевой корень имеется, если свободный член характеристического уравнения α_n равен нулю. Если остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то система устойчива

не относительно выходного сигнала, а относительно его производной. Выходной сигнал в установившемся режиме имеет произвольное значение.

Такие системы называют нейтрально-устойчивыми. Случай пары мнимых корней соответствует незатухающим колебаниям, тогда говорят, что САУ находится на колебательной границе устойчивости. С практической точки зрения нахождение САУ на границе устойчивости недопустимо.

5.3. Алгебраические критерии устойчивости

Суждение об устойчивости линейной САУ высокого порядка путем непосредственного определения корней характеристического уравнения связано со значительными вычислительными трудностями и не дает возможности определения путей стабилизации систем. Поэтому были разработаны различные критерии, позволяющие судить о расположении корней характеристического уравнения на комплексной плоскости без непосредственного вычисления.

Прежде всего рассмотрим необходимое условие устойчивости.

После определения корней характеристического уравнения его можно представить в виде

$$\alpha_0(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0. \quad (5.15)$$

Если система устойчива, т.е. все вещественные части корней меньше нуля, то после раскрытия скобок в (5.15) получим

$$\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0, \quad (5.16)$$

где все $a_i > 0$, $i=0,1,\dots,n$.

Следовательно, для устойчивости системы необходимо, но недостаточно, чтобы все коэффициенты a_i характеристического уравнения были больше нуля (или одного знака).

Если хотя бы один коэффициент a_i меньше нуля, система неустойчива.

5.3.1. Критерий Гурвица

Для оценки устойчивости по этому критерию необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить определитель Гурвица по следующему правилу:

- 1) по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов;
- 2) столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по убывающим, вверх - по возрастающим индексам;
- 3) места коэффициентов, индексы которых больше n или меньше нуля, заполняются нулями:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (5.17)$$

Критерий Гурвица формулируется следующим образом.

Для того чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты и все диагональные определители Δ_k определителя Гурвица были строго положительными:

$$\Delta_k > 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (5.18)$$

Так как $a_n > 0$ и $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, то определение знаков диагональных определителей можно вести до Δ_{n-1} определителя. Уже говорилось, что если $a_n = 0$, то САУ нейтрально устойчива. Если $\Delta_{n-1} = 0$, то система находится на колебательной границе устойчивости, т.е. имеет пару чисто мнимых корней. Из условия $\Delta_{n-1} = 0$ можно определить параметры, при которых САУ попадает на границу устойчивости, например, вычислить критический коэффициент усиления $K_{кр}$. Отношение

$$\alpha = \frac{K_{кр}}{K} \quad (5.19)$$

называют запасом устойчивости по усилению.

Для нормального функционирования САУ требуется, чтобы $d \geq 2$.

Пример. Передаточная функция САУ в разомкнутом состоянии

$$W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой САУ будет

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0,$$

где $a_0 = T_1 T_3$; $a_1 = T_1 + T_3$; $a_2 = 1 + k T_2$; $a_3 = k$.

Составим определитель Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Приравняв к нулю $\Delta_{n-1} = \Delta_2$, вычислим критический коэффициент усиления:

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_3}{T_3(T_1 - T_2) - T_1 T_2}.$$

Система устойчива, если $k < k_{кр}$.

5.3.2. Критерий Рауса

Критерий Рауса требует несколько меньшего объема вычислений и более удобен для использования на ЭВМ, чем критерий Гурвица. Критерий Рауса формируется следующим образом.

Для того чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса были строго положительны.

Количество строк в таблице Рауса должно быть равно $n+1$, где n - степень характеристического уравнения (рис. 5.3).

Для $i > 2$ элементы каждой строки вычисляются по формуле

$$C_{ki} = \frac{C_{4(i-1)} C_{3(k+1)(i-2)} - C_{4(i-2)} C_{3(k+1)(i-1)}}{C_{4(i-1)}}. \quad (5.20)$$

i	K (Алгебра)									
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}
2	a_1	a_3	a_5	a_7	a_9	a_{11}	a_{13}	
3	c_{13}	c_{23}	c_{33}	...						
4	c_{14}	c_{24}	c_{34}	...						
5	c_{15}	c_{25}	c_{35}	...						
6	c_{16}	c_{26}	c_{36}	...						
7	c_{17}	c_{27}	...							
8	c_{18}	...								
⋮	...									

Р и с. 5.3. Таблица Рауса

5.4. Частотные критерии устойчивости

5.4.1. Принцип аргумента

Частотные критерии в большинстве случаев используются в графоаналитическом виде и поэтому отличаются наглядностью при проведении расчетов. В основе частотных критериев лежит принцип аргумента.

Рассмотрим характеристическое уравнение

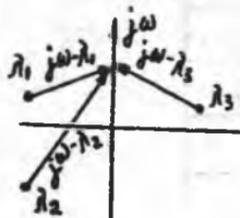
$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.21)$$

Если $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$ - корни этого уравнения, то

$$D(s) = a_0 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n).$$

На комплексной плоскости каждому корню соответствует определенная точка, и геометрически каждый корень можно изобразить в виде вектора с модулем $|\lambda_i|$, проведенного из начала координат. Сделаем замену $s = j\omega$ и перейдем к частотным представлениям:

$$\bar{D}(j\omega) = a_0 (j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n). \quad (5.22)$$



Р и с. 5.4. Принцип аргумента

Концы элементарных векторов $(j\omega - \lambda_i)$ будут находиться на мнимой оси. Аргумент вектора $\mathcal{D}(j\omega)$ равен сумме аргументов элементарных векторов:

$$\operatorname{arg} \mathcal{D}(j\omega) = \sum_{i=1}^n \operatorname{arg} (j\omega - \lambda_i). \quad (5.23)$$

Направление вращения вектора $(j\omega - \lambda_i)$ при изменении частоты против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке - отрицательным.

Предположим, что уравнение (5.21) имеет m корней в правой полуплоскости и $n-m$ корней - в левой.

При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый вектор, начало которого лежит в левой полуплоскости, повернется на угол $+\pi$, а каждый вектор правой полуплоскости - на угол $-\pi$. Изменение аргумента вектора $\mathcal{D}(j\omega)$ при этом будет (рис. 5.4)

$$\Delta \operatorname{arg} \mathcal{D}(j\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi. \quad (5.24)$$

$-\infty < \omega < +\infty$

Это выражение и определяет принцип аргумента.

Изменение аргумента вектора $\mathcal{D}(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности между числом $(n-m)$ корней уравнения $\mathcal{D}(s) = 0$, лежащих в левой полуплоскости, и числом m корней, лежащих в правой полуплоскости, умноженной на $+\pi$.

5.4.2. Критерий устойчивости Михайлова

Из (5.24) следует, что если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т.е. $m = 0$, то

$$\Delta \operatorname{arg} \mathcal{D}(j\omega) = n\pi. \quad (5.25)$$

$-\infty < \omega < +\infty$

Отсюда следует первая формулировка критерия Михайлова.

Система автоматического управления устойчива, если при возрастании частоты от $-\infty$ до $+\infty$ изменение аргумента вектора $\mathcal{D}(j\omega)$ будет равно $n\pi$, где n - степень характеристического уравнения.

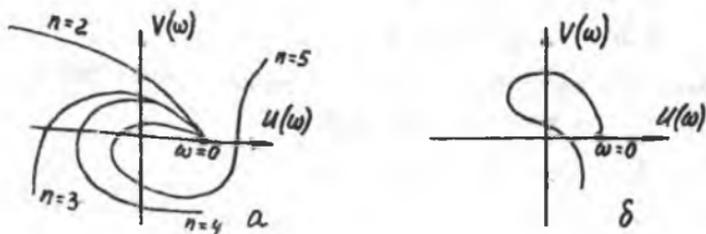
При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $\mathcal{D}(j\omega)$ опишет кривую, которую называют кривой (или годографом) Михайлова. Вектор $\mathcal{D}(j\omega)$ представим в виде

$$\mathcal{D}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Действительная часть $U(\omega)$ является четной функцией, мнимая часть $V(\omega)$ - нечетной функцией частоты, т.е. $U(-\omega) = U(\omega)$; $V(-\omega) = -V(\omega)$ и $\mathcal{D}(-j\omega) = U(\omega) - jV(\omega)$. Отсюда следует, что кривая Михайлова симметрична от-

носительно действительной оси и при ее построении можно ограничиться диапазоном частот от 0 до $+\infty$. Изменение аргумента уменьшится вдвое, а формулировка критерия Михайлова будет следующей.

Система устойчива, если при возрастании частоты от 0 до $+\infty$ вектор $D(j\omega)$ повернется на угол $n\frac{\pi}{2}$ или, что то же самое, если кривая Михайлова при том же изменении частоты, начиная с положительной действительной полуоси, обходит последовательно в положительном направлении n квадрантов (рис. 5.5,а).



Р и с. 5.5. Кривые Михайлова

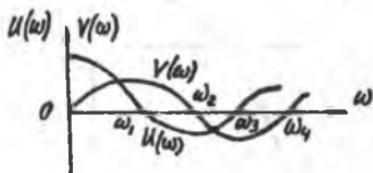
Если хотя бы один квадрант пропущен (рис. 5.5,б), то система неустойчива.

Наблюдая за поведением кривой Михайлова для устойчивой САУ, можно заметить, что при ее прохождении через n квадрантов корни уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ чередуются между собой, т.е. между двумя соседними корнями уравнения $V(\omega) = 0$ лежит один корень уравнения $U(\omega) = 0$ (рис. 5.6). Из этого следует еще одна формулировка критерия Михайлова.

Система устойчива, если корни уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ перемежаются и являются вещественными. Сумма корней равна n . САУ может находиться на границе устойчивости и этому соответствует два случая:

1) характеристическое уравнение имеет один нулевой корень, что может быть при $a_n = 0$; кривая Михайлова в этом случае выходит из начала координат;

2) характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\pm j\omega_i$. Тогда $D(j\omega_i) = U(\omega_i) + jV(\omega_i) = 0$, что может быть только в том случае, если одновременно $U(\omega_i) = 0$ и $V(\omega_i) = 0$; это означает, что кривая Михайлова проходит через начало координат.



Р и с. 5.6. Кривые и

Используя критерий Михайлова, можно определить критические параметры САУ, при которых она оказывается на границе устойчивости (например, критический коэффициент усиления). Это определяется решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} U(\omega, k_{кр}) &= 0, \\ V(\omega, k_{кр}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Пример. Для характеристического уравнения замкнутой САУ, приведенного в предыдущем примере, после замены $s = j\omega$ можно получить

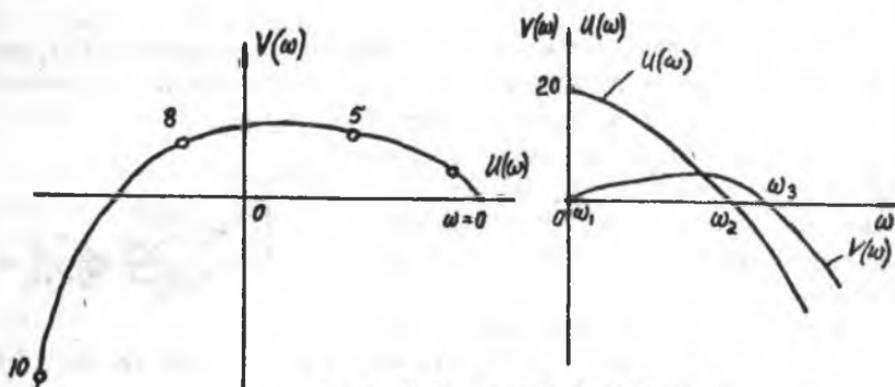
$$\begin{aligned} U(\omega) &= -(T_1 + T_3)\omega^2 + k, \\ V(\omega) &= -T_1 T_3 \omega^3 + (1 + k T_2)\omega. \end{aligned}$$

Приравняв оба выражения к нулю, из первого можно найти ω ; подставив его во второе уравнение, найдем

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_3}{T_3(T_1 - T_2) - T_1 T_2},$$

что аналогично результату, полученному при использовании критерия Гурвица.

Для $T_1 = 0,3$, $T_2 = 0,05$, $T_3 = 0,1$ получим $k_{кр} = 40$. Построим кривую Михайлова для $k = 20$.



Р и с. 5.7. Кривые Михайлова

Построенные кривые (рис.5.7) свидетельствуют об устойчивости системы.

5.4.3. Критерий устойчивости Найквиста

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФЧХ разомкнутой системы.

Если передаточная функция разомкнутой САУ $W(s) = B(s)/A(s)$, то для замкнутой системы $\Phi(s) = W(s)/(1+W(s))$. Обозначим:

$$N(s) = 1 + W(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{D(s)}{A(s)}, \quad (5.27)$$

где $D(s)$ - характеристический полином замкнутой системы.

Перейдя к частотным представлениям, получим

$$\bar{N}(j\omega) = \frac{\bar{D}(j\omega)}{A(j\omega)}. \quad (5.28)$$

Вектор $\bar{N}(j\omega)$ называется вектором Найквиста. Очевидно, что числитель и знаменатель этого вектора имеют одинаковую степень. При использовании критерия Найквиста следует различать два случая.

А. Разомкнутая система устойчива и уравнение $A(s) = 0$ имеет все корни в левой полуплоскости. Тогда при изменении частоты от 0 до ∞

$$\Delta \arg \bar{A}(j\omega) = n \pi / 2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (5.29)$$

Изменение аргумента вектора $\bar{D}(j\omega)$ в общем случае равно

$$\Delta \arg \bar{D}(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (5.30)$$

где m - число корней уравнения $D(s) = 0$ в правой полуплоскости.

Изменение аргумента вектора Найквиста

$$\Delta \arg \bar{N}(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2}. \quad (5.31)$$

Если замкнутая САУ устойчива, то $m = 0$ и

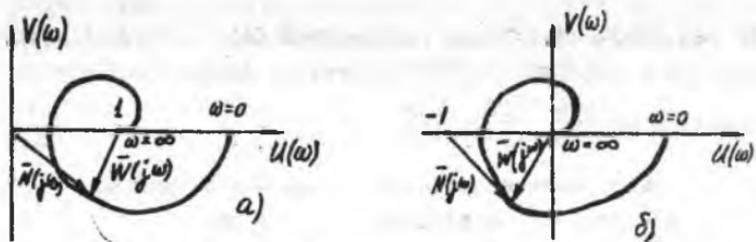
$$\Delta \arg \bar{N}(j\omega) = 0, \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

Так как при $\omega \rightarrow \infty$, $W(j\omega) = 0$, то $\lim_{\omega \rightarrow \infty} N(j\omega) = 1$.

Вектор Найквиста опишет угол, равный нулю, только в том случае, если его годограф не охватывает начало координат (рис. 5.8, а). Перенесем начало координат в точку с координатами $(1, j0)$ (рис. 5.8, б). Тогда $\Delta \arg N(j\omega) = 0$, если годограф $\bar{W}(j\omega)$ не охватывает критическую точку с координатами $(-1, j0)$. Критерий Найквиста для рассматриваемого случая формулируется следующим образом.

Система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой и в замкнутом состоянии, если АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Некоторые особенности возникают, если разомкнутая САУ нейтрально-устойчива, т.е.



Р и с. 5.8. Годографы НАЙКВИСТА

$$W(s) = \frac{B(s)}{sA_1(s)},$$

где полином $A_1(s)$ имеет все корни в левой полуплоскости. При $\omega = 0$ АФЧХ $W(j\omega) = \infty$, т.е. происходит бесконечный разрыв. При изменении частоты от $-\infty$ до ∞ наблюдается движение корней вдоль мнимой оси снизу вверх. При этом движении обойдем нулевой корень по полуокружности бесконечно малого радиуса ρ так, чтобы корень остался слева, т.е. искусственно отнесем его к левой полуплоскости. При движении по этой полуплоскости в положительном направлении независимая переменная изменится по закону

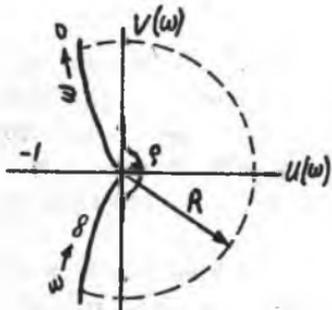
$$s = \rho e^{j\varphi(\omega)}, \tag{5.32}$$

где $\varphi(\omega)$ изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Передаточная функция может быть записана в виде:

$$W(s) = \frac{K(s)}{\rho} e^{-j\varphi(\omega)} = R(s) e^{-j\varphi(\omega)},$$

где $R \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, а аргумент $\varphi(\omega)$ изменяется от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в окрестности нулевого корня годограф $\bar{W}(j\omega)$ представ-

ляет собой полуокружность бесконечно большого радиуса, движение по которой происходит в отрицательном направлении. Сформулируем критерий Найквиста для данного случая (рис. 5.9).



Р и с. 5.9. Годограф Найквиста для нейтрально-устойчивой САУ

При исследовании устойчивости систем нейтрально-устойчивых в разомкнутом состоянии, необходимо годограф $W(j\omega)$ дополнить дугой бесконечно большого радиуса (см.рис. 5.9), начиная от меньших частот, в отрицательном направлении и воспользоваться общим оп-

ределением критерия Найквиста. Аналогично исследуется устойчивость замкнутой САУ, если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет пару чисто мнимых корней $\pm j\omega_p$, т.е. когда $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = \infty$. В этих случаях можно использовать диапазон частот в пределах от 0 до ∞ .

Б. Разомкнутая система неустойчива. В этом случае $\Delta \arg A(j\omega) = (n-2p)\frac{\pi}{2}$, где p - число корней уравнения $A(s) = 0$, лежащих в правой полуплоскости. Если замкнутая САУ устойчива, т.е. $m = 0$, то $\Delta \arg D(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$\Delta \arg \bar{N}(j\omega) = n\frac{\pi}{2} - (n-2p)\frac{\pi}{2} = 2p\frac{\pi}{2}, \quad (5.33)$$

т.е. ЛФЧХ охватывает критическую точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $P/2$ раз. Дадим определение.

Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ охватывает критическую точку $(-1, j0)$ в положительном направлении ровно $P/2$ раз, где p - число корней характеристического уравнения разомкнутой САУ, лежащих в правой полуплоскости.

Определение числа охватов критической точки - непростая задача, поэтому на практике нашла применение другая формулировка данного критерия.

Переход годографа $W(j\omega)$ через отрезок $(-\infty, -1)$, т.е. левее критической точки, при увеличении частоты сверху вниз считается положительным, а снизу вверх - отрицательным. Определение устойчивости примет следующий вид. САУ в замкнутом состоянии устойчива, если разность между числом положительным и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы равно $P/2$:

$$p^+ - p^- = P/2, \quad (5.34)$$

где p^+ - число положительных переходов; p^- - число отрицательных переходов.

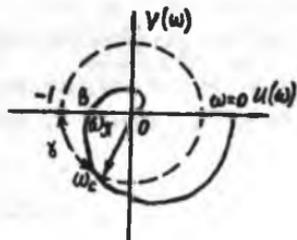
5.4.4. Запасы устойчивости

Устойчивость замкнутой САУ зависит от расположения годографа $W(j\omega)$ относительно критической точки. Чем ближе эта кривая проходит от критической точки, тем ближе САУ к границе устойчивости. Для устойчивых систем удаление годографа $W(j\omega)$ от критической точки характеризуется запасами устойчивости по фазе и по модулю.

Угол γ , образуемый радиусом, проходящим через точку пересечения $W(j\omega)$ с окружностью единичного радиуса, что соответствует частоте сре-

за ω_c , и отрицательной вещественной полуосью называется запасом устойчивости системы по фазе (рис. 5.10)

$$\gamma = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|. \quad (5.35)$$



Р и с. 5.10. Запасы устойчивости

нались условия $\gamma \geq 24^\circ$, $h \geq 2$.

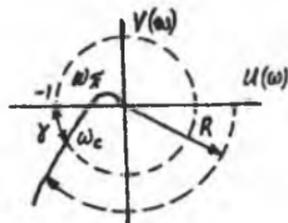
Пример. По условиям предыдущего примера получим

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$\text{где } U(\omega) = -20 \frac{0,4 - 0,05(1 - 0,03\omega^2)}{0,16\omega^2 + (1 - 0,03\omega^2)}; \quad V(\omega) = -20 \frac{0,02\omega^2 + 1(1 - 0,03\omega^2)}{0,16\omega^3 + \omega(1 - 0,03\omega^2)^2}.$$

По этим данным строим кривую Найквиста и замыкаем ее дугой бесконечно большого радиуса (рис. 5.11).

Частота среза, определяемая по соотношению $A(\omega_c) = 1$, приблизительно равна $\omega_c = 8$ 1/с. Кривая Найквиста не охватывает критическую точку, и замкнутая САУ устойчива. Запас устойчивости по фазе $\gamma \approx 8,0^\circ$. Частота ω_x определяется из выражения $V(\omega_x) = 0$ и равна $\omega_x = 10$ 1/с. Значение АФЧХ на этой частоте $A(\omega_x) = 0,5$, а запас по модулю $h \approx 2,0$. Значение критического коэффициента усиления можно найти из выражения $U(\omega) = -1$. Получим $k_{кр} \approx 40$.



Р и с. 5.11. Кривая Найквиста

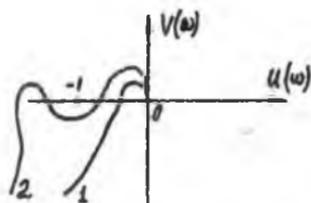
5.4.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ

АФЧХ разомкнутой САУ в зависимости от пересечения с вещественной осью относительно критической точки можно разделить на два типа:

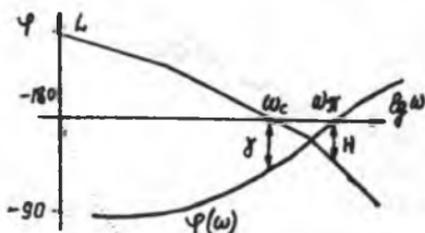
1. АФЧХ 1-го рода, все точки пересечения которых с вещественной осью расположены справа от критической точки (кривая 1, рис. 5.12);

2. АФЧХ 2-го рода, точки пересечения которых с вещественной осью расположены как справа, так и слева от критической точки (кривая 2, рис. 5.12).

В системах I-го рода увеличение коэффициента усиления ведет к снижению запасов устойчивости и при $k = k_{кр}$ САУ становится неустойчивой. Уменьшение коэффициента усиления стабилизирует систему. В системах 2-го типа потеря устойчивости может наблюдаться как при его увеличении, так и при уменьшении. Из критерия Найквиста следует, что система с АФЧ I-го типа является устойчивой, если всем точкам АФЧ, вплоть до пересечения с окружностью единичного радиуса ($\omega = \omega_c$), соответствуют значения фазы $\varphi(\omega)$, большие, чем $-\pi$, т.е. должно быть $\omega_c < \omega_{\pi}$. Этому определению легко дать иллюстрацию на языке ЛЧХ (рис. 5.13).



Р и с. 5.12. Типы АФЧ

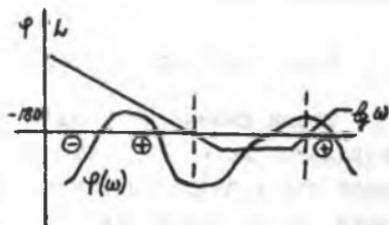


Р и с. 5.13. ЛЧХ системы 2-го типа

Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчивой и в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы при всех частотах, при которых ЛАХ положительна, значения фазы $\varphi(\omega)$ были больше, чем $-\pi$, т.е. $\omega_c < \omega_{\pi}$.

По ЛЧХ легко определяются запасы устойчивости γ и $H = 20 \lg h$. Чтобы САУ, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая АФЧ 2-го типа, была устойчивой в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы разность

между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристикой через линию $-\pi$ была равна $P/2$, где p - число корней характеристического уравнения разомкнутой САУ, находящихся в правой полуплоскости, при значениях частоты, при которых $L(\omega) > 0$ (рис. 5.14).

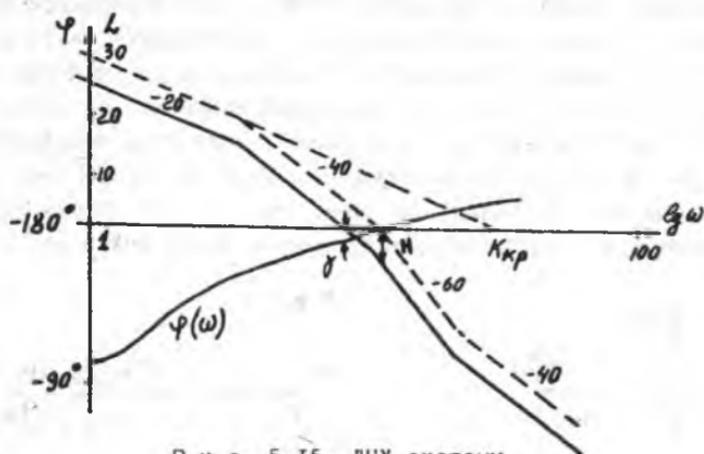


Р и с. 5.14. ЛЧХ системы 2-го типа

Пример. Определим характеристики устойчивости САУ, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(s) = \frac{20(0,05s + 1)}{s(0,3s + 1)(0,1s + 1)}$$

Строим ЛЧХ (рис. 5.15).



Р и с. 5.15. ЛЧХ системы

Очевидно, что $\omega_c < \omega_\pi$ и САУ в замкнутом состоянии устойчива. Запасы устойчивости: $\gamma = 8^\circ$, $H = -6$ дцб ($h = 2$). Значение критического коэффициента усиления $k_{кр}$ можно получить, если перенести ЛАХ параллельно самой себе, так, чтобы $\omega_c = \omega_\pi$ (показано пунктирной линией). Первая асимптота ЛАХ соответствует интегрирующему звену I-го порядка, и точка ее пересечения с осью частот соответствует значению коэффициента усиления. Получим $k_{кр} \approx 40$.

5.5. Выделение областей устойчивости

Среди физических параметров, характеризующих САУ, обычно бывает несколько, легко поддающихся изменению. При конструировании весьма важно знать диапазоны значений изменяемых параметров, допустимые с точки зрения сохранения устойчивости САУ. Об этих диапазонах можно судить, если в пространстве изменяемых параметров построить область устойчивости, т.е. выделить все значения изменяемых параметров, при которых сохраняется устойчивость.

Область устойчивости принято называть \mathcal{D} -областью, а представление области параметров в виде областей устойчивости и неустойчивости называют \mathcal{D} -разбиением.

5.5.1. Построение области устойчивости по алгебраическим критериям

Пусть коэффициенты характеристического уравнения

$$\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$

зависят от двух изменяемых параметров μ и λ . В соответствии с необходимым условием устойчивости прежде всего необходимо в плоскости параметров μ и λ выделить область положительности коэффициентов характеристического уравнения. Это можно сделать, решив уравнение

$$\begin{aligned} \alpha_i(\mu, \lambda) &= 0, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Для построения границы положительности коэффициентов α_i необходимо из решений уравнений (5.37) выбрать те, которые обеспечивают положительность всех коэффициентов. Из всех границ положительности только две могут одновременно быть границами устойчивости. Такими являются границы, уравнения которых имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(\mu, \lambda) &= 0 \\ \alpha_n(\mu, \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.38)$$

Доказано, что если α_0 и α_n приблизятся к нулю, то характеристическое уравнение будет иметь два действительных корня:

$$\begin{aligned} s_1 &\approx -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \\ s_2 &\approx -\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

При дальнейшем уменьшении коэффициенты α_0 и α_n перейдут через ноль, станут отрицательными, а корни (5.39) окажутся положительными. Так как действительные корни определяют апериодические члены решения дифференциального уравнения, то границы устойчивости (5.38) называют апериодическими. На самих границах устойчивости корни (5.39) равны соответственно $\pm \infty$ и 0. Стороны кривых $\alpha_i(\mu, \lambda) = 0$, примыкающих к области положительности соответствующих коэффициентов, штрихуются в сторону положительности.

Колебательной границей устойчивости называется кривая в плоскости изменяемых параметров, при переходе через которую пара комплексно-сопряженных корней изменяет знак своей вещественной части на обратный. Доказано, что уравнением колебательной границы устойчивости является выражение

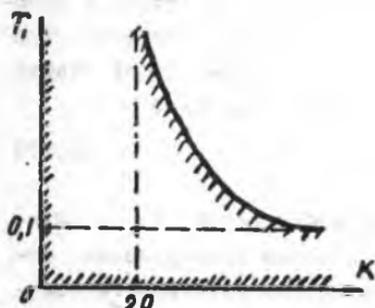
$$\Delta_{n-1}(\mu, \lambda) = 0. \quad (5.40)$$

Колебательная граница устойчивости штрихуется в сторону положительности Δ_{n-1} .

Пример. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$0,1T_1s^3 + (T_1 + 0,1)s^2 + (1 + 0,05k)s + k = 0.$$

Требуется построить область устойчивости в плоскости параметров T_1 и k . Очевидно, что границами положительности всех коэффициентов будут $T_1 = 0$ и $k = 0$.



Р и с. 5.16. Границы устойчивости

Штрихуем эти границы в сторону положительности. Составив определитель Гурвица, получим уравнение вида (5.40)

$$\Delta_{n-1} = (0,1 + T_1)(1 + 0,05k) - 0,1T_1k = 0.$$

Отсюда получим границу устойчивости

$$k = \frac{T_1 + 0,1}{0,05T_1 - 0,005}. \quad (5.41)$$

Определив асимптоты $\lim_{T_1 \rightarrow \infty} k = 20$ и $\lim_{T_1 \rightarrow 0,1} k = \infty$ по уравнению (5.41), строим колебательную границу устойчивости. Область, в которую штриховка обращена внутрь, и является областью устойчивостью (рис. 5.16).

5.5.2. \mathcal{D} -разбиение в плоскости одного параметра

Пусть нас интересует влияние какого-либо одного параметра μ на устойчивость САУ и этот параметр входит в характеристическое уравнение линейно, так что его можно записать в виде

$$Q(s) + \mu R(s) = 0. \quad (5.42)$$

Сделав замену $s = -j\omega$, получим

$$\mu(j\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (5.43)$$

Задавая ω значения от $-\infty$ до $+\infty$, можно построить кривую $\mu(\omega)$, отображающую мнимую ось плоскости корней на плоскость μ . Эта граница \mathcal{D} -разбиения симметрична относительно вещественной оси, и поэтому вычисления можно вести в диапазоне частот от 0 до ∞ , а затем дополнять кривую зеркальным отображением на диапазон от 0 до $-\infty$. При движении по мнимой оси от $-\infty$ до $+\infty$ на плоскости корней область устойчивости остается слева. Поэтому при движении по кривой \mathcal{D} -разбиения от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ ее штрихуют слева. Область, внутрь которой обращены штрихи, является предполагаемой областью устойчивости. Для

окончательного решения необходимо взять какое-либо вещественное значение μ в исследуемой области и воспользоваться любым критерием устойчивости. Если при выбранном μ система устойчива, то рассматриваемая область является областью устойчивости.

Пример. Построить область устойчивости в плоскости параметра k для САУ, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$0,03s^3 + 0,4s^2 + (1 + 0,05k)s + k = 0.$$

Сделав преобразования (5.42) и (5.43), получим:

$$k(j\omega) = \frac{0,4\omega^2 - 0,05\omega^2(1 - 0,03\omega^2)}{1 + 2,5 \cdot 10^{-3}\omega^2} - j \frac{0,02\omega^3 + \omega(1 - 0,03\omega^2)}{1 + 2,5 \cdot 10^{-3}\omega^2}.$$

По этому выражению строим кривую \mathcal{D} -разбиения (рис. 5.17). Выбрав $k=10$, по критерию Гурвица убеждаемся, что САУ устойчива. Значит, полученная область является областью устойчивости.

Нетрудно видеть, что $k_{кр} = 40$.

5.5.3. \mathcal{D} -разбиение в плоскости двух параметров

Пусть коэффициенты характеристического уравнения линейно зависят от двух параметров μ и λ , так что его можно записать в виде

$$\mu P(s) + \lambda Q(s) + S(s) = 0. \quad (5.44)$$

Сделав замену $s = j\omega$, получим

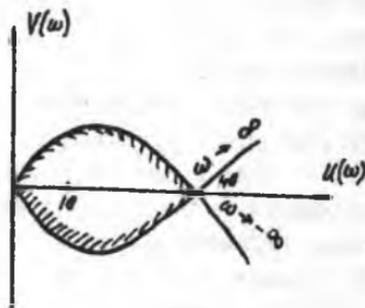
$$\left. \begin{aligned} \mu P_1(\omega) + \lambda Q_1(\omega) &= -S_1(\omega) \\ \mu P_2(\omega) + \lambda Q_2(\omega) &= -S_2(\omega) \end{aligned} \right\}. \quad (5.45)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ Q(j\omega) &= Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ S(j\omega) &= S_1(\omega) + jS_2(\omega). \end{aligned}$$

Разрешив систему (5.45) относительно μ и λ , получим:

$$\mu(\omega) = \frac{\Delta\mu(\omega)}{\Delta\omega}; \quad \lambda(\omega) = \frac{\Delta\lambda(\omega)}{\Delta\omega},$$



Р и с. 5.17. \mathcal{D} -разбиение в плоскости одного параметра

где

$$\Delta(\omega) = P_1(\omega)Q_2(\omega) - P_2(\omega)Q_1(\omega);$$

$$\Delta_\mu(\omega) = -S_1(\omega)Q_2(\omega) + S_2(\omega)Q_1(\omega);$$

$$\Delta_\lambda(\omega) = -S_2(\omega)P_1(\omega) + S_1(\omega)P_2(\omega).$$

Задавая значения ω от $-\infty$ до $+\infty$, получим совокупность точек на плоскости $\mu-\lambda$, образующих кривую \mathcal{D} -разбиения. Можно заметить, что функции $\mu(\omega)$ и $\lambda(\omega)$ являются четными, и поэтому при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ кривая \mathcal{D} -разбиения пробегается дважды. При построении кривой \mathcal{D} -разбиения в плоскости двух параметров необходимо руководствоваться следующими правилами:

1) если в системе (5.45) первое уравнение получено из вещественных частей, а второе - из мнимых частей функций $P(j\omega)$, $Q(j\omega)$ и $S(j\omega)$ и если параметр μ по написанию стоит первым, а λ - вторым, то система координат должна быть правой, т.е. ось μ является осью абсцисс с отсчетом положительных значений вправо, а ось λ - осью ординат с отсчетом положительных значений вверх;

2) двигаясь по кривой \mathcal{D} -разбиения при изменении частоты в сторону увеличения, ее штрихуют слева, если $\Delta\omega > 0$, и справа, если $\Delta\omega < 0$. В результате кривая штрихуется дважды с одной стороны, так как на концах кривой при $\omega = 0$ и $\omega = -\infty$ знак главного определителя $\Delta(\omega)$ изменяется.

Может быть случай, когда при $\omega = \omega^* \neq 0, \infty$ $\Delta(\omega) = \Delta_\mu(\omega) = \Delta_\lambda(\omega) = 0$. Тогда система (5.45) становится линейно-зависимой и ее уравнения отличаются друг от друга только на постоянный множитель. Тогда эта система сводится к одному уравнению, определяющему на плоскости $\mu-\lambda$ прямую, которая называется особой. Если особая прямая пересекает кривую \mathcal{D} -разбиения в точке $\omega = \omega^*$, в которой определитель $\Delta(\omega)$ меняет знак, то она тоже является границей устойчивости и в указанной точке ω^* изменяется направление штриховки кривой и особой прямой. Если при $\omega = \omega^*$ изменения знака $\Delta(\omega)$ не происходит, то штриховка на особую прямую не наносится. Если $a_n = a_n(\mu, \lambda)$, то это соответствует существованию особой прямой для $\omega = 0$ и ее уравнение будет

$$a_n(\mu, \lambda) = 0. \quad (5.46)$$

Уравнение особой прямой для $\omega = \infty$ определяется выражением

$$a_0(\mu, \lambda) = 0. \quad (5.47)$$

Прямые (5.46) и (5.47) называют концевыми. Они штрихуются одинарной штриховкой, согласованной в точках $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ с направлением штриховки основной линии. Область предполагаемой устойчивости находится внутри заштрихованного участка плоскости параметров и проверяется на устойчивость аналогично предыдущему. Переход через кривую Д-разбиения, заштрихованную дважды, соответствует переходу через границу устойчивости двух корней, а переход через особую концевую с одинарной штриховкой - переходу одного корня. Если концевые прямые не имеют общих точек с основной кривой, то штриховка на них наносится в сторону положительности параметров.

Пример. Построим кривую Д-разбиения (рис. 5.18) в плоскости параметров T_1 и k для САУ, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$0,1 T_1 s^3 + (T_1 + 0,1) s^2 + (1 + 0,05 k) s + k = 0,$$

или

$$T_1(0,1s^3 + s^2) + k(0,05s + 1) + 0,1s^2 + s = 0.$$

Сделав подстановку $s = j\omega$, получим:

$$\Delta(\omega) = 0,05\omega^3; \Delta T_1(\omega) = 0,005\omega^3 + \omega; \Delta k(\omega) = \omega^3 + 0,01\omega^5.$$

Очевидно, что при $\omega = \omega^* = 0$ все определители равны нулю.

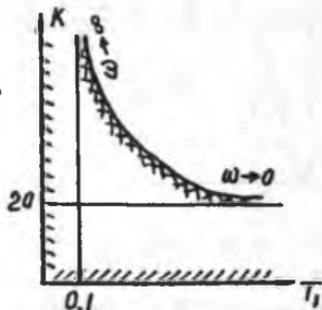
Следовательно, уравнения особых прямых, которые совпадают с концевыми, будут $T_1 = 0$ и $k = 0$. Получим:

$$T_1 = \frac{0,005\omega^3 + \omega}{0,05\omega^3}; \quad k = \frac{\omega^3 + 0,01\omega^5}{0,05\omega^3}.$$

Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T_1 = \infty; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} k = 20; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} T_1 = 0,1; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} k = \infty.$$

После проверки на устойчивость какой-либо точки из заштрихованной области можно сделать вывод, что рассматриваемая область является областью устойчивости.

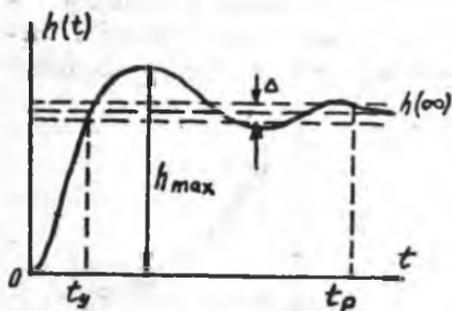


Р и с. 5.18. Кривая Д-разбиения в плоскости параметров T_1 и k

6. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

6.1. Показатели качества САУ

Количественные оценки качества, так называемые показатели качества, определяются по кривой переходного процесса устойчивой САУ (рис. 6.1)



Р и с. 6.1. Показатели качества

оригинала $h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)$.

2) время переходного процесса или время регулирования t_p - наименьшее значение времени, после которого имеет место неравенство

$$|x(t) - x(\infty)| \leq \Delta, \quad (6.2)$$

где Δ - заданная величина, обычно $\Delta \leq 0,05$;

3) статическая ошибка - величина отклонения установившегося значения $h(\infty)$ от требуемого значения N :

$$\varepsilon_{ст} = N - h(\infty) \quad (6.3)$$

или

$$\varepsilon_{ст} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s),$$

где $E(s)$ - изображение ошибки;

4) число колебаний регулируемой величины за время регулирования t_p и частота колебаний;

5) время установления t_u - промежуток времени, по истечении которого регулируемая величина первый раз достигает установившегося значения.

Оценки качества, полученные непосредственно по кривой переходного процесса, называются прямыми оценками качества. Существуют также косвенные оценки качества, не связанные с построением переходной функции и позволяющие лишь установить, находится ли переходный процесс внутри области допустимых значений или выходит из нее.

6.2. Методы построения кривой переходной функции

Изображение переходной функции имеет вид

$$H(s) = \Phi(s) \frac{1}{s} = \frac{B(s)}{sD(s)} \quad (6.4)$$

Оригинал переходной функции может быть получен в соответствии с формулой разложения [9]

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \left[(s - s_i)^{n_i} \frac{B(s)}{s_i D(s)} e^{s_i t} \right]^{(n_i - 1)}, \quad (6.5)$$

где s_i - корни уравнения $sD(s) = 0$, n_i - кратность корней.

В частном случае, когда $H(s)$ определяется выражением (6.4), все корни характеристического уравнения $D(s) = 0$ простые и среди них есть m вещественных корней и l пар комплексно-сопряженных, переходную функцию можно рассчитать по формуле

$$h(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^m \frac{B(s_i)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t} + 2 \sum_{k=1}^l A_k e^{\lambda_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k). \quad (6.6)$$

В этом выражении $D'(s) = \frac{d}{ds} D(s)$, λ_k и β_k - вещественная и мнимая части корня $s_k = \lambda_k + j\beta_k$. Амплитуда A_k и фазовый сдвиг φ_k определяются следующим образом:

$$\frac{B(s_k)}{s_k D'(s_k)} = U_k + jV_k; \quad (6.7)$$

$$A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg \frac{V_k}{U_k}.$$

При определении угла φ_k необходимо учитывать квадрант, в котором находится вектор $A_k e^{j\varphi_k}$.

Рассмотренный метод связан с большим объемом вычислений, которые затрудняются необходимостью вычисления корней характеристического уравнения и оперирования с комплексными числами. С целью упрощения процесса построения функции $h(t)$ разработано много приближенных методов. Рассмотрим один из них, состоящий из следующих операций:

- 1) получаем изображение переходной функции $H(s)$;
- 2) в изображении $H(s)$ делаем подстановку

$$s = \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad (6.8)$$

где $z = e^{sT}$ - дискретный оператор Лапласа; T - период дискретности, т.е. $T = iT$, где $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$, а $T = \text{const}$;

3) полученное выражение делим на T ; подставив конкретное значение периода дискретности, можем записать

$$H(z) = \frac{B(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n}; \quad (6.9)$$

4) путем деления числителя на знаменатель разлагаем $H(z)$ в ряд Лорана

$$H(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{-i}, \quad (6.10)$$

в котором численные значения коэффициентов C_i равны значениям переходной функции $h(t)$ в моменты времени $t = iT$.

Значения коэффициентов C_i могут быть определены и без деления

$$C_0 = \frac{b_0}{d_0}; \quad C_i = \frac{1}{d_0} \left[b_i - \sum_{k=1}^i d_k C_{i-k} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$C_i = -\frac{1}{d_0} \sum_{k=1}^n d_k C_{i-k}, \quad i > n.$$

Недостатком метода является то, что степени числителя и знаменателя в (6.9) равны, и поэтому в момент $t = 0$, $h(0) \neq 0$, так как $C_0 \neq 0$. Это ошибка метода, но в дальнейшем процесс быстро сходится к $h(t)$ с точностью не хуже 5%. Точность метода тем выше, чем меньше величина периода дискретности T .

6.3. Частотные показатели качества

Частотные показатели относятся к косвенным показателям и являются фактически параметрами частотных характеристик, зная которые, можно дать оценку прямым показателям качества. Пусть передаточная функция замкнутой САУ

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{D(s)}.$$

Перейдя к частотным представлениям, можно записать

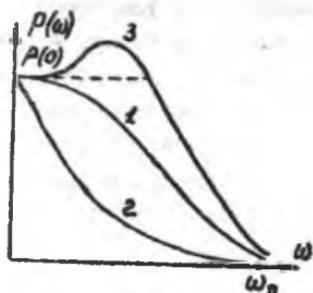
$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jR(\omega). \quad (6.11)$$

Вид вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ позволяет дать оценку некоторым прямым показателям качества.

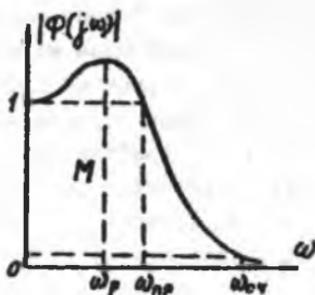
1. Для того, чтобы перерегулирование не превышало 18%, достаточно иметь положительную невозрастающую функцию $P(\omega)$ (кривая 1, рис. 6.2).
2. Для обеспечения монотонности переходного процесса достаточно, чтобы $\frac{dP(\omega)}{d\omega} < 0$ (кривая 2, см. рис. 6.2).
3. Если $P(\omega)$ имеет максимум (кривая 3, см. рис. 6.2), то

$$\sigma \leq \frac{1,18 P_{\max}(\omega) - P(0)}{P(0)} \cdot 100\% \quad (6.12)$$

4. Если $P(\omega)$ имеет интервал положительности ω_n , то время регулирования при $\Delta = 0,05$ будет в общем случае больше, чем π/ω_n . Для монотонных процессов $t_p > 4\pi/\omega_n$.



Р и с. 6.2. Графики



Р и с. 6.3. ЛЧХ замкнутой САУ

Амплитудная частотная характеристика замкнутой САУ (рис. 6.3) позволяет определить такие показатели, как полоса пропускания $\omega_{\text{пр}}$, резонансная частота ω_p , интервал существенных частот $(0, \omega_{\text{св}})$ такой, что при $\omega > \omega_{\text{св}}$ $|\Phi(j\omega)| < (0,1 \dots 0,2)\Phi(0)$. ЛЧХ обычно нормируется, т.е. приводится к виду $|\Phi(j\omega)|/\Phi(0)$. Особое значение имеет показатель колебательности M , равный максимуму нормированной ЛЧХ замкнутой САУ. Для некоторых типовых передаточных функций САУ в разомкнутом состоянии определена жесткая связь показателя колебательности с параметрами этих передаточных функций. Передаточные функции разомкнутых САУ принято делить по виду ЛАХ на симметричные и несимметричные. Симметричным ЛАХ соответствуют передаточные функции

$$1. W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{(T_0 s + 1)(T_1 s + 1) \prod_{i=3}^n (T_i s + 1)} ; \quad 2. W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1) \prod_{i=2}^n (T_i s + 1)} ;$$

$$3. W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{s^2 \prod_{i=2}^n (T_i s + 1)} , \quad \text{причем } T_0 > T_1 > T_2 > \dots$$

Параметры этих передаточных функций таковы, что ось частот пересекает асимптота с наклоном -20 дБ/дек, а слева и справа находятся участки с наклоном -40 дБ/дек. Для симметричных ЛАХ показатель колебательности связан с запасом по фазе соотношением

$$M = 1/\sin \gamma . \quad (6.13)$$

Несимметричным ЛАХ соответствуют передаточные функции

$$4. W(s) = \frac{k}{(T_0 s + 1) \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} ; \quad 5. W(s) = \frac{k}{s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} ,$$

причем $T_0 > T_1 > T_2 > \dots$

В этих случаях ось частот пересекает асимптота с наклоном -40 дБ/дек. Для всех типов ЛАХ, продлив асимптоту, предшествующую

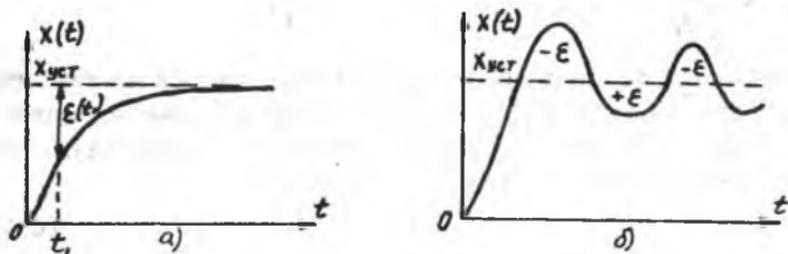
асимптоте, пересекающей ось частот, получим значение базовой частоты ω_0 . В приложении б даны формулы, связывающие параметры передаточных функций с показателем колебательности и базовой частотой. Для типовых передаточных функций для различных значений M разработаны графики нормированных переходных процессов в функции безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$. Эти графики также приводятся в приложении. Вычислив ω_0 и M , можно пересчитать нормированную кривую на реальное время и получить переходную функцию системы, которая дает возможность определить прямые показатели качества.

6.4. Интегральные критерии качества

Интегральные оценки качества являются обобщенными, так как оценивают в совокупности запасы устойчивости, быстродействие и точность системы. Интегральные оценки основаны на условных интегральных показателях, характеризующих отклонение $\varepsilon(t)$ регулируемой величины от требуемого значения. Простейшей является линейная интегральная оценка

$$I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt. \quad (6.14)$$

Из рисунка 6.4, а видно, что чем меньше оценка I_1 , тем быстрее переходный процесс сходится к установившемуся значению, и поэтому нужно стремиться к минимуму I_1 . Если переходная функция носит колебательный характер (рис. 6.4, б), то оценка I_1 не может характеризовать качество системы, так как при увеличении колебательности данная оценка может даже уменьшиться за счет алгебраического суммирования площадей, находящихся по обе стороны от установившегося значения. Этот недостаток оценки I_1 ограничивает ее применение монотонными процессами.



Р и с. 6.4. Графики монотонного и колебательного переходных процессов

График $\varepsilon(t)$, если перенести начало координат в точку $x_{уст}$, является функцией веса, т.е. $\varepsilon(s) = \Phi_\varepsilon(s)$, где $\Phi_\varepsilon(s)$ - передаточная функция замкнутой САУ по ошибке. Так как

$$E(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt,$$

то

$$I_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \Phi_{\varepsilon}(0). \quad (6.15)$$

Для оценки качества переходных процессов, в том числе и колебательных, более пригодна квадратичная интегральная оценка

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\varepsilon(t))^2 dt. \quad (6.16)$$

Очевидно, что при увеличении колебательности оценка I_2 будет возрастать, а при уменьшении - падать. Если изображение ошибки $E(s)$ является дробно-рациональной функцией

$$E(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{D(s)},$$

то при $m < n$ интеграл I_2 можно определить следующим образом:

$$I_2 = \frac{(-1)^{n-1} \Delta_u}{2a_0 \Delta_n}. \quad (6.17)$$

В этом выражении Δ_n - определитель Гурвица для полинома $D(s)$, а Δ_u - определитель, полученный из Δ_n заменой первой строки на строку u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , образованную коэффициентами полинома

$$B(s)B(-s) = u_0 s^{2n-2} + u_1 s^{2n-4} + \dots + u_{n-2} s^2 + u_{n-1}. \quad (6.18)$$

Вычислив оценку I_2 и обеспечив ее минимум, в общем случае нельзя высказать суждение о характере переходного процесса, и выбор параметров системы по минимуму I_2 может дать колебательный процесс. В связи с этим была предложена улучшенная квадратичная интегральная оценка (оценка Красовского) I_3 :

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[\varepsilon^2(t) + \tau_1^2 \left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (6.19)$$

Стремление к минимуму оценки I_3 приводит к монотонному переходному процессу с постоянной времени τ_1 .

Недостатком интегральных оценок является то, что они не дают возможности определить прямые показатели качества. Важным достоинством интегральных оценок является то, что они являются функциями параметров САУ; минимизируя эти оценки по изменяемым параметрам системы, можно выбрать оптимальное сочетание параметров.

6.5. Коэффициенты ошибок

В случае медленно изменяющихся воздействий точность САУ в установившемся режиме удобно определять с помощью коэффициентов ошибок. Изображение ошибки САУ имеет вид

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s) G(s). \quad (6.20)$$

Передаточную функцию системы по ошибке можно разложить в ряд по степеням s , сходящихся при малых s (при $s \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$):

$$\Phi_\varepsilon(s) = C_0 + C_1 s + \frac{1}{2!} C_2 s^2 + \frac{1}{3!} C_3 s^3 + \dots \quad (6.21)$$

Учитывая (6.20) и переходя к оригиналам, получаем

$$\varepsilon(t) = C_0 q(t) + C_1 \dot{q}(t) + \frac{1}{2!} C_2 \ddot{q}(t) + \dots \quad (6.22)$$

или

$$\varepsilon(t) = K_0 q(t) + K_1 \dot{q}(t) + K_2 \ddot{q}(t) + \dots \quad (6.23)$$

Коэффициенты ошибок K_i определяются по формулам:

$$\begin{aligned} K_0 = C_0 = \Phi_\varepsilon(0); \quad K_1 = C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\Phi_\varepsilon(s) - C_0] \dots \\ \dots K_i = \frac{C_i}{i!} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^i} \left[\Phi_\varepsilon(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{C_k}{k!} s^k \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Коэффициенты ошибок получили следующие названия:

K_0 - коэффициент ошибки по положению; K_1 - коэффициент ошибки по скорости; K_2 - по ускорению и т.д.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{B(s)}{s^\nu A(s)}. \quad (6.25)$$

Величина ν называется порядком астатизма. Передаточная функция замкнутой САУ по ошибке будет

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^\nu A(s)}{s^\nu A(s) + B(s)}. \quad (6.26)$$

Тогда из (6.24) следует, что при $\nu = 0$ (статическая система) существуют все коэффициенты ошибок:

$$K_i \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Если $\nu = 1$ (система с астатизмом I-го порядка), то $K_0 = 0$ и отсутствует ошибка по положению. Если $\nu = 2$, т.е. системе придан астатизм 2-го порядка, то $K_0 = 0$ и $K_1 = 0$. Это означает, что система с

астатизмом 2-го порядка не имеет установившейся ошибки ни по положению, ни по скорости. Рассуждения можно продолжить, но на практике астатизм выше 2-го порядка обычно не вводится.

Коэффициенты ошибок выражаются через параметры САУ и это дает возможность спроектировать систему так, чтобы обеспечить максимальную точность.

7. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

7.1. Задача синтеза и способы коррекции

Задача синтеза и проектирования САУ заключается в таком выборе ее структурной схемы, параметров, характеристик и способа их технической реализации, при котором требуемые динамические и эксплуатационные свойства системы обеспечиваются простыми и надежными техническими средствами.

Широкое распространение нашли графоаналитические методы синтеза, основанные на использовании аппарата передаточных функций и частотных характеристик и аналитические, в основу которых положены понятия пространства состояний, и методы оптимизации САУ по какому-либо критерию, например по минимуму квадратичной интегральной оценки.

В любом случае конечная цель синтеза заключается в определении параметров специальных корректирующих устройств, которые, будучи добавлены к неизменяемой части системы, придадут ей необходимые свойства.

Существуют три основных способа коррекции динамических свойств САУ:

- 1) последовательная коррекция;
- 2) параллельная коррекция;
- 3) коррекция в виде обратных связей.

Если обозначить передаточную функцию неизменяемой части как $W_0(s)$, то передаточные функции скорректированной системы можно записать как

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= W_{\text{пос}}(s)W_0(s) \\ W(s) &= W_{\text{пар}}(s) + W_0(s) \\ W(s) &= \frac{W_0(s)}{1 \mp W_0(s)W_{\text{ос}}(s)} \end{aligned} \right\} (7.1)$$

где $W_{\text{пос}}(s)$ - передаточная функция последовательного корректирующего устройства (КУ); $W_{\text{пар}}(s)$ - передаточная функция параллельного КУ;

$W_{oc}(s)$ - передаточная функция КУ в виде звена обратной связи.

Графоаналитические методы синтеза САУ разработаны в основном для последовательной коррекции, но, приравнивая выражения в системе (7.1), можно легко получить передаточные функции и для параллельного КУ и КУ в виде звена обратной связи.

Корректирующие устройства вводят в закон управления производные, интегралы и их комбинации от сигнала ошибки или промежуточных величин. Следует помнить, что введение производной сдвигает фазовую характеристику в сторону положительных значений фазового угла, форсирует систему и приводит к повышению запасов устойчивости, т.е. стабилизирует систему. Введение интеграла увеличивает коэффициент усиления на низких частотах и тем самым повышает точность системы.

Среди графоаналитических методов синтеза наиболее известен метод ЛЧХ, который с достаточной точностью и наглядностью позволяет определить параметры корректирующих устройств и возможные области их изменения.

7.2. Синтез САУ методом ЛЧХ

Считаем, что корректирующее устройство включено последовательно. Методика синтеза состоит из следующих действий:

- 1) построение ЛАХ неизменяемой части системы $L_0(\omega)$, так называемой располагаемой ЛАХ;
- 2) построение желаемой ЛАХ на основании требований к проектируемой системе;
- 3) определение вида и параметров корректирующего устройства.

При последовательной коррекции желаемая ЛАХ определяется выражением

$$L(\omega) = L_0(\omega) + L_{\text{пос}}(\omega). \quad (7.2)$$

Отсюда

$$L_{\text{пос}}(\omega) = L(\omega) - L_0(\omega). \quad (7.3)$$

Таким образом, ЛАХ последовательного КУ определяется простым вычитанием ординат располагаемой ЛАХ из ординат желаемой. По ЛАХ корректирующего устройства определяются ее принципиальная схема и параметры в соответствии с приведенными в литературе таблицами [4, 5].

При построении желаемой ЛАХ ее делят на три участка: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный. Среднечастотный участок определяется частью ЛАХ, пересекающей ось частот, протяженностью влево и вправо до первых сопрягающих частот. Слева располагается низкочастотный, а справа - высокочастотный участок.

Низкочастотная часть желаемой ЛАХ выбирается в основном из условий требуемой точности. Для статических систем коэффициент усиления, обеспечивающий требуемую точность, выбирается по условию

$$k \geq \frac{q_0 - \varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{cm}}, \quad (7.4)$$

где $q_0 = \text{const}$ - задающее воздействие, ε_{cm} - статическая ошибка.

Если необходимо получить $\varepsilon_{cm} = 0$, то вводится астатизм I-го порядка, а значение коэффициента усиления выбирается по условиям устойчивости. Достаточно просто низкочастотная часть строится по точности воспроизведения эквивалентного гармонического воздействия

$$q(t) = G_m \sin \omega_k t. \quad (7.5)$$

Амплитуда ошибки при этом будет

$$E_{\max} = \frac{G_m}{A(\omega_k)},$$

где $A(\omega_k)$ - значение АЧХ при $\omega = \omega_k$.

Для выполнения условия $E_{\max} \leq E_T$, где E_T - допустимое значение амплитуды ошибки, необходимо, чтобы низкочастотная часть ЛАХ проходила не ниже контрольной точки A_k , построенной по выражению

$$L(\omega_k) = 20 \lg \frac{G_m}{E_T}. \quad (7.6)$$

Часто при проектировании следящих систем оговариваются максимальная скорость слежения \dot{x}_m и максимальное ускорение \ddot{x}_m . По этим данным можно подобрать эквивалентное гармоническое воздействие с параметрами

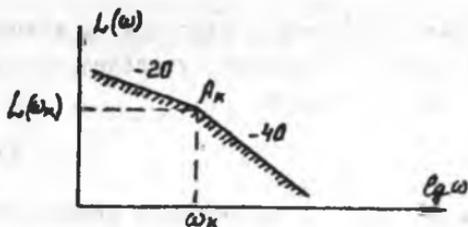
$$\dot{q}_m = \dot{x}_m = G_m \omega_k; \quad \ddot{q}_m = \ddot{x}_m = G_m \omega_k^2.$$

Отсюда

$$\omega_k = \frac{\ddot{x}_m}{\dot{x}_m}, \quad G_m = \frac{\ddot{x}_m}{\omega_k^2} = \frac{(\dot{x}_m)^2}{\ddot{x}_m}. \quad (7.7)$$

По этим координатам строится контрольная точка A_k и запретная зона, состоящая из двух отрезков с наклонами -20 дБ/дек и -40 дБ/дек. Низкочастотная часть не должна заходить в запретную зону (рис. 7.1).

Наклон и протяженность среднечастотного участка определяются необходимыми запасами устойчивости. С этой точки зрения желательно, чтобы ось частот пересекал участок ЛАХ с наклоном -20 дБ/дек протяженностью не менее одной декады. Хорошие результаты получаются, если частота среза ω_c и первая частота сопряжения ω_1 правее ее находятся в от-



Р и с. 7.1. Запретная зона

го влияния на процесс регулирования. Это означает, что, по возможности, данный участок желаемой ЛАХ должен совпадать с соответствующим участком располагаемой ЛАХ. Такой выбор существенно упрощает схему КУ. Если высокочастотный участок располагаемой ЛАХ соответствует колебательному звену с малым показателем затухания, то необходимо, чтобы этот же участок желаемой ЛАХ на резонансной частоте ω_p не пересекал ось частот. Для этого необходимо выполнение условия

$$L(\omega_p) < 20 \lg \frac{M}{M+1} \quad (7.8)$$

Для построения желаемой ЛАХ в некоторых случаях можно воспользоваться типовыми передаточными функциями (приложение 6) и соответствующими им нормированными кривыми переходных процессов.

Пример. САУ без коррекции задана передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W_0(s) = \frac{k}{s(T_1 + s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $T_1 = 0,125$ с; $T_2 = 0,01$ с, а коэффициент усиления k выбран по условиям точности и равен 330.

Оценивая устойчивость системы без коррекции, видим, что она неустойчива. Для стабилизации САУ введем последовательное корректирующее устройство, не снижая уже выбранного коэффициента усиления. С учетом вышесказанных условий построим среднечастотный участок желаемой ЛАХ так, чтобы он пересекал ось частот под наклоном -20 дБ/дек. Низкочастотный и высокочастотный участки выберем так, чтобы они в итоге совпадали с располагаемой ЛАХ. Вычитая из желаемой располагаемую ЛАХ, получим ЛАХ корректирующего устройства $L_{кор}(\omega)$ и по ней запишем его передаточную функцию

$$W_{кор}(s) = \frac{(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_4 s + 1)},$$

где $\tau_1 = 0,7$ с; $\tau_2 = 0,125$ с; $\tau_3 = 0,1$ с; $\tau_4 = 0,61$ с.

ношении $\omega_c/\omega_c \gg 2$. При выполнении этих требований обычно получают

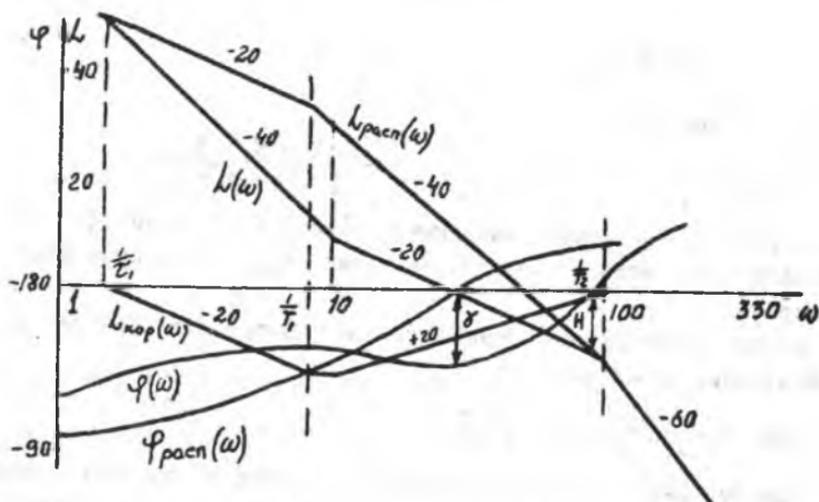
$$M < 1,2 \div 1,3; \quad \delta < 20\%;$$

$$\pi/\omega_c \leq t_g \leq 2\pi/\omega_c.$$

Высокочастотный участок желаемой ЛАХ располагается ниже оси частот и не оказывает существенно

Построив ЛФХ скорректированной системы, можно убедиться, что она устойчива и обладает удовлетворительными запасами устойчивости: $\gamma \approx 38^\circ$; $H = -12$ дБ.

Необходимо в заключение отметить, что метод ЛАХ имеет ограниченные возможности. В полной мере он справедлив при синтезе минимально-фазовых САУ, т.е. систем не имеющих нулей и полюсов в правой полуплоскости. Метод реализуется достаточно просто только для синтеза последовательных корректирующих устройств и не дает возможности получить оптимальное сочетание параметров.



Р и с. 7.2. Синтез САУ методом ЛАХ

7.3. Коррекция САУ обратными связями

Во многих случаях коррекцию САУ целесообразно осуществлять с помощью динамических звеньев, включаемых в цепи местных обратных связей. Благодаря этому удастся изменять частотные характеристики системы в желаемом направлении. В зависимости от звена, включаемого в местную обратную связь, различают жесткие и гибкие обратные связи. Жесткой обратной связью называется связь, подающая на вход охваченного ею звена величину, пропорциональную выходной величине этого звена. Гибкая обратная связь подает на вход охваченного ею звена величину, пропорциональную первой производной от выходной величины этого звена.

Рассмотрим виды коррекции, характерные для систем управления летательными аппаратами. Передаточная функция самолета по отношению к угловой скорости, например ω_2 , выражается формулой

$$W_{\omega_z}(s) = \frac{k_c(T_1 s + 1)}{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1} = \frac{\omega_z(s)}{\delta_b(s)}, \quad (7.9)$$

где δ_b - отклонение руля высоты. Для многих ЛА величина показателя затухания очень мала и имеет значение порядка 0,2-0,3. Возникает задача демпфирования системы. Эта задача решается охватом звена $W_{\omega_z}(s)$ отрицательной обратной связью с коэффициентом k_{ω_z} (рис. 7.3).

Передаточная функция скорректированной САУ

$$W(s) = \frac{k_c(T_1 s + 1)}{T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_c k_{\omega_z} T_1) s + (1 + k_c k_{\omega_z})}$$

или

$$W(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2T \zeta s + 1} \quad (7.10)$$

В этом выражении

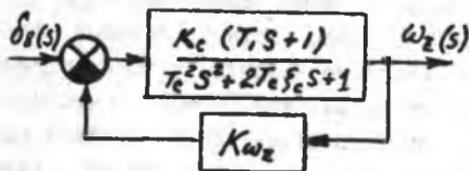
$$k = \frac{k_c}{1 + k_c k_{\omega_z}}; \quad T^2 = \frac{T_c^2}{1 + k_c k_{\omega_z}}; \quad \zeta = \frac{2T_c \zeta_c + k_c T_1 k_{\omega_z}}{2T_c \sqrt{1 + k_c k_{\omega_z}}}$$

Задавшись требуемым значением показателя затухания ζ , из последней формулы можно вычислить значение k_{ω_z} , обеспечивающее решение задачи.

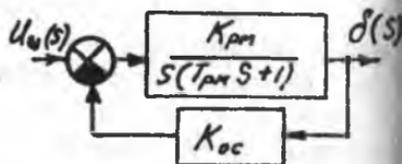
Передаточная функция исполнительного устройства САУ ЛА, т.е. рулевой машины, имеет вид

$$W_{pm}(s) = \frac{k_{pm}}{s(T_{pm} s + 1)} = \frac{\delta(s)}{k_{oc}(s)} \quad (7.11)$$

Так как выходной сигнал (отклонение рулевого органа) в данном случае пропорционален интегралу от сигнала ошибки, то использовать непосредственно рулевую машину для целей управления нельзя - это вызовет слабозатухающие колебания ЛА.



Р и с. 7.3. Демпфирование САУ обратной связью



Р и с. 7.4. Компенсация интегрирующих свойств рулевой машины

С целью компенсации интегрирующих свойств рулевой машины ее охватывают жесткой обратной связью с коэффициентом передачи k_{oc} (рис. 7.4).

Передаточная функция скорректированной системы

$$W(s) = \frac{k_{pm}}{T_{pm}s^2 + s + k_{pm}k_{oc}} \quad (7.12)$$

Нетрудно заметить, что после окончания переходного процесса отклонение рулевого органа δ будет пропорционально сигналу ошибки u_{co} .

С помощью корректирующей обратной связи можно стабилизировать систему. Пусть передаточная функция нескорректированной системы имеет вид

$$W_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (7.13)$$

где $B(s)$ - полином степени m ; $A(s)$ - полином степени n , причем $m < n$. Допустим, что система неустойчива, т.е. уравнение $A(s) = 0$ имеет корни в правой полуплоскости, или устойчива, но не обладает достаточными запасами устойчивости. Введем стабилизирующую обратную связь с передаточной функцией

$$W_{oc}(s) = \sum_{i=0}^{\ell} C_i s^{\ell-i} \quad (7.14)$$

Тогда передаточная функция скорректированной системы будет

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s) + B(s) \sum_{i=0}^{\ell} C_i s^{\ell-i}} \quad (7.15)$$

Очевидно, что должно выполняться условие

$$\ell \leq n - m.$$

Выбрав показатель ℓ , можно за счет коэффициентов C_i оказать влияние на все или некоторые коэффициенты характеристического уравнения и таким образом стабилизировать систему. Оптимизация значений C_i в каком-либо смысле возможна применением понятий коэффициентов ошибок, интегральных оценок качества и др.

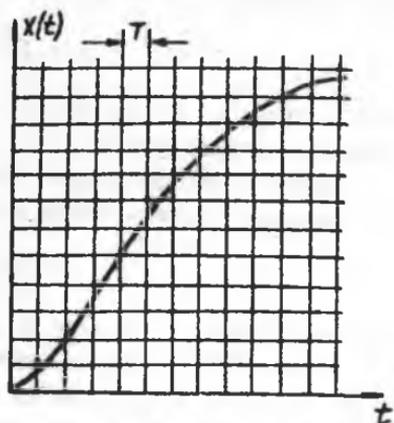
В более общих случаях корректирующие обратные связи могут быть синтезированы с помощью ЛЧХ [3, 5, 7, 8].

8. ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ САУ

8.1. Определение дискретной САУ

Система автоматического управления называется дискретной, если выходная величина какого-либо ее элемента имеет дискретный характер.

Большое внимание к дискретным САУ объясняется широким внедрением в практику автоматического управления ЦВМ. Введение в замкнутый контур управления ЦВМ обеспечивает системе значительно большие вычислительные возможности, высокую стабильность, простоту перестройки ее структуры и параметров.



Р и с. 8.1. Квантование аналогового сигнала

но непрерывная величина преобразуется в цифровую. Ошибки из-за квантования по уровню определяются только точностью представления чисел в ЦВМ и крайне малы. Их, при необходимости, можно рассматривать как случайный шум квантования с определенными вероятностными характеристиками. Это дает возможность рассматривать ИЭ только как квантователь по времени, он на схемах изображается в виде ключа. Время T называется периодом дискретности. Сигнал на выходе ИЭ представляет собой серию импульсов бесконечно малой длительности и называется решетчатой функцией. После произведения вычислений на выходе ЦВМ появляется информация также в виде решетчатой функции. Перед подачей этой информации на непрерывную часть системы (исполнительные органы), ее необходимо преобразовать в аналоговую форму. Для этой цели используются так называемые экстраполяторы, которые экстраполируют значение амплитуды сигнала на интервал T вперед. Наиболее часто используют экстраполятор нулевого порядка, который реализует операцию

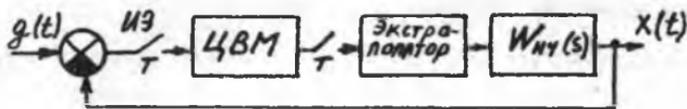
$$x(iT+T) = x(iT). \quad (8.1)$$

Вышесказанное дает возможность изобразить схему дискретной САУ в виде, показанном на рис. 8.2.

На схеме под $W_{нч}(s)$ подразумевается непрерывная часть системы. Ключ после ЦВМ просто является указателем дискретности ее информации. Так как в состав рассматриваемой САУ входят и дискретные и аналоговые элементы, то такие системы часто называют дискретно-непрерывными или гибридными.

Так как информация о состоянии объекта управления является непрерывной (аналоговой), то перед подачей на вход ЦВМ ее необходимо преобразовать в дискретную форму с определенным шагом по времени и по амплитуде. Эту задачу выполняет импульсный элемент (ИЭ) - преобразователь аналог-код. Дискретизация осуществляется путем квантования сигнала по времени и по уровню (рис. 8.1).

Аналоговый сигнал в ИЭ через промежутки времени T заменяется дискретными по уровню значениями, ближайшими к значениям непрерывного сигнала. В результате квантования по времени и уровню



Р и с. 8.2. Схема дискретной САУ

8.2. Основы Z-преобразования

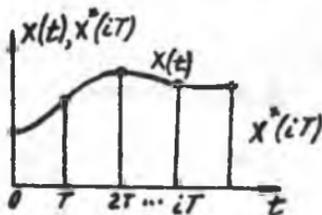
Для анализа и синтеза дискретных САУ широко используется дискретное преобразование Лапласа, которое получило название Z-преобразования. Решетчатая функция $x^*(iT)$, полученная из непрерывной функции $x(t)$ (рис. 8.3), может быть записана в виде

$$x^*(iT) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \delta(iT), \quad (8.2)$$

где $\delta(iT)$ дельта-функция.

Найдем преобразование Лапласа для обеих частей выражения (8.2):

$$\begin{aligned} L\{x^*(iT)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) L\{\delta(iT)\} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) e^{-iT s}. \end{aligned} \quad (8.3)$$



Р и с. 8.3. Решетчатая функция

Обозначим $z = e^{Ts}$. Тогда

$$L\{x^*(iT)\} = X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i}. \quad (8.4)$$

Это и есть Z-преобразование функции $x^*(iT)$.

Пример. Найдем Z-преобразование функции $x(t) = e^{-at}$.

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-a iT} z^{-i} = 1 + z^{-1} e^{-aT} + z^{-2} e^{-2aT} + \dots + x.$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию с показателем $q = z^{-1} e^{-aT}$. Сумма геометрической прогрессии

$$s = \frac{a_1}{1 - q},$$

где a_1 - первый член прогрессии. Получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-aT}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Рассмотрим некоторые основные теоремы Z-преобразования.

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений.

2. Теорема о начальном значении оригинала

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z X(z). \quad (8.5)$$

3. Теорема о конечном значении оригинала

$$X(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z). \quad (8.6)$$

4. Теорема запаздывания

$$Z \{x(iT - nT)\} = X(z) z^{-n}. \quad (8.7)$$

При анализе дискретных систем с помощью аппарата Z -преобразования необходимо определить это преобразование от передаточной функции непрерывной части системы $W_{нч}(s)$.

Изображение какой-либо функции по Лапласу и ее Z -изображение связаны соотношением

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \text{Res} \left\{ \frac{z}{z - e^{T s_i}} X(s) \right\} s_i, \quad (8.8)$$

где s_i - полюса функции $X(s)$.

Пример. Найдём Z -изображение функции, имеющей изображение Лапласа

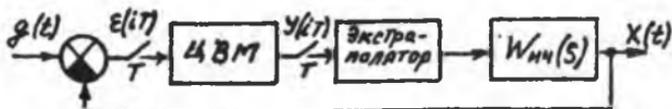
$$X(s) = \frac{k}{T_1 s + 1} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} \frac{B(s_1)}{A(s_1)} = \frac{k}{T_1} \frac{z}{z - d}.$$

В этом выражении $d = e^{-T/T_1}$, $s_1 = -\frac{1}{T_1}$ - полюс функции $X(s)$.

8.3. Передаточные функции дискретных САУ

Рассмотрим структурную схему САУ, в которой непрерывная часть представлена произведением передаточных функций элементарных звеньев (рис. 8.4)



Р и с. 8.4 Структурная схема дискретной САУ

В этой системе $W_{нч}(s) = \prod_{i=1}^k W_i(s)$.

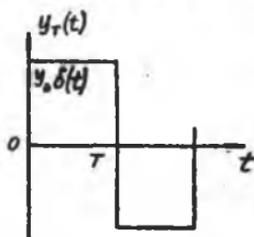
Определив Z -преобразование входа и выхода ЦВМ как $E(z)$ и $Y(z)$, по аналогии с непрерывными системами найдём передаточную функцию вычислительной машины как отношение изображений входного и выходного сигнала

$$W_0(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}. \quad (8.9)$$

Будем считать, что в системе используется экстраполятор нулевого порядка, в котором каждый мгновенный импульс преобразуется в прямоугольный импульс длительностью T , амплитуда которого равна амплитуде мгновенного импульса.

Если в момент $t = 0$ мгновенный импульс имеет амплитуду Y_0 , то прямоугольный импульс $Y_T(t)$ можно записать в виде (рис. 8.5)

$$Y_T(t) = Y_0 (1(t) - 1(t-T)). \quad (8.10)$$



Р и с. 8.5. Преобразование сигнала в экстраполяторе

Передаточная функция преобразования

$$W_0(s) = \frac{L\{Y_T(t)\}}{L\{Y_0 \delta(t)\}} = \frac{1 - e^{-st}}{s}. \quad (8.11)$$

С учетом того, что $e^{-st} = z^{-1}$, получим

$$W_0(s) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{s}. \quad (8.12)$$

Отнесем $1/s$ к непрерывной части системы

$$W_{нч}(s) = \frac{1}{s} \prod_{i=1}^k W_i(s). \quad (8.13)$$

При определении $W_{нч}(z)$ следует учесть, что

$$Z\left\{\frac{1}{s} \prod_{i=1}^k W_i(s)\right\} \neq Z\left\{\frac{1}{s}\right\} Z\{W_1(s)\} \dots Z\{W_k(s)\}. \quad (8.14)$$

Поэтому передаточную функцию $W_{нч}(z)$ следует искать в соответствии с формулой (8.8), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} W_{нч}(z) &= \sum_{i=1}^n \text{Res} \left\{ \frac{z}{z - e^{Ts}} \frac{W_{нч}(s)}{s} \right\}_{s_i} = \\ &= \frac{z}{z-1} \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{z}{z - e^{Ts_i}} \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

В этом выражении $W_{нч}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$; $A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}$. Наиболее распространенные Z -преобразования приведены в приложении.

Пример. Определим Z -преобразование для $W_{нч}(s) = \frac{1}{s} \frac{k}{T_1 s + 1}$. В соответствии с (8.15) получим

$$W_{нч}(z) = \frac{z}{z-1} \cdot k + \frac{kz}{\left(-\frac{1}{T_1} \cdot T_1\right) \left(z - e^{-T/T_1}\right) (z-1)(z-d)}; \quad d = e^{-T/T_1}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(z) = W_0(z) W_3(z) W_{нч}(z) = \frac{z-1}{z} W_0(z) W_{нч}(z). \quad (8.16)$$

Для дискретных систем после получения Z -преобразования для непрерывной части справедливы правила о последовательном, параллельном и встречно-параллельном соединении звеньев, выведенные для непрерывных систем. В соответствии с этим передаточная функция замкнутой системы $\Phi(z)$ равна

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}. \quad (8.17)$$

Передаточная функция замкнутой САУ по ошибке

$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{1+W(z)}. \quad (8.18)$$

Так как $Z\{1(t)\} = \frac{z}{z-1}$, то изображение переходной функции

$$H(z) = \frac{z}{z-1} \Phi(z). \quad (8.19)$$

Изображение импульсной переходной функции равно передаточной функции системы.

8.4. Исследование устойчивости дискретных САУ

По аналогии с предыдущим назовем уравнение

$$D(z) = 1 + W(z) = 0 \quad (8.20)$$

характеристическим уравнением дискретной САУ. При исследовании непрерывных систем уже говорилось, что для их устойчивости каждый корень характеристического уравнения $s_i = \alpha_i + j\beta_i$ должен иметь отрицательную вещественную часть, т.е. $\alpha_i < 0$. Учитывая, что $z = e^{sT}$, для каждого корня уравнения (8.20) получим

$$z_i = e^{\alpha_i T} (\cos \beta_i T + j \sin \beta_i T). \quad (8.21)$$

Это выражение есть уравнение окружности радиуса $|z_i| e^{\alpha_i T}$. Нетрудно видеть, что если $\alpha_i = 0$, то $|z_i| = 1$. При увеличении модуля $|\alpha_i|$ и $\alpha_i < 0$ значение радиуса $|z_i|$ уменьшается и при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$, $|z_i| \rightarrow 0$. Таким образом, дискретная САУ будет устойчива, если все корни ее характеристического уравнения по модулю меньше единицы, или, по-другому, лежат внутри круга единичного радиуса.

Алгебраический критерий устойчивости Шур-Кона для дискретных систем, аналогичный критерию Гурвица для непрерывных систем, крайне сложен в практическом применении. Поэтому широкое применение нашли методы оценки устойчивости дискретных САУ, основанные на билинейном преобразовании

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (8.22)$$

Это преобразование отображает единичный круг в плоскости z в левую полуплоскость плоскости w .

Для полученного характеристического уравнения $D(w) = 0$ условием устойчивости является расположение всех корней в левой полуплоскости. После использования преобразования (8.22) для оценки устойчивости исходной САУ можно использовать все критерии, справедливые для непрерывных систем.

Пример. Передаточная функция замкнутой дискретной САУ задана в виде

$$\Phi(z) = \frac{0,345z + 0,24}{z^2 - 0,45z + 0,6}.$$

Модуль пары комплексно-сопряженных корней $|z| = 0,775 < 1$, что означает устойчивость САУ. Применяв преобразование (8.22) к характеристическому уравнению, получим

$$2,05w^2 + 1,25w + 1,15 = 0.$$

Определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1,25 & 0 \\ 2,05 & 1,15 \end{vmatrix} = 1,4375 > 0,$$

т.е. система устойчива.

Для оценки устойчивости можно использовать частотные характеристики, которые получаются из передаточной функции путем замены $z = e^{j\omega T}$. Полученные частотные характеристики описываются трансцендентными выражениями и их определение связано со сложными расчетами. Поэтому на практике от z -передаточной функции переходят к w -передаточной функции путем использования преобразования (8.22). Из (8.22) следует, что

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (8.23)$$

Введем понятие псевдочастоты ψ , связанной с оператором w соотношением

$$w = j\psi. \quad (8.24)$$

Тогда из (8.23) получим

$$w = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \psi. \quad (8.25)$$

Из приведенных выражений видно, что частотные характеристики дискретных САУ относительно круговой частоты ω являются периодическими функциями с периодом $\pm \frac{\pi}{T}$. Нетрудно убедиться, что при изменении круговой частоты в пределах $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ псевдочастота принимает значения

от $-\infty$ до $+\infty$. Частотные характеристики дискретных САУ строятся относительно псевдочастоты в соответствии с формулой

$$W(j\gamma) = W(z) \Big|_{z=(1+\omega)(1-\omega)} \quad (8.26)$$

при $\omega = j\gamma$.

По частотным характеристикам разомкнутой САУ, построенным относительно псевдочастоты, можно в соответствии с критерием Найквиста оценить устойчивость замкнутой системы и определить запасы устойчивости.

8.5. Анализ качества дискретных САУ

Показатели качества дискретной системы наиболее просто определяются по кривой переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием

$$f(t) \rightarrow \frac{z}{z-1} \quad (8.27)$$

Изображение переходной функции будет

$$H(z) = \Phi(z) \frac{z}{z-1} \quad (8.28)$$

Дискретные значения переходного процесса могут быть найдены путем разложения изображения $H(z)$ в ряд Лорана, которое просто реализуется делением числителя выражения (8.28) на его знаменатель. Если $H(z) = B(z)/A(z)$, то после деления получим:

$$H(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{-i} \quad (8.29)$$

С другой стороны, в соответствии с определением Z -преобразования

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h(iT) z^{-i} \quad (8.30)$$

Сравнивая (8.30) с (8.29), можно заключить, что коэффициенты C_i равны дискретным значениям $h(iT)$ переходной функции. Коэффициенты C_i можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0/a_0; \\ C_i &= \frac{1}{a_0} \left[b_i - \sum_{k=1}^i a_k C_{i-k} \right], \quad i=1, 2, \dots, n; \\ C_i &= \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k C_{i-k}, \quad i > n. \end{aligned} \quad (8.31)$$

В этих формулах b_i - коэффициенты числителя функции $H(z)$; a_i - коэффициенты знаменателя этой функции, т.е.

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n,$$

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Если степень числителя $B(z)$ равна m и $m < n$, то соответствующие коэффициенты от b_0 до b^{n-m-1} приравниваются к нулю.

Пример. Изображение переходной функции имеет вид

$$H(z) = \frac{z}{z-1} \frac{0,345z + 0,24}{z^2 - 0,45z + 0,6} = \frac{0,345z^2 + 0,24z}{z^3 - 1,45z^2 + 1,05z - 0,6}.$$

Разделив числитель на знаменатель, получим

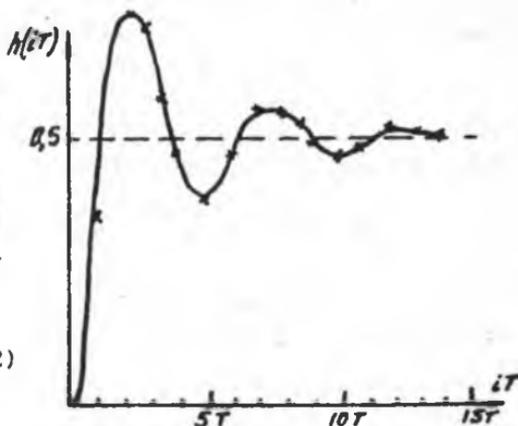
$$H(z) = 0,345z^{-1} + 0,74z^{-2} + 0,71z^{-3} + 0,46z^{-4} + 0,365z^{-5} + 0,47z^{-6} + \\ + 0,573z^{-7} + 0,556z^{-8} + 0,49z^{-9} + 0,47z^{-10} + 0,5025z^{-11} + \\ + 0,5286z^{-12} + 0,52z^{-13} + 0,503z^{-14} + 0,5z^{-15} + \dots$$

Аналогичный результат получим, применив формулы (8.31).

По графику (рис. 8.6) легко определить перерегулирование, время установления, время регулирования: $\sigma = 48\%$; $t_y = 0,12$ с; $t_p = 1,4$ с (при $T = 0,1$).

По аналогии с непрерывными системами точность дискретных САУ можно оценивать с помощью коэффициентов ошибок C_i :

$$C_i = i! \left. \frac{d^i}{ds^i} \varphi_\varepsilon(e^{sT}) \right|_{s=0}. \quad (8.32)$$



Р и с. 8.6. График переходной функции

Выражение (8.32) неудобно для расчетов, поэтому реально используемые коэффициенты C_0, C_1, C_2 рассчитываются по формулам

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \varphi_\varepsilon(z) \Big|_{z=1} \\ C_1 &= zT \frac{d}{dz} \varphi_\varepsilon(z) \Big|_{z=1} \\ C_2 &= 2 \left[T \frac{d}{dz} \varphi_\varepsilon(z) + zT \frac{d^2}{dz^2} \varphi_\varepsilon(z) \right] zT \Big|_{z=1} \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Введением в передаточную функцию разомкнутой системы звена $\frac{z}{z-1}$ дискретной системе можно придать астатизм. Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае имеет вид

$$W(z) = \left(\frac{z}{z-1} \right)^v \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (8.34)$$

Передаточная функции по ошибке будет

$$\Phi_{\xi}(z) = \frac{(z-1)^{\nu} A(z)}{(z-1)^{\nu} A(z) + z^{\nu} B(z)}. \quad (8.35)$$

Здесь ν - порядок астатизма.

Очевидно, что при $\nu = 1$ коэффициент ошибки по положению $C_0 = 0$. При астатизме 2-го порядка ($\nu = 2$) получим $C_1 = 0$ и т.д.

8.6. Операционные методы цифрового моделирования дискретно-непрерывных систем

Дискретно-непрерывная (гибридная) САУ содержит в себе элементы, описываемые разностными уравнениями, и элементы, описываемые дифференциальными уравнениями. Если имеется передаточная функция $\Phi(z)$ всей системы, то по ней легко получить разностное уравнение этой системы

$$\Phi(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (8.36)$$

Разделив числитель и знаменатель на z^n и a_0 , получим

$$\Phi(z) = \frac{b'_0 z^{m-n} + b'_1 z^{m-n-1} + \dots + b'_m z^{-n}}{1 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_n z^{-n}}. \quad (8.37)$$

Так как передаточная функция есть отношение изображений выхода и входа, то из (8.37) будем иметь

$$x(z) = (b'_0 z^{m-n} + b'_1 z^{m-n-1} + \dots + b'_m z^{-n}) G(z) - (a'_1 z^{-1} + a'_2 z^{-2} + \dots + a'_n z^{-n}) x(z).$$

Отсюда, в соответствии с теоремой запаздывания, получим

$$x(iT) = b'_0 G((i+m-l)T) + b'_1 G((i+m-l-1)T) + \dots + b'_m G((i-n)T) - a'_1 x((i-1)T) - a'_2 x((i-2)T) - \dots - a'_n x((i-n)T). \quad (8.38)$$

Разностное уравнение (8.38) представляет собой рекуррентное соотношение, которое позволяет вычислить дискретные значения выходного сигнала по дискретным значениям входного сигнала $G(iT)$ и предыдущим значениям выходного сигнала. Выражение (8.38) является программой работы ЦВМ при моделировании дискретной САУ. Неудобством является то, что получение передаточной функции $\Phi(z)$ связано с необходимостью определения Z -преобразования от передаточной функции $W_{Hy}(s)$ непрерывной части, которое вызывает определенные вычислительные трудности. Поэтому на практике нашли применение операционные методы перехода от $W_{Hy}(s)$ к

$W_{нч}(z)$, связанные с заменой оператора s на некоторую функцию от z , т.е. методы подстановки. При определении функции $s=f(z)$ должны выполняться следующие требования:

1) если непрерывная передаточная функция $W(s)$ соответствует устойчивой системе, то и дискретная передаточная функция $W(z)$ должна определять устойчивую систему;

2) способ должен допускать возможность раздельного применения к отдельным звеньям непрерывной части, т.е. если

$$W(s) = W_1(s) \dots W_k(s), \text{ то и } W(z) = W_1(z)W_2(z) \dots W_k(z);$$

3) для постоянных сигналов коэффициент усиления дискретной цепи должен соответствовать тем же значениям коэффициента усиления непрерывной цепи.

Перечисленным требованиям наиболее полно удовлетворяет подстановка Тастина

$$s = \frac{z-1}{T} \frac{z+1}{z-1}. \quad (8.39)$$

После замены оператора s в соответствии с (8.39), полученную передаточную функцию звена делят на T . Таким образом, получают Z -передаточные функции всех звеньев непрерывной цепи и по ним определяют их разностные уравнения. Добавив к ним разностные уравнения дискретной цепи, получим систему разностных уравнений, которая является программой ЦВМ при моделировании САУ.

В последнее время получил распространение метод подбора корня, описанный в [2]. На основании применения этого метода получены разностные уравнения для типовых непрерывных звеньев САУ, применяемые при моделировании гибридных систем на ЦВМ, которые приведены в приложении.

8.7. Синтез дискретных САУ

Синтез дискретных САУ состоит в разработке такой программы обработки информации в ЦВМ, при которой синтезированная система удовлетворяет поставленным требованиям.

При синтезе дискретных САУ необходимо особое внимание уделять условию грубости системы, которое говорит о том, что при малых изменениях параметров неизменяемой части системы изменения выходных координат должны быть малыми. Для обеспечения грубости системы необходимо и достаточно, чтобы в процессе синтеза не производилось сокращение нулей и полюсов ее элементов, расположенных вне круга единичного радиуса, т.е. неустойчивых нулей и полюсов. Это, в свою очередь, означает невозможность управления системой по произвольному закону.

Синтез дискретной САУ может быть произведен с помощью ЛЧХ, построенных относительно псевдочастоты, так же, как и непрерывных САУ.

Полученная передаточная функция корректирующего устройства $W_{кy}(w)$ с помощью преобразования (8.22) переводится в $W_{кy}(z)$, которая и определяет фрагмент программы ЦВМ.

Рассмотрим методику синтеза дискретной САУ по критерию быстродействия, когда основным требованием является требование, чтобы выходной процесс имел конечную и минимально возможную длительность. Зададимся видом характеристического полинома замкнутой САУ

$$A(z) = z^e, \quad (8.40)$$

где e - целое положительное число.

Представим передаточную функцию непрерывной части в виде

$$W_{кy}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P^+(z)P^-(z)}{Q^+(z)Q^-(z)}. \quad (8.41)$$

В этом выражении полиномы $P^+(z), Q^+(z)$ содержат все корни, лежащие внутри круга единичного радиуса, а полиномы $P^-(z)$ и $Q^-(z)$ - вне этого круга.

Пусть желаемая передаточная функция имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{D(z)W_{кy}(z)}{1 + D(z)W_{кy}(z)}. \quad (8.42)$$

Отсюда

$$D(z) = \frac{1}{W_{кy}(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}. \quad (8.43)$$

В этом выражении $D(z)$ - программа ЦВМ. В соответствии с (8.41) получим:

$$D(z) = \frac{Q^+(z)}{P^+(z)} \frac{\Phi(z)}{P^-(z)} \frac{Q^-(z)}{1 - \Phi(z)}. \quad (8.44)$$

Исходя из условия грубости, можно считать, что минимальная степень ℓ_{\min} полинома $A(z)$ определится из условия

$$\ell_{\min} = \|Q^-(z)\| + \|P^-(z)\|. \quad (8.45)$$

Полиномы числителя и знаменателя желаемой и передаточной функции определяются из полиномиального уравнения

$$P^-(z)M(z) + Q^-(z)N(z) = A(z). \quad (8.46)$$

Полиномиальное уравнение решается путем разворачивания его в систему алгебраических уравнений и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях z . При этом должны выполняться условия

$$\|N\| > \|P^-\|, \quad \|M\| \geq \|Q^-\| - 1. \quad (8.47)$$

Минимальные степени искоемых полиномов определяются при знаке равенства. Передаточная функция $D(z)$ определяется по выражению

$$D(z) = \frac{Q^+(z)}{P^+(z)} \frac{M(z)}{N(z)}. \quad (8.48)$$

Если по результатам синтеза получим систему с малым запасом устойчивости то необходимо выбрать $\ell > \ell_{\min}$.

Пример. Найти программу управления объектом, который имеет передаточную функцию

$$W_{\text{нч}}(z) = \frac{0,6(z-0,64)(z+1,3)}{(z-2,7)(z^2-1,28z+0,45)}.$$

Нетрудно видеть, что $P^+(z) = z - 0,64$; $P^-(z) = (z + 1,3)0,6$; $Q^+(z) = z^2 - 1,28z + 0,45$; $Q^-(z) = z - 2,7$.

Из (8.46) и (8.45) следует, что $\ell_{\min} = \ell$, т.е. минимальная длительность процесса равна $2T$. Составим полиномиальное уравнение

$$0,6(z-1,3)\pi_0 + (z-2,7)(\pi_0 z + \pi_1) = z^2.$$

Решив это уравнение, получим $\pi_0 = 3,04$; $\pi_1 = 1$; $\pi_2 = 0,88$. Тогда $M(z) = 3,04$; $N(z) = z + 0,88$.

Окончательно получим

$$D(z) = \frac{z^2 - 1,28z + 0,45}{z - 0,64} \frac{3,04}{z + 0,88}.$$

Дискретная САУ может быть синтезирована по аналоговому прототипу, т.е. по выполнению условия

$$k(iT) = k(t) \Big|_{t=iT}. \quad (8.49)$$

Передаточная функция неизменяемой части известна:

$$W_{\text{нч}}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Выбрав желаемую импульсную переходную характеристику $k(t)$ методами, разработанными для непрерывных систем, затем можно определить желаемую передаточную функцию дискретной системы:

$$\Phi(z) = Z\{k(t)\}. \quad (8.50)$$

Далее определяется передаточная функция разомкнутой САУ:

$$W(z) = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}. \quad (8.51)$$

С другой стороны,

$$W(z) = D(z) \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s} W_{\text{нч}}(s)\right\}. \quad (8.52)$$

Выражения (8.51) и (8.52) дают возможность определить программу ЦВМ $\Omega(x)$.

9. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Определение и особенности нелинейных систем

Нелинейной называется такая САУ, у которой зависимость между входными и выходными переменного одного или нескольких элементов описывается нелинейными уравнениями.

Все реальные элементы, строго говоря, нелинейны, и к понятию линейной системы приходят путем их линеаризации. На практике встречаются такие нелинейные элементы, к которым операция линеаризации по малому отклонению неприменима (так называемые существенные нелинейности). К существенным нелинейным характеристикам относятся, например, релейная, типа насыщения, модуля и др. Основные типовые нелинейности и их характеристики приведены в приложении.

Нелинейные системы по сравнению с линеаризованными обладают целым рядом особенностей.

Дифференциальные уравнения линеаризованных систем получаются применением операции линеаризации по методу малого отклонения, и поэтому если линеаризованная САУ устойчива, то можно говорить об устойчивости исходной нелинейной системы только при малых отклонениях, т.е. об устойчивости в "малом". В нелинейных системах при увеличении начальных отклонений характер процессов может резко изменяться, система, устойчивая в малом, может оказаться неустойчивой при больших отклонениях.

Система называется устойчивой в "большом", если она устойчива при больших конечных по величине начальных отклонениях. Система называется устойчивой в "целом", если она устойчива при любых, не ограниченных по величине, начальных отклонениях. Если система асимптотически устойчива в целом, то ее называют абсолютно устойчивой. В теории автоматического управления важное место занимают вопросы исследования собственных и вынужденных колебаний нелинейных систем. В нелинейных САУ могут возникать устойчивые периодические режимы, к которым сходятся переходные процессы как снизу (от малых начальных отклонений), так и сверху (от больших начальных отклонений). Этот устойчивый периодический режим собственных колебаний называется автоколебаниями. Амплитуда и частота автоколебаний определяются только параметрами самой системы и не зависят от начальных условий.

К нелинейным системам неприменимы принципы суперпозиции и комму-

тативности, для их исследования нельзя использовать аппарат преобразований Лапласа и Фурье.

Рассмотрим некоторые методы исследования нелинейных систем.

9.2. Метод фазовых портретов

Дифференциальное уравнение замкнутой САУ может быть преобразовано к системе n дифференциальных уравнений I-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, q(t)), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9.1)$$

с начальными условиями $x_i(0)$. Величины x_i можно рассматривать как координаты некоторой точки M в n -мерном фазовом пространстве. Изображающая точка M при изменении координат описывает в этом пространстве некоторую траекторию, которая называется фазовой. Совокупность фазовых траекторий при различных начальных условиях называется фазовым портретом системы. Наглядное представление фазовых траекторий возможно только при $n \leq 3$, и рассматриваемый метод нашел широкое применение для исследования нелинейных САУ, которые могут быть сведены к системам 2-го порядка ($n = 2$). Исследование поведения нелинейных систем на фазовой плоскости возможно только для автономных стационарных систем.

Уравнение автономной системы 2-го порядка может быть записано в виде

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (9.2)$$

Полагая $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, получим

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = f(x_1, x_2) \end{array} \right\} \quad (9.3)$$

Фазовыми координатами системы являются ее выходная переменная x , и скорость ее изменения x_2 . Разделив второе уравнение системы (9.3) на первое, получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.4) однозначно определяет касательную к фазовой траектории во всех точках, кроме тех, в которых одновременно выполняются равенства

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad x_2 = 0. \quad (9.5)$$

В этих точках, которые называются особыми, не существует определенного направления касательной к траектории. В особых точках производные фазовых координат равны нулю, следовательно, особые точки являются точка-

ми равновесия системы. Для отыскания особых точек необходимо совместно решить уравнения (9.5).

Выясним характер возможных особых точек и оценим устойчивость положения равновесия системы в окрестности этих точек. Пусть $x_1(0), x_2 = 0$ есть координаты особой точки. Линеаризуем систему (9.3) в окрестности этой точки, полагая, что $x_1 = x_1(0) + \eta, x_2 = \zeta$, где η и ζ - малые величины. Тогда

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(0), 0) + \alpha \eta + \beta \zeta + f_1(\eta, \zeta), \quad (9.6)$$

где $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(0), 0)$; $\beta = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(0), 0)$.

Подставив (9.6) в (9.3), отбросив малые высшего порядка малости $f_1(\eta, \zeta)$, а также принимая во внимание, что координаты особой точки удовлетворяют уравнениям (9.5), получим систему линейных дифференциальных уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha \eta \\ \dot{\zeta} &= \beta \zeta \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Решая эти уравнения, можно определить движение линеаризованной системы и ее фазовые траектории вблизи особой точки и оценить устойчивость положения равновесия. На основании теорем Ляпунова полученные результаты будут справедливы и для исходной нелинейной системы.

Системе (9.7) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \beta \lambda - \alpha = 0. \quad (9.8)$$

Движение системы определяется типом корней уравнения (9.8):

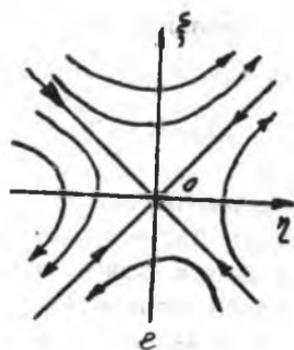
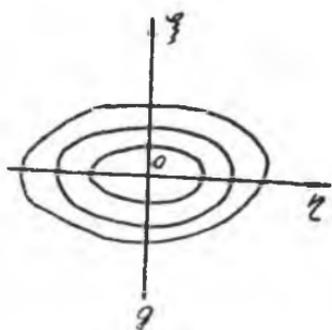
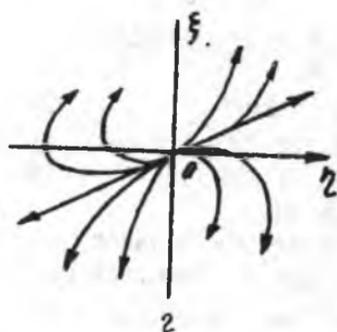
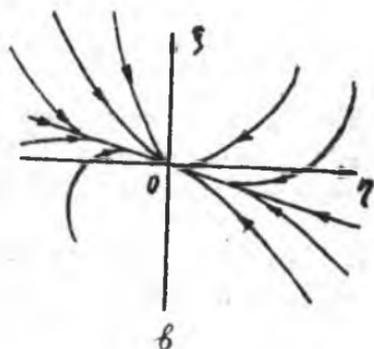
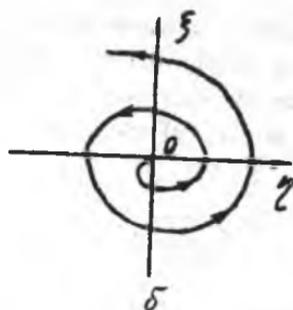
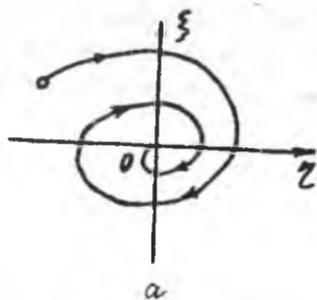
1. Корни комплексно-сопряженные: $\lambda = h \pm j\omega$. Решение системы (9.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= m e^{ht} \sin(\omega t + \varphi) \\ \zeta &= h m e^{ht} \sin(\omega t + \varphi) + m \omega e^{ht} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Здесь m и φ - постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Изображающая точка стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$, если $h < 0$, и удаляется от него при $h > 0$. Фазовый портрет системы для этих случаев показан на рис. 9.1, а и 9.1, б. Особая точка такого рода называется фокусом. При $h < 0$ имеет место устойчивый фокус (рис. 9.1, а), при $h > 0$ - неустойчивый фокус (рис. 9.1, б).

2. Корни действительные одного знака. Решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= m_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 e^{\lambda_2 t} \\ \zeta &= m_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$



Р и с. 9.1. Типы особых точек фазовой плоскости

Движение системы является аperiodическим. Изображающая точка асимптотически приближается к особой точке, если λ_1 и λ_2 отрицательны, и удаляется от нее, если λ_1 и λ_2 положительны. В частных случаях, когда $m_2 = 0$, из (9.10) получим

$$\zeta = \lambda_1 \zeta, \quad (9.11)$$

а когда $m_1 = 0$,

$$\zeta = \lambda_2 \zeta. \quad (9.12)$$

Уравнения (9.11) и (9.12) определяют прямые, по которым движется изображающая точка в указанных случаях. Из уравнений (9.10) можно получить

$$\zeta - \lambda_1 \zeta = C(\zeta - \lambda_2 \zeta) \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (9.13)$$

где
$$\frac{1}{C} = \frac{m_1(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{m_2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Определив из (9.13) производную $\frac{d\zeta}{d\zeta}$ в особой точке, можно убедиться, что все фазовые траектории касаются в особой точке той из прямых (9.11) или (9.12), которая соответствует меньшему по абсолютной величине корню.

Особая точка такого типа называется узлом. Если корни отрицательны, то имеем устойчивый узел (рис. 9.1, в), если положительны - неустойчивый узел (рис. 9.1, г):

3. Корни чисто мнимые $\lambda = \pm j\omega$. Решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= m \sin(\omega t + \varphi) \\ \zeta &= m \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

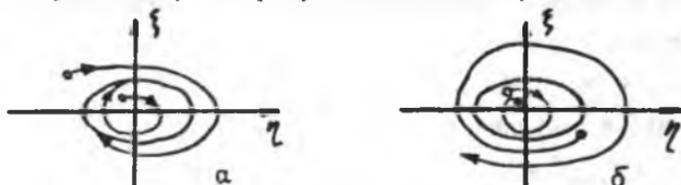
Из (9.14) легко получить уравнение семейства фазовых траекторий

$$\frac{\zeta^2}{m^2} + \frac{\zeta^2}{m^2 \omega^2} = 1. \quad (9.15)$$

Это уравнение определяет семейство эллипсов с полуосями m и $m\omega$ (рис. 9.1, д). Такая особая точка называется центром. Линеаризованная система в данном случае находится на границе устойчивости. Для суждения об устойчивости исходной нелинейной системы необходимы дополнительные исследования, которые должны показать, является ли рассматриваемая особая точка фактически центром или нет. Траектория (9.15) определяют так называемый предельный цикл. Если при изменении начальных условий в любую сторону траектории сходятся к предельному циклу, то он устойчив, если расходятся от него - то предельный цикл неустойчив. Устойчивый предельный цикл определяет собой автоколебания. Если траек -

тории с одной стороны приближаются к предельному циклу, а с другой - удаляются от него, то он называется полуустойчивым.

Устойчивый предельный цикл (автоколебания) и неустойчивый предельный цикл имеют фазовые траектории, показанные на рис. 9.2.



Р и с. 9.2. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы

Если система имеет несколько предельных циклов, соответствующих одной и той же особой точке, то неустойчивые и устойчивые предельные циклы всегда чередуются.

4. Корни действительные, различных знаков ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$). Прямые (9.11) и (9.12) являются в данном случае асимптотами для фазовых траекторий. Так как $\lambda_2 > 0$, то где бы не находилась изображающая точка в начальный момент, в конечном итоге она всегда будет удаляться от положения равновесия. Только в случае движения по асимптоте изображающая точка может попасть в точку положения равновесия. При малейшем отклонении от асимптоты изображающая точка будет отклоняться от положения равновесия. Такая особая точка называется седлом, она всегда соответствует положению неустойчивого равновесия.

Таким образом, суть рассмотренного метода является построение фазовых траекторий, выделение особых точек и определение их устойчивости. Построение фазовых траекторий может быть осуществлено на основе решения дифференциальных уравнений системы по участкам, которые определяются характером нелинейной характеристики. Эта задача даже в случае системы 2-го порядка может вызвать значительные вычислительные трудности, сложность которых возрастает вблизи линий переключения. Использование ЭВМ в значительной мере упрощает решение задачи.

Пример. Система стабилизации КЛА имеет вид, показанный на рис. 9.3. Уравнения данной системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{M}{Y}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где

$$M = \begin{cases} C \sin u_y & \text{при } |u_y| \geq \beta, \\ 0 & \text{при } |u_y| < \beta, \end{cases}$$

$$u_y = -(k_1 v + k_2 \omega).$$

Решение системы (9.16) в случае $|u_y| > \beta$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega(t) &= \omega(0) + \frac{M}{J} t \\ v(t) &= v(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2} \frac{M}{J} t^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

При $|u_y| < \beta$ фазовая траектория описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega(0) \\ v(t) &= v(0) + \omega(0)t \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Уравнение линии переключения будет

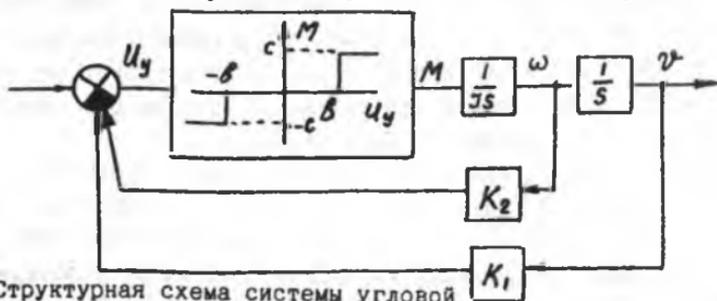
$$|k_1 v + k_2(\omega)| = \beta. \quad (9.19)$$

При построении фазовой траектории необходимо помнить, что каждый раз при прохождении линии переключения конечные значения переменных предыдущего участка становятся начальными условиями для последующего участка.

В соответствии с выражениями (9.17)-(9.19) рассчитана и построена фазовая траектория для следующих численных значений параметров:

$$C = 40 \text{ нм}; \quad J = 1,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad \beta = \pm 2,0 \text{ В}; \quad k_1 = 0,5 \text{ В/град}; \\ k_2 = 0,5 \text{ В/град/с}; \quad \omega(0) = 0; \quad v(0) = -6 \text{ град}.$$

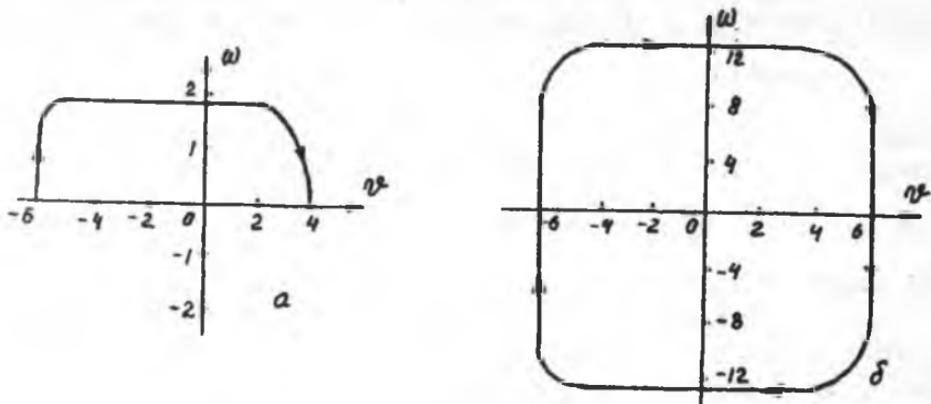
Фазовая траектория для указанных условий показана на рис. 9.4, а.



Р и с. 9.3. Структурная схема системы угловой стабилизации КЛА

Анализ полученной фазовой траектории показывает, что она близка к типу устойчивого фокуса, но система не приходит в точку начала координат, так как угловая скорость становится равной нулю на линии переключения и движение по координате $v(t)$ завершается при значении $v = \beta/k_1 = \pm 4^\circ$. В пределах зоны нечувствительности при $\omega = 0$ система нейтральна по отношению к координате v .

Фазовая траектория, построенная при $k_2 = 0$, свидетельствует, что в системе возникают автоколебания с амплитудой, равной $v(0)$, и частотой $\omega \approx 2,4 \text{ 1/с}$ (рис. 9.4, б). Частота автоколебаний определяется по времени полного оборота изображающей точки.

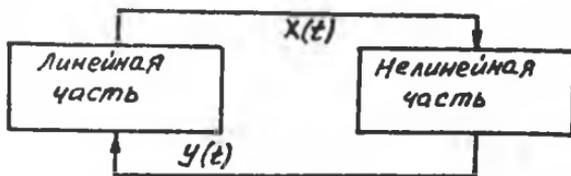


Р и с. 9.4. Фазовые траектории системы

9.3. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет с достаточной точностью исследовать устойчивость и точность нелинейных систем, используя методы, разработанные для линейных систем, в том числе и частотные методы. Метод дает возможность определить наличие автоколебаний, а также их частоту и амплитуду.

Система автоматического управления представляется в виде соединения линейной и нелинейной части (рис. 9.5).



Р и с.9.5. Схема нелинейной САУ

Выходной сигнал нелинейной части в общем случае определяется выражением

$$y = F(x, \dot{x}). \quad (9.20)$$

Если $W(s) = R(s)/Q(s)$ - передаточная функция линейной части, то систему уравнений можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x + R(s)y &= 0 \\ y &= F(x, s\dot{x}) \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Найдем такое решение системы (9.21), при котором выходной сигнал линейной части $x(t)$ представляет собой гармоническую функцию

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (9.22)$$

Тогда $y(t)$ будет представлять собой также периодическую функцию, но отличную от синусоиды. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье

$$y(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin i\omega t + b_i \cos i\omega t). \quad (9.23)$$

Для симметричных нелинейностей $F_0 = 0$.

Основным условием, которое накладывает метод на линейную часть системы, является условие фильтра нижних частот. Линейная часть пропускает только первую гармонику колебаний. С энергетической точки зрения это означает допущение, что вся энергия как бы сосредоточена в первой гармонике колебаний, т.е. между сигналами линейной и нелинейной части существует гармонический баланс. Данное допущение позволяет считать высшие гармоники разложения (9.32) малыми и ограничиться рассмотрением только первой гармоники сигнала $y(t)$

$$y(t) = \alpha(A, \omega) \sin \omega t + \beta(A, \omega) \cos \omega t. \quad (9.24)$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$, можно записать

$$y(t) = \frac{\alpha(A, \omega)}{A} x(t) + \frac{\beta(A, \omega)}{A\omega} \frac{dx}{dt}.$$

В этом случае первое уравнение системы (9.21) примет вид

$$\left(Q(s) + R(s) \left(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s \right) \right) x = 0. \quad (9.25)$$

В этом выражении

$$\left. \begin{aligned} q(A, \omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \\ q_1(A, \omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

Результат замены нелинейности $F(x, \dot{x})$ выражением $(q + \frac{q_1}{\omega} s)x$ и называется гармонической линеаризацией. Величины q и q_1 называются коэффициентами гармонической линеаризации. Обычно для однозначных нелинейностей $q_1 = 0$. Выражения для q и q_1 для типовых нелинейностей приведены в приложении.

Принципиальное отличие гармонической линеаризации от обычной состоит в том, что при обычной линеаризации нелинейную характеристику заменяют прямой линией с определенной постоянной крутизной, а при гармонической линеаризации - прямой линией, крутизна которой зависит от амплитуды входного сигнала.

Наиболее удобный способ определения наличия, амплитуды и частоты автоколебаний состоит в использовании характеристического уравнения (9.25), которое после подстановки $s = j\omega$ приобретает вид

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A, \omega) + jq_1(A, \omega)) = 0. \quad (9.27)$$

Выделив вещественную и мнимую части, получим:

$$\left. \begin{aligned} U(q, q_1, \omega) &= 0 \\ V(q, q_1, \omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить амплитуду и частоту автоколебаний. Автоколебания существуют, если получающиеся значения частоты и амплитуды вещественны и положительны. Наличие автоколебаний связано с устойчивостью найденного периодического режима.

Общим признаком устойчивости периодического решения, т.е. существования автоколебаний, является равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица H_{n-1} при полученных значениях A и ω . На основании критерия устойчивости Михайлова получено другое условие устойчивости периодического решения [3]:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)^* > 0. \quad (9.29)$$

Индекс "*" означает, что производные вычисляются при полученных значениях A и ω .

Пример. Применим метод гармонической линеаризации к исследованию системы стабилизации КЛА, структурная схема и параметры которой приведены в предыдущем примере.

Для рассматриваемой нелинейной характеристики коэффициенты гармонической линеаризации имеют вид

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}; \quad q_1(A) = 0.$$

Заменяв нелинейную характеристику коэффициентом гармонической линеаризации $q(A)$, получим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{k_1 q}{s^2 + k_2 q s + k_1 q}.$$

После замены $s = j\omega$ получим

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 + k_1 q &= 0 \\ k_2 q \omega &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Из второго уравнения полученной системы следует, что $\omega = 0$. Это означает, что периодический процесс отсутствует. Тогда из первого уравнения следует, что $q(A) = 0$, а это возможно только при $A = b$ или $U(0) = b/k_1 = 4$ град. Это означает, что система после окончания переходного

го процесса устанавливается в положение $M(4,0)$. Этот результат полностью соответствует полученному построением фазовой траектории.

При $k_2 = 0$ получим

$$\Phi(s) = \frac{k_1 q}{s^2 + k_1 q}$$

Данная передаточная функция соответствует консервативному звену, которое определяет незатухающие гармонические колебания. После замены $s = j\omega$ получим

$$-\omega^2 - k_1 q = 0.$$

Отсюда частота автоколебаний

$$\omega = \sqrt{k_1 q}.$$

Амплитуду автоколебаний можно определить непосредственным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 q x(t) = 0$$

при $x(0) = v(0)$.

В результате получим, что амплитуда автоколебаний $A = v(0) = 6$ град. Вычислив теперь q , а затем частоту ω , получим: $\omega = 2,5$ 1/с.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными при построении фазовой траектории.

9.4. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления ЛА

Допустим, что на входе нелинейной САУ действует не только внешнее управляющее воздействие $f_1(t)$, но и внешнее высокочастотное воздействие $f(t) = B \sin \Omega_g t$, связанное, например, с изгибными колебаниями корпуса ЛА. Тогда уравнение системы запишется в виде

$$Q(s)x(s) + R(s)F(x, sx) = S(s)f(t) + S_g(s)f_1(t). \quad (9.30)$$

Будем полагать, что спектр частот сигнала $f_1(t)$ много ниже частоты Ω_g периодического воздействия $f(t)$. Решение уравнения (9.30) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x^o(t) + x^*(t) \\ x^* &= A_g \sin(\Omega_g t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

Переменная $x^o(t)$ предполагается медленной составляющей по сравнению с периодической $x^*(t)$.

Подставив (9.31) в (9.30), получим

$$Q(s)x + R(s)F(x^0, A_g, \Omega_g) = S(s)f(t) + S_A(s)f_1(t). \quad (9.32)$$

Считая, что линейная часть системы является фильтром нижних частот, будем учитывать только первую гармонику разложения нелинейной функции в ряд Фурье

$$F(x^0, A_g, \Omega_g) = F^0(x^0, A_g, \Omega_g) + \alpha \sin \Psi + \beta \cos \Psi, \quad \Psi = \Omega_g t.$$

В этом выражении

$$F^0(x^0, A_g, \Omega_g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_g \sin \Psi, A_g \Omega_g \cos \Psi) d\Psi. \quad (9.33)$$

Так же, как и ранее, обозначим:

$$\left. \begin{aligned} q(x^0, A_g, \Omega_g) &= \frac{1}{\pi A_g} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_g \sin \Psi, A_g \Omega_g \cos \Psi) \sin \Psi d\Psi \\ q_1(x^0, A_g, \Omega_g) &= \frac{1}{\pi A_g} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_g \sin \Psi, A_g \Omega_g \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Исходное уравнение разделится на два:

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x^0 + R(s)F^0 &= S_1(s)f_1(t) \\ Q(s)x^* + R(s)\left[q + \frac{q_1}{\Omega_g} s\right]x^* &= S(s)f(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

Первое уравнение определяет медленную (полезную) составляющую, где основной неизвестной является смещение $x^0(t)$. Второе уравнение определяет колебательную (вибрационную) составляющую. Функцию смещения F^0 линеаризуем в окрестности точки $x^0 = 0$:

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0} \quad (9.36)$$

Коэффициент k_n называется нелинейным коэффициентом усиления по медленной составляющей. Данный коэффициент зависит от амплитуды и частоты вынужденных колебаний. Это очень важное обстоятельство говорит о том, что внешняя вибрационная помеха может существенно повлиять на все стороны процесса управления. При определенных значениях A_g и Ω_g нелинейная САУ может не только ухудшить свое качество, но даже и потерять устойчивость. Особенно важно учитывать воздействие высокочастотной вибрации при исследовании условно-устойчивых систем, которые включают в себя неустойчивые динамические звенья и имеют критический коэффициент усиления как по максимуму, так и по минимуму.

Во втором уравнении системы (9.35) выразим переменную $f(t)$ через $x^*(t)$:

$$f(t) = B[\sin(\Omega_g t + \varphi) - \varphi] = B \cos \Psi \sin(\Omega_g t + \varphi) - B \sin \Psi \cos(\Omega_g t + \varphi).$$

Принимая во внимание (9.31) и учитывая, что

$$s x^* = A_8 \Omega_8 \cos(\Omega_8 t + \varphi),$$

окончательно получим:

$$f(t) = \frac{B}{A_8} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_8} s \right) x^*. \quad (9.27)$$

Подставив $f(t)$ во второе уравнение системы (9.35), получим

$$\left[Q(s) - S(s) \frac{B}{A_8} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_8} s \right) \right] x^* + R(s) \left(q + \frac{q_1}{\Omega_8} s \right) x^* = 0. \quad (9.38)$$

Данное уравнение после подстановки $s = j\Omega_8$ дает возможность определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний на входе нелинейной части системы. По этим данным вычисляется значение k_H и по характеристическому уравнению

$$Q(s) + k_H R(s) = 0 \quad (9.39)$$

судят об устойчивости САУ при заданных параметрах вибрационной помехи.

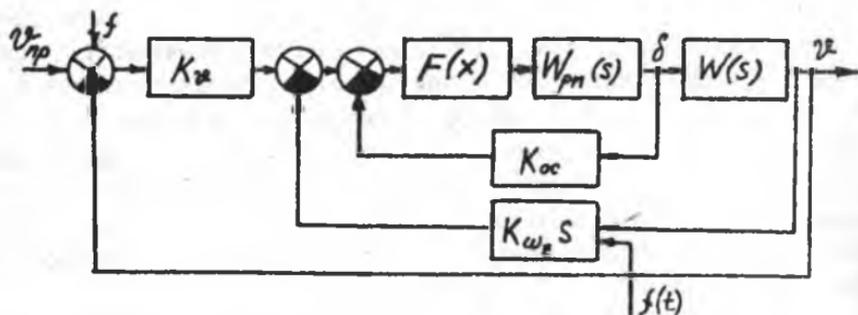
Выражения для коэффициентов гармонической линеаризации при высокочастотной помехе приведены в приложении.

Пример. Ракета-носитель "Авангард" на 75-й секунде полета имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k_1(T_1 s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)(T_4 s - 1)},$$

где $k_1 = 4,48$; $T_1 = 19,12$; $T_2 = 0,66$; $T_3 = 25,25$; $T_4 = 0,69$.

Структурная схема системы стабилизации представлена на рис. 9.6.



Р и с. 9.6. Структурная схема системы стабилизации

На этой схеме $W_{рп}(s) = \frac{1}{s(T_p s + 1)}$. Нелинейная функция $F(x)$ представляет собой характеристику типа насыщения (рис. 9.7).

Для $T_p = 0,1$; $k_v = 1,6$; $k_{\omega_2} = 0,6$; $k_{\alpha} = 1$ получено характеристическое уравнение, коэффициенты которого зависят от величины K . Из этого уравнения определено минимальное значение $k_{\min} = 4,35$, при котором система выходит на границу устойчивости. Амплитуда вынужденных колебаний на входе нелинейного элемента может быть определена по уравнению

$$A_b = B \sqrt{k_v^2 + (k_{\omega_2} \Omega_b)^2}$$

Значение нелинейного коэффициента усиления для данной нелинейной функции имеет вид

$$k_n = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{A_b}$$

Из этого выражения для $(k_n)_{\min} = 4,35$ и $k = 10$ при $b = 0,035$ получим значение для $(A_b)_{\max}$:

$$(A_b)_{\max} = \frac{b}{\sin \frac{\pi (k_n)_{\min}}{2}} = 0,0554.$$

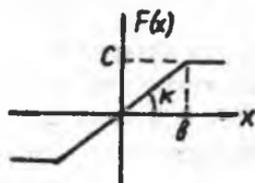
Теперь можно определить амплитуду вибрационной помехи, при которой происходит потеря устойчивости для частоты второго тона изгибных колебаний корпуса $\Omega_b = 62,5$ 1/с:

$$B_{\max} = \frac{(A_b)_{\max}}{\sqrt{k_v^2 + (k_{\omega_2} \Omega_b)^2}} = 1,487 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ угл. мин.}$$

Крайне малая амплитуда изгибных колебаний приводит к потере устойчивости системы. Это вызывает необходимость принятия специальных мер по обеспечению ее вибрационной помехоустойчивости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бойков А.Д., Закаблукровский В.Д. Исследование линейных систем автоматического управления с использованием моделирующих машин. / Куйбышев. авиац. ин-т; Куйбышев, 1971. 87 с.
2. Джон М.Смит. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей. М.: Машиностроение, 1980. 325 с.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768 с.
4. Бесекерский В.А. и др. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1978. 510 с.
5. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, 1978. 736 с.



Р и с. 9.7. Нелинейная характеристика

6. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М.: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроительной лит-ры, 1962. 672 с.

7. Солодовников В.В. Основы теории и элементов систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1985. 535 с.

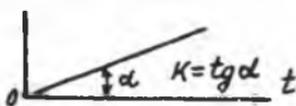
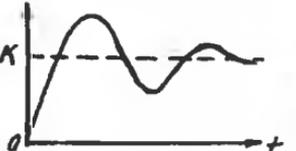
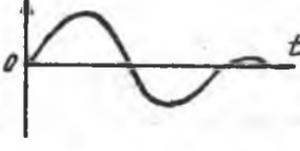
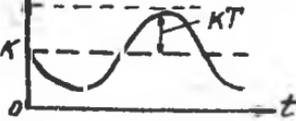
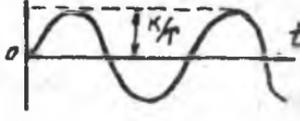
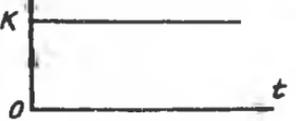
8. Судзиловский Н.В. Основы теории автоматического управления: М.: Машиностроение, 1985. 510 с.

9. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Э.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1965, 390 с.

ТАБЛИЦА ИЗОБРАЖЕНИЙ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ

N_{Σ} n/n	$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{T^2 z (z+1)}{2(z-1)^3}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-d}; d = e^{-aT}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tz d}{(z-d)^2}$
6	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$
7	$e^{-at} - e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma - a}{(s+a)(s+\gamma)}$	$\frac{z(d-c)}{(z-d)(z-c)}$ $c = e^{-\gamma T}$
8	$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z-d \cos \beta T)}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
9	$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
10	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{zt}{(z-1)^2} - \frac{(1-d)z}{a(z-1)(z-d)}$

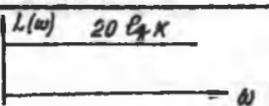
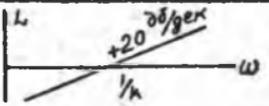
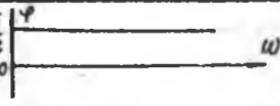
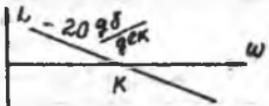
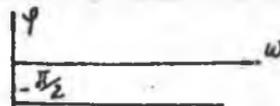
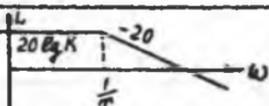
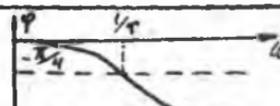
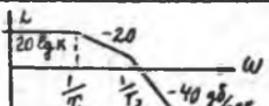
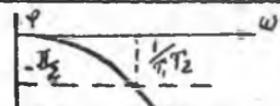
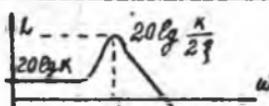
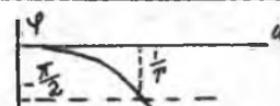
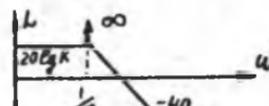
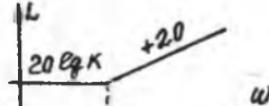
Временные характеристики типовых динамических звеньев

№ п/п	Типы звена	$h(t)$	$k(t)$
1	Безынерционное звено $W(s) = K$		
2	Идеальное дифференцирующее звено $W(s) = Ks$		
3	Идеальное интегрирующее звено $W(s) = \frac{K}{s}$		
4	Аperiodическое звено 1-го порядка $W(s) = \frac{K}{Ts+1}$		
5	Аperiodическое звено 2-го порядка $W(s) = \frac{K}{(Ts+1)(Ts+\dots)}$		
6	Колебательное звено $W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\zeta s + 1}$ $0 < \zeta < 1$		
7	Консервативное звено $W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1}$		
8	Форсирующее звено 1-го порядка $W(s) = K(Ts+1)$		

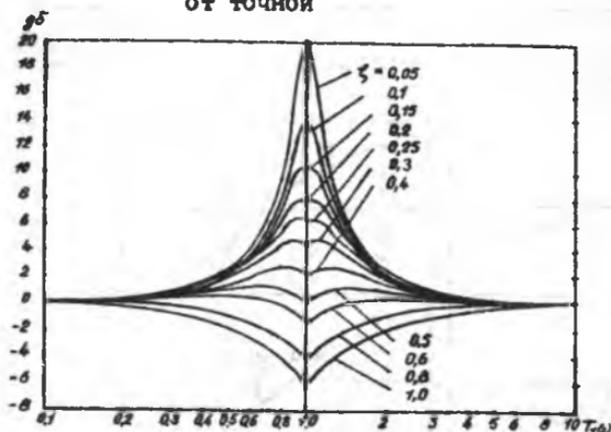
Частотные характеристики типовых динамических звеньев

№ п/п	Передаточная функция	Х а р а к т е р и с т и к и		
		амплитудная	фазовая	амплитудно- фазовая
1	$W=K$			
2	$W=KS$			
3	$W=K/S$			
4	$W=K/(TS+1)$			
5	$W=K/((T_1S+1)(T_2S+1))$			
6	$W(S)=\frac{K}{T^2S^2+2T\zeta S+1}$ $0 < \zeta < 1$			
7	$W(S)=\frac{K}{T^2S^2+1}$			
8	$W=K(TS+1)$			

Логарифмические частотные характеристики типовых динамических звеньев

№ п/п	Передаточная функция	Характеристика	
		амплитудная	фазовая
1	K		
2	KS		
3	$\frac{K}{S}$		
4	$\frac{K}{TS+1}$		
5	$\frac{K}{(T_1S+1)(T_2S+1)}$		
6	$\frac{K}{T^2S^2+2T\zeta S+1}$ $0 < \zeta < 1$		
7	$\frac{K}{T^2S^2+1}$		
8	$K(TS+1)$		

Отклонение асимптотической ЛАХ колебательного звена
от точной



Приложение 6

Таблица №. I

Передаточные функции, соответствующие типовым симметричным ЛАХ

№ п/п	Передаточная функция разомкнутой системы	Вид ЛАХ	Базовая частота	Связь с базовой частотой
1	$\frac{K(T_2 S + 1)}{(T_0 S + 1)(T_1 S + 1) \prod_{i=3}^n (T_i S + 1)}$		$\sqrt{\frac{K}{T_0 T_1}}$	$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}$
2	$\frac{K(T_2 S + 1)}{S(T_1 S + 1) \prod_{i=3}^n (T_i S + 1)}$		$\sqrt{\frac{K}{T_1}}$	$\sum T_i \leq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}}$
3	$\frac{K(T_2 S + 1)}{S^2 \prod_{i=3}^n (T_i S + 1)}$		\sqrt{K}	

Передаточные функции, соответствующие типовым
несимметричным ЛАХ

№ п/п	Передаточная функция разомкнутой системы	Вид ЛАХ	Базовая частота	Связь с базовой частотой
1	$\frac{K}{(\tau_0 s + 1) \prod_{i=1}^n (\tau_i s + 1)}$		$\frac{K}{\tau_0}$	$\sum_{i=1}^n \tau_i \leq$
2	$s \prod_{i=1}^n (\tau_i s + 1)$		K	$\leq \frac{1}{\omega_0} \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}$

В табл. 6.1 и 6.2

M - показатель колебательности;

1, 2, ..., - цифра, стоящая над участком ЛАХ, означает наклон
этого участка (1 - -20 дБ/дек; 2 - -40 дБ/дек и т.д.)

Нормированные кривые переходных процессов для
 типовых ЛАХ

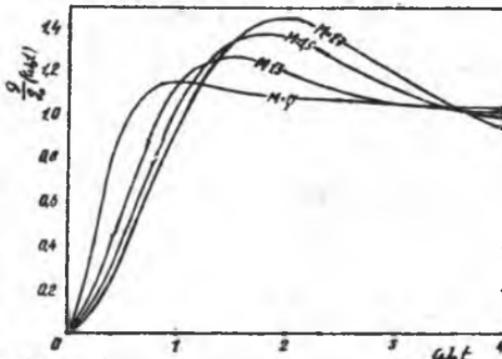


Рис. П.7.1. Переходные функции, соответствующие симметричным ЛАХ

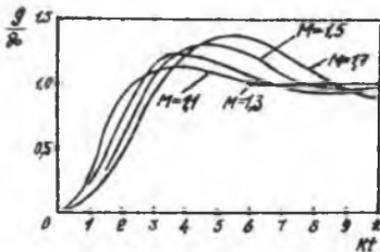
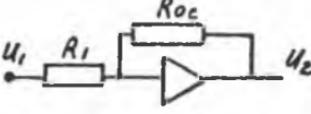
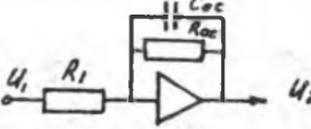
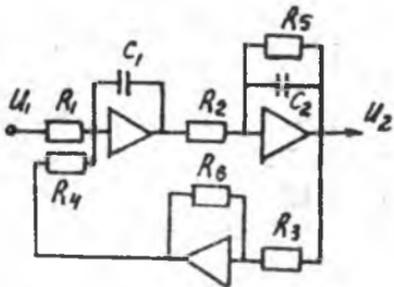
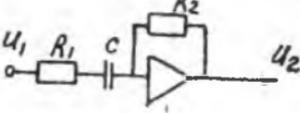


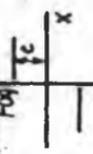
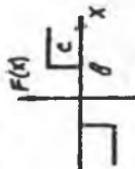
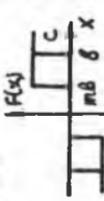
Рис. П.7.2. Переходные функции, соответствующие несимметричным ЛАХ

Правила преобразований структурных схем

№/п/п	Наименование преобразования	Исходная схема	Преобразованная схема
1	Перемена мест узлов линий связи		
2	Перемена мест сравнивающих устройств		
3	Перенос узла через сравнивающее устройство против хода сигнала		
4.	Перенос узла через сравнивающее устройство по ходу сигнала		
5	Перенос узла через звено по ходу сигнала		
6	Перенос узла через звено против хода сигнала		
7	Перенос сравнивающего устройства через звено по ходу сигнала		
8	Перенос сравнивающего устройства через звено против хода сигнала		

Аналоговые модели типовых динамических звеньев

№ п/п	Название звена	Модели звена	Передаточная функция звена
1	Безынерционное звено		$W(S) = K$ $U_2 = -K U_1$ $K = \frac{R_{0c}}{R_1}$
2	Апериодическое звено первого порядка		$W(S) = \frac{K}{TS+1}$ $K = -\frac{R_{0c}}{R_1}; T = R_{0c} C_{0c}$
3	Звено второго порядка		<p>а) Апериодическое звено второго порядка</p> $W(S) = \frac{K}{T_2^2 S^2 + 2T_1 S + 1}$ $K = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_6}; T_1 = \frac{R_2 R_3 R_4 C_1}{R_5 R_6}$ $T_2 = \sqrt{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_6}}$ $T_1 > 2T_2$ <p>б) Колебательное звено</p> $W(S) = \frac{K}{T^2 S^2 + 2T\zeta S + 1}$ $K = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_6}$ $T = \sqrt{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_6}}$ $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 R_3 R_4 C_1}{R_5^2 R_6 C_2}}$ $\zeta < 1$
4	Идеальное интегрирующее звено		$W(S) = \frac{K}{S}$ $K = -\frac{1}{RC}$
5	Инерционное дифференцирующее звено		$W(S) = \frac{AS}{TS+1}$ $K = R_2 C$ $T = (R_1 + R_2) C$

Статическая характеристика	$Q(A)$	$Q(A, x^0)$	$Q(A, x^0)$	K_H
1 Идеальная релейная 	$\frac{4C}{\pi A}$	0	$\frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}$	0
2 Релейная с зоной нечувствительности 	$\frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{A}\right)^2}$ $A > \theta$	0	$\frac{2C}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\theta + x^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\theta - x^0}{A}\right)^2} \right)$ $A \geq \theta + x^0 $	0
3 Релейная общего вида 	$\frac{2C}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{m\theta}{A}\right)^2} \right)$, $A \geq \theta$	$-\frac{2C\theta}{\pi A^2} (1-m)$	$\frac{C}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\theta + x^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{m\theta - x^0}{A}\right)^2} \right]$; $A \geq \theta + x^0 $	$-\frac{2C\theta}{\pi A^2} (1-m)$
4 С насыщением 	$K = \frac{2}{\pi} \alpha$ $\frac{2K}{\pi} \left(\arccos \sin \frac{\theta}{A} + \frac{\theta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{A}\right)^2} \right)$, $A \geq \theta$	0	$\frac{K}{\pi} \left[\arccos \sin \frac{\theta + x^0}{A} + \arccos \sin \frac{\theta - x^0}{A} + \frac{\theta - x^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta - x^0}{A}\right)^2} + \frac{\theta + x^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta + x^0}{A}\right)^2} \right]$; $A \geq \theta + x^0 $	$\frac{2K}{\pi} \arccos \sin \frac{\theta}{A}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. Основные понятия и задачи теории автоматического управления	3
1. Математическое описание САУ и их характеристики	8
1.1. Математические модели САУ	8
1.2. Передаточные функции САУ	10
1.3. Основные понятия современной теории управления ...	13
2. Динамические характеристики САУ	14
2.1. Временные характеристики САУ	14
2.2. Частотные характеристики САУ	16
2.3. Логарифмические частотные характеристики	18
3. Типовые динамические звенья и их характеристики :...	21
3.1. Динамические звенья автоматических систем	21
3.2. Соединения динамических звеньев	22
3.3. Характеристики типовых динамических звеньев	25
4. Исследование САУ на аналоговых вычислительных машинах.	29
4.1. Аналоговые вычислительные машины (АВМ)	29
4.2. Масштабирование переменных	30
4.3. Машинные уравнения и структурные схемы модели ...	31
4.3.1. Общий метод программирования	31
4.3.2. Метод вспомогательной переменной	33
4.3.3. Метод канонической формы	33
4.3.4. Структурное программирование	34
5. Устойчивость систем автоматического управления	36
5.1. Основные понятия теории устойчивости	36
5.2. Исследование устойчивости по уравнениям первого приближения	39
5.3. Алгебраические критерии устойчивости	40
5.3.1. Критерий Гурвица	41
5.3.2. Критерий Рауса	42
5.4. Частотные критерии устойчивости	43
5.4.1. Принцип аргумента	43
5.4.2. Критерий устойчивости Михайлова	44
5.4.3. Критерий устойчивости Найквиста	46
5.4.4. Запасы устойчивости	49
5.4.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ	50

5.5.	Выделение областей устойчивости	52
5.5.1.	Построение области устойчивости по алгебраическим критериям	53
5.5.2.	Д-разбиение в плоскости одного параметра..	54
5.5.3.	Д-разбиение в плоскости двух параметров ..	55
6.	Анализ качества линейных непрерывных САУ	58
6.1.	Показатели качества САУ	58
6.2.	Методы построения кривой переходной функции	59
6.3.	Частотные показатели качества	60
6.4.	Интегральные критерии качества	62
6.5.	Коэффициенты ошибок	64
7.	Синтез линейных непрерывных САУ	65
7.1.	Задача синтеза и способы коррекции	65
7.2.	Синтез САУ методом ЛЧХ	66
7.3.	Коррекция САУ обратными связями	69
8.	Дискретные линейные САУ	71
8.1.	Определение дискретной САУ	71
8.2.	Основы Z -преобразования	73
8.3.	Передаточные функции дискретных САУ	74
8.4.	Исследование устойчивости дискретных САУ	76
8.5.	Анализ качества дискретных САУ	78
8.6.	Операционные методы цифрового моделирования дискретно-непрерывных систем	80
8.7.	Синтез дискретных САУ	81
9.	Нелинейные системы автоматического управления	84
9.1.	Определение и особенности нелинейных систем	84
9.2.	Метод фазовых портретов	85
9.3.	Метод гармонической линеаризации	91
9.4.	Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления ЛА	94
	Библиографический список	97
	Приложения	99

Учебное издание

Г у с е в Александр Николаевич,
В ь ю л а н и н Вячеслав Аркадьевич,
З а к а б л у к о в с к и й Виктор Дмитриевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Редактор Г.А.У с а ч е в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Н.С.К у п р и я н о в а

Лицензия ЛР № 020301 от 28.11.91 г.

Подписано в печать 23.04.96. Формат 60x84¹/₁₆
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл.п.л. 6,51. Усл.кр.-стт. 6,3. Уч.-изд.л. 6,63.
Тираж 300 экз. Заказ 119.

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.