

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математического моделирования в механике

И.С.Загузов

ОСНОВЫ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

ЧАСТЬ III

Учебное пособие

Рекомендовано НМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе математических направлений и специальностей

Самара
Издательство «Универс групп»
2007

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета*

УДК 532.517

ББК 22.253

3 14

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф., проректор по научной работе Самарского государственного аэрокосмического университета **Е.В.Шахматов**;
д-р физ.-мат. наук, проф., декан механико-математического факультета Самарского государственного университета **В.И.Астафьев**.

Загузов, И.С.

3 14

Основы аэрогидромеханики. Часть III [Текст] : учеб. пособие / И.С. Загузов. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2007. – 132 с.

ISBN 978-5-467-00143-2

В учебном пособии к спецкурсам «Введение в аэрогидромеханику» и «Основы аэрогидромеханики» рассмотрены плоские движения идеальной несжимаемой жидкости и идеального сжимаемого газа, а также разрывные и гиперзвуковые течения идеального газа. Определенное внимание уделено бесциркуляционному и циркуляционному обтеканию кругового цилиндра, дозвуковому и сверхзвуковому обтеканию тонкого профиля, ударным волнам (скачкам уплотнения) при разрывных движениях идеального газа, обтеканию плоской пластины при гиперзвуковых движениях идеального газа.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе механико-математических направлений и специальностей, а также может быть полезно научным работникам в области аэрогидромеханики.

УДК 532.517

ББК 22.253

ISBN 978-5-467-00143-2 © Загузов И.С., 2007

© Самарский государственный университет,
2007

ВВЕДЕНИЕ

Современные методы математического описания движений жидкой или газообразной среды опираются на ряд принципов и гипотез, установленных в аэрогидромеханике. Одной из таких гипотез является гипотеза о неразрывности, или сплошности, движущейся среды, в соответствии с которой можно пренебречь межмолекулярными промежутками и молекулярными движениями и рассматривать непрерывные изменения основных параметров жидкости или газа в пространстве и во времени. Эта гипотеза вытекает из условия, заключающегося в том, что длина свободного пробега молекул и амплитуда их колебательного движения достаточно малы по сравнению с линейными размерами, характеризующими обтекаемое тело, такими, как крыло самолета, диаметр или длина корпуса ракеты или подводной лодки и т.д.

Введенная гипотеза сплошности не должна противоречить понятию о сжимаемости среды, в первую очередь, газовой, хотя, казалось бы, при отсутствии межмолекулярных промежутков среда должна быть несжимаемой. Реальность сжимаемой сплошной среды вытекает из того положения, что во многих исследованиях можно не учитывать существования межмолекулярных промежутков, но в то же время допускать возможность различной степени концентрации (плотности) среды в результате изменения величины этих промежутков.

В аэрогазодинамических исследованиях определение взаимодействия между газовой средой и движущимся в ней телом основывается на принципе обращенного движения, в соответствии с которым взаимодействующая система «неподвижная газовая среда (воздух) – движущийся объект» заменяется системой «движущаяся газовая среда – неподвижный объект». В случае замены одной системы другой должно быть соблюдено условие, при котором скорость набегающего на неподвижное тело газового потока была бы равна скорости движения этого тела в неподвижной среде. Указанный принцип обращенного движения вытекает из основного закона механики, согласно которому силы не зависят от того, какое из двух взаимодействующих тел (в данном случае газ или летательный аппарат) покоится, а какое находится в прямолинейном равномерном движении (закон относительности).

I. ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Этот раздел посвящен исследованию плоских безвихревых движений идеальной несжимаемой жидкости.

Рассмотрим сначала теоремы Кельвина и Лагранжа об условиях существования безвихревых течений. Согласно кинематической теореме Кельвина об изменении во времени циркуляции вектора скорости – индивидуальная производная во времени от циркуляции вектора скорости по замкнутому жидкому (т.е. состоящему во все время движения из одних и тех же частиц жидкости) контуру равна циркуляции вектора ускорения по тому же контуру, т.е.

$$\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}.$$

Возьмем уравнение движения Эйлера: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$, которое, в случае потенциальности объемных сил и баротропности движения, можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}(P + \Pi),$$

поскольку $\vec{F} = -\text{grad } \Pi$ (когда объемные силы имеют потенциал Π), а градиент функции давления P при баротропном процессе $\text{grad } P = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$.

Тогда получим:

$$\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\oint_C \text{grad}(\Pi + P) \cdot d\vec{r} = -\oint_C d(\Pi + P),$$

т.к. $\text{grad} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} = d$.

При однозначности функций P и Π контурный интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю, и тогда:

$$\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Следовательно: $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{const}$.

Это уравнение и является выражением теоремы Кельвина.

При баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных сил с однозначным потенциалом – циркуляция вектора скорости по замкнутому жидкому контуру не меняется.

Если учесть, что согласно теореме Стокса циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру равна суммарной интенсивности вихревых трубок, опоясанных этим контуром, то можно на основании теоремы Кельвина заключить, что при принятых допущениях о баротропности движения и наличии однозначного потенциала объемных сил сохраняется также и интенсивность вихревых трубок: $\oint_S (\text{rot } \vec{v})_n ds = \text{const}.$

Предположим, что в начальный момент времени во всех точках области, заполненной жидкостью, отсутствуют завихренности, т.е. элементарные жидкие объемы движутся без вращения, совершая лишь поступательное и деформационное движения. Тогда постоянная, стоящая в правой части последнего уравнения будет равна нулю, и в любой другой момент времени сохранится равенство: $\oint_S (\text{rot } \vec{v})_n ds = 0.$

Следовательно, $(\text{rot } \vec{v})_n = 0$ или $\text{rot } \vec{v} = 0.$

Отсюда следует теорема Лагранжа:

Если во всех точках баротропно движущейся под действием объемных сил с однозначным потенциалом идеальной жидкости вектор вихря скорости в начальный момент времени был равен нулю, то движение останется безвихревым и в любой последующий момент времени.

По аналогии из теоремы Лагранжа следует также, что если вначале движение было вихревым, то оно останется вихревым и в дальнейшем. В действительности, при движении реальной жидкости приходится наблюдать как образование, так и исчезновение вихревых движений. Главной причиной такого нарушения справедливости теорем Кельвина и Лагранжа случит наличие в реальной жидкости внутреннего трения (вязкости), особенно существенного в тонком пограничном слое на поверхности обтекаемого тела и в аэродинамическом следе за телом. Кроме того, возможно образование поверхностей разрыва сплошности жидкости, неустойчивых и сворачивающихся в дискретные вихри. Таковы, например, наблюдаемые в следе за обтекаемым телом вихревые дорожки Кармана.

Однако для идеальной жидкости теоремы Кельвина и Лагранжа являются справедливыми, и тогда рассмотрим для нее понятие потенциала скоростей. Если движение жидкости безвихревое, то из условия равенства нулю вектора вихря скорости $\text{rot } \vec{v}$ следует существование функции φ , зави-

сящей от координат и времени, связанной со скоростью \vec{v} равенством: $\vec{v} = \text{grad}\varphi$, или в проекциях на оси прямоугольных декартовых координат:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Функция φ называется потенциалом поля скоростей или потенциалом скоростей. Ранее мы шли от противного и говорили: если существует потенциал скорости φ , связанный с вектором скорости соотношением: $\vec{v} = \text{grad}\varphi$ (т.е. течение потенциально), то вектор вихря скорости $\text{rot}\vec{v}$ равен нулю (т.е. течение безвихревое). Это вытекает из следующих соотношений, записанных с помощью оператора Гамильтона ∇ : $\vec{v} = \text{grad}\varphi = \nabla\varphi$, $\text{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$, тогда $\text{rot}\vec{v} = \nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi = 0$, т.к. векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. Уравнение поверхности уровня потенциала скоростей: $\varphi(x, y, z, t) = \text{const}$, в случае стационарного поля: $\varphi(x, y, z) = \text{const}$.

1.1. Условия Коши-Римана для идеальной несжимаемой жидкости

Под плоским движением понимается такое движение, когда во всех плоскостях, перпендикулярных поверхности обтекания, движение частиц остается одинаковым. В этом случае достаточно рассмотреть задачу обтекания контура в одной плоскости, все прочие поверхности обтекания представляют собой непрерывную систему параллельных плоскостей, в которых течение является одинаковым. Поэтому можно, например, вместо пространственного обтекания крыла бесконечного размаха рассмотреть плоское обтекание крылового контура.

Здесь возникает необходимость применения теории функций комплексного переменного к задаче плоского безвихревого обтекания тел несжимаемой идеальной жидкостью.

Жуковский показал, что задача обтекания кругового цилиндра набегающим идеальным потоком решается аналитически до конца. Тогда это решение можно распространить на произвольный контур, если плоскость круга отображается на плоскость этого контура, т.е. использовать метод конформных отображений. Кинематическая задача охватывается уравнением неразрывности для плоского движения несжимаемой жидкости $\text{div}\vec{v}(x, y) = 0$ или

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.1)$$

Это уравнение можно решить, если ввести новую функцию тока ψ , такую, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Задача сводится к нахождению функции ψ . Запишем для этого дифференциальное уравнение линий тока, которое в случае плоского движения имеет вид:

$$\frac{\partial x}{v_x} = \frac{\partial y}{v_y} \quad \text{или} \quad v_y dx - v_x dy = 0. \quad (1.3)$$

Подставляя в уравнение (1.3) выражения для v_x и v_y через ψ , получим $\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$, т.е. полный дифференциал $d\psi(x,y) = 0$. Тогда $\psi(x,y) = \text{const}$,

следовательно функция ψ сохраняет постоянное значение вдоль линий тока. В силу этого функция ψ получила название функции тока. Если взять известные соотношения для проекций вектора скорости через потенциал скорости φ :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1.4)$$

то, подставляя их в уравнение неразрывности (1.1), приходим к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.5)$$

Если наложено условие потенциальности плоского течения, то имеет место уравнение

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad (1.6)$$

полученное из уравнения $\text{rot} \vec{v}(x,y) = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$, которое является выражением того, что рассматриваемое поле безвихревое.

Подставляя в уравнение (1.6) выражения для v_x и v_y через ψ , получим опять уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.7)$$

Таким образом, в случае потенциального поля скоростей, как функции тока, так и потенциалы скоростей определяются одинаковыми уравнениями типа Лапласа (1.5) и (1.7).

Если сопоставить соотношения (1.2) и (1.4), то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1.8)$$

Эти соотношения для идеальной несжимаемой жидкости выражают условия Коши – Римана. С точки зрения теории функций комплексного переменного эти условия говорят о следующем: существует характеристическая функция $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ (у которой действительная часть φ , а мнимая ψ), являющаяся аналитической функцией комплексного аргумента z , где $z = x + iy$.

Если продифференцировать по « x » характеристическую функцию $W(z)$, то получим:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x - i v_y = \bar{v}. \quad (1.9)$$

Полученное выражение носит название сопряженной скорости и обозначается \bar{v} , а скорость $v = v_x + i v_y$ является комплексной скоростью. Необходимо отметить, что

$$\bar{v} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial(iy)} = \frac{dW}{dz}. \quad (1.10)$$

Это вытекает из свойств функции $W(z)$, как функции не просто двух переменных (координат x, y), а функции одной комплексной переменной $z = x + iy$. Действительно, если величина W есть функция только положения точки M с координатой z , то производная от нее в этой точке в свою очередь должна быть функцией только положения точки, т.е. координаты z , и не зависеть от направления дифференцирования в плоскости. Иными словами,

производная $\frac{dW}{dz}$ и производные по направлениям действительной и мнимой осей должны быть равны между собой. Действительно

$$\frac{\partial W}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial W}{\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x - i v_y = \bar{v}$$

и, следовательно, получим $\frac{\partial W}{\partial(iy)} = \frac{\partial W}{\partial x} = \bar{v} = \frac{dW}{dz}$.

Таким образом, производная от характеристической функции W есть сопряженная скорость \bar{v} , а сама функция $W(z)=\varphi+i\psi$ называется комплексным потенциалом или характеристической функцией течения. Поэтому возникает очень интересное предложение: рассматривать не действительное течение и действительные силы, а их зеркальные отображения.

Математический аппарат теории функций комплексного переменного приводит к новому качеству, при помощи которого решение задачи об определении поля скоростей и подъемной силы (сопротивления) рассматривается в зеркальном отображении. Из курса теории функций комплексного переменного известно, что функция комплексного переменного $W(z)$ однозначно отображает точки плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ на плоскость комплексного переменного $W=\varphi+i\psi$. При этом происходит отображение фигур: замкнутых кривых и ограниченных ими частей плоскости z в соответствующие им фигуры или части плоскости W . Такое отображение называют конформным.

1.2. Комплексные потенциалы для некоторых видов движений

Рассмотрим комплексный потенциал $W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$. Отделяя действительную и мнимую части $W(z)$, получим потенциал скоростей φ и функцию тока ψ некоторого плоского безвихревого движения:

$$\varphi(x,y)=\text{Re } W(z); \quad \psi(x,y)=\text{Im } W(z).$$

Приравнивая функцию $\varphi(x,y)$ различным постоянным $\varphi(x,y)=C$, получим семейство изопотенциальных линий; аналогично совокупность равенств $\psi(x,y)=C'$ представляет собой семейство линий тока. Изопотенциальные линии и линии тока в любой точке плоскости течения взаимно ортогональны. Для доказательства этого утверждения надо показать, что взаимно перпендикулярны векторы – градиенты этих функций. Действительно:

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} \right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \vec{j} \right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv 0, \end{aligned}$$

что и доказывает взаимную ортогональность изопотенциальных линий и линий тока (так как скалярное произведение двух векторов равно нулю, если эти вектора перпендикулярны друг другу).

Зная комплексный потенциал $W(z)$, можно определить вектор скорости \bar{v} или его проекции v_x и v_y .

Комплексная скорость $v = v_x + iv_y$, величина этой скорости (или модуль комплексного числа) равна $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Сопряженная скорость $\bar{v} = v_x - iv_y$, величина этой скорости $|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |v|$.

Если θ – угол между вектором и осью Ox , то

$$v = v_x + iv_y = |v|(\cos\theta + i\sin\theta) = |v|e^{i\theta};$$

$$\bar{v} = v_x - iv_y = |v|(\cos\theta - i\sin\theta) = |v|e^{-i\theta}.$$

Здесь использованы формулы Эйлера $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

Таким образом $\bar{v} = ve^{-2i\theta}$.

Отсюда видно, что сопряженная скорость \bar{v} является зеркальным отображением v относительно оси Ox . Плоскость XOY называется физической плоскостью или плоскостью течения.

Совокупность значений комплексной скорости v образует плоскость годографа скорости или плоскость годографа. В этой плоскости располагаются годографы скорости, то есть геометрические места концов векторов скоростей частиц жидкости, проведенных из начала координат.

Производная от комплексного потенциала:

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v} = |v|e^{-i\theta} = v_x - iv_y.$$

Тогда проекции скорости: $v_x = \operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right)$; $v_y = -\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Контурный интеграл от сопряженной скорости \bar{v} по замкнутому контуру C в плоскости течения равен:

$$\oint_C \bar{v} dz = \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \oint_C dw = \oint_C (d\varphi + id\psi).$$

Вычисляя действительную и мнимую части этого интеграла, получим:

$$\operatorname{Re} \oint_C \bar{v} dz = \oint_C d\varphi = \oint_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) = \oint_C (v_x dx + v_y dy) = \Gamma;$$

$$\operatorname{Im} \oint_C \bar{v} dz = \oint_C d\psi = \oint_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \oint_C (v_x dy - v_y dx) = Q.$$

Отсюда видно, что действительная часть контурного интеграла определяет циркуляцию скорости Γ по замкнутому контуру, а мнимая – секундный объемный расход жидкости Q через замкнутый контур.

Рассмотрим несколько простых примеров комплексных потенциалов, которые широко используются на практике:

а) Линейная функция $W(z) = az$, где a – в общем случае комплексная постоянная. Составляя сопряженную скорость

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = a = \operatorname{const} = \bar{v}_\infty = v_{x\infty} - i v_{y\infty} = |v_\infty| (\cos \alpha - i \sin \alpha) = |v_\infty| e^{-i\alpha},$$

видим, что комплексная константа представляет одинаковую по величине и направлению во всем потоке сопряженную скорость. Одинаковой будет и комплексная скорость:

$$v = v_\infty = v_{x\infty} + i v_{y\infty} = |v_\infty| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = |v_\infty| e^{i\alpha}.$$

Следовательно, линейная функция определяет комплексный потенциал однородного потока со скоростью v_∞ , наклоненного к действительной оси физической плоскости под углом α (см. рис. 1).

$$W = \bar{v}_\infty z = (v_{x\infty} - i v_{y\infty}) z = |v_\infty| e^{-i\alpha} z = |v_\infty| (\cos \alpha - i \sin \alpha) z.$$

Отделяя действительную и мнимую части, найдем потенциал скоростей φ и функцию тока ψ .

$$\begin{aligned} W &= |v_\infty| (\cos \alpha - i \sin \alpha) (x + iy) = \\ &= |v_\infty| [(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + i(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)]. \end{aligned}$$

Так как $w = \varphi + i \psi$, то

$$\varphi = |v_\infty| (x \cos \alpha + y \sin \alpha) = v_{x\infty} x + v_{y\infty} y;$$

$$\psi = |v_\infty| (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) = -v_{y\infty} x + v_{x\infty} y.$$

Здесь использованы соотношения $z = x + iy$; $v_{x\infty} = v_\infty \cos \alpha$; $v_{y\infty} = v_\infty \sin \alpha$.

В частных случаях равенства $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, получим:

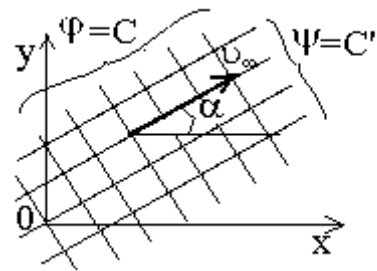


Рис. 1

$$\varphi = |v_\infty|x, \psi = |v_\infty|y \rightarrow \text{при } \alpha=0;$$

$$\varphi = |v_\infty|y, \psi = -|v_\infty|x \rightarrow \text{при } \alpha=\pi/2.$$

Это будут потенциалы скорости и функции тока однородных потоков, направленных соответственно вдоль осей X и Y .

б) Логарифмическая функция $W=A \cdot \ln z$, где A – действительная величина. Воспользовавшись полярными координатами (r, θ) , полагая $z=re^{i\theta}$ и учитывая, что $\ln e^{i\theta}=i\theta$, получим: $W=\varphi+i\psi=A(\ln r+i\theta)$, откуда $\varphi=A \ln r$, $\psi=A\theta$.

Линиями тока служат лучи $\theta=const$, выходящие из начала координат, изопотенциальными линиями – ортогональные к ним окружности $r=const$ (см. рис. 2).

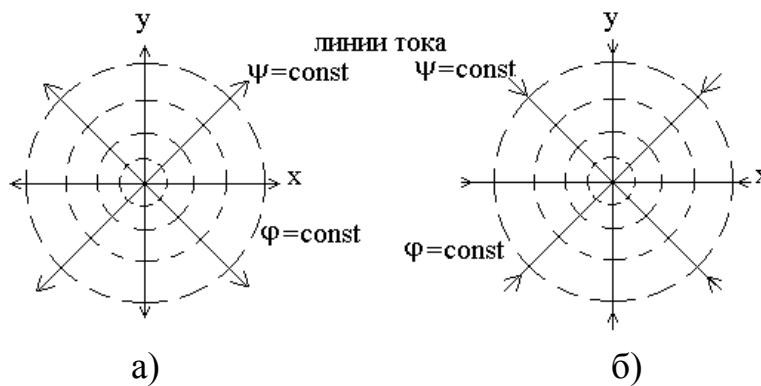


Рис. 2

Картина линий тока на рис.2 соответствует плоскому течению жидкости из точечного источника (а) или к стоку (б), находящимся в начале координат.

Чтобы найти гидродинамическое значение коэффициента A , введем в рассмотрение мощность (интенсивность) источника или стока Q , определив эту величину как секундный объемный расход жидкости сквозь замкнутый контур, охватывающий источник или сток (в данном случае – начало координат), положительный для источника и отрицательный для стока.

$$\text{Так как } Q = \oint_C d\psi, \text{ а } \psi = A\theta, \text{ то } Q = \int_0^{2\pi} Ad\theta = 2\pi A, \text{ откуда } A = \frac{Q}{2\pi}.$$

Тогда характеристическая функция для расположенного в начале координат источника или стока с секундным объемным расходом Q будет:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z, \text{ а } \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \text{ и } \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Далее: $\bar{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{d \ln z}{dz} = \frac{Q}{2\pi z}$; $|v| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$, где $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$, $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$.

В нашем случае: $v_r = \frac{Q}{2\pi} \frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$, $v_\theta = 0$, тогда $|v| = |v_r| = \frac{|Q|}{2\pi r}$.

в) Логарифмическая функция $W = A \ln z$, где A – чисто мнимая величина, равная Bi , где B – действительная константа. Тогда потенциалу $W = Bi \ln z$ будет соответствовать та же сетка кривых линий, что и во втором случае, но только линии тока и изопотенциальные линии поменяются местами.

Картина линий тока соответствует циркуляционному движению жидкости вокруг изолированного точечного вихря, расположенного в начале координат (рис. 3).

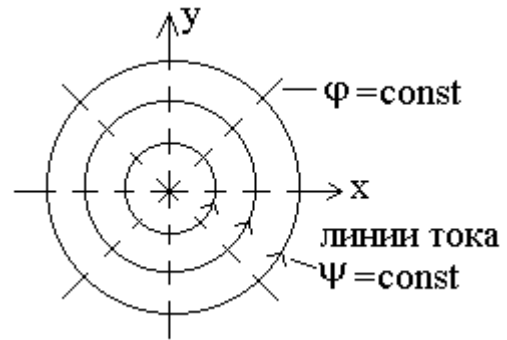


Рис. 3

Покажем это: поскольку в полярных координатах $z = r \cdot e^{i\theta}$, то

$$W = \phi + i\psi = Bi \cdot \ln z = Bi \cdot (\ln r + i\theta) = -B\theta + iB \cdot \ln r.$$

Отсюда $\phi = -B\theta$; $\psi = B \ln r$, так как $\Gamma = \oint_C d\phi = \int_0^{2\pi} -B d\theta = -2\pi B$, тогда $B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$.

Следовательно, комплексный потенциал циркуляционного потока с данной циркуляцией Γ будет равен: $W = Bi \cdot \ln z = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \cdot \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$.

При этом знак циркуляции Γ определяется как положительный в предположении, что направление интегрирования по контуру выбирается в такую сторону, чтобы при этом площадь, ограниченная контуром, оставалась слева.

Далее: $\phi = -B\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$, $\psi = B \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$, $\bar{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{d \ln z}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i z}$;

$|v| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$; $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$; $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, тогда $|v| = |v_\theta| = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}$.

Заметим, что, как в случае источника (стока), так и в случае вихря, распределение абсолютной величины скорости будет: в случае источника (стока) $|v| = \frac{|Q|}{2\pi r}$, в случае вихря $|v| = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}$, то есть величина скорости обратно пропорциональна расстоянию от источника (стока) или вихря. В на-

чале координат скорость бесконечно велика – начало координат является особой точкой поля скоростей.

1.3. Бесциркуляционное обтекание кругового цилиндра

Для определения комплексного потенциала при бесциркуляционном обтекании кругового цилиндра радиуса a , нужно решить уравнение неразрывности $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ или $\text{div } \vec{v} = 0$ при следующих граничных условиях:

а) при $r=a$, $v_r=0$, т.к. проекция вектора скорости v_r перпендикулярна поверхности цилиндра (рис. 4);

б) при $r \rightarrow \infty$, $v_r = v_\infty \cos \theta$.

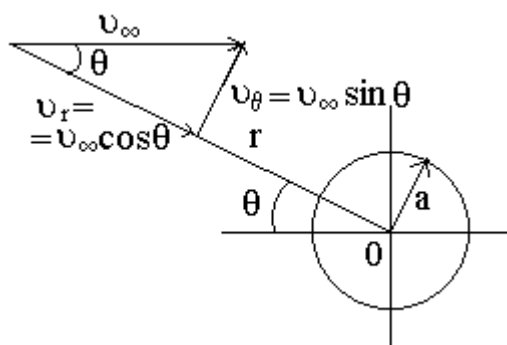


Рис. 4

Решать уравнение неразрывности будем в полярных координатах (r, θ) . Его можно получить, вводя так называемые коэффициенты Ламэ:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_i}\right)^2},$$

где g_i – криволинейные координаты.

Величины H_i (параметры Ламэ) имеют смысл коэффициентов пропорциональности в равенстве, выражающем связь между элементарным приращением dS_i длины отрезка и приращением соответствующей криволинейной координаты: $dS_i = H_i dg_i$. Здесь dS_1, dS_2, dS_3 – длины ребер элементарной ячейки; g_1, g_2, g_3 , – оси криволинейных координат. Тогда $dS_1 = H_1 dg_1, dS_2 = H_2 dg_2, dS_3 = H_3 dg_3$.

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_3}\right)^2}.$$

Из векторного анализа известно:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial g_1} (v_{g_1} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial g_2} (v_{g_2} H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial g_3} (v_{g_3} H_1 H_2) \right].$$

В полярной системе координат криволинейными координатами являются $g_1=r$, $g_2=\theta$, связанные с декартовыми координатами следующими соотношениями: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Найдем коэффициенты для нашего случая плоского обтекания:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 1,$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(-r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} = r.$$

В криволинейных полярных координатах для плоского случая

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{H_r H_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_r H_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta H_r) \right].$$

Подставляя значения $H_r=1$ и $H_\theta=r$, получим

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) \right].$$

Тогда уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) = 0. \quad (1.11)$$

Это и есть уравнение неразрывности в полярных координатах для плоского течения.

В работах Жуковского вводится функция потенциала скорости, определяемая соотношениями: $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$; $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, т.к. в полярных координатах приращениями координатных линий являются ∂r и $r \partial \theta$. Тогда подставляя в уравнение (1.11) выражения для v_r и v_θ , получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.12)$$

Это дифференциальное уравнение является уравнением Лапласа, записанным для плоской задачи в полярной системе координат. Его можно решать методом Пуассона, согласно которому $\varphi(r, \theta) = R(r) \mathcal{G}(\theta)$. Найдем

производные в (1.12), учитывая, что R зависит только от r , а \mathcal{G} зависит только от θ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = R' \mathcal{G}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = R'' \mathcal{G}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = R \mathcal{G}''.$$

Подставляя эти значения в уравнение Лапласа (1.12), получим:

$$R'' \mathcal{G} + \frac{1}{r} R' \mathcal{G} + \frac{1}{r^2} R \mathcal{G}'' = 0$$

или, умножив на r^2 : $\mathcal{G}(rR' + r^2R'') + \mathcal{G}''R = 0$.

Очевидно, что оно может быть записано в виде:

$$\frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}} = -\frac{(rR' + r^2R'')}{R} = -n^2. \quad (1.13)$$

Такая запись справедлива, поскольку левая часть зависит только от \mathcal{G} , а правая – только от R . Введем коэффициент $-n^2$, который изменяется в пределах ($1 \leq n \leq \infty$). Тогда уравнение (1.13) распадается на два:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}'' + n^2 \mathcal{G} &= 0; \\ r^2 R'' + rR' - n^2 R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Первое уравнение системы (1.14) – это однородное линейное уравнение второго порядка, его решение имеет вид:

$$\mathcal{G} = C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta). \quad (1.15)$$

Второе уравнение системы (1.14) является уравнением Эйлера. Решение этого уравнения ищется в виде: $R = r^m$, тогда $R' = mr^{m-1}$, $R'' = m(m-1)r^{m-2}$. Внося полученные значения во второе уравнение системы (1.14), получим следующее: $m(m-1)r^m + m r^m - n^2 r^m = 0 \Rightarrow (m^2 - n^2)r^m = 0 \Rightarrow (m^2 - n^2) = 0$ и тогда $m = \pm n$.

Следовательно, решение второго уравнения системы (1.14) следует искать в следующем виде:

$$R = C_3 r^n + C_4 r^{-n}. \quad (1.16)$$

Тогда частный интеграл уравнения Лапласа (1.12) можно записать в следующем обобщенном виде:

$$\varphi(r, \theta) = R(r)\mathcal{G}(\theta) = [A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)]r^n + [C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta)]r^{-n}.$$

Общий интеграл исходного уравнения Лапласа для плоской задачи будет равен сумме частных решений:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^n + [C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)] r^{-n}. \quad (1.17)$$

Отыщем коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n , воспользовавшись граничными условиями. Найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n [C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)] r^{-n-1}.$$

Возьмем второе граничное условие: при $r \rightarrow \infty, \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = v_{\infty} \cos(\theta)$.

В этом случае при $n=1, v_{\infty} \cos(\theta) = A_1 \cos(\theta)$ и, следовательно, $A_1 = v_{\infty}$. Другие коэффициенты $A_2 = A_3 = \dots A_n = 0; B_1 = B_2 = \dots B_n = 0$ при всех остальных $n > 1$. Тогда производную можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \cos(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)] r^{-n-1}.$$

Возьмем другое граничное условие: при $r=a \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = 0$. В этом случае

при $n=1: 0 = v_{\infty} \cos \theta - C_1 a^{-2} \cos \theta$, откуда $C_1 = v_{\infty} a^2, C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$ и $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$ при всех $n > 1$.

Подставим все найденные значения коэффициентов A_n, B_n, C_n и D_n в общий интеграл уравнения Лапласа (1.17) и получим искомый потенциал скоростей:

$$\varphi(r, \theta) = r v_{\infty} \cos \theta + v_{\infty} \frac{a^2}{r} \cos \theta = v_{\infty} \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right). \quad (1.18)$$

Для нахождения характеристической функции $W(z)$ надо найти ортогональную к функции φ функцию тока ψ . Воспользуемся условиями Коши – Римана, которые в полярной системе координат запишутся так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}; \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Найдем производные $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$.

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Тогда, с учетом (1.18) $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r}\right)$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \sin \theta \left(r + \frac{a^2}{r}\right) = -rv_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$ и, следовательно:

$$\text{а) } \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = v_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$\text{б) } \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = rv_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r}\right) = v_\infty \cos \theta \left(r - \frac{a^2}{r}\right).$$

Интеграл от функции $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta$ (как полного дифференциала) является криволинейным интегралом второго рода. Берется он следующим образом: сначала интегрируем $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ по r : $\psi = v_\infty \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r}\right) + C(\theta)$, затем полученное выражение дифференцируем по θ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_\infty \cos \theta \left(r - \frac{a^2}{r}\right) + C'(\theta).$$

Результат сравниваем с производной $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, записанной ранее: получаем $C'(\theta) = 0$, тогда $C(\theta) = \text{const}$, и, следовательно, $\psi = v_\infty \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r}\right) + \text{const}$.

Тогда, опуская константу, что не меняет физической картины течения, получаем

$$\psi = v_\infty \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r}\right). \quad (1.19)$$

Характеристическая функция $W(z)$ будет равна:

$$W(z) = \varphi(r, \theta) + i \psi(r, \theta) = v_\infty [r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)].$$

Отсюда

$$W(z) = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z}\right). \quad (1.20)$$

Здесь $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} = z$; $\frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{z}$.

Поставленная здесь задача решена до конца.

Рассмотрим кинематические характеристики обтекания. Найдем скорость потока на поверхности обтекаемого тела:

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \text{ т.к. } \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r v_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

При $r=a$: $v_\theta = -2v_\infty \sin \theta$.

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

При $r=a$: $v_r=0$.

Тогда

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}; \text{ при } r=a \rightarrow v = 2v_\infty \sin \theta \text{ или } \frac{v}{v_\infty} = 2 \sin \theta. \quad (1.21)$$

Коэффициент давления $C_p = \frac{p - p_\infty}{1/2(\rho v_\infty^2)}$ можно найти с помощью уравнения

Бернулли: $p + \frac{\rho v^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2}$, из которого $p - p_\infty = \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}$. Тогда:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{1/2(\rho v_\infty^2)} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2,$$

или, учитывая полученный выше результат (1.21), на поверхности обтекаемого цилиндра получим

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (1.22)$$

Выясним физическое содержание полученных соотношений. В точках A и B (рис. 5) значения скорости v будет равно нулю, т.к. в этих точках $\theta=0$, $\sin \theta = 0$ и $v = 2v_\infty \sin \theta = 0$, тогда $C_p=1$. Эти точки в аэродинамике называют критическими: точка A – передняя критическая точка или лобовая точка, точка B – задняя критическая точка или кормовая точка.

В точках C и D ($\theta=\pm 90^\circ$): $\frac{v}{v_\infty} = 2$, $C_p=-3$. Эти точки также являются характерными точками при обтекании контура. Они называются миделевыми точками, в них будет удвоенная скорость v_∞ , т.е. $v=2v_\infty$.

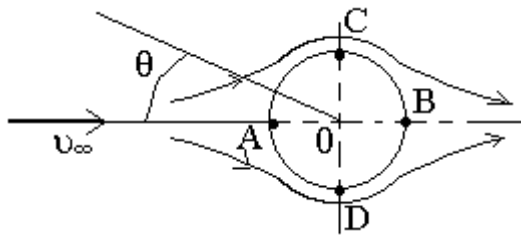


Рис. 5

На контуре CAD в передней точке разветвления (точка A) коэффициент давления имеет максимальное значение, затем при движении к точкам C и D происходит разгон жидкости от нуля до $2v_\infty$ и падение давления. Это конфузурная часть контура. На участке CBD – происходит падение скорости и рост давления – это диффузурная часть контура. Необходимо обратить внимание на симметричную картину обтекания кругового цилиндра как относительно оси OX , так и оси OY .

Вычислим главную аэродинамическую реакцию (равнодействующую сил давлений жидкости на цилиндр) и главный аэродинамический момент при помощи интегральных соотношений, предложенных Чаплыгиным и независимо от него Блазиусом.

При введении характеристической функции W рассматривается зеркальное отображение, следовательно, и при вычислении реакции и момента с использованием W рассматривают зеркальную задачу. Главный вектор сил гидродинамических давлений \vec{R} жидкости на цилиндр равен в общем случае $\vec{R} = -\oint_C P \vec{n} dl$. Кроме того, $\vec{R} = R_x + iR_y$. Его зеркальное отображение

$$\begin{aligned} \bar{R} = R_x - iR_y &= -\oint_C (pn_x - ipn_y) dl = -\oint_C p[\cos(n, x) - i \cos(n, y)] dl = \\ &= -\oint_C p[\sin \theta + i \cos \theta] dl = -i \oint_C p[\cos \theta - i \sin \theta] dl = -i \oint_C p e^{-i\theta} dl; \end{aligned}$$

$$\bar{R} = -i \oint_C p d\bar{z}. \quad (1.23)$$

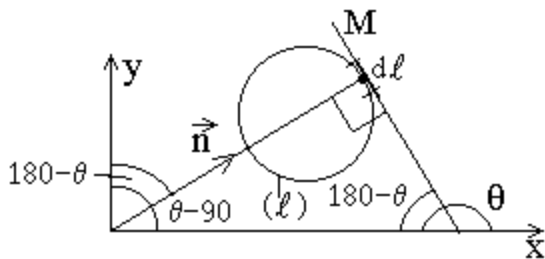


Рис. 6

Здесь θ – угол между осью X и касательной к поверхности цилиндра в точке M (см. рис. 6);

$$n_x = \cos(n^{\wedge}x); \quad n_y = \cos(n^{\wedge}y);$$

$$(n^{\wedge}x) = \theta - 90^\circ; \quad (n^{\wedge}y) = 180^\circ - \theta;$$

$$dz = dx + idy = d\ell(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} d\ell;$$

$$d\bar{z} = dx - idy = d\ell(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} d\ell;$$

$$d\bar{z} = e^{-2i\theta} dz.$$

Обратимся к интегралу Бернулли: $p + \frac{\rho v^2}{2} = const$, откуда $p = const - \frac{\rho v^2}{2}$. Здесь v – величина скорости, которая в теории комплексного переменного обозначается как модуль комплексного числа: $v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Подставим p и $|v|$ в формулу (1.23) и получим:

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_C |v|^2 d\bar{z} - i \oint_C const \cdot d\bar{z}.$$

Здесь $-i \oint_C const \cdot d\bar{z} \equiv 0$, поскольку $d\bar{z}$ является полным дифференциалом, а интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю. Тогда получим: $\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_C |v|^2 d\bar{z} = \frac{i\rho}{2} \oint_C |v|^2 e^{-2i\theta} dz = \frac{i\rho}{2} \oint_C \bar{v}^2 dz$, так как $\bar{v} = |v| \cdot e^{-i\theta}$.

Поскольку

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz}, \text{ то } \bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz. \quad (1.24)$$

Это первое интегральное выражение Чаплыгина – Блазиуса. Следовательно, если известна характеристическая функция W , то можно найти главный аэродинамический вектор \bar{R} , возникающий при обтекании контура.

Главный момент L сил гидродинамических давлений жидкости на цилиндр определяется относительно оси, расположенной перпендикулярно плоскости течения и проходящей через начало координат.

$$\begin{aligned} L &= -\oint_C (x n_y - y n_x) p dl = -\oint_C (x \cos(n, y) - y \cos(n, x)) p dl = \\ &= -\oint_C p(-x \cos \theta - y \sin \theta) dl = \oint_C p(x dx + y dy), \end{aligned}$$

так как $dx = l \cos \theta$; $dy = l \sin \theta$.

Поскольку $z d\bar{z} = (x+iy)(dx-idy) = (x dx + y dy) + i(y dx - x dy)$, то отсюда $(x dx + y dy) = \text{Re}(z d\bar{z})$ и тогда $L = \text{Re} \oint_C p z d\bar{z}$.

Из уравнения Бернулли: $p = const - \frac{\rho|v|^2}{2}$. Следовательно:

$L = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C |v|^2 z d\bar{z}$, поскольку второй интеграл от полного дифференциала $d\bar{z}$ равен нулю.

$$\begin{aligned} \text{Так как } d\bar{z} &= e^{-2i\theta} dz; \quad \bar{v} = |v| e^{-i\theta}, \text{ то } L = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C |v|^2 e^{-2i\theta} z dz = \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \bar{v}^2 z dz \quad \text{и окончательно} \end{aligned}$$

$$L = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 z dz. \quad (1.25)$$

Это второе интегральное выражение Чаплыгина – Блазиуса.

Следовательно, зная $W(z)$, можно найти и динамический момент L сил давления потока на профиль C – в нашем случае на круговой цилиндр. Итак, поскольку характеристическая функция для кругового профиля имеет вид: $W(z) = v_\infty z + \frac{a^2 v_\infty}{z}$, то чтобы судить о динамике процесса, надо найти:

$$\text{ти: } \frac{dW(z)}{dz} = v_\infty - \frac{a^2 v_\infty}{z^2};$$

$$\left(\frac{dW(z)}{dz} \right)^2 = v_\infty^2 - \frac{2a^2 v_\infty^2}{z^2} + \frac{a^4 v_\infty^2}{z^4}$$

и подставить последнее выражение в (1.24) и (1.25).

Вспомним интегральную теорему Коши, в соответствии с которой комплексный контурный интеграл $\oint_C f(z) dz = 0$, если $f(z)$ – аналитическая

функция в некоторой области D , где C – замкнутый контур, принадлежащий этой области. Эти условия для нашей задачи выполняются и тогда $\bar{R} = 0$ и $L = 0$.

Иными словами: при обтекании идеальным потоком кругового цилиндра главный аэродинамический вектор и главный момент сил давления жидкости на цилиндр равны нулю. Это означает, что при обтекании идеальным потоком кругового цилиндра – сам цилиндр не оказывает никакого влияния на поток.

Этот принцип называется парадоксом Даламбера: при обтекании идеальным потоком тела реакция между ним и потоком отсутствует. Парадокс Даламбера опровергается при рассмотрении реального вязкого течения с образованием вихрей в пограничном слое вокруг тела, да еще с отрывом потока вблизи миделевых точек.

Н.Е. Жуковский показал, что если идеальный поток обтекает круговой цилиндр, имеющий вращение, то возникает подъемная сила.

1.4. Циркуляционное обтекание кругового цилиндра

Посмотрим, как подошел к этой проблеме Жуковский. Мы видели, что при анализе решения задачи бесциркуляционного обтекания кругового цилиндра у нас появилось такое выражение: $\varphi(r, \theta) = R(r) \cdot \mathcal{G}(\theta)$ и $\frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}} = -\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -n^2$ (при $1 \leq n \leq \infty$). Теперь необходимо рассмотреть решение, когда $0 \leq n \leq \infty$. В этом случае будут две системы уравнений:

а) при $n=0$:

$$\frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}} = 0 \text{ и } r^2 R'' + rR' = 0. \quad (1.26)$$

Это означает наличие вихря в начале координат с циркуляцией Γ .

б) уравнения, охватывающие случаи $1 \leq n \leq \infty$, которые были уже рассмотрены при бесциркуляционном обтекании кругового цилиндра.

Поскольку задача линейная, то комплексные потенциалы процессов а) и б) складываются.

Итак, решаем систему уравнений а):

$$\mathcal{G}'(\theta) = C_1; \quad \mathcal{G}(\theta) = \int C_1 d\theta + C_2; \quad \mathcal{G}(\theta) = C_1 \theta + C_2.$$

Далее $R'' = -\frac{R'}{r}$. Обозначим $R' = p$, тогда $p' = -\frac{p}{r}$, или $\frac{dp}{dr} = -\frac{p}{r}$. Разделяя переменные, запишем: $\frac{dp}{p} = -\frac{dr}{r}$. Интегрируя, получим:

$$\ln p = -\ln r + \ln C_3, \text{ потенцируем : } p = \frac{C_3}{r} \text{ или } \frac{dR}{dr} = \frac{C_3}{r}.$$

$$\text{Разделим переменные : } dR = \frac{dr}{r} C_3.$$

$$\text{Интегрируя, получим : } R = \ln r \cdot C_3 + C_4.$$

$$\text{Таким образом, } R(r) = \ln r \cdot C_3 + C_4.$$

Так как $\varphi(r, \theta) = R(r) \cdot \mathcal{G}(\theta)$, то $\varphi(r, \theta) = (C_1\theta + C_2)(\ln r \cdot C_3 + C_4)$.

Для нахождения констант используем граничное условие на поверхности обтекаемого профиля: при $r=a \rightarrow v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$.

$$\text{Найдем } \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = (C_1\theta + C_2) \frac{1}{r} C_3 = 0.$$

Поскольку $C_1\theta + C_2 = \mathcal{G}(\theta) \neq 0$, $\frac{1}{r} \neq 0$, то отсюда $C_3 = 0$ и, следовательно, можно записать $\varphi(r, \theta) = (C_1\theta + C_2)C_4$.

Отбрасывая константу $C_2 \cdot C_4$, что не меняет физического смысла задачи, получим $\varphi = A\theta$.

$$\text{Тогда } \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = A, \text{ а } v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{A}{r}, \text{ откуда } \partial \varphi = v_\theta r \partial \theta = A \partial \theta.$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования A найдем циркуляцию Γ , равную $\Gamma = \oint_C d\varphi = \oint_C v_\theta r \partial \theta = \int_0^{2\pi} A \partial \theta = 2\pi A$.

Отсюда $A = \frac{\Gamma}{2\pi}$, следовательно

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (1.27)$$

Определим теперь функцию $\psi(r, \theta)$, используя условия Коши-Римана для полярных координат:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\Gamma}{2\pi}; \quad (1.28)$$

$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$, так как $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ при обтекании контура профиля. Интегрируя уравнение (1.28) и опуская константу, имеем

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (1.29)$$

Тогда характеристическая функция с учетом выражений (1.27), (1.29):

$$W(z) = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \cdot \ln r).$$

Умножим и разделим это выражение на i : $W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r + i\theta)$. В полярных координатах $z = e^{i\theta}$, тогда $\ln z = \ln r + i\theta$ и

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (1.30)$$

Таким образом, при учете нулевого решения для характеристической функции W , то есть при циркуляционном обтекании кругового цилиндра идеальной жидкостью имеем (складывая потенциалы):

$$W(z) = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (1.31)$$

Как показывает формула (1.31), для кругового цилиндра циркуляционное обтекание получают наложением вихря с циркуляцией Γ на бесциркуляционное обтекание.

Рассмотрим кинематическую картину обтекания. Составим производную:

$$\frac{dW}{dz} = v_\infty - \frac{v_\infty a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = \bar{v}. \quad (1.32)$$

Положим величину производной, равной нулю. Это означает, что имеют место критические точки A' и B' , в которых $\bar{v} = 0$. Умножив все члены (1.32) на z^2/v_∞ , получим квадратное уравнение:

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi v_\infty} z - a^2 = 0.$$

Здесь также освободились от мнимости в знаменателе во втором слагаемом. Решение этого уравнения имеет вид.

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \right)^2}.$$

Это решение указывает на три возможных типа обтекания кругового цилиндра радиуса a в зависимости от величины циркуляции. Направление потока, как правило, совпадает с положительным направлением оси OX .

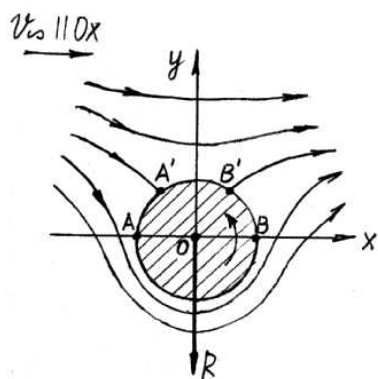


Рис. 7

1) Когда циркуляция мала: $|\Gamma| < 4\pi a v_\infty$, то есть $\frac{|\Gamma|}{4\pi v_\infty} < a$. В этом случае корни уравнения ком-

плексные: $z_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2} + \frac{i\Gamma}{4\pi v_\infty}$, имеют

общую ординату $\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}$ и отличаются лишь знака-

ми абсцисс, по модулю, меньших a . Модуль каждого из корней равен a , то есть они расположены на окружности радиуса a . Картина обтекания и положение критических точек показано на рис. 7. Критическими точками будут не A и B (как при бесциркуляционном обтекании), а A' и B' . При уменьшении Γ до нуля критические точки будут перемещаться: $A' \rightarrow A$, $B' \rightarrow B$, стремясь занять положение на пересечении окружности с осью Ox , как это и должно быть при $\Gamma=0$ (для справки – циркуляция положительная при направлении вращения против часовой стрелки).

2) Промежуточный случай, когда: $|\Gamma| = 4\pi a v_\infty$, то есть $\frac{|\Gamma|}{4\pi v_\infty} = a$. В

этом случае корни z_1 и z_2 мнимые и равны между собой. Модуль их равен a , критические точки совпадают (см. рис. 8) и находятся на мнимой оси в точке $z_1 = z_2 = ai$.

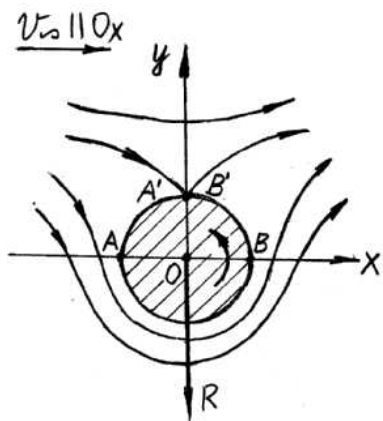


Рис. 8

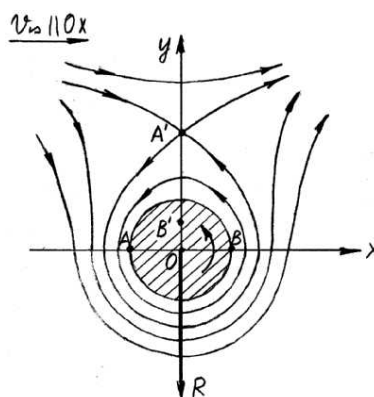


Рис. 9

3) Когда циркуляция велика: $|\Gamma| > 4\pi a v_\infty$, то есть $\frac{|\Gamma|}{4\pi v_\infty} > a$. В этом случае в выражении для z под знаком радикала будет стоять отрицательная

величина и можно записать: $z = \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2 - a^2} \right) i$.

Оба корня квадратного уравнения мнимые, причем модуль одного больше радиуса цилиндра, другого – меньше. В самом деле, корень z_1 имеет модуль (при $\Gamma > 0$):

$$|z_1| = \frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty}\right)^2 - a^2} > \frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty} > a.$$

Второй корень имеет модуль:

$$|z_2| = \frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty}\right)^2 - a^2} = \frac{a^2}{\frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty}\right)^2 - a^2}}.$$

Это выражение получают, умножив и разделив формулу для $|z_2|$ на член, стоящий в знаменателе выражения. Заменяем в знаменателе последнего выражения $\frac{\Gamma}{4\pi\nu_\infty}$ на меньшую величину a , тем самым как бы уве-

личивая $|z_2|$ и тогда получим: $|z_2| = \frac{a^2}{a} = a$, то есть на самом деле $|z_2| < a$.

Таким образом, первый корень дает критическую точку A' , лежащую вне круга на положительной стороне мнимой оси (см. рис. 9), второй корень – критическую точку B , лежащую на той же оси, но внутри круга.

Как видно, при циркуляционном обтекании кругового цилиндра сохраняется симметрия только относительно оси OY и нарушается относительно оси OX . В связи с этим главный вектор сил давления жидкости на поверхность цилиндра будет отличен от нуля и направлен вдоль оси OY . Заметим, что в слоях жидкости под цилиндром скорости бесциркуляционного обтекания цилиндра и чисто циркуляционного потока вокруг цилиндра складываются (направлены в одну сторону), а под цилиндром – вычитаются (т.к. направлены в разные стороны). При этом под цилиндром скорости получаются бóльшие, а давления, согласно уравнению Бернулли, меньшие. Над цилиндром, наоборот, скорости меньшие, а давления бóльшие. Это приводит к тому, что в указанном на рис.9 обтекании главный вектор сил давления R жидкости на цилиндр будет направлен по оси OY в отрицательную сторону (вниз).

При циркуляционном течении по часовой стрелке ($\Gamma < 0$) картина обтекания при том же расположении осей координат изменяется на перевернутую вокруг оси OX на 180° , и главный вектор сил давления окажется направленным по оси OY в положительную сторону, то есть вверх (т.к. тогда скорости сложатся над цилиндром и давления над ним станут меньшими по сравнению с давлениями под цилиндром). Можно дать простое правило определения направления главного вектора сил давления жидкости на по-

верхность цилиндра: поместив начало вектора скорости \bar{v}_∞ в центр цилиндра 0 , повернуть его на 90° в сторону, противоположную направлению циркуляционного движения – это и даст направление главного вектора R .

Теперь необходимо вычислить величину R :

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = \left(v_\infty - \frac{v_\infty a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}\right)^2.$$

Подставим это выражение в первое интегральное выражение Чаплыгина-Блазиуса:

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz.$$

Опуская промежуточные выкладки, получаем формулу Жуковского:

$$\bar{R} = i\rho v_\infty \Gamma. \quad (1.33)$$

1.5. Теорема Жуковского

Поскольку $\bar{R} = R_x - iR_y$, а $R_x = 0$ (из условия симметрии картины обтекания кругового цилиндра относительно оси OY), то $\bar{R} = -iR_y$. Аналогично, т.к. $R = R_x + iR_y$, то при $R_x = 0 \rightarrow R = iR_y$.

Из этих формул очевидно, что

$$R = -i\rho v_\infty \Gamma. \quad (1.34)$$

Таким образом, векторы R и \bar{R} по модулю одинаковы, но противоположны по направлению. Для нашего случая обтекания цилиндра потоком с положительной циркуляцией вектор R равен по модулю $|R| = \rho v_\infty \Gamma$ и направлен вниз по оси OY , что совпадает с физическим объяснением направления главного вектора сил давления R , приведенном на рис. 9. Необходимо отметить, что главный момент сил давления $L=0$.

Полученное выражение (1.34) определяет общую теорему Жуковского о подъемной силе крыла в безвихревом плоскопараллельном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Эта формула говорит о том, что при циркуляционном обтекании возникает поперечная сила, равная произведению плотности жидкости на скорость набегающего потока и на циркуляцию.

Для нашего случая – теорема Жуковского формулируется следующим образом:

При безотрывном обтекании кругового цилиндра поступательным потоком при наличии циркуляции возникает подъемная сила, равная произведению плотности жидкости на скорость и циркуляцию, направление которой определяется поворотом вектора скорости потока v_∞ в т. O на прямой угол в сторону, противоположную направлению циркуляции.

Необходимо отметить, что подъемная сила возникает только при наличии вращения цилиндра (то есть при наличии циркуляции), когда критические точки A и B стягиваются к одной половине окружности, образуя несимметричный профиль, а обтекание любого несимметричного профиля приводит к возникновению подъемной силы. При вращении цилиндра, например по часовой стрелке, точки A и B переходят в A' и B' , верхняя дужка становится больше нижней и в силу неразрывности (сплошности) среды скорость обтекания верхней дужки будет больше, чем нижней, а давление меньше, и образуется вектор R , идущий из центра O в сторону, противоположную направлению циркуляции, то есть вверх.

В своей теореме Н.Е. Жуковский впервые установил вихревую природу сил, действующих со стороны потока на крыло, и указал на наличие простой зависимости между этой силой и циркуляцией вектора скорости по контуру, охватывающему обтекаемое крыло.

Физическая природа возникновения циркуляции связана с наличием в жидкости трения (вязкости). Частицы реальной жидкости, проходящие в непосредственной близости к поверхности профиля, образуют тонкий пограничный слой. В этой области движение жидкости будет вихревым, причем интенсивность вихрей может достигать больших значений, т.к. скорость частиц в пограничном слое резко меняется от нуля на поверхности обтекаемого тела до величины порядка скорости v_∞ на внешней границе пограничного слоя. Так, например, на крыле самолета максимальная толщина пограничного слоя не превосходит нескольких сантиметров, в то время как разность скоростей на поверхности крыла и на внешней границе пограничного слоя достигает сотен метров в секунду. При таких значительных неоднородностях скоростного поля суммарная интенсивность вихрей в пограничном слое, а тем самым и циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру, охватывающему крыло, может достигать больших значений.

Теория идеальной жидкости, не учитывающая наличия трения, естественно, не могла объяснить возникновения вихрей в набегающем на тело безвихревом потоке. Для того, чтобы, оставаясь в рамках теории идеального безвихревого потока, определить величину воздействия потока на по-

мещенное в него тело, Жуковский предполагает, что происходит движение с особенностью – вихрем, имеющим интенсивность, равную сумме интенсивностей вихрей, которые образовались бы на самом деле в тонком слое на поверхности тела при обтекании его реальной жидкостью. Такой вихрь Н.Е. Жуковский назвал присоединенным. Интенсивность присоединенного вихря, или, что, то же самое, циркуляцию вектора скорости по контуру, охватывающему крыловой профиль, можно вычислить при помощи теории движения реальной жидкости в пограничном слое.

Существенным является тот факт, что единственной силой, действующей на профиль в плоскопараллельном безвихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости, является перпендикулярная к направлению набегающего потока или, в обратном движении, поперечная к направлению движения профиля сила, которая может быть названа подъёмной или поддерживающей силой, т.к. именно эта сила обеспечивает подъём самолета в воздухе и поддерживает его крыло в горизонтальном полете.

Введем коэффициент подъёмной силы как отношение величины подъёмной силы $|R|$ к скоростному напору набегающего потока $\frac{1}{2}\rho|v_\infty|^2$ и длине хорды b . Обычно ось OX направляют по скорости v_∞ ; тогда подъёмная сила будет направлена по оси OY и может быть обозначена через R_y . Вот почему коэффициент подъёмной силы принято обозначать через C_y , а коэффициент сопротивления – через C_x . При этом обозначении будем иметь:

$$C_y = \frac{|R|}{\frac{1}{2}\rho|v_\infty|^2 b}.$$

1.6. Обтекание крылового профиля по методу конформных отображений

Полученное выше общее решение задачи об обтекании поступательным потоком кругового цилиндра позволяет решить задачу об обтекании произвольного контура, если только известно конформное отображение внешности этого контура на внешность круга.

Рассмотрим приложение метода конформных отображений к решению прямой задачи обтекания крыловых профилей. Под крыловым профилем (рис. 10) понимают плавный, вытянутый в направлении набегающего на него потока, замкнутый и самонепересекающийся геометрический контур с закругленной передней кромкой и заостренной задней кромкой. От-

резок прямой, соединяющей некоторую точку передней кромки с вершиной угла на задней кромке, называют хордой крылового профиля, а длину хорды – длиной профиля. Максимальную толщину профиля в направлении, перпендикулярном к хорде, называют толщиной профиля, а отношение толщины к длине – относительной толщиной крылового профиля. Угол, образованный вектором скорости набегающего потока вдалеке от профиля (вектором скорости «на бесконечности») и направлением хорды, носит наименование угла атаки.

Подъемную силу крыла с достаточной степенью точности можно рассматривать как силу, происходящую от давлений, приложенных к поверхности крыла (составляющая подъемной силы от касательных напряжений пренебрежительно мала). Как показывают опыты, типичная картина распределения давления имеет вид, представленный на рис. 10а.

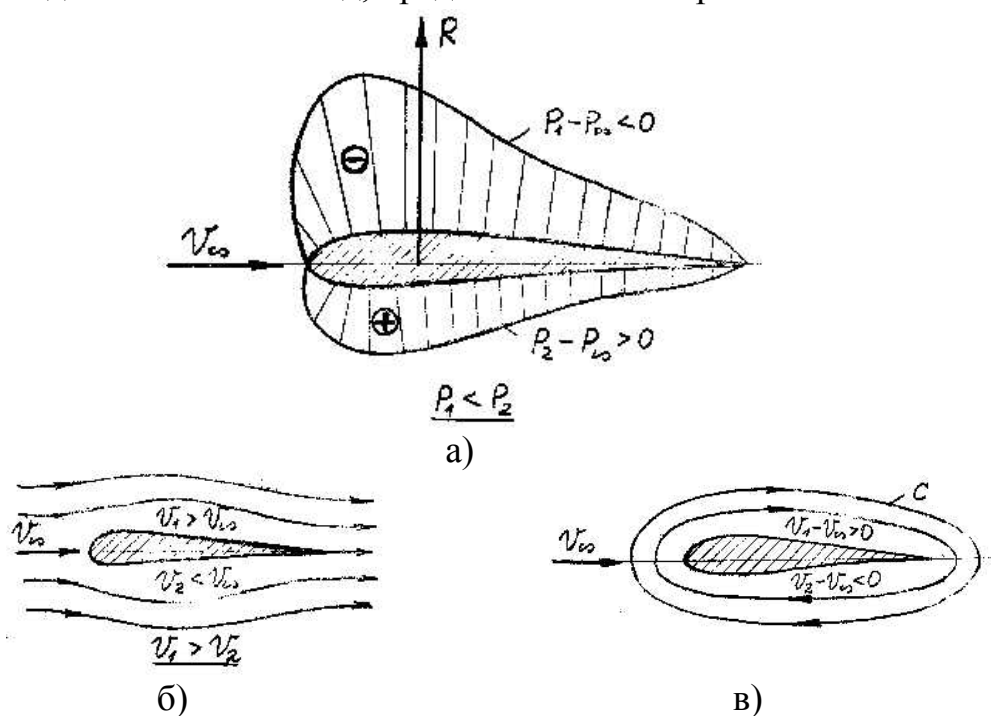


Рис. 10

Видно, что на нижней дужке крылового профиля местное давление p_2 больше атмосферного давления p_{∞} ($p_2 - p_{\infty} > 0$), на верхней дужке местное давление p_1 меньше атмосферного ($p_1 - p_{\infty} < 0$), то есть наблюдается разрежение. Можно отметить также, что абсолютные величины подсосывания на верхней дужке крылового профиля значительно больше величины давлений на нижней дужке, следовательно, подъемная сила профиля образуется главным образом за счет разрежения на верхней его дужке. О кинематической картине обтекания профиля можно судить по эпюре распреде-

ления давления. Применим уравнение Бернулли $p + \frac{\rho v^2}{2} = const$ к двум струйкам; одной, идущей из бесконечности и обтекающей нижнюю дужку крылового профиля (см. рис. 10б), и другой, идущей тоже из бесконечности и обтекающей верхнюю дужку. Тогда получим, что на нижней дужке, где давление p_2 будет больше давления на бесконечности p_∞ (атмосферного), скорость v_2 меньше скорости потока на бесконечности v_∞ ; а на верхней дужке, где $p_1 < p_\infty$ скорость v_1 будет больше v_∞ . Аналогичные заключения можно сделать и по поводу других струек, близких к рассмотренным. Таким образом, наличие крыла в поступательном потоке изменяет его поле скоростей, уменьшая скорости под крылом и увеличивая над ним. Чтобы выяснить, какой именно поток создается в жидкости вследствие наличия крыла, вычтем (геометрически) из поля скоростей потока, обтекающего крыло, поле скоростей поступательного потока v_∞ . В результате вычитания получим поток, скорости которого в области под крылом направлены в сторону, противоположную v_∞ (т.к. $v_2 < v_\infty$), а в области над крылом – в ту же сторону, что v_∞ (т.к. $v_1 > v_\infty$). Так как влияние крыла – местное, то есть убывает по мере удаления от крыла и равно нулю на бесконечности, то линии тока этого потока не уходят в бесконечность. Такой поток с замкнутыми линиями тока вокруг крылового профиля (рис.10в) называется циркуляционным потоком. В действительности этот поток (в силу вязкости) происходит от вращения частиц в непосредственной близости к крылу (в пограничном слое), и его можно рассматривать как результирующий поток множества плоских вихрей, расположенных по поверхности крыла. Очевидно, что работа вектора скорости по замкнутому контуру C определится как контурный интеграл:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C v_r dr = \oint_C v_x dx + \oint_C v_y dy,$$

где $d\vec{r}$ – элемент контура C , v_r – проекция скорости на направление элемента $d\vec{r}$. Определенная таким образом величина Γ и есть циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру.

Таким образом, поток у крыла можно представить себе как результирующий двух потоков: поступательного со скоростью v_∞ и циркуляционного потока со скоростью $|v - v_\infty|$.

На практике, при вычислении циркуляции нет надобности всякий раз вычитать из потока v , обтекающего крыло, поступательный поток v_∞ (как

это было сделано для разъяснения появления циркуляции вокруг крылового профиля), потому что поступательный поток сам по себе не изменяет величины циркуляции вектора скорости, для него $\Gamma=0$ по любому контуру. Поэтому берут в потоке, обтекающем крыло, произвольный замкнутый контур C , охватывающий профиль, и вычисляют циркуляцию вектора скорости по этому контуру:
$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C v_r dr.$$

Величина циркуляции будет такая же, как и при вычитании поступательного потока. При вычислении контурного интеграла за положительное направление обхода контура обычно принимают такое направление, чтобы при обходе по контуру ограничиваемая им область все время оставалась по левую сторону. Обычные представления положительного направления вращения (например, против хода часовой стрелки) здесь непригодны, т.к. для контуров сложной формы они давали бы противоречивые указания.

Перейдем к математической постановке задачи обтекания крылового профиля плоским, однородным на бесконечности, безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости.

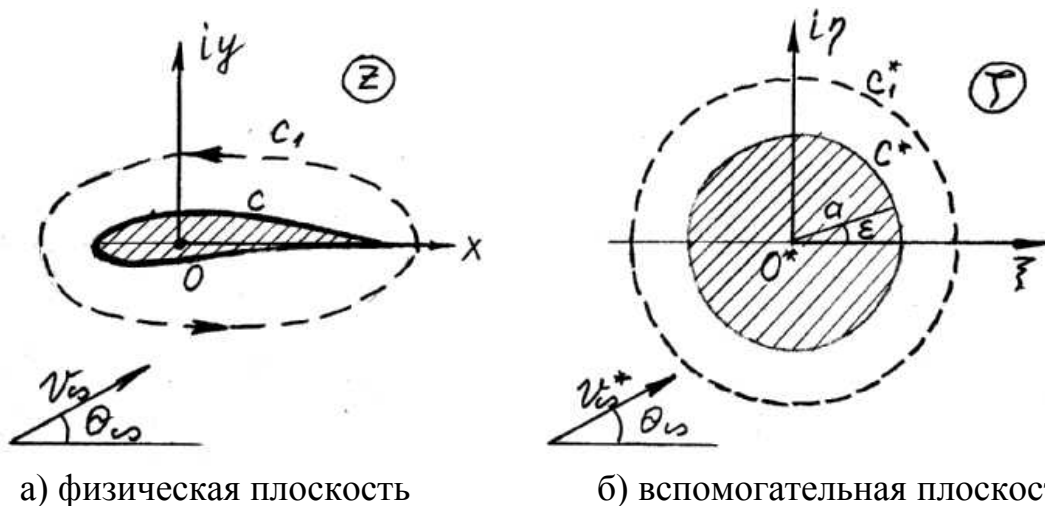


Рис. 11

Набегающий поток зададим комплексным вектором скорости v_∞ , образующим, в общем случае, с осью OX угол θ_∞ . Физическая плоскость z имеет заштрихованный вырез (см. рис. 11а), что делает ее двухсвязной, для определенности задачи необходимо задать наперед циркуляцию вектора скорости Γ по произвольному, охватывающему профиль, контуру C_1 .

Пусть функция комплексного переменного $z = f(\zeta)$ представляет собой преобразующую (или отображающую) функцию, осуществляющую конформное отображение внешней по отношению к ограниченной контуром C (заштрихованной) области плоскости комплексного переменного

$z = x + iy$ на внешнюю по отношению к заштрихованному кругу C^* с радиусом a и центром в начале координат системы $O^*\xi\eta$ часть вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Наложим на функцию $z = f(\zeta)$ дополнительные условия:

а) чтобы бесконечно удаленная точка $z = \infty$ переходила при отображении в бесконечно удаленную точку $\zeta = \infty$;

б) чтобы направление скорости на бесконечности v_∞ при переходе из плоскости z в плоскость ζ сохранялось. Тогда, как доказывается в теории функций комплексного переменного (теорема Римана), при выполнении этих условий преобразование $z = f(\zeta)$ является единственным.

Пусть $W(z)$ – искомый комплексный потенциал течения в физической плоскости, а $W^*(\zeta)$ – комплексный потенциал течения во вспомогательной плоскости, а именно комплексный потенциал циркуляционного обтекания кругового цилиндра (он считается заданным). Тогда

$$W(z) = v_\infty z + v_\infty \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z;$$

$$W^*(\zeta) = v_\infty^* \zeta + v_\infty^* \frac{a^2}{\zeta} + \frac{\Gamma^*}{2\pi i} \ln \zeta,$$

где v_∞^* и Γ^* – соответственно скорость на бесконечности и циркуляция вектора скорости по произвольному контуру C_1^* , охватывающему C^* во вспомогательной плоскости ζ . Если известна функция, отображающая внешнюю область кругового цилиндра в плоскости ζ на внешнюю область профиля в плоскости z , то есть дана зависимость: $z = f(\zeta)$, то можно записать:

$$W(z) = W[f(\zeta)] = W^*(\zeta).$$

Взяв производную по ζ от обеих частей этого равенства, получим:

$$\frac{dW^*}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \cdot f'(\zeta).$$

Поскольку $\frac{dW}{dz} = \bar{v}$, а $\frac{dW^*}{d\zeta} = \bar{v}^*$, то $\bar{v}^* = \bar{v} \cdot f'(\zeta)$, и в бесконечно удаленных точках: $\bar{v}_\infty^* = m_\infty \bar{v}_\infty$, где $m_\infty = f'(\infty)$.

По принятому ранее условию направление вектора скорости на бесконечности v_∞ при конформном отображении сохраняется, т.е. векторы v_∞^* и v_∞ параллельны друг другу. Отсюда следует параллельность и сопряженных векторов \bar{v}_∞^* и \bar{v}_∞ , а поскольку m_∞ – действительная величина (будем считать ее для определенности положительной), то $v_\infty^* = m_\infty v_\infty$.

Рассмотрим теперь циркуляцию Γ^* . Учитывая, что $\operatorname{Re} \oint \bar{v} dz = \Gamma$, представим Γ^* как действительную часть интеграла:

$$\Gamma^* = \operatorname{Re} \oint_{C_1^*} \bar{v}^* d\zeta = \operatorname{Re} \oint_{C_1^*} \bar{v} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \operatorname{Re} \oint_{C_1^*} \bar{v} dz = \Gamma.$$

Видно, что циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый профиль, при конформном отображении сохраняет свое значение.

Приведенные рассуждения позволили выразить неизвестные величины v_∞^* и Γ^* через заданные величины v_∞ , Γ и коэффициент

$m_\infty = f'(\infty) = \frac{dz}{d\zeta}$. Следовательно, будем иметь окончательное выражение

комплексного потенциала W в плоскости течения в виде параметрической зависимости от параметра ζ :

$$W(z) = W^*(\zeta) = m_\infty \left(v_\infty \zeta + \frac{v_\infty a^2}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta,$$

где $z = f(\zeta)$; $v_\infty^* = m_\infty v_\infty$; $\Gamma^* = \Gamma$.

Таким образом, если известно решение геометрической задачи $z = f(\zeta)$ о конформном отображении внешней по отношению к обтекаемому контуру C области физической плоскости z на внешнюю по отношению к кругу C^* произвольного радиуса a область вспомогательной плоскости ζ , то решение гидродинамической задачи об определении комплексного потенциала $W(z)$ уже не составит труда.

II. ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

2.1. Распространение малых возмущений в потоке сжимаемого газа

Движение газа имеет существенно различный характер в зависимости от того, является ли оно дозвуковым или сверхзвуковым. Одним из наиболее существенных принципиальных отличий сверхзвукового потока является возможность существования в нем так называемых ударных волн (свойства которых рассмотрим ниже). Другая характерная особенность сверхзвукового течения связана со свойствами распространения в газе малых возмущений.

Если в каком-нибудь месте стационарно движущийся газ подвергается слабому возмущению, то влияние этого возмущения распространяется по газу со скоростью (относительно самого газа), равной скорости звука. Скорость же распространения возмущения относительно неподвижной системы координат складывается из двух частей: во-первых, возмущение сносится потоком газа со скоростью \vec{v} ; во-вторых, распространяется относительно газа со скоростью звука a в некотором направлении \vec{n} .

Рассмотрим для простоты однородный плоско-параллельный поток газа, движущийся с постоянной скоростью \vec{v} . Пусть в некоторой (неподвижной в пространстве) точке O газ подвергается малому возмущению. Скорость $(\vec{v} + a\vec{n})$ распространения исходящего из точки O возмущения (относительно неподвижной системы координат) имеет различное значение в зависимости от направления единичного вектора \vec{n} . Все возможные ее значения мы получим, отложив из точки O вектор \vec{v} , а из его конца, как из центра, построим сферу радиуса a .

Векторы, проведенные из точки O в точки этой сферы, и определяют возможные величины и направления скорости распространения возмущения.

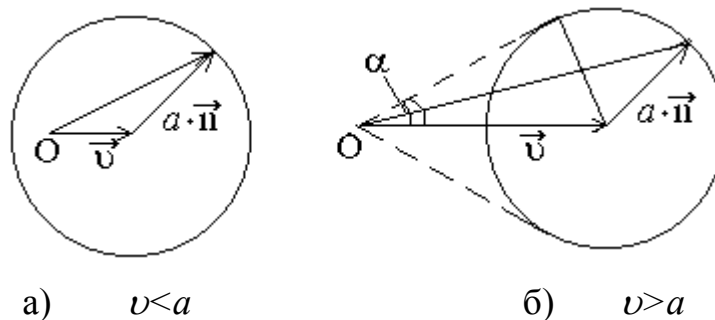


Рис. 12

Рассмотрим случай, когда $v < a$. Тогда векторы $\vec{v} + a\vec{n}$ могут иметь любое направление в пространстве (см. рис. 12а). Другими словами, в дозвуковом потоке возмущение, исходящее из некоторой точки, распространяется в конце концов по всему газу. Напротив, в сверхзвуковом потоке, когда $v > a$, направления векторов $\vec{v} + a\vec{n}$, как видно из рис. 12б, могут лежать только внутри конуса с вершиной в точке O , касающегося построенной из конца вектора \vec{v} (как из центра) сферы. Для угла раствора 2α этого конуса имеем (см. рис. 12б): $\sin\alpha = a/v$.

Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только вниз по течению внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение a/v . На всей области потока вне этого конуса возмущение в точке O не отразится вовсе.

Угол $\alpha = \arcsin(a/v)$ называется углом возмущений, а поверхность, ограничивающая область, куда достигает исходящее из данной точки возмущение, называется поверхностью возмущений или характеристической поверхностью.

В общем случае произвольного стационарного течения поверхность возмущений может и не быть конической во всем объеме потока. Однако, по-прежнему можно утверждать, что эта поверхность пересекает в каждой своей точке линию тока под углом, равным углу возмущений. Значение же угла возмущений меняется от точки к точке соответственно изменению скоростей v и a . Отметим, что при движении газа с большими скоростями скорость звука различна в разных местах, меняясь вместе с параметрами потока (давлением, плотностью и т.д.), функцией которых она является. Поэтому о скорости звука как функции координат точки говорят как о местной скорости звука.

Описанные свойства сверхзвукового течения придают ему характер, совершенно отличный от характера дозвукового движения. Если дозвуковой поток газа встречает на своем пути какое-либо препятствие, например, обтекает какое-либо тело, то наличие этого препятствия изменяет движение во всем пространстве как вверх, так и вниз по течению; влияние обтекаемого тела исчезает лишь асимптотически при удалении от тела. Сверхзвуковой же поток натекает на препятствие как бы слепо, неожиданно; влияние обтекаемого тела сказывается лишь на определенную область вниз по течению, а по всей остальной области пространства газ движется так, как если бы никакого тела вообще не было.

В случае плоского стационарного течения газа вместо характеристических поверхностей говорят о характеристических линиях или просто о ха-

рактических характеристиках в плоскости движения. Через всякую точку θ этой плоскости проходят две характеристики AA' и BB' (рис. 13), пересекающие проходящую через эту точку линию тока под углами, равными углу возмущения.

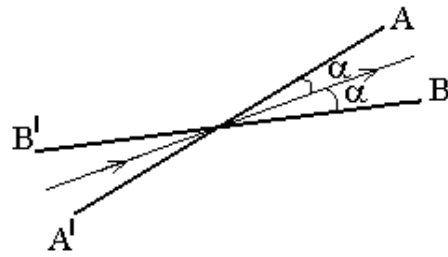


Рис. 13

2.2. Основное уравнение газовой динамики

Будем рассматривать плоское течение идеального сжимаемого газа как с дозвуковой, так и сверхзвуковой скоростями.

Рассматриваемая стационарная задача близка к теории обтекания крыла (где массовыми силами можно пренебречь). Запишем основные уравнения движения идеального газа:

$$1) \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Это проекции векторного уравнения движения на оси координат в случае отсутствия массовых сил для плоского стационарного течения.

2) Необходимо к уравнениям движения добавить уравнение неразрывности для плоского стационарного движения идеальной сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

3) Введем также уравнение энергии, нелинейное за счет левой части, и уравнение состояния, или вместо них можно записать уравнение процесса: $\rho = \rho(p)$ для баротропного равновесия газа.

Теперь плоская задача будет полностью сформулирована, если еще добавить:

4) условие отсутствия вихря $(rot \bar{v})_z=0$ или $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$;

5) условие набегающего потока на границе (интеграл Бернулли уравнения энергии) $\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{k-1}$.

Итак: система, включающая в себя: уравнения движения, уравнение неразрывности, уравнение процесса и дополнительно: условие отсутствия вихря и условие на границе – и есть система уравнений, необходимая для решения газодинамической задачи плоского безвихревого течения, которая действительна в случае тонких профилей.

Будем упрощать исходную систему дифференциальных уравнений.

При условии баротропного движения газа $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}$. Тогда первые два уравнения движения (уравнения Эйлера) принимают следующий вид:

$$\frac{\rho}{a^2} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\rho}{a^2} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Уравнение неразрывности после дифференцирования запишем в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

Если объединить уравнение неразрывности с уравнениями движения, подставив $\partial \rho / \partial x$ и $\partial \rho / \partial y$ из (2.1) и (2.2) в (2.3), то после преобразований получим следующее уравнение:

$$(a^2 - v_x^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + (a^2 - v_y^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (2.4)$$

Это основное уравнение газовой динамики, справедливое как для безвихревого, так и для вихревого движений. Отметим, что уравнение является типично нелинейным (даже при наличии ряда допущений).

В математическую модель входят также следующие уравнения:

а) условия отсутствия вихря

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0; \quad (2.5)$$

б) уравнение энергии

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{k-1}, \quad (2.6)$$

справедливое при безвихревом стационарном адиабатном течении идеального газа во всей области (плоскости) движения.

Итак, задачу плоской газовой динамики можно свести к нелинейному уравнению относительно всех входящих в него величин: v_x , v_y , a . Интегрирование основного уравнения газовой динамики при обычных условиях непроницаемости твердых стенок обтекаемых тел и заданных значениях скорости на бесконечности представляет значительные трудности, связанные с нелинейностью уравнения (2.4).

Рассмотрим простейший случай плоского обтекания тонких, слабо искривленных тел, расположенных в однородном газовом потоке под малым углом атаки. В этом случае возмущения, создаваемые телом в однородном потоке, будут малыми, и уравнение может быть подвергнуто линеаризации.

2.3. Линейные преобразования Прандтля для определения малых возмущений параметров газа

Для дальнейшего упрощения задачи используем прием линеаризации, который состоит в следующем. Выберем направление однородного потока совпадающим с направлением оси Ox и обозначим через v_∞ , p_∞ , ρ_∞ , a_∞ — скорость, давление, плотность, скорость распространения звука в однородном потоке. Возмущения, вносимые в этот поток тонким телом, обозначим через v' , p' , ρ' , a' , так что будем иметь:

$$v_x = v_\infty + v'_x; \quad v_y = v'_y; \quad p = p_\infty + p'; \quad \rho = \rho_\infty + \rho'; \quad a = a_\infty + a'.$$

Величины, отмеченные штрихом, являются малыми по сравнению с величинами без штрихов. Подчеркнем, что это допущение действительно лишь для обтекания тонкого профиля. Подставим эти соотношения в уравнение газовой динамики (2.4) и опустим такие произведения, как $v'_x \cdot v'_y$, $v'_x \cdot \frac{\partial v'_x}{\partial x}$ и так далее, положив их равными нулю как величины второго порядка малости. Тогда после преобразований получим:

$$(a^2 - v_x^2) \frac{\partial v'_x}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

или

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

Последнее выражение является линеаризованным уравнением газовой динамики.

Использование этого приема несколько ухудшает точность (по сравнению с численными методами решения), но задача решается намного проще и физичнее.

Если имеет место потенциальное (безвихревое) течение, то

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Это условие позволит ввести в рассмотрение потенциал скоростей $\varphi(x,y)$ и записать: $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Применим к $\varphi(x,y)$ этот же прием линеаризации: $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, где φ – потенциал скоростей возмущенного потока, φ_∞ – потенциал скоростей невозмущенного потока φ' – потенциал скоростей малых возмущений.

Тогда $v_x = \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial x}$; $v_y = \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial y} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$, но $\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial y} = 0$, так как рассматриваем тонкий профиль. Поскольку $v_x = v_\infty + v'_x$, а $v_y = v'_y$, то можно записать, что $v_\infty = \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x}$, $v'_x = \frac{\partial \varphi'}{\partial x}$, $v'_y = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$.

Тогда после интегрирования первого соотношения потенциал скоростей невозмущенного движения $\varphi_\infty = v_\infty x + const$, и тогда потенциал возмущенного движения $\varphi = \varphi_\infty + \varphi' = v_\infty x + \varphi' + const$.

Выражения $v'_x = \frac{\partial \varphi'}{\partial x}$; $v'_y = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$ внесем в (2.8) и получим линеаризованное уравнение для определения потенциала скоростей малых возмущений φ' :

а) для дозвуковых потоков сжимаемого газа

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0; \quad (2.9)$$

б) для сверхзвуковых потоков сжимаемого газа

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) – эллиптического, уравнение (2.10) – гиперболического типа.

Интересно отметить, что для несжимаемого газа $a = \infty$, $M = \frac{v}{a} = 0$, и вышеприведенные уравнения приобретают вид классического уравнения Лапласа. Таким образом, наличие числа Маха в уравнениях (2.9) и (2.10) свидетельствует о сжимаемости газа.

Полученные выше преобразования называются линейными преобразованиями Прандтля.

При рассмотрении дозвукового обтекания профиля, возмущения, вызываемые этим обтеканием, распространяются на всю область течения (уравнение эллиптического типа), так как они распространяются со звуковой скоростью. При сверхзвуковом обтекании профиля или для уравнений гиперболического типа, возмущения, вносимые телом в поток, распространяются только за телом по конусу возмущений (то есть только в следе за тонким профилем). Рассмотрение уравнений гиперболического типа приводит к интересному результату, а именно, наличию вектора аэродинамических сил, следовательно, несмотря на то, что рассматривается обтекание профиля идеальным газом без циркуляции, парадокс Даламбера теряет свой смысл.

Введем в рассмотрение функцию тока $\psi(x, y)$. Ее существование вытекает из уравнения неразрывности: $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0$, согласно которому

$$\text{можно положить } \rho v_x = \rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \rho v_y = -\rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Для проверки этой гипотезы подставим эти соотношения в предыдущее уравнение и получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \left(\rho_\infty \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \left(\rho_\infty \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right) = 0,$$

то есть уравнение удовлетворяется.

Таким образом, связь между потенциалом скоростей φ и функцией тока ψ возмущенного движения сжимаемого газа имеет вид:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где ρ_∞ – плотность невозмущенного однородного потока.

Если записать для функции тока возмущенного движения соотношение $\psi = \psi_\infty + \psi'$, то из условия существования функции тока:

$$\rho v_x = \rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \rho v_y = -\rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

с учетом линеаризации имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\rho_\infty + \rho')(v_\infty + v_x') &= \rho_\infty \left(\frac{\partial \psi_\infty}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right); \\ (\rho_\infty + \rho')v_y' &= -\rho_\infty \left(\frac{\partial \psi_\infty}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Перемножив почленно и убрав в левой части уравнений (2.11) члены второго порядка малости, получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho_\infty v_\infty + \rho' v_\infty + \rho_\infty v_x' &= \rho_\infty \frac{\partial \psi_\infty}{\partial y} + \rho_\infty \frac{\partial \psi'}{\partial y}; \\ \rho_\infty v_y' &= -\rho_\infty \frac{\partial \psi_\infty}{\partial x} - \rho_\infty \frac{\partial \psi'}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Здесь обычным шрифтом обозначены конечные величины, а выделенным шрифтом обозначены величины первого порядка малости. Тогда, сравнивая конечные величины, приходим к следующему дифференциальному уравнению: $\rho_\infty v_\infty = \rho_\infty \frac{\partial \psi_\infty}{\partial y}$, откуда $v_\infty = \frac{\partial \psi_\infty}{\partial y}$. Интегрируя, получаем:

$\psi = v_\infty y + const$, и тогда функция тока возмущенного движения:

$$\psi = \psi_\infty + \psi' = v_\infty y + \psi' + C.$$

При сравнении величин первого порядка малости уравнений (2.12) получаем следующую систему равенств:

$$\left. \begin{aligned} \rho' v_\infty + \rho_\infty v_x' &= \rho_\infty \frac{\partial \psi'}{\partial y}; \\ v_y' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Обратимся к интегралу Бернулли в виде: $\frac{v^2}{2} + P = \frac{v_\infty^2}{2}$;

$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{v_\infty^2}{2}$. Здесь $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v_x + v_x')^2 + v_y^2$. Для адиабатного те-

чения: $P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = -\frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{k-1} \right]$ и тогда с учетом линейариза-

ции можно записать: $\frac{(v_\infty + v_x')^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{k-1} - 1 \right] + \frac{v_y'^2}{2} = \frac{v_\infty^2}{2}$. Раскроем

скобки в левой части и отбросим малые второго порядка $-v_x'^2$ и $v_y'^2$. Кроме

того, учитывая, что, так как $\rho = \rho_\infty + \rho'$, то $\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{k-1} = \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_\infty} \right)^{k-1}$, и оконча-

тельно получаем

$$v_\infty v_x' + \frac{a_\infty^2}{k-1} \left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_\infty} \right)^{k-1} - 1 \right] = 0.$$

Здесь $\frac{kp_\infty}{\rho_\infty} = a_\infty^2$.

Так как при разложении в биномиальный ряд

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_\infty} \right)^{k-1} = 1 + (k-1) \frac{\rho'}{\rho_\infty} + \dots,$$

то последнее выражение будет иметь вид: $v_\infty v_x' + a_\infty^2 \frac{\rho'}{\rho_\infty} = 0$, откуда выра-

жение для малых возмущений плотности

$$\rho' = -\frac{\rho_\infty v_\infty v_x'}{a_\infty^2}. \quad (2.14)$$

С другой стороны: $p' = p - p_\infty = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_\infty (\rho - \rho_\infty) = a_\infty^2 \rho'$ (разложили в ряд

Тейлора и ограничились первым членом). Тогда, с учетом выражения (2.14) имеем для малых возмущений давления:

$$p' = -\rho_\infty v_\infty v_x'. \quad (2.15)$$

Если выражение (2.14) подставить в первое уравнение системы (2.13), то получим $-\frac{\rho_\infty v_\infty^2 v'_x}{a_\infty^2} + \rho_\infty v'_x = \rho_\infty \frac{\partial \psi'}{\partial y}$, или, разделив на ρ_∞ , имеем

$v'_x(1 - M_\infty^2) = \frac{\partial \psi'}{\partial y}$, где $\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} = M_\infty^2$. Тогда окончательное выражение для малых возмущений компоненты скорости

$$v'_x = \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y}. \quad (2.16)$$

Для вычисления компоненты скорости v'_y используем второе уравнение системы (2.13)

$$v'_y = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}. \quad (2.17)$$

Условие отсутствия вихря для плоского случая: $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ преобразу-

ется для возмущенного движения в уравнение $\frac{\partial v'_y}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial y} = 0$. Покажем это.

Для возмущенного движения были получены компоненты скорости $v_x = v_\infty + v'_x$; $v_y = v'_y$. Подставим эти выражения в условие отсутствия вихря

и получим: $\frac{\partial v'_y}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial y} - \frac{\partial v_\infty}{\partial y} = 0$, но $\frac{\partial v_\infty}{\partial y} = 0$, так как однородный поток

направлен вдоль оси OX и его изменения вдоль оси OY нет. Следовательно, условие отсутствия вихря для возмущенного движения: $\frac{\partial v'_y}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial y} = 0$.

Подставляя в него выражения для v'_x (2.16) и v'_y (2.17), приходим к следующим соотношениям:

а) при $M_\infty < 1$:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = 0; \quad (2.18)$$

б) при $M_\infty > 1$:

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = 0. \quad (2.19)$$

Следовательно, для определения функции тока малых возмущений ψ' имеем два линеаризованных соотношения (при $M_\infty < 1$ и $M_\infty > 1$). Аналогично для потенциала скоростей малых возмущений ϕ' имеем уравнения (2.9), (2.10). Связь между потенциалом скорости ϕ' и функцией тока малых возмущений ψ' имеет вид: $v'_x = \frac{\partial \phi'}{\partial x} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y}$; $v'_y = \frac{\partial \phi'}{\partial y} = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}$.

Итак, видим, что уравнения, определяющие возмущения, как для потенциала скоростей, так и для функции тока имеют одинаковые выражения. Следовательно, для решения задачи обтекания тонкого профиля сжимаемым газом достаточно рассмотреть проблему интегрирования уравнений либо для потенциала скоростей возмущений, либо для функции тока возмущений.

При дозвуковом обтекании тонкого профиля целесообразно рассмотреть задачу отыскания функции тока ψ , так как нулевая линия тока является при безотрывном обтекании – самым контуром профиля, то есть имеется готовое граничное условие равенства нулю функции тока на поверхности профиля.

Ограничим задачу для дозвукового обтекания тонкого профиля рассмотрением дифференциального уравнения для функции тока малых возмущений (2.18).

Для вычисления давления потока на поверхности тела найдем выражение для коэффициента давления C_p из соотношения:

$$p' = p - p_\infty = -\rho_\infty v_\infty v'_x .$$

Обе части этого уравнения разделим на $\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2$, тогда получим:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2} = -2 \frac{v'_x}{v_\infty} . \quad (2.20)$$

Существование коэффициента C_p свидетельствует о наличии вектора сил гидродинамических давлений жидкости на обтекаемое тело.

2.4. Дозвуковое обтекание тонкого профиля

В основу решения положим полученное уравнение для функции тока возмущений ψ' (2.18). Для решения задачи нужно добавить граничные условия. Запишем уравнение верхней дужки контура рассматриваемого профиля через $y = h_1(x)$. Уравнение нижней дужки контура запишем в виде

$y=h_2(x)$. Используем условие, что функция тока при обтекании равна $\psi=\psi_\infty+\psi'$. Это соотношение обладает следующим свойством: если рассматривать точки на самом контуре, то для них ψ есть нулевая функция тока, следовательно, на контуре $\psi=0$ и тогда на поверхности профиля: $\psi'=-\psi_\infty$. С другой стороны: $\psi_\infty=v_\infty y+C$. Тогда из этих двух соотношений следуют граничные условия:

- а) $\psi'=-v_\infty h_1(x)$ при $y=h_1(x)$ – для верхней дужки профиля;
- б) $\psi'=-v_\infty h_2(x)$ при $y=h_2(x)$ – для нижней дужки профиля.

Эти условия справедливы для $a \leq x \leq b$, где a – координата передней точки профиля A на оси OX , b – координата задней точки B на оси OX ;

в) граничное условие на бесконечности: $\psi' \rightarrow 0$, если $x, y \rightarrow \infty$, которое сводится к убыванию возмущений до нуля при удалении их от профиля (справедливо только для $M_\infty < 1$).

Если мы найдем для тонкого профиля значения tg углов между касательными к верхней и нижней дужкам и осью OX , то увидим, что для такого профиля эти величины будут малыми, следовательно, нашу задачу можно свести к обтеканию тонкого прямолинейного отрезка.

Тогда получим следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \psi' = -v_\infty h_1(x) \text{ при } y = +0; \\ \text{б) } \psi' = -v_\infty h_2(x) \text{ при } y = -0; \\ \text{в) } \psi' \rightarrow 0 \text{ при } x, y \rightarrow \infty. \end{array} \right\} a \leq x \leq b$$

Чтобы подчеркнуть, что разбирается задача об обтекании тонкого профиля сжимаемым потоком, запишем уравнение (2.18) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \psi'_{сж}}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi'_{сж}}{\partial y^2} = 0, \quad (2.21)$$

где $\omega^2 = 1 - M_\infty^2$. Тогда для этого уравнения граничные условия запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \psi'_{сж} = -v_\infty h_1(x) \text{ при } y = +0; \\ \text{б) } \psi'_{сж} = -v_\infty h_2(x) \text{ при } y = -0; \\ \text{в) } \psi'_{сж} \rightarrow 0 \text{ при } x, y \rightarrow \infty. \end{array} \right\} a \leq x \leq b \quad (2.22)$$

Перейдем к новым координатам ξ и η , введя аффинные преобразования (деформацию координат): $\xi=x$; $\eta = y\omega = y\sqrt{1-M_\infty^2}$. Тогда уравнение (2.21) и граничные условия (2.22) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi'_{сж}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi'_{сж}}{\partial \eta^2} = 0; \\ & а) \psi'_{сж} = -\nu_{\infty} h_1(\xi) \text{ при } \eta = +0; \\ & б) \psi'_{сж} = -\nu_{\infty} h_2(\xi) \text{ при } \eta = -0; \\ & в) \psi'_{сж} \rightarrow 0 \text{ при } \xi, \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Здесь $\frac{\partial \psi'}{\partial y} = \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \omega \frac{\partial \psi'}{\partial \eta}$; и с учетом правила Лейбница

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} \omega^2.$$

Рассмотрим теперь задачу обтекания тонкого профиля несжимаемым потоком, для которого $\omega=1$, так как для несжимаемой жидкости $a=\infty$ ($a^2 = \frac{dp}{d\rho}$, при $\rho=const \rightarrow d\rho=0 \rightarrow a=\infty$) и, следовательно, $M_{\infty}=0$. В этом случае исходное уравнение (2.21) и граничные условия (2.22) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi'_{несж}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'_{несж}}{\partial y^2} = 0; \\ & а) \psi'_{несж} = -\nu_{\infty} h_1(x) \text{ при } y = +0; \\ & б) \psi'_{несж} = -\nu_{\infty} h_2(x) \text{ при } y = -0; \\ & в) \psi'_{несж} \rightarrow 0 \text{ при } x, y \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Тогда, сопоставляя системы (2.23) и (2.24), приходим к очевидным соотношениям: $\psi'_{сж}(\xi, \eta) \equiv \psi'_{несж}(x, y)$; $\frac{\partial \psi'_{сж}}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial \psi'_{несж}}{\partial x}$; $\frac{\partial \psi'_{сж}}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial \psi'_{несж}}{\partial y}$.

Следовательно, с учетом (2.16) можем записать:

$$v'_{x\ сж} = \frac{1}{1-M_{\infty}^2} \frac{\partial \psi'_{сж}}{\partial y} = \frac{1}{1-M_{\infty}^2} \frac{\partial \psi'_{сж}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{1-M_{\infty}^2} \omega \frac{\partial \psi'_{сж}}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \frac{\partial \psi'_{несж}}{\partial y}.$$

Так как $v'_{x\ несж} = \frac{1}{1-M_{\infty}^2} \frac{\partial \psi'_{несж}}{\partial y} = \frac{\partial \psi'_{несж}}{\partial y}$ (поскольку $M_{\infty\ несж}=0$), то

$$v'_{x\ сж} = \frac{v'_{x\ несж}}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}}. \quad (2.25)$$

Если обратиться к уравнению (2.20), тогда получим: $C_{p\text{ сж}} = -2 \frac{v'_{x\text{ сж}}}{v_\infty}$.

Следовательно, коэффициент давления:

$$C_{p\text{ сж}} = -\frac{2}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v'_{x\text{ несж}}}{v_\infty} = \frac{C_{p\text{ несж}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}. \quad (2.26)$$

Это выражение называется уравнением Прандтля – Глауэрта.

Как видно из уравнения (2.26), сжимаемость среды увеличивает коэффициент давления для дозвуковых течений.

Эти уравнения были экспериментально проверены и установлено, что, если угол атаки не превышает 4° , то теория и опыт дают близкие результаты, и только в области трансзвуковых течений (близких к скорости звука) имеется расхождение результатов.

Следовательно, полученное решение дозвукового обтекания тонкого профиля при скоростях до $M_\infty=0.7 \div 0.8$ удовлетворительно совпадает с опытными данными.

Соотношение $C_{p\text{ сж}} = \frac{C_{p\text{ несж}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ выражает следующее правило Прандтля – Глауэрта:

ля – Глауэрта:

Распределение коэффициента давления в плоском безвихревом линеаризованном дозвуковом потоке сжимаемого газа при данном значении $M_\infty < 1$ может быть получено из соответствующего распределения в потоке несжимаемой жидкости, если все ординаты этого распределения увеличатся в $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$.

Вычислим коэффициент давления подъемной силы $C_{y\text{ сж}}$ при дозвуковом обтекании сжимаемым газом тонкого профиля по формуле:

$$C_{y\text{ сж}} = \frac{R_{y\text{ сж}}}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 b},$$

где b – хорда профиля, R_y – подъемная сила профиля, определяемая следующим образом: $\vec{R} = R_x - iR_y = -\oint p \bar{n} d\ell$, тогда $R_y = \oint p n_y d\ell$ [$p=p_\infty+p'$, но p_∞ (давление в однородном потоке) тяги не создает, поэтому остается p']. Тогда

$$R_{y\text{ сж}} = \oint p'_{\text{ сж}} n_y d\ell = \oint p'_{\text{ сж}} dx = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 \oint C_{p\text{ сж}} dx.$$

Это соотношение получается из формулы для $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2}$, откуда

$$p'_{сж} = p_{сж} - p_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 C_{p\ сж}.$$

$$\text{Тогда } C_{y\ сж} = \frac{R_{y\ сж}}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 b} = \oint C_{p\ сж} d\bar{x}, \text{ где } \bar{x} = \frac{x}{b}.$$

$$\text{Аналогично } C_{y\ несж} = \frac{R_{y\ несж}}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 b} = \oint C_{p\ несж} d\bar{x}.$$

Следовательно, для профиля с одним и тем же контуром (то есть, в частности, с одной и той же хордой b) коэффициент подъемной силы в потоке сжимаемого газа определяется через коэффициент подъемной силы в несжимаемой жидкости по формуле:

$$C_{у\ сж} = \frac{C_{у\ несж}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad (2.27)$$

так как $\frac{C_{у\ сж}}{C_{у\ несж}} = \frac{C_{p\ сж}}{C_{p\ несж}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ (по правилу Прандтля – Глауэрта).

2.5. Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля

В отличие от дозвукового течения, описываемого уравнением эллиптического типа, при сверхзвуковом течении газа ($M_\infty > 1$) основным уравнением является уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = 0, \quad (2.28)$$

где $\omega^2 = M_\infty^2 - 1$.

Решение гиперболического уравнения является частным случаем решения уравнений математической физики (отметим, что при $M > 5$ решение гиперболического уравнения дает большую ошибку). Гиперболическое уравнение было получено Даламбером при рассмотрении бегущей волны в струне – так называемое уравнение бегущей волны. Даламбер решал это уравнение введением новых переменных:

$$\xi = x - \omega y, \quad \eta = x + \omega y.$$

Если применить этот прием для гиперболического уравнения (2.28), то оно примет более простой вид. Найдем все производные, входящие в это уравнение: $\frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$; $\frac{\partial \psi'}{\partial y} = \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$.

Для вычисления вторых производных используем знаменитое правило Лейбница в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2.$$

Если сделать подстановку всех производных в исходное гиперболическое уравнение с учетом того, что $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\omega$; $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \omega$, после преобразований получим:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi \partial \eta} (-\omega^2) + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} \omega^2.$$

Поставим эти выражения в исходное гиперболическое уравнение (2.28) и приведем подобные члены

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi^2} \right) + 4 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi \partial \eta} \equiv 0. \quad (2.29)$$

Поскольку ξ и η являются независимыми переменными, от интеграл от этого выражения равен:

$$\psi'(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции своих аргументов.

Другими словами, общее решение этого волнового уравнения может быть выражено формулой:

$$\psi'(x,y) = f_1(x-\omega y) + f_2(x + \omega y). \quad (2.30)$$

Рассмотрим частное решение $\psi'(x,y) = f_1(x-\omega y)$. Оно имеет следующий смысл: в плоскости течения (x,y) существует семейство прямых линий $x-\omega y = const$, вдоль которых функция тока возмущений, а следовательно, и вообще возмущения параметров движения и состояния газа будут сохранять постоянные значения. Эти прямые представляют собой первое семейство (C_1) характеристик волнового уравнения (характеристики I рода) и играют роль линий возмущения в рассматриваемом сверхзвуковом потоке. Их называют линиями или волнами Маха.

Точно так же частному решению $\psi'(x,y) = f_2(x + \omega y)$ соответствует второе семейство (C_2) характеристик или линий возмущения $x + \omega y = const$, вдоль которых возмущения параметров движения и состояния газа тоже сохраняют постоянные значения.

Рассмотрим угловые коэффициенты этих семейств кривых. В общем случае $y=kx$, где k – угловой коэффициент: $k = tg\alpha$. Для нашей задачи $y = \pm \frac{1}{\omega}x$, то есть $k = \pm \frac{1}{\omega}$; $tg\alpha = \pm \frac{1}{\omega} = \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$.

Воспользуемся формулой для $\sin\alpha$ через $tg\alpha$: $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$. Пусть

$$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}},$$

тогда

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{M_\infty^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{M_\infty \sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{1}{M_\infty}.$$

Аналогично, если $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$, то $\sin\alpha = -\frac{1}{M_\infty}$.

Очевидно, что углы α , образованные линиями возмущения с направлением невозмущенного движения (осью OX) равны:

$$\alpha = \pm \arcsin \frac{1}{M_\infty}, \text{ т.к. } \sin\alpha = \pm \frac{1}{M_\infty}$$

На рис. 14 показаны две линии возмущений от точечного источника возмущений S , находящегося на оси OX на расстоянии ℓ от начала координат.

нат. От точечного источника в пространстве линии возмущения располагаются на конической поверхности с вершиной в точке S и углом полураствора α . Этот конус называют конусом возмущений или конусом Маха, угол α – углом Маха. По наклону линий возмущения можно судить о величине числа Маха однородного потока (чем больше M_∞ , тем меньше угол α). Введение характеристик I и II рода используется для графического построения линий тока при безотрывном обтекании тонкого профиля сверхзвуковым потоком.

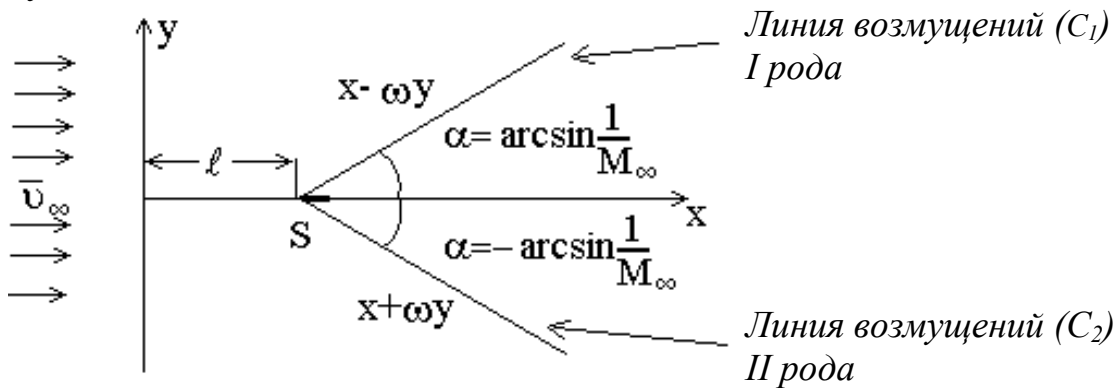


Рис. 14

Построим обтекание тонкого профиля сверхзвуковым потоком. Обобщенное решение волнового уравнения гиперболического типа имеет вид $\psi'(x,y) = f(x \pm \omega y)$, где характеристики $x - \omega y = C_1$ и $x + \omega y = C_2$, называемые волнами Маха, являются волнами небольшой интенсивности. Контур тонкого профиля, как и для дозвукового потока, будем задавать ординатами верхней $h_1(x)$ и нижней $h_2(x)$ поверхностей, т.е. $y = h_{1,2}(x)$.

Заполним область течения сверху и снизу от контура профиля (см. рис. 15) соответственно характеристиками первого (C_1) и второго (C_2) семейств. Граничное условие представим, как и прежде, в форме

$$\psi' = -v_\infty h_{1,2}(x) \text{ при } a \leq x \leq b.$$

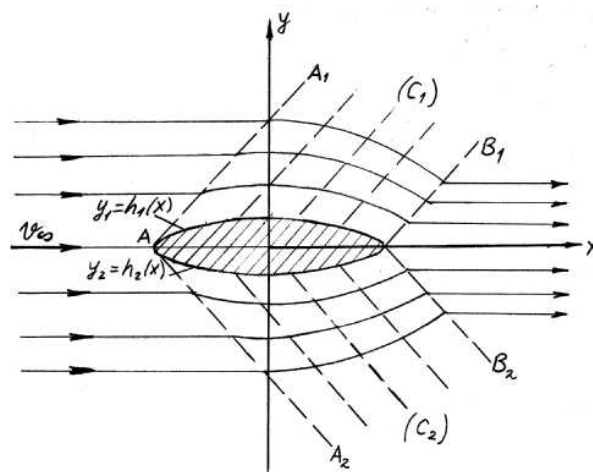


Рис. 15

Свойства характеристик для первого семейства (частное решение волнового уравнения $\psi'(x,y) = f_1(x-\omega y)$) и для второго семейства (частное решение волнового уравнения $\psi'(x,y) = f_2(x + \omega y)$) позволяют заключить, что общее решение волнового уравнения при вышеуказанном граничном условии может быть представлено в форме:

$$\psi' = -v_\infty h_{1,2}(x \mp \omega y). \quad (2.31)$$

Здесь индексу «1» при h соответствует верхний знак в круглой скобке, индексу «2» – нижний.

В отличие от дозвукового обтекания функция тока возмущений $\psi'(x,y)$ при удалении на сколь угодно большое расстояние от контура профиля не обращается в нуль, а сохраняет внутри верхней и нижней полос, ограниченных крайними характеристиками AA_1 , BB_1 и AA_2 , BB_2 при $y \rightarrow \pm\infty$ такое же распределение по x , как и на верхней и нижней поверхностях профиля. Вне указанных полос поток остается невозмущенным. Как видно из общего решения волнового уравнения и из рис. 14 линии тока возмущенного движения ($\psi = v_\infty y + \psi' = \text{const}$) представляют собой кривые, которые могут быть получены параллельным переносом верхнего и нижнего контуров профиля соответственно вдоль характеристик первого и второго рода. Здесь необходимо отметить, что асимптотические методы теории малых возмущений показывают, что на больших расстояниях от профиля влияние малых второго порядка становится существенным уже в первом приближении и искажает картину течения, изображенную на рис. 14. Характеристики искривляются и перестают быть параллельными между собой.

С учетом уравнений (2.16) и (2.17) для нашего случая имеем

$$v'_x = -\frac{1}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial \psi'}{\partial y}; \quad v'_y = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}.$$

Из общего решения волнового уравнения гиперболического типа (2.31) найдем частные производные:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = \pm \omega v_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi'}{\partial x} = -v_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y),$$

где штрих над h означает производную по всему аргументу, стоящему в круглой скобке.

Тогда получим следующее распределение возмущений составляющих скорости:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \mp \frac{\omega v_\infty}{M_\infty^2 - 1} h'_{1,2}(x \mp \omega y); \\ v'_y &= v_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y), \end{aligned} \right\}$$

или, поскольку $\omega = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ для сверхзвукового потока, то:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \mp \frac{v_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h'_{1,2}(x \mp \omega y); \\ v'_y &= v_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y). \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Это распределение справедливо во всей области возмущенного движения. Из второго соотношения (2.32) можно найти угол отклонения $\theta_{1,2}$ касательной к линии тока в возмущенной области от линии тока невозмущенного потока. По определению линии тока и в силу малости угла θ

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} \approx \theta_{1,2} = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v'_y}{v_\infty + v'_x} \approx \frac{v'_y}{v_\infty} = h'_{1,2}(x \mp \omega y).$$

Учитывая это равенство, можно записать предыдущие соотношения в виде:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \mp \frac{v_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \theta_{1,2}; \\ v'_y &= v_\infty \theta_{1,2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Эти равенства выражают основное свойство линеаризованного сверхзвукового потока: продольная и поперечная составляющие скорости возмущения пропорциональны местному углу наклона линии тока возмущенного движения по отношению к направлению невозмущенного потока и имеют местный (локальный) характер.

Тем же свойством обладает давление, плотность и другие характерные для потока величины, что принципиально отличает сверхзвуковой поток от дозвукового, в котором значения параметров в данной точке зависят от распределения этих параметров во всем потоке в целом.

Используя одинаковую как для дозвукового, так и для сверхзвукового линеаризованных потоков форму коэффициента давления $C_p = -\frac{2v'_x}{v_\infty}$, найдем с учетом последних соотношений выражение для коэффициента давления в любой точке возмущенного сверхзвукового потока:

$$C_p = \pm \frac{2h'_{1,2}(x \mp \omega y)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \pm \frac{2\theta_{1,2}(x \mp \omega y)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}.$$

Поскольку нас интересует C_p на поверхности (контура) профиля, где приближенно можно положить $y = \pm 0$, то :

$$C_p(x) = \pm \frac{2h'_{1,2}(x)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \pm \frac{2\theta_{1,2}(x)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (2.34)$$

Имея коэффициент давления, можно найти коэффициент подъемной силы C_y . Для сверхзвукового обтекания тонкого профиля формула Жуковского неприменима; C_y в этом случае находится как интеграл по контуру профиля разности коэффициентов давлений верхней и нижней кромок:

$$C_y = \oint C_p d\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{b} \int_{x_A}^{x_B} (C_{p2} - C_{p1}) dx.$$

(Здесь $b=AB$ – хорда профиля, приближенно равная разности $x_B - x_A$ абсцисс точек B и A).

Подставляя сюда значения C_{p1} и C_{p2} , получим:

$$C_y = -\frac{2}{b\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{x_A}^{x_B} (h'_2(x) + h'_1(x)) dx = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{2(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}.$$

Здесь учтено, что $h'_{1,2}(x) = \frac{dy_{1,2}}{dx}$, индексы $1,2$ соответствуют верхней

(1) и нижней (2) поверхностям контура; $b = x_A - x_B$; $dy_1 = dy_2 = y_B - y_A$

Введем угол атаки профиля ε как острый угол между направлением хорды AB и общим потоком: для малых углов атаки $tg\varepsilon \approx \varepsilon = \frac{(y_A - y_B)}{(x_A - x_B)}$, то-

гда $\frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = -\varepsilon$ и формула для коэффициента подъемной силы примет

окончательный вид:

$$C_y = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (2.35)$$

Этот результат впервые был получен Аккеретом и получил название формулы Аккерета. Для таких профилей угол атаки $\varepsilon \approx \alpha$ – углу Маха. Как видно из этой формулы, в линеаризованной теории сверхзвукового обтека-

ния тонкого профиля – коэффициент подъемной силы не зависит от формы профиля, а только от угла атаки и числа Маха набегающего потока.

2.6. Уравнение газовой динамики в плоскости годографа скорости

С.А. Чаплыгин в 1904 году открыл замечательное свойство, а именно, нелинейные уравнения газовой динамики переходят в линейные уравнения с переменными коэффициентами в новой области течения, образованной годографом (вектором) скорости и полярным углом между вектором скорости и осью OX . Он применим как для до-, так и сверхзвукового обтекания.

Этот метод Чаплыгина представляет собой переход из физической плоскости в плоскость годографа скорости и имеет некоторые особенности. Рассмотрим область между вектором скорости \vec{v} и осью OX (рис.16).

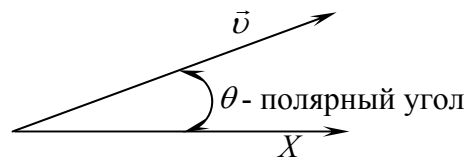


Рис.16

Берутся потенциальные течения, для которых:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\rho}{\rho_0} v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.37)$$

индекс ρ – относится к неподвижному потоку.

Как потенциал скорости φ , так и функция тока ψ являются полными дифференциалами. Тогда уравнение (2.36) можно записать в виде:

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy, \text{ а уравнение (2.37): } \frac{\rho_0}{\rho} d\psi = -v_y dx + v_x dy.$$

Умножим второе из этих уравнений на $i = \sqrt{-1}$ и сложим с первым:

$$d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi = (v_x - i v_y) d(x + iy).$$

Поскольку $v e^{-i\theta} = v_x - i v_y$ (сопряженная скорость), а $z = x + iy$, то приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{v} \left(d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi \right). \quad (2.38)$$

У Чаплыгина возникла идея, реализация которой привела к следующему результату: если рассмотреть течение не в физической плоскости (X, Y) , а в плоскости годографа скорости (ν, θ) , то нелинейное уравнение газовой динамики

$$(a^2 - \nu_x^2) \frac{\partial \nu_x}{\partial x} - \nu_x \nu_y \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_y}{\partial x} \right) + (a^2 - \nu_y^2) \frac{\partial \nu_y}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

переходит в линейное, но с переменными коэффициентами.

Совершим переход в плоскость годографа скорости (ν, θ) . С этой целью примем переменные x, y, z , а также φ и ψ за функции новых переменных ν и θ , тогда равенство (2.38) примет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = \frac{e^{i\theta}}{\nu} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + i \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \right) \right]. \quad (2.40)$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при дифференциальных независимых переменных, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \nu} &= \frac{e^{i\theta}}{\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right); \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{e^{i\theta}}{\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Исключим из этой системы уравнений независимую переменную z . Для этого продифференцируем первое уравнение системы (2.41) по θ , а второе по ν :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \nu \partial \theta} &= \frac{e^{i\theta}}{\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu \partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \nu \partial \theta} \right) + \frac{ie^{i\theta}}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\rho_0 e^{i\theta}}{\rho \nu} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \nu} &= \frac{e^{i\theta}}{\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \nu} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \nu} \right) - \frac{e^{i\theta}}{\nu^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + ie^{i\theta} \frac{d}{d\nu} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \right. \quad (2.42)$$

Последний член во втором уравнении системы (2.42) записан с учетом того, что член ρ_0/ρ есть функция скорости. Приравняем правые части

обоих равенств в силу очевидного соотношения: $\frac{\partial^2 z}{\partial \nu \partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \nu}$.

После сокращения и сравнения действительных и мнимых частей придем к новой системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ \frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Перейдем от величины ν к скоростному коэффициенту λ

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Из известной изэнтропической формулы $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$ имеем следующее выражение для правой части первого уравнения системы (2.44):

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda} \right].$$

Вычислив эту производную и подставив выражение для $\frac{\rho_0}{\rho}$ через λ в уравнения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \text{ т.к. } \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \lambda \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = - \frac{1 - \lambda^2}{\lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \text{ т.к. } \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Если продифференцировать первое уравнение системы (2.45) по λ , а второе по θ , и учитывая, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \lambda} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \theta}$ (тождественно равно), можно получить одно дифференциальное уравнение относительно ψ :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1 - \lambda^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} = 0. \quad (2.46)$$

Видим, что нелинейное уравнение газовой динамики перешло в линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных.

Если расписать последнюю систему дифференциальных уравнений относительно $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, продифференцировать их по θ и λ соответ-

ственно и приравнять правые части этих уравнений, т.к. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \theta} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \lambda}$, то можно получить линейное уравнение второго порядка в частных производных для параметра φ .

Этот результат, полученный Чаплыгиным, до сих пор не превзойден в современной науке. Никаких видоизменений физических законов не было сделано, т.е. физика явления не была тронута, никаких допущений не было введено, а получен удивительный результат.

Однако использование в практике линейных дифференциальных уравнений Чаплыгина является сложной задачей, т.к. эти уравнения с переменными коэффициентами. Выведенные С.А. Чаплыгиным уравнения были приведены к различным, так называемым каноническим формам Л.С. Лейбензоном (в 1935 г.) и С.А. Христиановичем (в 1940 г.). Работа молодого академика Христиановича, появившаяся перед войной (ему тогда не было и 40 лет), обратила на себя внимание своей глубиной.

Приближенная линеаризованная теория дозвукового обтекания профиля имеет приемлемые результаты только для тонкого профиля и малых углов атаки. При обтекании профилей сравнительно большой толщины и вогнутости следует пользоваться методом академика Христиановича. Он рассмотрел циркуляционное обтекание крылового профиля и предложил метод последовательных приближений при решении исходной нелинейной системы уравнений газовой динамики. Эту систему на основании преобразований Христиановича можно получить из уравнений Чаплыгина следующим образом.

Остановимся на случае дозвукового течения $\lambda < 1$. Заменяя λ на новую переменную s , связанную с λ дифференциальным соотношением:

$$ds = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (2.47)$$

систему уравнений Чаплыгина (2.45) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \sqrt{k} \frac{\partial \varphi}{\partial s}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\sqrt{k} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Здесь величина k связана с λ следующим соотношением:

$$k = \frac{1-\lambda^2}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}, \quad (2.49)$$

или с M :

$$\sqrt{k} = (1-M^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.50)$$

Христианович показал, что интегрирование нелинейных уравнений газовой динамики при обтекании профиля сжимаемым потоком можно свести к решению задачи обтекания деформированного профиля, близкого к заданному, в несжимаемой жидкости.

Правило Прандтля-Глауэра пригодно лишь в случае тонких, слабо изогнутых профилей, расположенных под малым углом атаки в потоке со сравнительно малыми значениями числа M_∞ . Метод Христиановича позволяет вводить поправку на сжимаемость для более толстых и изогнутых профилей при больших углах атаки и диапазонах чисел M_∞ .

Христианович показал, что если λ изменяется в пределах $0 \leq \lambda \leq 0,7$ (или $0 \leq M \leq 0,67$), то величина k отличается от единицы всего лишь на 8%. Следовательно, $\sqrt{k} \approx 1$ для указанных диапазонов λ и M , и тогда приведенная выше система уравнений запишется так:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial s}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (2.51)$$

что аналогично точным условиям Коши-Римана для потока несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \varphi_{\text{несж.}}}{\partial \theta_{\text{несж.}}} = \frac{\partial \psi_{\text{несж.}}}{\partial s_{\text{несж.}}}, \quad \frac{\partial \varphi_{\text{несж.}}}{\partial s_{\text{несж.}}} = -\frac{\partial \psi_{\text{несж.}}}{\partial \theta_{\text{несж.}}}. \quad (2.52)$$

Величину $ds_{\text{несж.}}$ можно получить из выражения (2.47) для несжимаемой жидкости:

$$ds_{\text{несж.}} = \sqrt{\frac{1 - \lambda_{\text{несж.}}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{несж.}}^2}} \frac{d\lambda_{\text{несж.}}}{\lambda_{\text{несж.}}}.$$

Если положить $\lambda_{\text{несж.}} \rightarrow 0$, тогда $ds_{\text{несж.}} = \frac{d\lambda_{\text{несж.}}}{\lambda_{\text{несж.}}}$. Приравняем

$ds = ds_{\text{несж.}}$, тогда

$$ds = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} = ds_{\text{несж.}} = \frac{d\lambda_{\text{несж.}}}{\lambda_{\text{несж.}}}. \quad (2.53)$$

Проинтегрируем это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее λ и $\lambda_{\text{несж.}}$, а постоянную интегрирования найдем из условия совпадения скоростных полей при предельном переходе к несжимаемой жидкости:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda_{\text{несж.}}} = 1. \quad (2.54)$$

Интегрирование соотношения (2.53) приводит к приближенной связи между λ и $\lambda_{\text{несж.}}$, не зависящей от формы профиля и характера обтекания. Ввиду громоздкости аналитического выражения были проведены расчеты при изменении λ от нуля до 1 и сведены в таблицу, приводимую во всех курсах по аэромеханике: $M = M(\lambda)$ и $\lambda_{\text{несж.}} = f(\lambda)$. Имея связь между λ и $\lambda_{\text{несж.}}$ можно получить связь коэффициента давления $C_{p_{\text{сж.}}}$ в газе от соответствующего коэффициента $C_{p_{\text{несж.}}}$ в несжимаемой жидкости.

Используя известные изоэнтропические соотношения

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{a_{\infty}^2}{a^{*2}} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot 1} = \frac{k+1}{2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2 \right), \quad (2.55)$$

найдем коэффициент давления при наличии сжимаемости:

$$\begin{aligned}
 C_{P_{сж.}} &= \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2} = \frac{2p_{\infty}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2} \left[\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right] = \frac{2 a_{\infty}^2 a^{*2}}{k v_{\infty}^2 a^{*2}} \left[\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right] = \\
 &= \frac{2 a_{\infty}^2}{k a^{*2}} \cdot \frac{1}{\lambda_{\infty}^2} \left[\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right]. \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

И окончательно:

$$C_{P_{сж.}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2}{\lambda_{\infty}^2} \left[\left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\infty}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right]. \tag{2.57}$$

Для несжимаемой жидкости можно записать следующее выражение:

$$C_{P_{несж.}} = 1 - \left(\frac{\lambda_{несж.}}{\lambda_{несж.\infty}} \right)^2. \tag{2.58}$$

Тогда, учитывая соотношение между λ и $\lambda_{несж.}$, представленное таблицей (как указывалось выше) или в виде графика (см. рис. 17), можно рассматривать совокупность формул для $C_{P_{сж.}}$ и $C_{P_{несж.}}$ как параметрическую связь между коэффициентами давления $C_{P_{сж.}}$, $C_{P_{несж.}}$ через параметр λ . В этом и заключается метод Христиановича, позволяющий приближенно учитывать сжимаемость и находить $C_{P_{сж.}}$ для сжимаемого газа. Для этого при выбранном M_{∞} находим λ_{∞} , а следовательно, и $\lambda_{несж.\infty}$ (см. таблицу или график на рис. 17), после чего, задаваясь различными значениями $\lambda_{несж.}$ и определяя соответствующие λ , получим по формулам для $C_{P_{сж.}}$ и $C_{P_{несж.}}$ искомую связь между этими коэффициентами давления. Для примера на графике (рис. 18) нанесены две кривые для разных M_{∞} .

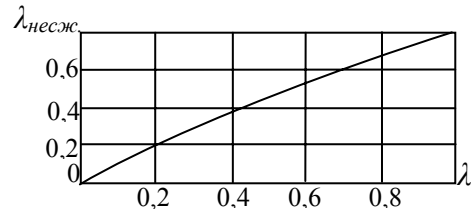


Рис.17

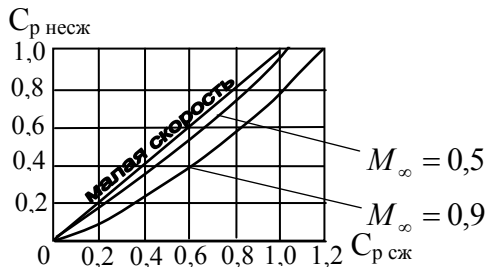


Рис. 18

Рассмотренный метод расчета $C_{p,сж}$ пригоден лишь тогда, когда числа M_∞ не слишком близки к единице.

Обтекание профиля при M_∞ , близких к 1, может привести к тому, что на верхней поверхности профиля могут появиться местные значения чисел Маха,

достигающие критических, при которых появляется скачок уплотнения. Критическим числом $M_{кр.}$ называют такое значение числа M_∞ набегающего на крыло потока, при котором на поверхности профиля крыла местное число M становится равным 1, т.е. местная скорость потока оказывается равной местной скорости звука (см. рис. 19).

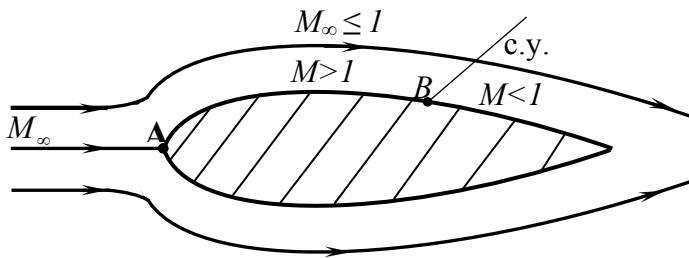


Рис. 19

Христианович оговаривал применимость своего метода числом $\lambda \leq 0,7$ (или $M \leq 0,67$), так как при приближении числа M к 0,67 на верхней кромке профиля возникает скачок уплотнения (он появляется не в т. А, а в т. В).

Скачки уплотнения отрицательно сказываются на величине коэффициента подъемной силы

и отрицательно сказываются на величине коэффициента подъемной силы

$$C_y = C_{p_{2,сж.}} - C_{p_{1,сж.}} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2}, \text{ где}$$

$$C_{p_{сж.}} = \frac{2}{kM_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right] = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2}. \quad (2.59)$$

(индексы 1, 2 – относятся соответственно к верхней и нижней поверхностям). Наличие скачков уплотнения приводит к возникновению потерь механической энергии и отрицательно сказывается на аэродинамических характеристиках крылового профиля. Для предотвращения этого вредного влияния крыловой профиль стремится выполнять так, чтобы достижение критической скорости на поверхности крыла происходило бы как можно позднее.

Установим связь между величиной $M_{кр.}$ и минимальным значением коэффициента давления $(C_{p_{сж.}})_{\min}$. Для этого воспользуемся приведенным

выше выражением для $C_{P_{сж.}}$, в которой положим $M_\infty = M_{кр.}$, $M = 1$, тогда $C_{P_{сж.}} = (C_{P_{сж.}})_{\min}$. Физически это означает, что если где-нибудь на профиле скорость потока достигла местной скорости звука и местное число M стало равным единице, то $C_{P_{сж.}}$ будет иметь минимальное значение по сравнению с другими точками потока, а число M_∞ становится равным $M_{кр.}$. При выполнении этих условий

$$(C_{P_{сж.}})_{\min} = \frac{2}{kM_{кр.}^2} \left[\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{кр.}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right]. \quad (2.60)$$

В практических расчетах целесообразнее иметь непосредственную связь между $M_{кр.}$ и коэффициентом давления $(C_{P_{несж.}})_{\min}$ при обтекании того же профиля несжимаемым газом, так как последняя величина легко рассчитывается приведенными ранее методами или определяется экспериментально продувками в трубах малых скоростей.

Из определения понятия критического числа $M_{кр.}$ можно заключить, что в дозвуковых потоках следует отдать предпочтение таким профилям, которые при одном и том же значении потребной величины подъемной силы (коэффициента C_y) имеют по возможности большее значение $M_{кр.}$. Иными словами, надо стремиться к тому, чтобы одна и та же площадь, заключенная между кривыми распределения давления по верхней и нижней плоскостям крыла, достигалась при пологих кривых распределений давления, а не за счет резких пиков разрежения.

2.7. Графо-аналитический метод расчета сверхзвуковых потоков

Рассмотрим плоское сверхзвуковое течение идеального газа. Имеется нелинейная система дифференциальных уравнений, состоящая из:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) уравнения газовой динамики:} \\ (a^2 - v_x^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + (a^2 - v_y^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \\ \text{б) условия отсутствия вихрей} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Первое уравнение явно нелинейное в силу квадратов скоростей, произведения скоростей и т.д. При переходе в плоскость годографа эта система

уравнений может быть аналитически проинтегрирована. Но это сложно, поэтому при решении нелинейной системы дифференциальных уравнений часто используют на практике графо-аналитический прием интегрирования при помощи метода характеристик.

Применим метод неопределенных коэффициентов Лагранжа. Умножим первое уравнение системы (2.61) на λ_2 , второе – на λ_1 , где λ_1, λ_2 – суть неопределенные множители, и сложим оба уравнения:

$$\lambda_2(a^2 - v_x^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda_1 - \lambda_2 v_x v_y) \frac{\partial v_x}{\partial y} - (\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_2(a^2 - v_y^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Сделаем следующее преобразование, собирая отдельно члены с производными от v_x и v_y :

$$\lambda_2(a^2 - v_x^2) \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2 v_x v_y}{\lambda_2(a^2 - v_x^2)} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] - (\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y) \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\lambda_2(a^2 - v_y^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = 0. \quad (2.62)$$

Используем метод характеристик. Для этой цели введем угловой коэффициент $m = \frac{dy}{dx}$ и попытаемся, распоряжаясь неопределенными величинами λ_1 и λ_2 , определить в каждой точке плоскости (X, Y) такое направление с угловым коэффициентом $m = \frac{dy}{dx}$, чтобы выражения в квадратных скобках уравнения (2.62) представили соответствующие этому направлению производные по x от v_x и v_y :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2 v_x v_y}{\lambda_2(a^2 - v_x^2)} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + m \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{dv_x}{dx}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\lambda_2(a^2 - v_y^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + m \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{dv_y}{dx}. \end{cases}$$

где

$$m = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 v_x v_y}{\lambda_2(a^2 - v_x^2)} = - \frac{\lambda_2(a^2 - v_y^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y}.$$

С учетом полученных соотношений для $\frac{dv_x}{dx}$ и $\frac{dv_y}{dx}$ уравнение (2.62) приобретает вид: $\lambda_2(a^2 - v_x^2) \frac{dv_x}{dx} = (\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y) \frac{dv_y}{dx}$ или

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{\lambda_2(a^2 - v_x^2)}{(\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y)}. \quad (2.63)$$

Это уравнение позволяет использовать метод характеристик. Из соотношений для m можно найти неопределенные коэффициенты λ_1 и λ_2 , что приводит к следующей системе однородных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 [m(a^2 - v_x^2) + v_x v_y] = 0; \\ m\lambda_1 + \lambda_2 [(a^2 - v_y^2) + m v_x v_y] = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Чтобы эта система имела решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы

определитель этой системы был равен нулю:
$$\begin{vmatrix} 1 & -[m(a^2 - v_x^2) + v_x v_y] \\ m & (a^2 - v_y^2) + m v_x v_y \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда приведенная система алгебраических однородных уравнений имеет следующий вид квадратного уравнения при равенстве нулю определителя системы:

$$(v_x^2 - a^2)m^2 - 2m v_x v_y + (v_y^2 - a^2) = 0. \quad (2.65)$$

Решая его, получим следующие корни квадратного уравнения:

$$m_{1,2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}, \quad (2.66)$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Итак, в каждой точке сверхзвукового потока можно определить два характеристических направления с угловыми коэффициентами m_1, m_2 так, чтобы дифференциалам dx и dy , соответствующим этим направлениям в физической плоскости течения, сопоставлялись дифференциалы dv_x и dv_y в плоскости годографа, связанные уравнением:

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{\lambda_2(a^2 - v_x^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y}.$$

Если теперь для плоскости годографа скорости возьмем это выражение и обозначим его как угловой коэффициент:

$$n_{1,2} = \left(\frac{dv_y}{dv_x} \right)_{1,2} = \frac{\lambda_2(a^2 - v_x^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y}, \quad (2.67)$$

то, умножив числитель и знаменатель на $(a^2 - v_y^2)$ и учтя уравнение для m ,

будем иметь: $n_{1,2} = \frac{\lambda_2(a^2 - v_x^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 v_x v_y} \cdot \frac{a^2 - v_y^2}{a^2 - v_y^2} = -m_{1,2} \frac{a^2 - v_x^2}{a^2 - v_y^2} = m_{1,2} \frac{v_x^2 - a^2}{a^2 - v_y^2}$. С уче-

том выражения (2.66) получим:

$$n_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{a^2 - v_y^2}. \quad (2.68)$$

Семейство интегральных кривых уравнения $m_{1,2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}$ (соответствующие наличию различных знаков перед радикалом) образуют характеристики в физической плоскости (X, Y) , а величины m_1 и m_2 представляют собой угловые коэффициенты касательных к характеристикам или характеристические направления в физической плоскости.

Назовем интегральные кривые, соответствующие знаку (+) перед радикалом – характеристиками первого семейства, а кривые со знаком (-) – характеристиками второго семейства.

Точно так же дифференциальные уравнения

$$n_{1,2} = \left(\frac{dv_y}{dv_x} \right)_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{a^2 - v_y^2}$$

или их интегралы определяют в каждой точке плоскости годографа скоростей два семейства кривых – характеристик в плоскости годографа. Пусть знаку (+) соответствуют характеристики первого семейства, а знаку (-) – второго семейства. Величины n_2 и n_1 представляют собой характеристические направления в плоскости годографа скоростей.

Таким образом, получены два интересных соотношения, позволяющие решить задачу графо-аналитического интегрирования до конца. Из выражений (2.66) и (2.68) видно, что характеристические направления в физической плоскости и плоскости годографа связаны следующими равенствами:

$$\begin{cases} n_1 m_2 + 1 = 0; \\ n_2 m_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Из аналитической геометрии известно, что две прямые $y_1 = a_1 x + b_1$ и $y_2 = a_2 x + b_2$ перпендикулярны, если произведение их угловых коэффици-

ентов $a_1 a_2 = -1$. Для нашего случая это означает, что при выборе осей OX и OY , параллельных осям ov_x и ov_y , характеристики I и II рода взаимно перпендикулярны, причем характеристики I рода в физической плоскости являются ортогональными характеристиками II рода в плоскости годографа и наоборот, характеристики I рода в плоскости годографа скоростей ортогональны характеристикам II рода физического течения в координатах XOY .

Нанесем на основную плоскость течения XOY (рис. 19) оба семейства характеристик I рода (C_1) и II рода (C_2). Обозначим через α – угол между вектором скорости \vec{v} и касательным к характеристикам C_1 и C_2 , а через θ – угол между \vec{v} и осью OX .

Рассмотрим некоторые общие свойства характеристик в физической плоскости:

1) характеристики уравнений плоского сверхзвукового течения образуют с вектором скорости газа в данной точке (т. A) углы,

равные углам возмущения (углам Маха): $\alpha = \pm \arcsin \frac{1}{M}$, т.е. совпадают с линиями возмущений (линиями Маха). Отсюда $\sin \alpha = \pm \frac{1}{M}$.

Для доказательства воспользуемся известным соотношением из аналитической геометрии для tg угла между двумя пересекающимися прямыми с их угловыми коэффициентами (в нашем случае m – для характеристик семейства (C_1) или (C_2) и $\frac{v_y}{v_x}$ – для вектора \vec{v}):

$$tg \alpha = \left(m - \frac{v_y}{v_x} \right) / \left(1 + m \frac{v_y}{v_x} \right).$$

Подставим значение m из уравнения (2.66) и преобразуем:

$$\begin{aligned} tg \alpha &= \frac{\left(\left(v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2} \right) / (v_x^2 - a^2) \right) - v_y / v_x}{1 + \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} \cdot \frac{v_y}{v_x}} = \frac{a^2 v_y \pm a v_x \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x (v^2 - a^2) \pm a v_y \sqrt{v^2 - a^2}} = \\ &= \pm \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}. \end{aligned}$$

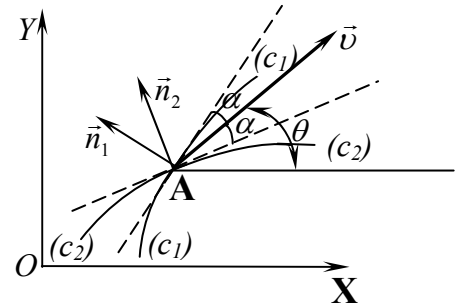


Рис. 19

Из тригонометрии $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

Так что, действительно, $\sin \alpha = \pm \frac{1}{M}$ для сверхзвукового потока. Отсюда вытекают второе и третье свойства характеристик в физической плоскости:

2) Вектор скорости направлен по биссектрисе угла между характеристиками в физической плоскости (см. рис. 19).

3) Проекция скорости газа на нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 к характеристикам в данной точке физической плоскости равны по абсолютной величине местной скорости звука. Из рисунка видно, что

$$v_{n_1} = v \cos(90^\circ + \alpha) = -v \sin \alpha = -v \frac{1}{M} = -a.$$

$$v_{n_2} = v \cos(90^\circ - \alpha) = v \sin \alpha = v \frac{1}{M} = a, \text{ т.е. } |v_n| = a.$$

Переходим к рассмотрению нашей задачи. Обратимся к выражению (2.68):

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{a^2 - v^2 y}.$$

Решение исходной нелинейной системы уравнений сводится к интегрированию этого нелинейного уравнения (содержит $v_x v_y$, v^2 , a^2 , v_y^2 – поэтому нелинейно).

Перейдем в нем от проекций скорости v_x , v_y к величине вектора скорости v и углу θ , образованному этим вектором и осью Ox физической плоскости (рис.19). Запишем для этого следующие соотношения: $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$.

Продифференцируем их:

$$dv_x = dv \cos \theta - v \sin \theta d\theta;$$

$$dv_y = dv \sin \theta + v \cos \theta d\theta.$$

Подставим эти соотношения в уравнение (2.68) для $\frac{dv_y}{dv_x}$ и получим выражение

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{1,2} = \frac{dv \sin \theta + v \cos \theta \frac{d\theta}{d\lambda}}{dv \cos \theta - v \sin \theta \frac{d\theta}{d\lambda}} = \frac{v^2 \cos \theta \sin \theta \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.69)$$

Это дифференциальное уравнение относительно v и θ (оно непосредственно интегрируется) имеет следующий вид после преобразований:

$$d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v}. \text{ Так как } M = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}, \text{ то}$$

$$d\theta = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.70)$$

Пришли к простому уравнению в обыкновенных производных. Проведя интегрирование, получим:

$$\theta = \pm \sigma(\lambda) + const, \quad (2.71)$$

где

$$\sigma(\lambda) = \int \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}.$$

Таким образом, получили следующие результаты:

а) характеристические направления (а, следовательно, и уравнения характеристик) в физической плоскости жестко связаны с характеристическими направлениями (характеристиками) в плоскости годографа;

б) дифференциальные уравнения характеристик в плоскости годографа $d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v}$ были проинтегрированы и привели к конечным формулам ($\theta = \pm \sigma(\lambda) + const$) характеристик, представляющих два совершенно определенных, одинаковых для всех плоских сверхзвуковых течений семейства кривых.

Замечая, что в сверхзвуковых течениях безразмерная скорость λ меняется в пределах $1 \leq \lambda \leq \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, причем левая граница соответствует критической скорости $v = a^*$, а правая – предельной максимальной скорости

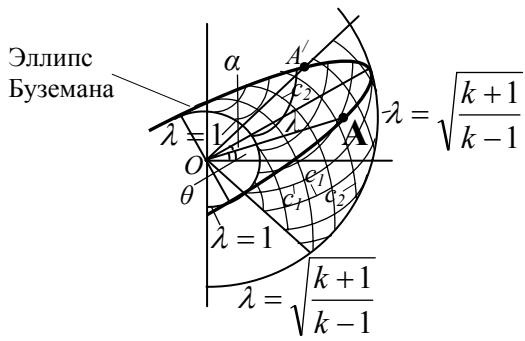


Рис. 20

$v = v_{\max}$, проведем концентрические

окружности $\lambda = 1$ и $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ и заполним пространство между ними сеткой кривых (см. рис.20).

Эти кривые представляют собой два семейства эпициклоид, описываемых точками окружности радиуса $\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right)$, катящейся по окружно-

сти $\lambda = 1$.

Располагая одной и той же для данного k (для воздуха $k = 1,4$) вычерченной сеткой эпициклоид, нетрудно при помощи простых графических приемов строить характеристические направления в точках физической плоскости, проводя через эти точки перпендикуляры к соответствующим, заданным семействами $\theta = \pm \sigma(\lambda) + const$, характеристическим направлениям в плоскости годографа.

Пользуясь третьим свойством характеристик в физической плоскости ($|v_n| = a$), можно показать, что кривая зависимости $\lambda(\alpha)$ для любого сверхзвукового потока представляет собой эллипс, форма которого зависит только от показателя адиабаты k , выражающего физические свойства газа. Если взять известное изозэтропийное соотношение (интеграл энергии) в

виде $\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2}$ и направить проекции вектора скорости \vec{v} –

одну по касательной к характеристике (v_x), вторую – по нормали к ней (v_y), то по третьему свойству $v_y = a$, и тогда получим:

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{v_y^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} \quad \text{или} \quad \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{v_x^2}{a^{*2}} + \frac{v_y^2}{a^{*2}} = 1. \quad \text{Обозначим через}$$

$\lambda_{v_x} = \frac{v_x}{a^*}$; $\lambda_{v_y} = \frac{v_y}{a^*}$, тогда получим:

$$\frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_{v_x}^2 + \lambda_{v_y}^2 = 1. \quad (2.72)$$

Это уравнение эллипса в плоскости $(\lambda_{v_x}; \lambda_{v_y})$. Он назван эллипсом Буземана. Большая полуось этого эллипса равна $\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, а малая полуось – единице. Эллипс Буземана расположен в области между окружностями $\lambda = 1$ и $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, причем большая его полуось направлена по касательной к характеристике в данной точке физической плоскости, а малая по перпендикуляру к ней, т.е. по касательной к сопряженной характеристике в плоскости годографа скоростей.

Возможное расположение эллипса Буземана по отношению к сетке эпициклоид показано на рисунке 20. Если эллипс совмещен своим центром O с центром окружностей, ограничивающих семейство эпициклоид и так повернут, чтобы некоторая его точка A совпала с заданной точкой (λ, θ) плоскости годографа, то большая полуось эллипса, образующая с вектором скорости угол α , укажет направление одной из характеристик (линий возмущения) в физической плоскости. Направление другой характеристики получим, если совместим с концом вектора скорости, т.е. с точкой (λ, θ) точку A' эллипса, служащую зеркальным отражением т. A эллипса относительно его большой оси.

Таким образом, пользуясь эллипсом Буземана, можем, зная величину (λ) и направление (θ) скорости в некоторой точке физической плоскости, чисто графическим путем провести через нее два характеристических направления в этой физической плоскости. При этом малая полуось эллипса укажет сопряженное характеристическое направление в плоскости годографа.

На использовании изложенных свойств семейств характеристик в физической плоскости течения и плоскости годографа скоростей основан графо-аналитический метод расчета плоских сверхзвуковых потоков. Он очень удобен, так как использует раз и навсегда вычерченные:

- 1) сетки характеристик в плоскости годографа-эпициклоиды;
- 2) эллипс Буземана, изготовленный в виде прозрачного шаблона.

2.8. Сверхзвуковое обтекание тупого угла

Задача обтекания тупого угла вместе с задачей обтекания тонких профилей используется при рассмотрении обтекания сверхзвуковым потоком толстых профилей (для получения аэродинамических характеристик про-

филя произвольной толщины). Достаточно разбить профиль на пять-шесть частей и получим довольно точные результаты.

Задача обтекания тупого угла выглядит следующим образом.

Пусть в некоторой точке O стенка поворачивается, образуя с первоначальным направлением угол $\bar{\theta}$ (см. рис.21). При сверхзвуковом обтекании внешнего тупого угла ACB газ расширяется, так как область, занятая газом, увеличивается; при расширении сверхзвуковой поток ускоряется. Вдоль участка стенки AO скорость газа постоянна. Угловая точка O при обтекании ее газом является препятствием, которое служит источником возникновения слабых возмущений в газовом потоке. Эти возмущения распространяются в равномерном потоке по прямой линии – характеристике OC_0 , которая отделяет невозмущенный газовый поток от возмущенного. Вдоль участка стенки OB скорость газа снова принимает постоянное значение, большее, чем в исходном потоке вдоль участка стенки AO . Это означает, что возмущение, возникшее вследствие обтекания угловой точки O , заканчивается на другой характеристике OC , которая тоже прямолинейна. Таким образом, поворот потока к новому направлению осуществляется внутри угла C_0OC между двумя прямолинейными характеристиками. Для большей наглядности разобьем непрерывное расширение газа внутри угла C_0OC на большое число участков с незначительными, но непрерывными изменениями параметров.

Первый малый скачок скорости и давления произойдет на линии OC_0 ; так как давление при этом падает, то согласно теории скачков нормальная к линии OC_0 составляющая скорости увеличивается, и ввиду неизменности тангенциальной составляющей скорости – поток несколько изменяет свое направление, отклоняясь от линии возмущения. И так, за линией OC_0 поток получил несколько большую скорость, немного отклонился в соответ-

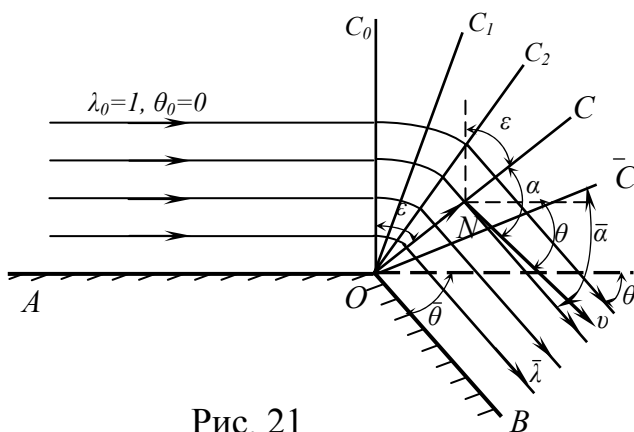


Рис. 21

ствующем направлении, а давление, температура и плоскость газа слегка уменьшились. Возмущение, распространяющееся из области более низких давлений, теперь должно уже быть ограничено новой характеристикой OC_1 , которая вследствие отклонения потока и увеличения числа M располагается правее первой характеристики OC_0 .

Причем вдоль характеристики OC_1 , так же, как перед этим и вдоль характеристики OC_0 , параметры газа и скорость движения неизменны. Второй слабый скачок разрежения на линии OC_1 вызывает новое отклонение потока в сторону OB и дальнейшее расширение газа, сопровождающееся увеличением его скорости. Поворот потока, очевидно, завершится, когда вектор скорости \bar{v} будет параллелен OB . В силу того, что все характеристики, исходящие из точки O , прямолинейны, т.е. скорость (и остальные параметры газа) вдоль них не изменяются, то и вдоль последней характеристики $O\bar{C}$ вектор скорости сохраняет постоянное (по величине и направлению) значение. Таким образом, за последней характеристикой $O\bar{C}$ поток вновь становится равномерным и параллельным (стенке OB) потоком с постоянной скоростью $\bar{\lambda} > \lambda_0$. Последняя характеристика $O\bar{C}$, на которой завершается поворот газового потока около точки O , располагается под углом $\bar{\alpha}$ к стенке OB , соответствующим равенству $\bar{\alpha} = \arcsin \frac{1}{M}$. Если перейти теперь от рассмотренной выше условной схемы с малыми скачками разрежения к непрерывному расширению газа, то вместо конечного числа слабых пучков получается бесконечное число характеристик. Таким образом, поворот потока около тупого угла и связанное с ним расширение газа (уменьшение давления) можно рассматривать как последовательность слабых возмущений, источником которых является вершина угла O ; эти возмущения распространяются в потоке по прямолинейным характеристикам, исходящим из вершины.

Приведенное рассуждение показывает, что при повороте сверхзвукового газового потока около внешнего тупого угла значения скорости, давления и плотности остаются постоянными вдоль лучей, исходящих из угловой точки и являющихся характеристиками. Поэтому при аналитическом исследовании обтекания тупого угла удобно пользоваться полярными координатами, поместив начало координат в этой угловой точке. Нисколько не нарушая общности, можно предположить, что обтекание начинается со звуковой скорости, т.е. начальный поток слева от прямой OC_0 (которая перпендикулярна к первоначальному потоку) является звуковым ($\lambda_0 = M_0 = 1$); будем исходить из принципа, что обтекание тупого угла не связано со скачками уплотнения, а только с возмущениями типа звуковых. Потoku после поворота на угол $\bar{\theta}$ соответствует однородное течение справа от прямой $O\bar{C}$ с безразмерной скоростью $\bar{\lambda}$ и числом \bar{M} , большими единицы, так как поток расширяется. Поворот на конечный угол $\bar{\theta}$ можно рассматривать как результат совокупности последовательных малых пово-

ротов в области C_0OC_1 , затем в области C_1OC_2 и т.д. Таким образом, нелинейная задача расчленяется на ряд линеаризованных. Отсюда следует, что лучи OC_0, OC_1, OC_2, \dots являются линиями возмущения и вместе с тем характеристиками. Вдоль них возмущения потока постоянны. Переходя вниз по потоку от одной линии возмущения к следующей, бесконечно близкой, заполним линиями возмущения весь сектор $C_0O\bar{C}$, называемый сектором разрежения (поскольку при разгоне газа его давление уменьшается, т.е. происходит разрежение).

По определению линии возмущения угол возмущения α , образованный линией возмущения с направлением вектора скорости \vec{v} в данной точке (т. N), равен:

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M} = \operatorname{arctg} \frac{1/M}{\sqrt{1-(1/M)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{\lambda^2-1}} \quad (2.73)$$

(так как $M = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}$).

Пределы изменения угла α , если вначале положим $\lambda = \lambda_0 = 1$, а в конце $\lambda = \lambda_1$, будут $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \alpha_1$.

В теории линеаризованных сверхзвуковых потоков была получена формула $\frac{v'_x}{v_\infty} = \pm \theta_{1,2} / \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, выражающая величину малого приращения скорости газа v'_x при повороте потока на малый угол θ . Применяя эту формулу к текущему элементарному сектору разрежения и считая $d\theta > 0$, перепишем ее в виде: $\frac{dv}{v} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}}$. Входящие сюда величины v ; θ ; M представляют текущие значения этих величин для некоторой промежуточной линии OC сектора разрежения.

Чтобы проинтегрировать это уравнение, перейдем от числа M к числу λ (по приведенной выше формуле). Тогда будем иметь:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\lambda^2}}}.$$

После разделения переменных интегрирование дает следующий результат:

$$\theta = \theta(\lambda) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}. \quad (2.74)$$

(Здесь было использовано начальное условие: $\theta_0 = 0$ при $\lambda_0 = 1$).

Введем в рассмотрение угол ε – как угол между вертикалью (начальной линией OC_0) и линией возмущения OC (характеристикой OC). Из рис. 21 видно, что $\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \theta - \alpha$. Подставляя сюда значения α и θ (уравнения 2.73 и 2.74), получим:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{\lambda^2 - 1}}.$$

Из тригонометрии известно, что сумма двух арктангенсов, аргументы которых имеют взаимно обратные величины, равна $\frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{\lambda^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая это обстоятельство, получим для ε следующую формулу:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \right). \quad (2.75)$$

Совокупность формул (2.73), (2.74), (2.75) дает параметрическое решение поставленной задачи, причем роль параметра играет скоростной коэффициент λ .

Используя известное соотношение между λ и M $\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2} = M^2 - 1$,

заменяем в формулах (2.73)-(2.75) параметр λ на число M и получим следующие зависимости для α ; θ ; ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}; \\ \theta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}; \\ \varepsilon = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right). \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Давление, плотность и температуру газа в секторе разрежения определим по обычным изоэнтروпийным соотношениям:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}};$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{k-1}};$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-1}.$$

Здесь учтено, что $\lambda_0 = M_0 = 1$. Как обычно, индекс 0 означает условие адиабатически и изоэнтропийные заторможенного газа.

Итак, уравнения для углов α , θ , ε как функций M или λ и изоэнтропийные соотношения для p , ρ , T в секторе разрежения дают параметрическую систему уравнений для решения поставленной задачи – при допущении $\lambda_0 = 1$

(т.к. в практике λ на входе может быть любым).

На графике (рис. 22) показаны кривые зависимостей некоторых параметров потока от угла θ для воздуха ($k = 1,4$) при обтекании тупого угла. Следует отметить, что все вели-

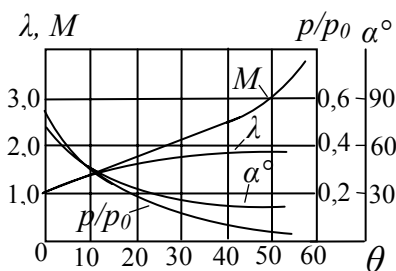


Рис.22

чины, характеризующие поток, не зависят от радиус-векторов r точек области течения относительно полюса θ , т.е. от расстояния до вершины угла, а зависят лишь от полярного угла ε . Такая независимость от радиуса-вектора r , а тем самым и автономность задачи, связаны с наличием однородности потока слева от первой линии возмущения OC_0 .

Из полученных соотношений следует, что при возрастании λ до максимально возможного значения, равного $\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ или до числа $M = \infty$, т.е. при истечении с максимальной скоростью v_{\max} в абсолютный вакуум, угол θ возрастает до своего максимального значения: $\theta_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}$, при этом $\alpha = 0$, $\varepsilon_{\max} = \frac{\pi}{2} + \theta_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$.

Таким образом, существует предельный угол поворота потока θ_{\max} , равный для воздуха 130° , который мог бы осуществляться только в идеальном случае расширения газа до абсолютного вакуума. На практике могут иметь место повороты потока только на углы, меньшие θ_{\max} .

Составим дифференциальное уравнение для движения газа в конусе разрежения в полярных координатах ($r = ON, \varepsilon$), т.е. найдем уравнение линий тока. По известной формуле дифференциальной геометрии: $\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varepsilon} = \operatorname{ctg} \alpha$. С другой стороны, из формул (2.73), (2.75) для α и ε как функций коэффициента λ , легко исключить λ и найти непосредственную связь между α и ε . После преобразований получим:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varepsilon \right).$$

Тогда, объединяя два последних уравнения, получим:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varepsilon \right).$$

Интегрирование этого уравнения приводит к следующему уравнению семейства линий тока с параметром r_0 , равным начальному радиусу-вектору

линии тока на прямой OC_0 (при $\varepsilon = 0$): $r = r_0 \left[\cos \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varepsilon \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}$.

Линии тока образуют семейство подобных друг другу кривых с центром подобия в точке θ .

Изложенное решение задачи об обтекании тупого угла является общим и не зависит от ранее поставленного ограничения $\lambda_0 = M_0 = 1$ при $\theta = 0$. Это допущение было принято лишь для упрощения формулы (2.74) для θ и связанных с ним дальнейших соотношений. В принципе полученное решение может быть использовано для начального потока с любыми значениями чисел $\lambda > 1$ или $M > 1$. В этом случае следует только начинать с характеристики (линии возмущения), соответствующей заданному начальному значению λ или M , и подводить к ней однородный прямолинейный поток. Точно так же и конец поворота потока определяется заданиями θ или λ и M на выходе и построением выходного однородного прямолинейного потока со скоростью и углами, рассчитанными по изложенной теории.

Итак, откажемся от условия $\lambda_0 = M_0 = 1$ при $\theta = 0$ и примем за начальную характеристику любую характеристику OC_1 , соответствующая значению $M_1 > 1$. Обозначим индексом 1 параметры потока на входной характеристике OC_1 и сохраним величины без индекса для текущих значений параметров внутри сектора разрежения. При этом условимся отсчитывать угол поворота потока θ от направления потока на входе, а ε – от начальной характеристики, определение α останется прежним. Тогда система уравнений (2.76) примет вид:

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}; \\ \theta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M_1^2 - 1} \right) \right] - \\ - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{M_1^2 - 1}; \\ \varepsilon = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M_1^2 - 1} \right) \right]. \end{cases} \quad (2.77)$$

К этим формулам можно добавить известные изоэнтروпийные соотношения для давления, плотности и температуры газа:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{T}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}.$$

III. РАЗРЫВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Задачи аэрогазодинамики разрывных течений в современной постановке близко связаны с новыми проблемами (аэродинамикой полета, космической техникой). Это более общая задача, чем интегрирование дифференциальных уравнений (т.к. при разрывах имеем дело с особыми точками). Дифференциальные уравнения неплохо решаются для дозвуковых течений сплошных сред, при околосвуковых и сверхзвуковых течениях среда претерпевает разрывы, и надо решать в этих случаях не дифференциальные, а интегральные уравнения при наличии разрыва. Такие ученые, как Стодола, Ренкин и Риман решали эти задачи в конце прошлого века, причем Риман по праву считается крупнейшим специалистом по разрывным течениям.

Одна из особенностей сверхзвуковых течений заключается в том, что в ряде случаев основные параметры, характеризующие движение и состояние газа (давление, плотность, температура и скорость), не являются непрерывными функциями точек пространства, заполненного текущим газом. Опыты показывают, что при более или менее значительном торможении сверхзвукового потока в последнем возникают поверхности, при прохождении через которые величины параметров газа скачкообразно изменяются. Места резкого скачкообразного увеличения давления, плотности и температуры и уменьшения скорости носят название скачков уплотнения.

Возникновение скачков уплотнения объясняется характером распространения возмущений в сверхзвуковом потоке.

Как было сказано ранее, в дозвуковом потоке возмущения распространяются во всех направлениях, в том числе и против направления скорости потока. Поэтому волна повышенного давления, возникающая, например, перед телом, распространяясь вперед, деформирует набегающий поток, при этом линии тока искривляются уже перед телом. Поток как бы заранее приспособляется к обтеканию тела. Вдоль нулевой линии тока происходит непрерывное уменьшение скорости от v_∞ до $v=0$ в критической точке, а давление возрастает от p_∞ до давления торможения p_0 . Отсюда следует, что в дозвуковом потоке скачки уплотнения не могут возникнуть.

В сверхзвуковом потоке возмущения против направления скорости не распространяются. Поэтому даже непосредственно перед обтекаемым телом поток не возмущен. При встрече с таким телом направление скорости

потока внезапно изменяется. Это приводит к скачкообразному изменению величин скорости потока, давления, плотности и температуры.

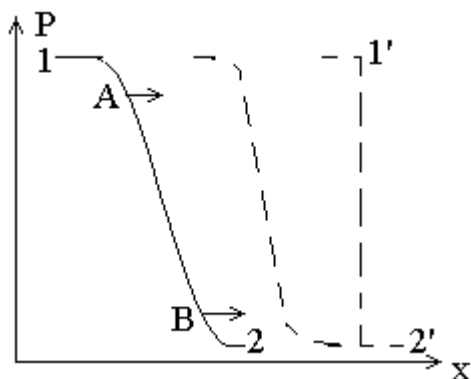
При обтекании тупоносого тела появляется сильная волна повышенного давления, которая распространяется со скоростью, значительно превышающей скорость звука. По мере распространения волны повышенного давления интенсивность ее падает. Уменьшается при этом и скорость распространения волны. Поэтому скачок уплотнения возникает перед телом на таком расстоянии, когда скорость распространения волны повышенного давления становится равной составляющей скорости набегающего потока, направленной против движения волны. Расстояние отсоединенного криволинейного скачка уплотнения от тела зависит от формы тела и скорости невозмущенного потока v_∞ .

Очевидно, что чем больше v_∞ , тем ближе располагается скачок уплотнения к телу.

Скачок уплотнения, строго говоря, представляет собой слой весьма малой толщины (порядка длины свободного пробега молекул). Поэтому в теории скачков уплотнения математически их можно заменять поверхностями разрыва.

3.1. Ударные волны и скачки уплотнения

В случае полета со сверхзвуковой скоростью ($v > a$) перед телом возникает волна сжатия или ударная волна (скачок уплотнения). Известно, что всякое повышение давления (плотности), возникшее в каком-либо месте газовой среды, распространяется в ней с большой скоростью во все стороны в виде волн давления. Слабые волны давления движутся со скоростью звука, их изучением занимаются в акустике. Сильные волны давления распространяются со скоростями значительно большими, чем скорость звука. Основная особенность сильной волны давления заключается в том, что фронт волны очень узок (толщина его порядка длины свободного пробега молекул), в связи с чем параметры состояния газа (давление, плотность, температура) изменяются скачком.



температура) изменяются скачком.

Качественно это можно объяснить следующим образом. Пусть в некоторой области среды (см. рис. 23) произошло изменение давления, и вначале волна получила плавную форму $1AB2$. На отдельных бесконечно узких участках волны величина давления возрастает незначительно, поэтому распро-

Рис. 23

странение такой волны происходит со скоростью звука. В области высоких сжатий (точка A) наблюдаются, естественно, более высокие температуры, чем в области малых сжатий (точка B), в силу чего верхняя часть волны давления движется быстрее, чем ее нижняя часть (так как скорость звука пропорциональна температуре среды). Таким образом, если даже вначале волна сжатия была пологой, то со временем она делается все круче и круче. Процесс этот остановится, и волна приобретет устойчивую форму только в тот момент, когда фронт волны сжатия станет совсем плоским ($1' - 2'$). Следовательно, волны сжатия распространяются как скачки давления (разрывы), в связи с чем их и называют ударными волнами. После того, как ударная волна образовалась, по обе стороны от ее фронта параметры состояния газа и его скорость будут иметь значения, различающиеся между собой на конечные величины (рис. 24).

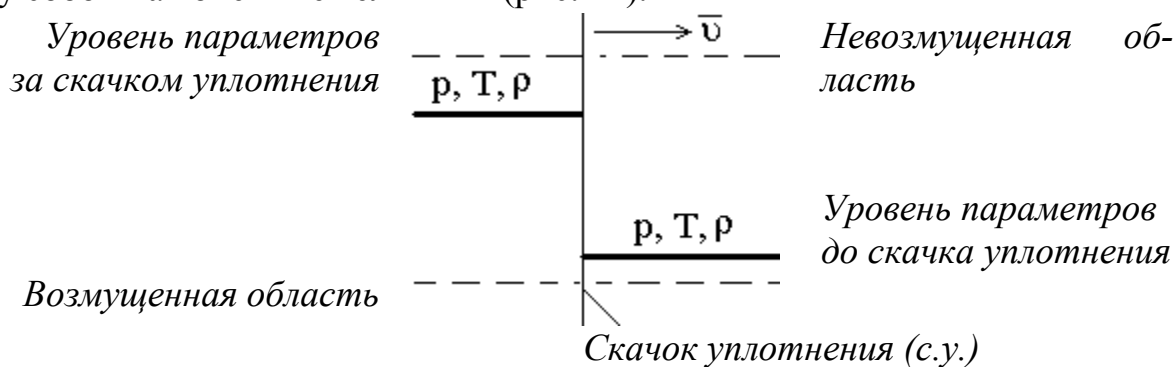


Рис. 24

Фронт ударной волны представляет собой поверхность (в нашем случае – плоскость) разрыва параметров состояния газа, перемещающуюся по газу и вызывающую скачкообразное изменение этих параметров, причем невозмущенный газ перед фронтом ударной волны имеет меньшее давление, плотность и температуру, чем после прохождения фронта.

Наличие такого скачкообразного изменения параметров газа (или точнее, очень резкого их изменения на участке длины, равной по порядку пути свободного пробега молекулы) показывает, что здесь имеет место внутренний молекулярный процесс, связанный с переходом кинетической энергии упорядоченного течения газа в кинетическую энергию беспорядочного теплового движения молекул. Этим объясняется разогрев газа в возмущенной области после прохода фронта ударной волны по сравнению с невозмущенной областью перед фронтом ударной волны. Повышение средней квадратичной скорости пробега молекул вызывает также возрастание давления и плотности газа при прохождении через него фронта ударной волны. Обратим движение, сообщив мысленно среде поступа-

тельное движение влево со скоростью распространения фронта ударной волны. Иначе говоря, будем рассматривать происходящее явление с точки зрения галилеевой системы координат, движущейся поступательно вместе с фронтом ударной волны. Тогда ударная волна окажется как бы остановленной, а газ приобретает стационарное движение.

Неподвижную ударную волну, плоскость которой перпендикулярна к направлению потока, называют прямым скачком уплотнения. Невозмущенный газ в новом рассмотрении уже не неподвижен, а подходит к прямому скачку уплотнения со скоростью перемещения фронта ударной волны.

Нарисуем новую картину возмущенной и невозмущенной областей среды (рис. 25), где поток будет двигаться слева направо (так привычнее для рассмотрения и принято в механике сплошных сред). Условимся в дальнейшем обозначать индексом 1 параметры состояния среды и скорость потока перед скачком уплотнения, индексом 2 – после скачка уплотнения.

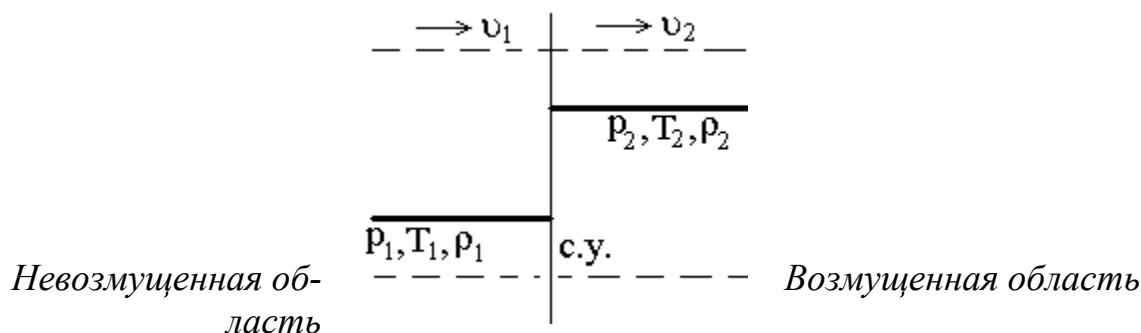


Рис. 25

Скорость потока перед скачком уплотнения будет v_1 , после скачка уплотнения – v_2 , при этом очевидно $v_1 > v_2$. Параметры состояния среды в возмущенной области будут иметь большие величины по сравнению с параметрами в невозмущенной области, т.е. $p_2 > p_1$; $T_2 > T_1$; $\rho_2 > \rho_1$.

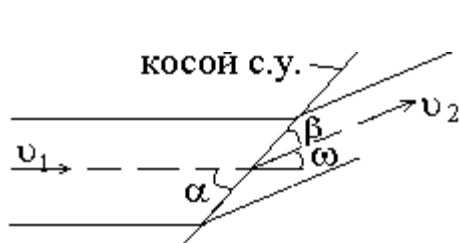


Рис. 26

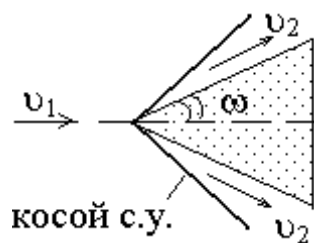


Рис. 27

Характерной особенностью прямого скачка уплотнения является то, что пересекая его фронт, газовый поток не меняет своего направления, причем фронт прямого скачка располагается нормально к направлению потока. Помимо прямых скачков уплотнения, существуют и так называемые

косые скачки уплотнения. Фронт косо́го скачка располагается наклонно к направлению потока (см. рис. 26), т.е. угол между вектором скорости потока и плоскостью скачка отличен от 90° . Таким образом, косым скачком уплотнения называют неподвижную ударную волну, плоскость которой расположена под определенным углом (не равным 90°) к направлению потока. Косой скачок уплотнения получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, газовый поток изменяет свое направление. Например, при сверхзвуковом обтекании клиновидного тела (см. рис. 27), которое отклоняет поток от начального направления на угол ω , перед телом образуются плоские, косые скачки уплотнения, сходящиеся на его носике. Косой скачок уплотнения образуется и при обтекании конуса. В этом случае поверхностью разрыва будет конус с вершиной в носике обтекаемого конуса. Таким образом, если до встречи потока с фронтом косо́го скачка вектор скорости v_1 составлял с ним угол α , то после пересечения фронта поток отклоняется на угол ω , а угол между вектором скорости v_2 и фронтом косо́го скачка уплотнения становится равным $\beta = \alpha - \omega$.

Решим задачу определения взаимосвязи потока до и после прямого скачка уплотнения. Чтобы найти связь между v_1, ρ_1, p_1, T_1 и v_2, ρ_2, p_2, T_2 , воспользуемся условием стационарности потока и применим к нему теоремы сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии. Кроме того, будем считать, что газ является идеальным и массовые силы отсутствуют (т.е. пренебрегаем влиянием массовых сил, поскольку имеем дело с газами).

Тогда вышеперечисленные уравнения в интегральной форме запишутся следующим образом:

1) уравнение неразрывности:

$$\int_V \operatorname{div}(\rho \bar{v}) dV = 0, \text{ так как } \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0; \quad (3.1)$$

2) уравнение движения в форме Эйлера

$$\int_V \operatorname{div}(\rho v^2) dV + \int_S P_n dS = 0; \quad (3.2)$$

3) уравнение энергии

$$\int_V \operatorname{div} \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v \right] dV + \int_S P_n v_n dS = 0. \quad (3.3)$$

Все эти уравнения содержат под знаком интеграла дифференциальные соотношения, которые надо устранить.

Применяя ко всем уравнения теорему Остроградского-Гаусса, получим:

$$1) \int_S \rho v_n dS = 0; \quad (3.4)$$

$$2) \int_S (\rho v v_n + P_n) dS = 0; \quad (3.5)$$

$$3) \int_S \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v_n + P_n v_n \right] dS = 0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим одномерное течение газа и будем считать, что в сечениях 1 (до поверхности разрыва) и 2 (после поверхности разрыва) поля скоростей и других величин однородны. В этих условиях закон сохранения массы при прохождении через скачок уплотнения (уравнение неразрывности) запишется в виде:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2. \quad (3.7)$$

Здесь для внутренней задачи (течения газа в цилиндрической трубе) принято $S_1 = S_2$, а для внешней задачи S опускается.

Уравнение движения при приведенных выше условиях дает второе искомое равенство – сохранение полного импульса $(p + \rho v^2)$ при прохождении через скачок уплотнения:

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2. \quad (3.8)$$

Уравнение энергии преобразуется следующим образом:

$$\int_S \left[\rho \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) v_n + p_n v_n \right] dS = 0, \quad (3.9)$$

(здесь внутреннюю энергию заменили $u = c_v T$).

Произведя замену $u = c_v T = c_p T - RT = h - \frac{p}{\rho}$, получим:

$$\int_S \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) v_n dS = 0, \quad (3.10)$$

(здесь энтальпия $h = C_p T$, а из уравнения Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$).

Тогда при наших допущениях получим:

$$\rho_1 v_1 \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) = \rho_2 v_2 \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right). \quad (3.11)$$

Учитывая, что $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, получим искомое третье уравнение:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (3.12)$$

Это равенство представляет собой закон сохранения полной энтальпии $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$ газа при его прохождении через прямо скачок уплотнения.

С учетом уравнения Клапейрона: $h_1 = C_p T_1 = \frac{C_p}{R_1} T_1 = \frac{C_p}{R} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1}$

(здесь $\frac{C_p}{R} = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p / C_v}{C_p / C_v - 1} = \frac{k}{k-1}$, где $R = C_p - C_v$ – соотношение Майера, $C_p / C_v = k$).

Аналогично: $h_2 = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}$.

И тогда равенство (3.12) можно записать в следующем виде:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (3.13)$$

Таким образом, получили систему из трех уравнений: неразрывности течения (3.7), изменения количества движения одномерного потока (3,8) и уравнения энергии (3.13) – с тремя неизвестными величинами v_2, p_2, ρ_2 .

Мы видим, что независимо от характера движения (разрывного или нет), количество уравнений одно и то же. Но есть положительный момент: эти соотношения в интегральном виде можно непосредственно использовать для анализа физики явления разрывного процесса. Причем, адиабата Пуассона $p / \rho^k = const$, пригодная для сплошной среды (при изэнтропийном расширении, т.е. при постоянной энтропии), теряет смысл при разрывных процессах (сверхзвуковых процессах при наличии скачка уплотнения). Гюгонио первый обратил на это внимание и получил адиабату при разрыве сплошности среды (при возрастании энтропии), названную ударной адиабатой Гюгонио. Итак, получили исходные уравнения для разрывного течения:

неразрывности	$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$;
импульсов	$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$;
энергии	$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$.

Эти уравнения положены в основу теории скачка уплотнения.

3.2. Ударная адиабата Гюгонио для разрывных течений

Обратим внимание на две особенности разрывных течений:

1) в условиях неразрывного течения существует изоэнтروпийная адиабата Пуассона $p/\rho^k = const$. Но она недействительна для разрывных течений. Ударная адиабата Гюгонио лежит выше изоэнтропийной адиабаты Пуассона, что означает возрастание энтропии при появлении разрывного течения. За счет роста энтропии появляется волновое сопротивление. Парадокс Даламбера при этом теряет смысл, так как появляется волновое сопротивление, и картина сверхзвукового обтекания тела имеет другой вид по сравнению с дозвуковым;

2) при неразрывном течении уравнение энергии и уравнение состояния приводят к уравнению процесса. Для разрывных течений этого не получается.

Выведем уравнение ударной адиабаты из уравнения импульсов

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2 = \rho_1 v_1 (v_1 - v_2), \quad (3.14)$$

так как $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$.

Умножим обе части уравнения (3.14) на $\frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1}$ и получим:

$$(p_2 - p_1) \frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1} = v_1^2 - v_2^2.$$

Поскольку $\frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ (т.к. $v_2/v_1 = \rho_1/\rho_2$), то

$$(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = v_1^2 - v_2^2 \quad (3.15)$$

Уравнение энергии перепишем в виде:

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (3.16)$$

Объединим два последних уравнения в одно. Преобразуем для этого уравнение (3.16) к виду

$$\frac{2k}{k-1} \cdot \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = v_1^2 - v_2^2.$$

Уравнение импульсов (3.15) оставим без изменений.

Приравняем левые части обоих уравнений, т.е.

$$(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2k}{k-1} \cdot \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right). \quad (3.17)$$

Сгруппировав члены с p_1 и p_2 , получим:

$$p_2 \left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_2} \right] = p_1 \left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_1} \right]$$

или

$$p_2 \left[\frac{(k-1)\rho_2 + (k-1)\rho_1 - 2k\rho_1}{(k-1)\rho_1\rho_2} \right] = p_1 \left[\frac{(k-1)\rho_2 + (k-1)\rho_1 - 2k\rho_2}{(k-1)\rho_1\rho_2} \right];$$

$$p_2 [(k-1)\rho_2 - (k+1)\rho_1] = p_1 [(k-1)\rho_1 - (k+1)\rho_2]. \quad (3.18)$$

Умножив обе части равенства (3.18) на $(-1/\rho_1)$ получим:

$$p_2 \left[(k+1) - (k-1) \frac{\rho_2}{\rho_1} \right] = p_1 \left[(k+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (k-1) \right].$$

Тогда:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (k-1)}{(k+1) - (k-1) \frac{\rho_2}{\rho_1}},$$

И окончательно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{(k+1)\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{(k+1)}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (3.19)$$

Это и есть уравнение ударной адиабаты Гюгонио.

Итак, интегралы уравнений разрывного одномерного течения после преобразований дают отличное от изоэнтропийной адиабаты Пуассона

$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$ выражение. Как только переходят к разрывному течению, то по-

лучают ударную адиабату Гюгонио.

Построим графики сравнения двух адиабат: изоэнтропийной и ударной.

Ударная адиабата за исключением небольшой области лежит выше адиабаты Пуассона. График для газа с $k=1.4$ выглядит следующим образом (рис. 28):

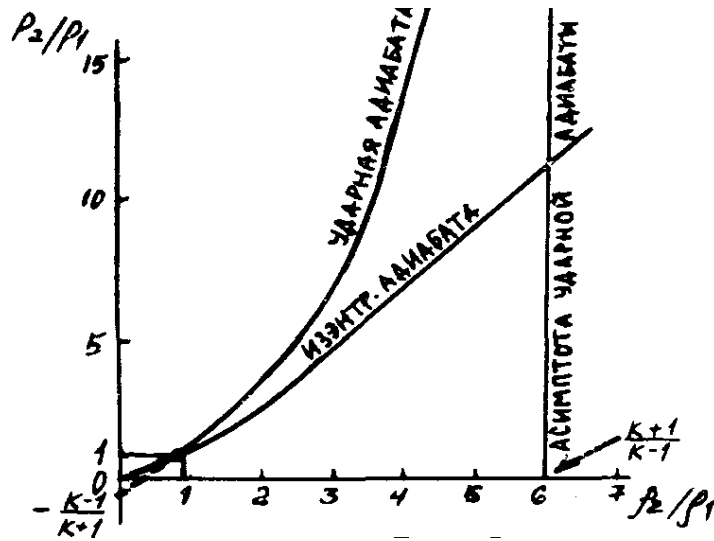


Рис. 28.

В отличие от непрерывного движения сплошной среды с плавным изменением параметров вдоль направления распространения потока разрывное движение характеризуется конечным скачком параметров газа в некотором сечении. Отсюда можно сделать заключение, что прохождение идеального газа сквозь скачок уплотнения не является изоэнтروпийным процессом, а сопровождается необратимым переходом механической энергии в тепловую.

В физическом отношении это означает, что при прохождении через скачок уплотнения энтропия возрастает:

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p_2}{\rho_2^k} - \ln \frac{p_1}{\rho_1^k} \right], \quad (3.20)$$

где S_1 – энтропия до скачка, S_2 – энтропия после скачка уплотнения.

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1^k}{\rho_2^k} \right] = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p_{2uz}}{\rho_2^k} \cdot \frac{\rho_1^k}{p_1} \cdot \frac{p_2}{p_{2uz}} \right].$$

В силу уравнения Пуассона ($p/\rho^k = const$) первые два члена составляют 1 и тогда

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p_2}{p_{2uz}} \right]. \quad (3.21)$$

Так как $p_2 > p_{2uz}$ (см. рис. 28), следовательно $S_2 > S_1$ при разрыве сплошности, т. е. происходят потери механической энергии за счет возникновения волнового сопротивления. Отсюда следует, что в природе существует только прямой скачок уплотнения, а прямого скачка разрежения не существует, поскольку в этом случае энтропия будет убывать, а это невозможно в силу второго закона термодинамики (энтропия может либо оставаться постоянной, либо возрастать – третьего не дано).

Таким образом, волновое сопротивление, появляющееся при сверхзвуковом обтекании, характеризуется возрастанием энтропия.

3.3. Уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения

Получим необходимое для вывода соотношение из интегралов основных уравнений для скачка уплотнения. Возьмем уравнение сохранения полного импульса (3.14): $p_2 - p_1 = \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2$ или $\frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1} = v_1 - v_2$ (из закона сохранения массы: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$).

Из интеграла Бернулли уравнения энергии следует, что перед скачком уплотнения имеет место следующее выражение:

$$h_1 = \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} - \frac{v_1^2}{2}. \quad (3.22)$$

Оно получается следующим образом.

Уравнение энергии записывается в виде: $h + \frac{v^2}{2} = const$, где $h = C_p T = \frac{C_p k R T}{k R} = \frac{C_p}{k R} a^2 = \frac{C_v}{R} a^2 = \frac{a^2}{k-1}$, так как $\frac{C_v}{R} = \frac{C_v}{C_p - C_v} = \frac{1}{k-1}$.

Тогда уравнение энергии будет иметь вид: $\frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = const$.

Константу найдем из условия $a = a^*$ при $v = a^*$ для критического течения, тогда $const = \frac{a^{*2}}{k-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2}$.

Подставляя в уравнение энергии, получим:

$$h + \frac{v^2}{2} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2}.$$

Отсюда энтальпия потока $h_1 = \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} - \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1}$, т.к.

$$a_1^2 = k \frac{p_1}{\rho_1}.$$

За скачком уплотнения имеем:

$$h_2 = \frac{a_2^2}{k-1} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} - \frac{v_2^2}{2}. \quad (3.23)$$

Выразив из уравнений (3.22) и (3.23) отношения p_1/ρ_1 и p_2/ρ_2 и подставив их в уравнение количества движения $\frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1} = v_1 - v_2$, получим после преобразований:

$$\frac{k+1}{2k} (v_1 - v_2) \left(1 - \frac{a^{*2}}{v_1 v_2} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Продемонстрируем этот вывод:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} a^{*2} - \frac{k-1}{2k} v_1^2;$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} a^{*2} - \frac{k-1}{2k} v_2^2.$$

Подставив в уравнение количества движения, получим:

$$\frac{k+1}{2k} \frac{a^{*2}}{v_2} - \frac{k-1}{2k} v_2 - \frac{k+1}{2k} \frac{a^{*2}}{v_1} + \frac{k-1}{2k} v_1 = v_1 - v_2.$$

Перенесем все члены в правую часть уравнения и сгруппируем:

$$\frac{k+1}{2k} (v_1 - v_2) + \frac{k+1}{2k} \left(\frac{a^{*2}}{v_1} - \frac{a^{*2}}{v_2} \right) = 0,$$

тогда

$$\frac{k+1}{2k} (v_1 - v_2) - \frac{k+1}{2k} \frac{a^{*2} (v_1 - v_2)}{v_1 v_2} = 0,$$

и окончательно $\frac{k+1}{2k} (v_1 - v_2) \left(1 - \frac{a^{*2}}{v_1 v_2} \right) = 0$.

Так как $v_1 > v_2$, т.е. скорость перед скачком намного больше скорости после скачка, то $\frac{k+1}{2k}(v_1 - v_2) > 0$ и приходим к следующему уравнению:

$$1 - \frac{a^{*2}}{v_1 v_2} = 0 \text{ или } v_1 v_2 = a^{*2}. \quad (3.25)$$

Это и есть уравнение Прандтля. Оно указывает на то, что если до скачка $v_1 > a^*$, то после скачка $v_2 < a^*$ (меньше критической скорости),

При прямом скачке уплотнения обязателен переход от сверхзвукового течения к дозвуковому, что сопровождается максимальным ростом энтропии.

При косом скачке уплотнения сверхзвуковое обтекание может остаться тоже сверхзвуковым, но меньшей интенсивности.

Уравнение Прандтля при помощи скоростного коэффициента Чаплыгина можно записать следующим образом:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \text{ где } \lambda_1 = \frac{v_1}{a^*}; \lambda_2 = \frac{v_2}{a^*}, \quad (3.26)$$

а так как $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2}}$, то уравнение Прандтля можно получить

и в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{M_2}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}} = 1. \quad (3.27)$$

Отсюда

$$M_2 = \sqrt{\frac{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M_1^2}}{k - \frac{k-1}{2} \frac{1}{M_1^2}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}}. \quad (3.28)$$

На этом соотношении можно построить аналог сверхзвуковой трубы. Если скорость набегающего потока на тело $M_1 \rightarrow \infty$, то

$$M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{k-1}{2k}} = 0.378.$$

Следовательно, если создать аэрогазодинамическую трубу со скоростью $M=0.4 \approx 120$ м/с, то смоделируем сверхзвуковую трубу для исследования течения газа за прямым скачком уплотнения.

Теперь ответим на вопрос: какие параметры потока остаются постоянными при прохождении через прямой скачок уплотнения?

Из уравнения энергии: $C_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_{1,0}$, $C_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_{2,0}$, где $C_p T_1$ – энтальпия набегающего потока; $C_p T_2$ – энтальпия после скачка уплотнения; $h_{1,0}$ и $h_{2,0}$ – полные энтальпии. Согласно закону сохранения энергии $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$ или $T_{1,0} = T_{2,0} = T_0$ (если $C_p = const$). Тогда $a_{1,0} = a_{2,0} = a_0$; $T_1^* = T_2^* = T^*$, и, следовательно, $a_1^* = a_2^* = a^*$.

Итак, при прохождении через прямой скачок уплотнения энтальпия и температура адиабатно заторможенного потока сохраняют постоянную величину. Также сохраняют постоянную величину скорости звука, критические скорости до и после прямого скачка уплотнения. Кроме того, согласно формуле Клапейрона: $\frac{p_{2,0}}{\rho_{2,0}} = \frac{p_{1,0}}{\rho_{1,0}}$ или $\frac{p_2^*}{\rho_2^*} = \frac{p_1^*}{\rho_1^*}$.

3.4. Изменение параметров газа при прямом скачке уплотнения

За относительное изменение параметров при прямом скачке уплотнения принимается:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_1}; \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1}; \quad \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_1}.$$

Все эти величины легко находятся при использовании полученных интегралов для нашей задачи.

1) Действительно, из закона сохранения полного импульса:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2}{p_1} = \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} \right).$$

Из уравнения сохранения масс: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, тогда $\frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} = \frac{v_2}{v_1}$ и, следовательно:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right) = \frac{k \rho_1 v_1^2}{k p_1} \left(1 - \frac{v_1 v_2}{v_1^2} \right). \quad (3.29)$$

Так как из формулы Прандтля $v_1 v_2 = a^{*2}$, то $\frac{v_1 v_2}{v_1^2} = \frac{(a^*)^2}{v_1^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}$.

Поскольку $\frac{kp_1}{\rho_1} = a_1^2$, то $v_1^2 / a_1^2 = M_1^2$, и тогда

$$\frac{\Delta p}{p_1} = kM_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right). \quad (3.30)$$

Применяя формулы перехода от λ_1 к M_1 и наоборот, т.е.:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}}, \quad M_1 = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}},$$

получим искомые соотношения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\Delta p}{p_1} &= \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \\ \text{б) } \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{\Delta p}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\text{в) } \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1);$$

$$\text{г) } \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1).$$

$$2) \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1.$$

Применяя к этому уравнению уравнение неразрывности $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$,

$$\text{получим: } \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} - 1 = \frac{v_1^2}{v_1 v_2} - 1 = \frac{v_1^2}{a^{*2}} - 1 = \lambda_1^2 - 1.$$

$$\text{Тогда } \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \lambda_1^2; \text{ или}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}. \quad (3.32)$$

$$3) \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_1}.$$

Из закона сохранения полной энтальпии $h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$, получим:

$$h_2 - h_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \quad \text{и} \quad h_1 = C_p T_1.$$

Тогда

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2C_p T_1} = \frac{v_1^2}{2C_p T_1} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right). \quad (3.33)$$

Умножим и разделим член перед скобкой уравнения (3.33) на kR , а член $\frac{v_2^2}{v_1^2}$ на v_1^2 ; $\frac{v_2^2}{v_1^2} \frac{v_1^2}{v_1^2} = \frac{a^{*2}}{v_1^4} = \frac{1}{\lambda_1^4}$.

Тогда

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{v_1^2 k R}{2C_p k \frac{p_1}{\rho_1}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right) = \frac{v_1^2}{2a_1^2} \cdot \frac{k(C_p - C_v)}{C_p} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right) = \frac{k-1}{2} M_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right), \quad (3.34)$$

т.к. $\frac{(C_p - C_v)}{C_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$.

Если взять $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}}$, то можно после преобразований

написать это выражение через M_1 :

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2(k-1)}{(k-1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2). \quad (3.35)$$

Если взять выражение $M_1 = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}}$, то

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{(k-1)}{(k+1)} \frac{\lambda_1^4 - 1}{\lambda_1^2 \left(1 - \frac{(k-1)}{(k+1)} \lambda_1^2\right)}. \quad (3.36)$$

И наконец, $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\Delta T}{T_1}$, т.е. температура T_2 за скачком уплотнения всегда больше температуры T_1 до прямого скачка уплотнения (за счет необратимого превращения механической энергии в тепловую).

Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(k-1)}{(k-1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2) \quad (3.37)$$

или

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{(k-1)}{(k+1)} \frac{\lambda_1^4 - 1}{\lambda_1^2 \left(1 - \frac{(k-1)}{(k+1)} \lambda_1^2 \right)}. \quad (3.38)$$

Теперь идем далее. Чтобы оценить потери механической энергии движущегося газа при прохождении им прямого скачка уплотнения, условимся характеризовать механическую энергию полным давлением P_0 , т.е. давлением в адиабатно и изоэнтропически заторможенном газе (или, другими словами, в заторможенном газе при обратимом адиабатном процессе). При этом за количественную характеристику необратимости процесса прохождения газа через прямой скачок уплотнения принимают коэффициент χ . Под ним понимается величина отношения полного давления $P_{2,0}$ за скачком уплотнения к давлению $P_{1,0}$ до скачка: $\chi = P_{2,0} / P_{1,0}$, т.е. χ – коэффициент восстановления давления при прохождении через прямой скачок уплотнения.

Как правило, за скачком уплотнения статическое давление P_2 намного выше, чем перед скачком P_1 (в этом проявляется разрушительная сила ударной волны), а M_2 значительно меньше M_1 .

С учетом изоэнтропийных соотношений коэффициент χ равен:

$$\chi = \frac{P_{2,0}}{P_{1,0}} = \frac{P_2 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{P_1 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}. \quad (3.39)$$

Для использования этого выражения учтем, что

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{\Delta P}{P_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1).$$

Тогда можно получить выражение для χ через M_1 . Следует обратить внимание на следующий факт: коэффициент $\chi = P_{2,0}/P_{1,0}$ восстановления давления при прохождении сверхзвукового потока через прямой скачок уплотнения всегда меньше единицы. Причина этого явления, как было отмечено, состоит в том, что в скачке уплотнения имеет место необратимое превращение механической энергии в тепловую, вследствие чего механическая энергия становится меньше. Причем, чем больше скорость сверхзвукового потока M_1 , тем больше потери механической энергии. На рис. 29 представлен график изменения $\chi = P_{2,0}/P_{1,0}$, для воздуха ($\kappa = 1,4$). Здесь же приведен график сжатия воздуха P_2/P_1 в скачке. Как видно из графика, чем больше величины M_1 или P_2/P_1 , характеризующие интенсивность прямого скачка уплотнения, тем относительно меньшее давление $P_{2,0}$ можно получить за счет последующего торможения газа, прошедшего через скачок уплотнения.

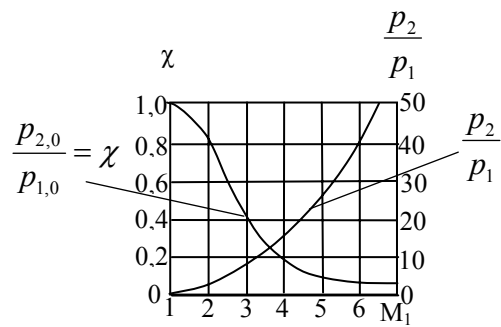


Рис.29

При больших M_1 приближенная (более простая) формула для χ имеет вид:

$$\chi = \frac{P_{2,0}}{P_{1,0}} \approx \left[\frac{(\kappa + 1)^{\kappa+1}}{2\kappa(\kappa - 1)^\kappa} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} M_1^{-\frac{2}{\kappa-1}}. \quad (3.40)$$

Для воздуха ($\kappa = 1,4$) при больших числах M рассматриваемое отношение полных давлений за и перед прямым скачком уплотнения обратно пропорционально числу M_1 в пятой степени, т.е. $\chi \approx 360M_1^{-5}$. Это говорит о весьма значительных потерях механической энергии при прохождении газа через прямые скачки уплотнения большой интенсивности. Отметим, что в соответствии с формулой Клапейрона: $\frac{P_{2,0}}{P_{1,0}} = \frac{\rho_{2,0}}{\rho_{1,0}}$ и, следовательно,

$\chi = \frac{\rho_{2,0}}{\rho_{1,0}}$, т.е. χ определяет и отношение плотностей заторможенного газа

за и перед скачком уплотнения.

Как известно, при наличии необратимых потерь в адиабатической системе возрастает ее энтропия. Для определения этого возрастания воспользуемся следующей формулой:

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1^k}{\rho_2^k} \right]. \quad (3.41)$$

Применим это равенство к параметрам адиабатично и изоэнтروпийно заторможенного газа, что допустимо, т.к. изоэнтропийное торможение не влияет на приращение энтропии.

Тогда получим:

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p_{2,0}}{p_{1,0}} \frac{\rho_{1,0}^k}{\rho_{2,0}^k} \right]. \quad (3.42)$$

Но из формулы Клапейрона

$$\frac{\rho_{1,0}}{\rho_{2,0}} = \frac{p_{1,0}}{p_{2,0}}, \quad (3.43)$$

тогда

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{1}{k-1} \ln \left(\frac{p_{2,0}}{p_{1,0}} \right)^{1-k} = -\ln \left(\frac{p_{2,0}}{p_{1,0}} \right) = -\ln \chi. \quad (3.44)$$

Эта формула выражает асимптотический закон роста энтропии при прохождении газа через скачки большой интенсивности. При сравнительно малой интенсивности скачков уплотнения, т.е. при числе Маха, близком к единице, будет наблюдаться слабое изменение энтропии, т.е. околосвуковые явления можно с достаточной степенью приближения рассматривать как изоэнтропийные.

Если рассмотреть ударную адиабату Гюгонио (рис. 28), то видно, что при отношении плотностей за скачком уплотнения и до него, равном $\frac{\kappa+1}{\kappa-1}$, давление за скачком становится бесконечно большим. Этот факт соответствует спутному движению за ударной волной (очень четко проявляется при ядерном взрыве).

Приведем пример применения полученных соотношений. При обтекании тупого тела косой скачок имеет вид (см. рис. 30) отсоединенной головной волны. Заменим в районе т. А косой скачок на прямой (более опасный) и воспользуемся теорией прямого скачка уплотнения. Рассмотрим

давление в критической точке за прямым скачком уплотнения. Создадим необходимые расчетные соотношения: $\frac{p_{2,0}}{p_1} = \frac{p_{2,0}}{p_2} \frac{p_2}{p_1}$.

$$\frac{p_{2,0}}{p_2} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

– из изэнтропических соотношений, а для прямого скачка уплотнения: $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1)$. Решая совместно оба уравнения, определим $p_{2,0}$ после прохождения прямого скачка уплотнения. Это давление может быть очень большим, и на него надо рассчитывать конструкцию. (Современные ракеты делаются не остроносими, а тупыми, чтобы увеличить поверхность теплообмена с окружающей средой).

3.5. Скорости распространения ударной волны и спутного потока за нею

Ударная волна увлекает за собой большое количество воздушных потоков (спутных потоков), движущихся примерно с теми же скоростями, т.е. параметры спутных потоков приближаются к параметрам ударной волны.

Найдем скорость спутного потока. Определим скорость N распространения ударной волны по отношению к невозмущенному потоку газа и скорость v движения спутного потока за ударной волной:

$$N = v_1, \quad v = N - v_2 = v_1 - v_2. \quad (3.45)$$

За меру интенсивности ударной волны можно принять число M_1 :

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{N}{a_1}. \quad (3.46)$$

Для расчета воспользуемся ранее полученным соотношением

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1),$$

откуда

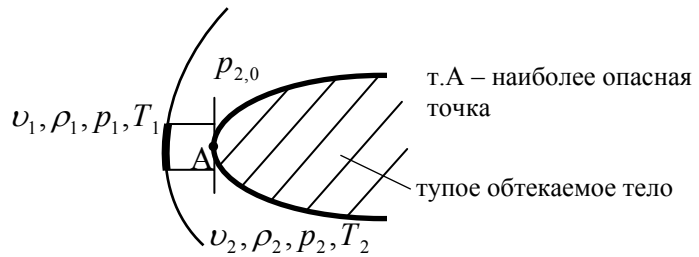


Рис.30

$$M_1 = \sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{p_2}{p_1}}.$$

Тогда скорость распространения ударной волны:

$$N = M_1 \cdot a_1 = a_1 \sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{p_2}{p_1}}. \quad (3.47)$$

Из этой формулы вытекают два важных следствия:

1) скорость распространения ударной волны по отношению к невозмущенному газу всегда больше скорости звука в невозмущенном газе;

2) звуковую волну можно рассматривать как ударную волну очень малой интенсивности.

Действительно, при уменьшении интенсивности ударной волны скорость ее распространения стремится к скорости звука в невозмущенном газе: при $M_1 = 1 \rightarrow N = a_1$, и $p_2 = p_1$.

Определим v скорость спутного потока за ударной волной:

$$v = N - v_2 = v_1 - v_2. \quad (3.48)$$

Определим v_2 из формулы Прандтля: $v_1 v_2 = a^{*2}$: $v_2 = \frac{a^{*2}}{v_1}$ и тогда

$$v = v_1 - \frac{a^{*2}}{v_1}. \quad (3.49)$$

Произведя замену $a^{*2} = \frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) a_1^2$, будем иметь после простых преобразований:

$$v = \frac{2}{k+1} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right) a_1. \quad (3.50)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} v &= v_1 - \frac{2a_1^2}{v_1(k+1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) = v_1 \frac{a_1}{a_1} - \frac{2}{k+1} \frac{a_1}{M_1} - \frac{k-1}{k+1} M_1 a_1 = \\ &= M_1 a_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right) - \frac{2}{k+1} \cdot \frac{a_1}{M_1} = \frac{2}{k+1} M_1 a_1 - \frac{2}{k+1} \cdot \frac{a_1}{M_1} = \frac{2}{k+1} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right) a_1. \end{aligned}$$

При больших значениях M_1 можно пользоваться приближенной асимптотической формулой:

$$v \approx \frac{2}{k+1} M_1 a_1 = \frac{2v_1}{k+1} = \frac{2N}{k+1}. \quad (3.51)$$

Из этого соотношения видно, что при больших значениях M_1 набегающего потока (очень больших интенсивностях ударной волны) спутный поток имеет скорость меньшую, чем скорость распространения самой ударной волны, но довольно близкую к ней (другими словами, скорость спутного потока за ударной волной ненамного меньше скорости распространения ударной волны).

Учитывая соотношение $v = v_1 - v_2$, где v_1 – скорость сверхзвукового потока перед скачком уплотнения, а v_2 – скорость потока за прямым скачком уплотнения, можно сказать, что за скачком уплотнения скорость потока v_2 намного меньше скорости v_1 до прямого скачка уплотнения.

3.6. Сверхзвуковое течение газа внутри тупого угла

Элементарную теорию косоугольного скачка уплотнения можно рассматривать на примере течения газового потока внутри тупого угла. При течении внутри тупого угла сверхзвукового потока газа со скоростью v_1 создается косоугольный скачок уплотнения, который образует с горизонтальной осью угол β (рис. 31). Надо отметить, что если при прямом скачке уплотнения согласно теореме Прандтля сверхзвуковое течение после скачка уплотнения непременно становится дозвуковым, то при прохождении потока через косоугольный скачок уплотнения сверхзвуковая скорость может сохраниться и за скачком уплотнения.

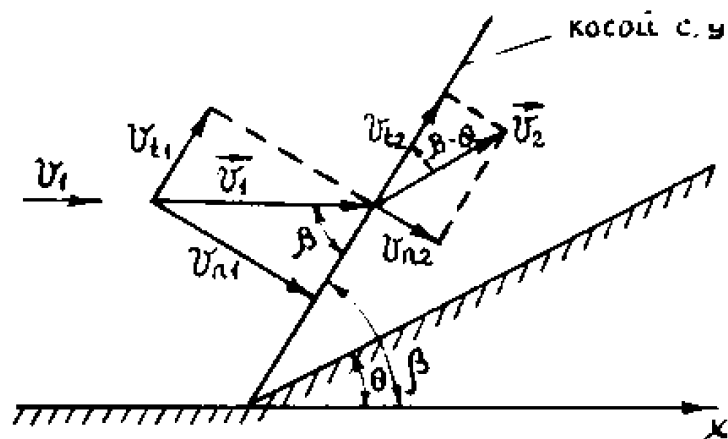


Рис. 31

Разложим вектор скорости \vec{v}_1 на две составляющие: нормальную v_{1n} (перпендикулярную линии скачка уплотнения) и касательную v_{1t} (параллельную линии скачка уплотнения). При прохождении потока через косой скачок уплотнения вектор скорости \vec{v}_2 потока имеет направление, параллельное ограничивающей поверхности. Разложим вектор скорости \vec{v}_2 также на две составляющие: v_{2n} и v_{2t} (см. рис. 31).

При исследовании косого скачка уплотнения будем использовать следующие интегральные соотношения:

1) уравнение неразрывности (закон сохранения массы), записанное для нормальных составляющих скоростей, полученных при косом скачке уплотнения:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}; \quad (3.52)$$

2) закон сохранения полного импульса в проекции на линию разрыва (импульса, связанного с касательной скоростью, которая направлена по косому скачку уплотнения):

$$\rho_1 v_{1n} v_{1t} = \rho_2 v_{2n} v_{2t}; \quad (3.53)$$

То же в проекции на нормаль к линии разрыва (или теорема об изменении импульсов для нормальных составляющих скоростей):

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2; \quad (3.54)$$

3) уравнение энергии (закон сохранения полной энтальпии):

$$h_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} + \frac{v_{1t}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{2n}^2}{2} + \frac{v_{2t}^2}{2}. \quad (3.55)$$

Из уравнения (3.52) с учетом (3.53) следует, что:

$$v_{1t} = v_{2t} = v_t. \quad (3.56)$$

Это равенство указывает на то, что касательные составляющие скоростей до и после косого скачка уплотнения одинаковы. Иными словами, косой скачок уплотнения не вызывает изменения характера течения касательных скоростей до и после скачка уплотнения.

Тогда система уравнений (интегральных соотношений) будет иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}; \\ 2) \quad p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2; \\ 3) \quad h_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{2n}^2}{2}. \end{array} \right\}$$

Видно, что полученная система уравнений для косо́го скачка уплотнения отличается от системы уравнений, характеризующих прямой скачок уплотнения. Система уравнений для косо́го скачка уплотнения получается из системы уравнений для прямо́го скачка уплотнения заменой векторов скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 на их нормальные составляющие v_{1n} и v_{2n} . Следовательно, все, что было сказано относительно прямо́го скачка уплотнения, сохраняет свой смысл и для косо́го скачка уплотнения, если во всех соотношениях, полученных для прямо́го скачка уплотнения, заменить векторы скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 на их нормальные составляющие.

Тогда уравнение Прандтля для косо́го скачка уплотнения будет выглядеть следующим образом:

$$v_{1n}v_{2n} = \bar{a}^{*2}, \quad (3.57)$$

где

$$\bar{a}^{*2} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1}v_i^2. \quad (3.58)$$

Это значение для \bar{a}^{*2} получается из рассмотрения уравнения интеграла энергии в следующем виде: $h + \frac{v^2}{2} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}$.

Для нашего случая:

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_i^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}. \quad (3.59)$$

Отсюда следует:

$$\frac{v_n^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}\left(a^{*2} - \frac{k-1}{k+1}v_i^2\right). \quad (3.60)$$

При наличии косо́го скачка уплотнения критическая скорость \bar{a}^{*2} оказывается несколько меньшей, чем при прямо́м скачке уплотнения (a^{*2}).

Теорему Прандтля можно также записать в виде:

$$\bar{\lambda}_{1n}\bar{\lambda}_{2n} = 1, \quad (3.61)$$

где

$$\bar{\lambda}_{1n} = \frac{v_{1n}}{\bar{a}^*}, \quad \bar{\lambda}_{2n} = \frac{v_{2n}}{\bar{a}^*}. \quad (3.62)$$

Относительное изменение характерных параметров при косом скачке уплотнения можно получить из аналогичных соотношений для прямого скачка уплотнения, если вместо векторов скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 в выражениях для M и λ поставить их нормальные компоненты:

1) Например

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_{1n}^2 - 1), \quad (3.63)$$

где $M_{1n} = \frac{v_{1n}}{a_1}$. Из треугольника скоростей $v_{1n} = v_1 \sin \beta$, тогда

$M_{1n} = \frac{v_1 \sin \beta}{a_1} = M_1 \sin \beta$, и окончательно:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 \sin^2 \beta - 1). \quad (3.64)$$

Это же выражение через λ_1 выглядит следующим образом:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{\bar{\lambda}_{1n}^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \bar{\lambda}_{1n}^2}. \quad (3.65)$$

Из треугольника скоростей: $v_{1t} = v_1 \cos \beta$, тогда с учетом (3.58):

$$\bar{a}^{*2} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2 \beta.$$

Из уравнения (3.62):

$$\bar{\lambda}_{1n}^2 = \frac{v_1^2 \sin^2 \beta}{a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2 \beta} = \frac{\lambda_1^2 \sin^2 \beta}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta} = \frac{\lambda_1^2 (1 - \cos^2 \beta)}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta}. \quad (3.66)$$

Следовательно, с учетом формул (3.65) и (3.66) имеем:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{[(\lambda_1^2 - \lambda_1^2 \cos^2 \beta) / (1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta)] - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_1^2 \cos^2 \beta)}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta}} =$$

$$= 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1^2 \cos^2 \beta - 1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 + \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{(\lambda_1^2 - 1) - \frac{2}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (3.67)$$

2) Аналогично:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta} = \frac{\frac{k+1}{2} M_{1n}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_{1n}^2} \quad (3.68)$$

или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \bar{\lambda}_{1n}^2 = \frac{\lambda_1^2 (1 - \cos^2 \beta)}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta}. \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{T_2}{T_1} &= 1 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)(1 - k M_1^2 \sin^2 \beta) = \\ &= 1 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_{1n}^2} (M_{1n}^2 - 1)(1 - k M_{1n}^2). \end{aligned} \quad (3.70)$$

И, наконец, останутся теми же самыми, что и для прямого скачка уплотнения, выражения: $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$; $T_{1,0} = T_{2,0} = T_0$; $a_{1,0} = a_{2,0} = a_0$, $T_1^* = T_2^* = T^*$ и $a_1^* = a_2^* = a^*$.

Останется той же и ударная адиабата Гюгонио.

3.7. Ударная поляра

Из треугольников скоростей перед и за косым скачком уплотнения (рис. 31) следует: $v_{1n} = v_1 \sin \beta$; $v_{2n} = v_2 \sin(\beta - \theta)$, где θ – половинный угол клина, он же – угол отклонения потока за скачком; β – угол, образованный линией косога скачка уплотнения с направлением набегающего потока (вектора скорости \vec{v}_1) $v_{1t} = v_{2t} = v_1 \cos \beta = v_2 \cos(\beta - \theta) = v_t$.

Для проекций скоростей на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем:

$$v_{1x} = v_1, v_{1y} = 0; \quad v_{2x} = v_2 \cos \theta, \quad v_{2y} = v_2 \sin \theta.$$

Еще:

$$v_{1n} = v_{1x} \sin \beta, \quad v_{2n} = v_{2x} \sin \beta - v_{2y} \cos \beta,$$

$$v_{1t} = v_{2t} = v_t = v_{1x} \cos \beta = v_{2x} \cos \beta + v_{2y} \sin \beta = v_1 \cos \beta.$$

Из последнего соотношения находим: $v_{2y} \sin \beta = (v_1 - v_{2x}) \cos \beta \Rightarrow$

$$\text{а) } \sin \beta = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y} / \cos \beta} = \frac{v_1 - v_{2x}}{N};$$

$$\text{б) } \cos \beta = \frac{v_{2y}}{N}.$$

С учетом предыдущих соотношений: $N = \sqrt{(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2}.$

Эти соотношения позволяют найти выражение касательных и нормальных компонент векторов скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 через их декартовы проекции:

$$v_t = v_1 \cos \beta \rightarrow v_t = \frac{v_1 v_{2y}}{N};$$

$$v_{1n} = v_1 \sin \beta \rightarrow v_{1n} = \frac{v_1}{N} (v_1 - v_{2x});$$

$$v_{2n} = v_{2x} \sin \beta - v_{2y} \cos \beta \rightarrow v_{2n} = \frac{1}{N} [v_{2x} (v_1 - v_{2x}) - v_{2y}^2].$$

Используем формулу Прандтля для косоугольного скачка уплотнения в виде:

$$v_{1n} v_{2n} = \bar{a}^{*2}.$$

Подставим туда выражения для v_{1n} и v_{2n} через декартовы проекции векторов скоростей и после преобразований получим:

$$v_{2y}^2 = \frac{(v_1 - v_{2x})^2 (v_1 v_{2x} - a^{*2})}{a^{*2} + \frac{2}{k+1} v_1^2 - v_1 v_{2x}}. \quad (3.71)$$

Деля обе части этого равенства на a^{*2} или на a_1^2 , перепишем его в следующих видах:

$$\left(\frac{v_{2y}}{a^*}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - \frac{v_{2x}}{a^*})^2 (\lambda_1 \frac{v_{2x}}{a^*} - 1)}{1 + \frac{2}{k+1} \lambda_1^2 - \lambda_1 \frac{v_{2x}}{a^*}}; \quad (3.72)$$

$$\left(\frac{v_{2y}}{a_1}\right)^2 = \frac{\left(M_1 - \frac{v_{2x}}{a_1}\right)^2 \left[M_1 \frac{v_{2x}}{a_1} - \left(\frac{a^*}{a_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{a^*}{a_1}\right)^2 + \frac{2}{k+1} M_1^2 - M_1 \frac{v_{2x}}{a_1}}. \quad (3.73)$$

Эти соотношения представляют собой уравнения семейства кривых соответственно в плоскостях $(v_{2x}/a^*; v_{2y}/a^*)$ или $(v_{2x}/a_1; v_{2y}/a_1)$ с параметрами λ_1 и M_1 . Полученные семейства представляют собой геометрические места точек концов вектора скорости \vec{v}_2 за косым скачком уплотнения, отнесенного в первом случае к a^* и во втором – к a_1 , причем в качестве параметров семейств используется величина скорости \vec{v}_1 до скачка, отнесенная к a^* или a_1 . Кривые этих семейств представляют собой строфоиды (их еще называют гипоциклоидами или декартовыми листами).

На рис. 32 в размерных координатах $(v_{2x}; v_{2y})$ показана одна из таких строфоид. Она имеет асимптоту, определяемую следующим выражением:

$$v_{2x} = \frac{2}{k+1} v_1 + \frac{a^{*2}}{v_1} \quad (3.74)$$

Вертикальная составляющая скорости v_{2y} обращается в нуль ($v_{2y}=0$) в двух случаях:

1) в точке B , в которой $v_{2x} = v_1 = v$.

При этом величина и направление скорости не меняются, т.е. скачок уплотнения вырождается в слабую волну возмущения.

2) в точке A , в которой $v_{2x} = v_2 = a^{*2}/v_1$ или $v_1 v_2 = a^{*2}$ (уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения).

В этом случае скорость v_2 имеет минимальное значение при

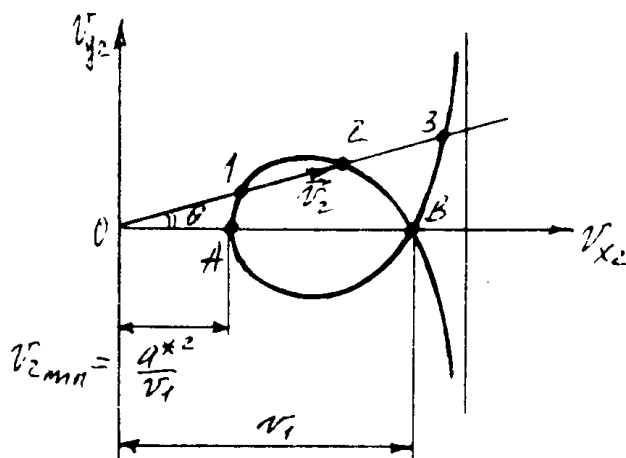


Рис. 32

заданной сверхзвуковой скорости v_1 , следовательно, скачок уплотнения имеет в точке A наибольшую интенсивность.

Луч, проведенный из начала координат под углом θ , равным повороту потока (или углу полураствора клина), пересекает строфоиду в трех точках $1, 2, 3$ и, таким образом, определяет три значения вектора скорости \vec{v}_2 за косым скачком уплотнения. Какие же из этих трех точек имеют физический смысл?

Поскольку скорость в точке 3 больше скорости в точке B (см. рис. 32), т.е. скорость v_2 в этой точке больше v_1 , что является невозможным, поскольку за косым скачком уплотнения происходит торможение потока (наличие скорости $v_2 > v_1$ свидетельствует о существовании скачка разрежения, что в термодинамическом отношении не имеет места, поскольку при этом происходит уменьшение энтропии, а это невозможно). Поэтому точка 3 и вообще обе бесконечные ветви строфоиды, расположенные вправо от точки B и уходящие к асимптоте, являются нерабочими. Следовательно, рабочими точками, имеющими физический смысл, могут быть только точки 1 и 2 .

При определенных углах обтекания клина или сверхзвукового течения внутри тупого угла за косыми скачками уплотнения может наблюдаться и сверхзвуковое течение, следовательно, интенсивность косого скачка уплотнения всегда меньше прямого скачка уплотнения, поскольку после прямого скачка уплотнения скорость потока всегда дозвуковая.

Так как точка 3 противоречит второму закону термодинамики (не реализуется), то ударную поляру часто изображают так (см. рис. 33):

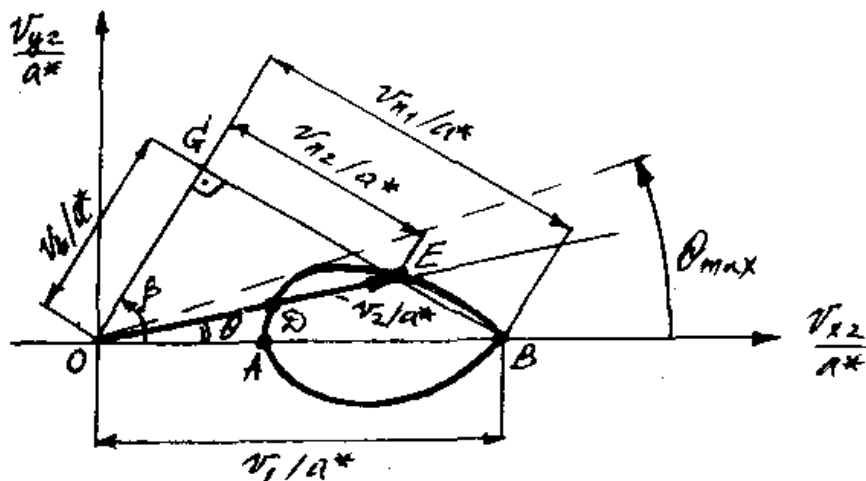


Рис. 33

Такая диаграмма в координатах $(v_{2x}/a^*; v_{2y}/a^*)$ позволяет весьма просто найти все основные величины: v_b , v_{1n} , v_{2n} и угол β , характеризующий косой

скачок уплотнения. Для этого из начала координат (см. рис. 34) под углом θ (угол полураствора клина, или угол отклонения потока за скачком уплотнения) проводят прямую линию до пересечения с полярной (например, точка E). Затем из точки B через точку E проводят прямую линию и к ней из начала координат восстанавливают перпендикуляр (линия OG). Тогда угол $GOB = \beta$, а отрезок OG представляет собой касательную составляющую v_t скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 (т.к. $v_t = v_1 \cos \beta$ или $OG = OB \cos \beta$), деленную на a^* . Отрезок GE представляет собой нормальную составляющую v_{2n} скорости \vec{v}_2 ($v_{2n} = v_2 \sin(\beta - \theta)$ или $GE = OE \sin(\beta - \theta)$), деленную на a^* . Отрезок BG представляет собой нормальную составляющую v_{1n} скорости \vec{v}_1 ($v_{1n} = v_1 \sin \beta$ или $BG = OB \sin \beta$), деленную на a^* . Аналогично можно найти параметры потока по этой диаграмме и для точки D , также характеризующей отношение v_2/a^* , но для другого возможного направления косога скачка уплотнения β' (причем $\beta' > \beta$). Поскольку в точке D скорость \vec{v}_2 меньше скорости \vec{v}_2 в точке E (при одной и той же скорости \vec{v}_1), то, следовательно, точке D соответствует косога скачок бóльшей интенсивности, или по-другому, бóльшим углам соответствуют косога скачки уплотнения бóльшей интенсивности.

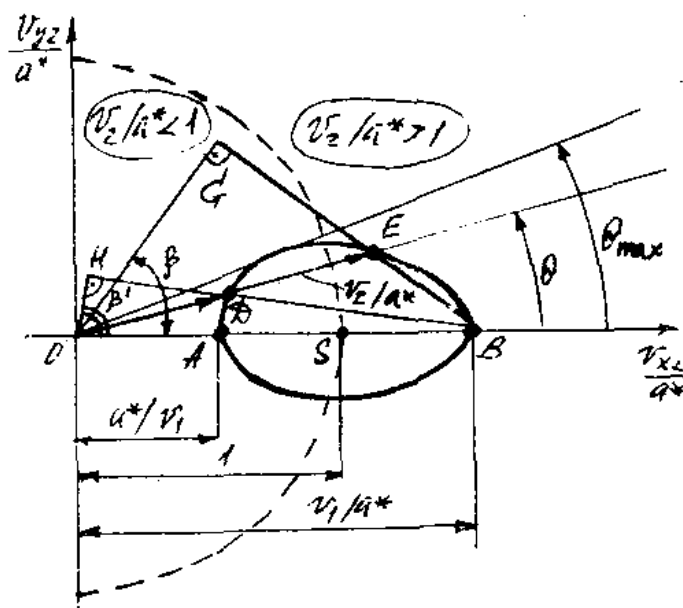


Рис. 34.

По условию, набегающий поток является сверхзвуковым, следовательно, отрезок $OB = v_1/a^* > 1$. С другой стороны, из уравнения (3.71) легко заключить, что точка A пересечения строфоиды с осью v_{2x}/a^* (т.е. при

$v_{2y}=0$) будет иметь абсциссу $OA = \frac{a^*}{v_1} < 1$ (т.к. $v_1 > a^*$, поток сверхзвуковой).

Отсюда следует, что на оси v_{2x}/a^* между точками A и B будет находиться точка S , соответствующая критической скорости, т.е. отрезок $OS=1$ (причем в этой точке выполняется условие инверсии $OA \cdot OB = OS^2$). Окружность радиуса $OS=1$ разграничивает области до- и сверхзвуковых течений ($v_2/a^* < 1$ и $v_2/a^* > 1$). Другими словами, окружность радиуса $OS=1$ очерчивает на строфоиде области, где скорости v_2 за косым скачком уплотнения могут быть дозвуковыми ($v_2/a^* < 1$) и сверхзвуковыми ($v_2/a^* > 1$). Отметим также, что существует такое значение угла $\theta = \theta_{max}$, при котором точки D и E сольются в одну, и ей будет отвечать лишь одно значение угла β и лишь одно расположение косого скачка уплотнения. Это будет предельный случай так называемого присоединенного скачка уплотнения (рис. 35а).

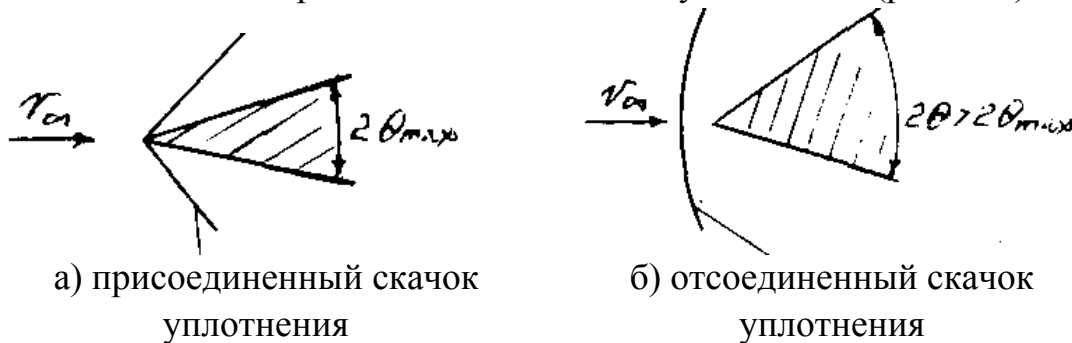


Рис. 35

Если же $\theta > \theta_{max}$, то образуется отсоединенный криволинейный скачок уплотнения (рис. 35б), расчет которого является более сложной задачей, чем было изложено выше. Элементарная теория косого скачка уплотнения действительна лишь при обтекании клина или течения внутри тупого угла до таких углов θ_{max} , при которых скачок уплотнения является присоединенным. Следовательно, нужно всегда сверять по ударной поляре заданный угол θ с углом θ_{max} , так как все приведенные соотношения справедливы лишь для углов $\theta < \theta_{max}$.

В инженерной практике избегают делать обводы тел, движущихся в потоке, с углами $\theta > \theta_{max}$ (этот случай бывает только для неудобно обтекаемых тел (рис.36), но такие контуры стараются не делать). Определим связь между углами β и θ при заданном числе M_1 набегающе-

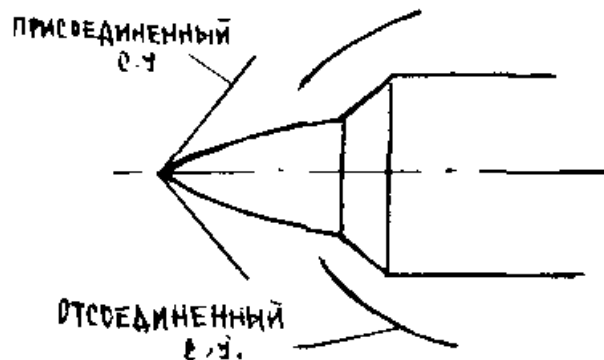


Рис.36

го потока. С этой целью воспользуемся соотношением Прандтля для косо-го скачка уплотнения: $v_{1n} v_{2n} = \bar{a}^{*2}$. Учитывая, что $v_{1n} = v_1 \sin \beta$, $v_{2n} = v_2 \sin(\beta - \theta)$ получим:

$$v_{1n} v_{2n} = v_1 \sin \beta \cdot v_2 \sin(\beta - \theta).$$

Поскольку

$$v_t = v_2 \cos(\beta - \theta) = v_1 \cos \beta,$$

то

$$v_2 = \frac{v_1 \cos \beta}{\cos(\beta - \theta)}.$$

Тогда:

$$v_{1n} v_{2n} = v_1^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \operatorname{tg}(\beta - \theta) = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2 \beta = \bar{a}^{*2}. \quad (3.75)$$

Из соотношения (3.75) получается зависимость между углами β , θ и скоростным коэффициентом λ_1 .

Разделим обе части этого равенства на a^{*2} :

$$\lambda_1^2 \sin \beta \cos \beta \cdot \operatorname{tg}(\beta - \theta) = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \beta,$$

$$\lambda_1^2 \cos^2 \beta \left(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg}(\beta - \theta) + \frac{k-1}{k+1} \right) = 1$$

и тогда

$$\cos^2 \beta \left(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg}(\beta - \theta) + \frac{k-1}{k+1} \right) = 1 / \lambda_1^2. \quad (3.76)$$

Заменяя в уравнении (3.76) λ_1 на число Маха M_1 по формуле:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{1}{M_1^2},$$

получим: $\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = -\frac{k-1 \cos^2 \beta}{k+1 \sin^2 \beta} + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta},$

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta},$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{(k-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(k+1)M_1^2 \sin^2 \beta} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{\frac{k+1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}. \quad (3.77)$$

Разрешая равенство (3.77) относительно $\operatorname{tg} \theta$, получим:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2}}{\frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta + \frac{1}{M_1^2}} \operatorname{ctg} \beta. \quad (3.78)$$

Как было ранее отмечено, каждому заданному значению $\theta < \theta_{max}$ соответствуют два значения β . Эта двужначность в определении угла наклона косого скачка уплотнения S по заданному значению θ соответствует сущности явления прохождения газа через косой скачек уплотнения, от давления за которым зависит режим течения. Как следует из формулы (3.64):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{k-1}{k+1}, \quad (3.7)$$

большому значению угла β отвечает и большее значение отношения p_2/p_1 давлений за и перед скачком. А поскольку, как уже говорилось, это отношение давлений служит мерой интенсивности (мощности) скачка, то большому значению угла β будет соответствовать более интенсивный скачок уплотнения. Скачок уплотнения, соответствующий большому значению β , называют сильным скачком уплотнения, а соответствующий меньшему значению β – слабым скачком уплотнения. Фронт сильного скачка уплотнения служит поверхностью (в плоском движении – линией) сильного изменения кинематических, газо- и термодинамических характеристик потока газа, фронт слабого скачка – поверхностью (линией) слабого изменения этих величин.

Оба типа изменений наблюдаются, например, в отсоединенных волнах (см. рис. 37) при $\theta > \theta_{max}$ (AC – отсоединенный скачок уплотнения). Выясним условия, при которых поток за косым скачком уплотнения будет до или сверхзвуковым. Для этого воспользуемся формулой (3.28) зависимости числа Маха M_2 за скачком от числа M_1 до скачка для прямого скачка уплотнения и произведем замену в этой формуле M_1 на $M_1 \sin \beta$ и M_2 на $M_2 \sin(\beta - \theta)$, справедливых для косого

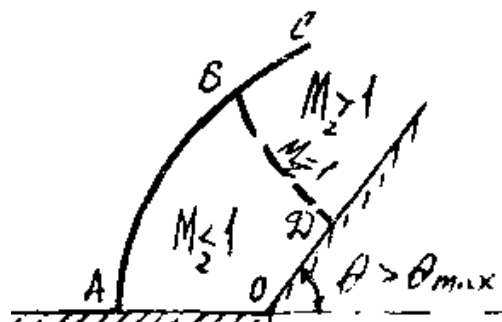


Рис. 37

скачка уплотнения. Тогда получаем искомую формулу связи:

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{k M_2^2 \sin^2(\beta) - \frac{k-1}{2}}. \quad (3.80)$$

Пользуясь этим выражением и соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin^2 \beta - 1/M_1^2}{\frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta + 1/M_1^2} \operatorname{ctg} \beta, \quad (3.81)$$

можно выразить число Маха за косым скачком уплотнения M_2 через число M_1 до скачка и угол β . При этом при одном и том же M_1 двум различным значениям β , соответствующим сильному и слабому скачкам, будут отвечать два отличных друг от друга значения M_2 , причем сильный скачок уплотнения, подобно прямому, переводит сверхзвуковой поток в дозвуковой, а слабый скачок почти всегда сохраняет поток сверхзвуковым.

Если $\theta > \theta_{max}$, то, как указывалось, наличие прямолинейного присоединенного к вершине угла (клина) θ косоугольного скачка уплотнения невозможно. Вверх по течению перед точкой θ возникает криволинейная «головная» ударная волна или отсоединенный скачок уплотнения AC (см. рис. 37). В непосредственной близости к точке A отсоединенный скачок AC ведет себя как прямой, а при удалении от точки A сначала как сильный косой скачок, а затем с уменьшением местного угла β постепенно ослабевает и переходит в прямолинейный косой скачок. При этом за отсоединенным скачком уплотнения имеет место как до-, так и сверхзвуковое течение газа. За участком AB образуется дозвуковая зона течения, за участком BC – сверхзвуковая. Эти две зоны потока за скачком разделяются линией BD , вдоль которой скорость газа равна местной скорости звука.

IV. ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

4.1. Физические процессы в газе при гиперзвуковых скоростях течения

Интерес к изучению гиперзвуковых течений газа, т.е. течений со скоростями, много превосходящими скорость звука, обусловлен прежде всего развитием авиационной, ракетной и космической техники.

Физико-химические процессы в газе, сопутствующие движению тел в атмосфере Земли или других планет с гиперзвуковыми скоростями, осложняют картину течения, и учитывать их в теоретических исследованиях и при решении практических задач становится все более необходимым. Поэтому нужны уравнения, описывающие поведение несовершенных газов при высоких температурах. Равновесные физико-химические процессы обычно не вносят в газодинамические задачи новых по сравнению с совершенным газом качественных эффектов физического и математического характера, а неравновесные течения (или течения релаксирующего газа) часто обладают определенной спецификой, описываются более сложной системой уравнений и требуют специальных исследований.

Однако, несмотря на все многообразие реальных эффектов, невязкие гиперзвуковые течения имеют ряд общих газодинамических свойств, что позволяет использовать при их исследовании единую методику или упрощенные схемы течения, лежащие в основе гиперзвуковой теории.

В методическом плане для гиперзвуковой теории характерен асимптотический анализ, т.е. исследование определенных предельных режимов течения (предельно большая скорость обтекания, предельно тонкие тела, предельно сильные ударные волны и др.), если они правильно отражают свойства течений в реальном диапазоне условий обтекания или форм тел. Проявление этих асимптотических свойств и определяет, как правило, весьма условную границу между гиперзвуковой и сверхзвуковой газовой динамикой.

При полетах в атмосфере Земли или других планет с гиперзвуковыми скоростями температура газа около тела может быть очень высокой, в чем легко убедиться из известной формулы для температуры в точке торможения в совершенном газе:

$$T_0 = T_\infty + \frac{v_\infty^2}{2C_p} = T_\infty \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right).$$

$$\text{Для холодного воздуха } C_p = 0,24 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}} \approx 1 \frac{\text{дж}}{\text{г} \cdot \text{К}} = 1000 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{град}}.$$

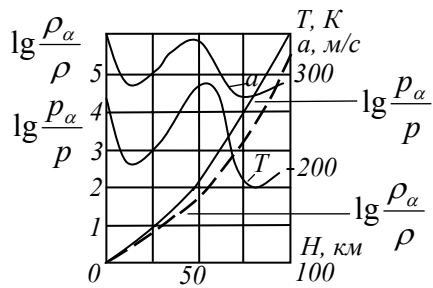


Рис.38

Для атмосферы Земли примерное распределение параметров по высоте H показано на рис. 38 (p_a, ρ_a – наземные давление и плотность).

Видно, что температура воздуха и скорость звука изменяются сравнительно слабо. Давление же и плотность быстро падают с увеличением высоты. Для покоящейся атмосферы

$dp = -\rho g dH$, где $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$. Отсюда для изотермической атмосферы (при постоянном отношении p/ρ) получим формулу

$$\frac{p}{p_a} = \frac{\rho}{\rho_a} = e^{-\beta H}, \text{ где } \beta = \frac{\rho g}{p}.$$

Для реальной атмосферы Земли эта формула правильно отражает порядок величин при $\beta = 0,142 \text{ км}^{-1}$.

Холодный воздух является в основном смесью двухатомных газов кислорода (21% от общего числа молекул) и азота (78%) с молекулярными весами, соответственно $\mu_{O_2} = 32$ и $\mu_{N_2} = 28$ с незначительной (1%) примесью аргона с $\mu_{Ar} = 40$.

При низких температурах $T \leq 500 \text{ К}$ (в аэродинамике умеренных сверхзвуковых скоростей) воздух можно считать совершенным двухатомным газом, т.е. газом с постоянным молекулярным весом $\mu = 29$, теплоемкостями и показателем адиабаты $k = 1,405$. С увеличением температуры в молекулах воздуха возбуждаются колебательные степени свободы, что приводит к увеличению теплоемкостей. При $T \geq 2000 \text{ К}$ молекулярный кислород начинает распадаться (диссоциировать) на атомарный, а при $T \geq 4000 \text{ К}$ начинает диссоциировать азот. С дальнейшим увеличением температуры торможения до $7000-10000 \text{ К}$ начинается процесс ионизации с образованием свободных электронов.

Существенным обстоятельством является большая энергоемкость указанных процессов. На рис. 39 показана доля кинетической энергии набегающего потока, затраченная на реализацию физико-химических процессов в точке торможения потока при обтекании тупого тела. Как видно, энергия колебаний молекул сравнительно невелика, но диссоциация и ионизация газа поглощают до 75% энергии потока.

Эти эффекты делают неприменимыми многие результаты газовой динамики совершенного газа. В сущности, применение модели совершенного

газа ограничено диапазоном небольших температур (соответствующих наземным полетным числам $M_\infty=3\dots5$) с постоянными теплоемкостями. Но этот предел может быть значительно расширен в зависимости от формы тела (например, для тел заостренной формы) и желаемой точности основных характеристик обтекания. В аэродинамических трубах с невысокими температурами торможения модель совершенного газа может быть пригодна и для достаточно больших чисел M_∞ .

При заданной скорости полета в зависимости от соотношения скоростей протекания физико-химических и газодинамических процессов могут реализоваться различные типы течений.

Если реакции идут значительно быстрее, чем меняется термодинамическое состояние частиц, то в каждой точке потока состав и вообще состояние газа можно считать равновесным, соответствующим бесконечно долгому пребыванию при местных температуре и давлении. Такие течения называют равновесными. В другом предельном случае физико-химические процессы не успевают даже начаться, как газовая частица уже покидает данную область течения, так что состав газа в ней остается неизменным. Такие течения называют замороженными. И, наконец, существует обширная промежуточная область неравновесных течений.

Скорость протекания физико-химических процессов, как правило, возрастает вместе с плотностью газа. Поэтому равновесные режимы течений имеют место при полетах на небольшой высоте (для тел нормальных размеров при $H \leq 30$ км), замороженные – на очень больших высотах $H \geq 80$ км. Примерное представление об областях течений дает рис. 40, построенный для лобовой части тупого тела размером 1 м. Необходимо отметить, что режим течения зависит от формы обтекаемого тела, так как она оказывает влияние на поле давлений, температур, скоростей.

Можно отметить еще два существенных физических эффекта. С увеличением температуры газ начинает излучать значительное количество энергии. При больших скоростях полета энергия, излученная газовой частицей

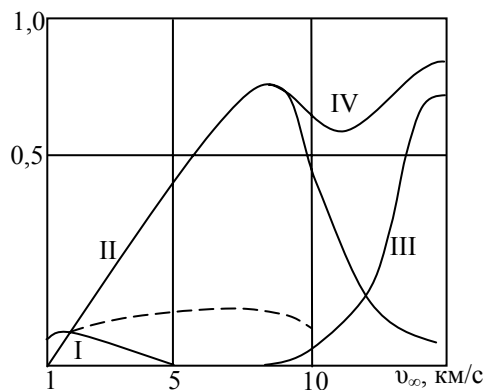


Рис. 39

Отношение удельных энергий колебаний (I), диссоциации (II), ионизации (III) и суммы последних (IV) к величине $\frac{1}{2} v_\infty^2$ для высоты полета 40 км, пунктир – относительная энергия колебаний при отсутствии диссоциации.

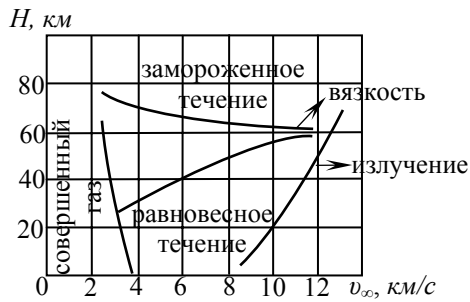


Рис. 40

Примерные границы влияния различных физических процессов для сферы радиусом 1 м при полете в атмосфере Земли

возникновения зон отрыва). Однако при больших высотах полета влияние вязкости может быть заметным во всей возмущенной области течения, и тогда теория невязкого течения становится неприменимой. Примерные области влияния излучения и вязкости на обтекание тел также показаны на рис. 40.

4.2. Гиперзвуковое обтекание тел

Рассмотрим случай обтекания тонкого профиля с очень большими числами Маха ($M \gg 1$), такое обтекание называют гиперзвуковым. В инженерной практике гиперзвуковым считают обтекание с $M > 7$. Будем продолжать считать газ однородным, отвлекаясь от тех сложных процессов, которые на самом деле возникают в гиперзвуковых потоках за счет высоких температур, образующих при торможении газа на поверхности тела и при прохождении сквозь поверхности сильных разрывов. В этих условиях возникают сложные взаимодействия гиперзвукового потока с сильными разрывами, вызывающими неизэнтропийность потока в тонком слое вблизи поверхности тела.

Если оставаться в рамках изэнтропийности потока, то при $M \gg 1$ вид этих соотношений значительно упрощается. Так, например, для p , a , ρ и T полные изэнтропийные соотношения выглядят следующим образом:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{T}{T_\infty} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2};$$

за время прохождения около тела, может быть сравнима с собственной энергией, и течение газа становится существенно неадиабатным.

При полетах на больших высотах существенным может оказаться также влияние вязкости, которое, как известно, определяется числом Рейнольдса. При очень больших числах Re влияние вязкости сосредоточено лишь в узких пристеночных пограничных слоях (кроме особых случаев

$$\frac{a}{a_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для гиперзвукового обтекания при $M_\infty \gg 1$ получим более простые соотношения:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{\frac{2k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{\frac{2}{k-1}}; \quad \frac{T}{T_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^2; \quad \frac{a}{a_\infty} = \frac{M_\infty}{M}. \quad (4.1)$$

Расчеты показывают, что упрощенные выражения с достаточной степенью точности равноценны полным изоэнтальпийным соотношениям, следовательно, при больших значениях M_∞ набегающего потока задача становится более простой (при вышесказанных допущениях).

Рассмотрим выражения для параметров потока за прямым скачком уплотнения. В общем случае они имеют вид: $\frac{p_2}{p_\infty} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_\infty^2 - 1);$

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{\frac{k+1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}; \quad \frac{T_2}{T_\infty} = 1 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_\infty^2} (M_\infty^2 - 1)(1 + kM_\infty^2).$$

Для гиперзвукового же обтекания (при $M_\infty \gg 1$) получаются более простые соотношения:

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2k}{k+1} M_\infty^2; \quad \frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{k+1}{k-1}; \quad \frac{T_2}{T_\infty} = \frac{2k(k-1)}{(k+1)^2} M_\infty^2. \quad (4.2)$$

Расчеты показывают, что при гиперзвуковом обтекании прямой скачок уплотнения с достаточной точностью считается по упрощенным зависимостям.

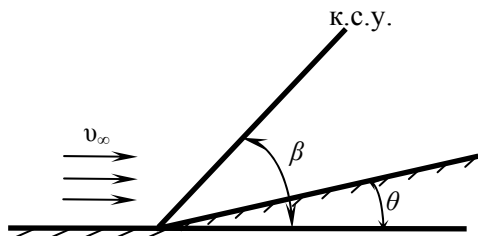


Рис. 41

Обратимся теперь к прохождению газа сквозь косой скачок уплотнения (рис.41). В общем случае изменение параметров потока до- и за скачком и характерных углов в зависимости от числа M имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \sin^2 \beta}{\frac{k+1}{2} M_\infty^2 \sin \beta};$$

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2k}{k+1} M_\infty^2 \sin^2 \beta - \frac{k-1}{k+1}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{\frac{k+1}{2} M_\infty^2 \sin^2 \beta}{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \sin^2 \beta},$$

где θ – угол полураствора обтекаемого клина, β – угол между линией скачка уплотнения и направлением потока.

Будем считать тело заостренным, тонким, с малым углом θ при вершине. Тогда в случае слабых скачков и достаточно больших чисел $M_\infty \gg 1$ угол косоуго скачка уплотнения с набегающим потоком β будет иметь тот же порядок малости, что и θ . Тогда можно принять

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) \approx \beta - \theta; \quad \operatorname{tg} \beta \approx \beta; \quad \sin \beta \approx \beta,$$

и уравнение для $\operatorname{tg}(\beta - \theta)/\operatorname{tg} \beta$ приобретает следующий вид:

$$\frac{\beta - \theta}{\beta} = \frac{2 + (k-1) M_\infty^2 \beta^2}{(k+1) M_\infty^2 \beta^2}. \quad (4.3)$$

Можно отметить, что если раньше можно было находить β только графическим путем при использовании ударной поляры, то сейчас, при $M_\infty \gg 1$, получили простое алгебраическое уравнение. Обозначив через $k_\beta = M_\infty \beta$ и $k_\theta = M_\infty \theta$ и преобразовав последнее уравнение, будем иметь:

$$k_\beta^2 - \frac{k+1}{2} k_\theta k_\beta - 1 = 0. \quad (4.4)$$

Решение этого уравнения при очевидном условии $k_\beta = M_\infty \beta > 0$ будет

иметь вид: $k_\beta = \frac{k+1}{4} k_\theta + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 k_\theta^2 + 1}$ или

$$\frac{k_\beta}{k_\theta} = \frac{\beta}{\theta} = \frac{k+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{k_\theta^2}}. \quad (4.5)$$

Как видно из этого уравнения, необходимости в использовании ударной поляры нет, так как при $M_\infty \gg 1$ уравнение простое.

Соотношение для параметров за- и перед косым скачком уплотнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2k}{k+1} k_\beta^2 - \frac{k-1}{k+1}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{\frac{k+1}{2} k_\beta^2}{1 + \frac{k-1}{2} k_\beta^2}. \quad (4.6)$$

Найдем коэффициент давления в потоке за косым скачком уплотнения:

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{p_2 - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2} = \frac{2p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \left(\frac{p_2}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{2a_\infty^2}{k v_\infty^2} \left(\frac{2k}{k+1} k_\beta^2 - \frac{k-1}{k+1} - 1 \right) = \frac{2}{k M_\infty^2} \frac{2k}{k+1} (k_\beta^2 - 1) = \\ &= \frac{4}{k+1} \frac{1}{M_\infty^2} \left(\frac{\theta^2}{\theta^2} \right) (k_\beta^2 - 1) = \frac{4}{k+1} \frac{k_\beta^2 - 1}{k_\theta^2} \theta^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь: $a_\infty^2 = \frac{k p_\infty}{\rho_\infty}$ или $\frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{a_\infty^2}{k}$.

Рассмотрим теперь случай обтекания тупого угла сверхзвуковым потоком при $M_\infty \gg 1$. Применим к уравнению:

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M_\infty^2 - 1} \right) \right] - \arctg \sqrt{M^2 - 1} + \\ &\quad + \arctg \sqrt{M_\infty^2 - 1} \end{aligned} \quad (\text{см. 2.77})$$

асимптотическое равенство, верное для больших $x \gg 1$:

$$\arctg x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}; \quad \sqrt{x^2 - 1} \sim x,$$

(\sim – знак асимптотического равенства).

Тогда получим из предыдущего соотношения: $\theta \sim \frac{2}{k-1} \left(\frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{M} \right)$,

откуда следует

$$\frac{M_\infty}{M} \sim 1 - \frac{k-1}{2} M_\infty \theta = 1 - \frac{k-1}{2} k_\theta. \quad (4.8)$$

Максимально возможный угол поворота θ_{\max} будем соответствовать истечению в вакуум ($T=0$, $a=0$, $M=\infty$):

$$\theta_{\max} = \frac{2}{(k-1)M_{\infty}}. \quad (4.9)$$

Коэффициент давления C_p равен: $C_p = \frac{p-p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho_{\infty}v_{\infty}^2} = \frac{2}{kM_{\infty}^2} \left(\frac{p}{p_{\infty}} - 1 \right)$.

Если подставить в это уравнение известную изоэнтропийную формулу

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}M_{\infty}^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \text{ которая при } M_{\infty} \gg 1 \text{ преобразуется в } \frac{p}{p_{\infty}} \approx \left(\frac{M_{\infty}}{M} \right)^{\frac{2k}{k-1}},$$

то получим: $C_p \approx \frac{2}{kM_{\infty}^2} \left[\left(\frac{M_{\infty}}{M} \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right]$. С учетом полученного соотношения

$$\text{для } \frac{M_{\infty}}{M} \sim 1 - \frac{k-1}{2}k_{\theta} \text{ имеем: } C_p \approx \frac{2}{kM_{\infty}^2} \left[\left(1 - \frac{k-1}{2}k_{\theta} \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right] \text{ или}$$

$$C_p \approx \frac{2 \cdot \theta^2}{k \cdot k_{\theta}^2} \left[\left(1 - \frac{k-1}{2}k_{\theta} \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right]. \quad (4.10)$$

4.3. Закон подобия гиперзвуковых потоков

Если в формуле (4.5) для косо́го скачка уплотнения при гиперзвуковом обтекании тонкого тела с малым углом θ при вершине устремить $M_{\infty} \rightarrow \infty$, то $k_{\theta} \rightarrow \infty$, и тогда: $\frac{\beta}{\theta} = \frac{k+1}{2}$.

Следовательно, при гиперзвуковом обтекании тонких тел, когда возникают косые скачки уплотнения, основным параметром в потоке является $k_g = M_{\infty} \cdot \theta$, играющий роль критерия подобия обтекания газом тонких заостренных тел при $M_{\infty} \gg 1$. Анализ формул (4.6) для косо́го скачка уплотнения показывает, что при течении внутри тупого угла течение остается подобным при сохранении параметра $k_{\beta} = M_{\infty} \cdot \beta$.

Убедимся, что аналогичный закон подобия имеет место и в случае расширения потоков, т.е. при обтекании тупого угла (если угол расширения мал, а начальное число Маха M_{∞} велико). Рассмотрим формулу (2.77) для θ .

Поскольку $\sqrt{M^2 - 1} \approx M$, $\sqrt{M_\infty^2 - 1} \approx M_\infty$: $\text{arctg}M = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{M} + \frac{1}{3M^3} - \dots$;
 $\text{arctg}M_\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{M_\infty} + \frac{1}{3M_\infty^3} - \dots$, то выражение (2.77) для θ можно записать
 приближенно так: $\theta = \frac{2}{k-1} \left(\frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{M} \right)$. Отсюда

$$\frac{M_\infty}{M} = 1 - \frac{k-1}{2} k_\theta. \quad (4.11)$$

Вносят эти значения в выражения, полученные ранее для гиперзвукового обтекания: $\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{\frac{2k}{k-1}}$; $\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{\frac{2}{k-1}}$; $\frac{T}{T_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^2$; $\frac{a}{a_\infty} = \frac{M_\infty}{M}$,
 имеем:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^{\frac{2k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^{\frac{2}{k-1}}; \quad (4.12)$$

$$\frac{T}{T_\infty} = \left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^2; \quad \frac{a}{a_\infty} = 1 - \frac{k-1}{2} k_\theta.$$

Эти выражения дают закон подобия гиперзвуковых расширяющихся потоков. Следовательно, как для течений внутри тупого угла, так и для внешнего обтекания тупого угла при гиперзвуковом обтекании коэффициентом подобия является k_θ .

4.4. Приближенное решение задачи обтекания произвольного профиля гиперзвуковым потоком

Для произвольного профиля решается задача определения коэффициента давления при его обтекании. Для этого профиль делится на прямолинейные участки точками A, B, C, D, E . Получается типичное обтекание тупых углов как верхней, так и нижней частей профиля.

Итак, задан произвольный профиль $ABCDE$ (рис. 42). Заменим кривые отрезки AB, BC, CD, DE , приближенно прямыми линиями. Если угол α_A меньше прямого (т.е. $\alpha_A < \frac{\pi}{2}$), то у точки A возникает косой скачок уплотнения (поскольку в этой точке задача связана с обтеканием внутри тупого угла). Давление и скорость вдоль AB можно определить из условия на скачке уплотнения по углу α_A . В точках B, C, D будут течения разрежения,

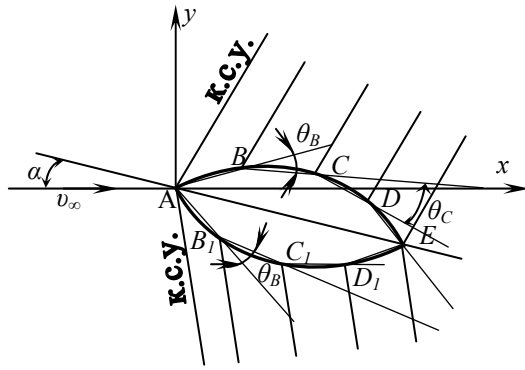


Рис. 42

которые составляют задачу Прандтля-Майера. Если положить, что взаимодействие скачка, проходящего в т. A с течением разрежения, возникающего в т. B , не сказывается на последующем движении газа вдоль отрезков C, D, E , то, зная местные углы атаки $\theta_b, \theta_c, \theta_D$, можно, используя результаты решения задачи Прандтля-Майера, определить давления и скорости вдоль отрезков AB, BC, CD, DE .

Аналогично решается задача и для нижней части профиля.

Отметим, что при больших значениях M_∞ набегающего потока допущение об отсутствии взаимодействия скачков уплотнения с течением разрежения теряет силу. При больших значениях M_∞ это взаимодействие приведет к тому, что скачок уплотнения начнет искривляться и течение за ним становится вихревым (а как известно, все расчеты были построены на отсутствии вихревого движения $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$). Следовательно, метод характеристик справедлив только для потенциальных течений, так как при вихревом движении $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$, и тогда разбиение контура на прямые участки и связь косоугольного скачка уплотнения с течением разрежения теряет смысл.

Конечно, сочетание теории косоугольного скачка уплотнения и теории Прандтля-Майера – полезная вещь, но до определенных пределов. Однако этот прием является первым приближением, на котором можно потом развивать численные методы и т.д. (хотя программирование такой нелинейной задачи является сложной проблемой). Но в первом приближении теория косоугольного скачка уплотнения и теория Прандтля-Майера позволяют решить задачу гиперзвукового обтекания профиля произвольной формы.

4.5. Гиперзвуковое обтекание плоской пластины

Методика применения полученных решений для обтекания тупого угла и внутри него также применимы для гиперзвукового обтекания пластины, расположенной под малым углом атаки $\bar{\theta}$ к набегающему на нее потоку с $M_\infty \gg 1$.

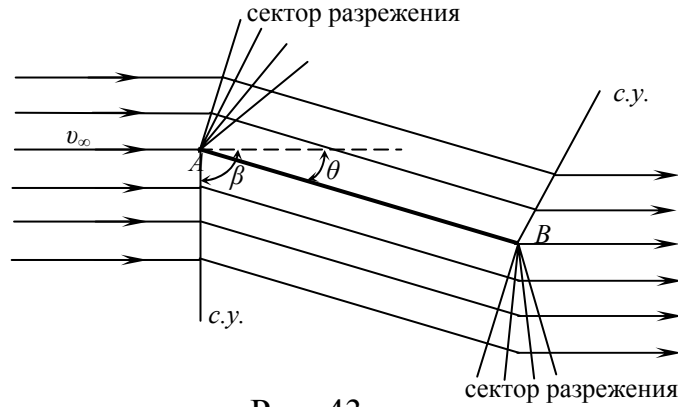


Рис. 43

Коэффициент давления для верхней половины пластины:

$$C_{p \text{ верх}} = \frac{p_\theta - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2} = \frac{2}{kM_\infty^2} \left(\frac{p_\theta}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{2}{kk_\theta^2} \left(\frac{p_\theta}{p_\infty} - 1 \right) \bar{\theta}^2.$$

Для гиперзвукового течения: $\frac{p_\theta}{p_\infty} \approx \left(\frac{M_\infty}{M_\theta} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^{\frac{2k}{k-1}}$.

Здесь мы имеем случай расширяющего потока с $M_\infty \gg 1$ (обтекание тупого угла).

Окончательно:

$$C_{p_\theta} = \frac{2}{kk_\theta^2} \left[\left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right] \bar{\theta}^2. \quad (4.13)$$

Здесь $k_\theta = M_\infty \cdot \bar{\theta}$.

Вычислим C_p для нижней половины пластины. Здесь имеем случай прохождения газа через косой скачок уплотнения для тонкого тела:

$$C_{p_{\text{ниж}}} = \frac{2}{kk_\theta^2} \left(\frac{p_n}{p_\infty} - 1 \right) \bar{\theta}^2 \text{ (по аналогии с } C_{p_\theta} \text{)}.$$

Поскольку $\frac{p_n}{p_\infty} = \frac{2k}{k+1} k_\beta^2 - \frac{k-1}{k+1}$, то $\left(\frac{p_n}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{2k}{k+1} (k_\beta^2 - 1)$ и тогда:

$$C_{p_n} = \frac{4}{(k+1)k_\theta^2} (k_\beta^2 - 1) \bar{\theta}^2, \quad (4.14)$$

здесь $k_\beta = M_\infty \cdot \beta$.

Если возьмем известное уравнение $k_\beta^2 - \frac{k+1}{2} k_\theta k_\beta - 1 = 0$, то имеем $k_\beta^2 - 1 = \frac{k+1}{2} k_\theta k_\beta$. Тогда:

$$C_{p_n} = \frac{2k_\beta}{k_\theta} \bar{\theta}^2. \quad (4.15)$$

Следовательно, коэффициент давления для пластины:

$$C_p = C_{p_n} - C_{p_e} = \left\{ -\frac{2}{kk_\theta^2} \left[\left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right] + 2 \frac{k_\beta}{k_\theta} \right\} \bar{\theta}^2.$$

Так как $\frac{k_\beta}{k_\theta} = \frac{k+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{k_\theta^2}}$, то

$$C_p = f \cdot \bar{\theta}^2, \text{ где } f = -\frac{2}{kk_\theta^2} \left[\left(1 - \frac{k-1}{2} k_\theta \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right] + \frac{k+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{k_\theta^2}}. \quad (4.16)$$

Далее идет формальное использование полученных результатов, исходя из геометрических соображений.

Коэффициент подъемной силы $C_y = C_p \cos \bar{\theta}$,

коэффициент волнового сопротивления $C_x = C_p \sin \bar{\theta}$,

$\sin \bar{\theta} = \bar{\theta}$, $\cos \bar{\theta} = 1$ – для малых углов атаки $\bar{\theta}$.

Тогда $C_y = f \cdot \bar{\theta}^2 = C_p$; $C_x = f \cdot \bar{\theta}^3$, следовательно $C_y = \frac{C_x}{\bar{\theta}}$ или

$$\frac{C_y}{\bar{\theta}^2} = \frac{C_x}{\bar{\theta}^3} = f(k_\theta). \quad (4.17)$$

Это выражение является законом газодинамического подобия при обтекании пластины гиперзвуковым потоком.

Если $M_\infty \rightarrow \infty$, то $k_\theta \rightarrow \infty$, следовательно $f = k+1$ и тогда

$$C_y = (k+1) \bar{\theta}^2; \quad C_x = (k+1) \bar{\theta}^3. \quad (4.18)$$

Таким образом, сочетание задачи обтекания внутри тупого угла (наличие косо́го скачка уплотнения) и обтекания тупого угла позволяет решить задачу гиперзвукового обтекания пластины.

4.6. Ударная теория Ньютона

При малых скоростях набегающего потока на профиль произвольной формы возможно применение теории подъемной силы крыла (не нужна ударная теория). При больших сверхзвуковых скоростях необходимо использование ударной теории Ньютона (когда есть скачки уплотнения) – это единственное средство для простого получения расчетных результатов для профиля произвольной формы. Применение ударной теории сводится к следующему.

Берут профиль произвольной формы (рис. 44). При значениях $M_\infty \rightarrow \infty$ кривой скачок в т.А плоской пластины (см. рис. 43) или произвольного про-

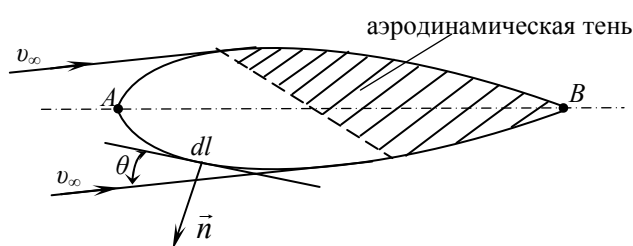


Рис. 44

филя становится очень близким к нижней поверхности, так что без большой ошибки можно считать линии тока набегающего потока подходящими вплотную к нижней поверхности пластины (профиля) и давление на

ней считать равным полной потере количества движения, соответствующей абсолютно неупругому удару частиц газа о нижнюю поверхность со скоростью, равной нормальной компоненте скорости набегающего потока v_∞ (касательная компонента скорости сохраняется). Тогда: $p_n = \rho_\infty (v_\infty \sin \bar{\theta})^2$ или $p_n = \rho_\infty (v_\infty \bar{\theta})^2$, так как при малых $\bar{\theta} \rightarrow \sin \bar{\theta} \approx \bar{\theta}$.

С другой стороны, на верхней поверхности при $M_\infty \rightarrow \infty$ достигается полный вакуум, т.е. в этом случае $p_s = 0$. Таким образом, коэффициент подъемной силы будет равен:

$$C_p = C_y = \frac{p_n - p_s}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2} = 2\bar{\theta}^2 \quad (4.19)$$

При $k=1$ эта формула совпадает с формулой (4.18).

При $k=1,4$ – формула (4.19) по ударной теории Ньютона дает на 17% меньшее значение. Ввиду того, что ударная теория Ньютона предельно проста, то ею широко пользуются при расчете коэффициента давления крыловых профилей: $C_p = C_p^* \frac{\sin \theta}{\sin \bar{\theta}}$, где C_p^* – соответствует значению C_p при $\theta = \bar{\theta}$.

Ударная теория является более уникальной, чем определение C_p как разницы коэффициентов давлений: $C_p = C_{p_n} - C_{p_s}$.

Все изложенное справедливо для углов атаки $\bar{\theta} < 90^\circ$ (так как в этом случае происходит разделение потока в начальной точке профиля на верхнюю и нижнюю его части).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1, 2. – М.: Наука, 1994. I – 528 с., II – 560 с.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. 840 с.
3. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1986. 448 с.
4. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1976. 888 с.
5. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. – М.: Физматгиз, 1973. 556 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
I. ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ	4
1.1. Условия Коши-Римана для идеальной несжимаемой жидкости	6
1.2. Комплексные потенциалы для некоторых видов движений	9
1.3. Бесциркуляционное обтекание кругового цилиндра	14
1.4. Циркуляционное обтекание кругового цилиндра	23
1.5. Теорема Жуковского	28
1.6. Обтекание крылового профиля по методу конформных отображений	30
II. ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА	36
2.1. Распространение малых возмущений в потоке сжимаемого газа	36
2.2. Основное уравнение газовой динамики	38
2.3. Линейные преобразования Прандтля для определения малых возмущений параметров газа	40
2.4. Дозвуковое обтекание тонкого профиля	46
2.5. Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля	50
2.6. Уравнение газовой динамики в плоскости годографа скорости	57
2.7. Графо-аналитический метод расчета сверхзвуковых потоков	65
2.8. Сверхзвуковое обтекание тупого угла	73
III. РАЗРЫВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА	81
3.1. Ударные волны и скачки уплотнения	82
3.2. Ударная адиабата Гюгонио для разрывных течений	88
3.3. Уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения	91
3.4. Изменение параметров газа при прямом скачке уплотнения	94
3.5. Скорости распространения ударной волны и спутного потока за нею	100

3.6. Сверхзвуковое течение газа внутри тупого угла	102
3.7. Ударная поляра.....	106
IV. ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА	115
4.1. Физические процессы в газе при гиперзвуковых скоростях течения	115
4.2. Гиперзвуковое обтекание тел	118
4.3. Закон подобия гиперзвуковых потоков	122
4.4. Приближенное решение задачи обтекания произвольного профиля гиперзвуковым потоком	123
4.5. Гиперзвуковое обтекание плоской пластины	124
4.6. Ударная теория Ньютона	127
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	129

Учебное издание

Игорь Степанович Загузов

ОСНОВЫ

АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

ЧАСТЬ III

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет В.И. Никонов

Подписано в печать 20.11.07

Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 729. Тираж 150 экз. Заказ № 729

Издательство «Универс групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс групп»