

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.М. КРИКУНОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ
ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА
НА УЧАСТКЕ РАЗГОНА-НАБОРА ВЫСОТЫ
В АТМОСФЕРЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 24.04.02 Системы управления движением и навигация

С А М А Р А

Издательство Самарского университета

2023

УДК 629.7.05(075)

ББК О52я7

К82

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю. М. З а б о л о т н о в,
канд. техн. наук М. В. Б о р и с о в

Крикунов, Михаил Михайлович

К82 **Оптимизация программ управления гиперзвукового летательного аппарата на участке разгона-набора высоты в атмосфере:** учебное пособие / *М.М. Крикунов*. — Самара: Издательство Самарского университета, 2023. — 92 с.

ISBN 978-5-7883-1950-6

Рассматриваются вопросы оптимизации программ управления гиперзвукового летательного аппарата на участке разгона-набора высоты.

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курсов «Оптимальное управление», «Методы решения оптимизационных задач динамики полёта», «Практикум по методам оптимизации», читаемых обучающимся Самарского университета по направлениям подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация, 01.03.03 Механика и математическое моделирование соответственно, и может быть использовано при выполнении выпускных квалификационных работ бакалавров и магистров соответствующих специальностей.

Разработано на кафедре динамики полёта и систем управления Самарского университета.

УДК 629.7.05(075)

ББК О52я7

ISBN 978-5-7883-1950-6

© Самарский университет, 2023

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Вопросы оптимизации движения ГЛА в атмосфере	8
1.1. Оптимизация траекторий ГЛА	8
1.2. Оптимизация разгона-набора высоты сверхзвукового самолёта	10
1.3. Основные трудности применения строгих методов оптимизации	17
1.4. Характерные особенности оптимального движения в атмосфере	20
Глава 2. Некоторые сведения из теории оптимального управления	27
2.1. Функционалы и функциональные пространства	27
2.2. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала	33
2.3. Основная формула для вариации функционала	34
2.4. Задача с подвижными границами	37
2.5. Постановка задачи оптимального управления непрерывной динамической системой	39
2.6. Игольчатая вариация управления	40
2.7. Основная теорема принципа максимума. Функция Гамильтона и её свойства	42

Глава 3. Задача оптимального управления углом атаки	48
3.1. Постановка задачи	48
3.1.1. Уравнения движения	48
3.1.2. Математическая постановка	50
3.2. Принцип максимума	52
3.2.1. Сопряжённая система	52
3.2.2. Постановка краевой задачи	53
3.3. Прикладное математическое обеспечение	56
Глава 4. Оптимальный разгон-набор высоты ГЛА с $M_{\max} = 6$	58
4.1. Объект управления	58
4.1.1. Компоновочная схема	58
4.1.2. Аэродинамические характеристики	60
4.1.3. Высотно-скоростные характеристики	63
4.2. Характеристики атмосферы	68
4.3. Характеристики модели движения	70
4.4. Граничные условия краевой задачи	71
4.5. Метод редукции к задачам Коши	74
4.6. Оптимальные характеристики ГЛА с перспективным ВРД	81
Заключение	83
Список сокращений и условных обозначений	84
Список литературы	86
Приложение А. Интерполяция с использованием кубических сплайнов	90

Введение

Сегодня всё ещё большой интерес исследователей и разработчиков аэрокосмической техники вызывают вопросы и проблемы, связанные с созданием гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), использующих самолётные принципы при движении в атмосфере.

Применительно к авиационной отрасли можно говорить о том, что необходимость создания в ближайшие десятилетия гиперзвуковых маршевых самолётов (ГМС) коммерческого и военного применений диктуется в первую очередь проблемой увеличения воздушного трафика, вызванной интенсивным и непрерывным ростом в XXI веке мировых интеграционных процессов.

Основными доводами в пользу перехода на многоразовые космические транспортные системы (МКТС) на основе ГЛА аэрокосмического типа служат значительное снижение затрат на выведение полезной нагрузки на орбиту и существенное повышение безопасности космических полётов. При этом ведущую роль при проектировании прототипов здесь играют концепции одноступенчатых воздушно-космических самолётов (ВКС) и двухступенчатых авиационно-космических систем (АКС) горизонтального старта. Последние состоят из гиперзвукового самолёта-разгонщика (ГСР) и ракетного ускорителя с полезной нагрузкой или орбитальным самолётом (ОС).

В качестве альтернативы АКС также могут рассматриваться концепции авиационной ракетно-космической системы (АРКС), использующей:

- ракетно-космическую систему (РКС): ракетный ускоритель — космический разгонщик с полезной нагрузкой;
- самолёт-носитель АРКС: самолёт с РКС на внешней подвеске или на борту. Обычно, самолёты-носители — это бомбардировщики или транспортные самолёты с высотой старта ракеты до 12 км при скорости полёта 800..850 км/ч.

В отличие от АРКС концепция АКС предполагает использование в качестве первой ступени ГСР, а старт второй ракетной ступени осуществляется на высотах от 20 до 30 км при скоростях 4–6 Мах.

Основные проблемы освоения гиперзвуковых технологий в первую очередь связаны с получением энергоёмких видов топлива и материалов, устойчивых к высоким температурным воздействиям, а также с созданием как систем охлаждения конструкции ГЛА, так и двигательных установок комбинированного типа, функционирующих в широком диапазоне скоростей и высот полёта. Применение криогенных или эндотермических топлив ведёт к уменьшению веса комбинированной силовой установки (КСУ), основанной на воздушно-реактивном двигателе (ВРД) при одинаковых значениях стартовой тяги.

Круг вопросов, возникающих при разработках прототипов ГЛА, не ограничивается только областями аэродинамики, двигателестроения и конструкции. Наряду с основными проблемами создания особый интерес исследователей вызывают проблемы

оптимального управления движением в атмосфере аппаратов рассматриваемого класса.

На сегодняшний день на основе ряда задач в постановке как общего, так и вырожденного типа построена теория оптимального полёта самолёта. Результаты теории успешно используются в инженерных расчётах. В частности, решение вырожденной задачи оптимального разгона-набора высоты сверхзвукового самолёта [22] используется при построении типовых траекторий ГЛА.

Концепция ГЛА авиационного или аэрокосмического назначения заключается в применении в качестве транспортного средства (ТС) гиперзвукового самолёта, совершающего полёт в более широком диапазоне высот и скоростей и располагающего за счет использования криогенного топлива большим запасом тяги (стартовая тяговооружённость ГЛА изменяется от 0,6 до 1) по сравнению с обычным сверхзвуковым самолётом. Именно эти отличительные черты ГЛА позволяют предположить, что характер движения по оптимальной траектории может существенно отличаться (как качественно, так и по затратам энергии) от типового.

Глава 1

Вопросы оптимизации движения ГЛА в атмосфере

1.1. Оптимизация траекторий ГЛА

Использование при движении возможностей, как аэродинамической схемы самолётного типа, так и контура КСУ с воздушно-реактивным трактом, накладывает дополнительные ограничения на характер оптимальных траекторий и программ управления ГЛА. Зависимость параметров КСУ от высоты и скорости полёта при использовании воздушно-реактивного способа формирования тяги, а также расширение диапазона скоростей полёта до гиперзвукового участка (см. рисунок 1.1) приводит к необходимости усложнения постановок задач оптимизации на этапе разгона-набора высоты ГЛА в атмосфере по сравнению с классической теорией оптимального полёта.

«По мере увеличения максимальной скорости полёта всё большая часть располагаемого запаса топлива аэрокосмических летательных аппаратов (ЛА) должна тратиться на его разгон. Так масса топлива одноступенчатого ВКС составляет более половины его стартовой массы, что приводит к большой напряжённости

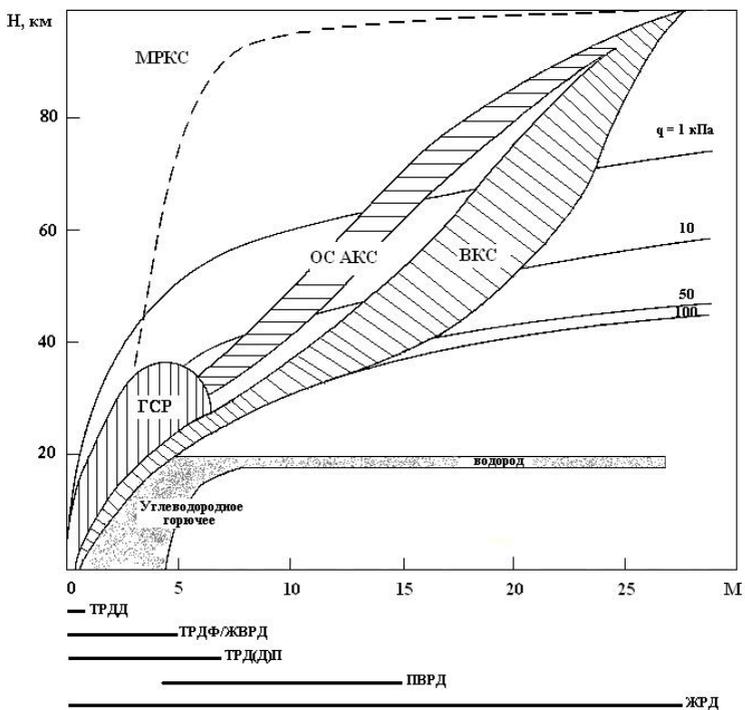


Рис. 1.1. Гиперзвуковые летательные аппараты и типичные области их применения

весовой сводки аппарата. В связи с этим при исследовании различных типов аэрокосмических ЛА в качестве одной из основных возникает задача оптимизации траекторий разгона ЛА и определения массы и объёма маршевого топлива» [6].

Таким образом, актуальной остаётся проблема оптимизации траекторий разгона-набора высоты ГЛА в атмосфере. При этом теоретически наиболее обоснованным выбором для исследования является ВКС с $M_{max} = 15$, обеспечивающий разгон-набор высоты в максимально-допустимом для ВРД диапазоне высот и

скоростей полёта или ГЛА двойного применения с $M_{max} = 6$, использующийся в качестве ГМС для межконтинентальных перелётов и ГСР для обеспечения воздушного старта второй ступени АКС.

«Очевидно, что для создания нового поколения аэрокосмических ЛА необходим существенный скачок в развитии авиационно-космической отрасли и смежных с ней отраслей промышленности. В настоящее время основные усилия направляются на разработку ключевых технологий, а также на их демонстрацию в условиях, близких к реальным» [6]. При этом движение указанного выше ВКС с практической точки зрения изучено еще недостаточно подробно. В первую очередь это связано с практическими проблемами освоения технологий создания ГЛА с КСУ, в составе которой применяется гиперзвуковой прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ГПВРД) — прямоточный ВРД с горением в гиперзвуковом потоке.

В дальнейшем остановимся на детальном рассмотрении вопросов оптимизации траекторий разгона-набора высоты в атмосфере ГЛА с $M_{max} = 6$. И в первую очередь проведем анализ решений задач оптимизации траекторий ЛА, использующих при движении в атмосфере, как несущие свойства конструкции, так и воздушно-реактивный способ формирования силы тяги.

1.2. Оптимизация разгона-набора высоты сверхзвукового самолёта

Задача оптимизации траекторий разгона-набора высоты самолёта в общем виде была решена И.В. Остославским в работе [22] с использованием методов классического вариационного исчисления.

Постановка задачи оптимального управления рассматривалась в вырожденной форме, когда производная функции управления по времени не входит в уравнения движения, а сама функция входит линейно и во второй степени. В качестве функции управления рассматривался угол атаки, в качестве критерия эффективности — масса топлива самолёта, которую требовалось минимизировать.

Для исключения из системы дифференциальных уравнений множителей Лагранжа, было принято допущение о независимости силы лобового сопротивления от подъёмной силы (угла атаки): $X'_\alpha = 0$ (рисунок 1.2).

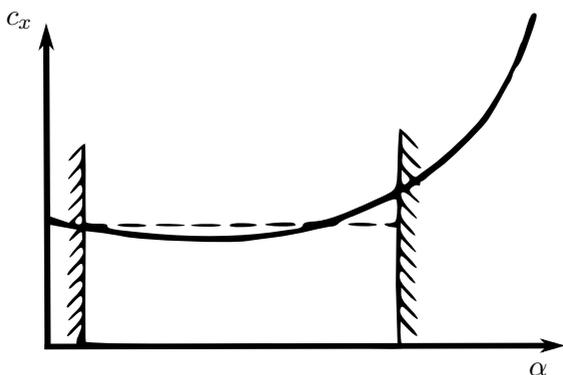


Рис. 1.2. Типичная кривая зависимости коэффициента лобового сопротивления c_x от угла атаки α

В результате интегрирования уравнений движения была определена сверхзвуковая экстремаль (кривая Остославского), которая из-за принятого допущения не проходит через граничные точки. Полная траектория состоит из кривой Остославского (линия a_1b_1 на рисунке 1.3) и экстремалей вертикального подъёма

или спуска (линии aa_1 и bb_1 на рисунке 1.3). В инженерных расчетах данные экстремали заменяют горизонтальными траекториями (линии aa_2 и bb_2 на рисунке 1.3).

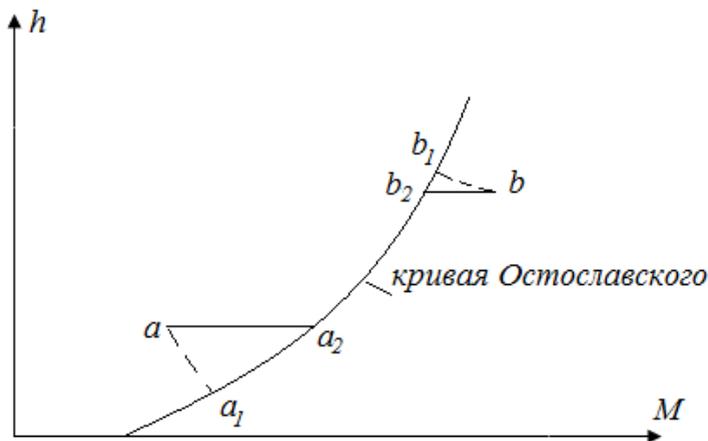


Рис. 1.3. Оптимальные траектории разгона-набора высоты самолёта: aa_1b_1b — решение вырожденной задачи; aa_2b_2b — инженерный расчёт

Основными недостатками приведённого выше решения вырожденной задачи являются:

- отсутствие однозначности в определении участка горизонтальной траектории при переходе с дозвуковой экстремали на сверхзвуковую;
- найденное решение является приближённо-оптимальным вследствие принятого допущения $X'_\alpha = 0$;
- отсутствие в постановке задачи ограничений на фазовый вектор состояния самолёта.

Отсутствие однозначности в определении точки входа на кривую Остославского, соответствующей конечной скорости крейсерского трансзвукового полёта является следствием принятого в постановке задачи допущения о независимости силы лобового сопротивления от угла атаки. Использование теоремы Грина [22] в этом случае позволяет решить задачу оптимизации графическим способом (рисунок 1.4).

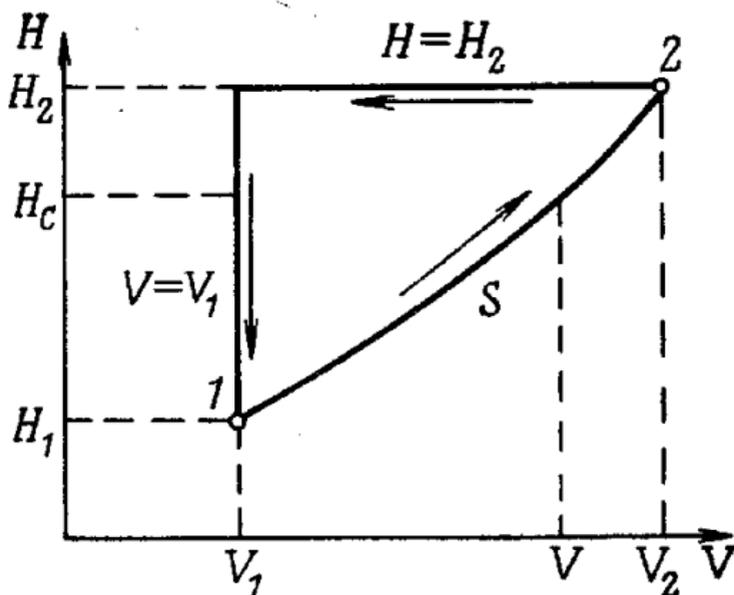


Рис. 1.4. Использование теоремы Грина:
 V, H — скорость и высота полёта самолёта,
 S — сверхзвуковая экстремаль (кривая Остославского)

Площадь внутри замкнутого контура на рисунке 1.4 определяет значение функционала уравнения Эйлера, соответствующего найденной из решения вырожденной задачи экстремали S . В результате графическое решение задачи оптимизации сводится

к поиску значений V_1 и V_2 , при которых указанная площадь достигает своего минимального значения при заданных значениях H_1 и H_2 .

В отношении решения оптимальной задачи в общей постановке без допущения $X'_\alpha = 0$ и с ограничениями на фазовый вектор вопрос остаётся до сих пор открытым. В первую очередь это связано с трудностями, возникающими при решении соответствующих двухточечных краевых задач, поэтому при проектировании ГЛА сверхзвуковой и гиперзвуковой участки типовой траектории разгона-набора высоты в атмосфере обычно моделируются исходя из конструкционных возможностей летательного аппарата, а также с целью максимизации эффективных характеристик силовой установки (рисунки 1.5 и 1.6).

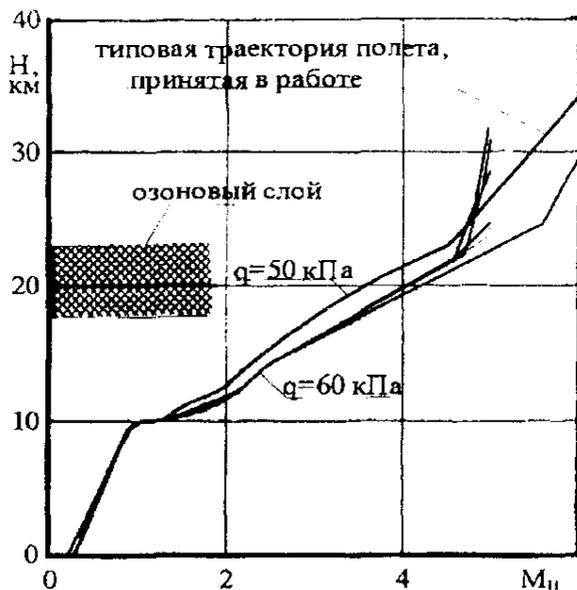


Рис. 1.5. Типовые траектории движения ГСР

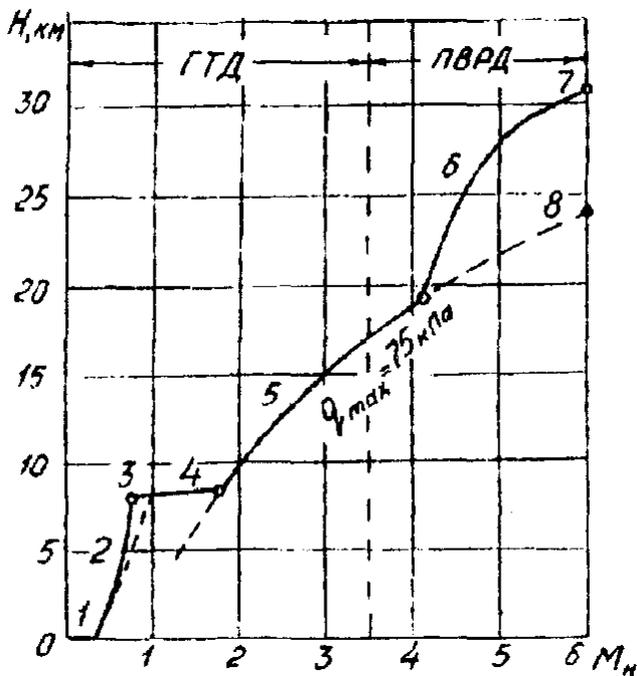


Рис. 1.6. Типовые траектории движения ГМС

Например, в монографии [6] показано, что «если оптимальный профиль полёта известен, или движение осуществляется вдоль ограничения, заданного в координатах высоты и скорости полёта, то оптимальное управление можно определять из условия максимума эффективного удельного импульса». Такой вывод с практической (инженерной) точки зрения в [6] оправдывается допущением о том, что при увеличении скорости полёта оптимальная траектория выходит на ограничение по скоростному напору q_{max} . В этом случае согласно решению вырожденной задачи движение должно происходить по линии q_{max} , что позволяет оптимизировать режимы работы КСУ.

Режим дозвукового полёта по типовой траектории также может рассчитываться исходя из оптимизации режима работы ВРД, использующихся в составе КСУ, например, можно принять режим постоянного расхода воздуха.

Перечисленные выше участки типовой траектории ГЛА можно описать зависимостью вида:

$$\rho V^k = const,$$

где k задают целыми значениями для различных диапазонов скоростей полёта.

При дозвуковых скоростях обычно принимается типовой профиль полёта, обеспечивающий постоянный расход воздуха, т.е. $\rho V = const$, что соответствует $k = 1$.

Оптимальное движение в трансзвуковом диапазоне скоростей согласно решению вырожденной задачи должно происходить по горизонтальной траектории, т.е. с постоянной высотой ($\rho = const$, что соответствует $k = 0$).

Движение на сверхзвуковом участке обычно моделируют из условия максимума эффективного удельного импульса, что соответствует движению по линии максимального скоростного напора ($q_{max} = \rho V^2 = const$, что соответствует $k = 2$).

Гиперзвуковой участок типовой траектории моделируют из условия конструкционного ограничения на тепловой поток, обеспечивающего постоянный нулевой расход данного показателя ($\rho V^6 = const$ – соответствует $k = 6$).

Нецелые значения k могут возникать при использовании других проектных эксплуатационных ограничений на ВРД: например, постоянное отношение полной температуры к абсолютному

давлению за воздухозаборником или максимум компенсационного давления в воздухозаборнике КСУ.

Указанные особенности формирования типовой траектории отражают суть концепции ГЛА, заключающуюся в использовании самолётных принципов при движении в атмосфере и, в первую очередь, в применении ВРД, приводящем к движению по «пологим» траекториям самолётного типа. Тем не менее, наличие режимов полёта ГЛА на сверхзвуковом и гиперзвуковом участках, определяемых эксплуатационными ограничениями, не устраняет основное противоречие между силами, действующими на ГЛА в полёте. Движение в более плотных слоях атмосферы с целью увеличения эффективной силы тяги двигательной установки приводит к увеличению силы лобового сопротивления по сравнению с движением выше линии максимального скоростного напора, а значит, возможно, и к повышению затрат топлива на перемещение.

Очевидно, что данное противоречие сохраняется вследствие того, что моделирование типовой траектории основано на решении оптимальной задачи с допущением: $X'_\alpha = 0$, в результате которого граничные условия при движении по кривой Остославского нарушаются.

1.3. Основные трудности применения строгих методов оптимизации

Как уже было сказано выше, в параграфе 1.2, типовой профиль полёта ГЛА в инженерных расчетах получают из решения вырожденной задачи оптимизации, которое в общем случае не обеспечивает выполнение соответствующих граничных условий (получено нестрогим или прямым методом).

Одним из наиболее эффективных строгих методов оптимизации является принцип максимума Понтрягина [24]. Согласно [28] выделяют следующие «основные объективные преимущества принципа максимума Понтрягина перед известными прямыми методами и приближёнными инженерными подходами, основанными на аппроксимации традиционных программ управления:

- не требуется априорного задания структуры управления, она получается из решения задачи;
- оптимальная программа управления в функциональном пространстве определяется с высокой точностью из решения двухточечной краевой задачи, число варьируемых параметров в которой, не превышает размерности фазового вектора;
- существуют объективные критерии для оперативного контроля за правильностью и точностью программной реализации метода и, при необходимости, локализации источника ошибок в блоках формирования оптимального управления, граничных условий и уравнений движения;
- каждое решение содержит дополнительную информацию о влиянии на функционал малых вариаций всех параметров задачи (аэродинамической компоновки, двигательной установки, граничных условий, ограничений и других факторов);
- каждое решение содержит дополнительную информацию о влиянии на функционал систематических и случайных внешних возмущений (вариаций термодинамических параметров

атмосферы, ветра) и отклонений от номинальных характеристик (двигательной установки, системы управления), действующих вдоль траектории.

Таким образом, принцип максимума обеспечивает получение целого комплекса разносторонней объективной информации с контролируемой точностью о предельных возможностях исследуемого объекта как в номинальных условиях, так и при действии широкого спектра возмущений на основании полученного номинального решения без заметных дополнительных вычислительных затрат (без решения соответствующих краевых задач).

Причины, сдерживающие широкое использование принципа максимума, связаны с трудностями решения двухточечных краевых задач и строгого удовлетворения его формальным условиям».

Основные трудности в этом случае связаны с проблемой сходимости итерационной процедуры решения соответствующей краевой задачи. При этом использование в качестве метода решения принципа максимума приводит к проблеме выбора начальных приближений сопряжённых переменных, обеспечивающих сходимость итерационной процедуры за конечное число шагов [27].

Процедура построения начального приближения сопряжённых переменных с использованием численных методов имеет ряд существенных недостатков. Например, метод продолжения решения краевой задачи по параметру [27] может приводить к закликиванию процедуры построения или к построению начального приближения, обеспечивающего сходимость решения к локальной экстремали. Это, в свою очередь, приводит к необходимости введения в процедуру построения механизма дополнительной селекции экстремалей с сохранением информации об «отбрако-

ванных» экстремалях. Кроме того, «процедура продолжения решения по параметру требует решения краевой задачи для каждого промежуточного значения параметра. Это оправдано, если параметр имеет физический смысл и исследуется поведение экстремалей в зависимости от этого параметра» [27].

Таким образом, с целью обеспечения инвариантности указанной процедуры построения начального приближения, требуется определить значения сопряжённых переменных в виде аналитических или полуаналитических зависимостей от фазовых координат и функции управления, не увеличивая при этом размерность краевой задачи.

1.4. Характерные особенности оптимального движения в атмосфере

Рассматриваемый участок движения (разгон-набор высоты в атмосфере) может, в частности, являться одним из этапов запуска искусственного спутника Земли (ИСЗ) на околоземную орбиту. Характер воздействия атмосферы на ЛА, использующийся при запуске, определяется как особенностями аэродинамической схемы, так и общими принципами аэродинамики. Для существующих транспортных систем атмосферу принято рассматривать как среду с сопротивлением, воздействие которой на объект управления приводит к дополнительным затратам на перемещение. Следовательно, ряд характерных особенностей оптимального движения рассматриваемого ГЛА на участке разгона-набора высоты в атмосфере не должен принципиально отличаться от оптимального движения на данном участке любого ЛА, использующего при движении в атмосфере несущие свойства конструкции. С математической точки зрения данное утверждение означа-

ет, что при исследовании движения ЛА в атмосфере в первом приближении можно пренебречь зависимостью эффективного удельного импульса от высоты и скорости полёта.

Указанная зависимость является одной из основных отличительных особенностей, рассматриваемых в работе ГЛА, использующих при движении в атмосфере тягу ВРД. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать данное допущение только для целей анализа существующих решений задач оптимизации. Например, в работе [27] при постановке задачи оптимального запуска ИСЗ с использованием аэродинамических сил применяются следующие модели характеристик объекта управления:

- 1) аэродинамические коэффициенты подъёмной силы c_y и лобового сопротивления c_x заданы в виде:

$$c_y = c_y^\alpha \alpha, \quad c_x = c_{x0} + A\alpha^2,$$

где c_y^α , c_{x0} и A — некоторые постоянные, α — угол атаки;

- 2) сила тяги определяется следующим образом:

$$T = \eta T_{\max}(\mathbf{z}) \mathbf{e}_T,$$

где η — коэффициент дросселирования двигательной установки (ДУ), T_{\max} — максимальная тяга, \mathbf{z} — фазовый вектор, \mathbf{e}_T — единичный вектор;

- 3) секундный расход топлива определяется по выражению:

$$\mu = T/c,$$

где c — скорость истечения газов из сопел ДУ, которая согласно [20] не зависит от фазового вектора \mathbf{z} .

Движение ЛА моделируется в вертикальной плоскости неинерциальной декартовой системы координат, связанной с точкой старта. Тяга ЛА расположена в продольной плоскости. Целью управления является минимизация расхода массы топлива ЛА. В качестве функции управления рассматривается вектор, компонентами которого выбраны единичный вектор тяги ДУ (продольной оси ЛА) и коэффициент дросселирования. В дальнейшем при решении коэффициент дросселирования принимается равным постоянной величине.

В результате решения задачи с использованием принципа максимума получены оптимальные программы управления углом наклона траектории ЛА для различных значений максимального аэродинамического качества K_{\max} (рисунок 1.7).

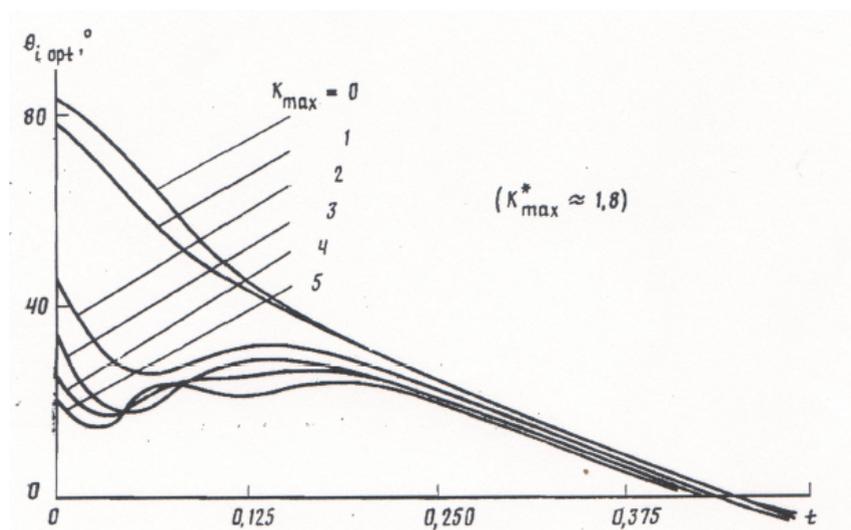


Рис. 1.7. Оптимальные программы управления углом наклона траектории ЛА, использующегося при запуске ИСЗ [27]

Как видно из рисунка 1.7, при увеличении K_{\max} (повышении несущих возможностей ЛА) на участке движения в атмосфере ($t < 0,2$) усиливается колебательный характер изменения угла наклона траектории от времени. С физической точки зрения это может служить признаком воздействия на ЛА факторов разной природы. В рассматриваемом случае такими факторами являются сила гравитации и аэродинамическая сила. Уменьшение амплитуды и частоты колебаний согласно рисунку 1.7 происходит как при снижении несущих возможностей, так и ослаблении воздействия на ЛА атмосферы с увеличением высоты полёта, которая возрастает в диапазоне относительного времени от 0 до 0,4, так как в указанном диапазоне угол наклона траектории положителен (рисунок 1.7). В результате на участке движения ЛА при $t > 0,2$ оптимальная программа управления углом наклона траектории приобретает характер линейной зависимости, так как на движение ЛА влияет только сила гравитации.

Таким образом, одной из характерных особенностей оптимального управления движением ГЛА в атмосфере является колебательный характер функции оптимального управления, вызванный воздействием на объект управления двух факторов различной природы — силы гравитации и аэродинамической силы.

Рассмотрим другую особенность оптимального движения. В работе [28] с использованием принципа максимума получены оптимальные программы управления углом тангажа (рисунок 1.8) и оптимальные траектории вывода ИСЗ на низкую орбиту Земли (рисунок 1.9) с различными значениями максимального аэродинамического качества космической транспортной системы (КТС).

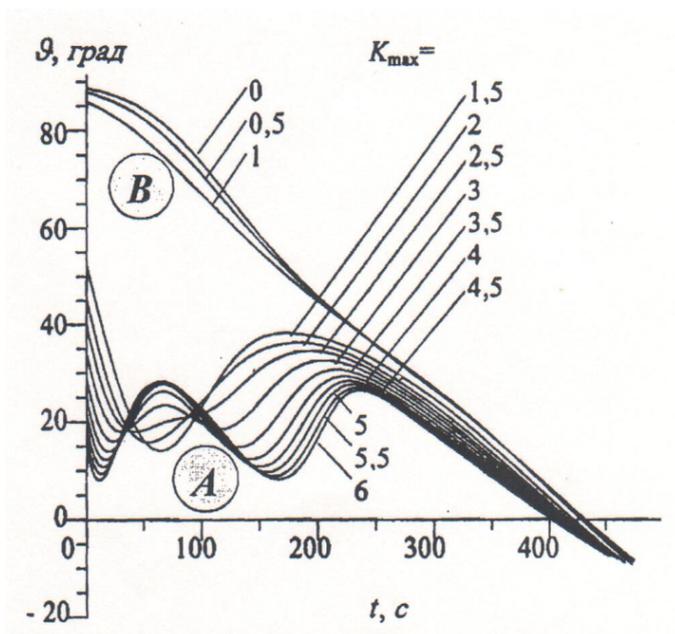


Рис. 1.8. Оптимальные программы управления углом тангажа КТС

Кривые А (aerodynamic) соответствуют космической транспортной системе с K_{\max} выше критического, кривые В (ballistic) — КТС баллистического типа, воздействие на которую аэродинамических сил пренебрежимо мало.

Как видно из рисунков 1.8 и 1.9 указанная выше особенность оптимального управления (колебательный характер при K_{\max} выше критического) может приводить к появлению оптимальных траекторий рикошетирующего типа, которые по своей структуре принципиально отличаются от типовых профилей полёта ГЛА. Данная особенность «может привести к качественному изменению оптимальной компоновки аппарата, поскольку переход

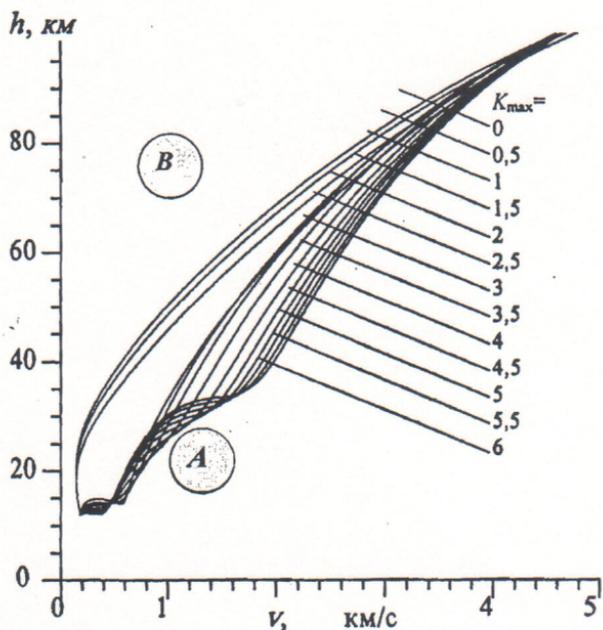


Рис. 1.9. Оптимальные траектории разгона-набора высоты КТС

через критическое качество сопровождается скачкообразным изменением функций влияния на выводимую массу практически всех (существенных) параметров КТС» [28].

На рисунке 1.10 в качестве примера такого влияния приведён график функции влияния аэродинамического качества на относительную выводимую массу КТС.

Из рисунка 1.10 «видно, что производная $\frac{\partial \bar{m}_f}{\partial K_{\max}}$, характеризующая влияние аэродинамического качества на максимальную выводимую массу, при $K_{\max} = K_{\max}^{\text{bif}}$ изменяется скачком в ~ 8 раз. При использовании приближённых методов, опирающихся на традиционную структуру программы управления типа *B*, столь

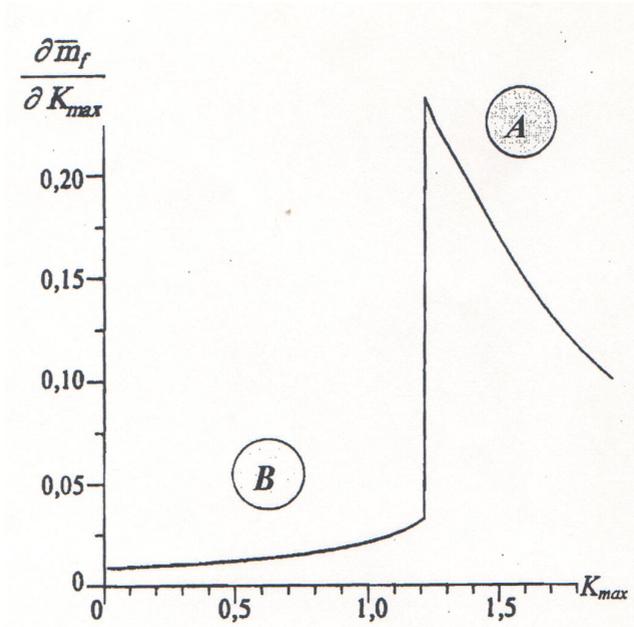


Рис. 1.10. Функция влияния аэродинамического качества на относительную выводимую массу при оптимальном управлении [28]

значительный рост реального влияния несущих свойств КТС заметить невозможно. Следовательно, если при проектировании не ориентироваться на строгие методы оптимизации траекторий, это может принципиально исказить оптимальную концепцию КТС. Таким образом, применение строгих методов оптимизации управления КТС целесообразно еще на стадии первоначальной разработки их концепции и общего облика» [28].

Глава 2

Некоторые сведения из теории оптимального управления

2.1. Функционалы и функциональные пространства

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными.

Определение 1. Переменная величина I называется функционалом от функции $x(t)$, если каждой функции $x(t)$ из некоторого класса функций X соответствует определённое значение I .

Считается, что функционал задан, если каждой функции или кривой поставлено в соответствие некоторое число $I = I[x(t)]$.

Например, функционалом является длина s дуги кривой, соединяющей две точки $A(t_0, x_0)$ и $B(t_1, x_1)$ (рис. 2.1). Величина s может быть вычислена, если задано уравнение кривой $x = x(t)$:

$$I = s[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (\dot{x})^2} dx.$$

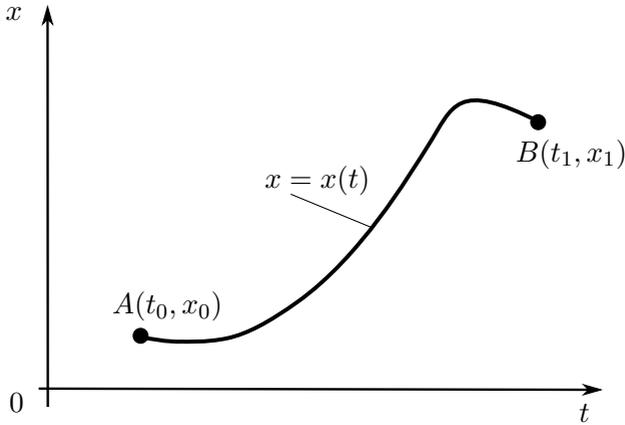


Рис. 2.1. Длина дуги кривой – функционал от функции $x = x(t)$

Запишем общее выражение для функционала в виде:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt, \quad (2.1)$$

где $x(t)$ — одна из возможных непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[t_0, t_1]$.

Существует связь задачи вариационного исчисления с задачей отыскания экстремума функции многих переменных: если разбить отрезок $[t_0, t_1]$ на $n + 1$ частей и рассмотреть ломаную линию вместо кривой $x(t)$, а функционал I заменить суммой

$$I_n = \sum_{i=1}^{n+1} F \left[t_i, x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{h} \right] h, \quad (2.2)$$

где $h = t_i - t_{i-1} = \text{const}$, то вариационная задача трансформируется в задачу о нахождении экстремума функции n переменных и может быть решена классическими методами. Такой подход впервые был предложен Л. Эйлером.

Определение 2. Пространство, элементами которого являются функции, называется функциональным.

Функциональные пространства выбираются в соответствии с характером вариационной задачи. Например, при рассмотрении функционалов вида

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt$$

функция $x(t)$ должна иметь непрерывную первую производную.

При рассмотрении функционалов вида

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) dt$$

функция $x(t)$ должна иметь непрерывные первую и вторую производные и т.д.

Определение 3. Назовем линейным пространством \mathfrak{L} совокупность элементов (x, y, z) , для которых определены операции сложения и умножения на число и выполняются следующие аксиомы:

- 1) коммутативность сложения: $x + y = y + x$;
- 2) ассоциативность сложения: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

- 3) существование нулевого (нейтрального) элемента: $x + 0 = x$;
- 4) существование противоположного элемента: $x + (-x) = 0$;
- 5) существования единичного элемента: $1 \times x = x$;
- 6) ассоциативность умножения: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
где α и β — числа;
- 7) дистрибутивность по сложению: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- 8) дистрибутивность по умножению: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Определение 4. Линейное пространство называется нормированным, если каждому элементу $x \in \mathfrak{L}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма этого элемента) такое, что выполняются свойства:

- 1) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Введём понятие близости элементов, используя понятие нормы их разности, которое аналогично понятию расстояния между точками в евклидовом пространстве.

Рассмотрим пространство C , состоящее из непрерывных функций, определённых на отрезке $[t_0, t_1]$.

Норму функции определим как $\|x\| = \max_t |x(t)|$. Расстояние между точками пространства C будет $\|x - x_0\| = \max_t |x - x_0|$. Функции $x(t)$ и $x_0(t)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности $|x - x_0|$ не превышает некоторой наперед заданной малой положительной величины δ : $\|x - x_0\| < \delta$. Такая окрестность называется сильной (рис. 2.2).

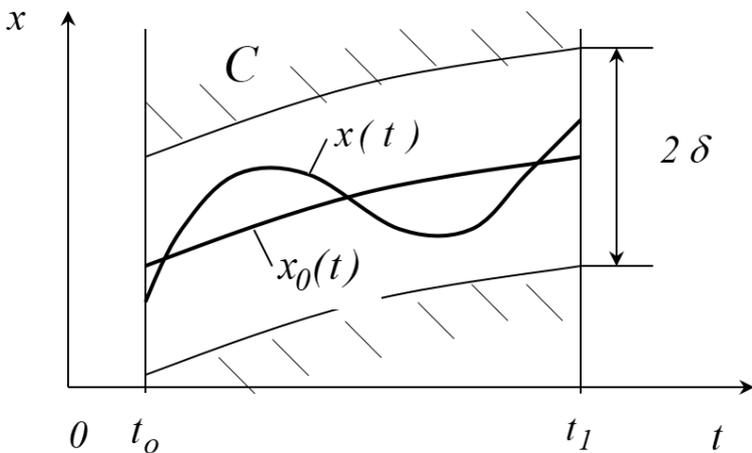


Рис. 2.2. Сильная окрестность кривой $x_0(t)$

Рассмотрим пространство \mathfrak{D} , состоящее из непрерывных функций, определённых на отрезке $[t_0, t_1]$ и имеющих непрерывные первые производные. Очевидно, $\mathfrak{D} \subset C$. Функции $x(t)$ и $x_0(t)$ близки в смысле близости первого порядка, если $|x - x_0|$ и $|\dot{x} - \dot{x}_0|$, а также $\|x - x_0\|$ не превышают некоторой наперед заданной малой положительной величины δ : $\max_t |x - x_0| \leq \delta$, $\max_t |\dot{x} - \dot{x}_0| \leq \delta$, $\|x - x_0\| = \max_t |x - x_0| + \max_t |\dot{x} - \dot{x}_0| \leq \delta$. Такая окрестность называется слабой (рис. 2.3).

Соответственно вводится понятие близости k -ого порядка, соответствующее функциональному пространству \mathfrak{D}^k .

Определение 5. Функционал I называется непрерывным при $x = x_0(t)$, если для любого положительного ε можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|I[x(t)] - I[x_0(t)]| < \varepsilon$ при $\|x - x_0\| < \delta$, где $\|x - x_0\|$ — норма, определённая в смысле близости функций x и x_0 k -го порядка.

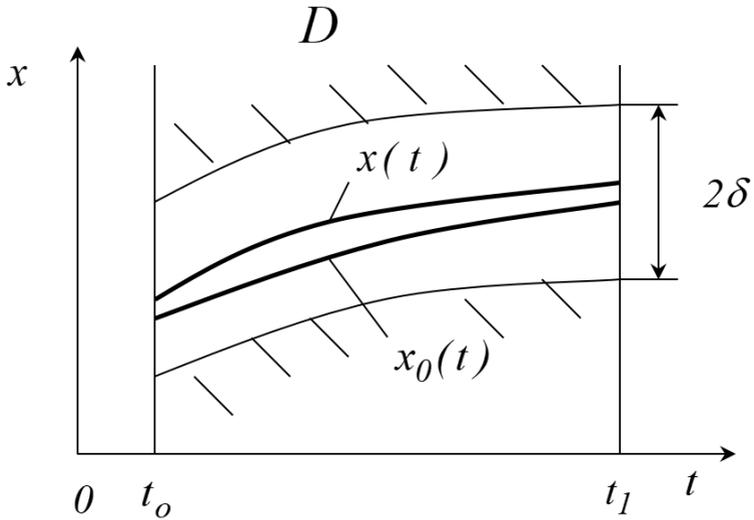


Рис. 2.3. Слабая окрестность кривой $x_0(t)$

Определение 6. Линейным называется функционал $L[x(t)]$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) функционал L является непрерывным,
- 2) $L[cx(t)] = cL[x(t)]$,
- 3) $L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)]$.

Общий вид линейного функционала

$$L = \int_{t_0}^{t_1} [P(t)x(t) + Q(t)\dot{x}(t)]dt. \quad (2.3)$$

2.2. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала

Рассмотрим некоторый функционал $I[x(t)]$ и его приращение $\Delta I = I[x + \delta x] - I[x]$, где δx — вариация x .

Определение 7. Вариацией функции $x(t)$, принадлежащей определённому классу функций, называется разность между двумя функциями при одинаковом значении аргумента t : $\delta x = x_0(t) - x(t)$.

Определение 8. Если ΔI можно представить в виде

$$\Delta I = L[x(t), \delta x] + \beta[x(t), \delta x] \|\delta x\|, \quad (2.4)$$

где $L[x(t), \delta x] \rightarrow 0$ при $\|\delta x\| \rightarrow 0$, то линейная по отношению к δx часть приращения функционала, т.е. $L[x(t), \delta x]$, называется вариацией функционала и обозначается δI .

Функционал достигает экстремума при $x = \bar{x}$, если величина приращения функционала ΔI сохраняет свой знак в некоторой окрестности $\bar{x}(t)$. Различают сильный и слабый экстремумы.

Если существует величина $\delta > 0$, что $I[x(t)] - I[\bar{x}]$ сохраняет знак для всех x , входящих в пространство (класс) \mathfrak{D}^1 , у которых норма $\|x - \bar{x}\|_{\mathfrak{D}^1} < \delta$, то говорят, что при $x = \bar{x}$ достигается слабый экстремум функционала. Аналогично, экстремум называется сильным, если ΔI сохраняет знак для всех $x \in C$ и удовлетворяет условию $\|x - \bar{x}\|_C < \delta$. Всякий сильный экстремум будет одновременно и слабым, а слабый сильным быть не может, так как достигается на более узком множестве функций.

Теорема 1. Для того, чтобы функционал I достигал экстремума при $x = \bar{x}$, необходимо, чтобы $\delta I = 0$ при $x = \bar{x}$.

Доказательство. Пусть функционал имеет минимум при $x = \bar{x}$, тогда $\Delta I = I[x + \delta x] - I[\bar{x}] \geq 0$.

С другой стороны $\Delta I = \delta I[\delta x] + \beta \|\delta x\|$.

При достаточно малом δx знак ΔI определяется знаком δI , а в силу линейности δI имеем: $\delta I[-\delta x] = -\delta I[\delta x]$. Следовательно, ΔI может быть и меньше и больше нуля при сколь угодно малом δx разного знака, т.е. экстремум невозможен. Противоречие устраняется, если $\delta I = 0$. ■

2.3. Основная формула для вариации функционала

Рассмотрим задачу со свободными концами. Будем считать, что экстремали — это кривые, концы которых могут произвольно перемещаться (рис. 2.4). Экстремаль $\bar{x}(t)$ изображена дугой AB , в результате её варьирования получается дуга $A'B'$.

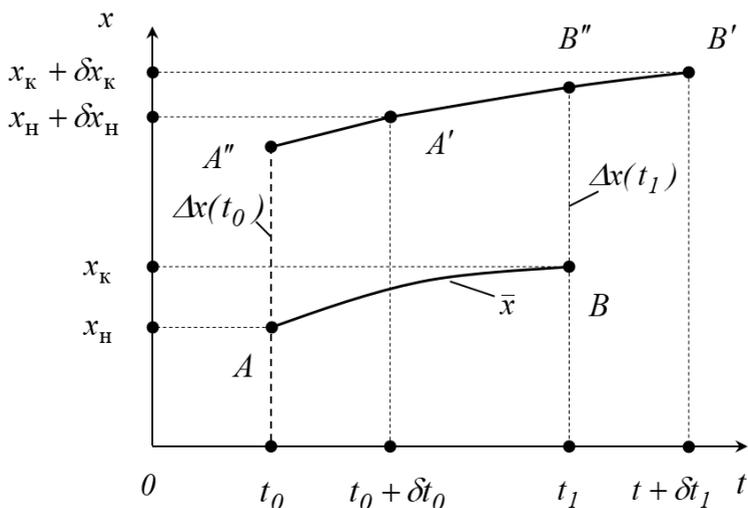


Рис. 2.4. Задача со свободными концами

Для этого общего случая определим вариацию функционала δI , как линейную по отношению к δx часть приращения функционала ΔI .

Запишем выражение для приращения функционала:

$$\begin{aligned} \Delta I &= I[\bar{x} + \Delta x] - I[\bar{x}] = \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) - F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})] dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) dt - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, \bar{x} + \Delta x, \dot{\bar{x}} + \Delta \dot{x}) dt. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение, используя формулу Тейлора и отбросив члены выше первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta I \approx \int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Delta x + F_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Delta \dot{x}] dt + \\ + F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (F_{\dot{x}} \Delta x) &= \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \Delta x + F_{\dot{x}} \frac{d}{dt} \Delta x, \\ \int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}} \frac{d}{dt} \Delta x dt &= F_{\dot{x}} \Delta x \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \Delta x dt, \end{aligned}$$

получим

$$\Delta I \approx \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \right) \Delta x dt + F_{\dot{x}} \Delta x \Big|_{t_0}^{t_1} + F \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - F \Big|_{t=t_0} \delta t_0.$$

Проведем некоторые построения с целью приведения ординат кривых AB и $A'B'$ к одинаковым значениям аргумента t : t_0 и t_1 . Для этого воспользуемся линейной экстраполяцией концов кривых: из точки A' проведем касательную до точки A'' , соответствующей значению t_1 ; точку B'' получим, проведя вертикальный отрезок из точки B .

Учитывая, что $\Delta x(t_0) \approx \delta x_{\text{н}} - \dot{x} \delta t_0$ и $\Delta x(t_1) \approx \delta x_{\text{к}} - \dot{x} \delta t_1$, получим формулу для вариации функционала:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} \right) \Delta x dt + F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_1} \delta x_{\text{к}} - F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_0} \delta x_{\text{н}} + \\ + (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это выражение учитывает изменение функционала от варьирования самой кривой (интегральный член), от варьирования её концов (второй и третий члены) и от варьирования отрезка $[t_0, t_1]$ (четвёртый и пятый члены).

Поскольку $\Delta x(t)$, $\delta x_{\text{н}}$, $\delta x_{\text{к}}$, δt_0 , δt_1 независимы друг от друга, необходимое условие экстремума $\delta I = 0$ приводит (к помимо известному уравнению Эйлера) к требованию обращения в нуль всех внеинтегральных членов выражения (2.5):

$$\begin{aligned} F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_1} \delta x_{\text{к}} = 0, \quad F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_0} \delta x_{\text{н}} = 0, \\ (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_1} \delta t_1, \quad (F - F_{\dot{x}} \dot{x}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.4. Задача с подвижными границами

При исследовании функционала (2.1) на экстремум предположим, что одна или обе граничные точки могут перемещаться по заданным кривым $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Эта задача называется задачей с подвижными границами. В этом случае класс допустимых кривых расширяется. Поэтому если на кривой $\bar{x}(t)$ достигается экстремум в задаче с подвижными границами, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $\bar{x}(t)$. Следовательно, функция $\bar{x}(t)$ должна быть решением уравнения Эйлера, и все кривые $\bar{x}(t, c_1, c_2)$, на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными концами, должны быть экстремалиями.

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с закреплёнными концами такими условиями были $x(t_0) = x_n$ и $x(t_1) = x_k$. В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют. Недостающие условия для определения произвольных постоянных должны быть получены из основного необходимого условия экстремума равенства нулю вариации δI .

Рассмотрим следующую задачу с подвижными границами. Найти экстремум функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt,$$

определённого на кривых, концы которых могут перемещаться по линиям $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ (рис. 2.5).

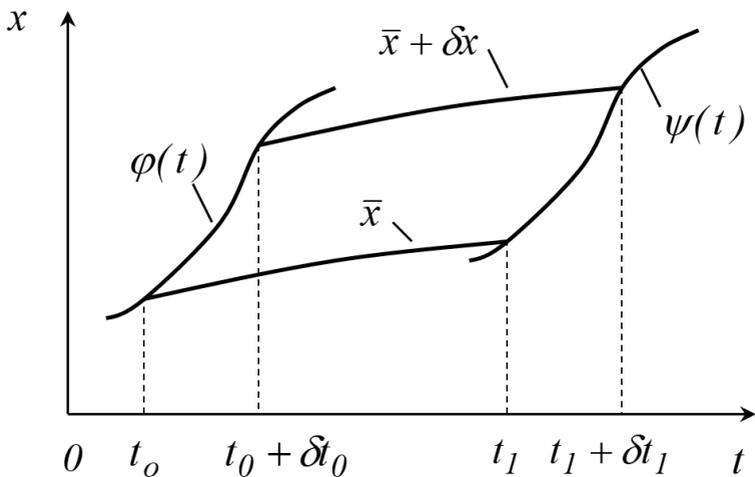


Рис. 2.5. Задача с подвижными концами

Искомые кривые (экстремали) должны удовлетворять уравнению Эйлера, поэтому в выражении для вариации функционала остается только внеинтегральный член. Учитывая, что

$$\delta x_{\text{н}} = \dot{\varphi} \delta t_0 + \alpha_0,$$

$$\delta x_{\text{к}} = \dot{\psi} \delta t_1 + \alpha_1,$$

где α_0 и α_1 — бесконечно малые величины, имеем

$$\delta I = \left(F_{\dot{x}} \dot{\psi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x} \right) \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - \left(F_{\dot{x}} \dot{\varphi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x} \right) \Big|_{t=t_0} \delta t_0.$$

Вариации независимой переменной δt_0 и δt_1 не равны нулю, поэтому выражения $\left(F_{\dot{x}} \dot{\psi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x} \right) \Big|_{t=t_1}$, $\left(F_{\dot{x}} \dot{\varphi} + F - F_{\dot{x}} \dot{x} \right) \Big|_{t=t_0}$ должны обращаться в нуль:

$$\left[F + F_{\dot{x}}(\dot{\psi} - \dot{x}) \right] \Big|_{t=t_1} = 0, \quad (2.7)$$

$$\left[F + F_{\dot{x}}(\dot{\varphi} - \dot{x}) \right] \Big|_{t=t_0} = 0. \quad (2.8)$$

Эти граничные условия называются условиями трансверсальности. Про искомую экстремаль $\bar{x}(t)$ говорят, что она трансверсальна кривым $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Условия трансверсальности позволяют определить две постоянные интегрирования после решения уравнения Эйлера.

2.5. Постановка задачи оптимального управления непрерывной динамической системой

Рассмотрим непрерывную динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.9)$$

где \mathbf{x} — вектор состояния системы размерности n (фазовый вектор, вектор фазовых координат), \mathbf{u} — вектор управления размерности r , t — время, определенное на отрезке $[t_0, t_k]$ (t_k может быть фиксированным и свободным), \mathbf{f} — вектор-функция размерности n .

В общем случае на \mathbf{x} и \mathbf{u} накладываются ограничения:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (2.10)$$

где \mathbf{X} и \mathbf{U} — допустимые множества векторов состояния и управления.

Требуется определить управление $\mathbf{u}(t)$, которое переводит систему (2.9) с учётом ограничений (2.10) из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{x}(t_k)$ при минимальном значении критерия оптимальности (функционала):

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + F[\mathbf{x}(t)]. \quad (2.11)$$

Функционалы вида (2.11) называются интегротерминальными критериями. При $f_0 \neq 0$ и $F \neq 0$ задача называется задачей Больца, при $f_0 = 0$ — задачей Майера, при $F = 0$ — задачей Лагранжа.

В дальнейшем будем полагать, что начальное состояние \mathbf{x}_0 фиксировано, а конечное $\mathbf{x}(t_k)$ может быть свободным или принадлежать некоторому многообразию $g[x(t)] = 0$.

2.6. Игольчатая вариация управления

Введение понятия игольчатой вариации управления [4] позволило получить необходимое условие минимума функционала при ограничениях на управление.

Обычно вариация управления рассматривается как гладкая функция $\delta \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)$. Игольчатой вариацией называется разность $\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}(t)$ (рис. 2.6), где $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{v}$ при $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$, $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}$ при $t \notin [\tau, \tau + \varepsilon]$, $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ — постоянная величина, ε — бесконечно малая положительная величина.

Влияние игольчатого варьирования управления на поведение системы аналогично влиянию короткого импульса (рис. 2.7). Степень влияния импульса определяется площадью $(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\tau))\varepsilon$.

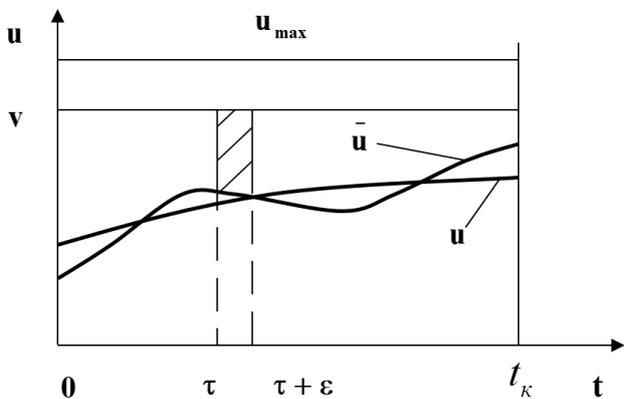


Рис. 2.6. Вариации управления

Поскольку эта величина при $\epsilon \rightarrow 0$ становится бесконечно малой, то её влияние на дальнейшее движение системы бесконечно мало. Малость возмущения позволяет использовать линеаризацию, что упрощает решение задачи, а также рассматривать вариации управления в разные моменты времени независимо друг от друга.

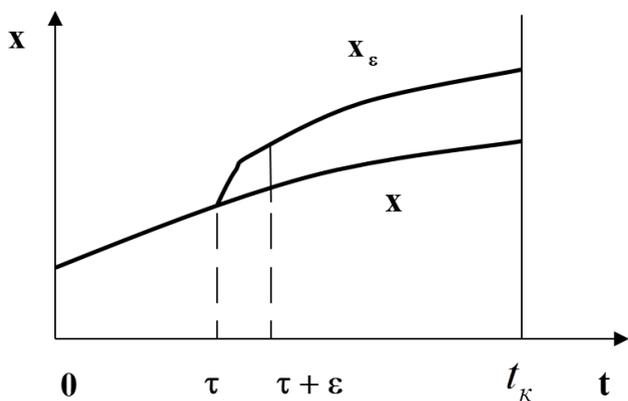


Рис. 2.7. Влияние игольчатого варьирования управления на поведение системы

2.7. Основная теорема принципа максимума. Функция Гамильтона и её свойства

Рассмотрим задачу Лагранжа, полагая, что система и функционал не зависят явно от времени, а на вектор \mathbf{x} ограничения не накладываются:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.12)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min. \quad (2.13)$$

Введём в рассмотрение расширенный вектор $\mathbf{x}^{*\Gamma} = (x_0, \mathbf{x}^\Gamma)$, где компонент x_0 является решением уравнения

$$\dot{x}_0 = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad x_0(t_0) = 0.$$

Таким образом, размерность вектора \mathbf{x}^* равна $n + 1$. Тогда задача принимает частный вид задачи Майера:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^*, \quad (2.14)$$

$$I = x_0(t_k) \rightarrow \min, \quad (2.15)$$

где $\mathbf{f}^{*\Gamma} = (f_0, \mathbf{f}^\Gamma)$, $(x^*(t_0))^\Gamma = (0, x_0^\Gamma)$.

Пусть $\bar{\mathbf{u}}(t)$ — искомое оптимальное управление, а $\bar{\mathbf{x}}^*(t)$ — соответствующая ему траектория (рис. 2.8):

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}^* = \mathbf{f}^*(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}), \quad \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad \bar{\mathbf{x}}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^*.$$

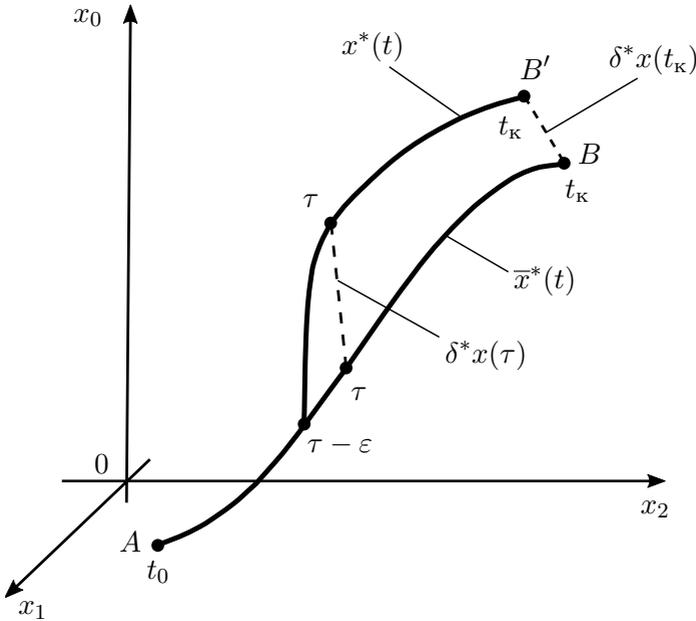


Рис. 2.8. Траектории движения системы

В дальнейшем будем полагать, что $\mathbf{u}(t)$ относится к классу кусочно-непрерывных функций, т.е. может иметь конечное число точек разрыва первого рода. Дадим игольчатую вариацию управлению на бесконечно малом интервале $\tau - \varepsilon < t < \tau$. В результате варьирования дальнейшее движение $\mathbf{x}^*(t)$ при $t > \tau$ будет отличаться от оптимального $\bar{\mathbf{x}}^*(t)$ (рис. 2.8). Обозначим через $\delta\mathbf{x}^*(t)$ вариацию траектории $\delta\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}^*(t) - \bar{\mathbf{x}}^*(t)$.

С точностью до малых высшего порядка для момента $t = \tau$ будем иметь

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}^*(\tau) &= \mathbf{x}^*(\tau) - \bar{\mathbf{x}}^*(\tau) = \\ &= \varepsilon [\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}_\varepsilon(\tau)) - \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau))]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как $\delta \dot{\mathbf{x}}^*(\tau)$ — бесконечно малая величина, то возмущённая траектория будет бесконечно мало отличаться от оптимальной. Поэтому для определения вариации $\delta \mathbf{x}^*(t)$ при $t > \tau$ можно воспользоваться уравнением в вариациях:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}^* = \left(\frac{\partial \mathbf{f}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \right) \delta \mathbf{x}^*, \quad \tau \leq t \leq t_k. \quad (2.17)$$

Интегрируя последнее выражение, можно получить вариацию траектории $\delta \mathbf{x}^*(t)$ для любого $t > \tau$, в том числе и для $t = t_k$, т.е. $\delta \mathbf{x}^*(t_k)$. Но вариация $\delta x_0(t_k)$ характеризует изменение функционала δI за счёт игольчатой вариации управления. Так как $\bar{\mathbf{u}}(t)$ обеспечивает минимум I , то $\delta I = \delta x_0(t_k) \geq 0$ или

$$-\delta I = -\delta x_0(t_k) = [\Psi^*(t_k)]^T \delta \mathbf{x}^*(t_k) \leq 0, \quad (2.18)$$

где $\Psi^*(t_k)$ — вектор размерности вектора $\mathbf{x}^*(t)$, подобранный так, чтобы скалярное произведение $\Psi^*(t_k)$ и $\delta \mathbf{x}^*(t)$ равнялось $-\delta x_0(t_k)$. Для этого достаточно положить

$$\psi_0(t_k) = -1, \quad \Psi^T(t_k) \delta \mathbf{x}(t_k) = 0. \quad (2.19)$$

Поставим задачу найти вектор $\Psi^*(t)$, который удовлетворял бы для любого $\tau \leq t \leq t_k$ условию:

$$[\Psi^*(t)]^T \delta \mathbf{x}^*(t) = [\Psi^*(t_k)]^T \delta \mathbf{x}^*(t_k) = -\delta x_0(t_k). \quad (2.20)$$

Продифференцируем по времени:

$$\dot{\Psi}^{*T} \delta \mathbf{x}^* + \Psi^{*T} \delta \dot{\mathbf{x}}^* = 0.$$

Учитывая уравнение в вариациях (2.17), получим

$$\left[\dot{\Psi}^{*\text{T}} + \Psi^{*\text{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \right) \right] \delta \mathbf{x}^* = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого $\delta \mathbf{x}^*$, то получим следующее дифференциальное уравнение для вектора $\Psi^*(t)$:

$$\dot{\Psi}^* = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \right)^{\text{T}} \Psi^*. \quad (2.21)$$

Это уравнение может быть решено лишь совместно с исходной системой, т.к. в него входят \mathbf{x}^* и \mathbf{u} .

Перепишем соотношение (2.20) для $t = \tau$ с учётом (2.19):

$$[\Psi^*(\tau)]^{\text{T}} \delta \mathbf{x}^*(\tau) = -\delta x_0(t_{\text{к}}) \leq 0.$$

Раскрывая его с помощью (2.16), получим

$$[\Psi^*(\tau)]^{\text{T}} \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}_{\varepsilon}(\tau)) - [\Psi^*(\tau)]^{\text{T}} \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau)) \leq 0. \quad (2.22)$$

Введём в рассмотрение функцию Гамильтона H :

$$H[\Psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] = [\Psi^*(t)]^{\text{T}} \cdot \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t)). \quad (2.23)$$

Тогда (2.22) можно представить в виде:

$$H[\bar{\Psi}^*(\tau), \bar{\mathbf{x}}^*(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau)] = \max_{\mathbf{u}_{\varepsilon} \in \mathbf{U}} H[\bar{\Psi}^*(\tau), \bar{\mathbf{x}}^*(\tau), \mathbf{u}_{\varepsilon}(\tau)].$$

Т.к. τ может быть любым из $[t_0, t_{\text{к}}]$, то окончательно

$$H = H(\bar{\Psi}^*, \bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{u}}) = \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H(\bar{\Psi}^*, \bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{u}}) \quad \forall t \in [t_0, t_{\text{к}}]. \quad (2.24)$$

Если учесть, что согласно (2.23):

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \psi_j,$$

то уравнения, определяющие $\mathbf{x}^*(t)$ и $\boldsymbol{\Psi}^*(t)$ на оптимальной траектории при $\bar{\mathbf{u}}(t)$ могут быть представлены в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\Psi}^*}, \quad \dot{\boldsymbol{\Psi}}^{*\Gamma} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^*}. \quad (2.25)$$

Система (2.25) называется канонической. Заметим, что она с точностью до обозначений совпадает с канонической формой уравнения Эйлера. Граничными условиями для неё являются следующие:

$$\bar{\mathbf{x}}^*(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^*_0, \quad \psi_0(t_k) = -1, \quad \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\Gamma}(t_k) \delta \mathbf{x}(t_k) = 0. \quad (2.26)$$

Условия (2.26) называются условиями трансверсальности. Соотношения (2.21)–(2.26) задают необходимые условия оптимальности, получившие название «Принцип максимума Понтрягина». Сформулируем его в виде теоремы [24].

Теорема 2 (Принцип максимума Понтрягина). *Если $\bar{\mathbf{x}}(t)$ есть оптимальная траектория и $\bar{\mathbf{u}}(t)$ соответствующее ей оптимальное управление для задачи (2.12), обеспечивающие минимум функционалу (2.13), то существует ненулевая и непрерывная вектор-функция $\boldsymbol{\Psi}(t)$, удовлетворяющая канонической системе дифференциальных уравнений (2.25) и условиям трансверсальности (2.26), такая что функция Гамильтона (2.23) для любого момента времени достигает своего максимума на множестве \mathbf{U} при управлении $\bar{\mathbf{u}}(t)$, то есть выполняется условие (2.24).*

Свойства гамильтониана

На оптимальной траектории гамильтониан обладает следующими свойствами [26]:

- 1) гамильтониан $H(t)$ — непрерывная функция времени для всех $t \in [t_0, t_k]$;
- 2) гамильтониан постоянен на оптимальной траектории, т.е. $H(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_0, t_k]$;
- 3) если t_k свободно, то $H \equiv 0$ для всех $t \in [t_0, t_k]$.

Глава 3

Задача оптимального управления углом атаки

3.1. Постановка задачи

3.1.1. Уравнения движения

При построении математической модели движения ГЛА используются следующие допущения:

- движение происходит в вертикальной плоскости;
- поле тяжести является однородным;
- атмосфера неподвижна;
- аппарат является материальной точкой переменной массы;
- направления вектора тяги и аэродинамической хорды при нулевом угле атаки совпадают с направлением строительной горизонтали ГЛА;
- используются приближённые формулы для синуса и косинуса в виде:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2.$$

С учётом принятых допущений уравнения движения ГЛА в скоростной системе координат примут вид:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{r\mu m_0 g_0}{2m} (2 - \alpha^2) - C_{xa} \frac{\rho V^2}{2m} S - g_0 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{1}{V} \left(\frac{r\mu m_0 g_0}{m} \alpha + C_{ya} \frac{\rho V^2}{2m} S - g_0 \cos \theta \right) + \frac{V \cos \theta}{R + h}, \\ \dot{h} = V \sin \theta, \\ \dot{m} = -\beta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь V , м/с — скорость; θ , рад — угол наклона траектории; h , м — высота полёта; m , кг — масса ГЛА; α , рад — угол атаки; r — относительная тяга силовой установки (СУ); C_{xa} — коэффициент силы лобового сопротивления; C_{ya} — коэффициент подъёмной силы; S — характерная площадь ГЛА; ρ — плотность атмосферы Земли; R_3 , м — радиус Земли, g_0 , м/с² — ускорение свободного падения, μ — стартовая тяговооружённость, m_0 , кг — стартовая масса, β , кг/с — секундный расход топлива СУ, который определяется как

$$\beta = \frac{r\mu m_0}{j_{уд}} J_0. \quad (3.2)$$

Подставим (3.2) в последнее уравнение системы (3.1), получим:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{r\mu m_0 g_0}{2m} (2 - \alpha^2) - C_{xa} \frac{\rho V^2}{2m} S - g_0 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{1}{V} \left(\frac{r\mu m_0 g_0}{m} \alpha + C_{ya} \frac{\rho V^2}{2m} S - g_0 \cos \theta \right) + \frac{V \cos \theta}{R + h}, \\ \dot{h} = V \sin \theta, \\ \dot{m} = -\frac{r\mu m_0}{j_{уд}} J_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Переменные V , θ , h , m , входящие в систему (3.3) вместе со своими первыми производными, являются фазовыми координатами, определяющими состояние ГЛА в любой момент времени t . Переменная α определяет закон управления состоянием ГЛА в любой момент времени t в виде функциональной зависимости $\alpha(t)$ и является программой управления или управлением углом атаки ГЛА.

Величины r и $j_{уд}$ являются функциями координат V и h . Величины C_{xa} , C_{ya} — функциями угла атаки, а также координат V и h . Плотность атмосферы Земли зависит от высоты полёта ГЛА. Все остальные величины в системе (3.3) являются постоянными.

3.1.2. Математическая постановка

Рассмотрим постановку задачи оптимального управления в форме неклассической вариационной задачи Майера, для которой область определения уравнений движения является закрытой. Для уравнений движения (3.3) данная область имеет вид:

$$N_{\text{доп}} = \begin{cases} |2V(t) - V_{\max}| \leq V_{\max}, \\ \pi - 2|\theta(t)| \geq 0, \\ |2h(t) - h_{\max}| \leq h_{\max}, \\ |m(t) - m_0| \leq m_0, \\ |2\alpha - \alpha_{\max} - \alpha_{\min}| \leq \alpha_{\max} - \alpha_{\min}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь $V(t)$, $\theta(t)$, $h(t)$, $m(t)$ — кусочно-гладкие функции (допустимые траектории); $\alpha(t)$ — кусочно-непрерывная функция (допустимое управление); t — время; V_{\max} и h_{\max} — максимально-допустимые скорость и высота полёта ГЛА соответственно; α_{\max} и α_{\min} — максимальный и минимальный углы атаки.

Определим следующие граничные условия:

$$\begin{cases} t = t_0 = 0 & : \quad V = V_{\text{н}}, \quad \theta = \theta_{\text{н}}, \quad h = h_{\text{н}}, \quad m = m_{\text{н}}, \\ t = t_{\text{к}} & : \quad V = V_{\text{к}}, \quad \theta = \theta_{\text{к}}, \quad h = h_{\text{к}}, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $t_{\text{к}}$ — время движения на рассматриваемом участке; $V_{\text{н}}, V_{\text{к}}, \theta_{\text{н}}, \theta_{\text{к}}, h_{\text{н}}, h_{\text{к}}, m_{\text{н}}$ — заданные числа, принадлежащие области $N_{\text{доп}}$.

На допустимых кривых $V(t), \theta(t), h(t), m(t)$ и $\alpha(t)$ определим функцию $G = -m(t)$, которую с точностью до постоянной можно интерпретировать как количество топлива, израсходованного при движении ГЛА в течение промежутка времени t . Тогда с учётом (3.5) функционал задачи имеет вид:

$$\Delta G = m_{\text{н}} - m_{\text{к}}. \quad (3.6)$$

В результате получим следующую задачу Майера: среди допустимых функций G , найти такую, которая доставляет минимум функционалу (3.6).

Физический смысл данной постановки заключается в следующем: требуется перевести ГЛА за произвольное время $t_{\text{к}}$ с начальной высоты $h_{\text{н}}$ на высоту $h_{\text{к}}$, увеличив скорость от начального значения $V_{\text{н}}$ до значения $V_{\text{к}}$ с изменением угла наклона траектории от начального значения $\theta_{\text{н}}$ до значения $\theta_{\text{к}}$, затратив при этом минимальное количество топлива.

Решением поставленной задачи будут являться некоторые кусочно-гладкие функции $V(t), \theta(t), h(t), m(t)$ (оптимальные траектории) и кусочно-непрерывная функция $\alpha_{\text{opt}}(t)$ (оптимальная программа управления), заданные на отрезке $t \in [0, t_{\text{к}}]$ и определяющие оптимальное движение ГЛА в атмосфере на этапе разгона-набора высоты.

3.2. Принцип максимума

3.2.1. Сопряжённая система

В качестве метода решения поставленной задачи Майера используется принцип максимума Л.С. Понтрягина, который позволяет перейти от вариационной задачи к краевой [24].

Составим функцию Гамильтона:

$$H = \psi_V \dot{V} + \psi_\theta \dot{\theta} + \psi_h \dot{h} + \psi_m \dot{m}, \quad (3.7)$$

где $\psi_V, \psi_\theta, \psi_h, \psi_m$ — переменные, сопряжённые фазовым (сопряжённые переменные).

Подставляя в (3.7) выражения для производных фазовых координат из уравнений (3.3), получим:

$$\begin{aligned} H = & \psi_V \left[\frac{r\mu m_0 g_0}{2m} (2 - \alpha^2) - C_{xa} \frac{\rho V^2}{2m} S - g_0 \sin \theta \right] + \\ & + \psi_\theta \left[\frac{1}{V} \left(\frac{r\mu m_0 g_0}{m} \alpha + C_{ya} \frac{\rho V^2}{2m} S - g_0 \cos \theta \right) + \frac{V \cos \theta}{R + h} \right] + \\ & + \psi_h - \psi_m \frac{r\mu m_0}{j_{уд}} J_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Сопряжённые переменные определяются из решения системы сопряжённых дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\psi}_V = -\frac{\partial H}{\partial V}, \quad \dot{\psi}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \dot{\psi}_h = -\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \dot{\psi}_m = -\frac{\partial H}{\partial m}. \quad (3.9)$$

Подставим в (3.9) выражение (3.8) и определим соответствующие частные производные. В результате система уравнений для сопряжённых переменных примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_V = & -\psi_V \left[\frac{\partial r}{\partial V} \frac{2 - \alpha^2}{2m} \mu m_0 g_0 - \left(\frac{\partial C_{xa}}{\partial V} \cdot \frac{V}{2} + C_{xa} \right) \frac{\rho V}{m} S \right] + \\
& + \psi_\theta \left[\left(\frac{r}{V} - \frac{\partial r}{\partial V} \right) \frac{\alpha \mu m_0 g_0}{Vm} - \right. \\
& \quad \left. - \left(V \frac{\partial C_{ya}}{\partial V} + C_{ya} \right) \frac{\rho S}{2m} - \frac{\cos \theta}{R_3 + h} - \frac{g_0 \cos \theta}{V^2} \right] - \\
& - \psi_h \sin \theta + \psi_m \frac{\mu m_0}{J_0} \cdot \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{r}{j_{y\alpha}} \right), \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\dot{\psi}_\theta = \psi_V g_0 \cos \theta + \psi_\theta \left(\frac{V}{R_3 + h} - \frac{g_0}{V} \right) \sin \theta - \psi_h V \cos \theta, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_h = & -\psi_V \left[\frac{\partial r}{\partial h} \frac{2 - \alpha^2}{2m} \mu m_0 g_0 - \left(\frac{\partial C_{xa}}{\partial h} \rho + C_{xa} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \frac{V^2 S}{2m} \right] - \\
& - \psi_\theta \left[\frac{\partial r}{\partial h} \frac{\alpha \mu m_0 g_0}{Vm} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial C_{ya}}{\partial h} \rho + C_{ya} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \frac{VS}{2m} - \frac{V \cos \theta}{(R_3 + h)^2} \right] - \\
& - \psi_m \frac{\mu m_0}{J_0} \cdot \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{r}{j_{y\alpha}} \right), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_m = & \psi_V \frac{1}{2m^2} \left[(2 - \alpha^2) r \mu m_0 g_0 - C_{xa} \rho V^2 S \right] + \\
& + \psi_\theta \frac{1}{2Vm^2} (2\alpha r \mu m_0 g_0 + C_{ya} \rho V^2 S). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

3.2.2. Постановка краевой задачи

Для того чтобы функционал ΔG вариационной задачи Майера достигал сильного минимума, необходимо существование на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$ ненулевых непрерывных функций $\psi_V(t)$, $\psi_\theta(t)$, $\psi_h(t)$, $\psi_m(t)$, удовлетворяющих сопряжённой системе (3.10)–(3.13) на которых:

- гамильтониан (3.8) достигает максимума по углу атаки;
- выполняется условие трансверсальности в виде:

$$[\psi_V \delta V + \psi_\theta \delta \theta + \psi_h \delta h + \psi_m \delta m + H \delta t + \delta G]_{t_0}^{t_k} = 0. \quad (3.14)$$

Необходимое условие максимума функции Гамильтона по углу атаки имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0$$

или с учётом выражения (3.8):

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_\theta}{V} \left(\frac{r\mu m_0 g_0}{m} + \frac{\partial C_{ya}}{\partial \alpha} \frac{\rho V^2}{2m} S \right) - \\ & - \psi_V \left(\frac{r\mu m_0 g_0}{m} \alpha + \frac{\partial C_{xa}}{\partial \alpha} \frac{\rho V^2}{2m} S \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для того чтобы выразить из уравнения (3.15) оптимальный угол атаки в явной форме, определим аэродинамические коэффициенты в виде следующих аналитических зависимостей:

$$\begin{cases} C_{xa}(M, \alpha) = C_{xa0}(M) + C_{xa1}(M)\alpha + C_{xa2}(M)\alpha^2, \\ C_{ya}(M, \alpha) = C_{ya0}(M) + C_{ya1}(M)\alpha, \end{cases} \quad (3.16)$$

где M — число Маха.

С учётом (3.16) определим из уравнения (3.15) выражение для оптимального угла атаки в виде:

$$\alpha_{\text{опт}} = \frac{\psi_\theta (2r\mu m_0 g_0 + C_{ya1}\rho V^2 S) - \psi_V C_{xa1}\rho V^3 S}{2V\psi_V (r\mu m_0 g_0 + C_{xa2}\rho V^2 S)}. \quad (3.17)$$

Достаточное условие максимума гамильтониана H по управлению имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} < 0$$

или с учётом (3.15):

$$\psi_V \left(\frac{r\mu m_0 g_0}{m} + \frac{\partial^2 C_{xa}}{\partial \alpha^2} \frac{\rho V^2}{2m} S \right) > 0.$$

С учётом (3.16) получим:

$$\frac{\psi_V}{m} (r\mu m_0 g_0 + C_{xa2} \rho V^2 S) > 0. \quad (3.18)$$

Коэффициент C_{xa2} положителен, как старший коэффициент параболы, описывающей зависимость коэффициента лобового сопротивления C_{xa} от угла атаки. Также положительными являются масса ГЛА m , относительная тяга r , стартовая тяговооружённость μ , ускорение свободного падения g_0 , плотность атмосферы ρ и характерная площадь S . Поэтому достаточное условие (3.18) примет вид:

$$\psi_V > 0. \quad (3.19)$$

Условие трансверсальности (3.14) в начальный момент времени выполняется автоматически, так как согласно (3.5) значения всех фазовых координат и момент времени заданы.

В конце траектории неизвестными являются время и масса ГЛА, поэтому условие трансверсальности (3.14) принимает вид:

$$(\psi_{m_k} - 1) \delta m_k + H_k \delta t_k = 0.$$

Так как вариации массы и времени не равны нулю, то последнее равенство выполняется только тогда, когда равны

нулю соответствующие множители. Таким образом, условие трансверсальности в конечный момент времени задаёт граничные условия для сопряжённой системы в виде:

$$\psi_{m_k} = 1 \quad (3.20)$$

и

$$H_k = 0. \quad (3.21)$$

В результате рассматриваемая вариационная задача сводится к следующей краевой задаче: требуется найти решение системы уравнений (3.3), (3.10)–(3.13), замкнутой соотношением (3.17), которое удовлетворяет граничным условиям (3.5), (3.20) и (3.21).

Параметрами краевой задачи являются значения сопряжённых переменных в начальный момент времени: ψ_v , ψ_θ , ψ_h , ψ_m .

3.3. Прикладное математическое обеспечение

Для получения решения задачи оптимизации набора высоты ГЛА можно воспользоваться любым интегрированным математическим пакетом, например Maple [10], MatLab [11] или Mathematica [8] или разработать собственное программное обеспечение. Изучение математических пакетов остаётся за рамками настоящего пособия. Перечислим лишь необходимые модули, которые создавались автором (в среде Delphi) при решении поставленной задачи:

- главный модуль программы,
- модуль расчёта атмосферы,
- модуль расчёта аэродинамических характеристик,

- модуль расчёта высотно-скоростных характеристик ГЛА,
- модуль расчёта оптимального угла атаки,
- модуль пользовательских функций (вспомогательный),
- модуль параметров модели,
- модуль решения системы дифференциальных уравнений,
- модуль решения краевой задачи,
- модуль решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ),
- модуль реализации метода наименьших квадратов.

Преимущество программного продукта заключается в возможности его перестройки для решения той же задачи для различных аппаратов.

Глава 4

Оптимальный разгон-набор высоты ГЛА с $M_{\max} = 6$

4.1. Объект управления

4.1.1. Компоновочная схема

В качестве объекта управления рассмотрим прототип ГЛА с максимально-допустимым числом Маха полёта $M_{\max} = 6$, использующийся в качестве гиперзвукового самолёта-разгонщика из состава двухступенчатой АКС, а также гиперзвукового маршевого самолёта. Компоновочная схема ГЛА представлена на рисунке 4.1.

Выбранная схема типа «бесхвостка» с крылом двойной стреловидности позволяет за счёт тонкого крыла малого удлинения повысить аэродинамическое качество на сверхзвуковых скоростях, а благодаря отсутствию горизонтального хвостового оперения на гиперзвуковых скоростях сблизить её свойства с волнолётом — гиперзвуковым планером, форма которого, полученная расчётным путём, обеспечивает максимальное аэродинамическое качество в гиперзвуковом диапазоне скоростей.

«Аэродинамическая схема «волнолёт» (рисунок 4.2) была предложена и изучена Теренсом Нонвейлером (Terence Nonweiler)

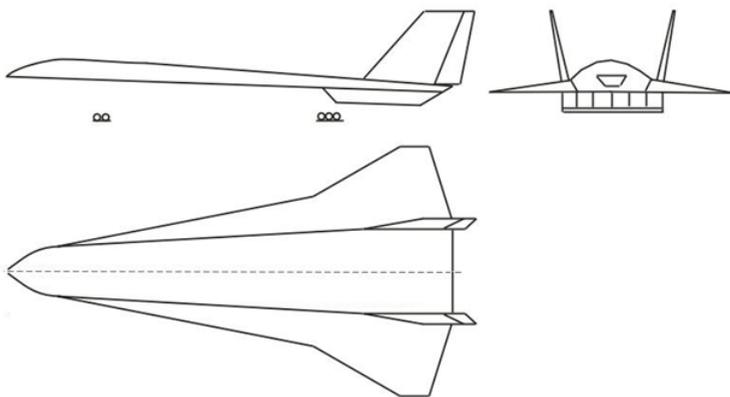


Рис. 4.1. Компоновочная схема ГЛА

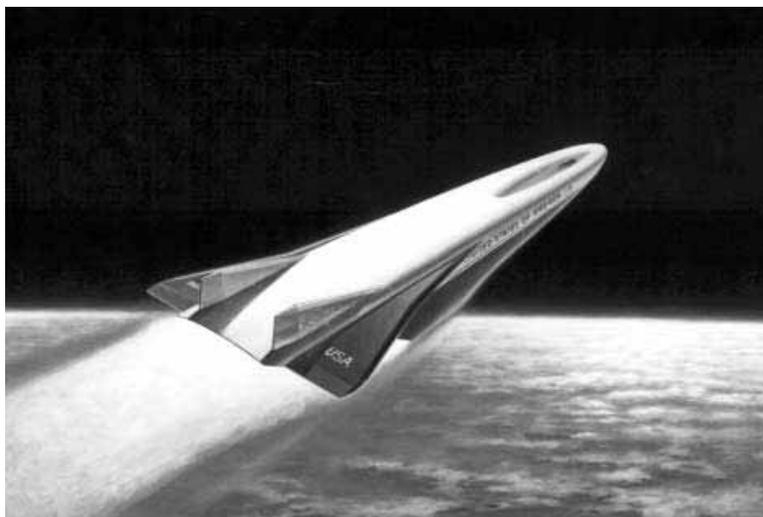


Рис. 4.2. Аэродинамическая схема «волнолёт»
на примере прототипа ВКС Х-30 совместной разработки
компаний DARPA, USAF и NASA
(проект NASP 1982-85 гг.)

из Белфастского университета в 1950-х годах. Исследуя модель аппарата с дельтовидным крылом с малой удельной нагрузкой для обеспечения достаточного теплоотвода, он обнаружил, что ударная волна приводит к образованию области высокого давления под корпусом аппарата, которое может быть использовано для создания подъёмной силы».

В результате высокие значения максимального качества K_{\max} волнолёта достигаются не только за счёт аэродинамической поверхности крыла, но и несущего фюзеляжа, в котором располагаются объёмы полезной нагрузки и топлива. Тем не менее, коэффициенты объёма волнолёта ($\nu = \sqrt{V^3} / S$, где V — объём корпуса, S — площадь крыла), соответствующие высоким значениям K_{\max} , не достаточно велики для использования данной схемы в задачах проектирования реальных ГЛА. Кроме того, равномерное распределение объёма у волнолёта затрудняет размещение баков с криогенным топливом, что приводит к существенному увеличению габаритов по сравнению с классической компоновкой с выделенным фюзеляжем (рисунок 4.1).

4.1.2. Аэродинамические характеристики

Высокое аэродинамическое качество выбранной компоновочной схемы объекта управления (более 2) во всём диапазоне скоростей полёта в атмосфере приводит к необходимости моделирования коэффициента силы лобового сопротивления в виде нелинейной функции угла атаки и скорости. В результате аэродинамические характеристики объекта управления задаются в виде табличных зависимостей коэффициентов подъёмной силы и силы лобового сопротивления от числа M и угла атаки α (таблицы 4.1 и 4.2) [21].

Таблица 4.1. Коэффициент подъёмной силы C_{ya}

M $\alpha,^\circ$	0,7	0,9	1,1	1,4	2	3	4	6
-2	0	0	0	0	0	-0,0062	-0,0097	-0,0118
0	0,0437	0,0452	0,0531	0,0683	0,0620	0,0127	-0,0060	-0,0020
2	0,0874	0,0904	0,1062	0,1366	0,1239	0,0543	0,0219	0,0159
4	0,1311	0,1356	0,1593	0,2044	0,1858	0,0926	0,0493	0,0350
6	0,1748	0,1818	0,2124	0,2732	0,2478	0,1401	0,0866	0,0601
8	0,2185	0,2260	0,2655	0,3415	0,3097	0,1832	0,1204	0,0888
10	0,2622	0,2712	0,3186	0,4097	0,3717	0,2298	0,1583	0,1193

Таблица 4.2. Коэффициент силы лобового сопротивления C_{xa}

M $\alpha,^\circ$	0,7	0,9	1,1	1,4	2	3	4	6
-2	0,0101	0,0115	0,0109	0,0247	0,0203	0,0151	0,0123	0,0097
0	0,0111	0,0126	0,0214	0,0270	0,0224	0,0175	0,0143	0,0103
2	0,0142	0,0159	0,0259	0,0338	0,0285	0,0197	0,0149	0,0109
4	0,0194	0,0214	0,0333	0,0451	0,0388	0,0247	0,0175	0,0131
6	0,0267	0,0291	0,0438	0,0609	0,0532	0,0340	0,0239	0,0176
8	0,0361	0,0390	0,0573	0,0813	0,0717	0,0460	0,0324	0,0243
10	0,0475	0,0511	0,0737	0,1062	0,0942	0,0617	0,0442	0,0335

За характерную площадь принята суммарная площадь крыла с наплывом и подфюзеляжной частью [9].

Аппроксимация указанных в таблице 4.1 и 4.2 зависимостей проводится по следующему алгоритму:

- 1) каждая строка таблицы, определяющая в дискретном виде зависимость аэродинамического коэффициента от числа M , интерполируется с использованием кубических сплайнов (Приложение А);
- 2) полученные 14 интерполяционных полиномов при любом заданном значении M от 0 до 6 определяют в дискретном виде зависимость соответствующего аэродинамического коэффициента от угла атаки, которая далее аппроксимируется с использованием формул (3.16).

Неизвестные коэффициенты полиномов для заданного M определяются методом наименьших квадратов [29].

Результаты аппроксимации для углов атаки, выбираемых из ряда значений от -2 до 10 градусов с шагом 1 градус и в диапазоне чисел M от 0 до 6, приведены на рисунках 4.3 и 4.4.

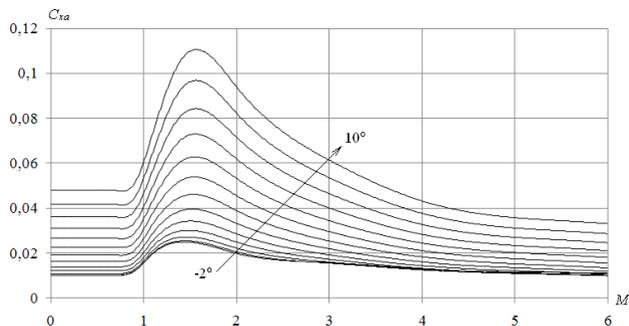


Рис. 4.3. Результаты аппроксимации коэффициента C_{xa}

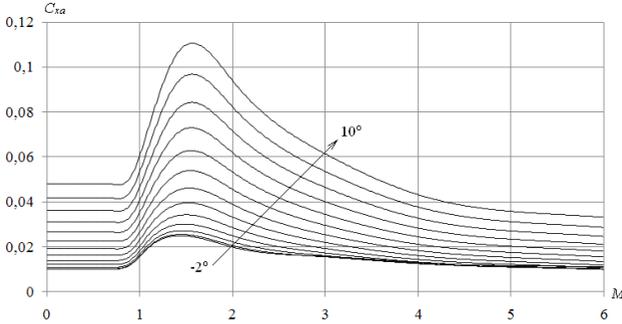


Рис. 4.4. Результаты аппроксимации коэффициента C_{ya}

4.1.3. Высотно-скоростные характеристики

Использование в составе КСУ воздушно-реактивного тракта определяет скорость истечения газов из сопла (эффективный удельный импульс) в виде нелинейной функции высоты и скорости. Рассмотрим в качестве КСУ ракетно-турбинный двигатель пароводородной схемы (РТДп) [20]. Высотно-скоростные характеристики РТДп задаются в виде соответствующих зависимостей относительной тяги и относительного удельного импульса от числа M , высоты полёта и скоростного напора.

Относительная тяга РТДп задается в виде аналитической зависимости от числа M , высоты h и скоростного напора q :

$$r = q \left[7 \cdot 10^{-9} M^4 - 10^{-7} M^3 + 5,5 \cdot 10^{-7} M^2 - 2 \cdot 10^{-7} M + 1,5 \cdot 10^{-5} + 1,4 \cdot 10^{-5} (3 \cdot 10^{-7} \bar{h}^4 + 1) M^{-2} \right], \quad (4.1)$$

где $\bar{h} = h \cdot 10^{-3}$ — высота полёта, выраженная в километрах.

Графики относительной тяги РТДп в зависимости от высоты для различных чисел M приведены на рисунке 4.5.

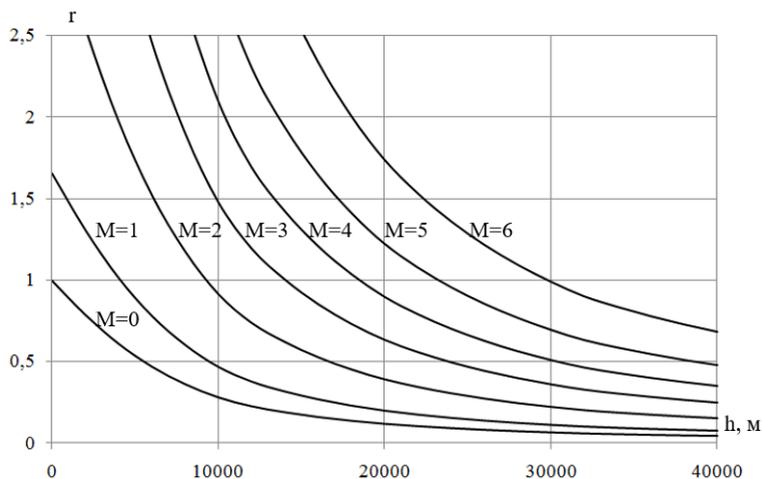


Рис. 4.5. Зависимость относительной тяги РТДп от высоты и числа M

На рисунке 4.6 приведены графики относительной тяги в зависимости от числа M для различных значений скоростного напора q .

Как видно из рисунка 4.5 с увеличением высоты полёта от 0 до 40 км происходит значительное снижение относительной тяги РТДп (при $M = 2$ приблизительно в 10-15 раз). Указанная «нелинейность» характеристики может в общем случае привести к определённым трудностям при поиске регулярного решения краевой задачи, поэтому в дополнение рассмотрим КСУ с относительной тягой, определяемой зависимостью вида

$$r = 4 \cdot 10^{-6} (q + 4265M^2) - 0,1254M + 0,965. \quad (4.2)$$

Основным отличием данной зависимости от исходной является постоянное слагаемое, обеспечивающее ослабление «нелинейно-

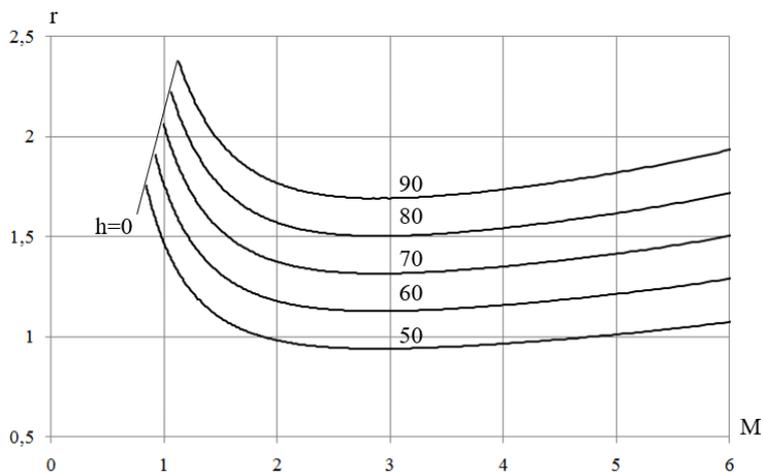


Рис. 4.6. Зависимость относительной тяги РТДп от числа M и скоростного напора

сти» ВСХ. При $M = 2$ увеличение высоты полёта от 0 до 40 км приводит к снижению относительной тяги данной КСУ (далее по тексту — перспективный ВРД) приблизительно в 2,5 раза (приблизительно в 4-6 раз медленнее, чем у РТДп).

Относительный удельный импульс $j_{уд}$ для обоих типов КСУ задаётся в виде табличной зависимости от числа и высоты полёта (таблица 4.3).

Аппроксимация указанной в таблице 4.3 зависимости проводится по следующему алгоритму:

- 1) каждая строка таблицы, определяющая в дискретном виде зависимость относительного удельного импульса от числа Маха, интерполируется с использованием кубических сплайнов (Приложение А);

Таблица 4.3. Относительный удельный импульс КСУ

$H, \text{ км}$	M	0	0,7	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,7	4,7	5,4	6
0		1,00	0,98	1,00	1,08	1,18	1,26	1,24	1,16	1,08	1,02	0,96
5		1,04	1,02	1,04	1,12	1,22	1,30	1,28	1,20	1,12	1,06	1,00
10		1,06	1,04	1,06	1,14	1,24	1,32	1,30	1,22	1,14	1,08	1,02
15		1,06	1,04	1,06	1,14	1,24	1,32	1,30	1,22	1,14	1,08	1,02
20		1,06	1,04	1,06	1,14	1,24	1,32	1,30	1,22	1,14	1,08	1,02
25		1,05	1,03	1,05	1,13	1,23	1,31	1,29	1,21	1,13	1,07	1,01
30		1,04	1,02	1,04	1,12	1,22	1,30	1,28	1,20	1,12	1,06	1,00
35		1,01	0,99	1,01	1,09	1,19	1,27	1,25	1,27	1,09	1,03	0,97
40		0,98	0,96	0,98	1,06	1,16	1,24	1,22	1,14	1,06	1,00	0,94

2) полученные 9 интерполяционных полиномов при любом заданном значении M от 0 до 6 определяют в дискретном виде зависимость относительного удельного импульса от высоты полёта, которая далее аппроксимируется с использованием формулы вида:

$$j_{уд}(M, h) = \sum_{k=0}^6 j_k(M) h^k. \quad (4.3)$$

Неизвестные коэффициенты полиномов для заданного M определяются методом наименьших квадратов [29].

Результаты аппроксимации для чисел M , выбираемых из ряда значений от 2 до 6 м с шагом 0,5 в диапазоне высот от 0 до 40 км, приведены на рисунке 4.7.

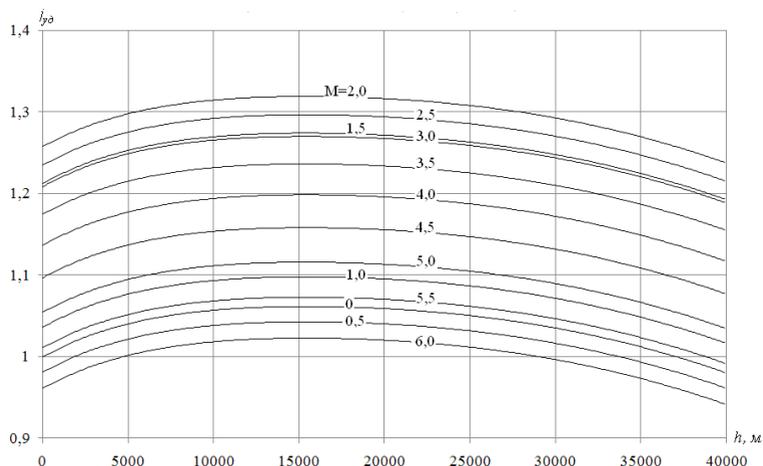


Рис. 4.7. Результаты аппроксимации относительного удельного импульса

4.2. Характеристики атмосферы

Характеристики атмосферы задаются в виде аналитических зависимостей параметров плотности и скорости звука от высоты для стандартной атмосферы [9]. Расчёт характеристик проводится в соответствии с алгоритмом, приведённым в [6].

Приведём аналитические зависимости, используемые при расчётах характеристик, а также результаты расчёта плотности и скорости звука в виде зависимостей указанных характеристик от высоты полёта.

Плотность атмосферы определяется в виде:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{M_c}{R^*} \cdot \frac{p_0(i)}{T(h)} \cdot e^{-p_1(i) \left[\frac{R_3 h}{R_3 + h} - h_{geo}(i) \right]} & \text{при } T_1(i) = 0, \\ \frac{M_c}{R^*} \cdot \frac{p_0(i)}{T(h)} \cdot \left[\frac{T_0(i)}{T(h)} \right]^{p_1(i)} & \text{при } T_1(i) \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{где } T(h) = T_0(i) + T_1(i) \left[\frac{R_3 h}{R_3 + h} - h_{geo}(i) \right],$$

$M_c = 28,964420$ кг/кмоль — молярная масса воздуха на высотах от -2 до 94 км, $R^* = 8314,32$ Дж · К⁻¹ · кмоль⁻¹ — универсальная газовая постоянная, h — высота, p_0 — давление в узле, p_1 — параметр слоя, T_0 — молярная температура, T_1 — градиент температуры, h_{geo} — геопотенциальная высота, i — номер слоя ($h_{geo}(i) \leq h < h_{geo}(i + 1)$).

Значения величин h_{geo} , T_0 , T_1 , p_0 , p_1 для слоя с номером i определяются согласно таблице 4.4.

Производная плотности по высоте имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dh} = \begin{cases} d\rho_A & \text{при } T_1(i) = 0, \\ d\rho_B & \text{при } T_1(i) \neq 0, \end{cases}$$

где

$$d\rho_A = -\frac{M_c}{R^*} \cdot \frac{p_0(i)}{T_0(i)} \cdot e^{-p_1(i) \left[\frac{R_3 h}{R_3 + h} - h_{geo}(i) \right]} \cdot \frac{p_1(i) R_3^2}{(R_3 + h)^2},$$

$$d\rho_B = -\frac{M_c}{R^*} \cdot p_0(i) \cdot (p_1(i) + 1) \cdot \frac{T_0(i)^{p_1}}{T(h)^{p_1+2}} \cdot \frac{dT(h)}{dh}.$$

Таблица 4.4. Параметры стандартной атмосферы Земли

Номер слоя, узла	h_{geo} , км'	T_0 , К	T_1 , К/м'	p_0 , Па	p_1 , м ⁻¹
1	0	288,15	-0,0065	101325	-5,25589
2	11	216,65	0	22632	$1,5769 \cdot 10^{-4}$
3	20	216,65	0,001	5474,87	34,16323
4	32	228,65	0,0028	868,014	12,20113
5	47	270,65	0	110,906	$1,2623 \cdot 10^{-4}$

Производная $\frac{dT(h)}{dh}$ имеет вид:

$$\frac{dT(h)}{dh} = \frac{T_1(i) R_3^2}{(R_3 + h)^2}.$$

Скорость звука определяется в виде:

$$a(h) = 20,046796 \sqrt{T(h)}.$$

Производная скорости звука по высоте имеет вид:

$$\frac{da}{dh} = \frac{10,023398}{\sqrt{T}}.$$

Графики зависимостей плотности атмосферы и скорости звука от высоты приведены на рисунке 4.8.

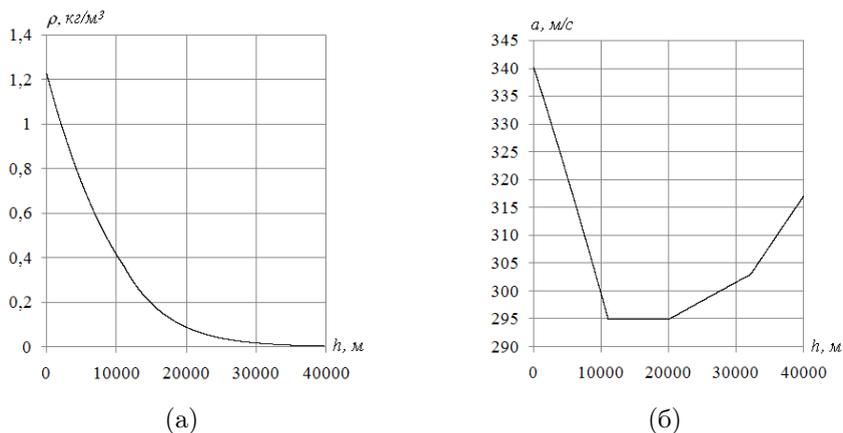


Рис. 4.8. Зависимости характеристик атмосферы от высоты: а) плотность; б) скорость звука

4.3. Характеристики модели движения

Значения постоянных величин в уравнениях совокупной системы, принятые в работе, приведены в таблице 4.5.

Таблица 4.5. Значения постоянных в модели движения

Наименование постоянной	Обозн.	Ед. изм.	Знач.
Стартовая тяговооружённость	μ	-	1
Ускорение свободного падения	g_0	м/с ²	9,80665
Характерная площадь	S	м ²	890
Радиус Земли	$R_З$	м	6356767
Удельный импульс РТДп на старте	J_0	с	4000

4.4. Граничные условия краевой задачи

Как показано в главе 3 для определения оптимальных траекторий и программ управления из условия минимума расхода топлива требуется решить трёхпараметрическую краевую задачу для совокупной системы уравнений (3.3), (3.10)-(3.13). Для решения указанной задачи с использованием численных методов, определим граничные условия движения (3.5), а также начальные приближения входных параметров краевой задачи $[\alpha_n, \dot{\alpha}_n, \psi_{m_n}]^T$.

Начальные условия движения определяются положением ГЛА на типовой траектории (рис. 1.5, 1.6) в начале сверхзвукового участка, т.е. на линии максимального скоростного напора при $M = 1,8 \dots 2$ и $h = 10 \dots 12$ км.

Для оценки массы топлива, затраченной на разгон до $M = 1,9$ воспользуемся приближённой формулой, характеризующей линейную зависимость затрат топлива при разгоне:

$$m_n \approx m_0 - \frac{1,9}{M_{\max}} m_{k \max}, \quad (4.4)$$

где $m_{k \max}$ — масса топлива, затрачиваемая на разгон-набор высоты от точки старта до скорости M_{\max} .

Оценим значение величины $m_{k \max}$, исходя из следующих допущений:

- направление силы тяги не зависит от угла атаки;
- тяга и секундный расход топлива принимают постоянные значения;
- скорость ГЛА на старте и лобовое сопротивление при движении в атмосфере принимают нулевые значения;

- разгон-набор высоты происходит с максимальным углом наклона траектории $\theta_{\max} = 35^\circ$;
- начальная скорость ГЛА равна нулю;
- скорость звука равна 300 м/с.

Тогда система (3.3) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{m_0 g_0}{m} - g_0 \sin \theta_{\max}, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \dot{h} = V \sin \theta_{\max}, \\ \dot{m} = -\frac{m_0}{J_0}, \end{cases}$$

откуда

$$V = V_0 - g_0 \left[J_0 \ln \left(1 - \frac{t}{J_0} \right) + t \sin \theta_{\max} \right], \quad (4.5)$$

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{J_0} \right). \quad (4.6)$$

Тогда, принимая во внимание (4.6):

$$m_{\text{к max}} = m_0 - m = \frac{m_0 t_{\max}}{J_0},$$

где t_{\max} — время, затрачиваемое на разгон-набор высоты до скорости M_{\max} .

С учётом последнего выражения уравнение (4.5) примет вид:

$$M_{\max} a = V_0 - J_0 g_0 \left[\ln \left(1 - \frac{m_{\text{к max}}}{m_0} \right) + \frac{m_{\text{к max}}}{m_0} \sin \theta_{\max} \right].$$

Подставляя в последнее уравнение значения величин M_{\max} , a , V_0 , g_0 , J_0 , m_0 и θ_{\max} , получим:

$$6 \cdot 300 = -4000 \cdot 9,80665 \left[\ln \left(1 - \frac{m_{\text{к max}}}{3 \cdot 10^5} \right) + \frac{m_{\text{к max}}}{3 \cdot 10^5} \sin 35^\circ \right],$$

откуда $m_{\text{к max}} \approx 30000$ кг.

Подставляя в (4.4) значения величин M_{\max} , m_0 и $m_{\text{к max}}$, получим:

$$m_{\text{н}} = 300000 - \frac{1,9}{6} 30000 = 290500.$$

В последующих расчётах примем:

$$M_{\text{н}} = 2, \theta_{\text{н}} = 11^\circ, h_{\text{н}} = 11000\text{м}, m_{\text{н}} = 290000\text{кг}. \quad (4.7)$$

Определим значение скоростного напора, соответствующее граничным условиям (4.7) в виде:

$$\begin{aligned} q_{\text{н}} &= \frac{\rho(h_{\text{н}}) M_{\text{н}}^2 a^2(h_{\text{н}})}{2} = \frac{\rho(11000) \cdot 2^2 \cdot a^2(11000)}{2} = \\ &= 0,3648 \cdot 2 \cdot 295,2^2 \approx 63580 \text{ кПа}. \end{aligned}$$

Конечные условия движения ГЛА представлены в таблице 4.6.

Таблица 4.6. Конечные условия движения ГЛА

№ п/п	Тип ГЛА	$M_{\text{к}}$	$\theta_{\text{к}}, ^\circ$	$h_{\text{к}}, \text{м}$
1	ГМС	6	0	30000
2	ГСП	6	5...35	30000

4.5. Метод редукции к задачам Коши

Для решения краевой задачи могут быть использованы различные численные методы, некоторые из которых изложены, например в [15]. Изложим кратко один из них сначала в общей постановке, а затем перейдём к решению задачи оптимизации программ управления ГЛА.

Рассмотрим при $a \leq x \leq b$ систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) \quad (4.8)$$

с граничным условием

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{h}, \quad (4.9)$$

где $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ — вектор-функция, подлежащая определению; $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)^T$ — известная вектор-функция, у которой $F_i = F_i(x, \mathbf{y})$; $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T$ — известная вектор-функция, у которой $g_i = g_i(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b))$; $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ — заданный числовой вектор; $\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)$ — значения искомого решения граничной задачи (4.8), (4.9) в точках $x = a$ и $x = b$ соответственно.

Требуется найти вектор-функцию $\mathbf{y}(x)$, которая при $a < x < b$ удовлетворяла бы (4.8), а при $x = a$ и $x = b$ — граничному условию (4.9).

В приложениях граничное условие (4.9) часто задаётся в упрощённом виде, а именно:

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{d}, \quad \mathbf{C}\mathbf{y}(b) = \mathbf{e}, \quad (4.10)$$

где

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}, \quad k + p = n,$$

B , C и \mathbf{d} , \mathbf{e} — соответственно известные матрицы и векторы; $\text{rang } B = k$; $\text{rang } C = p$; $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)^\top$; $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)^\top$.

Предположим, что граничная задача (4.8)–(4.9) имеет единственное решение на отрезке $[a, b]$. Будем считать уравнение (4.8) таким, что для него задача Коши с начальным условием $\mathbf{y}(a) = \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — некоторый вектор из n -мерного евклидова пространства \mathbb{E}^n , имеет единственное решение.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{F}(x, \mathbf{z}), & a \leq x \leq b, \\ \mathbf{z}(a) &= \mathbf{z}^{(0)}, & \mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{E}^n, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\mathbf{z}(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^\top$, $\mathbf{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})^\top$.

Решение задачи (4.11) можно записать в виде:

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{Z}(b, \mathbf{z}^{(0)}), \quad (4.12)$$

где $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top$ — некоторая вектор-функция, $Z_i = Z_i(x, \mathbf{z}^{(0)})$.

Положим в (4.12) $x = b$ и полученное значение $\mathbf{z}(b)$ подставим в (4.9) вместо $\mathbf{y}(b)$, а вместо $\mathbf{y}(a)$ подставим $\mathbf{z}(a) = \mathbf{z}^{(0)}$, получим:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}^{(0)}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{Z}(b, \mathbf{z}^{(0)})).$$

Теперь можно сформулировать алгоритм метода редукции к задачам Коши. Он состоит в следующем:

- 1) решаем систему нелинейных численных уравнений (4.13) и находим её решение $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{y}(a)$;
- 2) искомое решение граничной задачи (4.8), (4.9) находим как решение задачи Коши:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}' &= \mathbf{F}(x, \mathbf{z}), \quad a \leq x \leq b, \\ \mathbf{z}(a) &= \mathbf{y}(a).\end{aligned}$$

Как мы уже отмечали, будет выполняться тождество $\mathbf{z}(x) \equiv \mathbf{y}(x)$.

Для решения упоминавшихся здесь задач Коши могут быть использованы многие методы, в том числе методы Эйлера, Адамса, Рунге-Кутты и др.

Остановимся на вопросе численного решения системы уравнений (4.13). Для решения этой системы целесообразно избрать какой-либо итерационный метод, обладающий быстрой сходимостью. Покажем, как для этого может быть применён метод Ньютона.

Пусть $\mathbf{z}^{(k)}$ — k -е приближение к решению $\mathbf{y}(a)$ системы уравнений (4.13), тогда в методе Ньютона $(k + 1)$ -е приближение может быть вычислено по формуле:

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}, \quad (4.15)$$

где $\mathbf{v}^{(k)} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)})^T$ — вектор-столбец, определяемый как решение системы линейных алгебраических уравнений,

$$G_z^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{z}^{(k)}) - \mathbf{h}, \quad (4.16)$$

$$G_z^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial G_2^{(k)}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_2^{(k)}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial G_2^{(k)}}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n^{(k)}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_n^{(k)}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial G_n^{(k)}}{\partial z_n} \end{bmatrix}, \quad G_i^{(k)} = G_i(\mathbf{z}^{(k)}),$$

$k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n$. Мы предполагаем, что $\det G_z^{(k)} \neq 0$. Точно вычислить элементы матрицы $G_z^{(k)}$ мы не можем, так как неизвестен вид функции $G_i(\mathbf{z}^{(k)})$. Однако эти элементы могут быть вычислены приближённо, например, по формулам:

$$\frac{\partial G_i^{(k)}}{\partial z_j} \approx \frac{G_i(\mathbf{z}^{(k)} + l_k \mathbf{e}_j) - G_i(\mathbf{z}^{(k)})}{l_k}, \quad (4.17)$$

где $l_k > 0$ — достаточно малое число, выбираемое вычислителем,

$$\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \dots, 0)^T, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим через $\tilde{G}_z^{(k)}$ матрицу, элементы которой вычисляются по формуле (4.17). Реально мы можем вместо последовательности $\mathbf{z}^{(k)}$ вычислить последовательность $\tilde{\mathbf{z}}^{(k)}$, определяемую по правилу:

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(k)} - \tilde{\mathbf{v}}^{(k)}, \quad (4.18)$$

где $\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$ — решение системы уравнений:

$$\tilde{G}_z^{(k)} \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{z}}^{(k)}) - \mathbf{h}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Чтобы полностью уяснить вычислительную схему метода редукции к задачам Коши, покажем, как по $\tilde{\mathbf{z}}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$ ($\mathbf{z}^{(0)}$ — некоторый вектор из \mathbb{E}^n) вычислить $\tilde{\mathbf{z}}^{(1)}$.

1. Решаем задачу Коши (4.14) при $\mathbf{z}(a) = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)}$, вычисляем значение решения этой задачи в точке $x = b$ (обозначим его через $\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}(b)$), вычисляем $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{z}}^{(0)}(b))$.

2. Решаем n задач Коши (4.14) при начальных условиях $\mathbf{z}(a) = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)} + l_0 \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$; значения решений этих задач в точке $x = b$ обозначим соответственно:

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(0, 1)}(b), \tilde{\mathbf{z}}^{(0, 2)}(b), \dots, \tilde{\mathbf{z}}^{(0, n)}(b).$$

Вычисляем $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{z}}^{(0)} + l_0 \mathbf{e}_j)$ по правилу:

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{z}}^{(0)} + l_0 \mathbf{e}_j) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{z}}^{(0, j)}(b)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

По формуле (4.17) вычисляем элементы матрицы $\tilde{G}_z^{(0)}$.

3. При $k = 0$ решаем систему уравнений (4.19) и находим $\tilde{\mathbf{v}}^{(0)}$. Первое приближение к $\mathbf{y}(a)$ вычисляем по формуле (4.18) при $k = 0$. Имеем: $\tilde{\mathbf{z}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)} - \tilde{\mathbf{v}}^{(0)}$.

4. Аналогично по $\tilde{\mathbf{z}}^{(1)}$ вычисляется $\tilde{\mathbf{z}}^{(2)}$ и т.д.

Пусть при некотором s мы с удовлетворительной точностью получили значение $\tilde{\mathbf{z}}^{(s)} \approx \mathbf{y}(a)$. Тогда приближённое решение

граничной задачи (4.8), (4.9) вычисляется как решение задачи Коши для уравнения (4.8) с начальным условием $\mathbf{y}(a) \approx \tilde{\mathbf{z}}^{(s)}$.

Сходимость метода редукции к задачам Коши обуславливается сходимостью метода Ньютона (4.18), (4.19) с приближённой матрицей Якоби $\tilde{G}_z^{(k)}$. Условия сходимости такого метода сходны с условиями сходимости основного метода Ньютона, определяемого формулами (4.15), (4.16).

Отметим ещё, что если на каждом номере итераций величину l_k выбирать из неравенства:

$$l_k \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| G_i(\tilde{\mathbf{z}}^{(k)} - h_i) \right|, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то метод Ньютона, определяемый формулами (4.18), (4.19), может иметь квадратичную сходимость.

Укажем на некоторые особенности в выборе величины l_k . Если мы хотим, чтобы формула (4.17) была возможно более точной, мы должны по смыслу производной величину l_k выбирать возможно меньшей. Но тогда в выражении (4.17) в числителе будет результат вычитания двух близких по абсолютной величине чисел, и если эти числа были большими, то произойдёт сильная потеря значащих цифр. Это приведёт к тому, что производная в формуле (4.17) будет вычислена с большой погрешностью. Если же l_k будет выбрано недостаточно малым, то тогда по смыслу определения производной формула (4.17) не может дать хорошего по точности результата. По этим причинам вопрос оптимального выбора величины l_k требует в каждом конкретном случае специального рассмотрения.

4.6. Оптимальные характеристики ГЛА с перспективным ВРД

Определим оптимальные траектории и программы управления ГСР с перспективным ВРД. Решим ряд краевых задач с некоторыми граничными условиями согласно таблице 4.6 для значений θ_k , выбираемых из ряда $2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, 18^\circ$.

При решении краевой задачи для больших значений конечного угла наклона траектории (в частности 35°) значение $M = 6$ в процессе численного решения соответствующей задачи Коши достигается при $\psi_m < 1$ и условие завершения процедуры численного интегрирования ($\psi_m = 1$) не выполняется. Поэтому далее реализуется очередной шаг интегрирования, и фазовая координата V выходит за пределы области $N_{\text{доп}}$ с последующим сбоем операции расчета оптимального угла атаки по формуле (3.17), в которой остаются неопределёнными характеристики объекта управления при $V > 6a(h)$ или $M \approx 6$. Таким образом, для решения краевой задачи при $\theta_k > 30^\circ$ требуется расширение области $N_{\text{доп}}$ посредством экстраполяции для $M \approx 6$ аэродинамических характеристик в виде гладких функций числа Маха и угла атаки, а также определения тяги КСУ, через нулевое значение (пассивный участок движения).

Оптимальные программы управления углом атаки и оптимальные траектории, полученные из решения краевых задач для ГСР ($\theta_k = 2 \dots 18^\circ$) с $M_{\text{max}} = 6$, приведены на рисунках 4.9 и 4.10 соответственно [2].

Также на указанных рисунках приведены линия максимально допустимого скоростного напора $q_{\text{max}} = 63,5$ кПа (рисунок 4.10) и линия, соответствующая максимальному аэродинамическому качеству (рисунок 4.9).

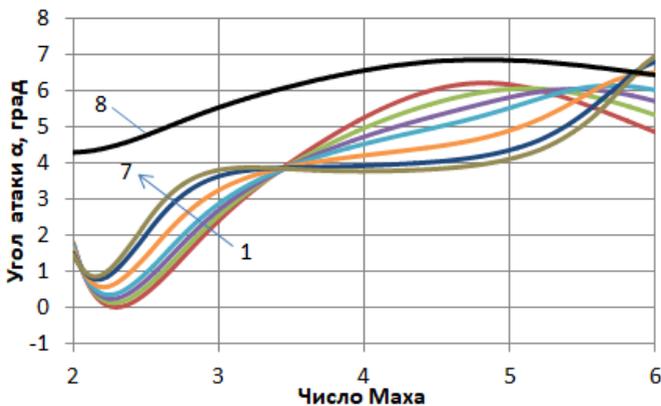


Рис. 4.9. Оптимальные программы управления углом атаки ГЛА с перспективным ВРД для различных значений конечного угла наклона траектории: 1 – $\theta_k = 2^\circ$; 2 – $\theta_k = 4^\circ$; 3 – $\theta_k = 6^\circ$; 4 – $\theta_k = 8^\circ$; 5 – $\theta_k = 12^\circ$; 6 – $\theta_k = 16^\circ$; 7 – $\theta_k = 18^\circ$; 8 – максимальное аэродинамическое качество

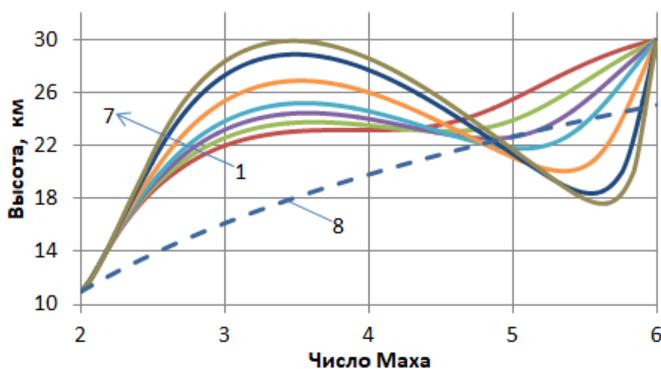


Рис. 4.10. Оптимальные траектории движения ГЛА с перспективным ВРД: для различных значений конечного угла наклона траектории: 1 – $\theta_k = 2^\circ$; 2 – $\theta_k = 4^\circ$; 3 – $\theta_k = 6^\circ$; 4 – $\theta_k = 8^\circ$; 5 – $\theta_k = 12^\circ$; 6 – $\theta_k = 16^\circ$; 7 – $\theta_k = 18^\circ$; 8 – линия максимального скоростного напора $q_{\max} = 63,5$ кПа

Заключение

В пособии рассмотрены вопросы оптимизации программ управления гиперзвукового летательного аппарата на участке разгона-набора высоты.

Приближённо-оптимальный синтез угла атаки, определённый на основе анализа характерных особенностей оптимального движения, обеспечивает разгон-набор высоты ГЛА с меньшими затратами топлива по сравнению с движением по типовой траектории.

Изложенные характерные особенности оптимального разгона-набора высоты ГЛА в атмосфере отражают двойственную природу влияния силы тяжести и аэродинамической силы на характеристики невозмущённого движения объекта управления как в зависимости от граничных условий движения, так и по сравнению с типовым профилем полёта.

Приближённо-оптимальные траектории и синтезы управления углом атаки, изложенные в пособии, могут быть использованы при динамическом проектировании и анализе различных схем гиперзвуковых маршевых самолётов и самолётов-разгонщиков.

Список сокращений и условных обозначений

- АКС — авиационно-космическая система
- АРКС — авиационная ракетно-космическая система
- ВКС — воздушно-космический самолёт
- ВРД — воздушно-реактивный двигатель
- ГЛА — гиперзвуковой летательный аппарат
- ГМС — гиперзвуковой маршевый самолёт
- ГПВРД — гиперзвуковой прямоточный воздушно-реактивный двигатель
- ГСР — гиперзвуковой самолёт-разгонщик
- ДУ — двигательная установка
- ИСЗ — искусственный спутник Земли
- КСУ — комбинированная силовая установка
- КТС — космическая транспортная система
- ЛА — летательный аппарат
- МКТС — многоразовая космическая транспортная система

- МРКС — многоразовая ракетно-космическая система
- ОС — орбитальный самолёт
- РКС — ракетно-космическая система
- РТДп — ракетно-турбинный двигатель пароводородной схемы
- СУ — силовая установка
- ТС — транспортное средство

Список литературы

1. *Балакин В. Л., Бебяков А. А., Кочян А. Г.* Оптимизация движения гиперзвукового самолёта-разгонщика двухступенчатой авиационно-космической системы // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва. — 2008. — № 1. — С. 23—32.
2. *Балакин В. Л., Крикунов М. М.* Анализ программ управления и траекторий набора высоты гиперзвуковой первой ступени авиационно-космической системы // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. — 2019. — Т. 18, № 1. — С. 18—29.
3. *Бебяков А. А.* Оптимальное управление углом атаки гиперзвукового летательного аппарата на этапе разгона-набора высоты в атмосфере // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). — 2013. — 1 (39). — С. 26—38.
4. *Блисс Г. А.* Лекции по вариационному исчислению / под ред. Л. Э. Эльсгольца ; пер. с англ. Ю. К. Солнцева. — М. : Издательство иностранной литературы, 1950. — 347 с.
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М. : Наука, 1969. — 408 с.

6. *Бузулук В. И.* Оптимизация траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов. — М.-Жуковский : ЦАГИ, 2008. — 476 с.
7. *Бузулук В. И.* Оптимизация управления движением при разгоне ВКС с ГПВРД // Проблемы создания перспективной авиационно-космической техники. — 2005. — С. 350—364.
8. *Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В.* Mathematica для нематематика : учебное пособие для вузов. — М. : МЦНМО, 2021. — 483 с.
9. *ГОСТ 4401-81.* Атмосфера стандартная. Параметры. — М. : ИПК Издательство стандартов, 2004. — 181 с.
10. *Дьяконов В. П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М. : СОЛОН-ПРЕСС, 2009. — 720 с. : ил. — (Серия «Библиотека профессионала»).
11. *Дьяконов В. П.* МАТЛАВ. Полный самоучитель. — М. : ДМК Пресс, 2012. — 768 с. : ил.
12. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — СПб. : БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
13. *Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И.* Вариационное исчисление, задачи и упражнения. — М. : Наука, 1973. — 190 с.
14. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М. : Наука, 1973. — 279 с.
15. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И.* Вычислительные методы. Т. 2. — М. : «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1977. — 400 с.

16. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. — М. : Гостехиздат, 1950. — 296 с.
17. *Лазарев Ю. Н.* Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. — Самара : Самар. науч. центр РАН, 2007. — 274 с.
18. *Летов А. М.* Динамика полёта и управление. — М. : Наука, 1969. — 360 с.
19. *Луковников А. В., Полев А. С., Ланшин А. И.* Исследования перспективных двигателей и силовых установок магистральных самолётов 2020–2030 годов // Полёт. Общероссийский научно-технический журнал. — 2019. — № 1. — С. 3–13.
20. *Нечаев Ю. Н.* Силовые установки гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов. — М. : Издание Российской академии космонавтики имени К. Э. Циолковского, 1996. — 214 с.
21. *Нечаев Ю. Н., Полев А. С., Никулин А. В.* Моделирование условий работы пароводородного РТД в составе силовой установки гиперзвукового летательного аппарата // Вестник академии космонавтики: направление фундаментальных и прикладных проблем космонавтики, материалы научных докладов на заседаниях направления в 1996-1997 гг. — 1998. — С. 159–191.
22. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полёта. Траектории летательных аппаратов. — М. : Машиностроение, 1969. — 500 с.

23. *Полев А. С.* [и др.]. Исследование параметров и характеристик комбинированной силовой установки параллельной схемы перспективного высокоскоростного пассажирского самолёта // *Авиационные двигатели.* — 2022. — 3 (16). — С. 15—24.
24. *Понтрягин Л. С.* [и др.]. Математическая теория оптимальных процессов. — М. : «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 392 с.
25. *Салмин В. В.* Оптимизация космических перелётов с малой тягой. — М. : Машиностроение, 1987. — 208 с.
26. *Салмин В. В., Лазарев Ю. Н., Старинова О. Л.* Методы оптимального управления и численные методы в задачах синтеза технических систем. — Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. — 160 с.
27. *Филатьев А. С.* Оптимальный запуск искусственного спутника Земли с использованием аэродинамических сил // *Космические исследования.* — 1991. — № 2. — С. 255—271.
28. *Филатьев А. С.* Практический путь повышения эффективности космических транспортных систем на основе внедрения строгих методов сквозной оптимизации // *Авиакосмическая техника и технология.* — 1999. — № 1. — С. 23—30.
29. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. — М. : «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1961. — 436 с.

Приложение А

Интерполяция с использованием кубических сплайнов

Интерполяционные формулы для аэродинамических коэффициентов имеют вид:

– коэффициент силы лобового сопротивления:

$$C_{xa}(M, i) = A_{C_{xa}}(i, j) + B_{C_{xa}}(i, j)(M - M_{j-1}) + \\ + C_{C_{xa}}(i, j)(M - M_{j-1})^2 + D_{C_{xa}}(i, j)(M - M_{j-1})^3;$$

– коэффициент подъёмной силы:

$$C_{ya}(M, i) = A_{C_{ya}}(i, j) + B_{C_{ya}}(i, j)(M - M_{j-1}) + \\ + C_{C_{ya}}(i, j)(M - M_{j-1})^2 + D_{C_{ya}}(i, j)(M - M_{j-1})^3,$$

где $i = \overline{1, 7}$ – номер строки таблицы 4.1 или 4.2; $j = \overline{1, 8}$ – номер столбца таблицы 4.1 или 4.2; $A_{C_{xa}}, B_{C_{xa}}, C_{C_{xa}}, D_{C_{xa}}, A_{C_{ya}}, B_{C_{ya}}, C_{C_{ya}}, D_{C_{ya}}$ – коэффициенты интерполяции, определяемые согласно [12].

Полученные 14 интерполяционных полиномов при любом заданном значении M от 0 до 6 определяют в дискретном виде зависимость соответствующей частной производной аэродинамического коэффициента от угла атаки, которая далее аппроксимируется с использованием формул (3.16), приведённых в 3.2.2 на странице 54.

Интерполяционная формула для относительного удельного импульса имеет вид:

$$j_{уд}(M, l) = A_{j_{уд}}(l, s) + B_{j_{уд}}(l, s)(M - M_{s-1}) + C_{j_{уд}}(l, s)(M - M_{s-1})^2 + D_{j_{уд}}(l, s)(M - M_{s-1})^3,$$

где $l = \overline{1, 9}$ — номер строки таблицы 4.3; $s = \overline{1, 13}$ — номер столбца таблицы 4.3; $A_{j_{уд}}, B_{j_{уд}}, C_{j_{уд}}, D_{j_{уд}}$ — коэффициенты интерполяции, определяемые согласно [12].

Полученные 9 интерполяционных полиномов при любом заданном значении M от 0 до 6 определяют в дискретном виде зависимость частной производной относительного удельного импульса от числа Маха, которая далее аппроксимируется с использованием формулы (4.3), приведённой в 4.1.3 на странице 67.

Учебное издание

Крикунов Михаил Михайлович

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ
ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА
НА УЧАСТКЕ РАЗГОНА-НАБОРА ВЫСОТЫ
В АТМОСФЕРЕ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 10.10.2023. Формат 60 × 84/16

Бумага офсетная. Печ. л. 5,75.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1–27). Заказ . Арт. – 5(Р2УП)/2023.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.