МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

В.В.КУЛИКОВ

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Программированное учебное пособие

Рассмотрено и утверждено
советом института 25 июня 1969 года

Куйбышев - 1969

Пособие предназначено для студентов первого курса ВТУЗа. Оно представляет собой модель практического занятия по теме „Область существования функции". Цель пособия - научить студентов отысканию области существования элементарной функции. Его можно использовать для самостоятельного изучения темы, а также для проведения практического занятия.

При работе с пособием учащийся должен неуклонно выполнять все указания. Это условие является необходимым для успешной работы с программированным пособием.

Ответственный редактор к.ф-м.н. доцент Г.Д.ТРОШИН

§ I. Функция. Область существования функции

Одним из основных понятий математического анализа является понятие функции. Рассмотрим переменную величину x и обозначим множество ее числовых значений через D.

Определение. Величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению x из множества D соответствует по некоторому закону одно определенное значение величины y. Переменная x называется независимой переменной или аргументом. Множество чисел D называется областью определения функции (или областью существования функции), а совокупность значений, принимаемых функцией y, называется областью изменения функции.

Мы будем рассматривать только действительные функции от действительного аргумента, т.е. будем считать, что x и y принимают лишь действительные значения.

В связи с этим, областью существования функции, заданной аналитически, называется множество всех действительных значений независимой переменной, которым соответствуют действительные значения функции.

Например, функция $y=x^3-2x+1$ определена при любом действительном значении x, т.е. в интервале $(-\infty,+\infty)$, т.к. над x и над постоянными производится конечное число сложений, вычитаний и умножений, которые в результате всегда дают действительное число (если исходные данные - действительные числа).
А вот дробно-рациональная функция $y=\frac{3x}{x-2}$ существует, т.е. определена, при всех значениях x, кроме $x=2$. Эта функция не определена при $x=2$, т.к. при этом знаменатель обращается в нуль, а на нуль делить нельзя.
Область существования данной функции можно записать так: $(-\infty,2)$ и $(2,+\infty)$, или $x\neq 2$, или $-\infty<x<2$ и $2<x<+\infty$.

Переходите на стр.4а.

(а) **§ 2. Область существования дробно-рациональной функции**

Нахождение области существования аналитически заданной функции - это первый шаг исследования функции.
Мы займемся определением облас существования элементарных функций. Сначала решим этот вопрос относительно дробно-рациональной функции (отношения двух многочленов)

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}.$$

Начнем с задачи.
Задача. Найти область существования функции

$$y=\frac{x}{(x+2)(2x-5)}.$$

Решив задачу, сравните свой ответ с приведенными ниже (среди них один верный).

Ответы: 1. $x\neq\frac{5}{2}$ стр. 5в

2. $x\neq 0$ и $x\neq\frac{5}{2}$ стр. 7б

3. $(-\infty,-2),\ (-2,\frac{5}{2}),\ (\frac{5}{2},+\infty)$ стр. 6а

Если у вас получился первый ответ, то смотрите стр.5в; если второй, то смотрите стр.7б; если третий, то переходите к стр.6а.

(б) Неверно

Функция $y=\sqrt{x^2-4}$ будет принимать действительные значения, если $x^2-4\geqslant 0$. Значит, корни уравнения $x^2-4=0$ принадлежат области существования функции.
Кроме того, вы нашли не все решения строгого неравенства $x^2-4>0$
Вспомните, как решаются квадратные неравенства. Это можно прочитать на стр. 25.
Решите неравенство $x^2-4\geqslant 0$ и вернитесь на стр. 6б.

(а) <u>Неправильно</u>

Область существования первого слагаемого вы определили неверно. Что касается второго слагаемого - функции $\lg(6-x)$, то вы правильно считали, что выражение $6-x$ должно быть больше нуля (т.к. отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют).
Оставьте пока решение этой задачи и перейдите на стр. 9а.

(б) <u>Неверно</u>

Посмотрите, как находится область существования для аналогичной функции

$$y=\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Приравняв нулю знаменатель дроби, решим уравнение $x^2+4x+5=0$. Его корнями являются комплексные числа $x=-2\pm i$. Значит, ни при одном действительном значении x многочлен x^2+4x+5 в нуль не обращается. (Мы ведь изучаем такие функции, где x и y принимают только действительные значения). Поэтому функция $y=\frac{1}{x^2+4x+5}$ определена на всей числовой оси.
Теперь вы должны справиться с задачей на стр. 6а.

(в) <u>Не совсем так</u>

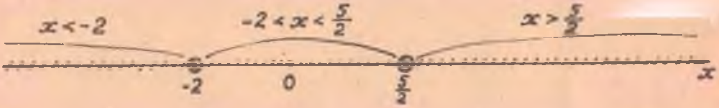
Приравняйте знаменатель нулю и найдите все корни знаменателя.
Вернитесь на стр.4а и сравните свой новый ответ с приведенными.

(а) Правильно

Функция $y=\dfrac{x}{(x+2)(2x-5)}$ представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой определены на всей числовой оси. Но дробь теряет числовой смысл, когда знаменатель обращается в нуль. Решая уравнение $(x+2)(2x-5)=0$, найдем корни $x=-2$ и $x=\dfrac{5}{2}$. При этих значениях x функция $y=\dfrac{x}{(x+2)(2x-5)}$ не существует. Итак, область существования данной функции состоит из трех интервалов:

$$(-\infty,-2),(-2,\tfrac{5}{2}),(\tfrac{5}{2},+\infty) .$$

На числовой оси эта область изображается так:



(Здесь кружками отмечены точки, где функция не определена). Заметим, что область существования данной функции можно записать иначе: $x\neq-2$ и $x\neq\dfrac{5}{2}$.

Теперь решите еще одну задачу.

Найти область существования функции
$$y=\frac{x^2+7}{x^3-1} .$$

Ответы: I. $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$ стр. 8.

2. Ответ, отличный от приведенного выше. стр. 5б.

(б) Правильно

Функция $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-5}}$ не определена лишь при значении $x=5$, которое обращает знаменатель в нуль.

Переходите к следующей задаче.

Найти область существования функции
$$y=\sqrt{x^2-4} .$$

Ответы: I. $x\geqslant 2$ стр. 20б

2. $x>2$ стр. 4б

3. $|x|\geqslant 2$ стр. 11б

4. $x\geqslant\pm 2$ стр. 7а

(а) Вы допустили грубую ошибку при решении неравенства $x^2 - 4 \geqslant 0$ (I). При значениях $x \geqslant 2$ неравенство (I) справедливо, а вот при $x \geqslant -2$ оно может и не выполняться. Например, подставляя в неравенство (I) значение $x = 0$, мы видим, что оно нарушается.

Для решения неравенства $x^2 - 4 \geqslant 0$ разложите левую часть на множители и определите, когда произведение двух множителей будет неотрицательным.

Вернитесь на стр. 6б и найдите нужный ответ.

(б) Неверно

Вы допустили две ошибки: во-первых, функция $y = \frac{x}{(x+2)(2x-5)}$ существует в точке $x = 0$, т.к. значению $x = 0$ формула ставит в соответствие значение $y = 0$; во-вторых, вы нашли не все корни знаменателя, при которых дробь теряет числовой смысл.

Завершите решение этой задачи и на стр.4а выберите нужный ответ.

(в) Не совсем так.

При отыскании радикала нечетной степени из любого действительного числа получается действительное число. Поэтому функция $\sqrt[3]{x-5}$ определена при любых значениях выражения $(x - 5)$, значит при любом действительном x.

Тогда данная функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-5}}$ будет определена при $x \neq 5$.

Переходите к стр.6б.

Совершенно верно.

Данная функция $y=\dfrac{x^2+7}{x^3-1}$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x=1$. В самом деле, приравняв нулю знаменатель дроби, решаем уравнение $x^3-1=0$:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad x-1=0,\quad x_1=1$$

$$x^2+x+1=0,\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, уравнение $x^3-1=0$ имеет лишь один действительный корень $x=1$. При $x=1$ функция $y=\dfrac{x^2+7}{x^3-1}$ не определена, а при любом другом действительном значении x она существует. Например, при $x=0$

$$y=\frac{0+7}{0-1}=-7.$$

Итак, обобщая результаты рассмотренных задач, можно сделать вывод:

дробно-рациональная функция определена на всей числовой оси, кроме действительных корней знаменателя.

Теперь займемся элементарными функциями, содержащими радикалы и логарифмы.

Но сначала попробуйте самостоятельно найти область существования функции $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\lg(6-x)$

Эта задача не простая. Поэтому, если вы не знаете, с чего начать, то сразу перейдите к стр.9а. (В дальнейшем вы научитесь [р]ешать подобные задачи).

Т[е], кто решит эту задачу, нужно сверить свой ответ с приведенными и затем перейти на страницу, указанную после ответа.

Ответы:

1. $x<6$ — стр. 5а.
2. $-\infty<x\leq 1$ и $2\leq x<+\infty$ — стр. 12б.
3. $2\leq x<6$ — стр. 5а.
4. $-\infty<x\leq 1$ и $2\leq x<6$ — стр. 10б.

(а)

§ 3. Область существования степенной функции

Решая задачи, вы уже наверно заметили, что степенная функция $y=x^n$, где n – натуральное число, определена на всей числовой оси. В этом параграфе мы рассмотрим степенную функцию с рациональным показателем $y=x^{\alpha}$.

Найдем область существования функции $y=\sqrt[4]{3x+5}$ (Или в другой записи $y=(3x+5)^{1/4}$).

Известно, что радикал четной степени есть действительное число, если под корнем стоит неотрицательное число. Поэтому функция принимает действительные значения только при тех значениях x, при которых $3x+5 \geqslant 0$.

Решая это неравенство, получим область существования данной функции: $x \geqslant -\frac{5}{3}$.

Теперь сами определите область существования функции

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-5}}.$$

Ответы: 1. $5 < x < +\infty$ стр. 7в

2. $x \neq 5$ стр. 6б

(б) Вы считаете, что областью существования функции $y=\sqrt{1-x^2}$ является полуинтервал $[-1,1)$. Это не так.
Функция $y=\sqrt{1-x^2}$ определена еще и в точке $x = 1$, т.е. ее область существования есть отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Вернитесь на стр.11а и найдите области существования других функций.

(в) Верно

Теперь давайте вернемся к задаче (заключенной в рамку) на стр.8 и решим ее.
Для этого вам сначала следует определить область существования каждого слагаемого в отдельности, а затем найти общую часть полученных областей.

(а) Неверно

Вам нужно решить неравенство $5x - x^2 + 6 > 0$

(Вы же ограничились решением такого неравенства $5x - x^2 + 6 \neq 0$)

Если вы затрудняетесь это сделать, то посмотрите на стр.25 решение квадратных неравенств.

Затем вернитесь к задаче на стр.IIб.

(б) Верно

Данная функция представляет сумму двух функций $y_1 = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ и $y_2 = \lg(6 - x)$. Она существует при всех тех значениях x , при которых определены оба слагаемых.

Поэтому сначала находим область существования для каждого слагаемого в отдельности.

Функция $y_1 = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ принимает действительные значения, если $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$. Итак, область существования первого слагаемого состоит из двух бесконечных полуинтервалов: $(-\infty, 1]$ и $[2, +\infty)$.

Вторая функция $\lg(6 - x)$ определена только при тех значениях x , при которых логарифмируемое выражение больше нуля, т.е. когда $6 - x > 0$. Решая это неравенство, получим область существования второго слагаемого: $x < 6$.

Теперь найдем общую часть областей существования обоих слагаемых Эта общая часть и будет областью существования данной функции $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \lg(6 - x)$. Она состоит из двух полуинтервалов: $-\infty < x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x < 6$.

Последний результат можно получить, если изобразить на числовой оси области существования обоих слагаемых

Здесь штриховкой отмечена общая часть областей, т.е. область существования данной функции.

Вы хорошо справились с этой задачей. Теперь перейдите на стр.IIа

(а) Задача

Даны три функции: $y=\sqrt{1-x^2}$,

$y=\lg(1-x^2)$,

$y=\sqrt[4]{\frac{x+1}{1-x}}$.

Выберите из них ту, область существования которой есть полуинтервал $[-1,1)$ (т.е. $-1\leqslant x<1$).

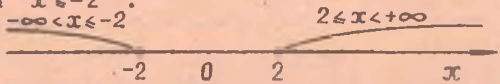
Ответы: I. Первая функция стр. 9б

2. Вторая стр. I6б

3. Третья стр. I4в

(б) Совершенно верно

Функция $y=\sqrt{x^2-4}$ принимает действительные значения, если $x^2-4\geqslant 0$. Решая это квадратное неравенство, получим $|x|\geqslant 2$ т.е. $x\geqslant 2$ и $x\leqslant -2$.



Заметим, что неравенство $x^2-4\geqslant 0$ можно решить другими способами. Например, так: $(x+2)(x-2)\geqslant 0$,

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ x-2\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+2\leqslant 0 \\ x-2\leqslant 0 \end{cases} .$$

Решением первой системы будет $x\geqslant 2$, а решением второй $x\leqslant -2$

Теперь решите такую задачу.

Найти и построить область определения функции $y=\frac{x-2}{\sqrt{5x-x^2+6}}$.

Ответы: I. $x\neq -1$ и $x\neq 6$ стр. I0а

2. $-1\leqslant x\leqslant 6$ стр. I4а

3. $-1<x<6$ стр. I2в

4. $(-\infty,-1)$ и $(6,+\infty)$ стр. 2Iв

(в) Вы нашли не все решения неравенства $x^2+x-6>0$, показав тем самым неумение решать квадратные неравенства.

Поэтому вам следует внимательно прочитать стр.25, запомнить приведенные правила и затем вернуться к решению задачи на стр. I3а.

4-5112

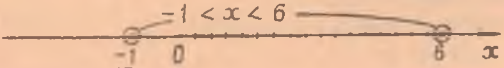
(а) Очень плохо. Полученный вами ответ говорит о том, что часть материала вы не усвоили. Видимо, многие из предлагаемых выше задач вы не решали.
Поэтому вам нужно вернуться к § 4 на стр.13а и проработать весь материал, начиная с этого параграфа.

(б) Вы ошибаетесь.
Совокупность двух полуинтервалов: $(-\infty, 1]$ и $[2, +\infty)$, найденных вами, является областью существования только первого слагаемого, т.е. функции $\sqrt{x^2-3x+2}$. Для нахождения области существования данной функции $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\lg(6-x)$ нужно еще определить область существования второго слагаемого и затем взять общую часть областей обоих слагаемых.
Оставьте пока решение этой задачи (к ней вы вернетесь позже) и перейдите на стр. 13а.

(в) Правильно.
Данная функция представляет собой дробь. Она определена при тех x, при которых существуют и числитель и знаменатель, и когда знаменатель не равен нулю. Значит, должно выполняться неравенство $5x-x^2+6>0$.
Найдя корни квадратного трехчлена и решив неравенство, получим

$$-1<x<6.$$

Итак, область существования данной функции есть интервал $(-1,6)$.



Переходите к стр.13а.

(а) § 4. Область существования показательной функции. Область существования логарифмической функции.

Известно, что показательная функция $y=a^x$, где $0<a\neq1$, определена на всей числовой оси, т.е. при $-\infty<x<\infty$. Если рассмотреть сложную показательную функцию, например, $y=2^{\frac{1}{x-1}}$, то ее область определения будет совпадать с областью определения промежуточного аргумента $u=\frac{1}{x-1}$. Таким образом, функция $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ определена при $x\neq 1$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(0<a\neq1)$ определена при $x>0$. Таким образом отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.

Пример. Функция $y=\lg(6-x)$ определена только при тех значениях x, при которых $6-x>0$. Решая это неравенство, получим область существования функции: $x<6$.

Решите задачу.

Найти область существования функции

$$y=\lg(x^2+x-6).$$

Ответы: 1. $(-3, 2)$ стр. 15б.

2. $(-\infty, -3)$ и $(2, +\infty)$ стр. 9в.

3. $(2, +\infty)$ стр. 11в.

(б) Неверно. Вы нашли область определения не данной функции $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а функции $y=\operatorname{tg}x$. Данная функция существует при тех значениях x, при которых величина $\frac{x}{2}$ не равна $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k - любое целое число.
Решив это неравенство, переходите на стр.21а.

(в) Вы ошиблись в заключительной части решения двойного неравенства. Вспомните, сохраняется ли знак неравенства при почленном умножении или делении на отрицательное число.
Исправьте свою ошибку и переходите к стр. 18в.

(а) Вами допущена ошибка. Вы совсем не учли того, что данная функция есть частное двух функций.
Завершите решение задачи и на стр.11б найдите нужный ответ.

(б) Неверно.
Во-первых, первый сомножитель существует не только в интервале $-3<x<3$. Во-вторых, вы не учли (или совсем не находили) область существования второго множителя.
Следует помнить, что произведение нескольких функций мы считаем определенным при всех тех значениях x, при которых все сомножители принимают вещественные значения.

Ваш ответ показывает, что материал § 6 и § 7 вы усвоили плохо. Поэтому вам следует вернуться на стр.16а и проработать заново все, начиная с § 6.

(в) Верно.

Функция $y=\sqrt[4]{\frac{x+1}{1-x}}$ принимает действительные значения, если $\frac{x+1}{1-x}\geqslant 0$. Решение этого неравенства сводится к решению систем неравенств:

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ 1-x>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+1\leqslant 0 \\ 1-x<0 \end{cases}.$$

(Здесь мы учли, что дробь положительна, когда числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки).
Решая первую систему, получим: $\begin{cases} x\geqslant -1 \\ 1<x \end{cases}$, т.е. $-1\leqslant x<1$.
Вторая система не имеет решений.
Итак, область существования данной функции есть полуинтервал $[-1,1)$.

Переходите к стр.15а.

(а)

§ 5. Область существования тригонометрических функций

Тригонометрические функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ определены на всей числовой оси; функции $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\sec x$ существуют на всей числовой оси, кроме точек $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, где k - любое целое число; функции $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=\operatorname{cosec} x$ определены при всех x , кроме $x=k\pi$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. (т.к. при значениях $x=k\pi$ $\sin x$, стоящий в знаменателях дробей $\frac{\cos x}{\sin x}$ и $\frac{1}{\sin x}$, обращается в нуль).

В качестве примера найдем область существования функции $y=\cos(3x+1)$. Это сложная тригонометрическая функция. Ее можно записать так : $y=\cos u$, $u=3x+1$. (Здесь мы ввели промежуточную переменную u). Функция $y=\cos u$ определена при любом значении u , а функция $u=3x+1$ определена при любом значении x . Значит, функция $y=\cos(3x+1)$ определена при $-\infty<x<+\infty$.

<u>Решите самостоятельно задачу</u>.

Найти область существования функции $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

<u>Ответы</u>: I. $x\neq(2k+1)\pi$, где k - любое целое число, стр.2Iа.

2. $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k - любое целое число, стр.I3б.

(б) <u>Неправильно</u>.

Видимо, вы совсем не думали над решением задачи и выбрали первый попавшийся ответ. Такое несерьезное отношение к делу приведет к тому, что вы ничему не научитесь и зря потеряете время.

Прежде всего забракуйте свой ответ, взяв любое число из интервала (-3,2) и определив при этом значении x знак логарифмируемого выражения x^2+x-6 . Затем вернитесь к задаче на стр.I3а и решите её.

(а) § 6. Область определения обратных тригонометрических функций

Известно, что областью определения обратной функции является область изменения данной функции. Поэтому функции $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ определены на отрезке $-1\leq x\leq 1$, а функции $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ определены при всех значениях x.

Решим пример. Найти область существования функции $y=\arcsin\frac{x-1}{3}$. Эта функция определена только при тех значениях x, которые удовлетворяют двойному неравенству $-1\leq\frac{x-1}{3}\leq 1$. (Его можно решать как систему неравенств $\left(\begin{cases}\frac{x-1}{3}\leq 1\\ \frac{x-1}{3}\geq -1\end{cases}\right)$.

Умножая сначала все части неравенства на 3, получим $-3\leq x-1\leq 3$. Затем прибавим ко всем частям неравенства по I: $-2\leq x\leq 4$. Итак, область существования данной функции есть отрезок $[-2,4]$.

Теперь сами попробуйте решить задачу.

Найти область определения функции $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$.

Ответы: I. $-\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$ стр. I3в.

2. $-1{,}5\leq x\leq 2{,}5$ стр. I8в.

(б) Вы ошибаетесь.

Функция $y=\lg(1-x^2)$ определена при всех тех значениях x, при которых $1-x^2>0$.

Решив это неравенство, вы найдете область существования функции. Между прочим, сразу можно заметить, что значение $x = -1$ не входит в область существования функции (т.к. логарифм нуля не существует).

Вернитесь на стр.IIа и подумайте еще.

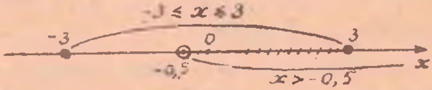
(в) Неверно.

Найдите еще раз область существования первого множителя и завершите решение задачи.

Затем вернитесь на стр.20а и сравните свой новый результат с приведенными ответами.

Правильно. Вы хорошо справились с этой задачей.
Произведение двух функций определено только при тех значениях x, при которых оба сомножителя имеют смысл, т.е. принимают вещественные значения.
Первая функция $y_1 = \arccos\frac{x}{3}$ существует при $-3 \leq x \leq 3$, а вторая $y_2 = \lg(2x+1)$ определена, если $2x+1>0$, т.е. при $x>-0{,}5$.

Решая систему
$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -0{,}5 < x \end{cases}$$



получим $-0{,}5 < x \leq 3$.
Это и есть область существования данной функции (на чертеже она покрыта штриховкой).

§ 8. Заключение

Из сказанного выше следует, что при отыскании области существования элементарной функции, заданной формулой $y=f(x)$, нужно учитывать следующее:

1. если имеются дробные выражения, то знаменатели должны быть отличны от нуля (в частности, это относится к функциям $\operatorname{tg} u$, $\sec u$, $\operatorname{ctg} u$, $\operatorname{cosec} u$, где u есть функция от x);
2. если имеются радикалы четной степени, то подкоренные выражения должны быть неотрицательны;
3. если имеется функция $\log_a u$, где $u=\varphi(x)$, то должно быть $u>0$;
4. если данная формула содержит $\arcsin u$ или $\arccos u$, то функция будет определена при тех значениях x, при которых $-1 \leq u \leq 1$.

Пример. Функция $y=\arcsin \lg\frac{x}{10}$ будет определена при тех значениях x, при которых $-1 \leq \lg\frac{x}{10} \leq 1$ (Это неравенство будем решать в интервале $0<x<\infty$, где определена функция $\lg\frac{x}{10}$). Так как $\lg\frac{1}{10}=-1$, а $\lg 10=1$, то из неравенства $\lg\frac{1}{10} \leq \lg\frac{x}{10} \leq \lg 10$ следует $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$.
Умножая все части неравенства на I0, получим область существования данной функции: $1 \leq x \leq 100$.

В заключение решите задачу на стр.I8а.

(а) Задача.

Найти область существования функции

$$y=\sqrt{\log_2 \sin x} \; .$$

Ответы: I. $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ $\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ стр. 2Iб

2. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ стр. 22

3. Эта формула не определяет никакой функции стр. 20в

(б) Вы допустили ошибку при отыскании области существования второго сомножителя. Вспомните, каким по знаку должно быть логарифмируемое выражение.

Решив задачу, сравните свой ответ с приведенными на стр. 20а.

(в) Правильно.

Функция $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$ будет определена лишь при тех значениях x, при которых выполняется неравенство $-1\leq\frac{1-2x}{4}\leq 1$. Для решения этого неравенства сначала умножим все его части на 4: $-4\leq 1-2x\leq 4$, затем к каждой части прибавим по (-I): $-5\leq -2x\leq 3$. Наконец, деля все части двойного неравенства на отрицательное число (-2), получим $2,5\geq x\geq -1,5$. Отрезок [-I,5; 2,5] и есть область существования данной функции.

Переходите к стр.I9.

§ 7. Область определения алгебраической суммы, произведения и частного функций

Из основных элементарных функций (степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических) и постоянных при помощи арифметических действий и операции взятия функции от функции строятся элементарные функции. Продолжая рассмотрение элементарных функций, напомним порядок отыскания области существования алгебраической суммы (или произведения) нескольких функций.

Сначала следует найти область существования каждого из слагаемых (сомножителей), а затем определить оощую часть полученных областей.

(Если эти области не имеют ни одной общей точки, то значит и нет функции в области действительных чисел).

В случае частного двух функций нужно найти общую часть областей существования числителя и знаменателя и исключить те значения x , которые обращают знаменатель в нуль.

Рассмотрим пример. Найти область существования функции

$$y=\sqrt[5]{x}-\sqrt{x+2}+\frac{1}{\lg(1-x)} .$$

Первая слагаемая функции $y_1=\sqrt[5]{x}$ определена при всех значениях x . Вторая функция $y_2=\sqrt{x+2}$ существует, когда $x+2\geqslant 0$, т.е. при $x\geqslant -2$. Третье слагаемое $y_3=\frac{1}{\lg(1-x)}$ определено лишь при тех значениях x , которые удовлетворяют системе неравенств

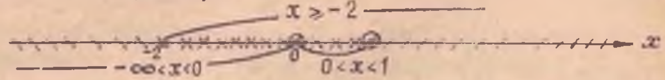
$$\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x\neq 1 \end{cases} .$$

(Неравенство $1-x\neq 1$ исключает то значение x , при котором знаменатель дроби равен 0). Решая систему, получим область существования функции $y_3=\frac{1}{\lg(1-x)}$: $x<1$ и $x\neq 0$, т.е.

$-\infty<x<0$ и $0<x<1$.

Переходите на стр. 20а.

(а) Теперь для отыскания общей части полученных областей изобразим их на одной числовой оси (выделяя каждую из областей своей штриховкой или цветом).



В нашем случае область существования первой функции мы не штриховали. Поэтому область, покрытая двойной штриховкой, и есть область существования данной функции. Она такова: $-2 \leqslant x < 0$ и $0 < x < 1$.

Решите <u>задачу</u>.

Найти область существования функции

$$y = \left(\arccos \frac{x}{3}\right) \cdot \lg(2x+1)$$

<u>Ответы</u>: I. $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ стр. I6в

2\. $-0{,}5 < x \leqslant 3$ стр. I7

3\. $-3 < x < 3$ стр. I4б

4\. $-3 \leqslant x < -0{,}5$ и $-0{,}5 < x \leqslant 3$ стр. I8б

5\. $-1 < x < -0{,}5$ и $-0{,}5 < x < 1$ стр. I2а

(б) <u>Неверно</u>.

Решая неравенство $x^2 - 4 \geqslant 0$, вы нашли, что $x \geqslant 2$. При таких значениях x неравенство $x^2 - 4 \geqslant 0$ верно. Однако вы определили не все решения этого квадратного неравенства.
Разложите левую часть на множители и завершите решение задачи. Затем вернитесь на стр.6б.

(в) <u>Неверно</u>.

Данная функция определена, например, в точке $x = \frac{5}{2}\pi$. В самом деле, $\sin\frac{5}{2}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = 1$, $\log_2 \sin\frac{5}{2}\pi = \log_2 1 = 0$, тогда $y = \sqrt{\log_2 \sin\frac{5}{2}\pi} = 0$.

Вам нужно решить неравенство $\log_2 \sin x \geqslant 0$ и вернуться на стр. I8а.

(а) Правильно.

Функцию $y = tg\frac{x}{2}$ можно записать в виде: $y = tg\,u$, $u = \frac{x}{2}$. Так как функция $y = tg\,u$ определена при $u \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k - любое целое число, а промежуточный аргумент $u = \frac{x}{2}$ есть функция, определенная при любом x , то сложная функция $y = tg\frac{x}{2}$ существует при всех значениях x , удовлетворяющих условию

$\frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, т.е. при $x \neq (2k+1)\pi$

Переходите на стр.16а.

(б) Неправильно.

Вы нашли область существования не данной функции, а функции $\log_2 \sin x$. Вам нужно рассмотреть неравенство $\log_2 \sin x \geqslant 0$, вспомнив свойства логарифмов и область изменения функции $\sin x$. Решив это неравенство, вернитесь к ответам на стр.18а.

(в) Неверно.

Вы неправильно решили неравенство $5x - x^2 + 6 > 0$. Если взять любое число из $(6, +\infty)$, например $x = 10$, и подставить в неравенство, то неравенству это число не удовлетворяет. Проверьте свое решение и вернитесь на стр.11б. Если вы забыли, как решаются квадратные неравенства, то сначала прочитайте стр. 25.

Правильно.

Функция $y=\sqrt{\log_2 \sin x}$ определена только при тех значениях x, при которых $\log_2 \sin x \geqslant 0$. Но при основании, большем единицы, логарифмы неотрицательны, если $\sin x \geqslant 1$. Так как неравенство $\sin x > 1$ не имеет решений, то остается найти корни уравнения $\sin x = 1$. Они имеют вид: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2$. Таким образом, множество этих чисел $(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, \ldots)$ и есть область существования данной функции.

Заметим, что в каждой точке из области существования функция обращается в нуль.

Наконец, приведем пример формулы $y=\lg(x-|x|)$, которая не определяет никакой вещественной функции.

В самом деле, для отыскания области существования нужно решить неравенство $x-|x|>0$, а ему не удовлетворяет ни одно значение x. Покажем это.

Если $x \geqslant 0$, то по определению абсолютной величины $|x|=x$, и тогда неравенство $x-|x|>0$ примет вид: $x-x>0$ или $0>0$, что невозможно.

Если $x<0$, то $|x|=-x$. Тогда неравенство $x-|x|>0$ запишется так: $x-(-x)>0$ или $2x>0$, откуда получаем, что $x>0$. Но мы рассматриваем решение неравенства при $x<0$. Значит, и в этом случае решений нет. Поэтому формула $y=\lg(x-|x|)$ не задает никакой функции.

Наша работа с пособием закончена.

В качестве домашнего задания можно взять дополнительные задачи, приведенные на стр.23.

Дополнительные задачи.

Найти области существования данных функций и построить их на числовой оси:

1. $y=\sqrt{-x}+\lg(3+x)$

2. $y=\arccos\frac{3x-5}{2}+\frac{1}{x^2-1}$

3. $y=\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2+4x+5}$

4. $y=\sqrt{x^2-2x}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

5. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{|x|-x}}-\arcsin\frac{2}{x}$

6. $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$

7. $y=\lg\frac{x-3}{x^2-4x}+\sqrt[3]{\sin x}$

8. $y=\sqrt{x-5}-\sqrt{5-x}$

9. Придумать пример аналитически заданной функции, определенной только в интервале $-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$ и неопределенной при $x=-1$.

Ответы находятся на стр.24.

Ответы к дополнительным задачам.

1. $-3 < x \leq 0$

2. $1 < x \leq \frac{7}{3}$

3. $(-\infty, \infty)$

4. $-1 < x \leq 0$ и $2 \leq x < 3$

5. $-\infty < x \leq -2$

6. $1 \leq x \leq 4$

7. $0 < x < 3$ и $4 < x < \infty$

8. $x = 5$

9. Например, $y = \frac{\lg(6-x^2)}{x+1}$ или $y = \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} + \frac{1}{x+1}$.

(Если вы придумали другие примеры, то покажите их преподавателю).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа, „Наука", Москва, 1967.

2. Г.И.Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу, „Высшая школа", Москва, 1966.

3. И.А.Каплан. Практические занятия по высшей математике, часть II, ХГУ, Харьков, 1963.

4. К.А.Бохан, И.А.Егорова, К.В.Лащенов. Курс математического анализа, том I, „Просвещение", Москва, 1965.

Приложение

Решение квадратных неравенств и неравенств более высокой степени

Для решения квадратного неравенства $ax^2+bx+c>0$ (или $ax^2+bx+c<0$), где a , b , c – действительные числа и $a\neq 0$, сначала следует найти корни квадратного трехчлена x_1 и x_2 , а затем воспользоваться известными правилами определения знака квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$.

I. Если корни x_1 и x_2 комплексные, то функция $y=ax^2+bx+c$ при всех значениях x имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2 .

2. Если корни действительные и равные, т.е. $x_1=x_2$, то при всех значениях x , кроме $x=x_1$, знак функции y совпадает со знаком коэффициента при x^2.

3. Если корни действительные и различные (например, $x_1<x_2$), то при $x<x_1$ и при $x>x_2$ знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента при x^2 , а в интервале $x_1<x<x_2$ функция y имеет знак, противоположный знаку коэффициента при x^2 .

Примеры

I. Квадратный трехчлен $y=3x^2-9x+6$ имеет корни $x=1$ и $x=2$. Так как коэффициент при x^2 $a=3>0$, то $y>0$ при $x<1$ и $x>2$.

   А решением неравенства $3x^2-9x+6<0$ будут все значения x из интервала $1<x<2$.

2. Неравенство $-x^2+4x-5>0$ не имеет решений, т.к. корни трехчлена $y=-x^2+4x-5$ комплексные $x_{1,2}=2\pm i$ и $a=-1$ (поэтому $y<0$ при всех значениях x)

Переходите на стр.26.

Умея решать линейные и квадратные неравенства, можно решить и неравенство более высокой степени.

Покажем один из методов решения на примере неравенства

$$(x+4)\cdot(x^2-3x+2)\cdot(-x^2+4x-5)>0 \qquad (I)$$

Учитывая то, что $-x^2+4x-5<0$ при всех значениях x, перейдем от неравенства (I) к равносильному неравенству

$$(x+4)(x^2-3x+2)<0 \quad . \qquad (2).$$

Т.к. $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, то неравенство (2) примет вид $(x+4)(x-1)(x-2)<0$ (2)

Нанесем на числовую ось корни многочлена, стоящего на левой части неравенства, а затем исследуем знак многочлена в интервалах, на которые эти точки разбивают числовую ось.

В интервале $(-\infty, -4)$ все множители отрицательны.
Т.к. произведение нечетного числа отрицательных множителей отрицательно, то в $(-\infty, -4)$ выполняется неравенство (2).
Если $-4<x<1$, то $x+4>0$, $x-1<0, x-2<0$.
Значит, $(x+4)(x-1)(x-2)>0$, т.е. неравенство (2) не имеет решений в $(-4,1)$.
Если $1<x<2$, то $x+4>0$, $x-1>0$, $x-2<0$.
Значит, неравенство (2) имеет место при таких значениях x .
Наконец, в интервале $(2, +\infty)$ неравенство (2) не имеет решений, т.к. все множители положительны.
Итак, решением неравенства (2), а значит и неравенства (I), будет совокупность интервалов $(-\infty, -4)$ и $(1,2)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Владимирович КУЛИКОВ

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Программированное учебное пособие

Редактор И.С.КОЛЫШЕВА
Корректор Е.П.Михайлова

Подписано в печать 8.УI.70 г. ЕО 00217. Формат 60x84 I/I6.
Объем I,75 п.л. Тираж I200 экз. Цена I0 коп.
Ротапринтный цех типографии им. Мяги, г. Куйбышев,Венцека,60.
Заказ № 5112