

КУЙБЫШЕВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
имени С. П. КОРОЛЕВА

Б. А. ГОРЛАЧ

НЕУПРУГИЕ
ДЕФОРМАЦИИ
В ЗАДАЧАХ
ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ

КУЙБЫШЕВ

1988

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ
ИНСТИТУТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА

Б. А. ГОРЛАЧ

НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ
В ЗАДАЧАХ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

КУЙБЫШЕВ 1988

Неупругие деформации в задачах формообразования элементов авиационных конструкций: Учеб. пособие /Б.А.Г о р л а ч: Куйб. авиац. ин-т, Куйбышев, 1988. 39 с.

Изложены основы теории пластичности и ползучести, рассмотрены основные методы решения задач, приведены примеры, иллюстрирующие применение математических моделей к решению задач формообразования неупругих элементов конструкций.

Пособие предназначается студентам дневного отделения, обучающимся по системе целевой интенсивной подготовки в области прочности и надежности, а также в области технологии производства летательных аппаратов.

Табл. 1. Ил. 25.

Печатается по решению редакционно-издательского совета института

Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. С т о л я р о в Н.Н.,
доц., к.т.н. Б е л и к о в А.Н.

В В Е Д Е Н И Е

Современная инженерная практика сталкивается с необходимостью проведения уточненных расчетов на прочность, жесткость, устойчивость, с потребностью моделировать и проводить на ЭЕМ исследования процессов обработки металлов давлением. Это позволяет, во-первых, увеличивать надежность и срок службы готовых изделий и, во-вторых, заменять дорогостоящую процедуру отладки в условиях производства реальных технологических процессов экономически более выгодным экспериментом на ЭЕМ.

Базой для создания математических моделей, описывающих поведение деталей в неупругой области, служат теории пластичности и ползучести. Эти науки являются составными частями фундаментального раздела механики - механики сплошной среды (МСС).

В настоящее время сложились два основных направления развития теории пластичности и ползучести: 1) уточненный расчет элементов конструкций на прочность; 2) исследование технологических процессов обработки металлов давлением.

Предлагаемое пособие призвано помочь читателям изучить основы теории пластичности и ползучести и ознакомиться с основными методами решения уравнений теории пластичности. Оно включает в себя общие сведения по теории напряжений и деформаций для трехмерных тел, принципы построения общих физических соотношений для пластических и вязких тел, основные теоремы и общие методы решения задач.

В конце каждого раздела приводятся вопросы для контроля усвоения материала, а также упражнения, выполнение которых позволит читателям закрепить теоретический материал и приобрести навыки его применения на практике.

I. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

I.1. Тензоры напряжения, деформации и их инварианты

Из механики сплошной среды известно, что каждая среда (газ, жидкость, твердые упругие и неупругие тела) характеризуется своими определяющими (физическими) соотношениями. Эти соотношения связывают между собой компоненты тензоров напряжения σ_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) и деформации ϵ_{kl} . В физические соотношения могут входить кроме того производные $\dot{\sigma}_{kl}$ и $\dot{\epsilon}_{kl}$ по времени, их приращения и некоторые другие параметры, конкретизирующие поведение среды.

Важное значение в теории пластичности имеют инварианты тензоров. Для любого симметричного тензора второго ранга (такowymi являются тензоры напряжения и деформации) существуют три независимых инварианта. Наряду с главными инвариантами $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ или $I_\epsilon, II_\epsilon, III_\epsilon$ широкое распространение нашли три другие инварианта. Для тензора напряжения:

- среднее напряжение или гидростатическое давление (σ_k - главные значения тензора напряжения)

$$\sigma = \frac{1}{3} I_\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (I.1)$$

- интенсивность касательных напряжений T (σ_i - интенсивность напряжений)

$$T = \sqrt{II_\sigma} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (I.2)$$

- угол вида напряженного состояния ω_σ (λ_σ - коэффициент Лодэ для напряженного состояния)

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3} III_\sigma}{2T^3} = \arccos \frac{\lambda_\sigma}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}. \quad (I.3)$$

Переключаются с (I.1)-(I.3) инварианты тензора деформации:

- средняя деформация e (θ - относительное изменение объема)

$$3e = I_\epsilon = \theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}; \quad (I.4)$$

- интенсивность касательных напряжений Γ (ϵ_i - интенсивность напряжений)

$$\Gamma = 2\sqrt{-\mathbb{I}\varepsilon} = \sqrt{3}e_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{31}^2)}; \quad (I.5)$$

- угол вида деформированного состояния (λ_ε - коэффициент Лодэ для деформированного состояния)

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{3} \arccos \frac{12\sqrt{3} \mathbb{III}\varepsilon}{\Gamma^3} = \operatorname{arccotg} \frac{\lambda_\varepsilon}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}. \quad (I.6)$$

Указанные инварианты тензоров удобны тем, что имеют вполне определенный геометрический смысл. Для его пояснения рассмотрим вектор напряжения $\vec{\sigma}$, действующий в некоторой точке тела, и представим его в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. I.I).

В тензорной алгебре доказывается, что проекция вектора полного напряжения $\vec{\sigma}$ на биссектрису координатного угла равна $\sqrt{3}\sigma$, то есть зависит от инварианта σ . Проекция вектора $\vec{\sigma}$ на плоскость, перпендикулярную биссектрисе и называемую девиаторной, равна $\sqrt{2}\tau$, то есть зависит только от интенсивности касательных напряжений. Что касается инварианта ω_σ , то он представляет собой угол между отрицательной проекцией оси σ_3 на девиаторную плоскость и направлением составляющей вектора $\vec{\sigma}$ на эту плоскость.

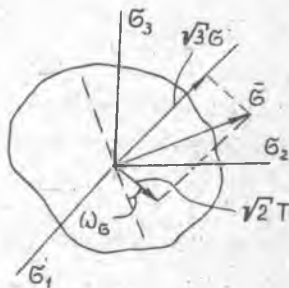


Рис. I.I

Пояснение физического смысла инвариантов σ дано при записи формулы (I.I) - это гидростатическое давление, приводящее для изотропного тела только к изменению его объема θ .

Инвариант τ связан с квадратичной формой компонент тензора напряжения, вызывающих изменение формы изотропного тела. Этот инвариант при действии на тело, например, только сдвиговых напряжений τ_{12} равен этим напряжениям.

Инвариант ω_σ или связанный с ним инвариант λ_σ зависит только от вида напряженного состояния (табл. I).

Аналогичную физическую и геометрическую интерпретацию имеют инварианты тензора деформации в трехмерном пространстве с декарто-

Таблица I

Инварианты	ω_{σ}	λ_{σ}
Сжатие	0	I
Растяжение	$\pi/3$	- I
Сдвиг	$\pi/6$	0

выми координатами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ главных значений тензора деформации.

Имея в виду различное влияние инвариантов тензоров на напряженно-деформированное состояние, при исследовании поведения различных сред из соответствующих тензоров, как правило, выделяют

гидростатическое давление σ или среднюю деформацию e :

$$S_{k\tau} = \sigma_{k\tau} - \delta_{k\tau} \sigma; \quad e_{k\tau} = \varepsilon_{k\tau} - \delta_{k\tau} e \quad (k, \tau = 1, 2, 3), \quad (I.7)$$

где

$$\delta_{k\tau} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = \tau \\ 0 & \text{при } k \neq \tau \end{cases}$$

Получающиеся в результате тензоры с компонентами $S_{k\tau}, e_{k\tau}$ называются девиаторами напряжений и деформаций.

Легко проверить, что инварианты σ и e не влияют на величины Γ и G . Действительно, подставляя (I.7) в выражения (I.2) и (I.5), получим

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + (S_{33} - S_{11})^2 + 6(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2)}, \quad (I.8)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 + 6(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2)}. \quad (I.9)$$

Кроме того,

$$S_{k\tau} \delta_{k\tau} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad \text{и} \quad e_{k\tau} \delta_{k\tau} = 0.$$

I.2. Формулировка условия возникновения пластических деформаций в общем виде

Для одномерного напряженного состояния условие возникновения пластической деформации можно записать в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_p \quad \text{или} \quad \sigma_1 - \sigma_p = 0, \quad \text{или} \quad f(\sigma_1) = 0. \quad (I.10)$$

То есть, как только напряжения в образце достигают предела текучести, в нем могут возникнуть пластические деформации. Для

одномерного случая σ_1 полностью описывает напряженное состояние в точке тела.

Напряженное состояние в трехмерных телах описывается шестью независимыми ($\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$) компонентами тензора напряжения. Как же, обобщая (I.10) в виде функциональной зависимости, записать условие возникновения пластических деформаций? Оно, очевидно, может быть сформулировано в виде равенства нулю некоторой функции от шести компонентов тензора напряжения:

$$f_1(\sigma_{kl}) = f_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) = 0. \quad (I.11)$$

Вспомним теперь, что три главных инварианта $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ или три другие независимые инварианты $\sigma, \Gamma, \omega_\sigma$ полностью характеризуют напряженное состояние в точке тела. Поэтому от (I.11) можно перейти к следующим условиям:

$$f_2(I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma) = 0 \quad \text{или} \quad f_3(\sigma, \Gamma, \omega_\sigma) = 0. \quad (I.12)$$

Многочисленные опыты, связанные с испытанием материалов, в частности опыты Бриджмена, позволили установить, что среднее напряжение σ (гидростатическое давление) практически не влияет на возникновение пластических деформаций. Воздействие на испытываемые материалы давлением порядка тысяч атмосфер не приводит к заметным пластическим деформациям. Происходит упругое изменение объема. В связи с этим можно положить, что условия (I.12) не должны содержать первого инварианта тензора напряжения: $I_\sigma = 3\sigma$. Поэтому условие возникновения пластических деформаций можно записать в виде

$$f_4(\Gamma, \omega_\sigma) = 0. \quad (I.13)$$

Вспоминая смысл инвариантов тензора напряжения, можно заключить, что кривая, описываемая условием (I.13), лежит на девиаторной плоскости (рис. I.2), а фигура, описываемая вторым соотношением (I.12), представляет собой в пространстве главных напряжений цилиндр, образующие которого параллельны оси гидростатического давления (биссектрисе координатного угла) (рис. I.3).

Если считать, что тело изотропно, то есть его свойства во всех направлениях одинаковы и эффект Баушингера не имеет места, то замкнутая кривая на девиаторной плоскости $f(\Gamma, \omega_\sigma) = 0$ будет обладать следующими свойствами.

I. Начало координат находится внутри кривой, иначе при нуле-

вых напряжениях в теле будут иметь место пластические деформации.

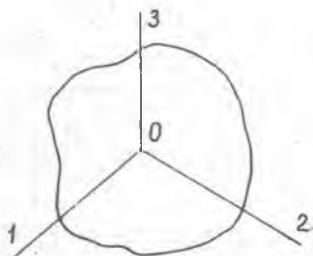


Рис. I.2

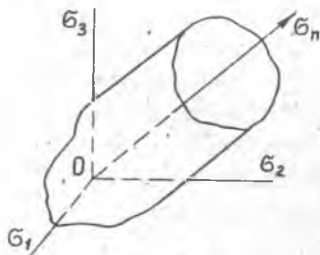


Рис. I.3

2. Она симметрична относительно осей 1, 2, 3 (проекции осей σ_1 , σ_2 , σ_3 на девиаторную плоскость), так как для изотропного тела напряжения должны входить в функциональные зависимости симметрично.

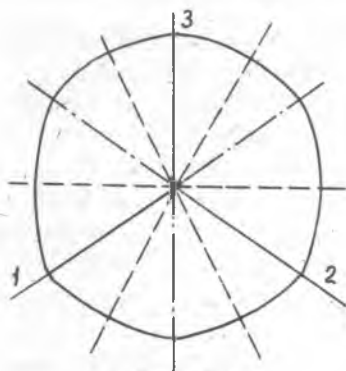


Рис. I.4

3. Кривая должна быть симметрична относительно перпендикуляров к осям 1, 2, 3, если эффект Баушингера отсутствует.

4. Кривая должна быть выпукла. Это условие будет доказано в дальнейшем и вытекает из принципа положительности работы пластического деформирования.

На рис. I.4 изображен след поверхности, называемой поверхностью текучести и описываемой условием (I.12), для изотропного тела. Кривую, соответствующую условию текучести (I.13), называют кривой текучести.

I.3. Экспериментальное построение кривой текучести

Для экспериментального построения кривой текучести на практике обычно используют опыты с тонкостенными образцами (рис. I.5). Достоинством этих опытов является то, что в них легко реализуются различные комбинации из трех видов напряженного состояния.

Растяжение силой P приводит к появлению в трубе напряжений

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi R\delta} \quad (I.14)$$

Напряжения σ_{22} обусловлены действием давления p .

$$\sigma_{22} = \frac{Pr}{\delta} \quad (I.15)$$

Действие крутящего момента вызывает появление только касательных напряжений:

$$\sigma_{12} = \frac{M}{2\pi R^2\delta} \quad (I.16)$$

Опыты с тонкостенной трубой позволяют осуществить нагружение с любой комбинацией напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} и прикладывать их в любой последовательности. Например, состояние точки А (рис. I.6) может быть достигнуто при пропорциональном росте P и M (прямая OA), нагружением силой P до точки В, а затем моментом M до точки А или в обратном порядке моментом M , затем силой P ($O - C - A$).

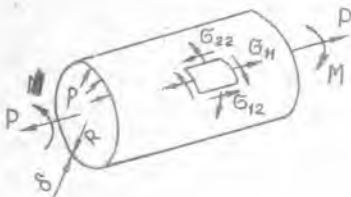


Рис. I.5

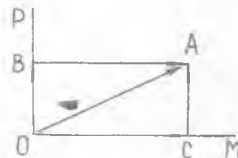


Рис. I.6

Кривую текучести строят следующим образом.

При определенной комбинации нагрузок, а следовательно и напряжений, определяют точки девиаторной плоскости пространства напряжений, соответствующих условию, что остаточные деформации при этом не превысят 0,2 %.

Различные комбинации нагрузок позволяют определить на девиаторной плоскости серию точек, характеризующих кривую текучести, которая пройдет через эти точки.

Опыты с цилиндрическими образцами позволяют установить влияние программы нагружения на поверхность текучести. Так, экспериментально установлено, что условие текучести, соответствующее пропорциональному нагружению OA , отличается от ступенчатых путей нагру-

жений ОВС и ОСА. В связи с этим выделяют нагружения, ведущие к пропорциональному возрастанию напряжений.

Будем называть простыми нагружения, характер распределения которых в теле не меняется со временем и соответствует некоторому фиксированному распределению $\sigma_{к\lambda}$:

$$\sigma_{к\lambda} = k \sigma_{к\lambda}^0 \quad (I.17)$$

Здесь k - зависящий от времени коэффициент пропорциональности.

Для трубчатых образцов, где имеет место однозначное соответствие между нагрузками и напряжениями, имеет место простое нагружение. В других случаях такого совпадения, как правило, не наблюдается.

I.4. Условие текучести Треска-Сен-Венана

Экспериментально определяемые кривые текучести имеют весьма сложную форму. Использовать данные, полученные непосредственно из эксперимента, на практике не представляется разумным по двум причинам.

1. Весьма сложно изготовить достаточное количество идентичных тонкостенных труб и провести на них большую серию испытаний.

2. Экспериментально построенные кривые не всегда удается с достаточной точностью описать удобными для расчетов аналитическими функциями.

К тому же отличия в свойствах одного и того же материала весьма значительны даже для одной партии поставки заготовок для производства. Поэтому на практике при выполнении расчетов прибегают к различного рода упрощениям, позволяющим с той или иной точностью аналитически описать поверхность текучести.

Одной из простейших аналитических зависимостей, описывающих состояние пластичности, является условие Треска-Сен-Венана.

Французский механик Треска высказал предположение о том, что пластические деформации возникают в теле тогда, когда касательные напряжения достигают определенной величины, связанной с пределом текучести. Это условие можно математически сформулировать следующим образом (условие $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ здесь неправоммерно - в любом направлении нагружения напряжения могут достигать своего максимума)

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = \sigma_p = 2\tau_p \quad (I.18)$$

или

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_p, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_p, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_p. \quad (I.19)$$

В пространстве напряжений это условие образует призму (рис. I.7) с плоскостями, параллельными осям координат и биссектрисе координатного угла. Например, первое из условий (I.19) дает две плоскости, параллельные оси σ_3 : $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_p$.

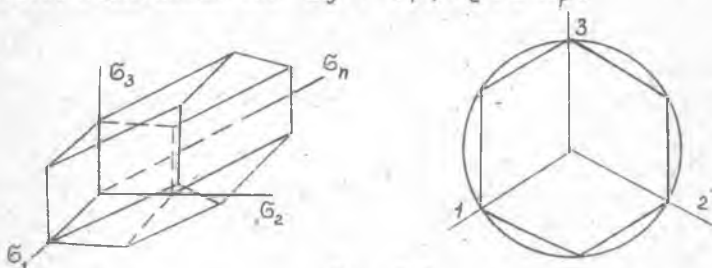


Рис. I.7

На девiatorной плоскости условие Треска приводит к правильно-му шестиграннику, вписанному в окружность, радиус которой $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_p$. Множитель при σ_p равен косинусу угла между осями σ_3 и 3.

Напряжения в (I.19) входят линейно и этим объясняется привлекательность условия Треска-Сен-Венана для решения задач. Однако это условие имеет и недостатки. Во-первых, функция, описываемая условиями (I.19), сингулярная (имеет угловые точки с разрывами производных в них). При решении конкретных задач каждый раз приходится анализировать, на каком участке поверхности текучести находится точка, изображающая напряженное состояние. Во-вторых, это условие не учитывает влияния среднего из главных значений тензора напряжения на пластические деформации, что зачастую противоречит опытам.

I.5. Условие Мизеса

Мизес предположил, что пластические деформации зависят только от второго инварианта тензора напряжения. Он выдвинул гипотезу о том, что при достижении вторым инвариантом тензора напряжения определенной величины в теле возникают пластические деформации. Эту величину Мизес связал с радиусом окружности, описанной вокруг следа поверхности Треска (рис. I.7).

Условие Мизеса можно записать в виде (см. раздел I.1):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_p \quad (I.20)$$

или

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_p^2. \quad (I.21)$$

Условие Мизеса удобно для решения задач, хотя оно и нелинейно, и широко используется на практике.

Мизес считал свое условие приближенным, а условие Треска - точным. Однако одни опыты лучше согласуются с условием Треска, другие - с условием Мизеса.

Разность между максимальными значениями касательного напряжения (I.18) и интенсивностью касательных напряжений (I.2) не превышает 14 %. Если использовать в качестве условия Мизеса окружность, проходящую между описанной и вписанной в призму Треска окружностями, то ошибка между τ_{max} и T не превысит 7 %.

Касательные напряжения текучести, найденные по условиям Треска и Мизеса, несколько отличаются друг от друга. Так, в случае чистого сдвига для условия Треска

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_p = \tau_p \rightarrow \tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p;$$

для условия Мизеса

$$\tau_p = T = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \rightarrow \tau_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_p.$$

В условии Мизеса пластические деформации не зависят от инварианта ω_σ тензора напряжения, то есть вид напряженного состояния в условии Мизеса не учитывается. Это недостаток условия, с которым в практике расчетов приходится считаться.

I.6. Условие изотропного упрочнения. Разгрузка

В предыдущих разделах этой главы рассматривались лишь условия возникновения пластических деформаций. Возможность упрочнения материала во внимание не принималась.

Прежде чем для неоднородного напряженного состояния записывать уравнения поверхности нагружения (так будем называть поверхность текучести для упрочняющегося материала), обратимся к одноосному растяжению стержня. Для этого случая нагружения предел текучести меняется по мере роста напряжения. При повторном нагруже-

нии это обстоятельство необходимо учитывать.

Условие нагружения для одномерного напряженного состояния упрочняющегося тела можно представить в виде

$$\sigma_1 = \sigma_p(\varepsilon_p). \quad (I.22)$$

Обобщая это условие на случай неоднородного напряженного состояния, можно записать

$$f(T, \omega_{\sigma}) = q(\varepsilon_p), \quad (I.23)$$

где q - некоторый параметр, характеризующий пластические деформации.

Для условия Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = q^2(\varepsilon_p). \quad (I.24)$$

Изменение q связано с изменением радиуса окружности, отделяющей на девиаторной плоскости упругую область от пластической. Аналогично условие изотропного упрочнения записывается для поверхности Треска.

По определению, данному ранее, разгрузка производится по упругому закону. Поэтому в представлении полных деформаций в виде суммы

$$\varepsilon_{kz} = \varepsilon_{kz}^e + \varepsilon_{kz}^p \quad (I.25)$$

упругие деформации ε_{kz}^e следует связывать с напряжениями законом Гука

$$\varepsilon_{kz}^e = \frac{1}{2G}(\sigma_{kz} - \frac{3\mu}{1+\mu}\sigma\delta_{kz}). \quad (I.26)$$

Последнее соотношение характеризует зависимость между напряжениями и деформациями при разгрузке. Способы определения пластических составляющих тензора деформации будут рассмотрены ниже.

1.7. Гипотеза единой кривой

Рассмотрение двух условий возникновения пластических деформаций говорит о преимуществе условия Мизеса перед условием Треска, заключающемся в том, что для первого безразлично, по какому пути осуществляется нагружение в пространстве напряжений OA или OB (рис. I.8). Для условия Треска $OA \neq OB$, и, следовательно, вид нагружения влияет на предел текучести.

Условие Мизеса позволяет не учитывать путь нагружения и рассматривать вместо траектории нагружения в пространстве σ_k одну кривую - зависимость интенсивности напряжения от интенсивности деформации (рис. I.9):

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i) \quad \text{или} \quad T = g(\Gamma). \quad (\text{I.27})$$

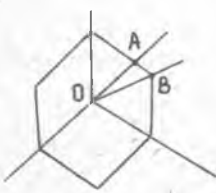


Рис. I.8

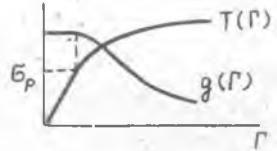
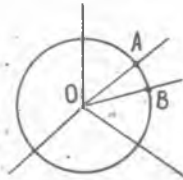


Рис. I.9

Из-за выпуклости кривой $T(\Gamma)$ касательный модуль положителен $\frac{dT}{d\Gamma} > 0$, а секущий модуль $g(\Gamma) = T/\Gamma$ - убывающая функция.

I.8. Вопросы и задачи к главе I

1. Какой физический и геометрический смыслы имеют инварианты тензоров напряжения (σ , Γ , ω_σ) и деформации (ϵ , Γ , ω_ϵ)?
2. Каким образом тензоры напряжения и деформации разбиваются на шаровую и девиаторную составляющие?
3. На какие функции накладывает ограничение условие пластичности в общем случае?
4. Каким требованиям должна удовлетворять поверхность текучести?
5. Как экспериментально построить поверхность текучести?
6. Что такое простое нагружение?
7. Запишите условия пластичности Треска-Сен-Венана и Мизеса. Изобразите на девиаторной плоскости следы соответствующих этим условиям поверхностей.
8. Как в условии текучести учесть упрочнение?
9. Что такое поверхность нагружения?
10. Сформулируйте гипотезу единой кривой. Может ли эта гипотеза применяться к условиям пластичности Треска-Сен-Венана и Мизеса?

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Существуют две основные разновидности теорий пластичности.

1. Теории пластичности деформационного типа или теории упруго-пластических деформаций. Они устанавливают соотношения между конечными (не бесконечно малыми) значениями напряжений и деформаций.

2. Теории пластичности дифференциального типа или теории течения. Они рассматривают зависимости между скоростями деформаций и напряжениями или, что то же, между дифференциалами (малыми приращениями) деформаций и напряжениями.

2.1. Основные положения деформационной теории пластичности

Деформационная теория пластичности является по существу нелинейной теорией упругости. В основе этой теории лежат следующие гипотезы.

1. Изменение объема происходит упруго.

$$\sigma = k\theta = 3k\epsilon. \quad (2.1)$$

2. Девiator напряжения пропорционален девiatorу деформации:

$$e_{\kappa\tau} = \psi S_{\kappa\tau} \quad (2.2)$$

или

$$\frac{\epsilon_{11} - \epsilon}{\sigma_{11} - \sigma} = \frac{\epsilon_{22} - \epsilon}{\sigma_{22} - \sigma} = \frac{\epsilon_{33} - \epsilon}{\sigma_{33} - \sigma} = \frac{\epsilon_{12}}{\sigma_{12}} = \frac{\epsilon_{23}}{\sigma_{23}} = \frac{\epsilon_{31}}{\sigma_{31}} = \psi. \quad (2.3)$$

Здесь ψ - некоторый скалярный множитель, в общем нелинейно зависящий от деформаций или напряжений.

Обратимся к коэффициенту Лода, характеризующему вид деформированного состояния:

$$\lambda_{\epsilon} = 2 \frac{\epsilon_{22} - \epsilon_{33}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{33}} - 1 = 2 \frac{e_{22} - e_{33}}{e_{11} - e_{33}} - 1. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2) в последнее выражение и сокращая на общий множитель ψ , получим

$$\lambda_{\epsilon} = 2 \frac{\psi S_{22} - \psi S_{33}}{\psi S_{11} - \psi S_{33}} - 1 = 2 \frac{S_{22} - S_{33}}{S_{11} - S_{33}} - 1 = \lambda_{\sigma}. \quad (2.5)$$

То есть $\lambda_{\epsilon} = \lambda_{\sigma}$, а следовательно, и углы вида напряженного и деформированного состояний совпадают ($\omega_{\epsilon} = \omega_{\sigma}$). Это возможно

только для соосных тензоров, то есть тензоров, у которых главные направления совпадают.

В частном случае совпадение коэффициентов Лоде возможно при их неизменности в процессе деформирования тела. Эта неизменность будет обеспечена, например, для простых нагружений, где $\sigma_{\kappa\tau} = \kappa \sigma_{\kappa\tau}^0$. Действительно,

$$\lambda_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} - 1 = 2 \frac{\kappa \sigma_{22}^0 - \kappa \sigma_{33}^0}{\kappa \sigma_{11}^0 - \kappa \sigma_{33}^0} - 1 = 2 \frac{\sigma_{22}^0 - \sigma_{33}^0}{\sigma_{11}^0 - \sigma_{33}^0} - 1 = \lambda_{\sigma}^0. \quad (2.6)$$

Таким образом, деформационная теория пластичности справедлива по крайней мере для случаев простого нагружения тела.

Очевидно, что соотношения (2.3) справедливы и для главных значений тензоров напряжений и деформаций

$$\frac{\epsilon_1 - e}{\sigma_1 - \sigma} = \frac{\epsilon_2 - e}{\sigma_2 - \sigma} = \frac{\epsilon_3 - e}{\sigma_3 - \sigma} = \psi$$

и вытекающих отсюда зависимостей

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1}. \quad (2.7)$$

Так как

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{2},$$

то из (2.7) следует

$$\frac{\gamma_1}{\tau_1} = \frac{\gamma_2}{\tau_2} = \frac{\gamma_3}{\tau_3}.$$

2.2. Определяющие соотношения деформационной теории пластичности

Найдем связь между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряжений за пределом упругости. Имея в виду полученные ранее выражения для интенсивностей (I.2), (I.5) и соотношение (2.2), получим

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} = \\ &= \psi \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \psi \sigma_i. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{e_i}{\sigma_i}. \quad (2.8)$$

Таким образом, для определения функции ψ достаточно знать диаграмму зависимости $\sigma_i(\epsilon_i)$. Ее можно построить, например, по известной диаграмме одноосного растяжения материала $\sigma(\epsilon)$. В этом случае

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = \sigma_{33} = 0$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\mu \epsilon_1, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = 0.$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_1 \quad (2.9)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \frac{2}{3} (1 + \mu) \epsilon_1. \quad (2.10)$$

Следовательно, для построения графика зависимости $\sigma_i(\epsilon_i)$ ординату ϵ_1 на диаграмме деформирования при одноосном растяжении необходимо умножить на $2(1 + \mu)/3$.

Для упругого участка диаграммы имеем $\sigma_1 = E \epsilon_1$. Тогда с учетом (2.10) получим

$$\sigma_i = \sigma_1 = E \epsilon_1 = \frac{3E}{2(1 + \mu)} \epsilon_i = 3G' \epsilon_i.$$

Итак, для неупругого тела функция $\frac{1}{\psi} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} = 2G'$ связана с секущим модулем $3G'$ диаграммы $\sigma_i(\epsilon_i)$ (рис. 2.1). Подставляя эту функцию в зависимость (2.2), получим

$$e_{k\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} S_{k\lambda} = \frac{1}{2G'} S_{k\lambda}$$

или обратные зависимости

$$S_{k\lambda} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} e_{k\lambda} = 2G' e_{k\lambda}.$$

Множитель G' можно представить следующим образом:

$$G' = G(1 - \omega).$$

Здесь ω - некоторая нелинейная функция (функция Ильюшина), отличная от нуля в области пластических деформаций (рис. 2.1).

Деформационная теория пластичности совпадает по существу с нелинейной теорией упругости. При $1/\psi = 2G$ соотношения (2.1) - (2.2) приводят к закону Гука. Для идеального упругоупругого материала, когда $\sigma_i = \sigma_p$, функция ψ определяется из соотношения $\psi = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_i}{\sigma_p}$. Неоднозначности в определении связи между напряжениями и деформациями при этом не возникает, так как ψ связана с секу-

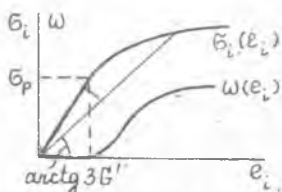


Рис. 2.1

щим модулем, который на диаграмме $\sigma_i(e_i)$ фиксирует единственную точку.

2.3. Теория течения. Основные положения

В основу построения соотношений теории течения положены следующие гипотезы.

1. Изменение объема тела происходит упруго

$$d\sigma = \kappa de, \quad de_p = d\theta_p = 0. \quad (2.11)$$

2. Полное приращение тензора деформации складывается из приращения его упругой и пластической составляющих:

$$d\varepsilon_{\kappa\tau} = d\varepsilon_{\kappa\tau}^e + d\varepsilon_{\kappa\tau}^p \quad \text{или} \quad de_{\kappa\tau} = de_{\kappa\tau}^e + de_{\kappa\tau}^p. \quad (2.12)$$

3. Упругая составляющая тензора деформации связана с приращением тензора напряжения законом Гука:

$$d\varepsilon_{\kappa\tau}^e = \frac{1}{2G} (d\sigma_{\kappa\tau} - \frac{3\mu}{1+\mu} \delta_{\kappa\tau} d\sigma), \quad (2.13)$$

а пластическая зависит от достигнутых напряжений

$$de_{\kappa\tau}^p = S_{\kappa\tau} d\lambda. \quad (2.14)$$

Из последнего соотношения следует:

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_{11}^p}{S_{11} - \sigma} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{S_{22} - \sigma} = \dots = \frac{d\varepsilon_{33}^p}{S_{33}}. \quad (2.15)$$

При записи этих зависимостей учтено условие (2.11).

Скалярный множитель $d\lambda$ в выражении (2.14) может быть найден, например, по известному приращению работы пластических деформаций, которое на основании зависимостей (1.7) и (2.14) представимо в виде (по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3)

$$dA^p = \sigma_{\kappa\tau} d\varepsilon_{\kappa\tau}^p = (S_{\kappa\tau} + \sigma \delta_{\kappa\tau}) d\lambda S_{\kappa\tau} = S_{\kappa\tau} S_{\kappa\tau} d\lambda = 2T^2 d\lambda. \quad (2.16)$$

Отсюда найдем

$$d\lambda = \frac{dA^p}{2T^2}.$$

2.4. Определяющие соотношения теории течения

Используя соотношения (2.14) и (1.5), преобразуем выражение для интенсивности приращений пластических деформаций

$$\begin{aligned} de_i^P &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(de_1^P - de_2^P)^2 + (de_2^P - de_3^P)^2 + (de_3^P - de_1^P)^2} = \\ &= d\lambda \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2} = \frac{2}{3} d\lambda \sigma_i \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отсюда получаем зависимость для определения множителя $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{de_i^P}{\sigma_i} \quad (2.18)$$

Подставляя это соотношение в (2.14), найдем

$$de_{\kappa\tau}^P = \frac{3}{2} \frac{de_i^P}{\sigma_i} S_{\kappa\tau} \quad (2.19)$$

или с учетом (2.11)

$$de_{\kappa\tau}^P = \frac{3}{2} \frac{de_i^P}{\sigma_i} (\sigma_{\kappa\tau} - \sigma \delta_{\kappa\tau}) \quad (2.20)$$

Полное приращение тензора деформации будет равно сумме его упругого (2.13) и пластического (2.20) приращений:

$$d\varepsilon_{\kappa\tau} = \frac{1}{2G} (d\sigma_{\kappa\tau} - \frac{3\mu}{1+\mu} d\sigma \delta_{\kappa\tau}) + \frac{3}{2} \frac{de_i^P}{\sigma_i} (\sigma_{\kappa\tau} - \sigma \delta_{\kappa\tau}) \quad (2.21)$$

Эта зависимость была впервые получена Прандтлем для плоской задачи теории пластичности и обобщена для общего случая Рейссон.

К существенным упрощениям приводит пренебрежение в зависимости (2.21) упругими деформациями. Полученные для этого случая соотношения

$$d\varepsilon_{\kappa\tau} = \frac{3}{2} \frac{de_i^P}{\sigma_i} (\sigma_{\kappa\tau} - \sigma \delta_{\kappa\tau}) \quad (2.22)$$

после деления на dt сводится к зависимости между компонентами тензоров скоростей деформации и напряжения

$$\xi_{\kappa\tau} = \frac{3}{2} \frac{\xi_i^P}{\sigma_i} (\sigma_{\kappa\tau} - \sigma \delta_{\kappa\tau}) \quad \text{или} \quad \xi_{\kappa\tau}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{\kappa\tau}}{\sigma_i} \quad (2.23)$$

Эти соотношения впервые получены Сен-Венаном для плоской де-

формации и обобщены на случаи трехмерных тел Леви. Они справедливы для твердых идеально пластических тел и для жидких сред, обладающих внутренним трением.

2.5. Сопоставление деформационной теории и теории течения в случае простого нагружения

Предположим, что в деформируемом теле реализуется простое нагружение, то есть для него справедливо условие

$$S_{\kappa\tau} = \beta S_{\kappa\tau}^{\circ} \quad (2.24)$$

В этом случае соотношения теории течения Сен-Венана-Леви можно представить в виде

$$d\varepsilon_{\kappa\tau}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{\kappa\tau}^{\circ}}{\sigma_i^{\circ}} de_i^P \quad (2.25)$$

Проинтегрируем (2.25) по всему пути деформирования. При этом учтем, что напряжения со знаком „о^н“ - фиксированы

$$\varepsilon_{\kappa\tau}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{\kappa\tau}^{\circ}}{\sigma_i^{\circ}} \int_{\varepsilon^P} de_i^P \quad (2.26)$$

Определяя по формуле (2.17) интенсивность приращений пластических деформаций, получим $de_i^P = \dot{e}_i^P d\beta$, поэтому

$$\int_{\varepsilon^P} de_i^P = \dot{e}_i^P \int_0^{\beta} d\beta = \beta \dot{e}_i^P = e_i^P \quad (2.27)$$

Таким образом, в случае простого нагружения интенсивность приращений пластических деформаций является полным дифференциалом и не зависит от пути деформирования.

Учитывая (2.27), из (2.26) после умножения числителя и знаменателя на β получим

$$\varepsilon_{\kappa\tau}^P = \frac{3}{2} \frac{e_i^P}{\sigma_i^{\circ}} S_{\kappa\tau} \quad (2.28)$$

Последнее соотношение при отсутствии упругих деформаций совпадает с соотношением деформационной теории пластичности.

Таким образом, в простейшем случае простого нагружения теория течения и деформационная теория приводят к одним и тем же результатам.

2.6. Функция текучести и пластический потенциал

Обратимся к выражению для квадрата интенсивности напряжений (I.2)

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{13}^2)] \quad (2.29)$$

и определим производные от этой функции по компонентам тензора напряжения, считая формально независимыми компоненты σ_{kl} и σ_{lk} ($l \neq k$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \sigma_{11}} &= \sigma_{11} - \sigma_{22} + \sigma_{11} - \sigma_{33} = 3\sigma_{11} - 3\sigma = 3S_{11} \\ \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \sigma_{12}} &= 3\sigma_{12} = 3S_{12} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Таким образом, компоненты деватора напряжения могут быть определены как производные от квадрата интенсивности напряжений по соответствующим компонентам тензора напряжения, деленные на 3:

$$S_{kl} = \frac{1}{3} \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.31)$$

Поэтому определяющие соотношения, соответствующие теории течения, можно представить в виде:

$$d\varepsilon_{kl}^P = d\lambda \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.32)$$

Из этих соотношений следует, что векторы $d\varepsilon_{kl}^P$ направлены по нормали к поверхности $\sigma_i^2 = \text{const}$. Чтобы убедиться в этом, запишем (2.42) для главных значений тензоров в векторном виде (i_k - единичные базисные векторы)

$$d\varepsilon_k^P i_k = d\lambda \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \sigma_k} i_k = d\lambda \text{grad } \sigma_i^2 \quad (2.33)$$

Из (2.33) видно, что в пространстве главных напряжений вектор $d\varepsilon^P = d\varepsilon_k^P i_k$ ортогонален поверхности $\sigma_i^2 = \text{const}$.

Формальное обобщение зависимости (2.33) на девятимерное пространство напряжений приводит к зависимости (2.32) с тем же смыслом компонентов $d\varepsilon_{kl}^P$ для тензора деформации, что и компонентов $d\varepsilon_k^P$ для вектора $d\varepsilon^P$.

Функцию σ_i^2 в общем можно заменить на любую другую функцию $f(\sigma_{\kappa\lambda})$, отделяющую в пространстве напряжений область упругих деформаций от пластических:

$$d\varepsilon_{\kappa\lambda}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\kappa\lambda}} \quad (2.34)$$

В частном случае условия Мизеса: $f = \frac{1}{3} \sigma_i^2$.

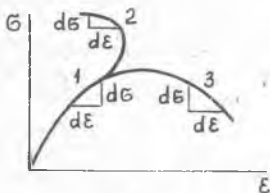
Введенная соотношением (2.34) зависимость между приращениями пластических деформаций и напряжениями выражает так называемый ассоциированный (согласующийся) закон пластического течения.

Согласно ассоциированному закону приращения пластических деформаций всегда градиентальны поверхности текучести, которая описывается соотношением $f = f(\sigma_{\kappa\lambda}) = \text{const}$.

Множитель $d\lambda$ в выражении (2.34) может быть, как и ранее, определен, например, из работы пластических деформаций.

2.7. Постулат Драккера. Выпуклость поверхности нагружения

Для случая одномерного напряженного состояния определим приращение работы пластической деформации для трех вариантов диаграммы деформирования (рис.2.2):



$$1. d\varepsilon > 0, d\sigma > 0 : dA = d\sigma d\varepsilon > 0;$$

$$2. d\varepsilon < 0, d\sigma > 0 : dA < 0;$$

$$3. d\varepsilon > 0, d\sigma < 0 : dA < 0.$$

Только первая ситуация описывает поведение устойчивого материала, о чем говорят положительность приращения работы. Ее обобщение приводит к условию положительности приращения работы деформации в трехмерном неупругом теле

$$d\sigma_{\kappa\lambda} d\varepsilon_{\kappa\lambda} \geq 0. \quad (2.35)$$

Рассматривая в пространстве напряжений замкнутый цикл нагружение-разгрузка

$$\oint_{\varepsilon_{\kappa\lambda}} \sigma_{\kappa\lambda} (d\varepsilon_{\kappa\lambda}^e + d\varepsilon_{\kappa\lambda}^p) \geq 0 \quad (2.36)$$

и выделяя из него работу упругих деформаций, равную нулю, приходим

к соотношению

$$\oint_{\epsilon_{kz}} \sigma_{kz} d\epsilon_{kz}^p \geq 0. \quad (2.37)$$

Из выражения (2.35) также можно выделить работу пластических деформаций, считая ее положительной:

$$d\sigma_{kz} d\epsilon_{kz}^p \geq 0. \quad (2.38)$$

Соотношения (2.37) и (2.38) представляют собой математическую запись постулата Драккера о положительности работы пластических деформаций. Можно показать, что этот постулат, как и другие энергетические постулаты (Циглер, Ильюшин), перекликаются со вторым законом термодинамики.

Посмотрим, какие ограничения накладывает требования постулата Драккера на характер поверхности текучести при использовании ассоциированного закона.

Предположим, что поверхность текучести вогнута (рис.2.3). Тогда в пространстве напряжений можно выбрать такое нагружение, что угол между приращением вектора напряжения $d\sigma_{kz}$ и нормальным к поверхности текучести вектором $d\epsilon_{kz}^p$ будет больше прямого. В этом случае скалярное произведение $d\sigma_{kz} d\epsilon_{kz}^p < 0$, что противоречит постулату Драккера или ассоциированному закону пластического течения. Следовательно, поверхность текучести должна быть невогнутой.

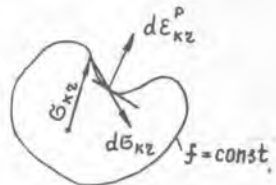


Рис. 2.3

З а м е ч а н и е. В случае задания сингулярной поверхности текучести (например, Треска) в ее угловых точках (рис.2.4) рекомендуется записывать выражение для пластических деформаций в виде:

$$d\epsilon_{kz}^p = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{kz}} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{kz}}.$$

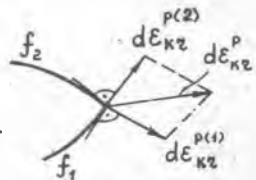


Рис. 2.4

2.8. Поверхности текучести для упрочняющихся тел

В общем случае поверхность текучести можно описать некоторой функциональной зависимостью, накладываемой на напряжения

$$f(\sigma_{kz}) = q. \quad (2.39)$$

Для упрочняющегося тела эта поверхность (поверхность нагружения) может изменяться в процессе деформирования. Из всех возможных вариантов ее изменения можно выделить два:

I. Изменение, обусловленное увеличением параметра q , характеризующего радиус поверхности текучести. Например, для поверхности Мизеса - это $2\sigma_p^2$:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_p^2.$$

Если предположить, что σ_p^2 пропорционально интенсивности накопленных пластических деформаций, то

$$f(\sigma_{к\tau}) = 2\sigma_p^2(\epsilon_i^p) \quad \text{или} \quad f(\sigma_{к\tau}) = q(\epsilon_i^p).$$

В этом случае цилиндр Мизеса или другая поверхность нагружения будут изотропно расширяться по мере роста напряжений в одном направлении нагружения (рис.2.5).

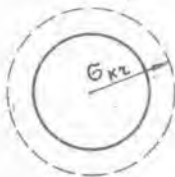


Рис. 2.5

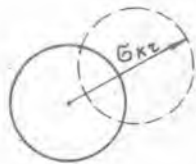


Рис. 2.6

Такое описание поверхности нагружения не отражает эффект Баушингера.

2. Трансляционное упрочнение

$$f(\sigma_{к\tau} - \rho_{к\tau}) = K.$$

Эта зависимость при $\rho_{к\tau} = \rho_{к\tau}(\epsilon_i^p)$ ($\rho_{к\tau}$ - по терминологии В.В.Новожилова - тензор остаточных микронапряжений) описывает смещение центра поверхности нагружения, оставляя при $K = \text{const}$ неизменными ее размеры (рис.2.6).

В общем случае можно комбинировать изотропное и трансляционное упрочнения

$$f(\sigma_{к\tau} - \rho_{к\tau}) = q(\epsilon_i^p).$$

2.9. Вопросы и задачи к главе 2

1. Сформулируйте основные положения деформационной теории пластичности и теории течения. Что между ними общего и что их отличает ?

2. В каком случае нагружения тела теория течения и деформационная теория приводят к одним результатам ?

3. Чем отличаются соотношения Прандтля-Рейса и Сен-Венана-Леви в теории пластического течения ?

4. Запишите определяющие соотношения для ассоциированного закона пластического течения.

5. Какие требования накладывают на вид поверхности текучести ассоциированный закон пластического течения и постулат Дракера ?

6. Как можно определить приращение пластических деформаций в угловых точках поверхности текучести ?

7. Как можно записать уравнения упругопластического состояния для материала с трансляционным упрочнением ? изотропным упрочнением ? в общем случае ?

3. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА. МЕТОДЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

3.1. Система уравнений упругопластического деформирования тел

Замкнутая система уравнений, описывающих поведение упруго-пластических тел, включает в себя общие уравнения для любой сплошной среды и соотношения, определяющие упругопластическое тело. Она состоит из 17 следующих уравнений.

1. Три уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{kz}}{\partial x_k} + \rho F_k = 0.$$

2. Шесть геометрических соотношений:

$$\varepsilon_{kz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_k} \right).$$

3. Уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

4. Определяющие соотношения:

для деформационной теории

$$e_{kz} = \psi S_{kz}, \quad \sigma = \psi k \varepsilon;$$

для ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_{kz}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kz}}; \quad d\varepsilon_{kz}^e = \frac{1}{2G} (d\sigma_{kz} - \frac{3\mu}{1+\mu} d\sigma \delta_{kz})$$

$$d\varepsilon_{kz} = d\varepsilon_{kz}^e + d\varepsilon_{kz}^p.$$

5. Уравнение упругопластического состояния:

$$f(\sigma_{kz} + \rho_{kz}) = q(\varepsilon_{kz}^p).$$

К этим уравнениям необходимо добавить статические и кинематические граничные условия для определения постоянных интегрирования. Выписанные соотношения обрежут математическую модель, описывающую поведение упругопластических тел. Система уравнений содержит 17 неизвестных u_k (v_k) - 3, σ_{kz} - 6, ε_{kz} - 6, ρ - 1, q - 1 и вместе с граничными условиями позволяет решать задачи теории пластичности.

3.2. Методы решения задач теории пластичности

Для решения задач теории пластичности используются традиционные, излагаемые в теории упругости методы. Это методы, применяемые к решению любой системы дифференциальных уравнений: аналитические; численного интегрирования (Рунге-Кутта, конечных разностей); вариационные, основанные на подходах Лагранжа или Кастилиано (Ритца, Бубнова-Галеркина); наиболее распространенный в настоящее время метод конечных элементов, базирующийся на вариационной постановке задачи.

Эти хорошо разработанные методы применимы для решения линейных задач. Однако выписанные в предыдущем разделе уравнения существенно нелинейны (физическая нелинейность). Поэтому прежде чем приступать к их решению изложенными методами, систему уравнений требуется линеаризовать.

Линеаризацию нелинейных уравнений можно осуществить применением различных итерационных методов.

Широкое распространение при решении нелинейных уравнений теорий пластичности дифференциального типа получил метод последовательных нагружений. Суть его заключается в том, что весь процесс нагружения тела разбивается на малые шаги, такие, чтобы на каждом шаге нагружения приращения деформаций и напряжений были достаточно малыми. Степень малости функций должна быть такой, чтобы уравнения математической модели можно было считать линейными.

Последовательно определяя на каждом шаге нагружения приращения деформаций, напряжений, перемещений и суммируя их с найденными функциями предыдущих шагов нагружения, можно проследить за всем процессом деформирования тела.

При решении задач шаговым методом необходимо учитывать то обстоятельство, что на каждом шаге нагружения деформирование тела происходит от приращения нагрузки. Достигнутая ранее нагрузка уравновешена найденными на предыдущих шагах внутренними напряжениями.

Текущий модуль на диаграмме $\sigma_i(\epsilon_i)$ на каждом шаге нагружения определяется по суммарной интенсивности деформаций (квадратичная форма от суммарных компонентов тензора деформации), достигнутой к рассматриваемому шагу нагружения.

Таким образом, шаговый метод решения задач теории пластического течения позволяет линеаризовать задачу и проследить путь

нагружения.

В отличие от теории течения уравнения деформационной теории пластичности не отражают влияния истории деформирования на поведение конструкции. Для решения уравнений этой теории могут быть применены обычные методы последовательных приближений. Существуют три разновидности этих методов, применимых к решению задач теории пластичности:

- 1) дополнительных напряжений;
- 2) дополнительных деформаций;
- 3) переменных параметров упругости.

Первый метод применяется при решении задач теории пластичности в напряжениях. При его реализации линеаризуется связь между напряжениями и деформациями (2.2) следующим образом:

$$S_{\kappa\tau} = \frac{1}{\psi} e_{\kappa\tau} = 2G e_{\kappa\tau} + S_{\kappa\tau}^H(e_{\kappa\tau}) \quad (3.1)$$

Нелинейные слагаемые $S_{\kappa\tau}^H(e_{\kappa\tau})$, зависящие от деформаций, в исходном (нулевом) приближении считаются равными нулю, и решается обычная задача теории упругости. Затем в первом приближении $S_{\kappa\tau}^H$ определяются по найденным в нулевом приближении деформациям $e_{\kappa\tau}$. По этим функциям уточняются напряжения, деформации и другие функции в первом приближении. Затем снова, уже во втором приближении, находится нелинейная добавка $S_{\kappa\tau}^H$ и так далее. Расчет ведется до тех пор, пока точность решения не достигнет заданной.

В методе дополнительных деформаций линеаризуются соотношения, обратные (3.1):

$$e_{\kappa\tau} = \psi S_{\kappa\tau} = \frac{1}{2G} S_{\kappa\tau} + e_{\kappa\tau}^H(S_{\kappa\tau}). \quad (3.2)$$

Процесс решения организуется так же, как для случая дополнительных напряжений, но на каждой последующей итерации нелинейная добавка деформаций $e_{\kappa\tau}^H$ определяется по найденным на предыдущей итерации напряжениям.

Метод переменных параметров упругости основывается на корректировке секущего модуля G' на каждой итерации. При реализации этого метода уравнения (3.1) или (3.2) представляются следующим образом:

$$S_{\kappa\tau} = 2G' e_{\kappa\tau} \quad \text{или} \quad e_{\kappa\tau} = \frac{1}{2G'} S_{\kappa\tau}. \quad (3.3)$$

В исходном (нулевом) приближении решается упругая задача

$$S_{\kappa\tau}^{(0)} = 2G e_{\kappa\tau}^{(0)} \quad \text{или} \quad e_{\kappa\tau}^{(0)} = \frac{1}{2G} S_{\kappa\tau}^{(0)}.$$

Далее по найденным деформациям и напряжениям определяются их интенсивности $\sigma_i^{(0)} = f(S_{\kappa\tau}^{(0)})$, $e_i^{(0)} = f(e_{\kappa\tau}^{(0)})$. По их значениям и диаграмме $G_i(e_i)$ находится секущий модуль первого приближения $G'_i(\sigma_i^{(0)})$ - при решении задач в напряжениях, или $G'_i(e_i^{(0)})$ - при решении задач в деформациях. Затем с использованием зависимостей (3.3) находятся напряжения и деформации первого приближения. После чего во втором приближении уточняется секущий модуль. И так далее до достижения требуемой точности решения.

Заметим, что перечисленные итерационные методы решения задач по деформационной теории пластичности применяются иногда для решения задач по теории течения на каждом шаге нагружения в том случае, когда шаги нагружения настолько велики, что уравнения, описывающие поведение тела, сохраняют существенную нелинейность. Например, если на каждом шаге нагружения секущий модуль существенно меняется.

3.3. Деформирование сферической оболочки

Рассмотрим процесс деформирования сферической оболочки под действием равномерного давления p (рис.3.1).

Будем предполагать, что на любой стадии деформирования в оболочке реализуется безмоментное состояние. Для этого полагаем оболочку шарнирно опертой. В этом случае уравнения равновесия оболочки будут выглядеть так:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta} \quad (3.4)$$

Здесь R и δ - радиус и толщина оболочки, соответствующие равносному (деформированному, но не исходному) состоянию.

Соотношения (3.4) - равенство напряжений и их линейная зависимость от p - говорят о том, что имеет место простое нагружение и к расчету оболочки можно применить деформационную теорию пластичности.

Для получения физических соотношений определим интенсивности

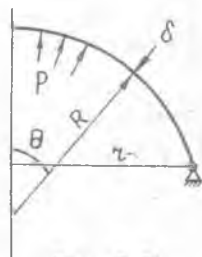


Рис. 3.1

напряжений и деформаций из (I.2) и (I.5). Имея в виду зависимости между деформациями

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{\mu} \varepsilon_3$$

и полагая $\mu = 0,5$; $\sigma_3 = 0$, найдем

$$\sigma_i = \sigma_1, \quad e_i = \varepsilon_1.$$

То есть в рассматриваемом случае диаграмма зависимости $\sigma_i(e_i)$ совпадает с диаграммой деформирования $\sigma_1(\varepsilon_1)$ для одноосного растяжения образца и секущий модуль равен E' (E - для упругого участка).

Используя определяющие соотношения деформационной теории (2.1) и (2.2), с учетом (2.8) найдем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2E' \varepsilon_1. \quad (3.5)$$

Деформации ε_1 , в общем, могут быть не малыми, поэтому их надо связать с удлинениями $e_1 = \Delta \ell / \ell_0$ логарифмической зависимостью (ℓ_0 - длина рассматриваемой части меридиана оболочки в исходном состоянии):

$$\varepsilon_1 = \ln(1 + e_1) \quad \text{или} \quad e_1 = \exp \varepsilon_1 - 1. \quad (3.6)$$

Длина $\ell = \Delta \ell + \ell_0 = \ell_0(1 + e_1)$ меридиана оболочки в деформированном состоянии связана с радиусом оболочки R и координатным углом θ (рис.3.1):

$$\ell = R \theta. \quad (3.7)$$

Кроме того, θ можно связать с опорным размером оболочки r :

$$r = R \sin \theta.$$

Отсюда и из (3.7) следует зависимость

$$\frac{r}{R} = \sin \frac{\ell}{R}, \quad (3.8)$$

позволяющая по известной длине оболочки определить ее радиус R .

Если деформации малы и размеры деформированной оболочки незначительно отличаются от исходных $R = R^{(0)}$, $\delta = \delta^{(0)}$, решение задачи находится достаточно просто.

По заданной нагрузке p_n определяются напряжения $\sigma_i^{(0)}$ по формулам (3.4). По диаграмме деформирования и известной интенсивности напряжений определяется $E^{(0)}$ и $\varepsilon_1^{(0)}$ по формуле (3.5), затем в случае необходимости находятся длина $\ell^{(0)}$ и толщина $\delta^{(0)}$ деформированной оболочки

$$\ell^{(1)} \approx \ell^{(0)} (1 + \varepsilon_1^{(0)}), \quad \delta^{(1)} = \delta^{(0)} (1 - 2\varepsilon_1^{(0)}). \quad (3.9)$$

После этого из решения трансцендентного уравнения (3.8) определяется радиус кривизны деформированной оболочки $R^{(1)}$.

Если $R^{(1)} \approx R^{(0)}$, то на этом решение можно закончить. В противном случае в формулу (3.4) подставляются найденные значения $R^{(1)}$, $\delta^{(1)}$ и решение повторяется до тех пор, пока процесс последовательных приближений не сойдется.

В случае необходимости проведения исследования поведения оболочки при возрастающей нагрузке к деформированной давлением p_0 (оно уравновешено найденными напряжениями) оболочке прикладывают новую порцию нагрузки Δp_1 , так, что $p_1 = p_0 + \Delta p_1$, и от действия этой добавочной нагрузки определяют по описанной методике добавочные напряжения, деформации, изменения длины, толщины и радиуса кривизны оболочки. Затем найденные ранее напряжения и деформации суммируют с добавочными. После этого добавляют новую порцию нагрузки и так далее.

При организации процесса последовательных нагружений во избежание потери точности желательно длину оболочки вычислять не по деформациям ε_1 (3.9), а перейти к удлинению e_1 , вычисляемому по формуле (3.6).

В качестве примера проведем результаты исследования на ЭВМ процесса деформирования сферической оболочки, в исходном состоянии мало отличающейся от пластины. *)

Начальные размеры оболочки:

$\tau = 100$ мм, $\delta = 1$ мм, $R = 50000,5$ мм,

$\ell = 100,0065$ мм. Считалось, что оболочка выполнена из Д16 со следующими характеристиками:

$E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа,

$\sigma_p = 274$ МПа, $\sigma_g = 430$ МПа, $\varepsilon_g = 0,11$.

Диаграмма деформирования аппроксимировалась зависимостью $\sigma_i = A\varepsilon^n$.

Шаг по нагрузке выбирался равным 0,1 МПа.

Графики на рис. 3.2 показывают изменение напряженно-деформированного состо-

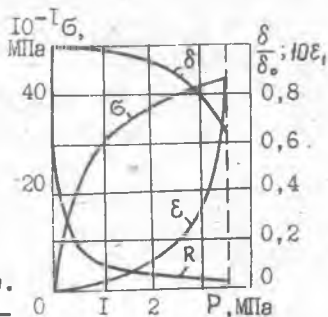


Рис. 3.2

*)

Решение получено студентом В.В.Носовым.

яния и геометрических размеров оболочки в процессе ее деформирования (в зависимости от давления).

3.4. Вопросы и задачи к главе 3

1. Запишите полную систему уравнений деформирования упруго-пластических тел.
2. Какие методы используются при решении упругопластических задач?
3. Опишите алгоритм решения задачи деформирования сферической оболочки.

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

4.1. Простейшие модели упруговязкопластических тел

При проведении длительных статических испытаний образцов при одноосном напряженном состоянии наблюдаются два характерных явления.

1. Ползучесть, когда растягиваемый (сжимаемый) образец, нагруженный постоянной силой, испытывает возрастающую со временем деформацию (рис.4.1).

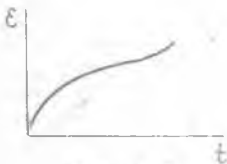


Рис. 4.1

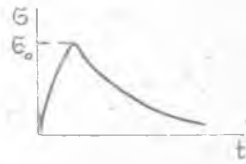


Рис. 4.2

2. Релаксация напряжений. Это явление уменьшения напряжений в предварительно растянутом (сжатом) напряжениями σ_0 , а затем зафиксированном в деформированном состоянии образце (рис.4.2).

Если напряжения при увеличении t стремятся к нулю, то процесс нагружения обратим.

Все многообразие упруговязкопластических сред для одномерного напряженного состояния тела можно описать тремя простейшими моделями (рис.4.3).

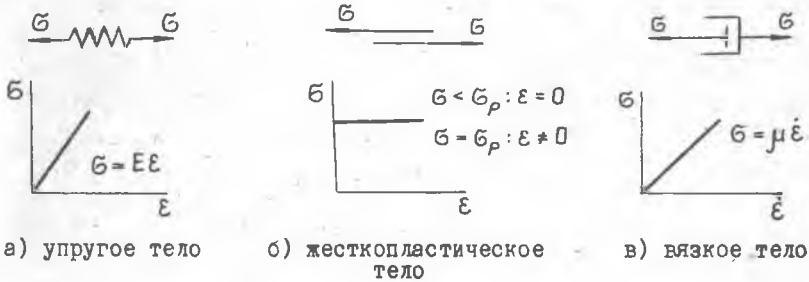


Рис. 4.3

Комбинируя в различных вариантах эти модели, можно получать среды с различными свойствами. Примеры комбинирования простейших элементов показаны на рис.4.4.

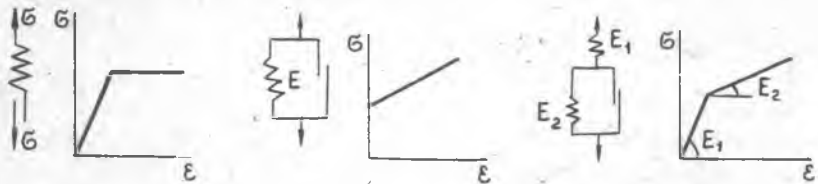


Рис. 4.4

4.2. Модели вязкоупругих сред Фойгта и Максвелла

Рассмотрим модели с параллельным (Фойгта) и последовательным (Максвелла) соединениями упругого и вязкого элементов (рис.4.5).

В модели Фойгта суммируются напряжения. Для нее из уравнения равновесия получим

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.1)$$

Нагрузим модель Фойгта постоянным напряжением σ_0 . Тогда

$$\sigma_0 = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\mu} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\mu} \quad (4.2)$$

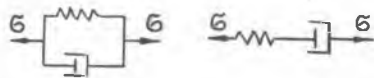


Рис. 4.5

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Его решение может быть представлено в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений;

$$\varepsilon = A \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) + \frac{\sigma_0}{E}. \quad (4.3)$$

При $t = 0$, $\varepsilon = 0$. Из этого начального условия по (4.3) найдем $A = -\sigma_0/E$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right)\right]. \quad (4.4)$$

На рис.4.6 показан график изменения функции (4.4), из которого видно, что модель Фойгта описывает ползучесть материала.

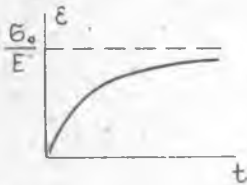


Рис. 4.6

Рассмотрим теперь модель Максвелла. Для нее должны суммироваться скорости деформаций

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\mu} \sigma. \quad (4.5)$$

Растянем и зафиксируем образец в растянутом состоянии. В этом случае деформации образца не будут изменяться со временем ($\dot{\varepsilon} = 0$) и уравнение (4.5) примет вид

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\mu} \sigma = 0. \quad (4.6)$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решение можно записать в виде

$$\sigma = B \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right). \quad (4.7)$$

Если при деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$ начальное напряжение в образце было $\sigma_0 = E \varepsilon_0$, то при $t = 0$ $\sigma = \sigma_0$. Из этого начального условия по (4.7) найдем $B = \sigma_0$. Тогда (4.7) примет вид

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right). \quad (4.8)$$

Здесь $\mu/E = t_0$ — время релаксации. За это время напряжения в образце уменьшаются в $e \approx 2,71$ раза.

На рис.4.7 показан график зависимости (4.8). Из него видно, что модель Максвелла описывает релаксацию напряжений.

Теории, основанные на моделях Фойгта и Максвелла, описывают поведение идеализированных материалов. Можно создавать усложненные модели, добавляя в соединения новые элементы. Но такое моделирование материалов со сложными свойствами приводит к созданию громоздких конструкций из элементов, особенно для неоднородных напряженных состояний. В этом отношении большей гибкостью обладают модели реологических сред, основанные на их математическом моделировании.



Рис. 4.7

4.3. Наследственные теории ползучести

Рассмотрим теории, которые позволяют учесть историю нагружения и называемые наследственными.

Простейшей из этих теорий является линейная теория, предложенная Больцманом.

Допустим, что в момент времени τ от начала нагружения напряжения в образце достигли значения $\sigma(\tau)$. Пусть эти напряжения вызывают деформацию, которая со временем изменяется. Примем, что в момент времени $t > \tau$ эта деформация пропорциональна действующему напряжению $\sigma(\tau)$, длительности воздействия dt и некоторой убывающей со временем функции, которую обозначим $k(t - \tau)$.

Если напряжения в момент времени t вызывают мгновенную деформацию $\sigma(t)/E$, то полная деформация образца определится из соотношения

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t k(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

В частности, при постоянном напряжении $\sigma(\tau) = \sigma(t) = \sigma_0$:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \int_0^t k(t - \tau) d\tau \right]. \quad (4.10)$$

Теория интегральных уравнений, развитая в работах Вольтерра, позволяет обратить уравнение (4.9) и привести его к виду

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Это уравнение при постоянной деформации описывает явление релаксации напряжений

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[E - \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau \right]. \quad (4.12)$$

Для частных случаев задания закона изменения $K(t-\tau)$ и $\Gamma(t-\tau)$ из (4.9) и (4.11) получаются модели Фойгта и Максвелла. В этом можно убедиться, если, например, в (4.10) принять $K = \frac{\mu}{E} \exp(-\frac{\mu}{E} t)$ при отсутствии напряжений $\sigma(t)$ в конечном состоянии.

Уравнения Больцмана можно усложнять, заменяя, например, $\sigma(\tau)$ или $\varepsilon(\tau)$ некоторой функцией от них. В общем случае эти функции могут быть нелинейными.

Рассмотренные в общем виде теории ползучести даже для одномерного тела (4.9), (4.11) зависят от пяти независимых параметров ε , $\dot{\varepsilon}$, σ , $\dot{\sigma}$, t и это вызывает серьезные трудности при решении уравнений. Поэтому на практике при решении частных задач часто применяют упрощенные, так называемые технические теории ползучести.

4.4. Технические теории ползучести

Технические теории ползучести основаны на ограничении числа независимых параметров, описывающих процессы деформирования. Приведем примеры построения технических теорий ползучести.

Теория старения устанавливает зависимость между ε , σ и t :

$$\Phi(\varepsilon, \sigma, t) = 0. \quad (4.13)$$

Функция (4.13) представляет собой поверхность в пространстве трех измерений. Сечения этой поверхности плоскостями, соответствующими фиксированному значению одного из параметров, описывают различные характеры поведения материалов (рис.4.8).

Так, при $t = \text{const}$ получим серию кривых деформирования $\sigma(\varepsilon)$, при $\sigma = \text{const}$ - ползучесть, при $\varepsilon = \text{const}$ - релаксацию напряжений.

Если функции, зависящие от параметров состояния в (4.13), независимы, то например, для сечений $\sigma(\varepsilon, t) = \text{const}$ можно перейти к записи, предложенной Е.Н.Работновым:

$$\sigma = \varphi(\varepsilon) \psi(t). \quad (4.14)$$

Теория течения основана на ограничении, накладываемом на σ , ξ и t :

$$\Phi(\sigma, \xi, t). \quad (4.15)$$

Теория упрочнения представляется зависимостью

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, \xi). \quad (4.16)$$

Время в последнюю зависимость входит косвенно через $\xi = \varepsilon$.

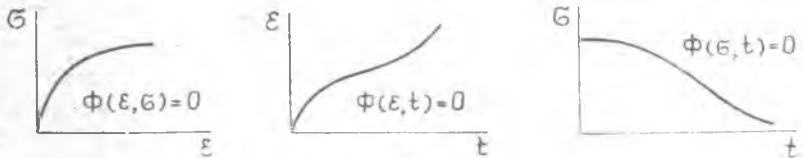


Рис. 4.8.

Описанные одномерные технические теории ползучести могут быть формально обобщены на случай трехмерных тел.

4.5. Вопросы и задачи к главе 4

1. Что такое релаксация напряжений и ползучесть?
2. Изобразите модели идеального упругого тела, сухого трения и вязкости..
3. Изобразите модели Фойгта и Максвелла. Запишите дифференциальные уравнения, описывающие их поведение.
4. Какие граничные условия используются для определения постоянных интегрирования в моделях Фойгта и Максвелла?
5. Дайте математическую формулировку наследственных теорий ползучести.
6. Докажите, что наследственные теории для одномерного тела в частном случае приводят к моделям Фойгта и Максвелла.
7. Перечислите основные технические теории ползучести и запишите для них функциональные зависимости.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

ВВЕДЕНИЕ	3
I. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ	4
I.1. Тензоры напряжения, деформации и их инварианты	4
I.2. Формулировка условия возникновения пластических деформаций в общем виде	6
I.3. Экспериментальное построение кривой текучести	8
I.4. Условие текучести Треска-Сен-Венана	10
I.5. Условие Мизеса	11
I.6. Условие изотропного упрочнения. Разгрузка	12
I.7. Гипотеза единой кривой	13
I.8. Вопросы и задачи к главе I	14
2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	15
2.1. Основные положения деформационной теории пластичности	15
2.2. Определяющие соотношения деформационной теории пластичности	16
2.3. Теория течения. Основные положения	18
2.4. Определяющие соотношения теории течения	19
2.5. Сопоставление деформационной теории и теории течения в случае простого нагружения	20
2.6. Функция текучести и пластический потенциал	21
2.7. Постулат Драккера. Выпуклость поверхности нагружения	22
2.8. Поверхности текучести для упрочняющихся тел	23
2.9. Вопросы и задачи к главе 2	25
3. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА. МЕТОДЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	26
3.1. Система уравнений упругопластического деформирования тел	26
3.2. Методы решения задач теории пластичности	27
3.3. Деформирование сферической оболочки	29
3.4. Вопросы и задачи к главе 3	32
4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ	32
4.1. Простейшие модели упруговязкопластических тел	32
4.2. Модели вязкоупругих сред Фойгта и Максвелла	33
4.3. Наследственные теории ползучести	35
4.4. Технические теории ползучести	36
4.5. Вопросы и задачи к главе 4	37

Г о р л а ч Борис Алексеевич

НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ
ФОРМОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Редактор Л.М.К а р п о в а

Свод.тем.пл.1988, № 78

Подписано в печать 23.06.88 г. Б0 00216.
Формат 60x84 1/16. Бумага оберточная белая.
Оперативная печать. Усл. п. л. 2,3.
Уч.-изд.л. 2,5. Т. 500 экз. Заказ № 5449
Цена 10 коп.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. им. В.И.Мяги Куйбышевского полиграфического
объединения. 443099, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.