

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

Г. Ф. Краснощекова, А. В. Зеленский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ
ЗАДАЧ НА ЭВМ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ
КОНСТРУКЦИЙ РЭА
ПРИ РАСЧЕТАХ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Учебное пособие

КУЙБЫШЕВ 1988

УДК 621.386.6.

Моделирование инженерных задач на ЭВМ. Представление структуры конструкций РЭА при расчетах температурных полей. Учеб. пособие / Г. Ф. Краснощекова, А. В. Зеленский; Куйбышевский авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. — 44 с.

В учебном пособии, рекомендованном для студентов радиотехнического факультета специальности 0705, даются основные сведения по методам моделирования конструкторских расчетов с примерами их использования, алгоритмы расчетов предлагаемых методов моделирования.

Табл. 6. Ил. 14. Библиогр. 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета института

Рецензенты: *К. Л. Куликосский, М. А. Куликов*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Расширение области применения радиоэлектронной аппаратуры приводит к постоянному усложнению требований к ее конструктивному исполнению.

Центральной проблемой конструирования радиоэлектронной аппаратуры и конструирования в целом является *проблема оптимизации*. Особенностью современного конструирования является не только необходимость получения оптимального варианта конструкции, но и нахождение такого оптимального варианта оптимальным образом за минимальное время и при минимальных затратах. Для решения этих задач широко используются расчетные и экспериментальные методы, базирующиеся на моделировании.

Построение моделей и оптимизация — главные направления, с помощью которых можно надежно описать сложную систему или конструкцию и процессы, происходящие в них. Построение моделей — это одна из сторон диалектической пары «анализ — синтез», имеющая много аспектов, в том числе аспект отражения, который должен пониматься в смысле теории познания.

Понятие *модель* имеет различный смысл. Одни модели дают внешнее представление о реальном объеме или поясняют его структуру. Моделью такого типа можно считать принципиальную схему, и она называется *схемотехнической моделью*. Другие модели отображают поведение исследуемого объекта, происходящие в нем процессы, такие модели называются *физическими*. Физической моделью радиоэлектронной аппаратуры является ее макет.

Если изображение поведения объекта исследования и процессов, заложенных в нем, осуществ-

ляется с помощью математических зависимостей, то имеет место *математическая модель*.

В настоящее время системный подход к решению проблемы конструирования требует нового взгляда на уже сложившиеся вопросы моделирования процессов и устройств. Кроме того, развитие вычислительной техники открывает широкие перспективы автоматизации конструирования, предпосылкой для которой является изучение современных математических методов моделирования.

Ввиду большого разнообразия изучаемого материала усвоение его представляет сложную задачу и должно сопровождаться самостоятельной работой с литературой. Пособие не исключает выбора студентом других путей решения поставленных задач конструирования.

1. МЕТОДОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В настоящее время значительно усложнились объекты проектирования, повысились требования, предъявляемые к ним, что заставило отказаться от традиционных методов проектирования и перейти к новым методам — системным. Системное проектирование невозможно без научной основы, без обобщения известных ранее методов проектирования, их анализа.

Проектирование включает три основных стадии [1]: дивергенция (анализ), трансформация (синтез), конвергенция (оценка).

Дивергенция — подготовительный этап, который включает в себя исследование проектной ситуации, сбор информации об объекте исследования. *Трансформация* — этап принятия решений. *Конвергенция* — совокупность логических и математических методов, носящих формальный характер. Это единственная стадия, которая поддается логическому анализу и может быть выполнена при помощи средств вычислительной техники.

Процесс инженерного проектирования содержит ряд этапов:

1. Изучение цели и задачи: на этом этапе задача формулируется в общем виде, производится дивергентный поиск, необходимый для конкретизации задачи.

2. Выбор пути решения — это этап трансформации.

3. Формирование цели: на этом этапе выбирается идея, формируется способ решения.

4. Инженерный анализ — это этап конвергенции. Его основа — создание модели, ее анализ, оптимизация, обобщение результатов.

5. Конкретизация решения для определенных условий.

2. МОДЕЛИ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К НИМ

Изучение процесса проектирования возможно как на физических, так и на математических моделях. Поскольку построение физических моделей связано со значительными затра-

тами средств и времени, наиболее целесообразно исследовать процесс проектирования на математических моделях. Способы представления математических моделей весьма разнообразны. Выбор формы моделирования объекта исследования определяется рядом факторов: типом моделируемой схемы или конструкции, выбором независимых переменных, требуемой точностью, действующими факторами и т. д.

В настоящее время можно отметить следующие способы моделирования задач проектирования.

Модели элементов в виде схем замещения. Степень сложности схемы замещения и математических соотношений зависит от того, как точно моделируются процессы в реальном объекте. При возрастании требований к точности увеличивается сложность модели, что приводит к использованию машинных методов моделирования.

Цифровая модель, образующая математические соотношения, описывающие, например, связь токов и напряжений. Для расчета цифровых моделей вследствие сложности связей трудно использовать аналитические методы. В этих случаях лучше применять численные методы решения уравнения модели.

Статические и динамические модели. Статические модели отражают состояние элементов в объекте исследования и не содержат реактивных компонентов и параметров, зависящих от времени. Динамические модели отражают процессы в элементах и учитывают время.

Математическая модель — это некоторый функциональный оператор

$$F(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_n),$$

где $x_1; x_2; \dots; x_n$ — система внутренних параметров элемента,

$y_1; y_2; \dots; y_n$ — совокупность внешних параметров элемента. Внутренние параметры это электрофизические или конструктивно-технологические, а внешние, как правило, токи и напряжения. Значит, чтобы задать математическую модель элемента схемы или явления необходимо определить форму ее представления, математические зависимости, связывающие внешние и внутренние параметры, и значения внутренних параметров.

Рассмотрим основные требования к моделям, предназначенным для анализа электронных схем. Основным требованием является точность соответствия модели реальному элементу. Как правило, оценка точности производится по степени совпадения вольт-амперной характеристики модели и реального объекта исследования. Используются следующие оценки:

максимальное относительное отклонение в рабочем диапазоне

$$\delta_I = \left| \frac{i_M - i_\Delta}{i_\Delta} \right|_{\text{макс}} \quad \text{или} \quad \delta = \left| \frac{U_M - U_\Delta}{U_\Delta} \right|_{\text{макс}}$$

где i_M ; i_Δ ; U_M U_Δ ; — соответственно токи и напряжения вольт-амперной характеристики модели и элемента.

среднеквадратическое отклонение в рабочем диапазоне

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{Mj} - y_{\Delta j}}{y_{\Delta j}} \right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\delta_{y_j})^2}{n}}$$

где n — число точек измерения, y — внешний параметр модели.

Требования к модели связаны с использованием тех на ЦВМ. Одним из таких требований является непрерывность модели (справедливость ее для всех режимов работы элементов схемы).

Для обеспечения высокой точности вычислений к моделям предъявляется требование обусловленности — возможность точного расчета аргументов модели и малое влияние ошибок этого расчета на выходные параметры модели.

Важным требованием к модели считается ее простота, так как даже при использовании ЭВМ усложнение модели влечет за собой увеличение времени расчета.

3. ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

В настоящее время в промышленности начинают широко использоваться машинные методы составления математических моделей схем (ММС), основанные на применении специальных программ. Базируется работа этих программ на топологическом графе схемы. Чтобы построить топологический граф электрической схемы, нужно сначала получить схему замещения, в которой все элементы двухполюсные, а затем эти двухполюсники заменить их символами — ветвями. Построение дерева графа схемы позволяет получить линейно независимые топологические уравнения второго закона Кирхгофа.

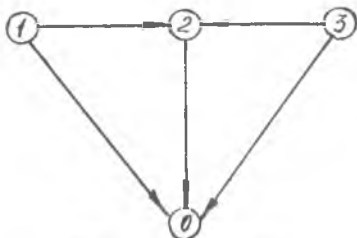


Рис. 1. Граф схемы

столбцы

	1	2	3	4	5
1	-1	-1	0	0	0
2	0	1	1	-1	0
3	0	0	-1	0	1
0	1	0	0	1	-1

узлы

Рис. 2. Топологическая матрица

В программах для автоматического составления уравнений и расчета ММС используют топологические матрицы схемы, позволяющие записать в матричной форме информацию о соединении элементов в схеме.

Рассмотрим построение такой матрицы. Пусть построен граф схемы (рис. 1). Дадим каждой его ветви произвольное направление. Составим матрицу, строки которой будут соответствовать узлам графа, а столбцы — ветвям. Вид матрицы показан на рис. 2.

Каждая i -я строка этой матрицы показывает, с какими ветвями соединен i -й узел, а каждый j -й столбец показывает, между какими узлами включена j -я ветвь. На пересечении i -й строки и j -го столбца запишем «+1», если j -я ветвь подходит к i -му узлу, «-1», если выходит из этого узла; «0» — если j -я ветвь не соединена с i -м узлом. Такая матрица называется *матрицей инцидентий* (соединений). Иногда ее называют структурной матрицей. Так как основная часть элементов матрицы узлов — нули, то ее обычно записывают в компактной форме — в виде таблицы соединений узлов и ветвей, которая для схемы, показанной на рис. 1, имеет вид, представленный в табл. 1.

Таблица 1
Компактная форма матрицы

Номер ветви	Номер начального узла	Номер конечного узла
1	1	0
2	1	2
3	3	2
4	2	0
5	0	3

При записи этой таблицы в память ЦВМ обычно вводят вторую и третью колонки в виде одномерных массивов 1, 1, 3, 2, 0 и 0, 2, 2, 0, 3. Значит в машине будет занято 10 ячеек, в то время как запись полной матрицы займет 15 ячеек. Исходной информацией для программы автоматического составления ММС служит таблица следующего вида:

Номер узлов, между которыми включен элемент	Тип элемента (номер подпрограммы)	Значения параметров подпрограммы

В каждой строке такой таблицы дается полная информация об одном из элементов схемы, которая должна быть достаточной для расчета его тока по подпрограмме — библиотеке компонентных уравнений (БКУ). В БКУ имеются подпрограммы для вычисления токов каждого типа элементов: емкости, индуктивности, резистора, источников тока и т. д. Эти подпрограммы имеют свой номер.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Проектирование сложных систем — это высокоинтеллектуальное творчество, требующее применения разнообразных знаний. При современных темпах научно-технического развития одним из главных требований проектирования является сокращение сроков, так как при увеличении сроков проектирования теряются новизна и оригинальность решений. Исследование процесса проектирования сложных объектов целесообразно проводить на математических моделях. На рис. 3 приведена одна из возможных классификаций математических моделей процесса проектирования сложных систем.

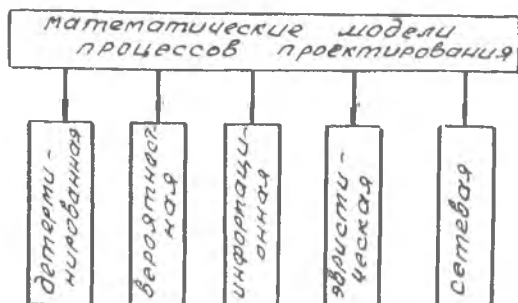


Рис. 3. Классификация математических моделей

Детерминированная модель строится в тех случаях, когда влияющие на конечный результат факторы рассматриваемого процесса поддаются точной оценке. *Вероятностная модель* строится тогда, когда факторы, влияющие на результат, носят случайный характер. Если процесс проектирования представить как процесс переработки информации, то для описания этого процесса можно использовать *информационную модель*. *Эвристические модели* не носят формализованного отображения объекта, они имеют описательную форму представления, так как про-

ектирование основывается в значительной мере на интуиции, опыте специалистов, тем не менее этот процесс с известной степенью приближения представляется в этом случае эвристической моделью.

Методы сетевого планирования позволяют при проектировании установить минимальное время и расход материальных и людских ресурсов для выполнения работ, выявить критические моменты этого творческого процесса.

5. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

Как было отмечено выше, математическое моделирование является одним из основных методов автоматизированного проектирования сложных объектов исследования. Моделирующий алгоритм, или машинная модель, является результатом преобразования математической модели в форму, пригодную для счета на ЭВМ. Он описывает последовательность элементарных событий, происходящих в моделируемой системе. При моделировании сложных систем анализируют различные показатели качества работы, так как один показатель не дает представления о фактических процессах, происходящих в моделируемой системе.

Оценка каждого показателя качества нуждается в своем моделирующем алгоритме, что очень сложно и трудоемко, поэтому при моделировании целесообразен имитационный подход. Структура моделирующего алгоритма при имитационном подходе зависит от самой математической модели, а не от набора показателей работы моделируемой системы. При имитационном подходе необходимо структурное и динамическое соответствие модели и реальной системы.

При построении моделирующего алгоритма пользуются двумя принципами: моделирующий алгоритм вычисляет состояние системы в равноотстоящие друг от друга моменты времени или проводится поиск таких моментов времени. Первый подход используется при моделировании непрерывных систем, которые можно описать дифференциальными уравнениями, как обыкновенными, так и в частных производных. Второй подход используется для моделирования систем, в которых процессы могут быть определены дискретными последовательностями событий.

Машинные программы для имитации динамики модели строятся с помощью различных программных средств, таких как языки программирования и языки моделирования. Использование языков программирования связано с большой трудоемкостью и не обеспечивает достаточной гибкости. Языки модели-

рования формально не используют математическую модель моделируемой системы, а оперируют с ее содержательным описанием.

Основными принципами построения моделирующего алгоритма и программы являются следующие:

формирование моделирующего алгоритма и программ на основе унифицированных блоков, обеспечивающих их перестройку, наращивание и адаптацию;

использование единой базы данных, обеспечивающей эффективную обработку информации как в режиме диалога, так и в пакетном режиме;

применение специализированных программных и технических средств, которые могут обеспечивать автоматизацию программирования.

6. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ И УСТРОЙСТВ В РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЕ

6.1. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ — КЛЮЧЕВОЙ ЭТАП ИНЖЕНЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Моделирование — исследование каких-либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их моделей. Моделирование — одна из основных категорий теории познания. На идее моделирования базируется любой метод научного исследования — как теоретический, так и экспериментальный. Любое явление можно считать понятным, когда, во-первых, найдено его математическое описание, т. е. то, что мы называем математической моделью, а во-вторых, эта математическая модель исследована, т. е. найдено решение уравнений. Модель выражает количественные и качественные закономерности, свойственные рассматриваемым процессам или устройствам. Модель — это идеализация, она никогда не может быть точной копией объекта исследования, но между ними должны быть соблюдены некоторые соотношения подобия, которые гарантировали бы возможность использования сведений, полученных в результате моделирования для оценки свойств реального объекта — оригинала.

В общем случае исходные данные для проектирования конструкции, а значит и для построения ее модели, включают такие основные компоненты [2]:

условия функционирования системы или явления, ограничения на структуру и параметры системы, совокупность показателей качества — некоторых параметров

системы, определяющих ее качество и варьируемых в процессе проектирования,

ограничения на показатели качества, определяемые возможностями реализации системы.

Система, которая удовлетворяет всей совокупности условий и ограничений на параметры и структуру, называется *допустимой*. Допустимая система, которая удовлетворяет ограничениям на показатель качества, называется *строго допустимой*. Таким образом, задачей проектирования является создание строго допустимой системы, обладающей наилучшей по заранее выбранному критерию совокупностью значений показателей качества. Такая система может быть названа *оптимальной*. Чтобы получить такую систему, необходимо найти экстремальные значения показателей качества. Их зависимость от параметров системы носит название *целевой функции*. В целом совокупность целевых функций и ограничений представляет математическую формулировку задачи проектирования систем или явлений, т. е. является *математической моделью объекта исследования*. Математическая модель может быть названа универсальным инструментом проектирования и использована в инженерном проектировании.

В проектировании используют следующие виды моделей:

графические и описательные (схемы, графики, которые иллюстрируют процессы, происходящие в устройствах, описания алгоритмов и т. д.);

физические — они полностью повторяют объект исследования и могут быть масштабными, повторяющими в определенном масштабе форму объекта;

математические — это наиболее совершенные модели. Математические модели могут быть динамическими и статическими (стационарными), кроме того, интерполяционными (частными) и экстраполяционными (обобщенными). К интерполяционным обычно относят эмпирические модели, а к экстраполяционным — аналитические модели.

Для исследования математической модели может быть использован весь аппарат современной математики. При решении математических моделей могут применяться как аналитические методы, так и численные. *Аналитические методы* дают решение в общем виде, что очень существенно при больших вариациях исходных данных. Однако их целесообразно применять лишь в случаях простых зависимостей. *Численные методы*, основанные на использовании ЭВМ, обеспечивают решение уравнений высших порядков и с большим числом переменных, но выдают решение только при конкретных исходных данных.

6.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ АНАЛОГИИ

Разновидностью физических моделей являются аналоговые, в которых реальные физические процессы заменяются другими физическими процессами, но аналогичными по своему действию на рассматриваемый объект исследования [3]. Например, исследования распределения температур в объекте можно более оперативно выполнить, если построить электрическую модель объекта, где источники тепла заменяются источниками тока, а тепловые сопротивления заменяются резисторами, включенными соответствующим образом.

Электротепловую аналогию можно выразить уравнениями:

1. Плотность тока и плотность теплового потока в изотропной среде

$$j = -\sigma \operatorname{grad} U; P = -\lambda \operatorname{grad} t,$$

где U — потенциал, σ — удельная электропроводность, λ — коэффициент теплопроводности, t — температура.

2. Потоки J и P электрического и теплового полей

$$J = -\sigma \int_s \operatorname{grad} U \cdot d\bar{s}; P = \lambda \int_s \operatorname{grad} t \cdot dt.$$

3. Объемная плотность тока j_V и производительность внутренних источников тепла q_V

$$\operatorname{div} \bar{j} = j_V; \operatorname{div} \bar{p} = q_V.$$

4. Поле потенциалов и температурное поле (уравнение Пуассона)

$$\Delta^2 U = -\frac{j_V}{\sigma}; \Delta^2 t = -\frac{q_V}{\lambda},$$

т. е. аналогами являются:

$$\bar{j} \leftrightarrow \bar{p}; J \leftrightarrow P; j_V \leftrightarrow q_V; \\ U \leftrightarrow t; \sigma \leftrightarrow \lambda.$$

Соотношения между аналогами определяется масштабными коэффициентами подобия:

$$\frac{P}{I} = k_p; \frac{q_V}{j_V} = k_v; \frac{t}{U} = k_t; \\ \frac{\lambda}{\sigma} = k_\lambda; \frac{X}{x} = k_x; \frac{Y}{y} = k_y; \frac{Z}{z} = k_z.$$

Здесь X, Y, Z и x, y, z — координаты сходственных точек оригинала и модели соответственно.

В случае геометрического подобия $k_x = k_y = k_z = k_L$. Для решения тепловой задачи необходимо задать граничные условия, характеризующие взаимодействие исследуемой области

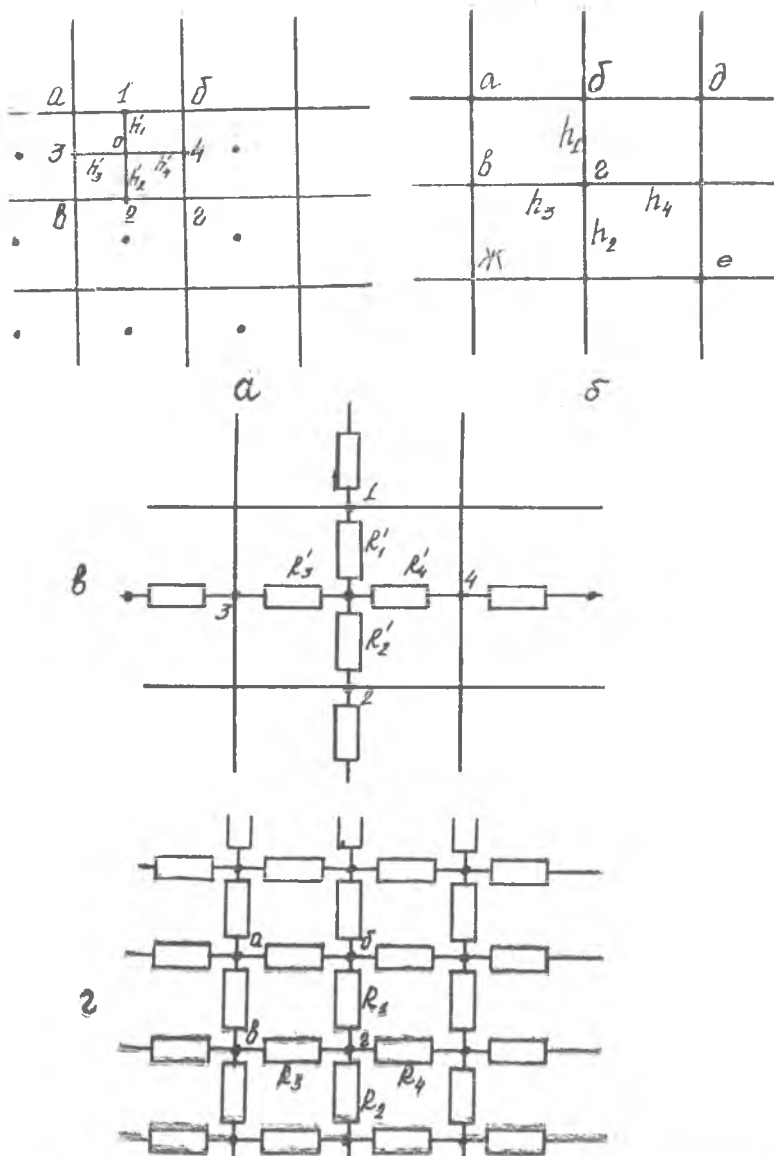


Рис. 4. Разбивка плоскости элементарными площадками: а — сеткой с узлами внутри; б — сеткой с узлами в углах; в, г — сеткой электрических сопротивлений для случаев с узлами внутри и в углах

температурного поля с окружающей средой. Граничные условия вводятся к заданию значений самой искомой функции, ее производной либо их линейной комбинации на границах рассматриваемой области.

Сущность метода электрических сеток заключается в разделении моделируемой области на элементарные объемы и замене сплошной проводящей среды элементарных объемов эквивалентными схемами замещения. На основании объединения эквивалентных схем замещения элементарных объемов получаем модель в виде сетки электрических сопротивлений. Переход от сплошной проводящей среды к сетке сопротивлений означает замену непрерывного распределения величин в моделируемой области дискретным распределением, что соответствует конечноразностной аппроксимации уравнения поля. При построении сетки сопротивлений в прямоугольной системе координат элементарные объемы представляют собой параллелепипеды со сторонами Δx , Δy , Δz . При этом эквивалентные схемы замещения могут быть двух видов (рис. 4). В первом случае (поз. а, в) узлы размещаются в центре элементарного параллелепипеда, а резисторы эквивалентной схемы замещения включаются между узлом и центрами граней. Во втором случае (поз. б, г) узлы размещаются в вершинах элементарного параллелепипеда, а резисторы эквивалентной схемы замещения включаются между узлами вдоль ребер параллелепипеда.

Выбрав ту или иную схему замещения, делим моделируемую область на элементарные объемы для объемной задачи или на прямоугольники для плоской задачи таким образом, чтобы граничные узлы электрической сетки совпали с границами моделируемой области. Шаги деления вдоль всех осей координат считаем постоянными. Таким образом получаем сеточную модель

с параметрами сетки: для объемной задачи $R_x = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\Delta x}{\Delta y \cdot \Delta z}$;

$$R_y = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\Delta y}{\Delta x \cdot \Delta z} ; \quad R_z = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y} ,$$

для плоской задачи

$$R_x = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\Delta x}{\Delta y} ; \quad R_y = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\Delta y}{\Delta x} ,$$

Здесь $\sigma_c = \sigma_0$ — удельная проводимость слоя.

Если выбрать шаг по всем координатам один и тот же, то все внутренние сопротивления будут одинаковыми, т. е. $R_x = R_y = R_z$.

Пр и м е р. Исследуем температурное поле подложки гибридно-пленочной интегральной схемы, заключенной в корпусе (рис. 5).

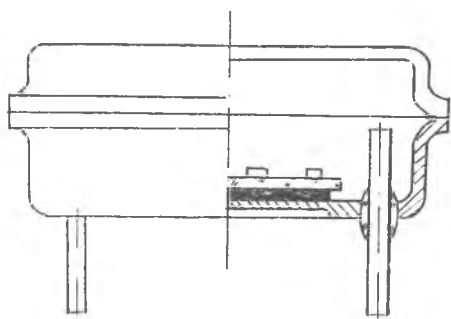


Рис. 5. Конструкция микросхемы

Чтобы получить тепловую модель этой микросхемы, введем ряд допущений:

1. Активные элементы схемы рассматриваем как эквивалентные резисторы с той же рассеиваемой мощностью.

2. Тепловым сопротивлением между пленкой резистора и подложкой пренебрегаем из-за наличия хорошего контакта.

3. Коэффициент теплопроводности в исследуемом диапазоне температур считаем постоянным.

4. При расчете параметров электрической сетки тепловые сопротивления пленок не учитываем, считая, что пленки проводников резисторов оказывают незначительное влияние на распределение температуры по подложке из-за большого сопротивления тепловому потоку.

5. Поверхность корпуса считаем изотермической поверхностью.

6. Теплоотводом через выводы микросхемы пренебрегаем.

При построении тепловой модели микросхемы необходимо считать конструкцию сложной структурой следующего вида:

слой ковара толщиной 0,15 мм (нижняя часть корпуса);

слой клея-мастики ЛН толщиной 0,1—0,2 мм (с помощью этого клея подложка крепится к корпусу);

слой диэлектрика (обычно подложка выполнена из ситалла СТ-50-1);

воздушный промежуток;

слой ковара (крышка корпуса).

Расчеты говорят о том, что тепловое сопротивление воздушного промежутка более чем на два порядка больше теплового сопротивления подложки и клеевой прослойки, поэтому почти весь тепловой поток с верхней поверхности подложки с элементами будет направлен вниз к нижней части корпуса. Далее он рассеивается в основном за счет конвекции. Если микросхема установлена на плате, то в конвективном теплообмене участвует лишь верхняя часть корпуса.

Тепловая модель микросхемы — это плоская электрическая схема (рис. 6).

Между узлами сетки и точкой S , которая соответствует изотермической поверхности корпуса, включены сопротивления R_c , мОм

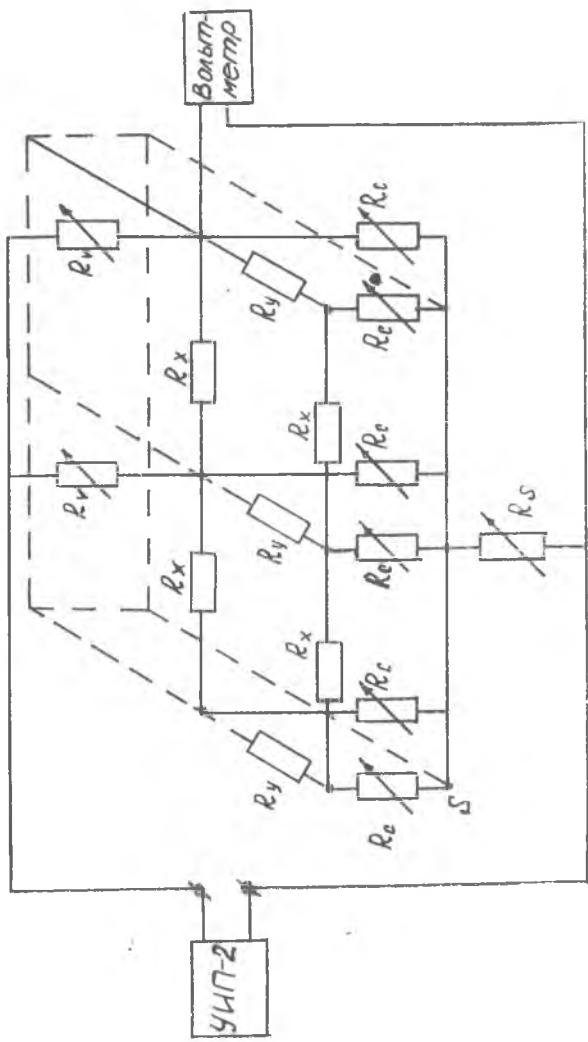


Рис. 6. Тепловая модель микросхемы

моделирующие тепловые сопротивления подложки и клеевой прослойки по всей толщине. Между точкой S и общей точкой модели включено сопротивление R_s , которое моделирует конвективный теплообмен (корпус микросхемы — окружающая среда). В узлах электрической сетки включено сопротивление R_V , через которое вводятся токи, моделирующие внутренние источники тепла. Это сопротивление должно быть значительно больше сопротивлений R_x и R_y , чтобы последние не оказали влияния на величину вводимых токов. Значит, $i_V = U_V / R_V$, где U_V — напряжение питания модели, i_V — ток, вводимый в соответствующий узел электрической сетки. Величина тока i_V , вводимого в узел сетки, определяется мощностью тепловыделяющего элемента в этом узле P_V и масштабным коэффициентом подобия.

Из сказанного можно сделать вывод, что потенциалы узлов сетки, измеренные относительно общей точки модели, дают возможность определить температуру перегрева поверхности подложки относительно окружающей среды, а потенциал точки S , тоже измеренный относительно общей точки модели, дает возможность определить температуру перегрева корпуса микросхемы относительно температуры окружающей среды.

Параметры сетки рассчитываются по формулам

$$R_x = \frac{k_\lambda \Delta x}{\lambda \delta \Delta x}; \quad R_y = \frac{k_\lambda \Delta y}{\lambda \delta \Delta y}$$

Так как $\Delta x = \Delta y$; $R_x = R_y = R$, сопротивление сетки между узлами, лежащими на границах прямоугольной подложки, равно $2R$.

Сопротивление стоков па корпус $R_c = R_c' + R_c''$,

$$R_c' = \frac{k_\lambda \delta_1}{\lambda_1 \Delta x \Delta y}; \quad R_c'' = \frac{k_\lambda \delta_2}{\lambda_2 \Delta x \Delta y},$$

здесь $k_\lambda = \lambda / \delta$ — масштабный коэффициент подобия, δ_1 — толщина подложки, δ_2 — толщина слоя клея-мастики, λ_1 — коэффициент теплопроводности материала подложки, λ_2 — коэффициент теплопроводности клея-мастики.

Сопротивления, моделирующие теплообмен корпуса микросхемы с окружающей средой, $R_s = \frac{k_\lambda}{\alpha S}$, где S — поверхность корпуса, участвующая в конвективном теплообмене с окружающей средой; α — коэффициент теплоотдачи конвекцией между корпусом и средой ($\alpha = 25 - 30$ Вт/м²·град).

Имеется формула пересчета значений потенциалов узловых точек в значение температуры $t = \frac{R_V' P}{k_\lambda U_V} U$, здесь P — общая

мощность всех тепловыделяющих элементов, R_V' — сопротивление, равное параллельному соединению всех сопротивлений.

Данные для расчета следующие: размеры корпуса микросхемы, размеры подложки, толщина эпоксидного клея между полупроводниковым прибором и подложкой, толщина клея между подложкой и корпусом, шаг сетки, материалы, теплофизические параметры материалов, общая мощность, которую выделяют все тепловыделяющие элементы.

6.3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Всякое исследование того или иного процесса имеет своей целью изучить механизм явления и найти оптимальные условия его протекания. Характерным для всех задач этого типа является то, что оптимизации подлежат сложные системы или системы, у которых параметры оптимизации являются функциями большого числа переменных.

В настоящее время имеется два пути решения указанных задач. Согласно первому пути для оптимизации системы или процесса необходимо предварительное ее исследование, создание теории процесса или явления. Такой путь требует много времени и средств на изучение самого процесса. Кроме того, современные системы настолько сложны и работают в столь сложных условиях, что детальное их изучение в доступные сроки практически невозможно.

Второй путь предусматривает экспериментальный подход к оптимизированной системе, т. е. использование различных методов планирования эксперимента. Такие приемы планирования и проведения эксперимента позволяют добиться следующих преимуществ при оптимизации:

уменьшить количество экспериментальной работы;

не только оптимизировать систему, но и получить ее математическое описание или математическую модель, адекватную (соответствующую) опытным данным;

вся схема исследования оказывается формализованной, информация, которая получается в процессе исследования, может гибко менять стратегию поиска оптимальных условий.

С точки зрения математики задача ставится следующим образом: проектирование объекта заключается в выборе модели исследования, обосновании выбранных параметров оптимизации и независимых переменных. Математическая модель объекта исследования может быть получена в виде уравнения связи выходного параметра Y объекта и входных независимых переменных $x_1; x_2; \dots; x_k$. Уравнение связи является математическим описанием некоторой поверхности отклика в пространстве k входных факторов и может быть задано функцией отклика

$$Y = f(x_1; x_2; \dots; x_k), \quad (1)$$

где Y — параметр, который подлежит оптимизации, $x_1; x_2; \dots; x_k$ — независимые переменные, далее называемые факторами.

Всевозможные наборы значений независимых переменных назовем k -мерным факторным пространством. Задача оптимизации состоит в том, чтобы найти такое значение вектора $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_k)$, которое оптимизирует в требуемом смысле функцию (1). Функцию отклика аппроксимируют полиномом вида

$$\eta = \beta_0 + \sum^k \beta_i x_i + \sum^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum^k \beta_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (2)$$

где $\beta_0; \beta_i; \beta_{ij}; \beta_{ii}$ — теоретические коэффициенты регрессии. Как правило, на практике ограничиваются конечным числом членов разложения, аппроксимируя неизвестную функцию отклика полиномом некоторой степени. Задача получения математической модели объекта или явления сводится к определению коэффициентов уравнения (2) по опытным данным.

Реальные объекты исследования подвержены действию возмущающих факторов различной природы, поэтому величина Y изменяется случайным образом, и уравнение (2) не дает возможности установить точную связь между входом и выходом объекта, а является лишь условным математическим ожиданием выходной переменной, т. е. уравнением связи является уравнение регрессии. Поэтому коэффициенты полинома, определенные в результате эксперимента, являются статистическими оценками соответствующих истинных значений. Значит, в уравнении регрессии

$$Y = b_0 + \sum^k b_i x_i + \sum^k b_{ij} x_i x_j + \sum^k b_{ii} x_i^2 + \dots$$

коэффициенты $b_0; b_i; b_{ij}; b_{ii}$ — являются оценками истинных значений коэффициентов $\beta_0; \beta_i; \beta_{ij}; \beta_{ii}$ и т. д. Здесь Y — расчетное значение параметра оптимизации.

При дальнейшем изложении на примере определения температурного поля конструкции РЭА, представленной в виде модели, показана возможность использования экспериментально-статистического метода (планирование эксперимента) для решения. Сначала будет рассмотрен метод построения линейной модели, а затем модели второго порядка с использованием ротатабельного планирования.

Тепловой режим как многофакторный процесс. Важнейший параметр РЭА — надежность — в значительной мере зависит от температурных режимов, в которых работают входящие в нее элементы. Совокупность температур всех элементов, из которых

собранный аппарат, т. е. температурное поле, характеризует тепловой режим РЭА. Тепловой режим РЭА относится к сложным процессам, которые зависят от множества факторов: p — мощность, выделяемая в устройстве, Φ — размеры устройства, λ — коэффициенты теплопроводностей входящих материалов, α — коэффициент теплоотдачи конвекцией, ε — степени черноты материалов, C_0 — удельная теплоемкость входящих материалов, H — давление, β — коэффициенты линейного расширения материалов, t_s — температура окружающей среды и т. д. Некоторые из этих факторов не являются однозначными и, в свою очередь, зависят от других, усложняя процесс расчета.

Учитывая, что число факторов, влияющих на тепловой процесс РЭА, велико, получение в этом случае математической модели и нахождение оптимального варианта конструкции с требуемыми характеристиками — задача очень сложная. Решение возможно путем проведения активного эксперимента с применением статистических методов.

Между точками, значение температур в которых определяется экспериментально, могут быть отклонения, поэтому желательно просмотреть температурное поле объекта исследования с помощью изотерм. Для этого и используется теория планирования эксперимента, по которой изотермические поверхности строятся по уравнению регрессии, а некоторые данные для получения этого уравнения являются результатами эксперимента [4,5]. Подход к организации эксперимента и его планирование состоит из предварительного изучения объекта исследования и построения математической модели и ее интерпретации.

Предварительное изучение объекта исследования. Предварительное изучение объекта исследования заключается в том, чтобы точно сформулировать цель работы, собрать априорную информацию об объекте исследования и спроектировать данный объект. Сбор априорной информации — это изучение литературы по интересующему вопросу, анализ результатов ранее проведенных работ. Проектирование объекта заключается в выборе модели исследования, обосновании выбранных параметров оптимизации и независимых переменных.

Как уже было показано, функцию отклика аппроксимируют полиномом

$$Y = \beta_0 + \sum^k \beta_i x_i + \sum^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum^k \beta_{ii} x_i^2 + \dots,$$

где β_0 ; β_i ; β_{ij} ; β_{ii} — теоретические коэффициенты.

При эксперименте уравнение примет вид

$$Y = b_0 + \sum^k b_i x_i + \sum^k b_{ij} x_i x_j + \sum^k b_{ii} x_i^2 + \dots,$$

где b_0 ; b_i ; b_{ij} ; b_{ii} — оценки теоретических коэффициентов, Y — расчетное значение параметра оптимизации (температуры).

Пример. Используемый для эксперимента объект исследования представляет собой герметичный корпус с размерами $80 \times 85 \times 65$ мм³, в котором горизонтально расположены каскеты. Каждая из каскет — монтажная плата с радиоэлементами, выполненная из стеклотекстолита $\delta = 1,5$ мм с печатным монтажом. Рассеиваемая мощность в модели $P = 2$ Вт. Внутреннее пространство модели залито компаундом. Измерение температуры проводилось хромель-копелевыми термопарами $d = 0,3$ мм с помощью потенциометра постоянного тока ПП2. Термопары крепились на платах с некоторым постоянным шагом. Измерения проводились в камере спокойного воздуха большого объема при температуре $20 \pm 0,5^\circ\text{C}$.

На первом этапе оценивается влияние факторов на температурный режим объекта исследования и выделяются наиболее значимые из них на фоне остальных, отнесенных к шумовому полю. Одновременно изучалось влияние 11-ти факторов, перечисленных в табл. 2, которые были ранжированы с учетом степени их влияния. Результаты ранжирования по литературным данным обрабатываются следующим образом. Сначала определяют сумму рангов по факторам $\sum_{j=1}^m a_{ij}$, а затем разность между суммой рангов каждого фактора и средней суммой рангов:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k a_{ij} = \sum_{j=1}^m a_{ij} - T_i,$$

где a — ранг каждого i -го фактора, m — число литературных данных (или исследователей), k — число факторов. Полученные данные позволяют построить среднюю априорную диаграмму рангов, но при этом предварительно необходимо оценить степень согласованности литературных данных с помощью коэффициента конкордации

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} m^2 (k^3 - k) - m \sum T_i},$$

где S — сумма квадратов отклонений $\sum_{j=1}^m \Delta t_j$,

$T_i = \frac{1}{12} \sum_{t_j} (t_j^3 - t_j)$, t_j — число одинаковых рангов в j -м ранжировании. Проведем расчет коэффициента W :

$$W = \frac{820,55}{\frac{1}{12} \cdot 9 (1331 - 11) - \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 72} = 0,844.$$

Матрица рангов

m	Геометрические параметры			Физические свойства							Параметры среды		
	Геометрические размеры объекта, мм	Расстояние между платами, мм	Координата точки теплоты, мм	Степень черноты внутренней поверхности	Степень черноты внешней поверхности	Мощность, выделяемая в блоке, Вт	Температура поверхности, °C	Температура окружающей среды, °C	Теплопроводность внутренней среды	Температура окружающей среды, °C	Давление в блоке, Н		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	4	11	10	2	2,5	11	4	5	6	7	3,5		
2	4,5	9	11	3	3	11	4	6	5	6,5	3		
3	4	10	10	2,5	3	9	4	6	5,5	8	4		
m	12,5	30	31	7,5	8,5	31	12	17	16,5	21,5	10,5		
$\sum a_{ij}$	-5,5	12	13	-10,5	-9,5	13	-6	-1	-1,5	3,5	-7,5		
Δ^2	30,25	144	169	110,3	90,25	169	36	+1	2,25	12,25	56,25		
											820,55		

Поскольку величина коэффициента конкордации существенно отличается от нуля, можно говорить о согласованности мнений литературных источников, однако факторы оценены по-разному, т. е. W заметно отличается от единицы. Значимость коэффициента конкордации проверяется по χ^2 -критерию:

$$\chi^2 = \frac{S}{\frac{1}{12} mk (k+1) - \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^m T_j}$$

Подставляя значения из табл. 2, получаем

$$\chi^2 = \frac{820,55}{\frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 12 - \frac{1}{10} \cdot 72} = 32,8.$$

Из табл. 3 для χ^2 -критерия находим, что для 5% уровня значимости при числе степеней свободы $j = k - 1 = 10$, величина $\lambda_{\text{табл}}^2 = 18,307$.

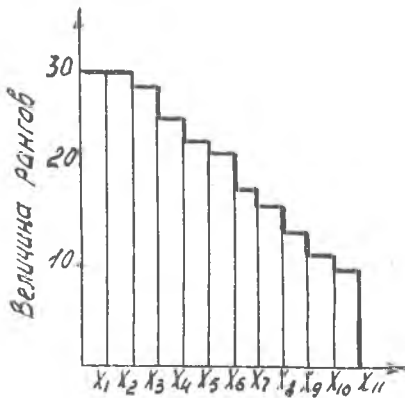


Рис. 7. Априорная диаграмма рангов

В связи с тем, что табличное значение χ^2 -критерия меньше расчетного, можно с 95% достоверностью утверждать, что мнения авторов литературных источников или исследователей в этом вопросе согласуются. Это позволяет построить среднюю априорную диаграмму рангов для рассматриваемых факторов (рис. 7). По результатам диаграммы отбираем для дальнейшего исследования следующие факторы: геометрические размеры устройства, выделяемая мощ-

ность, температура окружающей среды.

Планирование эксперимента. При ведении эксперимента используется факторный эксперимент 2^{5-1} с генерирующим соотношением $x_5 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, определяющий контраст вида $I = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$. Значения температуры являются средними из двух параллельных опытов. График пересчета термо-ЭДС приведен на рис. 8, матрица планирования представлена в табл. 4.

Матрица планирования имеет стандартную форму, потому что в ней использованы кодированные факторы. Кодирование

Значения χ^2 -критерия для уровня значимости 0,05

Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
χ^2	3,841	5,991	7,815	9,488	11,07	12,592	14,067	15,507	16,919	18,307
Число степеней свободы	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
χ^2	19,675	21,026	22,362	23,685	24,996	26,296	27,587	28,869	30,144	31,410
Число степеней свободы	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
χ^2	32,671	33,924	35,17	36,415	37,652	38,885	40,113	41,337	42,557	43,773

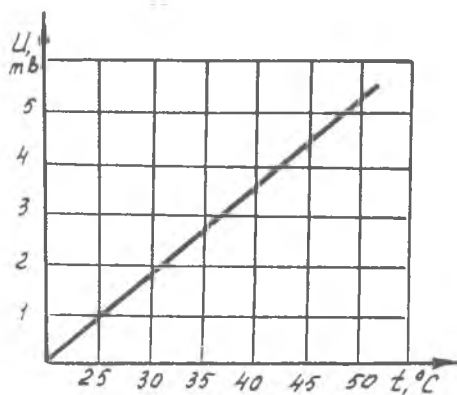


Рис. 8. График зависимости термоЭДС от температуры

Таблица 4

Матрица планирования

Уровни варьирования факторов	Координаты источников тепла, мм			Мощ- ность, P	Темпе- ратура среды $t_{\text{ср}}$, °C	Темпе- ратура в блоке
	по оси x	по оси y	по оси z			
	x_1	x_2	x_3			
+2	48	64	46	2,5	40	
+1	38	49	36	2,0	30	
0	28	34	26	1,5	20	
-1	18	19	16	1,0	10	
-2	8	4	6	0,5	0	

Интервалы ϵ

1	+	+	+	-	+	42,3
2	-	+	-	-	-	42,7
3	+	-	+	+	-	44,6
4	-	-	+	+	+	44,8
5	+	+	-	+	-	40,5
6	-	+	-	+	+	41,3
7	+	-	-	+	+	43,8
8	-	-	-	+	-	44,2
9	+	+	+	-	-	30,7
10	-	+	+	-	+	30,8
11	+	-	+	-	+	31,5
12	-	-	+	-	-	31,9
13	+	+	-	-	+	29,6
14	-	+	-	-	-	29,9
15	+	-	-	-	+	31,4
16	-	-	-	-	-	31,8

факторов подчиняется соотношению $x_j = \frac{C_j - C_{0j}}{\varepsilon}$, где x_j — безразмерная величина (кодированное значение фактора), C_j — натуральное значение фактора, C_{0j} — натуральное значение j -го фактора на нулевом уровне варьирования, ε — натуральное значение интервала варьирования.

По матрице планирования рассчитываются коэффициенты регрессии по формулам

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u}{N},$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot x_{ju} \cdot y_u}{N},$$

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot y_u}{N};$$

в результате расчетов получены следующие значения коэффициентов:

$$\begin{array}{lll} b_0 = 26,7; & b_4 = 5,2; & b_{23} = 0,062; \\ b_1 = -0,18; & b_{12} = 0,137; & b_{24} = 0,006; \\ b_2 = -0,37; & b_{13} = 0,137; & b_{34} = 0,643. \\ b_3 = 1,47; & b_{14} = -0,112; & \end{array}$$

Для построения математической модели проводится статистический анализ уравнения регрессии по формулам

$$S^2_{\{y\}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)}; \quad S^2_{\{y\}} = 0,51.$$

$$S^2_{\{b_i\}} = \frac{S^2_{\{y\}}}{\sum_{j=1}^n x^2_{ij}}; \quad S^2_{\{b_i\}} = 0,0318;$$

$$\Delta b_i = \pm 0,0668.$$

Проверка значимости оценок коэффициентов производится с помощью критерия Стьюдента. Для этого вычисляется оценка дисперсии коэффициентов регрессии $S_b^2 = (1/n) S_y^2$. Коэффициент b_j значим, если $|b_j| > t_\alpha$, где t_α — табличное значение, α — уровень значимости. Из определения значимости можно сказать, что все коэффициенты, кроме b_{23} ; b_{24} , значимы. Члены уравнения с незначимыми коэффициентами отбрасываются. Статистическая незначимость коэффициента может быть обуслов-

лена рядом следующих причин: интервал варьирования выбран малым, данная переменная не имеет связи с выходной переменной, велика ошибка эксперимента из-за присутствия неуправляемых переменных.

Проверка адекватности модели заключается в оценке соответствия экспериментальных данных выходной переменной (температуры) значениям, вычисленным по полученному уравнению регрессии. Адекватность модели проверяется с помощью критерия Фишера, т. е. производится проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий. Если $F = \frac{S_{\text{на}}^2}{S_{\text{в}}^2}$ меньше $F_{\text{табл}}$, то можно утверждать, что уравнение регрессии адекватно отражает результаты эксперимента. Экспериментальное значение критерия Фишера $F = 6,72$ оказалось больше табличного для 5% уровня значимости $F_{0,05} = 2,42$. Следовательно, гипотезу об адекватности линейной модели нельзя считать верной. При изменении интервалов варьирования результат получился тот же, т. е. экспериментальное значение критерия Фишера больше табличного.

Гипотеза об адекватности линейной модели отвергается, поэтому следует провести новый эксперимент, связанный с получением модели второго порядка. Для проведения эксперимента используется ротatable планирование второго порядка (РПВП). Это планирование в некотором смысле оптимально, т. к. позволяет получить более равномерную информацию о роли всех переменных, участвующих в протекании процесса. Кроме того, ротatable планы почти ортогональны и позволяют свести к минимуму систематические ошибки.

Ротatable планы строятся следующим образом. В качестве ядра экспериментальных точек, вокруг которых расположены остальные точки, выбирают полный факторный эксперимент или дробную реплику от него (т. е. линейная ортогональная матрица планирования), к которому добавляют некоторое количество специальных точек «звездных». Эти дополнительные точки делятся на два класса:

«звездные» точки, положение которых зависит от величины «звездного» плеча, определяющего их положение относительно центра эксперимента;

«центральные» точки, число которых может меняться, отвечают центру эксперимента, вокруг которого группируются точки полного факторного эксперимента или дробной реплики и «звездные». Они могут использоваться также для оценки дисперсии, связанной с ошибкой опыта.

Величина «звездного» плеча при использовании полного факторного эксперимента вычисляется по формуле $\alpha = 2^{k/4}$, где k — число факторов. При $k > 2$ можно пользоваться дробными репликами от полного факторного эксперимента, в этом

случае $\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}$, где p — дробность реплики.

Данные для построения матрицы планирования при $k \leq 7$ табулированы и даны в табл. 5. Матрица планирования для дан-

Таблица 5

Данные для построения матрицы ротатабельного планирования

Число факторов	Число ядра точек	Число звездных точек	Число нулевых точек	Величина плеча для звездных точек	Общее число опытов	Примечание
2	4	4	5	1.414	13	
3	8	6	6	1.682	20	
4	16	8	7	2.0	31	
5	32	10	10	2.378	52	
5	16	10	6	2.00	32	Полуреплика
6	64	12	15	2.828	91	
6	32	12	9	2.378	53	Полуреплика
7	128	14	21	3.333	163	
7	64	14	14	2.828	92	Полуреплика

ного объекта исследования имеет вид, представленный в табл. 6).

После реализации матрицы планирования вычисляем коэффициенты регрессии по формулам [4]

$$b_0 = \frac{A}{N} [2\lambda^2 (k+2) \sum_n y_n - 2\lambda C \sum_{i=1}^k \sum_n x_{in}^2 \cdot y_n];$$

$$b_i = \frac{C}{N} \sum_n x_{in} y_n; \quad b_{ij} = -\frac{C}{N \cdot \lambda} \sum_n x_{in} \cdot x_{jn} \cdot y_n,$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N} \{C^2 [(k+2) \lambda - k] \sum_n x_{in}^2 y_n + C^2 (1-\lambda) \sum_{i=1}^k \sum_n x_{in} y_n - 2\lambda C \sum_n y_n\},$$

где λ — некоторая константа, равная $\lambda = \frac{\rho (n_c + n_0)}{(k+2) n_c}$ и характеризующая выполнение ротатабельного планирования. В выражение входят: n_0 — число нулевых точек, $n_c = N - n_0$ — число точек, расположенных на сфере с радиусом информационного контура ρ (из табл. 5 находим $n_c = 26$; $n_0 = 0$), k — число факторов, N — количество опытов $N = 26$;

Матрица ротатабельного планирования

Уровни варьи- рования факторов	Координаты источников тепла, мм			Мощ- ность Вт, Р, Вт	Темпе- ратура среды, t , °С	Темпе- ратура в блоке t , °С
	по оси x	по оси y	по оси z			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+2	48	64	46	2,5	40	
+1	38	49	36	2,0	30	
0	28	34	26	1,5	20	
-1	18	19	16	1,0	10	
-2	8	4	6	0,5	0	

Интервалы ϵ

1	+	+	+	+	+	42,3
2	-	+	+	+	-	42,7
3	+	-	+	+	-	44,6
4	-	-	+	+	+	44,8
5	+	+	-	+	-	40,5
6	-	+	-	+	+	41,3
7	+	-	-	+	+	43,8
8	-	-	-	+	-	44,2
9	+	+	+	-	-	30,7
10	-	+	+	-	+	30,9
11	+	-	+	-	+	31,5
12	-	-	+	-	-	31,9
13	+	+	-	-	+	29,6
14	-	+	-	-	-	29,9
15	+	-	-	-	+	31,4
16	-	-	-	-	-	31,8
17	-2	0	0	0	0	27,5
18	+2	0	0	0	0	26,8
19	0	-2	0	0	0	37,6
20	0	+2	0	0	0	28,0
21	0	0	-2	0	0	34,6
22	0	0	+2	0	0	36,7
23	0	0	0	-2	0	26,1
24	0	0	0	+2	0	48,6
25	0	0	0	0	-2	37,1
26	0	0	0	0	+2	37,5
27	0	0	0	0	0	37,0
28	0	0	0	0	0	37,8
29	0	0	0	0	0	37,9
30	0	0	0	0	0	37,3
31	0	0	0	0	0	37,1
32	0	0	0	0	0	36,5

$$A = \frac{1}{2\lambda[(k+2)\lambda - k]}$$

$$C = \frac{N}{\sum_{n=1}^N x_{in}^2},$$

где x_{in} — кодированное значение i -го фактора в n -м опыте, y_n — значение температуры в n -м опыте.

По вычислении коэффициентов регрессии проводят статистический анализ. Гипотезу об адекватности модели проверяют с помощью критерия Фишера $F = S_{ад}^2 / S_{воспр}^2$, где $S_{ад}^2$ — дисперсия адекватности математической модели, $S_{воспр}^2$ — дисперсия воспроизводимости, характеризующая ошибку опыта. Дисперсия адекватности определяется выражением

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{n=1}^N y_n^2 - N \sum_{i=1}^k b_i^2}{N - k - 1}.$$

Дисперсия, характеризующая ошибку опыта, определяется как

$$S_{воспр}^2 = S_{(y)}^2 \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{in} - \bar{y}_n)^2}{N(n-1)},$$

где \bar{y}_n — среднее значение критерия оптимизации в опытах, найденное экспериментально, y_{in} — значение параметра оптимизации в параллельных опытах, n — число параллельных опытов.

Гипотеза об адекватности модели может быть принята, если расчетное значение F -критерия не превышает табличного для выбранного уровня значимости, обычно с 95% достоверностью. Далее проверяют значимость коэффициентов регрессии построением доверительного интервала $|\pm \Delta b_i|$. Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов регрессии, будут

$$S_{(b_0)}^2 = \frac{2A \cdot \lambda^2 (k+2) S_{(y)}^2}{N},$$

$$S_{(b_i)}^2 = \frac{C \cdot S_{(y)}^2}{N},$$

$$S_{(b_{ij})}^2 = \frac{C^2 S_{(y)}^2}{N \cdot \lambda},$$

$$S_{(b_{ii})}^2 = \frac{A[(k+1)\lambda + (k-1)C^2 S_{(y)}^2]}{N}.$$

Доверительные интервалы коэффициентов регрессии определяют по формулам

$$\begin{aligned} \pm \Delta b_0 &= \pm t \cdot S_{(b_0)}, & \pm \Delta b_{ij} &= \pm t \cdot S_{(b_{ij})}, \\ \pm \Delta b_i &= \pm t \cdot S_{(b_i)}, & \pm \Delta b_{ii} &= \pm t \cdot S_{(b_{ii})}, \end{aligned}$$

где t — табличное значение критерия Стьюдента с 95% достоверностью, $t = 2,131$.

Коэффициенты регрессии можно считать значимыми, если их абсолютное значение превышает величину доверительного интервала. Вычисление коэффициентов регрессии и их статистический анализ проводился на ЭВМ. Получены следующие значения коэффициентов регрессии:

$$\begin{array}{lll} b_0 = 35,20; & b_{11} = -1,27; & b_{25} = 0,06; \\ b_1 = -0,18; & b_{13} = 0,03; & b_{34} = 0,11; \\ b_2 = -1,47; & b_{15} = 6,48; & b_{44} = 0,81; \\ b_3 = 0,46; & b_{23} = 0,18; & b_{45} = 0,05; \\ b_4 = 5,89; & b_{24} = -0,26; & b_{55} = 0,80. \\ & b_{33} = 0,47; & \end{array}$$

Построение и анализ уравнения регрессии данной модели.
По коэффициентам регрессии составим уравнение регрессии второго порядка

$$\begin{aligned} Y = & 35,20 - 0,18 x_1 - 1,47 x_2 + 0,46 x_3 + 5,9 x_4 - \\ & - 1,27 x_1^2 + 0,47 x_3^2 + 0,81 x_4^2 + 0,8 x_5^2 + 0,03 x_1 x_3 + \\ & + 6,48 x_1 x_5 + 0,18 x_2 x_3 - 0,26 x_2 x_4 + 0,06 x_2 x_5 + \\ & + 0,11 x_3 x_4 + 0,05 x_4 x_5. \end{aligned}$$

В таком виде уравнение неудобно для интерпретации и практических расчетов, поэтому преобразуем его с учетом формул перехода к именованным величинам:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{X-2,8}{1}, \quad x_2 = \frac{Y-3,4}{1,5}, \quad x_3 = \frac{Z-2,6}{1}, \\ x_4 = \frac{P-1,5}{0,5}, \quad x_5 = \frac{K-2}{1} \end{aligned}$$

где X — координата по оси x , см,

Y — —»— по оси y , см,

Z — —»— по оси z , см,

P — мощность, выделяемая в объеме исследования, Вт,

K — температура окружающей среды, °С.

После преобразования получим уравнение

$$\begin{aligned} T = & 57,48 - 1,28 X^2 + 0,47 Z^2 + 3,28 P^2 + 0,81 K^2 - \\ & - 6,08 X - 0,89 Y - 2,88 Z + 2,29 P - 21,72 K + 0,04 XZ + \\ & + 6,48 XK + 0,13 YZ - 6,35 PY - 0,048 KY + 0,24 PZ + 0,12 PK. \end{aligned}$$

Это общий вид уравнения регрессии второго порядка. Для изучения температурного поля объекта исследования преобразуем уравнение к каноническому виду. Построим кривые, характеризующие постоянную температуру в центре плана $|P=0; K=0|$. Подставляя эти значения, получаем уравнение

$$T = 57,48 - 1,28 X^2 + 0,47 Z^2 - 6,08 X - 0,89 Y - 2,88 Z + 0,04 XZ + 0,13 YZ.$$

Дифференцируя полученное уравнение по X , Y , Z и приравнявая к нулю, решаем систему трех уравнений, находим координаты нового центра

$$\frac{\partial T}{\partial X} = -2,56 X - 6,08 + 0,04 Z,$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = -0,89 + 0,13 Z,$$

$$\frac{\partial T}{\partial Z} = 0,947 + 0,04 X + 0,13 Y,$$

$$X = -2,28; Y = 50,27; Z = 6,85; \hat{T} = 60,35^\circ\text{C}.$$

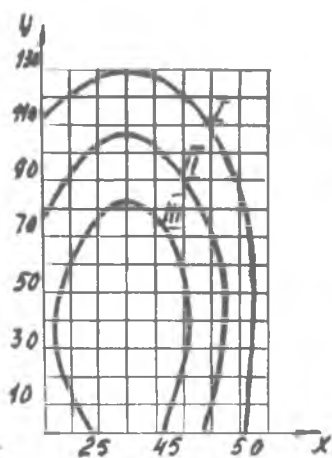


Рис. 9. Сечение поверхности отклика при $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$

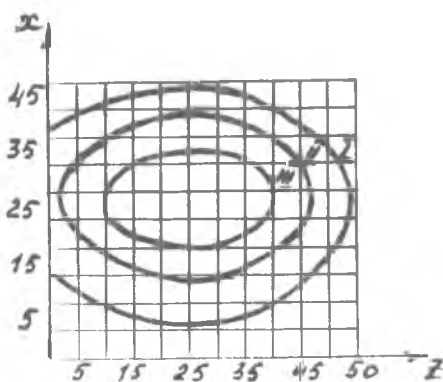


Рис. 10. Сечение поверхности отклика при $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$

Поворачивая оси координат в новом центре до совмещения с главными осями фигуры, получим каноническое уравнение

$$T = 60,35 = -1,29 X^2 + 0,45 Z^2 - 0,09 Y^2.$$

Результаты расчетов позволяют построить семейство кривых, характеризующихся постоянной температурой (рис. 9—11).

Описание алгоритма расчета коэффициентов регрессии. Предлагаемый алгоритм предназначен для вычисления коэффициентов регрессии и их статистического анализ на ЭВМ «Электроника-ДЗ-28». Программа содержит 50 операторов. Блок-схема программы представлена на рис. 12.

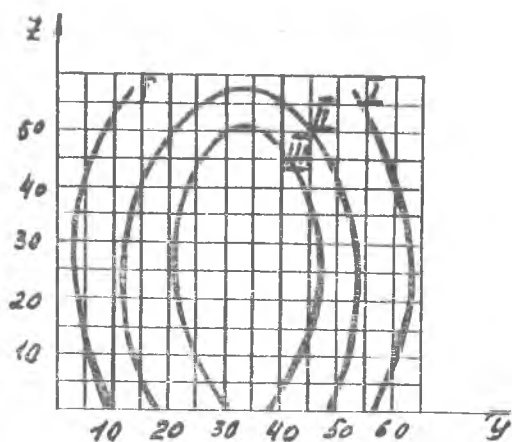


Рис. 11. Сечение поверхности отклика при $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$

Вначале вводятся исходные данные: число опытов, N ; число факторов, k ; коэффициент Стьюдента, t ; элементы матрицы планирования, x_{in} ; экспериментальные значения температур, y_n .

Далее последовательно вычисляются коэффициенты C , λ , A , а также вычисляется сумма квадратов, связанная с дисперсией, характеризующей ошибку опыта в центре эксперимента S_0^2 , и рассчитывается дисперсия, характеризующая ошибку опыта $S_{(y)}^2$.

Далее последовательно осуществляется вычисление и сравнение с доверительным интервалом соответствующих коэффициентов регрессии. Если значение коэффициента регрессии больше значения доверительного интервала, то он печатается, а в противном случае вычисляется следующий коэффициент из данной группы и т. д.

После вычисления коэффициентов регрессии вычисляется сумма квадратов, связанная с дисперсией адекватности $S_{ад}$. Затем рассчитывается критерий Фишера $F_{экс}$ и выводится на печать.

6.4. ЧИСЛЕННЫЕ (ЦИФРОВЫЕ) МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИЙ РЭА

Основная задача анализа конструкций РЭА — выявление полевых связей между ее элементами. Для расчета протекающих процессов конструкцию представляют в виде некоторой модели. Модель может быть условно разбита на две части: физическая модель и расчетная схема. *Физическая модель* представляется в виде дискретной модели-сетки, определяющей

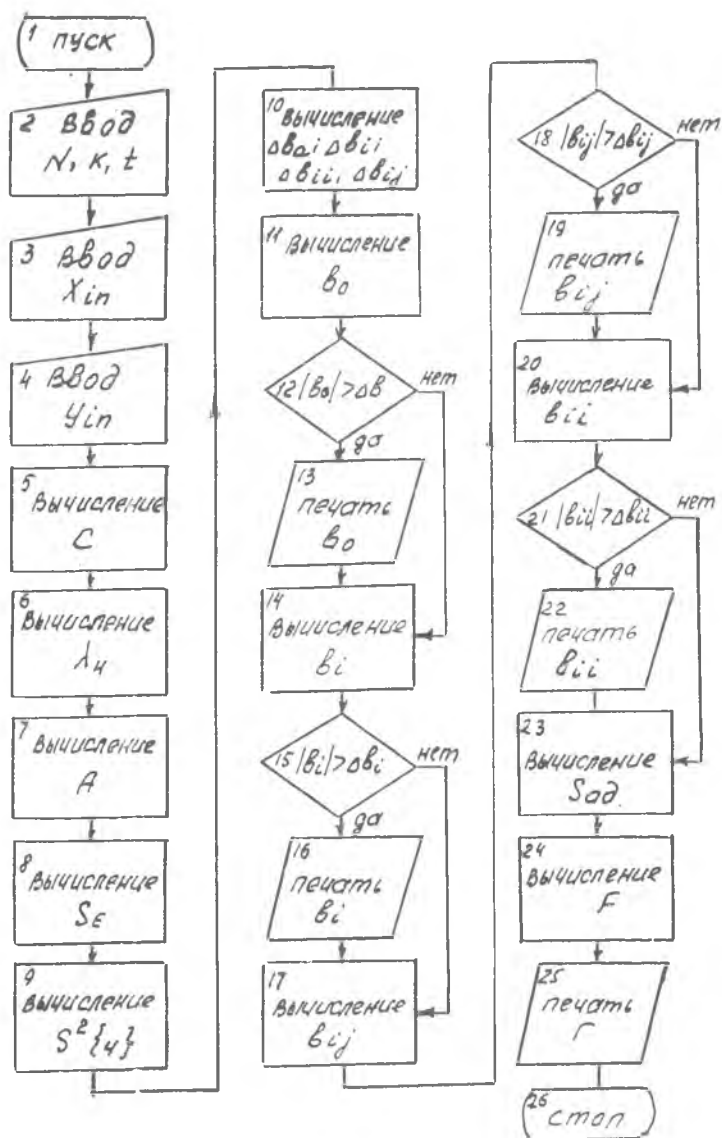


Рис. 12. Блок-схема программы расчета коэффициентов регрессии

конфигурацию и взаимное расположение деталей конструкции. *Расчетная схема* является математическим описанием процессов в модели-сетке. При разработке расчетной модели нужно, по возможности, стремиться к тому, чтобы не вносить никаких принципиальных упрощений в рассматриваемые физические явления с тем, чтобы избежать неконтролируемые погрешности.

При цифровом моделировании оперируют дискретными (цифровыми) величинами. Значит, непрерывные входные и выходные процессы моделируемой системы представляются в виде дискретных последовательностей. Следовательно, цифровым моделям присущи погрешности квантования как по времени (из-за замены непрерывного аргумента t на $n\Delta t$, где Δt — шаг квантования по времени — интервал дискретизации, а n — целочисленный аргумент), так и по уровню вследствие конечной длины машинного слова и округления результатов вычислений. В универсальных ЦВМ интервал дискретизации по уровню составляет 10^{-75} , поэтому ошибками квантования по уровню при небольшом числе повторяющихся операций можно пренебречь. Однако если алгоритмы рекуррентные, то ошибки округления накапливаются и ими пренебречь нельзя.

Оптимальный интервал квантования по времени определяется частотными свойствами моделируемых реализаций и по теореме Котельникова не должен превышать величины $\Delta t = 2\pi/\omega_c$, где ω_c — верхняя частота непрерывного спектра квантуемого сигнала.

При моделировании поля с применением ЦВМ использование конечно-разностной аппроксимации позволяет заменить дифференциальные уравнения в частных производных, описывающих физическую систему, большим числом связанных между собой алгебраических уравнений [6, 7].

Рассмотрим методику расчета температурного поля с помощью цифрового моделирования. Разобьем мысленно конструкцию или объект исследования на части прямоугольной формы, каждую часть полученного разбиения назовем *элементом*. Считаем, что объект исследования залит компаундом, т. е. основным видом передачи тепла является теплопроводность. Среди полученных элементов можно различить целиком заполненные однородным материалом и частично заполненные одним материалом, частично другим.

Рассмотрим процесс теплопроводности в нескольких элементах, один из которых будем считать центральным, к которому прибавляются и из которого вытекают тепловые потоки (рис. 13).

Известно, что типовым уравнением движения энергии является закон сохранения энергии: количество притекающей к данному элементу энергии равно количеству утекающей от элемента энергии плюс количество энергии, накапливающейся в эле-

менте. Баланс количества теплоты за время τ для выделенного элемента можно представить в трехмерном пространстве в виде

$$\frac{I_x^+ - I_x^-}{l_x} + \frac{I_y^+ - I_y^-}{l_y} + \frac{I_z^+ - I_z^-}{l_z} = C \frac{\Theta(t+\tau) - \Theta(t)}{\tau}$$

где I_x^+, I_x^-, \dots — удельные плотности тепловых потоков, l_x, l_y, l_z — линейные размеры элемента вдоль осей, C — удельная теплоемкость вещества, из которого составлен элемент; τ — интервал времени; $\Theta(t+\tau) - \Theta(t)$ — приращение температуры за интервал времени τ .

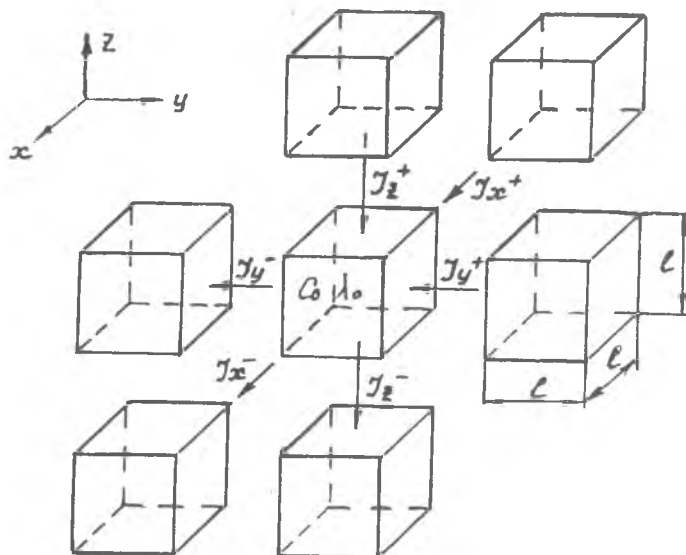


Рис. 13. Передача тепла в нескольких элементах

Теперь необходимо выразить плотности потоков через температуру в узлах сетки. Для этого воспользуемся гипотезой о линейности свойств среды — законом Фурье: плотность теплового потока между двумя точками пропорциональна разности температур между этими точками и обратно пропорциональна расстоянию между ними, т. е.

$$I_x^+ = k \frac{\Theta_{i+1,j,k} - \Theta_{i,j,k}}{l_x}.$$

Коэффициентом пропорциональности здесь является коэффициент теплопроводности вещества k .

Запишем уравнения для плотностей тепловых потоков относительно осей координат

$$I_x^+ = k \frac{\Theta_{i+1,j,k} - \Theta_{i,j,k}}{l_x}; \quad I_x^- = k \frac{\Theta_{i,j,k} - \Theta_{i-1,j,k}}{l_x};$$

$$I_y^+ = k \frac{\Theta_{i,j+1,k} - \Theta_{i,j,k}}{l_y}; \quad I_y^- = k \frac{\Theta_{i,j,k} - \Theta_{i,j-1,k}}{l_y};$$

$$I_z^+ = k \frac{\Theta_{i,j,k+1} - \Theta_{i,j,k}}{l_z}; \quad I_z^- = k \frac{\Theta_{i,j,k} - \Theta_{i,j,k-1}}{l_z}.$$

Если подставить эти выражения в уравнение теплового баланса, то получим уравнение теплопроводности, которое называют *уравнением Фурье*. Обычно оно имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \cdot a,$$

здесь же записано в разностной форме, удобной для практических расчетов на ЦВМ. Часто для расчета температурных полей пользуются итерационным методом. Рассмотрим метод простой итерации. Допустим, что тепловая схема имеет N узловых точек. Тогда на основании закона Кирхгофа получим систему N алгебраических уравнений для N неизвестных температур t_j :

$$\sum_{i=1}^N \sigma_{ij} (t_j - t_i) \cdot P_j,$$

где σ_{ij} — тепловые проводимости.

Чтобы применить метод итераций, удобнее эту систему записать в другом виде:

$$t_j = \frac{P_j + \sum_{i=1}^N \sigma_{ij} \cdot t_i}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ij}}.$$

Система уравнений может быть нелинейной, если

$$P_j = P_j(t); \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t_i, t_j).$$

Расчет ведется по формулам

$$t_j^{k+1} = \frac{P_j^k + \sum_{i=1}^N \sigma_{ij}^k \cdot t_i^k}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ij}^k};$$

$$P_i^k = P_i(t_i^k); \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t_i^k, t_j^k),$$

Оценка точности решения на $k+1$ -й итерации оценивается соотношением $\max |t_j^{k+1} - t_j^k| \leq \epsilon$. В формулах индекс k означает номер приближения, ϵ — наперед заданная погрешность решения. На рис. 14 дана блок-схема решения системы уравнения.

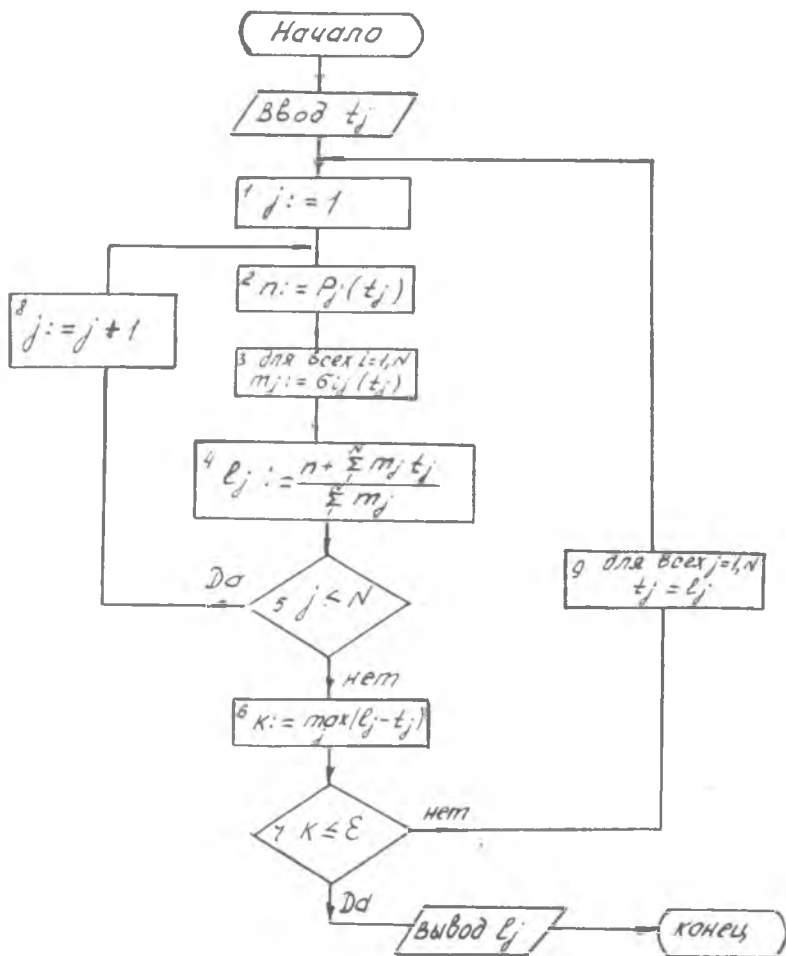


Рис. 14. Блок-схема решения системы уравнений

7. МЕТОДЫ ПОИСКА НОВЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В процессе конструирования РЭА инженер сталкивается с необходимостью находить новые технические решения. Решение таких задач связано с развитием творческих способностей. На пути успешного решения технических проблем часто встают психологические препятствия. Для их успешного преодо-

ления разрабатываются специальные методы, направленные на стимуляцию творческой активности инженера. Среди них хорошо известны методы мозгового штурма, ликвидации тупиковых ситуаций, морфологического анализа, синтеза новых технических решений с помощью ЭВМ.

Цель *метода мозгового штурма* — стимулировать коллективное творчество, т. е. стимулировать группу лиц к быстрому генерированию большого количества идей. Способ достижения цели — запрет на критику. Боязнь критики — одно из существенных психологических препятствий творчеству.

План действия при реализации данного метода следующий: отобрать группу лиц для генерации идей; ввести правила игры и ознакомить с ними участников; провести мозговой штурм; зафиксировать выдвинутые идеи и проанализировать их.

Необходимо тщательно подбирать состав участников штурма: нужны творческие работники, имеющие представление о рассматриваемом вопросе. Можно использовать как узких специалистов в затрагиваемой области, так и лиц, далеких от нее (они более свободны от психологической инерции). Хорошо, если они будут иметь разные точки зрения на проблему. Рекомендуется, чтобы члены группы не были лично заинтересованы в решении поставленной задачи («чужая задача»), не были глубоко связаны друг с другом (т. е. начальник и подчиненный).

Для проведения мозгового штурма вводятся три основных правила.

1. Выдвинутые идеи не обсуждаются, т. е. запрещена не только критика, но и вынесение любого суждения — благоприятного или неблагоприятного. Поскольку люди имеют привычку все подвергать критике, такой запрет — наиболее жесткое и важное правило.

2. Ставится задача генерации большого числа идей — чем больше, тем лучше.

3. Участники должны пытаться комбинировать или совершенствовать идеи, предложенные другими. В этом случае группа работает как один коллективный мозг. Мозговой штурм — это не упражнения в высказывании нелепостей, а целенаправленная работа группы, стремящейся найти новые творческие идеи.

Продолжительность сеанса — не более часа. Сеанс необходимо проводить энергично, в темпе. По данным физиологических исследований энергозатраты участников за это время соответствуют 10—12 часам обычной работы. Производительность метода: 6 человек могут за время сеанса выдвинуть до 150 идей. Анализ выдвинутых идей проводит группа эрудитов — специа-

листов в этой области. Опыт показывает, что за 100—120 идей лишь некоторые заслуживают внимания и только одна может содержать решение задачи.

Мозговой штурм* — принудительная форма коллективного творчества. Метод лучше использовать для решения общих задач, которые можно просто и ясно сформулировать, а не точных или специальных. Его можно применять как на начальных, так и на последующих стадиях проектирования. Таким образом, при правильном проведении мозгового штурма он оказывается ценным орудием получения новых идей.

Цель *метода ликвидации тупиковых стадий* — найти новые направления поиска решений, если очевидная область поиска не дала приемлемого решения — зашла в тупик. Способ достижения цели — преодоление психологической инерции.

Применяется несколько групп способов либо отдельно, либо вместе (в любом порядке).

1. Изменение подхода к решению задачи: неудовлетворительное решение подвергается преобразованию по специальным правилам, проводится поиск новых взаимосвязей между частями имеющегося решения, проводится переоценка проектной ситуации.

2. Преобразование имеющегося неудовлетворительного решения или его части в соответствии со следующими правилами: приспособить похожее изделие, модифицировать, усилить, ослабить, заменить (металл — пластмассой, светлое — темным, круг — квадратом), перекомпоновать, объединить (функции нескольких деталей в одной детали), сочетать (принципы, методы, результаты).

3. Использование синонимов как близких, так и более далеких. Один из них может натолкнуть на мысль с приемлемым решением. Например: экранировать — защищать, закрыть, предотвратить попадание, устранить влияние и т. д.

4. Переоценка проектной ситуации применима и к проблемам, а не только к решениям. Используется несколько приемов: поставленный в тупик проектировщик пишет предложение, характеризующее его затруднение, и затем заменяет в нем каждое слово его синонимом, это может навести на мысль о выходе из тупика;

записываются условия, позволяющие реализовать решение, и последствия, которые возникнут при отсутствии решения; условия могут оказаться под контролем, а последствия могут стать допустимыми или устранимыми в случае решения более простой проблемы;

неоднократно возвращаются к «первичной функциональной

потребности», без которой проект вообще не будет принят.

Метод морфологического анализа позволяет провести систематическое исследование как существующих, так и новых комбинаций. Цель — расширить область поиска решений проектной проблемы. При реализации метода принята следующая последовательность действий:

выделяются важнейшие направления в зависимости от числа требуемых функций разрабатываемой системы,

по каждому из функциональных направлений производится генерирование идей и составляется как можно больший перечень способов их реализации.

Узловое место метода — правильный выбор и формулировка направлений (определение набора функций).

При разработке *методов использования ЭВМ в процессе синтеза новых технических решений* можно выделить три группы работ:

исследования и разработки по искусственному интеллекту, системному анализу, теории алгоритмов, математическому и эвристическому программированию, теоретическим вопросам конструирования, которые служат методологической основой;

формализация и программирование эвристических методов поиска новых технических решений, которые первоначально создавались для безмашинного применения;

разработка специальных методов конструирования с применением ЭВМ.

К разработке специальных методов возможно два подхода: количественное описание множества возможных технических решений и использование методов математического программирования для поиска оптимального варианта;

описание на формализованном естественном языке множества возможных технических решений, приближенная оценка отдельных решений и использования процедур, отсекающих недопустимые варианты и выделяющих подмножество допустимых решений. Эти методы в некотором роде моделируют работу конструктора, который также пользуется описанием технического решения на естественном языке, приближенными интуитивными оценками и эффективными способами выбора наиболее приемлемых решений из большого количества возможных вариантов.

Для решения задач синтеза новых технических решений с помощью ЭВМ разработан обобщенный алгоритм, структурное описание которого имеет вид $A = \{E_k(P_j^i)\}$, где E_k — k -й этап решения задачи, P_j^i — процедура обработки информации, j — номер этапа, i — номер процедуры на j -м этапе.

Выбор процедур в процессе решения задачи определяется ее характером, объемом имеющейся информации, требованиями,

предъявляемыми к искомому техническому решению. Часть процедур имеет универсальный характер и используется на нескольких этапах. На первых этапах проектирования наиболее целесообразно организовать диалог конструктора с ЭВМ на базе обобщенного эвристического алгоритма. Это позволяет максимально активизировать мышление инженера, наиболее полно использовать его опыт и интуицию, и в сочетании с управляемостью ходом решения обеспечивает преимущества человеко-машинного комплекса. Однако на дальнейших этапах проектирования применение обобщенного алгоритма часто становится неэффективным из-за больших затрат времени на обработку информации по всем этапам и процедурам, часть которых нерациональна для данной конкретной задачи. В таких случаях целесообразно переходить к частным алгоритмам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Джонс. Инженерное и художественное конструирование. М.: Мир, 1976.
2. Гудкин Л. С. Оптимизация радиоэлектронных устройств. М.: Сов. радио, 1975.
3. Коздoba Л. А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массо-переноса. М.: Энергия, 1972.
4. Тихомиров В. Б. Математические методы планирования эксперимента при изучении нетканых материалов. М.: Легкая индустрия, 1968.
5. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976.
6. Маквцов Е. Н. Модели из кубиков. М.: Сов. радио, 1978.
7. Дульнев Г. Н. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре. М.: Высшая школа, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Методология проектирования	5
2. Модели конструирования и требования к ним	5
3. Основные топологические соотношения	7
4. Математические модели процесса проектирования	9
5. Принципы построения моделирующих алгоритмов	10
6. Модели процессов и устройств в РЭА	11
6.1. Разработка модели — ключевой этап инженерного проектирования	11
6.2. Моделирование процессов на основе аналогий	13
6.3. Интерполяционные математические модели	19
6.4. Численные (цифровые) модели конструкций РЭА	34
7. Методы поиска новых технических решений	39
Библиографический список	43

*Краснощекова Галина Федоровна,
Зеленский Анатолий Васильевич*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ НА ЭВМ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ РЭА ПРИ РАСЧЕТАХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Редактор Е. Д. Антонова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Н. С. Куприянова

Свод. тем. пл. № 962.
Сдано в набор 10.11.88 г. Подписано в печать 28.11.88 г.
ЕО 00334. Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная.
Печать высокая. Усл. п. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,0. Т. 500 экз.
Заказ 1064. Цена 15 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С. П. Королёва,
443001, Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. ЭОЗ Куйбышевского авиационного института,
443001, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.