

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Ю.Н. ГОРЕЛОВ, Л.В. КУРГАНСКАЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 01.04.01 Математика и по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

УДК 521.3(075)+629.78(075)

ББК В62я7+О643я7

Г687

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю.М. Заболотнов;

д-р техн. наук, проф. П.К. Кузнецов

Горелов, Юрий Николаевич

Г 687 Моделирование движения искусственного спутника Земли:

учебное пособие / *Ю.Н. Горелов, Л.В. Курганская.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 96 с.

ISBN 978-5-7883-1934-6

В учебном пособии изложены теоретические основы моделирования движения искусственного спутника Земли (ИСЗ). Невозмущенное (кеплерово) движение ИСЗ представлено моделями по результатам решения классической задачи небесной механики – задачи двух тел в виде соответствующих интегралов площадей, энергии и Лапласа. Дано описание кеплеровых элементов орбиты ИСЗ и их связь с прямоугольными координатами (и скоростями) ИСЗ в геоцентрических инерциальной и гринвичской системах координат. Моделирование возмущенного движения ИСЗ в основном представлено моделями движения в оскулирующих элементах с учетом несферичности Земли и нецентральности ее поля тяготения, а также с учетом сил сопротивления, обусловленных влиянием верхних слоев атмосферы.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 01.04.01 Математика и по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Пособие будет полезно для аспирантов и научных работников и инженеров, для которых проблемы динамики, баллистики и управления движением летательных аппаратов представляют интерес.

УДК 521.3(075)+629.78(075)

ББК В62я7+О643я7

ISBN 978-5-7883-1934-6

© Самарский университет, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ	8
1.1 Задача двух тел.....	8
1.2 Первые интегралы задачи двух тел	12
1.2.1 Интеграл площадей	12
1.2.2 Интеграл энергии	14
1.2.3 Интеграл Лапласа	16
1.3 Уравнение орбиты спутника и компоненты его скорости.....	18
1.3.1 Уравнение орбиты спутника	18
1.3.2 Компоненты скорости спутника	21
1.3.3 Законы Кеплера	22
1.4 Параметры кеплеровой орбиты ИСЗ.....	25
1.4.1 Элементы орбиты спутника	25
1.4.2 Определение положения и скорости спутника по элементам его орбиты	28
1.4.3 Определение элементов орбиты спутника по его положению и скорости в инерциальной и гринвичской системах координат	32
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ	38
2.1 Уравнения возмущенного движения ИСЗ.....	38
2.2 Уравнения возмущенного движения ИСЗ в оскулирующих элементах.....	42
2.2.1 Вспомогательные построения и соотношения	42
2.2.2 Вычисление производных $d\Omega/dt$, di/dt и du/dt	45

2.2.3 Вычисление производных $d\omega/dt$, dp/dt и de/dt	49
2.2.4 Сводка уравнений движения ИСЗ в оскулирующих элементах	52
2.3 Гравитационное поле Земли и влияние его отклонений от центрального на движение ИСЗ	61
2.3.1 Нормальный потенциал сил притяжения Земли	61
2.3.2 Влияние несферичности Земли на элементы орбиты ИСЗ.....	64
2.4 Возмущающие воздействия на движение ИСЗ верхней атмосферы Земли	71
2.4.1 Краткие сведения о верхней атмосфере Земли	71
2.4.2 О моделировании сопротивления верхних слоев атмосферы движению ИСЗ	75
2.5 Краткие замечания о некоторых факторах, влияющих на движение ИСЗ	82
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	85
ПРИЛОЖЕНИЕ Гравитационное поле и фигура Земли	87

ВВЕДЕНИЕ

При описании движения как естественных, так и искусственных небесных тел в первую очередь учитываются силы их взаимного притяжения и, соответственно, основной задачей классической небесной механики поэтому являлась задача изучения движения небесных тел под действием их взаимного притяжения, которое определяется в силу открытого И. Ньютоном в 1665-1666 гг. закона всемирного тяготения. В соответствии с этим законом материальные точки с массами m_1 и m_2 , находящиеся на расстоянии r друг от друга, каждая из которых притягивает другую с силой F , вычисляемой по формуле

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где γ – универсальная постоянная тяготения, равная

$$\gamma = 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

[согласно справочному документу «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11). – М.: Военно-топографическое управление ГШ ВС РФ, 2014. – 52 с.].

Основные особенности тяготения состоят в том, что его действие обнаруживается на громадных расстояниях (более 20000 астрономических единиц [1–4]), промежуточная среда между те-

лами не влияет на силу их взаимного притяжения, которое распространяется мгновенно.

При изучении движения небесных тел обычно считают, что они являются твердыми телами, и, более того, в ряде случаев они рассматриваются как материальные точки. Как отмечено в [1] одной из важнейших задач небесной механики является задача n материальных точек, называемая также «задачей n тел», в которой требуется «изучить движение n взаимно гравитирующих материальных точек, если известны массы этих точек, их положения и скорости в некоторый (начальный) момент времени». В этой задаче пренебрегают всеми другими силами, кроме сил тяготения, и влиянием каких-либо иных тел (считающимися бесконечно удаленными от рассматриваемых точек задачи). Важным примером задачи n тел является задача о движении больших планет вокруг Солнца. Для космонавтики представляет интерес тот случай задачи n тел, когда одна из материальных точек имеет пренебрежимо малую массу и, стало быть, практически не будет влиять на движение остальных точек задачи.

В качестве таких «точек» обычно рассматриваются искусственные небесные тела – космические летательные аппараты (КЛА) и, в частности, искусственные спутники Земли (ИСЗ). Если в классической небесной механике решались задачи, связанные с исследованием траекторий, по которым движутся небесные тела, то в космонавтике основные задачи связаны с выбором или, в более широком смысле, с проектированием траекторий искусственных небесных тел с учетом их целевого назначения. В этой связи следует отметить некоторые важные задачи динамики космического полета [1].

Во-первых, это задача о близком спутнике, когда КЛА движется настолько близко от планеты, что ее уже недопустимо рассматривать в виде материальной точки. Например, для ИСЗ необ-

ходимо учитывать сплюснутость Земли, наиболее точной моделью, чем шар со сферически симметричным распределением масс, притягивающий как материальная точка, может быть эллипсоид вращения. Известно [1, 3 – 5], что пренебрежение сплюснутостью Земли приводит к ошибкам расчета движения ИСЗ тем большим, чем ближе он находится к ее поверхности, и даже для геостационарных ИСЗ [1, 2], движущихся на расстоянии 42164 км от центра Земли, эта ошибка больше, чем ошибки от пренебрежения влияния Луны и Солнца.

Во-вторых, движение КЛА может происходить в сопротивляющейся среде, например, при полете ИСЗ на высотах до 1000 км существенное влияние оказывает атмосфера Земли, несмотря на крайнюю разреженность ее верхних слоев. То же самое имеет место и при полете КЛА вблизи планет и даже их спутников (например, Титана спутника Сатурна), имеющих атмосферу [5].

В-третьих, существенным отличием КЛА от естественных небесных тел является возможность изменять свою траекторию полета за счет включения ракетных двигателей. Такие переходы от одной траектории к другой называются маневрами КЛА. При этом в результате работы двигателей изменяется масса аппарата. Соответственно, изучение движения КЛА переменной массы и в настоящее время является актуальной задачей динамики космического полета [1, 5, 6].

Наконец, до сих пор предполагалось, что КЛА рассматривается как материальная точка, масса которого сосредоточена в этой точке – центре масс (инерции) аппарата. Следует отметить, что значительное число прикладных задач динамики космического полета связано с изучением движения КЛА относительно его центра масс [6], которые в настоящем пособии не рассматриваются.

1 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

1.1 Задача двух тел

Небесная механика изучает движение как естественных, так и искусственных небесных объектов, в том числе КЛА и ИСЗ, под действием сил гравитационного взаимодействия тел, а также сил сопротивлений, вызываемых наличием пылевых, газовых и других сред в космическом пространстве, сил светового давления и т.п. Важнейшей для приложений задачей небесной механики является задача двух тел, а точнее – двух материальных точек. Последнее связано с тем, что любое тело в виде шара со сферическим распределением плотности можно представить материальной точкой в его центре и с его массой [1, 4, 6].

Задача двух тел состоит в следующем. Пусть в пустом пространстве движется пара материальных точек, которые притягиваются одна к другой по закону всемирного тяготения и для них заданы начальные положения и скорости. Требуется найти положения точек для любого последующего момента времени.

Эта задача является основной в проблеме движения планет Солнечной системы и искусственных спутников Земли, Луны и планет. В большинстве случаев силы взаимного притяжения планет, силы притяжения спутника Земли планетами, силы сопротивления космической среды, силы светового давления и т.п. малы по сравнению с силами гравитационного притяжения планеты и Солнца или спутника и Земли.

Замечательно то, что интегрирование дифференциальных уравнений движения в задаче двух тел сводится к квадратурам. Для получения уравнений движения введем некоторую инерциальную систему координат O_aXYZ , оси которой направлены на неподвижные звезды, а ее начало совпадает, например, с центром масс Солнечной системы [1, 6]. Положения материальных точек P и O в этой системе координат задаются радиус-векторами ρ и \mathbf{R} (рис. 1). С точкой O свяжем поступательно движущуюся систему координат $Oxyz$, оси которой параллельны соответствующим осям системы O_aXYZ .

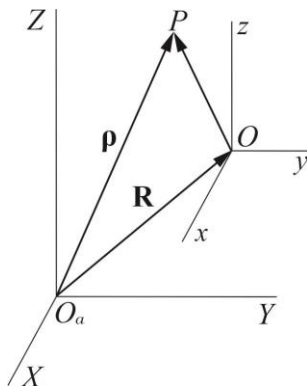


Рис.1 – К постановке задачи двух тел

Положение точки P относительно точки O пусть задается радиус-вектором \mathbf{r} , а массы этих точек, соответственно, равны M и m , γ – универсальная гравитационная постоянная. Со стороны точки O на точку P действует сила \mathbf{F} , определяемая законом всемирного тяготения:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}.$$

Соответственно, и со стороны точки P на точку O будет действовать сила $-\mathbf{F}$. Тогда радиусы-векторы $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{R} удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r}; \quad \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

Так как $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}$, то отсюда следует, что

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r} - \gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r} = -\gamma(m+M) \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Если ввести обозначение $k = \gamma(m+M)$, то получим

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.1)$$

Это уравнение определяет движение точки P относительно точки O . Если вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ найдена, то определение движения относительно системы координат O_aXYZ не представляет труда. Действительно, пусть C – центр масс точек P и O . Так как точки P и O образуют замкнутую систему, то согласно теореме о движении центра масс [6] точка C движется равномерно и прямолинейно; ее скорость полностью определяется начальными скоростями точек P и O . Если \mathbf{R}_C – радиус-вектор центра масс системы этих точек, то имеет место

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}_C + \frac{M}{m+M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_C + \frac{m}{m+M} \mathbf{r}.$$

В том случае, когда $m \ll M$, или, что то же, при $m \rightarrow 0$ уравнения (1.1) описывают движение искусственного спутника вокруг достаточно массивного небесного тела, например, как в случае ИСЗ. Соответственно, тогда в (1.1) $k = \gamma M$ – гравитационный параметр притягивающего центра – точки O . Например, его значения: для Земли – $k_3 = 398600,435436 \text{ км}^3\text{с}^{-2}$; для Луны – $k_{\text{л}} = 4902,800066 \text{ км}^3\text{с}^{-2}$; для Солнца – $k_{\text{с}} = 132712440041,9394 \text{ км}^3\text{с}^{-2}$.

Притягивающий центр O в каждой точке пространства в системе координат $Oxyz$ создает силовое поле – центральное поле ньютоновского тяготения

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\gamma \frac{Mm}{r^3(x, y, z)} \mathbf{r}(x, y, z), \quad (1.2)$$

которое является потенциальным, а функция

$$U(r) = \frac{\gamma M}{r} \quad (1.3)$$

есть его потенциал. Физический смысл функции $U(r)$ состоит в том, что это – работа, которую совершает поле при перемещении единичной массы из бесконечности в точку $\mathbf{r}(x, y, z)$. При этом величину $-U(r)$ называют потенциальной энергией поля в этой точке. То же самое имеет место и в случае притягивающего тела в виде шара со сферическим распределением плотности, для которого выражения (1.2) и (1.3) справедливы вне объема шара.

1.2 Первые интегралы задачи двух тел

1.2.1 Интеграл площадей

Дифференциальное уравнение (1.1) описывает движение точки P в подвижной системе координат $Oxyz$, то есть движение точки P относительно неподвижного притягивающего центра O под действием центральной силы, равной $-k\mathbf{r}/r^3$. Это уравнение допускает квадратуры. Например, умножая (1.1) слева на \mathbf{r} векторно, получим

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

С учетом $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ тогда имеет

место $\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = 0$, то есть отсюда получим следующее соотношение,

называемое *интегралом площадей* [1, 3 – 6]:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{v} – вектор скорости точки P относительно точки O , \mathbf{c} – векторная константа интеграла площадей или, соответственно, постоянных интегрирования: $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Проекции вектора \mathbf{c} на оси системы координат $Oxyz$ определяются по формулам

$$c_x = y\dot{z} - \dot{y}z, \quad c_y = z\dot{x} - \dot{z}x, \quad c_z = x\dot{y} - \dot{x}y, \quad (1.5)$$

в которых правые части вычисляются для любого (например, для начального) момента времени.

Умножая (1.4) скалярно на \mathbf{r} , получим

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

то есть в любой момент времени радиус-вектор \mathbf{r} ортогонален вектору \mathbf{c} и, стало быть, тогда во все время движения точки P он будет лежать в одной и той же фиксированной плоскости, нормалью которой является орт \mathbf{c}/c . Уравнение этой плоскости в координатной форме в системе $Oxyz$ имеет вид

$$xc_x + yc_y + zc_z = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, траектория движения точки P является плоской кривой, которую в небесной механике обычно называют орбитой. Плоскость орбиты (1.6) однозначно определяется вектором \mathbf{c} или, что то же самое, начальным положением \mathbf{r}_0 и скоростью \mathbf{v}_0 точки P относительно точки O , поскольку согласно (1.4) $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{c}$. При этом движение точки P в этой плоскости происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{c} . Очевидно, что в случае $c_x = c_y = c_z = 0$ движение точки P происходит по прямой, проходящей через точку O .

Интеграл площадей (1.4) является следствием из теоремы об изменении кинетического момента или момента количества движения точки P относительно точки O [6], поскольку для случая центрального поля ньютоновского тяготения ее момент количества движения будет оставаться постоянным во все время движения.

Выясним физический смысл интеграла площадей (1.4), для чего введем систему координат $O\xi\eta\zeta$, совместив плоскость $O\xi\eta$ с плоскостью орбиты (1.6). Тогда $c_\xi = c_\eta = 0$, $c_\zeta = c = |\mathbf{c}|$. Если радиус-вектор \mathbf{r} составляет с осью $O\xi$ угол θ , то имеем:

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad \zeta = 0;$$

$$\dot{\xi} = \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta, \quad \dot{\eta} = \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta, \quad \dot{\zeta} = 0.$$

С учетом этих соотношений из выражения для $c = c_\zeta = \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}$ получим полярную форму записи для интеграла площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c. \quad (1.7)$$

Поскольку за сколь угодно малое Δt радиус-вектор \mathbf{r} изменит свое положение и составит с осью $O\xi$ угол $\theta + \Delta\theta$, постольку с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $\Delta\theta$ площадь соответствующего криволинейного треугольника, заметаемого радиус-вектором \mathbf{r} , будет равна

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

или при $\Delta t \rightarrow 0$ (и, соответственно, при $\Delta\theta \rightarrow 0$) получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

В механике производная dS/dt называется *секторной скоростью* [6], для которой с учетом (1.7) получаем выражение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} c. \quad (1.8)$$

Таким образом, секторная скорость точки P будет постоянной, что и определяет физический смысл интеграла площадей (1.7), а именно, радиус-вектор \mathbf{r} за одинаковые промежутки времени будет замечать одинаковые площади.

1.2.2 Интеграл энергии

Умножая уравнения движения (1.1) скалярно на \mathbf{r} и учитывая, что $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, получим следующее соотношение:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Поскольку $2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{dv^2}{dt}$, постольку левая часть этого соотношения будет равна $\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$. Далее, аналогичным образом для скалярного произведения в правой части этого же соотношения получим $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = r \frac{dr}{dt}$. Поэтому в результате вид указанного выше соотношения будет таков:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

или, после очевидного преобразования правой части, окончательно получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{r} \right).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{v^2}{2} - \frac{k}{r} = \frac{h}{2}, \quad (1.9)$$

где h – постоянная интегрирования.

Таким образом, в задаче двух тел существует еще один интеграл, который называется *интегралом энергии*.

Умножив соотношение (1.9) на массу точки P , то есть на m , получим

$$\frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mk}{r} \right) = \frac{mh}{2},$$

где $mv^2/2$ – кинетическая энергия точки P (в относительном движении вокруг притягивающего центра, mk/r – ее потенциальная энергия (с учетом (1.3) и $k = \gamma M$ при $m \ll M$) и, соответственно, постоянную интегрирования h в (1.9), называют также называют постоянной энергии, так как величина $mh/2$ равна полной энергии точки P [1, 6], которая согласно (1.9) в течение всего времени движения точки P остается постоянной. Постоянную энергии можно найти из каких-либо начальных условий. Например, пусть известны в момент t_0 расстояние точки P от притягивающего центра O – $r_0 = |\mathbf{r}(t_0)|$, а также ее скорость $v_0 = |\mathbf{v}(t_0)|$. Тогда из (1.9) получим

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

Отметим, что из (1.9) видно, что при удалении точки P от точки O ее скорость уменьшается и наоборот. Соответственно, если $h \geq 0$, то при $r_0 \rightarrow \infty$ имеет место: $v^2 \rightarrow v_\infty^2 = h$.

1.2.3 Интеграл Лапласа

Умножим уравнения движения (1.1) слева на векторную константу интеграла площадей (1.4):

$$\mathbf{c} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.10)$$

Очевидно, что $\mathbf{c} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\mathbf{c} \times \mathbf{v})$. Соответственно, в правой части

этого же соотношения с учетом $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ будет иметь место:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}),$$

или с учетом $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ тогда получим

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = r(\dot{\mathbf{r}}r - \mathbf{r}\dot{r}) = r^3 \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = r^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Таким образом, соотношение (1.10) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

а отсюда следует, что

$$\mathbf{c} \times \mathbf{v} + k \frac{\mathbf{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}. \quad (1.11)$$

Полученное соотношение (1.11) – *интеграл Лапласа*, а вектор $\boldsymbol{\lambda}$ – *вектор Лапласа*. Знак минус в интеграле (1.11) введен для удобства его дальнейшего использования.

Очевидно, что из (1.11) следует

$$\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0,$$

то есть вектор Лапласа лежит в плоскости орбиты точки P .

Исходя из (1.11), можно получить для дальнейшего одно соотношение, устанавливающее связь между модулями вектора Лапласа – $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$ и векторной константой интеграла площадей –

$c = |\mathbf{c}|$, постоянной энергии – h и параметром – k . С учетом ортогональности векторов \mathbf{v} и \mathbf{c} из (1.11) получим

$$\lambda^2 = c^2 v^2 + k^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \frac{2k}{r} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}).$$

Поскольку $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - c^2$, то с учетом (1.9) получим

$$\lambda^2 = k^2 + hc^2. \quad (1.12)$$

1.3 Уравнение орбиты спутника и компоненты его скорости

1.3.1 Уравнение орбиты спутника

Исходя из интеграла площадей (1.4) и интеграла Лапласа (1.1) можно получить уравнение орбиты спутника – точки P в ее движении вокруг притягивающего центра O [1, 6].

Отметим сначала случай $\mathbf{c} = 0$, когда из (1.11) следует

$$\mathbf{r} = -\frac{\lambda}{k} \mathbf{r},$$

то есть траектория движения точки P является прямолинейной орбитой.

Пусть теперь $\mathbf{c} \neq 0$. Умножая тогда обе части интеграла Лапласа (1.11) скалярно на \mathbf{r} , получим

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) + k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} = -\mathbf{r} \cdot \lambda$$

или с учетом $\mathbf{r} \cdot \lambda = r\lambda \cos \vartheta$, где ϑ – угол между векторами \mathbf{r} и λ , который есть угол *истинной аномалии* [1, 3 – 6], а также с учетом (1.4) и $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = -c^2$, соответственно получим

$$r(k + \lambda \cos \vartheta) = c^2.$$

Так как здесь по условию $c \neq 0$, то и $k + \lambda \cos \vartheta > 0$. Стало быть, тогда имеет место

$$r = \frac{c^2 / k}{1 + \frac{\lambda}{k} \cos \vartheta}.$$

Обозначив

$$p = \frac{c^2}{k}, \quad e = \frac{\lambda}{k}, \quad (1.13)$$

получим уравнение орбиты точки P в следующем виде:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (1.14)$$

Как известно из аналитической геометрии соотношение (1.14) является уравнением конического сечения в полярных координатах, в котором p – его фокальный параметр, а e – эксцентриситет. В зависимости от значения e орбита точки P будет эллипсом, если $0 < e < 1$ (при $e = 0$ – окружностью), либо параболой при $e = 1$, либо гиперболой при $e > 1$. Так как по определению $e = \lambda / k$, то, учитывая соотношение (1.12) и зная значения k , c и h , можно вычислить эксцентриситет орбиты точки P по формуле

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}$$

и ее фокальный параметр p по указанному выше соотношению: $p = c^2 / k$. То есть значения e и p (1.13) будут определять как форму орбиты точки P относительно притягивающего центра O ,

расположенного в одном из ее фокусов, так и ее же размеры. При этом вектор Лапласа λ задает положение оси симметрии орбиты – *линии апсид* – и будет направлен (с учетом знака в (1.11)) из точки O в ближайшую точку орбиты, получаемую из (1.14) при $\vartheta=0$. Эта точка называется перицентром орбиты, расстояние до которого от O будет равно

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e}.$$

В случае эллиптической орбиты, когда $0 < e < 1$, существует точка, которая наиболее удалена от притягивающего центра O . Эта точка называется апоцентром орбиты и расстояние до нее от точки O будет равно

$$r_{\alpha} = \frac{p}{1-e}.$$

Перицентр и апоцентр орбиты ИСЗ называются перигеем и апогеем, а перицентр и апоцентр орбиты спутника Солнца – перигелием и афелием. Для планет Солнечной системы и их некоторых крупных спутников аналогичным образом вводятся соответствующие названия перицентров и апоцентров их орбит.

Полусумма перицентра и апоцентра будет равна большой полуоси орбиты

$$a = \frac{1}{2}(r_{\pi} + r_{\alpha}).$$

Если обозначить через b малую полуось орбиты, то $d^2 = a^2 - b^2$, где d – расстояние между фокусами и центром орбиты (эллипса). Форму и размеры эллиптической орбиты можно определить с помощью какой-либо пары параметров: p, e, a, b ,

d , r_π , r_α и т.п., в том числе с использованием выше приведенных и следующих соотношений:

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad p = b^2 / a, \quad p = a(1-e^2).$$

1.3.2 Компоненты скорости спутника

Если известны форма и размеры (не прямолинейной) орбиты, а также гравитационный параметр притягивающего центра, то для заданного значения истинной аномалии ϑ можно найти компоненты вектора скорости спутника \mathbf{v} . Для этого разложим этот вектор следующим образом:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_n,$$

где \mathbf{v}_r – радиальная компонента, \mathbf{v}_n – поперечная (трансверсальная) компонента, величины которых определяются так [6]:

$$v_r = \dot{r}; \quad v_n = r\dot{\vartheta}.$$

Привлекая соотношения (1.7) и (1.14), тогда получим

$$v_r = \frac{pe \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \frac{c}{r^2}, \quad v_n = \frac{c}{r},$$

а с учетом (1.13), (1.14) отсюда следует

$$v_r = \sqrt{\frac{k}{p}} e \sin \vartheta = \frac{c}{p} e \sin \vartheta, \quad (1.15)$$

$$v_n = \sqrt{\frac{k}{p}} (1 + e \cos \vartheta) = \frac{c}{p} (1 + e \cos \vartheta). \quad (1.16)$$

Соответственно, абсолютная величина скорости спутника будет равна

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_n^2} = \sqrt{\frac{k}{p}(1 + e^2 + 2e \cos \vartheta)}. \quad (1.17)$$

Исходя из соотношений (1.14) – (1.16), по значениям r , v_r и v_n в какой-либо момент времени (или, что то же самое, для какого-либо значения истинной аномалии) можно определить p и e , то есть в конечном счете форму и размеры орбиты.

Согласно (1.17) для эллиптической орбиты спутника его скорости в перигентре v_π и апоцентре v_α будут равны:

$$v_\pi = \sqrt{\frac{k}{p}(1 + e)}, \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{k}{p}(1 - e)}.$$

Для r_π , r_α , v_π , v_α имеет место т.н. «правило рычага» [1]:

$$v_\alpha / v_\pi = r_\pi / r_\alpha.$$

1.3.3 Законы Кеплера

Иоганн Кеплер (1572–1630), будучи сторонником учения Коперника о гелиоцентрической системе мира, поставил задачу усовершенствовать эту систему по результатам наблюдения Марса, которые на протяжении двадцати лет проводил Тихо Браге (1546 – 1601) и после в течение нескольких лет – Кеплер. После трудоемких вычислений на основе этих наблюдений им были опубликованы между 1609 и 1619 годами установленные эмпирические соотношения для планетных движений. Таким образом Кеплер решил поставленную задачу и развил учение Коперника, открыв законы планетных движений в Солнечной системе. В рамках классической механики

законы Кеплера есть решение задачи двух тел в случае пренебрежимо малой массы планеты – m в сравнении с массой Солнца – M , то есть когда $m \ll M$ и описывается идеализированная гелиоцентрическая орбита планеты. В настоящее время законы Кеплера формулируются следующим образом.

I. Все планеты движутся по эллипсам, в одном фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце.

II. Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равновеликие площади.

III. Квадраты времен обращения двух планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

В общем случае первый закон Кеплера следует из уравнения орбиты спутника (1.14), когда $0 \leq e < 1$. Более того, (1.14) описывает при $e \geq 1$ также параболические и гиперболические орбиты спутника. Соответственно, второй закон Кеплера есть следствие из интеграла площадей (1.4) и (1.7) в виде (1.8).

Получим далее третий закон Кеплера исходя из решения задачи двух тел [6]. Итак, пусть орбита точки P – эллипс (1.14) с полуосями: $a = p / (1 - e^2)$; $b = p / \sqrt{1 - e^2}$. Очевидно, что за время, равное периоду ее обращения по орбите, радиус-вектор точки P заметет всю площадь соответствующего эллипса, равную πab . Поэтому с учетом (1.8) тогда имеет место:

$$\pi ab = \frac{1}{2} cT . \quad (1.18)$$

Поскольку из (1.13) и из приведенных выше выражений для a и b следует, что в (1.18) $c = \sqrt{pk}$ и $p = b^2 / a$, то есть отсюда получим

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k}} . \quad (1.19)$$

Отметим, что в (1.19) в общем случае $k = \gamma(M + m)$, где M – масса притягивающего центра, то есть точки O , а m – масса точки P .

В (1.19) $n = 2\pi/T$ – средняя угловая скорость вращения радиус-вектора точки P , которую называют в астрономии средним движением; соответственно, из (1.19) следует $n = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}$.

Пусть теперь рассматривается пара точек P_1 и P_2 , массы которых равны, соответственно, m_1 и m_2 . Если их взаимным притяжением пренебречь и если их орбиты при этом являются эллиптическими, то периоды обращения этих точек вокруг притягивающего центра будут равны

$$T_1 = \frac{2\pi a_1^{3/2}}{\sqrt{\gamma(M + m_1)}}, T_2 = \frac{2\pi a_2^{3/2}}{\sqrt{\gamma(M + m_2)}}.$$

Тогда отсюда следует такое соотношение:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (1.20)$$

которое при $m_1 \ll M$ и $m_2 \ll M$ переходит в приближенное равенство:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (1.21)$$

и выражает собой третий закон Кеплера.

Соотношение (1.21), то есть для любой пары планет (и, стало быть, для всех планет Солнечной системы), можно также переписать с учетом (1.19) в следующем виде:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M},$$

где $M = M_{\text{С}}$ – масса Солнца.

Соотношение (1.20) – третий обобщенный закон Кеплера, с помощью которого определяются массы планет по движению их спутников, а также массы двойных звезд – по элементам их орбит.

1.4 Параметры кеплеровой орбиты ИСЗ

1.4.1 Элементы орбиты спутника

Решение дифференциальных уравнений (1.1) движения точки P вокруг притягивающего центра O зависит от шести произвольных постоянных, которые определяются начальными условиями: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$; $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$. В общем случае эти постоянные можно вводить разными способами лишь бы положение точки P в пространстве, например ИСЗ, было бы определено вполне однозначно. Действительно, движение точки P вокруг некоторого притягивающего центра O будет вполне определено, если известна плоскость Π , в которой лежит ее орбита, размеры и форма этой орбиты, ее ориентация в плоскости Π и, кроме того, известен момент времени, когда точка P находится в какой-либо определенной точке орбиты. Рассматривая далее точку P в виде некоторого спутника для соответствующего притягивающего центра, будем величины, которые вполне определяют размеры и положение орбиты спутника в пространстве, называть элементами его орбиты [1 – 6].

Очевидно, что в качестве элементов орбиты спутника, определяющих ее размеры и форму, можно выбрать параметры (1.13), то есть p – фокальный параметр и e – эксцентриситет орбиты. Ориентировку орбиты в плоскости Π можно задавать вектором Лапласа (1.11) – $\boldsymbol{\lambda}$ или, что то же самое, положением линии апсид.

Поскольку уравнение плоскости орбиты спутника в некоторой системе $Oxyz$ имеет вид (1.6), то она пересекается с координатной плоскостью Oxy (при $z = 0$) по прямой

$$xc_x + yc_y = 0,$$

которая называется *линией узлов*; на рис. 2 обозначена как ON . Угол между осью Ox и линией узлов ON называется *долготой восходящего узла* и обозначается через Ω . Соответственно, угол

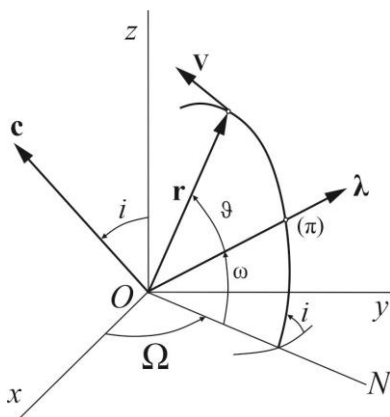


Рис. 2 – Кеплеровы элементы орбиты спутника

между плоскостью $Oxyz$ и плоскостью Π называется *углом наклона* плоскости орбиты спутника (Π к координатной плоскости $Oxyz$); на рис. 2 обозначен как угол i . Ориентация линии апсид орбиты или вектора Лапласа λ в плоскости Π задается аргументом перицентра орбиты – ω (см. рис. 2). Кроме указанных элементов орбиты спутника необходимо еще указать и шестой элемент, с помощью которого задается положение спутника на орбите в некоторый момент времени. Обычно в качестве такого элемента выбирается момент времени прохождения спутника че-

рез перицентр (π) орбиты – τ_0 . Поскольку положение спутника на орбите можно задавать истинной аномалией – ϑ , постольку момент τ_0 будет соответствовать $\vartheta = 0$.

Перечисленный выше набор параметров: p , e , Ω , i , ω и τ_0 , носит название кеплеровых элементов орбиты спутника, которые однозначно определяются начальными условиями для дифференциальных уравнений его движения (1.1) в задаче двух тел [1, 3 – 5, 8, 9].

В связи с введенными выше названиями кеплеровых элементов орбиты спутника отметим, что в небесной механике принято называть: долготами, углы которые отсчитываются от оси Ox соответствующей прямоугольной системы координат; аргументами – от линии узла ON ; аномалиями – от перицентра. Например, в практике часто вместо истинной аномалии ϑ для задания текущего положения спутника на орбите используется следующая переменная:

$$u = \vartheta + \omega, \quad (1.22)$$

отсчитываемая от линии узлов ON и называемая, соответственно, аргументом широты [1, 5].

При моделировании движения ИСЗ в качестве системы координат $Oxyz$ используются прямоугольные геоцентрические системы координат, координатная плоскость Oxy которых есть экваториальная плоскость Земли [3, 5]. Соответственно, к ним относятся Инерциальная система координат (ИСК) и Гринвичская система координат (ГСК), определения которых приведены ниже.

ИСК – прямоугольная система координат O_3XYZ с началом в центре масс Земли, задаваемая так: ось O_3X направлена в истинную точку весеннего равноденствия Υ в текущую эпоху; ось O_3Z

направлена по мгновенной оси вращения Земли в сторону Северного полюса мира; ось O_3Y дополняет систему до правой.

ИСК также называется [3, 5] экваториальной (абсолютной, звездной) системой координат.

ГСК – прямоугольная система координат O_3xuz также с началом в центре масс Земли, для которой ось O_3z направлена по мгновенной оси вращения Земли в сторону Северного полюса мира; ось O_3x направлена в точку пересечения гринвичского (нулевого) меридиана с экватором, а ось O_3y лежит в экваториальной плоскости Земли и дополняет систему до правой.

Очевидно, что оси O_3Z ИСК и O_3z ГСК совпадают и ГСК относительно ИСК вращается с угловой скоростью Земли – ω_3 . Соответственно текущий угол между осями O_3X и O_3x равен

$$\chi = S_0 + \omega_3(t - t_0), \quad (1.23)$$

где S_0 – звездное время в среднюю гринвичскую полночь для заданной даты [3, 5]; t и t_0 – среднее солнечное время; $t_0 = 0$ – если текущее время гринвичское, $t_0 = 3^h$ – если текущее время московское.

1.4.2 Определение положения и скорости спутника по элементам его орбиты

Пусть известны кеплеровы элементы орбиты спутника p , e , Ω , i , ω и его положение на орбите в некоторый момент времени t_0 , заданное значением $\vartheta_0 = \vartheta(t_0)$. Требуется найти компоненты радиус-вектора \mathbf{R} и вектора скорости спутника \mathbf{V} на указанный момент времени в ИСК, то есть

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z), \quad \mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z). \quad (1.24)$$

Введем с этой целью в рассмотрение вспомогательную систему координат $O_3\xi\eta\zeta$ с началом в точке O_3 , а ее оси направлены так: $O_3\xi$ которой направлена по линии апсид или, что тоже, по вектору Лапласа λ (1.11); ось $O_3\zeta$ направлена по вектору интеграла площадей \mathbf{c} (1.4), а ось $O_3\eta$ дополняет систему до правой, то есть будет направлена по линии узлов ON противоположно восходящему узлу орбиты спутника.

Очевидно, что соответствующие оси ИСК – O_3XYZ и введенной системы $O_3\xi\eta\zeta$ можно совместить посредством трех поворотов, а именно (см. рис. 2): первый поворот – вокруг оси O_3Z на угол, равный долготе восходящего узла Ω , то есть до совмещения оси O_3X с линией узлов ON ; второй поворот – вокруг нового положения оси O_3X – O_3X' до совмещения оси O_3Z с осью $O_3\zeta$, направленной по вектору интеграла площадей \mathbf{c} , то есть на угол наклона плоскости орбиты спутника i ; третий поворот – вокруг новой оси O_3Z , то есть вокруг оси $O_3Z' = O_3\zeta$, на угол ω до совмещения оси O_3X' с линией апсид.

Следовательно, оси вспомогательной системы координат $O_3\xi\eta\zeta$ задаются так: $\mathbf{e}_\xi = \lambda/|\lambda|$; $\mathbf{e}_\eta = \mathbf{n} \times \lambda/|\lambda|$; $\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$. Соответственно, указанные выше повороты O_3XYZ до совмещения с $O_3\xi\eta\zeta$ задаются элементарными матрицами вращения [7]:

$$\mathbf{C}_3(\Omega) = \begin{bmatrix} \text{Cos}\Omega & \text{Sin}\Omega & 0 \\ -\text{Sin}\Omega & \text{Cos}\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}i & \text{Sin}i \\ 0 & -\text{Sin}i & \text{Cos}i \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_3(\omega) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \omega & \text{Sin } \omega & 0 \\ -\text{Sin } \omega & \text{Cos } \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и, стало быть, матрица перехода от системы O_3XYZ к $O_3\xi\eta\zeta$ будет представлена произведением $\mathbf{C}_{O_3XYZ}^{O_3\xi\eta\zeta} = \mathbf{C}_3(\omega)\mathbf{C}_1(i)\mathbf{C}_3(\Omega)$ [7]:

$$\mathbf{C}_{O_3XYZ}^{O_3\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} (\text{Cos } \omega \text{ Cos } \Omega - & (\text{Cos } \omega \text{ Sin } \Omega + & \text{Sin } \omega \text{ Sin } i \\ -\text{Sin } \omega \text{ Cos } i \text{ Sin } \Omega) & +\text{Sin } \omega \text{ Cos } i \text{ Cos } \Omega) & \\ (-\text{Sin } \omega \text{ Cos } \Omega - & (-\text{Sin } \omega \text{ Sin } \Omega + & \text{Cos } \omega \text{ Sin } i \\ -\text{Cos } \omega \text{ Cos } i \text{ Sin } \Omega) & +\text{Cos } \omega \text{ Cos } i \text{ Cos } \Omega) & \\ \text{Sin } i \text{ Sin } \Omega & -\text{Sin } i \text{ Cos } \Omega & \text{Cos } i \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

С учетом (1.25) из (1.24) получим [5]

$$\mathbf{r}' = \mathbf{C}_{O_3XYZ}^{O_3\xi\eta\zeta} \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{C}_{O_3XYZ}^{O_3\xi\eta\zeta} \mathbf{V}, \quad (1.26)$$

где

$$\mathbf{r}' = r_\xi \mathbf{e}_\xi + r_\eta \mathbf{e}_\eta + r_\zeta \mathbf{e}_\zeta, \quad \mathbf{v}' = v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta + v_\zeta \mathbf{e}_\zeta.$$

Во-первых, здесь с учетом (1.14)

$$\mathbf{r}' = (r_0 \text{ Cos } \vartheta_0, r_0 \text{ Sin } \vartheta_0, 0), \quad (1.27)$$

где $r_0 = |\mathbf{R}(t_0)| = |\mathbf{r}'(t_0)|$, вычисленное при $\vartheta = \vartheta_0$.

Во-вторых, с учетом вычисляемых при $\vartheta = \vartheta_0$ радиальной компоненты скорости v_{r0} (1.15) и v_{n0} (1.16) имеет место:

$$\mathbf{v}' = (v_{r0} \text{ Cos } \vartheta_0 - v_{n0} \text{ Sin } \vartheta_0, v_{r0} \text{ Sin } \vartheta_0 + v_{n0} \text{ Cos } \vartheta_0, 0), \quad (1.28)$$

Матрица перехода (1.25) является ортогональной, поэтому для нее имеет место следующее свойство [7]:

$$\left(\mathbf{C}_{O_3XYZ}^{O_3\xi\eta\zeta}\right)^{-1} = \left(\mathbf{C}_{O_3XYZ}^{O_3\xi\eta\zeta}\right)^T = \mathbf{C}_{O_3\xi\eta\zeta}^{O_3XYZ}.$$

Исходя из этого свойства, соотношения (1.26) можно переписать так:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}_{O_3\xi\eta\zeta}^{O_3XYZ} \mathbf{r}', \quad \mathbf{V} = \mathbf{C}_{O_3\xi\eta\zeta}^{O_3XYZ} \mathbf{v}', \quad (1.29)$$

то есть с учетом (1.25), (1.27) и (1.28) решить поставленную в начале данного подраздела задачу, то есть найти компоненты векторов (1.24) по известным кеплеровым элементам орбиты спутника p , e , Ω , i , ω и ϑ_0 .

Итак, из первого соотношения (1.29) с учетом (1.27) тогда получим [5]

$$\begin{aligned} X &= r_0 (\cos \Omega \cos u_0 - \sin \Omega \sin u_0 \cos i); \\ Y &= r_0 (\sin \Omega \cos u_0 + \cos \Omega \sin u_0 \cos i); \\ Z &= r_0 \sin u_0 \sin i, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $u_0 = \vartheta_0 + \omega$ согласно (1.22).

Соответственно из второго соотношения (1.29) с учетом (1.28) получим [5]

$$\begin{aligned} V_X &= v_{r_0} (\cos \Omega \cos u_0 - \sin \Omega \sin u_0 \cos i) - \\ &\quad - v_{n_0} (\cos \Omega \sin u_0 + \sin \Omega \cos u_0 \cos i); \\ V_Y &= v_{r_0} (\sin \Omega \cos u_0 + \cos \Omega \sin u_0 \cos i) - \\ &\quad - v_{n_0} (\sin \Omega \sin u_0 - \cos \Omega \cos u_0 \cos i); \\ V_Z &= v_{r_0} \sin u_0 \sin i + v_{n_0} \cos u_0 \sin i. \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.4.3 Определение элементов орбиты спутника по его положению и скорости в инерциальной и гринвичской системах координат

1.4.3.1 Рассмотрим задачу, которая является обратной к задаче, рассмотренной выше в п. 1.4.2, а именно: пусть известны компоненты радиус-вектора \mathbf{R} и вектора скорости спутника \mathbf{V} на некоторый момент времени t_0 в ИСК в виде (1.24), требуется найти кеплеровы элементы орбиты спутника p , e , Ω , i , ω и его положение на орбите, заданное значением $\vartheta_0 = \vartheta(t_0)$ [4]. Так как Ω , i , ω являются искомыми параметрами, то воспользоваться для решения этой задачи соотношениями (1.26) нельзя, поскольку и матрица перехода (1.25) тогда не определена.

Поэтому вначале найдем первые интегралы (1.4), (1.9) и (1.11), исходя из заданных значений компонент в (1.24).

Итак, во-первых, вычислим (1.4) $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$:

$$c_x = YV_z - ZV_y; \quad c_y = ZV_x - XV_z; \quad c_z = XV_y - YV_x. \quad (1.32)$$

Во-вторых, вычислив $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ и $v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, а также зная гравитационный параметр притягивающего центра k , найдем по формуле (1.9) постоянную энергии:

$$h = v^2 - \frac{2k}{r}. \quad (1.33)$$

Наконец, найдя вначале с учетом (1.32) векторное произведение

$$\mathbf{c} \times \mathbf{v} = (c_y V_z - c_z V_y, c_z V_x - c_x V_z, c_x V_y - c_y V_x),$$

вычислим компоненты вектора Лапласа по формуле (1.11):

$$\begin{aligned}\lambda_x &= c_z V_y - c_y V_z - \frac{k}{r} X; \quad \lambda_y = c_x V_z - c_z V_x - \frac{k}{r} Y; \\ \lambda_z &= c_y V_x - c_x V_y - \frac{k}{r} Z.\end{aligned}\quad (1.34)$$

Поскольку значение постоянной энергии (1.33) определяет тип орбиты спутника и при $h < 0$ она является эллиптической, то далее, исходя из (1.32) и (1.34), будут определяться значения кеплеровых элементов только для эллиптических орбит. Для параболических и гиперболических орбит спутников, то есть при $h \geq 0$, соответствующие формулы приведены в [1, 3 – 5].

Итак, с учетом полученных значений компонент \mathbf{c} (1.32) и λ (1.34), можно вычислить значения

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}, \quad \lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2},$$

а с их помощью из (1.13) найти p и e , то есть размеры и форму орбиты спутника, а также $c = \sqrt{kp}$ и $a = p / (1 - e^2)$.

Положение плоскости орбиты спутника в пространстве в ИСК задаются долготой восходящего узла Ω и наклоном орбиты i к плоскости O_3XY , которые определяются так [3, 5]:

$$i = \arccos \frac{c_z}{c} = \arccos \frac{XV_y - YV_x}{\sqrt{kp}}, \quad 0 \leq i \leq \pi; \quad (1.35)$$

$$\left. \begin{aligned}\sin \Omega &= \frac{c_x}{c \sin i} = \frac{YV_z - ZV_y}{\sqrt{kp} \sin i}; \\ \varepsilon \cos \Omega &= -c_y = XV_z - ZV_x, \quad 0 < \varepsilon < \infty\end{aligned}\right\}, \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi. \quad (1.36)$$

Соответственно, угол между линией восходящего узла и линией апсид орбиты, то есть аргумент ее перицентра $\omega = u - \vartheta$ согласно (1.22), будет вычисляться так [3, 5]:

$$\left. \begin{aligned} \sin u &= \frac{Y \cos \Omega - X \sin \Omega}{r \cos i}; \\ \varepsilon \cos u &= X \cos \Omega + Y \sin \Omega, \quad 0 < \varepsilon < \infty \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi; \quad (1.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta &= \sqrt{\frac{p}{k}} \frac{XV_x + YV_y + ZV_z}{er}; \\ \varepsilon \cos \vartheta &= p - r, \quad 0 < \varepsilon < \infty \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (1.38)$$

Если требуется найти не только значение ϑ (1.38), но и время прохождения через перигентр – τ , то его определяют по формуле (здесь для эллиптических орбит) [5]:

$$\tau = t - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}} (E - e \sin E),$$

где E – эксцентриская аномалия [1, 3–5], вычисляемая для найденного по (1.38) значения ϑ так:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (1.39)$$

1.4.3.2 Как известно [1, 3–5] зависимости от начальных условий в ИСК или от значений постоянных интегрирования – c , h , λ – имеются следующие типы орбит:

а) эллиптическая орбита:

$$c \neq 0; \quad 0 < e < 1; \quad h < 0; \quad V_0 < \sqrt{\frac{2k}{r_0}}; \quad \lambda < k,$$

где и далее с учетом обозначений (1.24) $r_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$,

$$V_0 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

б) круговая орбита:

$$c \neq 0; e = 0; h = -\frac{k}{r_0} < 0; V_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0}}; \lambda = 0;$$

в) параболическая орбита:

$$c \neq 0; e = 1; h = 0; V_0 = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}; \lambda = k;$$

г) гиперболическая орбита:

$$c \neq 0; e > 1; h > 0; V_0 > \sqrt{\frac{2k}{r_0}}; \lambda > k;$$

д) прямолинейная орбита [3]: $c = 0$. При этом: если $h < 0$, то движение происходит по отрезку прямой; если $h = 0$ – вдоль луча; если $h > 0$ – вдоль всей прямой. То есть при $h < 0$ движение происходит в ограниченном пространстве, а при $h \geq 0$ имеет место неограниченное в пространстве движение.

Исключая далее из рассмотрения прямолинейные орбиты, вначале отметим, что особенностью круговой орбиты является то, что у нее отсутствует перицентр, то есть значение аргумента перицентра ω не определено. Если же $e \approx 0$, то это случай так называемой почти или околосредней орбиты [5, 8]. Очевидно, что при малых возмущениях начальных условий в виде (1.24), для которых получалась круговая орбита, такая орбита будет искажаться. При этом вместо элементов орбиты e и ω вводятся в рассмотрение следующие параметры [5]:

$$\lambda_1 = e \sin \omega; \lambda_2 = e \cos \omega. \quad (1.40)$$

При рассмотрении (1.35) нетрудно установить, что при $c_z = \pm c$ имеет место, соответственно, для $i = 0$ или $i = \pi$, когда плоскость орбиты совмещается с координатной плоскостью O_3XY

– экваториальной плоскостью Земли. Очевидно, что в этом случае возникает неопределенность в значении элемента орбиты Ω . Тем не менее при $e > 0$ возможно использование элемента $\Omega + \omega$, который в астрономии называется долгой периодом перигея в орбите.

1.4.3.3 В том случае, если рассматривается задача, как и в п.1.4.3.1, но при заданных радиус-векторе $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и векторе скорости спутника $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ в ГСК на некоторый момент времени t_0 , и требуется найти кеплеровы элементы орбиты спутника, то здесь достаточно решить вспомогательную задачу перехода от параметров движения спутника в ГСК к параметрам в ИСК, задаваемых в виде (1.24).

Итак, по определению (см. стр. 29) ГСК относительно ИСК вращается с угловой скоростью Земли ω_3 вокруг оси O_3z , а соответственно текущий угол между осями O_3X и O_3x будет равен согласно (1.23), то есть $\chi = S_0 + \omega_3(t - t_0)$. Следовательно, матрица перехода (для векторов) от системы O_3xyz к системе O_3XYZ будет иметь вид

$$\mathbf{C}_3(\chi) = \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то есть здесь тогда получим $\mathbf{R} = \mathbf{C}_3(\chi)\mathbf{r}$ и, стало быть, имеет место:

$$X = x \cos \chi - y \sin \chi; \quad Y = x \sin \chi + y \cos \chi; \quad Z = z. \quad (1.41)$$

Так как скорость спутника \mathbf{v} – его скорость в относительном движении в ГСК, то в соответствии с теоремой о сложении скоростей (в сложном движении точки) [6] получим

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \omega_3 \times \mathbf{r}$$

или в координатной форме

$$V_X = v_x - \omega_3 y; V_Y = v_y + \omega_3 x; V_Z = v_z. \quad (1.42)$$

Таким образом, с преобразованием заданных в некоторый момент времени векторов $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, определяющих положение и скорость спутника в ГСК, по формулам (1.41) и (1.42) к векторам (1.24), определяющим его положение и скорость в ИСК, решение задачи, сформулированной в начале данного подраздела, сводится к решению задачи, рассмотренной ранее в подразделе 1.4.3.2. Очевидно, что для решения задачи, которая аналогична рассмотренной в подразделе 1.4.2 и связана с определением (1.24), но для случая ГСК, следует использовать соотношения обратные к (1.41) и (1.42), то есть

$$x = X \cos \chi + Y \sin \chi; \quad y = X \sin \chi + Y \cos \chi; \quad z = Z; \quad (1.43)$$

$$v_x = V_X + \omega_3 (X \sin \chi + Y \cos \chi);$$

$$v_y = V_Y - \omega_3 (X \cos \chi + Y \sin \chi); \quad v_z = V_Z. \quad (1.44)$$

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

2.1 Уравнения возмущенного движения ИСЗ

В общем случае на движение любого спутника влияет не только притягивающий центр, но и другие факторы, которые также могут существенно влиять на траекторию спутника. К ним могут относиться:

- 1) притяжение к другим небесным телам, например, тяготение ИСЗ к Луне и Солнцу;
- 2) сопротивление верхних слоев атмосферы;
- 3) несферическое распределение масс центрального тела, например, сплюснутость Земли;
- 4) реактивные управляющие силы;
- 5) некоторые другие факторы, действующие на спутник (световое давление, электромагнитные силы и т.п.).

Равнодействующую всех учитываемых сил, действующих на спутник с массой $m \ll M$ (M – масса притягивающего тела), можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F} ,$$

где \mathbf{F}_0 – сила тяготения к притягивающему телу, которое здесь представлено в виде материальной точки, $\Delta\mathbf{F}$ – равнодействующая для остальных составляющих, которые обычно относят к воз-

мушающим силам. С учетом $\mathbf{F}_0 = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$ тогда уравнения движения спутника (1.1) можно переписать так:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} + \Delta \mathbf{F}$$

или

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r} + \Phi, \quad (2.1)$$

где Φ – возмущающее ускорение, а \mathbf{r} – радиус-вектор спутника в некоторой инерциальной системе координат; соответственно, для ИСЗ в ИСК – O_3XYZ (см. определение на стр. 27 – 28). Обычно $\Delta \mathbf{F}$ по модулю существенно меньше, чем \mathbf{F}_0 , исключая, быть может, управляющие воздействия в виде корректирующей тяги ракетных двигателей спутника.

Итак, если $\Phi \neq 0$ (и достаточно мало по модулю в сравнении с модулем \mathbf{F}_0), то можно считать, что в каждый момент времени t спутник находится на некоторой орбите, которая есть коническое сечение (то есть как в невозмущенном кеплеровом движении орбита либо эллиптическая, либо параболическая или гиперболическая), а именно, на той кеплеровой орбите, по которой спутник двигался бы в случае прекращения действия в тот же момент времени возмущающих сил, то есть когда $\Phi = 0$. Поэтому при $\Phi \neq 0$ в каждый момент времени с траекторией спутника в той точке, в которой он в этот момент времени находится, соприкасается соответствующая кеплерова орбита, которая непрерывно меняется и называется *оскулирующей орбитой* [1, 3 – 5, 8]. Элементы такой орбиты

$$p(t), e(t), \Omega(t), i(t), \omega(t), \tau(t) \quad (2.2)$$

также называются *оскулирующими элементами*. Если же они в виде соответствующих функций известны, то в любой момент времени можно определить положение и скорость спутника в пространстве в соответствии с решением задачи, которая была рассмотрена в подразделе 1.4.2.

Изменяя момент время t непрерывным образом, начиная с начального момента t_0 , тогда получим бесконечное множество невозмущенных движений спутника, отличных друг от друга, и единственное его возмущенное движение, которое совпадает в каждый момент t с соответствующим невозмущенным [4, 8, 9]. Таким образом, траектория возмущенного движения спутника является огибающей семейства кеплеровых или оскулирующих (соприкасающихся с ней) орбит и, стало быть, возмущенное (то есть истинное) движение можно рассматривать как непрерывно изменяющееся кеплерово движение с параметрами (2.2).

Возвращаясь к рассмотрению уравнения возмущенного движения спутника в ИСК, а именно, в O_3XYZ , перепишем (2.1) в координатной форме:

$$\frac{dX}{dt} = V_x; \quad \frac{dY}{dt} = V_y; \quad \frac{dZ}{dt} = V_z; \quad (2.3)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{k}{r^3} X + \Phi_x; \quad \frac{dV_y}{dt} = -\frac{k}{r^3} Y + \Phi_y; \quad \frac{dV_z}{dt} = -\frac{k}{r^3} Z + \Phi_z, \quad (2.4)$$

где использованы следующие обозначения: $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

$\mathbf{r} = (X, Y, Z)$; $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (V_x, V_y, V_z)$; $\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$.

Уравнения возмущенного движения ИСЗ, как правило, в связи с решением многих прикладных задач записывают в ГСК – O_3xyz (см. определение на стр. 28), которая по отношению к ИСК

является подвижной системой координат, а именно, она вращается с угловой скоростью Земли вокруг ее оси вращения – O_3z . Соответственно, положение и скорость ИСЗ в ГСК далее будем обозначать так: $\tilde{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ и $\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$, где производная \tilde{d}/dt является локальной производной (в ГСК) [6]. Воспользовавшись теоремами кинематики сложного движения точки (теоремы о сложении скоростей и Кориолиса) [6], можно с учетом следующих соотношений:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}}; \quad \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_3 \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2\boldsymbol{\omega}_3 \times \tilde{\mathbf{v}}.$$

переписать уравнения движения (2.3), (2.4) также в координатной форме. Соответственно вместо (2.3) и (2.4) тогда получим следующие уравнения возмущенного движения ИСЗ в ГСК:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z; \quad (2.5)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{r^3}x + \tilde{\Phi}_x - \omega_3^2 x + 2\omega_3 v_y;$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{r^3}y + \tilde{\Phi}_y + \omega_3^2 y - 2\omega_3 v_x; \quad (2.6)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{k}{r^3}z + \tilde{\Phi}_z.$$

где $\tilde{\Phi}_x, \tilde{\Phi}_y, \tilde{\Phi}_z$ – компоненты вектора $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_x, \tilde{\Phi}_y, \tilde{\Phi}_z)$ в ГСК, а производные суть локальные производные.

2.2 Уравнения возмущенного движения ИСЗ в оскулирующих элементах

2.2.1 Вспомогательные построения и соотношения

Для нахождения значений оскулирующих элементов (2.2) в текущие моменты оскуляций используются соответствующие дифференциальные уравнения, которые получают, к примеру, методом Лагранжа вариации произвольных постоянных [3, 4]. В отличие от излагаемого далее метода вывода таких уравнений в соответствии с [1] в [3, 8, 9] также рассматриваются и иные подходы к их построению. В любом случае вначале необходимо привести вспомогательные построения и соотношения.

Во-первых, введем в рассмотрение орбитальную систему координат (ОСК), которая является прямоугольной системой координат с началом в центре масс КА (точка C), задаваемая так: ось Cx_0 совпадает с направлением радиус-вектора центра масс КА; ось Cy_0 лежит в плоскости орбиты КА и направлена в сторону его полета, а ось Cz_0 дополняет систему до правой.

Орты, задающие оси ОСК, образуют орбитальный трехгранник – подвижный трехгранник $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$ и вычисляются так [10]:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}; \quad \mathbf{e}_\tau = \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_r, \quad \text{где } \mathbf{r} \text{ и } \mathbf{v} \text{ – радиус-вектор и абсо-}$$

лютная скорость центра масс КА или ИСЗ.

Перенося указанный трехгранник в притягивающий центр (здесь точка O_3 – центр Земли), получим подвижную систему координат O_{3ruz} , которая является вспомогательной системой координат (ВСК); ее координатная плоскость O_3ru совмещается с плоскостью орбиты. Текущее положение ИСЗ в такой системе координат (являющейся цилиндрической системой координат) задается модулем его радиус-вектора и аргументом широты u .

Проекции на оси системы координат O_3ruz указанного в (2.1) возмущающего ускорения Φ обозначим соответственно через S , T , W , то есть здесь $\Phi = (S, T, W)$. Если бы в какой-то момент времени t действие возмущающего ускорения на ИСЗ было бы прекращено, то он стал бы тогда далее двигаться по некоторой кеплеровой орбите с элементами, которые обозначим через Ω , i , p , e , ω , τ . При этом его положение и скорость определялись бы соотношениями (1.14) – (1.16), то есть так:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad (2.7)$$

где согласно (1.14) $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$;

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\tau\mathbf{e}_\tau, \quad (2.8)$$

где согласно (1.15) и (1.16):

$$v_r = \sqrt{\frac{k}{p}} e \sin \vartheta = \frac{c}{p} e \sin \vartheta; \quad v_\tau = \sqrt{\frac{k}{p}} (1 + e \cos \vartheta) = \frac{\sqrt{kp}}{r}.$$

В этих соотношениях элементы p , e остаются постоянными, а изменяется только ϑ – истинная аномалия.

В возмущенном же движении ИСЗ с течением времени непрерывно совершается переход от одной кеплеровой орбиты к другой и каждый раз его радиус-вектор и вектор скорости будут определяться по формулам (2.7), (2.8), естественно, и с учетом соотношений (1.14) – (1.16). Но в этом случае в этих формулах и p , e будут некоторыми функциями времени.

Очевидно, что в возмущенном движении ИСЗ будет иметь скорость, которая в момент t определяется так:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Но, с другой стороны, если бы в этот же момент времени t было бы прекращено действие возмущающего ускорения на ИСЗ, то он, имея ту же мгновенную скорость, стал бы двигаться по кеплеровой орбите со скоростью, определяемой формулой (2.8), то есть тогда было бы справедливо следующее равенство:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_r \mathbf{e}_r + v_\tau \mathbf{e}_\tau, \quad (2.9)$$

которое должно выполняться в каждый момент времени t , то есть это равенство является тождеством. Стало быть, тогда для него будет иметь место

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v_r \mathbf{e}_r + v_\tau \mathbf{e}_\tau).$$

Но из (2.1) следует

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r + \Phi.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{dt}(v_r \mathbf{e}_r + v_\tau \mathbf{e}_\tau) = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r + \Phi. \quad (2.10)$$

Соответственно, из (2.7) и (2.9) также получим

$$\frac{d(\mathbf{r}\mathbf{e}_r)}{dt} = v_r \mathbf{e}_r + v_\tau \mathbf{e}_\tau. \quad (2.11)$$

Полученные векторные равенства (2.10) и (2.11) являются дифференциальными уравнениями возмущенного движения ИСЗ [1]. Далее выразим входящие в эти равенства величины через оскулирующие элементы (2.2) и их первые производные, а также получим выражения для производных от оскулирующих элементов орбиты (2.2), которые будут представлять собой уравнения Ньютона–Лагранжа [1, 3, 4].

2.2.2 Вычисление производных $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$ и $\frac{du}{dt}$

Дифференцируя вначале левые части в уравнениях (2.10), (2.11), получим

$$v_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dv_r}{dt} \mathbf{e}_r + v_\tau \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} + \frac{dv_\tau}{dt} \mathbf{e}_\tau = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r + \Phi; \quad (2.12)$$

$$r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r = v_r \mathbf{e}_r + v_\tau \mathbf{e}_\tau. \quad (2.13)$$

Затем найдем выражения для производных ортов трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$, вектор мгновенной угловой скорости которого имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{e}_r + \omega_\tau \mathbf{e}_\tau + \omega_n \mathbf{e}_n,$$

но, с другой стороны, имеет место [6]:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r; \quad \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\tau; \quad \frac{d\mathbf{e}_n}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n.$$

Поэтому, учитывая выражение для $\boldsymbol{\omega}$, тогда получим

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = -\omega_\tau \mathbf{e}_n + \omega_n \mathbf{e}_\tau; \quad \frac{d\mathbf{e}_n}{dt} = \omega_r \mathbf{e}_n - \omega_n \mathbf{e}_r; \quad \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} = -\omega_r \mathbf{e}_\tau + \omega_\tau \mathbf{e}_r. \quad (2.14)$$

Подставив в уравнения (2.12), (2.13) значения производных ортов орбитального трехгранника (2.14) и проведя необходимые преобразования, получим тогда такие соотношения [1]:

$$\frac{dr}{dt} = v_r; \quad r\omega_n = v_n; \quad \omega_\tau = 0;$$

$$\frac{dv_r}{dt} - v_n\omega_n = -\frac{k}{r^2} + S; \quad v_r\omega_n + \frac{dv_n}{dt} = T; \quad -v_r\omega_\tau + v_n\omega_r = W.$$

Соответственно, из этой системы находятся:

$$\frac{dr}{dt} = v_r; \quad \frac{dv_r}{dt} = \frac{v_n^2}{r} - \frac{k}{r^2} + S; \quad \frac{dv_n}{dt} = -\frac{v_r v_n}{r} + T; \quad (2.15)$$

$$\omega_r = \frac{W}{v_n}; \quad \omega_\tau = 0; \quad \omega_n = \frac{v_n}{r}. \quad (2.16)$$

Угловые скорости (2.16) суть соответствующие проекции вектора мгновенной угловой скорости трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$, ориентация которого в ИСК определяется углами Ω , i , u . То есть для перехода от ИСК к ВСК необходимо последовательно совершить три поворота: во-первых, на угол Ω вокруг оси O_3Z , задаваемой ортом \mathbf{k} ; во-вторых, на угол i вокруг линии узлов (см. рис. 2), определяемой ортом $\boldsymbol{\beta}$; в-третьих, на угол u вокруг оси, задаваемой ортом \mathbf{e}_n . Следовательно, мгновенная угловая скорость вращения трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$ будет равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Omega}{dt} \mathbf{k} + \frac{di}{dt} \boldsymbol{\beta} + \frac{du}{dt} \mathbf{e}_n. \quad (2.17)$$

Орт $\boldsymbol{\beta}$ лежит в координатной плоскости ВСК, то есть в плоскости ортов \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_τ , поэтому

$$\boldsymbol{\beta} = \text{Cos} u \mathbf{e}_r - \text{Sin} u \mathbf{e}_\tau.$$

Разложение орта \mathbf{k} по ортам трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$ имеет вид

$$\mathbf{k} = a_1 \mathbf{e}_r + a_2 \mathbf{e}_\tau + a_3 \mathbf{e}_n,$$

где $a_1 = \text{Sin} i \text{Sin} u$, $a_2 = \text{Sin} i \text{Cos} u$, $a_3 = \text{Cos} i$. То есть тогда

$$\mathbf{k} = \text{Sin} i \text{Sin} u \mathbf{e}_r + \text{Sin} i \text{Cos} u \mathbf{e}_\tau + \text{Cos} i \mathbf{e}_n.$$

Если подставить приведенные выражения для $\boldsymbol{\beta}$ и \mathbf{k} в (2.17) и сгруппировать коэффициенты при ортах трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$, то получим проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси ВСК:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \text{Sin} i \text{Sin} u \frac{d\Omega}{dt} + \text{Cos} u \frac{di}{dt}; \\ \omega_\tau &= \text{Sin} i \text{Cos} u \frac{d\Omega}{dt} - \text{Sin} u \frac{di}{dt}; \\ \omega_n &= \text{Cos} i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{du}{dt}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

которые выражены через оскулирующий элемент i и аргумент широты u и производные $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, $\frac{du}{dt}$.

С учетом (2.18) и (2.16) теперь можно найти $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, а также $\frac{du}{dt}$, а именно, подставив (2.18) в (2.16) и учитывая (1.15) и (1.16), получим следующую систему уравнений относительно искомым производных:

$$\text{Sin } i \text{Sin } u \frac{d\Omega}{dt} + \text{Cos } u \frac{di}{dt} = W \frac{r}{\sqrt{kp}} ;$$

$$\text{Sin } i \text{Cos } u \frac{d\Omega}{dt} - \text{Sin } u \frac{di}{dt} = 0 ; \quad (2.19)$$

$$\text{Cos } i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{kp}}{r^2} .$$

Отсюда – из первых двух соотношений – сразу же находим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{kp}} \frac{\text{Sin } u}{\text{Sin } i} W ; \quad (2.20)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \text{Cos } u}{\sqrt{kp}} W . \quad (2.21)$$

Соответственно, из третьего соотношения (2.19) получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{kp}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{kp}} \text{Sin } u \text{Ctg } i W .$$

Учитывая (1.22) – $u = \vartheta + \omega$, из третьего соотношения (2.19) можно найти также

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} + \frac{\sqrt{kp}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{kp}} \text{Sin } u \text{Ctg } i W . \quad (2.22)$$

2.2.3 Вычисление производных $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$

В настоящем подразделе вычислим следующую группу производных: $\frac{d\omega}{dt}$; $\frac{dp}{dt}$; $\frac{de}{dt}$. В связи с этим обратимся к ранее полученным уравнениям (2.15). Соответственно, первое из них с учетом (1.15) переписывается в виде

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{k}{p}} e \sin \vartheta. \quad (2.23)$$

Второе уравнение в (2.15) с учетом (1.14) и (1.16) преобразуется к такому виду:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{k}{r^2} e \cos \vartheta + S. \quad (2.24)$$

Наконец, третье уравнение в (2.15) с учетом соотношений (1.14) – (1.16) можно привести к виду

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{k}{r^2} e \sin \vartheta + T. \quad (2.25)$$

Поскольку величины r , v_r и v_n согласно (1.14) – (1.16) функции только трех аргументов ϑ , p и e , постольку их производные по времени следует находить по правилу дифференцирования сложной функции, а именно:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial e} \frac{de}{dt}, \quad (2.26)$$

где $f = \vartheta, p, e$. С учетом соотношений (1.14) – (1.16) найдем далее соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = \frac{e \sin \vartheta}{p} r^2; \quad \frac{\partial r}{\partial p} = \frac{r}{p}; \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -\frac{r^2}{p} \cos \vartheta;$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} = \sqrt{\frac{k}{p}} e \cos \vartheta; \quad \frac{\partial v_r}{\partial p} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{p}} \frac{e \sin \vartheta}{p}; \quad \frac{\partial v_r}{\partial e} = \sqrt{\frac{k}{p}} \sin \vartheta;$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial \vartheta} = -\sqrt{\frac{k}{p}} e \sin \vartheta; \quad \frac{\partial v_n}{\partial p} = -\sqrt{\frac{k}{p}} \frac{1}{2r}; \quad \frac{\partial v_n}{\partial e} = \sqrt{\frac{k}{p}} \cos \vartheta.$$

Если подставить эти выражения для частных производных и (2.22) в (2.26), а затем преобразованные таким образом соотношения (2.26) подставить в уравнения (2.23) – (2.25), то тогда получим относительно $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$ следующую систему линейных уравнений:

$$-e \sin \vartheta \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dt} - \cos \vartheta \frac{de}{dt} = \frac{re \sin \vartheta}{\sqrt{kp}} Q_3; \quad (2.27)$$

$$-e \cos \vartheta \frac{d\omega}{dt} - \frac{e \sin \vartheta}{2p} \frac{dp}{dt} + \sin \vartheta \frac{de}{dt} = \frac{re \cos \vartheta}{\sqrt{kp}} Q_3 + \sqrt{\frac{p}{k}} S; \quad (2.28)$$

$$e \sin \vartheta \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2r} \frac{dp}{dt} + \cos \vartheta \frac{de}{dt} = \frac{re \sin \vartheta}{\sqrt{kp}} Q_3 + \sqrt{\frac{p}{k}} T, \quad (2.29)$$

где $Q_3 = \sin u \operatorname{Ctg} i W$.

Складывая уравнения (2.27) и (2.29), получим

$$\frac{dp}{dt} = 2r\sqrt{\frac{p}{k}}T. \quad (2.30)$$

Подставляя далее (2.30) в уравнения (2.27) и (2.28) с учетом (1.14) и опуская достаточно громоздкие выкладки, получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[-\frac{\text{Cos } \vartheta}{e} S + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\text{Sin } \vartheta}{e} T - \frac{r}{p} \text{Ctg } i \text{ Sin } u W \right]; \quad (2.31)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left\{ \text{Sin } \vartheta S + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \text{Cos } \vartheta + e \frac{r}{p} \right] T \right\}. \quad (2.32)$$

Без вывода приведем, следуя [3 – 5], еще уравнение для оскулирующего элемента τ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{ek} \left[(eN(\vartheta)\text{Sin } \vartheta - \text{Cos } \vartheta)S + \frac{p}{r} N(\vartheta)S \right], \quad (2.33)$$

где $N(\vartheta) = \frac{2p^2}{r^2} \int_0^{\vartheta} \frac{\text{Cos } \theta d\theta}{(1 + e \text{Cos } \theta)^3}$ [9].

Обычно уравнение (2.33) относительно τ – времени прохождения через перицентр оскулирующей орбиты (эллипса) используется для определения времени полета спутника, но в нем, как правило, нет необходимости, поскольку оно может быть заменено уравнением для $\frac{du}{dt}$ или для $\frac{d\vartheta}{dt}$. С учетом (1.22) из (2.22) следует

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{kp}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{kp}} \text{Sin } u \text{Ctg } i W. \quad (2.34)$$

Соответственно, подставив (2.31) в (2.22), получим

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[\frac{k}{r^2} + S \frac{\cos \vartheta}{e} - T \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \right]. \quad (2.35)$$

Для малых значений эксцентриситета e , то есть в случае околокруговых орбит, уравнения (2.31) и (2.32) при численном моделировании возмущенного движения спутника или же ИСЗ целесообразно заменить на следующие уравнения:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} (T\lambda_1 - W\lambda_2 \operatorname{Ctg} i \sin u) \right]; \quad (2.36)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} (T\lambda_2 - W\lambda_1 \operatorname{Ctg} i \sin u) \right], \quad (2.37)$$

где обозначено согласно (1.40) $\lambda_1 = e \sin \omega$, $\lambda_2 = e \cos \omega$, то есть

$$\text{также имеет место: } e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad \operatorname{Tan} \omega = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

2.2.4 Сводка уравнений движения ИСЗ в оскулирующих элементах

Полученные в подразделах 2.2.2 и 2.2.3 соотношения для производных по времени оскулирующих элементов в зависимости от них же суть соответствующие уравнения движения ИСЗ в оскулирующих элементах (2.2). По сравнению с уравнениями движения в ИСК (2.3), (2.4) и в ГСК (2.5), (2.6) такие уравнения для малых значениях возмущающих ускорений Φ (см. (2.1)) при проведении качественного анализа влияния ускорений Φ на возмущенное движение ИСЗ будут обладать следующими преимуществами:

во-первых, при малых возмущающих ускорениях Φ в сравнении с ускорением от притягивающего центра в виде материальной точки элементы (2.2) медленно меняются вдоль орбиты (а при

$\Phi = 0$ они остаются постоянными) будет эффективно применение метода малого параметра [8];

во-вторых, полученные в результате решения системы дифференциальных уравнений для какого-либо полного набора оскулирующих элементов, например (2.2), имеют наглядный кинематический смысл, что существенно облегчает проведение качественного анализа.

Кроме того, при численном решении уравнений движения ИСЗ в оскулирующих элементах существенно снижается объем вычислений за счет того, что шаг интегрирования по времени может быть выбран более чем на порядок больше в сравнении с моделями движения в ИСК и ГСК [3, 5, 8].

В стандартный полный набор оскулирующих элементов орбиты ИСЗ входят [4] (см. также подраздел 1.4.1, стр. 26-27):

Ω – долгота восходящего узла;

i – наклонение плоскости орбиты (к координатной плоскости O_3XY или плоскости экватора Земли, см. также рис. 2);

p – параметр орбиты;

e – эксцентриситет орбиты (здесь и далее эллиптической);

ω – аргумент перигея;

τ – момент времени прохождения через перигей орбиты.

Напомним, что параметры Ω и i определяют текущее положение орбиты ИСЗ в пространстве (в ИСК), а ее форму и размеры – параметры p , e , либо с помощью какой-либо пары параметров, указанных на стр. 21. В частности, зачастую вместо p используется большая полуось орбиты $-a$, производная для которой имеет следующий вид [8]:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \frac{2a}{1-e^2} \left(Se \sin \vartheta + T \frac{r}{p} \right). \quad (2.38)$$

Аргумент перигея ω определяет ориентацию орбиты ИСЗ в ее плоскости или, что то же самое, угловое положение линии апсид относительно восходящего узла орбиты. При этом для околокруговых орбит (малых значений эксцентриситета e) вместо пары параметров ω и e используются параметры $\lambda_1 = e \sin \omega$ и $\lambda_2 = e \cos \omega$. Наконец, вместо момента времени прохождения ИСЗ через перигей орбиты τ , как было отмечено ранее, можно использовать либо u – аргумент широты, либо ϑ – истинную аномалию, которая связана со временем соотношением [4, 9]

$$t = \tau + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{k}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{(1 + e \cos \vartheta')^2} \quad (2.39)$$

или (для эллиптического движения)

$$t = \tau + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}} (E - e \sin E),$$

где E – эксцентрическая аномалия (1.39) [1 – 4].

Итак, в соответствии со стандартным полным набором оскулирующих элементов и с учетом полученных для них ранее зависимостей (2.20), (2.21), (2.30) – (2.33) запишем систему уравнений возмущенного движения в указанных оскулирующих элементах:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{kp}} \frac{\sin u}{\sin i} W; \quad (2.40)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos u}{\sqrt{kp}} W; \quad (2.41)$$

$$\frac{dp}{dt} = 2r \sqrt{\frac{p}{k}} T; \quad (2.42)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left\{ \sin \vartheta S + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] T \right\}; \quad (2.43)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[-\frac{\cos \vartheta}{e} S + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} T - \frac{r}{p} W \operatorname{Ctg} i \sin u \right]; \quad (2.44)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{ek} \left[(eN(\vartheta) \sin \vartheta - \cos \vartheta) S + \frac{p}{r} N(\vartheta) S \right], \quad (2.45)$$

где $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$ (1.14), $u = \vartheta + \omega$ (1.22), а по $N(\vartheta)$ см. (2.33).

Очевидно, что вместо уравнения (2.45) в системе было бы более целесообразным использовать уравнение (2.35):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[\frac{k}{r^2} + S \frac{\cos \vartheta}{e} - T \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \right]. \quad (2.46)$$

Однако в практике более удобным является использование не (2.46), а уравнения относительно аргумента широты (2.34):

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left(\frac{k}{r^2} - \frac{r}{p} W \sin u \operatorname{Ctg} i \right). \quad (2.47)$$

В случае малых значений эксцентриситета орбиты, то есть для околокруговых орбит, вместо уравнений (2.43) и (2.44) надо использовать уравнения (2.36), (2.37):

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} (T\lambda_1 - W\lambda_2 \operatorname{Ctg} i \sin u) \right]; \quad (2.48)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} (T\lambda_2 - W\lambda_1 \operatorname{ctg} i \sin u) \right], \quad (2.49)$$

где $r = \frac{p}{1 + \lambda_1 \sin u + \lambda_2 \cos u}$.

Отметим также, что иногда вместо уравнения (2.42) более удобным является использование уравнения (2.38):

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{p}{k}} \frac{2a}{1 - e^2} \left(S e \sin \vartheta + T \frac{r}{p} \right). \quad (2.50)$$

Исключая в системе уравнений движения (2.40) – (2.44) дифференциал dt при помощи уравнения (2.46) преобразуем уравнения Ньютона к следующему виду:

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = G_9 W \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i}; \quad (2.51)$$

$$\frac{di}{d\vartheta} = G_9 W \frac{r}{p} \cos u; \quad (2.52)$$

$$\frac{dp}{d\vartheta} = 2r G_9 T; \quad (2.53)$$

$$\frac{de}{d\vartheta} = G_9 \left\{ S \sin \vartheta + T \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}; \quad (2.54)$$

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = G_9 \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right]; \quad (2.55)$$

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{k}{p}} G_9, \quad (2.56)$$

$$\text{где } G_9 = \left[\frac{k}{r^2} + S \frac{\text{Cos } \vartheta}{e} - T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\text{Sin } \vartheta}{e} \right]^{-1}.$$

Приведенную систему уравнений движения (2.51) – (2.56), как отмечено в [9], удобно использовать при изучении влияния сопротивления верхних слоев атмосферы на движение ИСЗ.

Как уже было отмечено выше в практике может оказаться более удобным использование уравнения (2.47) вместо (2.46). В связи с этим в системе (2.40) – (2.44) целесообразно перейти от независимой переменной t к новой переменной u – аргументу широты. Исключая дифференциал dt при помощи (2.47) в (2.40) – (2.44), получим

$$\frac{d\Omega}{du} = G_u W \frac{r^3}{kp} \frac{\text{Sin } u}{\text{Sin } i}; \quad (2.57)$$

$$\frac{di}{du} = G_u W \frac{r^3}{kp} \text{Cos } u; \quad (2.58)$$

$$\frac{dp}{du} = 2r^3 G_u T; \quad (2.59)$$

$$\frac{de}{du} = G_u \frac{r^2}{k} \left\{ S \text{Sin } \vartheta + T \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \text{Cos } \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}; \quad (2.60)$$

$$\frac{d\omega}{du} = G_u \frac{r^2}{k} \left[-S \frac{\text{Cos } \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\text{Sin } \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \text{Ctg } i \text{Sin } u \right]; \quad (2.61)$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{\sqrt{kp}} G_u, \quad (2.62)$$

где $G_u = \left(1 - \frac{r^3}{kp} W \sin u \operatorname{Ctg} i \right)^{-1}$.

В случае отсутствия возмущающих ускорений уравнение (2.56) будет иметь вид

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{\sqrt{kp}} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{k}(1 + e \cos \vartheta)^2}.$$

Интегрируя это уравнение на интервале $[0, 2\pi]$, получим период обращения спутника по кеплеровой орбите, а именно [8]:

$$P = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}}.$$

При наличии каких-либо возмущающих ускорений интегрирование уравнения (2.56) на интервале $[0, 2\pi]$, то есть при движении спутника от перицентра начальной орбиты до перицентра финальной оскулирующей орбиты, получим тогда значение оскулирующего периода обращения спутника, который также называют аномалистическим периодом обращения [8].

Для определения изменения значений периода обращения P продифференцируем приведенное выше для него выражение по t :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P}{a} \frac{da}{dt},$$

а затем подставим сюда из (2.50) значение производной $\frac{da}{dt}$ и, соответственно, в итоге получим

$$\frac{d \ln P}{dt} = \frac{3}{1 - e^2} \sqrt{\frac{p}{k}} \left(S e \sin \vartheta + T \frac{r}{p} \right).$$

Таким образом, при наличии возмущающих ускорений оскулирующие значения периода обращения P непрерывно меняются при перемещении спутника по орбите. В связи с этим текущие значения P не используются в качестве характеристики для отдельных витков орбиты. Соответственно, в качестве таковой характеристики витка рассматривается так называемый *драконический период обращения* P_Ω [3 – 5, 8], который равен разности времен двух последовательных прохождений спутника через восходящий узел его орбиты.

Драконический период обращения можно получить, если проинтегрировать уравнение (2.62) на интервале $[0, 2\pi]$ (вместе с остальными уравнениями системы (2.57) – (2.61)), а именно:

$$P_\Omega = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{\sqrt{kp}} G_u du .$$

При малых возмущающих ускорениях оскулирующие значения периода обращения P незначительно отличаются от значений P_Ω [8]. Поэтому вековые возмущения для P в значительной степени будут характеризовать и вековые возмущения P_Ω [8].

В том случае, когда возмущающие ускорения Φ в (2.1) малы в сравнении с k/r^2 , система уравнений (2.40) – (2.44), (2.46) может быть решена методом последовательных приближений [8]. Для этого вместо этой системы рассмотрим систему (2.51) – (2.56), в которой независимой переменной является ϑ . Дополнительно предположим, что компоненты возмущающего ускорения $\Phi = (S, T, W)$ зависят только от векторов \mathbf{r} и \mathbf{v} , то есть от стандартного набора оскулирующих элементов, включая переменную ϑ , но не зависят явно от времени t . При этом в системе (2.51) – (2.56) необходимо совместно решать только первые пять уравне-

ний, а уравнение (2.56) можно использовать для последующего определения времени полета спутника.

Итак, пусть $\Omega_0, i_0, p_0, e_0, \omega_0$ – значения оскулирующих элементов в некоторой начальной точке орбиты, которая задана значением $\vartheta = \vartheta_0$. Соответственно, обозначим через $\Delta\Omega(\vartheta), \Delta i(\vartheta), \Delta p(\vartheta), \Delta e(\vartheta), \Delta\omega(\vartheta)$ возмущения указанных элементов при $\vartheta > \vartheta_0$, то есть тогда можно представить текущие значения оскулирующих элементов так:

$$\Omega(\vartheta) = \Omega_0 + \Delta\Omega(\vartheta); i(\vartheta) = i_0 + \Delta i(\vartheta);$$

$$p(\vartheta) = p_0 + \Delta p(\vartheta); e(\vartheta) = e_0 + \Delta e(\vartheta); \omega(\vartheta) = \omega_0 + \Delta\omega(\vartheta).$$

Если интегрирование системы (2.51) – (2.55) на заданном интервале $[\vartheta_0, \vartheta_f)$ обеспечивает малость возмущений $\Delta\Omega(\vartheta), \Delta i(\vartheta), \Delta p(\vartheta), \Delta e(\vartheta), \Delta\omega(\vartheta)$, то в правых частях системы (2.51) – (2.55) в первом приближении можно принять, что $\Omega = \Omega_0, i = i_0, p = p_0, e = e_0$ и $\omega = \omega_0$. Очевидно, что при этом каждое из уравнений системы тогда будет интегрироваться независимо от других уравнений и, соответственно, тогда величины $\Delta\Omega(\vartheta_f), \Delta i(\vartheta_f), \Delta p(\vartheta_f), \Delta e(\vartheta_f)$ будут определяться квадратурами.

Если полученные значения этих квадратур подставить в $F(\vartheta_f) = F_0 + \Delta F(\vartheta_f)$, $F = \Omega, i, p, e, \omega$, то получим тогда значения оскулирующих элементов орбиты во втором приближении и, повторяя такую же процедуру далее, получим соответствующие последующие приближения для оскулирующих элементов вплоть до достижения требуемой точности их вычисления.

Как известно [3–5, 8], при влиянии малых возмущающих факторов на движение ИСЗ основную роль играют так называемые

нарастающие вековые возмущения элементов его орбиты. В качестве характеристик для этих возмущений рассматриваются изменения элементов орбиты, обычно, за один виток [8, 9].

Очевидно, что для получения значений для таких характеристик возмущений следует проинтегрировать систему (2.51) – (2.55) на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$; при этом обычно принимается $\vartheta_0 = 0$. Кроме того, в практике [5, 9] вместо системы (2.51) – (2.55) для этого используется система (2.57) – (2.61) и, соответственно, в этом случае интегрирование проводится по аргументу широты – u на интервале $[0, 2\pi)$.

2.3 Гравитационное поле Земли и влияние его отклонений от центрального на движение ИСЗ

2.3.1 Нормальный потенциал сил притяжения Земли

Изучение гравитационного притяжения к материальным телам различных размеров, формы и внутренней структуры есть предмет теории гравитационного потенциала [1, 4, 5, 8], практическое применение которой рассматривается в гравиметрии, тесно связанной с теорией фигуры Земли [11]. Очевидно, что представление Земли в виде материальной точки оправдано при исследовании движения относительно нее других тел и КА на расстояниях, во много раз превышающих ее размеры. Однако уже при разработке теории движения Луны приходится учитывать размеры Земли, что является актуальным и при изучении движения ИСЗ в непосредственной близости от Земли [3–5, 8].

Ускорение гравитационного притяжения к некоторому телу является векторной суммой ускорений притяжения ко всем элементарным частицам, из которых оно состоит, а притяжение к каждой такой частице определяется законом всемирного тяготения Ньютона. Определение ускорения притяжения ко всему телу, то

есть к Земле, требует, чтобы были просуммированы все указанные выше элементарные ускорения. Тогда ускорение суммарного притяжения можно вычислить по формуле [8]:

$$\mathbf{g} = \text{grad}U, \quad (2.63)$$

где

$$U = \gamma \int \frac{dm}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|},$$

а dm – массы притягивающих элементарных частиц, $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{r} – радиус-векторы притягивающих частиц и точки, для которой вычисляется ускорение притяжения.

Функция $U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ называется потенциалом ускорения притяжения [8]. Вычисление по вышеприведенной формуле этой функции требует предварительного определения характера распределения масс внутри притягивающего тела, что практически неосуществимо даже для Земли. Однако, задача в значительной степени будет упрощаться, если воспользоваться основной теоремой теории потенциала [4, 8]: «для определения гравитационного потенциала во всем внешнем пространстве, окружающем некоторое притягивающее тело, которое вращается с постоянной угловой скоростью, достаточно знать суммарную массу этого тела, угловую скорость вращения и форму его поверхности».

В приведенной выше основной теореме под поверхностью притягивающего тела подразумевается поверхность некоторого гипотетического океана, полностью покрывающего это тело, и эта поверхность должна удовлетворять следующему условию:

$$U(x, y, z) + U_{\text{вр}}(x, y, z) = \text{const},$$

где $U_{\text{вр}}(x, y, z)$ – потенциал центробежного ускорения, который будет равен (здесь и далее для Земли):

$$U_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \omega_3^2 \Delta r, \quad (2.64)$$

где ω_3 – угловая скорость вращения Земли, а Δr – расстояние от рассматриваемой точки пространства до оси вращения Земли, равное $\Delta r = r \cos \varphi$, где φ – геоцентрическая широта точки, для которой вычисляется составляющая потенциала (2.64), а r – расстояние от центра масс Земли до этой же точки.

Итак, для определения поля гравитационного притяжения к некоторому телу, которое в общем случае также вращается с постоянной скоростью относительно инерциального пространства, достаточно знать потенциал притяжения $U(x, y, z)$ этого тела во всех точках окружающего его внешнего пространства и угловую скорость вращения тела.

Фигура Земли является весьма сложной поверхностью, которая называется *геоидом*. В многих случаях геоид можно с достаточной точностью заменять сплюснутым эллипсоидом вращения, центр которого совпадает с центром масс Земли, а его малая полуось – с осью вращения Земли. Эллипсоид вращения, который наилучшим образом приближен к поверхности геоида, называется *общим земным эллипсоидом* [8, 11]. В гравиметрии поле притяжения, соответствующее общему земному эллипсоиду, называется нормальным, а отклонения реального поля земного притяжения от нормального называются полем его аномалий. Более подробное описание гравитационного поля Земли и ее фигуры приведено в Приложении.

Так как ось вращения для общего земного эллипсоида (ОЗЭ) совпадает с осью вращения Земли, то нормальное поле земного притяжения симметрично относительно оси вращения Земли, а вектор его ускорения \mathbf{g} будет всегда расположен в плоскости соответствующего меридиана. При этом вектор \mathbf{g} определяется дву-

мя компонентами, а именно: радиальной g_r – проекцией ускорения \mathbf{g} на радиус-вектор \mathbf{r} рассматриваемой точки пространства в ГСК (положительное направление для g_r будет к центру Земли) и меридиональной g_m – проекцией \mathbf{g} , которая лежит в плоскости меридиана и ортогональна к вектору \mathbf{r} (для нее положительное направление – на Север). Поэтому в векторной записи имеет место:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_r + \mathbf{g}_m.$$

2.3.2 Влияние несферичности Земли на элементы орбиты ИСЗ

2.3.2.1 В соответствии с оценками, которые приведены для компонент g_r и g_m в Приложении с учетом выражения (П1.1), влияние несферичности и вращения Земли на движение ИСЗ в основном определяется компонентами, обусловленными второй зональной гармоникой нормального поля притяжения. При этом влияние остальных составляющих гравитационного поля Земли, включая поле его аномалий, оказывается, как минимум, на два порядка меньшим. Поэтому потенциал (П1.1) с достаточной точностью вполне можно заменить на потенциал вида (П1.3) при изучении влияния несферичности Земли на элементы орбиты ИСЗ, то есть в качестве возмущающих ускорений далее можно было бы принимать лишь те ускорения, которые обусловлены второй зональной гармоникой в (П1.1) и вращением Земли.

Однако, сначала найдем в более общем виде, то есть для выражения (П1.1), проекции возмущающего ускорения на оси системы координат O_3ruz (или, что то же, на оси орбитального трехгранника, см. стр. 42) для его компонент S , T и W . Для этого перепишем выражение (П1.1) в следующем виде:

$$U_{033}^{(4)}(r, \varphi) = \frac{k_3}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) + \frac{\chi}{r^5} \left(\sin^4 \varphi - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{35} \right),$$

где введены такие обозначения [8]: $k_3 = a_{00}$; $\varepsilon = -\frac{3}{2}a_{20}$; $\chi = \frac{35}{8}a_{40}$.

Отсюда тогда получим

$$g_r = -\frac{\partial U_{033}^{(4)}(r, \varphi)}{\partial r} = g_r^{(0)} + g_r^{(2)} + g_r^{(4)}; \quad (2.65)$$

$$g_m = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{033}^{(4)}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = g_m^{(2)} + g_m^{(4)}. \quad (2.66)$$

Здесь [8]: $g_r^{(0)} = \frac{k_3}{r^2}$; $g_r^{(2)} = -2\frac{\varepsilon}{r^4} P_{20}(\sin \varphi) = \frac{\varepsilon}{r^4} (1 - 3\sin^2 \varphi)$;

$$g_r^{(4)} = \frac{8}{7} \frac{\chi}{r^6} P_{40}(\sin \varphi) = \frac{\chi}{r^6} \left(5\sin^4 \varphi - \frac{30}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{7} \right);$$

$$g_m^{(2)} = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{r^4} \frac{\partial}{\partial \varphi} P_{20}(\sin \varphi) = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2\varphi;$$

$$g_m^{(4)} = \frac{8}{35} \frac{\chi}{r^6} \frac{\partial}{\partial \varphi} P_{40}(\sin \varphi) = \frac{1}{14} \frac{\chi}{r^6} (2\sin 2\varphi - 7\sin 4\varphi).$$

Соответствующие оценки для указанных компонент приведены в Приложении.

Проектируя векторы \mathbf{g}_r и \mathbf{g}_m (естественно, учитывая их положительные направления в пространстве, см. стр. 63-64) на оси системы координат $O_3 ruz$, получим

$$S = -g_r; \quad T = g_m \cos \psi; \quad W = g_m \sin \psi, \quad (2.67)$$

где ψ – текущий угол между плоскостью орбиты и плоскостью меридиана, над которым находится ИСЗ.

Если спроектировать на небесную сферу плоскости меридиана, экватора и орбиты ИСЗ, то получим соответствующий прямоугольный сферический треугольник [1, 8], в котором дуги с величинами u, ψ, i являются гипотенузой, катетом и углом, противолежащим этому катету. Тогда получим

$$\sin \varphi = \sin u \sin i ; \sin \psi = \frac{\cos i}{\cos \varphi} ; \cos \psi = \frac{\cos u \sin i}{\cos \varphi} .$$

С учетом этих соотношений в (2.65) – (2.67) можно исключить как геоцентрическую широту ИСЗ φ , так и угол ψ .

Как отмечено в [1, 5, 8, 9], во многих прикладных задачах вполне достаточно принимать для нормального потенциала сил притяжения Земли выражение (П1.3), то есть учитывать только вторую зональную гармонику гравитационного поля Земли при разложении его потенциала в ряд сферическим функциям [5] (см. также Приложение). Тогда нормальный потенциал для сил притяжения Земли (П1.1) $U_{033}^{(4)}(r, \varphi)$ будет редуцирован к виду:

$U_{033}^{(2)}(r, \varphi) = \frac{a_{00}}{r} + \frac{a_{20}}{r^3} P_{20}(\sin \varphi)$. С учетом этого и оценок для компонент в (2.65) и (2.66) подставим в (2.67) только $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$ из (2.65) и (2.66) и, соответственно, получим следующие выражения для S, T и W [8]:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1) ; \\ T &= -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u ; \\ W &= -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u . \end{aligned} \tag{2.68}$$

В [1] также отмечено, что нормальный потенциал тяжести Земли, представленной в виде эллипсоида вращения, можно приближенно вычислить по следующей формуле:

$$U(r, \varphi) = \frac{k_3}{r} + J_2 \frac{k_3 a_3^2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi - 1),$$

где φ – геоцентрическая широта для ИСЗ, а J_2 – безразмерная константа, которая равна: $J_2 = -1082,8 \cdot 10^{-6}$; ее можно также вычислить по формуле: $J_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_3^2 a_3}{g_3} - 2\alpha \right)$, где используются соответствующие геодезические постоянные (их обозначения и значения приведены в Приложении). В этом случае и при учете ранее приведенного соотношения $\sin \varphi = \sin u \sin i$ для возмущающих ускорений можно записать потенциал в виде

$$\Delta U(r, \varphi) = J_2 \frac{k_3 a_3^2}{2r^3} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1). \quad (2.69)$$

Исходя из выражения (2.69), вычисляются проекции для возмущающего ускорения в виде

$$\begin{aligned} S &= -\frac{3}{2} J_2 \frac{k_3 a_3^2}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1); \\ T &= \frac{3}{2} J_2 \frac{k_3 a_3^2}{r^4} \sin 2u \sin^2 i; \\ W &= \frac{3}{2} J_2 \frac{k_3 a_3^2}{r^4} \sin u \sin 2i. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Очевидно, что выражения (2.70) с точностью до обозначений совпадают с соответствующими выражениями (2.68).

2.3.2.2 На стр. 60–61 была кратко изложена процедура расчета возмущений для оскулирующих элементов орбиты ИСЗ при наличии возмущающих ускорений в общем случае. Далее также будем следовать этой же схеме исследования. Но вначале отметим, что возмущения, обусловленные несферичностью и вращением Земли, вызывают не только вековые, но и весьма значительные периодические возмущения околокруговых орбит ИСЗ [8]. Там же было показано, что при воздействии малых возмущающих воздействий на движение ИСЗ основную роль будут играть нарастающие вековые возмущения элементов его орбиты. Соответственно, в качестве характеристик таких возмущений можно использовать изменения элементов орбиты ИСЗ за один виток [5, 8, 9]. В этом случае необходимо провести интегрирование системы (2.51) – (2.55) по независимой переменной ϑ на интервале $[0, 2\pi)$. При этом, следуя упомянутой выше схеме, в правых частях системы (2.51) – (2.55) должно быть принято, что элементы орбиты ИСЗ в течение витка не изменяются, то есть каждое из уравнений в рассматриваемой системе тогда интегрируется независимо от других уравнений и, соответственно, искомые величины $\delta\Omega$, δi , δp , δe , $\delta\omega$ будут определяться квадратурами. Пусть в (2.51) – (2.55)

$$G_{\vartheta} = \left[\frac{k_3}{r^2} + S \frac{\cos \vartheta}{e} - T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} \right]^{-1} \approx \left(\frac{k_3}{r^2} \right)^{-1} = g^{-1},$$

а отношения S/eg и T/eg также являются малыми. Но тогда эту систему можно переписать так:

$$\delta\Omega = \int_0^{2\pi} \frac{W}{g} \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} d\vartheta; \quad (2.71)$$

$$\delta i = \int_0^{2\pi} \frac{W}{g} \frac{r}{p} \text{Cos} u \, d\vartheta; \quad (2.72)$$

$$\delta p = \int_0^{2\pi} 2r \frac{T}{g} \, d\vartheta; \quad (2.73)$$

$$\delta e = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{S}{g} \text{Sin} \vartheta + \frac{T}{g} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \text{Cos} \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\} d\vartheta; \quad (2.74)$$

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{S}{g} \frac{\text{Cos} \vartheta}{e} + \frac{T}{g} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\text{Sin} \vartheta}{e} - \frac{W}{g} \frac{r}{p} \text{Ctg} i \text{Sin} u \right] d\vartheta, \quad (2.75)$$

где выражения для S , T и W заданы согласно (2.68) или (2.70),

а также $r = \frac{p}{1 + e \text{Cos} \vartheta}$, $\frac{p}{r} = \frac{1}{1 + e \text{Cos} \vartheta}$, $g = \frac{k_3}{r^2}$, $u = \omega + \vartheta$. Здесь и в (2.71) – (2.75) элементы орбиты ИСЗ рассматриваются как постоянные в течение всего витка, то есть на интервале $[0, 2\pi)$.

Для определения вековых возмущений элементов эллиптической орбиты ИСЗ следует воспользоваться выражениями (2.71) – (2.75) с учетом (2.68), что позволяет вычислить правые части этих выражений для всех $\delta\Omega$, δi , δp , δe , $\delta\omega$ [8]:

$$\delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{k_3} \text{Cos} i; \quad (2.76)$$

$$\delta i = \delta p = \delta e = 0; \quad (2.77)$$

$$\delta\omega = \frac{\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{k_3} (5 \text{Cos}^2 i - 1). \quad (2.78)$$

Для расчета изменений оскулирующих элементов орбиты ИСЗ Ω и ω вместо формул (2.76) и (2.78) можно использовать приведенные в [5, с.114 – 117] соответствующие номограммы, с помощью которых можно определить $\delta\Omega$ и $\delta\omega$ за один виток, а также и за сутки полета ИСЗ. Эффекты, связанные с вековыми возмущениями элементов орбиты ИСЗ, называют: а) при $\delta\Omega \neq 0$ – прецессией плоскости орбиты (или ее восходящего узла); б) при $\delta\omega \neq 0$ – прецессией перигея орбиты (или ее линии апсид).

Помимо обусловленных несферичностью Земли вековых возмущений имеют место и периодические возмущения во всех элементах орбиты ИСЗ, которые подробно описаны в [13]. Для проведения исследований по оценке таких возмущений можно непосредственно использовать метод численного интегрирования системы уравнений (2.51) – (2.55) на некоторых специально выбранных подынтервалах витка ИСЗ. Кроме того, отметим, что на практике [5, 9] вместо системы (2.51) – (2.55) может быть использована система (2.57) – (2.62) и в этом случае интегрирование проводится по аргументу широты – u : на интервале $[0, 2\pi]$ для получения соотношений, аналогичных (2.71) – (2.75), либо на некоторых специально выбранных подынтервалах витка при изучении периодических возмущений элементов орбиты ИСЗ.

В заключение данного подраздела отметим следующее [8].

Во-первых, из (2.76) следует, что при $0 < i < \pi/2$ имеет место $\delta\Omega < 0$, а при $\pi/2 < i < \pi$ – $\delta\Omega > 0$. Для полярной орбиты при $i = \pi/2$ ее прецессия отсутствует.

Во-вторых, из (2.78) $\delta\omega = 0$ при $i_1^* = \arccos\sqrt{1/5} \approx 63^\circ 26'$ и $i_2^* = \pi - i_1^* \approx 116^\circ 34'$. При $i < i_1^*$ или $i > i_2^*$ $\delta\omega > 0$, то есть перигей смещается по направлению движения ИСЗ, а при $i_1^* < i < i_2^*$ $\delta\omega < 0$ – в противоположном направлении.

2.4 Возмущающие воздействия на движение ИСЗ верхней атмосферы Земли

2.4.1 Краткие сведения о верхней атмосфере Земли

При решении задач прогнозирования движения ИСЗ одной из проблем является учет возмущений, которые обусловлены влиянием воздействием верхней атмосферы (ВА); высота для ее нижней границы принимается равной 120 км. В связи с этим требуется хорошее знание различных характеристик и эволюции последних для ВА с изменением высоты полета ИСЗ, положения Солнца относительно его орбиты, а также ряда иных факторов, которые были обнаружены благодаря применению спутниковых методов исследования. Обработка полученных при этом данных по определению плотности воздуха и температуры ВА выявила различные вариации ее плотности, в том числе такие, которые были обусловлены обнаруженными при этом новыми геофизическими явлениями. По современным данным основная причина изменения плотности ВА является не только изменение высоты полета ИСЗ, но и разогревание атмосферы в результате поглощения ею солнечной электромагнитной радиации. Построение достаточно точных моделей плотности ВА связано с учетом наиболее существенных из обнаруженных вариаций плотности ВА, к которым относятся следующие [14].

1) Вариации плотности ВА, обусловленные уровнем солнечной активности, которая связана с радиоизлучением Солнца на длине волны 10,7 см, характеризуемое индексом $F_{10,7}$.

2) Вариации плотности ВА, коррелирующие с геомагнитными возмущениями, что связано с корпускулярным излучением Солнца, оказывающим влияние на магнитное поле Земли. Это вто-

рая причина, определяющая состояние ВА; ее влияние задается геомагнитным индексом K_p .

3) Вариации 27-дневные, которые являются следствием вращения Солнца вокруг своей оси с соответствующим периодом вращения относительно Земли. Эти вариации плотности ВА связаны с количеством и активностью солнечных пятен на видимой стороне Солнца.

4) Вариации плотности, связанные с 11-летним циклом солнечной активности.

5) Годовые и полугодовые вариации плотности ВА. Такие вариации были обнаружены на основе наблюдений торможения ИСЗ и их объяснение связывается с наклоном эклиптики к плоскости солнечного экватора.

6) Суточные вариации плотности. На высотах, которые превосходят 200 км, плотность и температура претерпевают в течение суток существенные изменения, достигая максимума около 14 часов по местному времени и минимума между полночью и рассветом. Поверхности постоянной плотности ВА при этом образуют горб, сопровождающий Солнце с запаздыванием около двух часов.

7) Широтный эффект, который отражает вариации плотности ВА, связанные с влиянием сжатия Земли и атмосферы.

Помимо указанных вариаций плотности ВА необходимо также отметить наличие короткопериодических флуктуаций (их колебания не превышают 10% от среднего значения) и наличие ветров, которые, как правило, имеют направление с запада на восток и на высоте 340 км они составляют около 160 м/с.

Перечисленные выше эффекты, связанные с вариациями плотности ВА, показывают актуальность как построения новых, так и дальнейшего совершенствования существующих моделей ВА. В связи с этим следует отметить множество существующих моделей ВА [5, 8, 9, 14–17], а также разработанных ГОСТов,

предназначенных для проведения баллистических расчетов ИСЗ [15–17].

Одна из первых динамических моделей плотности ВА [8] была введена в практику баллистических расчетов ИСЗ ГОСТом [15]. В настоящее время модели плотности ВА устанавливаются в ГОСТах [16, 17], в которых изложены как модели плотности, так и методика расчета и значения средней плотности ВА Земли и ее предельные отклонения в диапазоне высот от 120 до 1500 км для различных уровней солнечной активности; в [16] – при неопределенности даты и времени запуска ИСЗ, а в [17] – при известных дате, времени и координатах точки пространства. Стандарт предназначен для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли и приведения результатов расчетов к одинаковым условиям.

Следует еще отметить, что при моделировании плотности ВА следует учитывать еще один важный эффект, который связан с захватом атмосферы вращающейся Землей. При этом угловая скорость вращения ВА задается так:

$$\omega_{\text{ВА}} = k_{\text{ВА}} \omega_{\text{З}}, \quad 0 < k_{\text{ВА}} \leq 1. \quad (2.79)$$

Сила аэродинамического сопротивления, обусловленная влиянием ВА на ИСЗ, вычисляется по формуле:

$$R_{\text{ВА}} = c_x \frac{\rho_{\text{ВА}} v_{\text{отн}}^2}{2} F_{\text{mid}}, \quad (2.80)$$

где c_x – безразмерный коэффициент сопротивления воздуха, значение которого принимают постоянным во всем диапазоне скоростей и высот полета ИСЗ [5, 8, 9], F_{mid} – площадь миделева сечения ИСЗ, $\rho_{\text{ВА}}$ – плотность ВА на высоте полета ИСЗ, а $v_{\text{отн}}$ – воздушная скорость ИСЗ, то есть его скорость относительно атмосферы.

На больших высотах полета ИСЗ для высокоскоростного потока разреженного газа имеет место свободномолекулярное течение, для которого длина свободного пробега молекул газа соизмерима с размерами ИСЗ или существенно превосходит их. Коэффициент сопротивления c_x тогда практически не зависит от формы ИСЗ и в основном определяется лишь характером отражения частиц ВА от поверхности ИСЗ. При этом обычно принимают

$$c_x = 2,0 \dots 2,5 .$$

В случае неориентированного полета ИСЗ величина F_{mid} может быть принята постоянной и равной примерно одной четверти величины полной поверхности ИСЗ [5, 8, 9].

Вектор воздушной скорости ИСЗ – $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ определяется как разность его абсолютной скорости в ИСК \mathbf{V} в точке с радиус-вектором \mathbf{R} (1.24) и скорости ВА в той же точке пространства, которая определяется с учетом (2.79), то есть

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}_{\text{BA}} \times \mathbf{R} . \quad (2.81)$$

Здесь $|\boldsymbol{\omega}_{\text{BA}} \times \mathbf{R}| = \omega_{\text{BA}} R \cos \varphi$, где φ – геоцентрическая широта точки с радиус-вектором \mathbf{R} , а R – расстояние от нее до центра масс Земли. В общем случае (2.81) можно представлять в виде

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{V} - k_{\text{BA}} \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R} .$$

Сила аэродинамического сопротивления, действующая на ИСЗ, определяется величиной и ориентацией вектора воздушной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ в пространстве. Поэтому с учетом (2.80) и (2.81)

$$\mathbf{R}_{\text{BA}} = -c_x \frac{\rho_{\text{BA}} v_{\text{отн}}^2}{2} F_{\text{mid}} . \quad (2.82)$$

Если разделить выражение (2.82) на массу ИСЗ – $m_{\text{ИСЗ}}$, то получим обусловленное влиянием ВА значение возмущающего ускорения, а именно:

$$\mathbf{j}_{\text{ВА}} = -c_x \frac{\rho_{\text{ВА}} v_{\text{отн}} \mathbf{v}_{\text{отн}}}{2m_{\text{ИСЗ}}} F_{\text{mid}}.$$

Вводя в рассмотрение коэффициент $b = \frac{c_x F_{\text{mid}}}{m_{\text{ИСЗ}}}$, называемый *баллистическим коэффициентом* ИСЗ [5, 9], перепишем это выражение для $\mathbf{j}_{\text{ВА}}$ в виде

$$\mathbf{j}_{\text{ВА}} = -b \frac{\rho_{\text{ВА}} v_{\text{отн}} \mathbf{v}_{\text{отн}}}{2}. \quad (2.83)$$

Очевидно, что выражения для $\mathbf{R}_{\text{ВА}}$ (2.82) и для $\mathbf{j}_{\text{ВА}}$ (2.83) записаны в ИСК, а именно, в O_3XYZ .

2.4.2 О моделировании сопротивления верхних слоев атмосферы движению ИСЗ

На высотах более 120 ... 200 км атмосфера Земли весьма сильно разрежена и поэтому оказывает малое сопротивление на движущиеся ИСЗ. Однако, аэродинамическое сопротивление является постоянно действующей силой и, стало быть, она в течение длительного времени полета ИСЗ может существенно изменить элементы его орбиты. Наиболее наглядным влияние ВА на движение ИСЗ оказывается в случае круговых или почти круговых орбит [1, 5, 8]; в [8] представлены соответствующие результаты детального анализа влияния сопротивления воздуха на движение ИСЗ.

В случае почти круговых орбит ИСЗ амплитуда колебаний высоты полета не превосходит значений высоты однородной ат-

мосферы [8], то есть нескольких десятков километров. Так как это условие для эллиптических орбит ИСЗ не выполняется, то для них необходимо проведение отдельных исследований, в том числе и при совместном влиянии ВА и несферичности Земли, и в том числе нецентральности ее поля притяжения. Естественно, что одним из основных методов исследования при этом может быть только метод математического моделирования с использованием соответствующих моделей возмущенного движения ИСЗ. В связи с этим далее будут сформированы такие модели, включающие соответствующие модели и для возмущающих ускорений, которые обусловлены аэродинамическим сопротивлением ВА. Очевидно, что построение таких моделей связано с проектированием силы (2.82) и ускорения (2.83) на оси соответствующих систем координат.

2.4.2.1 Вначале спроектируем вектор \mathbf{j}_{BA} (2.83) на оси ИСК – O_3XYZ , чтобы детализировать компоненты возмущающего ускорения $\Phi = (\Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z)$ в уравнениях движения (2.3), (2.4). Очевидно, что для этого необходимо спроектировать на оси ИСК вектор воздушной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}} = (v_X^{(\text{BA})}, v_Y^{(\text{BA})}, v_Z^{(\text{BA})})$ (2.81). Тогда получим

$$v_X^{(\text{BA})} = V_X + k_{\text{BA}} \omega_3 Y; v_Y^{(\text{BA})} = V_Y - k_{\text{BA}} \omega_3 X; v_Z^{(\text{BA})} = V_Z. \quad (2.84)$$

Тогда для $v_{\text{отн}}$ в (2.83) получим $v_{\text{отн}} = \sqrt{(v_X^{(\text{BA})})^2 + (v_Y^{(\text{BA})})^2 + (v_Z^{(\text{BA})})^2}$.

Итак, проектируя выражение (2.83) для возмущающего ускорения $\mathbf{j}_{\text{BA}} = (\Delta\Phi_X^{(\text{BA})}, \Delta\Phi_Y^{(\text{BA})}, \Delta\Phi_Z^{(\text{BA})})$ на оси ИСК и учитывая соотношения (2.84), получим

$$\Delta\Phi_X^{(BA)} = -b \frac{\rho_{BA} V_{отн}}{2} (V_X + k_{BA} \omega_3 Y);$$

$$\Delta\Phi_Y^{(BA)} = -b \frac{\rho_{BA} V_{отн}}{2} (V_Y - k_{BA} \omega_3 X); \quad (2.85)$$

$$\Delta\Phi_Z^{(BA)} = -b \frac{\rho_{BA} V_{отн}}{2} V_Z.$$

Очевидно, что компоненты аэродинамических ускорений (2.85) в виде $\Delta\Phi^{(BA)} = (\Delta\Phi_X^{(BA)}, \Delta\Phi_Y^{(BA)}, \Delta\Phi_Z^{(BA)})$ будут входить в состав возмущающих ускорений $\Phi = (\Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z)$ в уравнениях движения (2.3), (2.4) и в общем случае эти ускорения Φ тогда должны включать, как минимум, еще возмущающие ускорения, которые обусловлены несферичностью Земли и нецентральностью ее поля сил тяжести, то есть $\Delta\mathbf{g}^{(ИСК)} = (\Delta\Phi_X^{(g)}, \Delta\Phi_Y^{(g)}, \Delta\Phi_Z^{(g)})$. Соответственно, в подразделе 2.3.1 (см. стр. 65) отмечено, что в ГСК для (П1.1) имеет место разложение: $\Delta\mathbf{g}^{(ГСК)} = \Delta\mathbf{g}_r + \mathbf{g}_m$, где $\Delta\mathbf{g}^{(ГСК)} = (\Delta\Phi_x^{(g)}, \Delta\Phi_y^{(g)}, \Delta\Phi_z^{(g)})$ и согласно (2.65) и (2.66):

$$\Delta g_r = -\frac{\partial U_{033}^{(4)}(r, \varphi)}{\partial r} - g_r^{(0)} = g_r^{(2)} + g_r^{(4)};$$

$$g_m = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{033}^{(4)}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = g_m^{(2)} + g_m^{(4)}.$$

Проектируя $\Delta\mathbf{g}_r$ и \mathbf{g}_m на оси ГСК – O_3xyz , получим

$$\Delta\Phi_x^{(g)} = -(\Delta g_r \cos \varphi + g_m \sin \varphi) \cos \lambda;$$

$$\Delta\Phi_y^{(g)} = -(\Delta g_r \cos \varphi + g_m \sin \varphi) \sin \lambda; \quad (2.86)$$

$$\Delta\Phi_z^{(g)} = -\Delta g_r \sin \varphi + g_m \cos \varphi,$$

где φ – геоцентрическая широта точки с радиус-вектором \vec{r} , а λ – ее геоцентрическая долгота; здесь $\vec{r} = (x, y, z)$, $\text{Sin } \varphi = z / r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\text{Sin } \lambda = y / \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\text{Cos } \lambda = x / \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, с учетом (2.86) будет получен вектор

$$\Delta \mathbf{g}^{(\text{ГСК})} = (\Delta \Phi_x^{(g)}, \Delta \Phi_y^{(g)}, \Delta \Phi_z^{(g)}).$$

Чтобы получить компоненты вектора $\Delta \mathbf{g}^{(\text{ИСК})}$ необходимо спроектировать вектор $\Delta \mathbf{g}^{(\text{ГСК})}$ на оси ИСК с учетом поворота относительно нее ГСК на угол (1.23): $\chi = S_0 + \omega_3(t - t_0)$. Тогда получим

$$\Delta \Phi_x^{(g)} = \Delta \Phi_x^{(g)} \text{Cos } \chi - \Delta \Phi_y^{(g)} \text{Sin } \chi;$$

$$\Delta \Phi_y^{(g)} = \Delta \Phi_x^{(g)} \text{Sin } \chi + \Delta \Phi_y^{(g)} \text{Cos } \chi; \quad \Delta \Phi_z^{(g)} = \Delta \Phi_z^{(g)}$$

или с учетом (2.86)

$$\Delta \Phi_x^{(g)} = -(\Delta g_r \text{Cos } \varphi + g_m \text{Sin } \varphi) \text{Cos}(\chi + \lambda);$$

$$\Delta \Phi_y^{(g)} = -(\Delta g_r \text{Cos } \varphi + g_m \text{Sin } \varphi) \text{Sin}(\chi + \lambda); \quad (2.87)$$

$$\Delta \Phi_z^{(g)} = -\Delta g_r \text{Sin } \varphi + g_m \text{Cos } \varphi,$$

где $\text{Sin } \varphi = Z / r$, $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, а $\text{Sin}(\chi + \lambda) = Y / \sqrt{X^2 + Y^2}$ и $\text{Cos}(\chi + \lambda) = X / \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Следовательно, тогда в (2.4) компоненты вектора возмущающих ускорений $\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ можно представить в виде суммы одноименных компонент векторов \mathbf{j}_{BA} (2.85) и $\Delta \mathbf{g}^{(\text{ИСК})} = (\Delta \Phi_x^{(g)}, \Delta \Phi_y^{(g)}, \Delta \Phi_z^{(g)})$, то есть учесть выражения (2.85) и

(2.87). В этом случае уравнения возмущенного движения ИСЗ в ИСК будут представлены в следующем виде:

$$\frac{dX}{dt} = V_X; \quad \frac{dY}{dt} = V_Y; \quad \frac{dZ}{dt} = V_Z; \quad (2.88)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_X}{dt} &= -\frac{k}{r^3} X + \Delta\Phi_X^{(g)} + \Delta\Phi_X^{(BA)}; \\ \frac{dV_Y}{dt} &= -\frac{k}{r^3} Y + \Delta\Phi_Y^{(g)} + \Delta\Phi_Y^{(BA)}; \\ \frac{dV_Z}{dt} &= -\frac{k}{r^3} Z + \Delta\Phi_Z^{(g)} + \Delta\Phi_Z^{(BA)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

2.4.2.2 Вектор воздушной скорости ИСЗ в ГСК – $\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(\text{ГСК})}$ с учетом (2.79) определяется так:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(\text{ГСК})} = \tilde{\mathbf{v}} + (1 - k_{\text{BA}}) \boldsymbol{\omega}_3 \times \tilde{\mathbf{r}}, \quad (2.90)$$

где k_{BA} – коэффициент захвата атмосферы вращением Земли, $\tilde{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ – радиус-вектор и $\tilde{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости ИСЗ в ГСК. Проектируя вектор $\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(\text{ГСК})} = (v_x^{(\text{BA})}, v_y^{(\text{BA})}, v_z^{(\text{BA})})$ с учетом (2.90) на оси ГСК – O_3xyz получим

$$\begin{aligned} v_x^{(\text{BA})} &= v_x - k_{\text{BA}} \omega_3 \sqrt{x^2 + y^2} \text{Sin } \lambda; \\ v_y^{(\text{BA})} &= v_y + k_{\text{BA}} \omega_3 \sqrt{x^2 + y^2} \text{Cos } \lambda; \quad v_z^{(\text{BA})} = v_z, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $\text{Sin } \lambda = y / \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\text{Cos } \lambda = x / \sqrt{x^2 + y^2}$, и, соответственно,

$$\tilde{v}_{\text{отн}} = \sqrt{(v_x^{(\text{BA})})^2 + (v_y^{(\text{BA})})^2 + (v_z^{(\text{BA})})^2}.$$

Далее с учетом полученных выражений (2.91) найдем проекции вектора $\mathbf{j}_{\text{BA}} = (\Delta\Phi_x^{(\text{BA})}, \Delta\Phi_y^{(\text{BA})}, \Delta\Phi_z^{(\text{BA})})$ (2.83) на оси ГСК:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_x^{(\text{BA})} &= -b \frac{\rho_{\text{BA}} \tilde{V}_{\text{отн}}}{2} (v_x - k_{\text{BA}} \omega_3 \sqrt{x^2 + y^2} \text{Sin } \lambda); \\ \Delta\Phi_y^{(\text{BA})} &= -b \frac{\rho_{\text{BA}} \tilde{V}_{\text{отн}}}{2} (v_y + k_{\text{BA}} \omega_3 \sqrt{x^2 + y^2} \text{Cos } \lambda); \\ \Delta\Phi_z^{(\text{BA})} &= -b \frac{\rho_{\text{BA}} \tilde{V}_{\text{отн}}}{2} v_z.\end{aligned}\quad (2.92)$$

Итак, с учетом (2.86) и (2.92) уравнения возмущенного движения ИСЗ в ГСК (2.5), (2.6), а также $\tilde{\Phi}_\delta = \Delta\Phi_\delta^{(g)} + \Delta\Phi_\delta^{(\text{BA})}$, $\delta = x, y, z$, будут представлены в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z; \quad (2.93)$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{k}{r^3} x - \omega_3^2 x + 2\omega_3 v_y + \Delta\Phi_x^{(g)} + \Delta\Phi_y^{(\text{BA})}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{k}{r^3} y + \omega_3^2 y - 2\omega_3 v_x + \Delta\Phi_y^{(g)} + \Delta\Phi_x^{(\text{BA})}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{k}{r^3} z + \Delta\Phi_z^{(g)} + \Delta\Phi_z^{(\text{BA})}.\end{aligned}\right\} \quad (2.94)$$

2.4.2.3 С целью моделирования движения ИСЗ при учете сил сопротивления ВА с помощью любой из приведенных ранее систем уравнений движения ИСЗ в оскулирующих элементах необходимо найти выражения для проекции вектора \mathbf{j}_{BA} (2.83) на

оси орбитального трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$ (см. стр. 43), то есть найти выражения для компонент $S^{(BA)}$, $T^{(BA)}$ и $W^{(BA)}$. Для этого вначале надо найти проекции воздушной скорости ИСЗ $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ (2.81)

на оси орбитального трехгранника $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n\}$, где $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$;

$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}$; $\mathbf{e}_\tau = \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_r$, а $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ и $\mathbf{v} = (V_x, V_y, V_z)$ – радиус-

вектор и абсолютная скорость ИСЗ (в ИСК). Поэтому с учетом указанных обозначений и (2.79) перепишем (2.81) здесь в таком виде:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v} - k_{\text{BA}} \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}.$$

Тогда [9]

$$v_S^{(BA)} = \mathbf{v}_{\text{отн}} \cdot \mathbf{e}_r = (\mathbf{v} - k_{\text{BA}} \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = v_r;$$

$$v_T^{(BA)} = \mathbf{v}_{\text{отн}} \cdot \mathbf{e}_\tau = (\mathbf{v} - k_{\text{BA}} \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_\tau = v_n - k_{\text{BA}} \omega_3 r \sin A;$$

$$v_W^{(BA)} = \mathbf{v}_{\text{отн}} \cdot \mathbf{e}_n = k_{\text{BA}} \omega_3 r \cos A,$$

где A – азимут направления вектора скорости \mathbf{v} (отсчитывается в плоскости с нормалью \mathbf{e}_r от направления на Север по часовой стрелке), для которого из сферической тригонометрии известно [9]: $\cos \varphi \sin A = \cos i$; $\cos \varphi \cos A = \sin i \cos u$ (здесь φ – геоцентрическая широта ИСЗ, i – наклонение плоскости его орбиты к экватору и u – аргумент широты). Соответственно, v_r и v_n определены формулами (1.15) и (1.16).

Итак, компоненты воздушной скорости ИСЗ в ОСК тогда будут равны

$$v_S^{(BA)} = v_r ; v_T^{(BA)} = v_n - k_{BA} \omega_3 r \text{Cos } i ;$$

$$v_W^{(BA)} = k_{BA} \omega_3 r \text{Sin } i \text{Cos } u . \quad (2.95)$$

Таким образом, соответствующие проекции вектора возмущающего ускорения $\mathbf{j}_{BA} = (\Delta\Phi_S^{(BA)}, \Delta\Phi_T^{(BA)}, \Delta\Phi_W^{(BA)})$ (2.83) с учетом (2.95), (1.15), (1.16), а также $v_{\text{отн}} = |\mathbf{v} - k_{BA} \omega_3 \times \mathbf{r}|$, тогда будут определяться по формулам:

$$\Delta\Phi_S^{(BA)} = -b \frac{\rho_{BA} v_{\text{отн}}}{2} v_r ;$$

$$\Delta\Phi_T^{(BA)} = -b \frac{\rho_{BA} v_{\text{отн}}}{2} (v_n - k_{BA} \omega_3 r \text{Cos } i) ; \quad (2.96)$$

$$\Delta\Phi_W^{(BA)} = -b \frac{\rho_{BA} v_{\text{отн}}}{2} k_{BA} \omega_3 r \text{Sin } i \text{Cos } u .$$

В [8, 9] при проведении анализа влияния сопротивления ВА на движение ИСЗ вводились самые различные допущения о характере и структуре возмущающего ускорения \mathbf{j}_{BA} (2.83), в том числе о моделях ВА.

Очевидно, что приведенная здесь модель возмущающих ускорений, обусловленных влиянием ВА, (2.96) может быть использована совместно моделями (2.68) или (2.70) при моделировании движения ИСЗ с помощью уравнений в оскулирующих элементах, а именно: системы уравнений (2.40) – (2.45), если независимая переменная t ; системы (2.51) – (2.56), если независимая переменная ϑ ; системы (2.57) – (2.62), если независимая переменная u .

2.5 Краткие замечания о некоторых факторах, влияющих на движение ИСЗ

В предыдущих подразделах были рассмотрены модели возмущенного орбитального движения ИСЗ, которые учитывали как нецентральность поля тяготения Земли, так и влияние ее ВА. Однако, не только эти, но и некоторые иные факторы также могут существенно влиять на движение ИСЗ, в особенности, на длительных интервалах полета. Поэтому здесь следует отметить еще и некоторые из перечисленных в начале раздела факторов, которые в обязательном порядке включаются в состав возмущающих ускорений в уравнениях движения (2.1) при решении соответствующих прикладных задач космонавтики.

Во-первых, это задачи, связанные с орбитальным маневрированием ИСЗ с помощью ракетных двигательных установок большой и малой тяги [1, 2].

Во-вторых, в настоящем пособии из рассмотрения были исключены модели движения ИСЗ при совершении им спуска на Землю [5, 9], так как в этом случае, как правило, используются специальные виды моделей движения и атмосферы на высотах полета до 120 км.

В отношении первого отметим, что в настоящее время это новый тип задач для небесной механики, в которых требуется не только изучить, но и целенаправленно сформировать траектории искусственных небесных тел. И, как уже отмечено, для решения таких задач, как правило, применяются реактивные управляющие силы, создаваемые ракетными двигательными установками [2, 5]. В этом случае существенной особенностью управляемого движения ИСЗ может оказаться значительное изменение его массы в течение совершаемого маневра, то есть ИСЗ является механической системой переменного состава. Соответственно, если ИСЗ можно рассматривать как материальную точку (тоже переменного

состава, а точнее – точку переменной массы), то тогда его уравнения движения будут представлены уравнением Мещерского [6].

Основополагающая роль в разработке теории космического полета принадлежит К.Э. Циолковскому, И.В. Мещерскому, Ф.А. Цандеру и другим отечественным ученым. Важный вклад в теорию полета космических аппаратов и ракет также внесли и иностранные пионеры космонавтики (Р. Годдар, Г. Оберт, В. Гоман и другие) [1, 2].

Спуск ИСЗ на Землю является одним из важнейших и ответственных этапов космического полета, так как при полете на высотах до 80 ... 90 км ИСЗ будет испытывать не только большие перегрузки, но и сильный аэродинамический нагрев [5, 9]. Спуск при этом может быть как баллистическим (то есть без использования подъемной силы), так и планирующим (соответственно, с использованием подъемной силы). Моделирование движения ИСЗ на участке спуска удобно проводить в системе координат, непосредственно связанной с Землей, например, в ГСК, с использованием модели движения вида (2.5), (2.6), в которой соответствующим образом конкретизирован вектор возмущающих ускорений $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_x, \tilde{\Phi}_y, \tilde{\Phi}_z)$, а также учтены процессы теплообмена на поверхности ИСЗ (или его части – спускаемого аппарата). Ввиду значительной сложности таких моделей спуска ИСЗ их исследование возможно только методами численного интегрирования систем обыкновенных уравнений [3, 18].

В заключение можно указать на еще один возмущающий фактор – тяготение к Луне и Солнцу, который может оказаться существенным, в частности, для высокоорбитальных или геостационарных ИСЗ. Весьма подробный анализ влияния такого вида возмущений на движение ИСЗ и их модели приведены в [5, 8, 9, 13, 19].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
2. Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. – Изд. 3-е, доп. и перераб. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – Изд. 2-е, доп. и перераб. / Под ред. Г.Н. Дубошина / В.К. Абалакин, Е.П. Аксенов, Е.А. Гребенников и др. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
5. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова. – М.: Машиностроение, 1972. – 608 с.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – Изд. 4, испр. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 592 с.
7. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение, 1970. – 260 с.
8. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
9. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. – Изд. 2, перераб. и доп. / Под ред. М.К. Тихонравова / М.К. Тихонравов, И.К. Бажинов, О.В. Гурко и др. – М.: Машиностроение, 1974. – 332 с.
10. Горелов Ю.Н. Кинематические характеристики орбитального трехгранника // Известия СамНЦ РАН. – 2018. – Т. 20. – № 1. – С. 96-100.

11. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. – Изд. 2, перераб. и доп. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
12. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) / справочный документ. – М.: Военно-топографическое управление ГШ ВС РФ, 2014. – 52 с.
13. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1980. – 360 с.
14. Носков Б.Н. Влияние атмосферы на движение искусственных спутников Земли // В кн.: «Исследование космического пространства». Серия: Итоги науки и техники, т. 15. – М.: ВИНТИ, 1980. – С. 64 – 81.
15. ГОСТ 25645.101-83. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для проектных баллистических расчетов искусственных спутников Земли. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 168 с.
16. ГОСТ 25645.115-84. Атмосфера земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 46 с.
17. ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли: дата введения: 2005-01-01. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2004. – 24 с.
18. Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутты): учебное пособие. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2023. – 80 с.
19. Емельянов Н.В. Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ // В кн.: «Исследование космического пространства». Серия: Итоги науки и техники, т. 15. – М.: ВИНТИ, 1980. – С. 44 – 63.

Гравитационное поле и фигура Земли

Согласно справочному документу [12] параметры фигуры общего земного эллипсоида (ОЗЭ) и нормальное гравитационное поле Земли определяются посредством следующих четырех независимых параметров:

1) гравитационный параметр Земли – геоцентрическая гравитационная постоянная (с учетом атмосферы):

$$k_3 = \gamma M_3 = 398600,4418 \cdot 10^9, \text{ м}^3\text{с}^{-2},$$

где γ – универсальная постоянная тяготения, M_3 – масса Земли;

2) угловая скорость вращения Земли:

$$\omega_3 = 7,292115 \cdot 10^{-5}, \text{ рад/с};$$

3) фундаментальная геодезическая постоянная большая полуось ОЗЭ: $a_3 = 6378136, \text{ м};$

4) фундаментальная геодезическая постоянная – сжатие ОЗЭ: $\alpha = 1/298,25784.$

Остальные геодезические постоянные, характеризующие физические и геометрические особенности Земли, которая представлена в виде уровненного эллипсоида вращения (нормальной Земли), связаны с указанными выше фундаментальными геодезическими постоянными соответствующими математическими зависимостями. Они приведены в [12], а здесь укажем значения только некоторых из них:

малая полуось общего земного эллипсоида – $6356751,4, \text{ м};$

ускорение нормальной силы тяжести на экваторе ОЗЭ – $978032,84, \text{ мГал};$

ускорение нормальной силы тяжести на полюсе ОЗЭ – 983218,80, мГал;

коэффициенты зональных гармоник нормального потенциала Земли (НПЗ): вторая гармоника НПЗ: $+1082,62575 \cdot 10^{-6}$; четвертая зональная гармоника НПЗ: $-2,37089 \cdot 10^{-6}$; шестая зональная гармоника НПЗ: $+6,08 \cdot 10^{-9}$; восьмая зональная гармоника НПЗ: $-1,40 \cdot 10^{-11}$.

По определению [12] общеземная система координат есть ранее введенная ГСК – O_3 хуз (см. стр. 29), то есть это связанная с поверхностью Земли геоцентрическая система координат, в которой положение точек задается прямоугольными координатами. В геодезических приложениях для этого используются геодезические координаты B , L и H , относящиеся к ОЗЭ, и, соответственно, геодезическая широта B здесь определяется как угол между нормалью к ОЗЭ, проходящей через заданную точку пространства, и плоскостью экватора Земли; геодезическая долгота L – двугранный угол между плоскостью начального (гринвичского) меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через заданную точку (положительное направление отсчета долгот L от начального меридиана к востоку, от 0° до 360°); геодезическая высота H – равна отрезку нормали к ОЗЭ от его поверхности до заданной точки.

Общеземная система координат, которая входит в состав ПЗ-91.11, является реализацией некоторой ГСК на эпоху 2010.0.

В гравиметрии поле притяжения, соответствующее ОЗЭ, называется нормальным, а отклонения реального поля земного притяжения от нормального – поле его аномалий, то есть для гравитационного поля Земли имеет место [3 – 5, 8, 11, 12]:

$$U = U_0 + \Delta U ,$$

где U_0 – нормальный потенциал силы тяжести для ОЗЭ, а ΔU – потенциал, который отвечает полю аномальных сил притяжения

Земли. В свою очередь потенциал U_0 представляет собой сумму нормального потенциала сил притяжения ОЗЭ и потенциала для центробежных сил согласно (2.64), то есть имеет место:

$$U_0 = U_{\text{ОЗЭ}} + U_{\text{вр}}.$$

Очевидно, что гравитационное поле Земли можно характеризовать следующим потенциалом:

$$U = U_{\text{ОЗЭ}} + \Delta U + U_{\text{вр}}.$$

При учете влияния гравитационного поля Земли (ГПЗ) в орбитальных и баллистических расчетах, а также при решении геодезических или геофизических задач используются численно-аналитические модели ГПЗ, которые представляют потенциал силы притяжения $U_{\text{ОЗЭ}}$, и цифровые модели для возмущающего потенциала ΔU , описывающих особенности аномального ГПЗ. При этом удобно использовать единую форму представления для обоих слагаемых потенциала силы притяжения Земли в виде разложения $U_{\text{ГПЗ}} = U_{\text{ОЗЭ}} + \Delta U$ в ряд по сферическим функциям [3 – 5, 8, 11 – 13], а именно [5]:

$$U_{\text{ГПЗ}}(r, \varphi, L) = \frac{a_{00}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \text{Cos } mL + b_{nm} \text{Sin } mL) P_{nm}(\text{Sin } \varphi),$$

где a_{nm} , b_{nm} – коэффициенты, которые определяются из гравиметрических данных и по наблюдениям за движением ИСЗ; r – расстояние от центра масс Земли до точки, для которой рассчитывается потенциал; φ – геоцентрическая широта этой точки, а L – ее геодезическая долгота. При $m=0$ $P_{n0}(\text{Sin } \varphi)$ – многочлен Лежандра степени n .

Соответственно, здесь в выражении для потенциала $U_{\text{ГПЗ}}(r, \varphi, L)$ сферической функцией степени n называется тригонометрический многочлен

$$S_n(\varphi, L) = a_{n0} P_{n0}(\sin \varphi) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos mL + b_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Здесь $P_{n0}(\sin \varphi)$ – зональные сферические функции (или зональные гармоники);

$P_{nm}(\sin \varphi) \cos mL$, $P_{nm}(\sin \varphi) \sin mL$ – тессеральные сферические функции (или тессеральные гармоники);

$P_{nn}(\sin \varphi) \cos nL$, $P_{nn}(\sin \varphi) \sin nL$ – секториальные сферические функции (или секториальные гармоники).

Схемы изменения знаков на сфере, которые задаются этими гармониками Y_{nm} , приведены на рис. П1.1 [5].

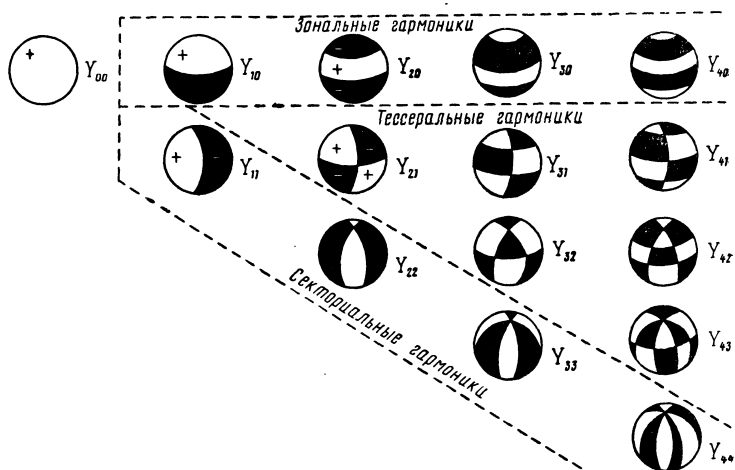


Рис. П1.1 – Схемы изменения знаков на сфере, задаваемые гармониками Y_{nm}

Потенциал уровенного эллипсоида вращения с точностью до величин порядка квадрата сжатия Земли включительно принимается в следующем виде [5]:

$$U_{\text{ОЗЭ}}(r, \varphi) = \frac{a_{00}}{r} + \frac{a_{20}}{r^3} P_{20}(\text{Sin } \varphi) + \frac{a_{40}}{r^5} P_{40}(\text{Sin } \varphi), \quad (\text{П1.1})$$

где a_{00} , a_{20} , a_{40} – некоторые константы, вычисляемые по ниже приведенным выражениям, а $P_{20}(\text{Sin } \varphi)$, $P_{40}(\text{Sin } \varphi)$, многочлены Лежандра, определяемые по формулам:

$$P_{20}(\text{Sin } \varphi) = \frac{3}{2} \text{Sin}^2 \varphi - \frac{1}{2}; \quad P_{40}(\text{Sin } \varphi) = \frac{35}{8} \text{Sin}^4 \varphi - \frac{15}{4} \text{Sin}^2 \varphi + \frac{3}{8}.$$

Соответственно, значения констант a_{00} , a_{20} , a_{40} определяются следующими выражениями [5, 8]:

$$\begin{aligned} a_{00} &= k_3 = g_3 a_3^2 \left(1 - \alpha + \frac{3}{2} m - \frac{15}{14} m \alpha + \dots \right); \\ a_{20} &= -g_3 a_3^4 \left(\frac{2}{3} \alpha - \alpha^2 - \frac{1}{3} m + \frac{10}{7} m \alpha + \dots \right); \\ a_{40} &= \frac{8}{35} g_3 a_3^6 \left(\frac{7}{2} \alpha^2 - \frac{5}{2} m \alpha + \dots \right), \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

где параметр $m = \frac{\omega_3^2 a_3}{g_3}$, а ω_3 – угловая скорость вращения Земли,

a_3 – большая полуось ОЗЭ, g_3 – ускорение силы тяжести на экваторе. Значения констант a_{00} , a_{20} , a_{40} по данным [8] равны:

$$a_{00} = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2; \quad a_{20} = -1,756 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2; \quad a_{40} = 1,548 \cdot 10^{15} \text{ км}^7/\text{с}^2.$$

С учетом (П1.1) получим для радиальной и меридиональной составляющих ускорения силы тяжести

$$g_r = -\frac{\partial U_{03Э}(r, \varphi)}{\partial r} = g_r^{(0)} + g_r^{(2)} + g_r^{(4)};$$

$$g_m = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{03Э}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = g_m^{(2)} + g_m^{(4)}.$$

Здесь компонента $g_r^{(0)}$ определяет притяжение к сферической и невращающейся Земле (с массой M_3), а остальные компоненты g_r и g_m суть поправки к такому притяжению шара как за счет несферичности, так и за счет вращения Земли.

Соответствующие выражения для компонент g_r и g_m приведены в [8]. Также там же указаны и оценки для максимальных значений следующих отношений:

$$\left| \frac{g_r^{(2)}}{g_r^{(0)}} \right|_{\max} \approx \left(\frac{a_3}{r} \right)^2 \alpha < \alpha \approx 0,0033; \quad \left| \frac{g_m^{(2)}}{g_r^{(0)}} \right|_{\max} \approx \left(\frac{a_3}{r} \right)^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} \approx 0,0015;$$

$$\left| \frac{g_r^{(4)}}{g_r^{(0)}} \right|_{\max} \approx \frac{8}{7} \left(\frac{a_3}{r} \right)^4 \alpha^2 < \frac{8}{7} \alpha^2 \approx 1,0 \cdot 10^{-5};$$

$$\left| \frac{g_m^{(4)}}{g_r^{(0)}} \right|_{\max} \approx \frac{9}{14} \left(\frac{a_3}{r} \right)^4 \alpha^2 < \frac{9}{14} \alpha^2 \approx 0,6 \cdot 10^{-5}.$$

Следует отметить, что в отличие от (П1.1) потенциал уровня эллипсоида вращения в [12] введен с учетом шестой и восьмой зональных гармоник.

Выражение (П1.1) называют нормальным потенциалом Земли [5], но в силу того, что в нем член с коэффициентом a_{40} на три порядка меньше члена с коэффициентом a_{20} , в качестве нормального потенциала обычно также принимают следующее выражение [5]:

$$U_{\text{ОЗЭ}}(r, \varphi) = \frac{a_{00}}{r} + \frac{a_{20}}{r^3} P_{20}(\text{Sin } \varphi). \quad (\text{П1.3})$$

При этом радиальная g_r (положительное направление к центру Земли) и меридиональная g_m (положительное направление – на Север) составляющие ускорения силы притяжения Земли будут определяться по следующим формулам:

$$g_r = \frac{a_{00}}{r^2} + 3 \frac{a_{20}}{r^4} P_{20}(\text{Sin } \varphi) = \frac{a_{00}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^4} (3 \text{Sin}^2 \varphi - 1);$$

$$g_m = -\frac{a_{20}}{r^4} P_{21}(\text{Sin } \varphi) = -\frac{3a_{20}}{r^4} \text{Sin } \varphi \text{Cos } \varphi.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

*Горелов Юрий Николаевич
Курганская Любовь Викторовна*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
ИСКУСТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 28.06.2023. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,0
Тираж 27 экз. Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.