

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Методы оптимизации

Электронный учебно-методический комплекс
по дисциплине в LMS Moodle

САМАРА
2012

УДК 519.85, 519.6

Автор-составитель: **Ковалев Алексей Андреевич**

Методы оптимизации [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине в LMS Moodle / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А.А. Ковалев. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:

1. Курс лекций.
2. Задания на практические работы.
3. Темы для подготовки к зачету
4. Тесты для итогового контроля знаний.

УМКД «Методы оптимизации» предназначен для студентов факультета информатики, обучающихся по направлению подготовки специалистов 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем» в 5 семестре.

УМКД разработан на кафедре технической кибернетики.

ЛЕКЦИЯ 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Аналитические методы решения задач на отыскание наибольших и наименьших величин являются актуальными уже на протяжении многих веков развития человечества. Как наука теория экстремальных задач начала создаваться в начале XVII века. Большой вклад в ее развитие внесли такие крупнейшие ученые как П.Ферма, М.Ньютон, Ж.Лагранж, А.Эйлер, Ж.Пуанкаре, А.В.Канторович, Н.Винер и др.

В связи с запросами техники, экономики бурное развитие получили такие разделы теории оптимизации, как динамическое программирование, теория оптимального управления, методы решения экстремальных задач и анализа данных. Знание основных принципов и законов управления, основанных на математических методах оптимизации, позволяет эффективно управлять организационными системами, производством, делать прогнозы в финансовой деятельности и экономике, влиять на физические и биологические процессы.

Общепринятую точку зрения на предмет и цели оптимизации выразили Бейтлер и Уайл: «То, что люди стремятся к совершенству, нашло свое выражение в теории оптимизации. Она изучает, как описать и достичь наилучшего, если мы имеем возможность измерения и можем переходить от плохого к хорошему».

Объектом курса методов оптимизации являются оптимизационные задачи. Предмет курса МО, составляют теория и методы решения однокритериальных задач, поставленных на математических моделях.

В пределах настоящего курса будут рассмотрены следующие разделы:

1. Линейное программирование(ЛП)

(Симплекс-метод, двойственный симплекс-метод, двойственная задача ЛП)

2. Нелинейное программирование

(Методы безусловной оптимизации, выпуклое программирование, методы оптимизации функций при наличии ограничений)

3. Оптимизация на дискретных моделях

(NP-полные задачи, целочисленное линейное программирование, динамическое программирование)

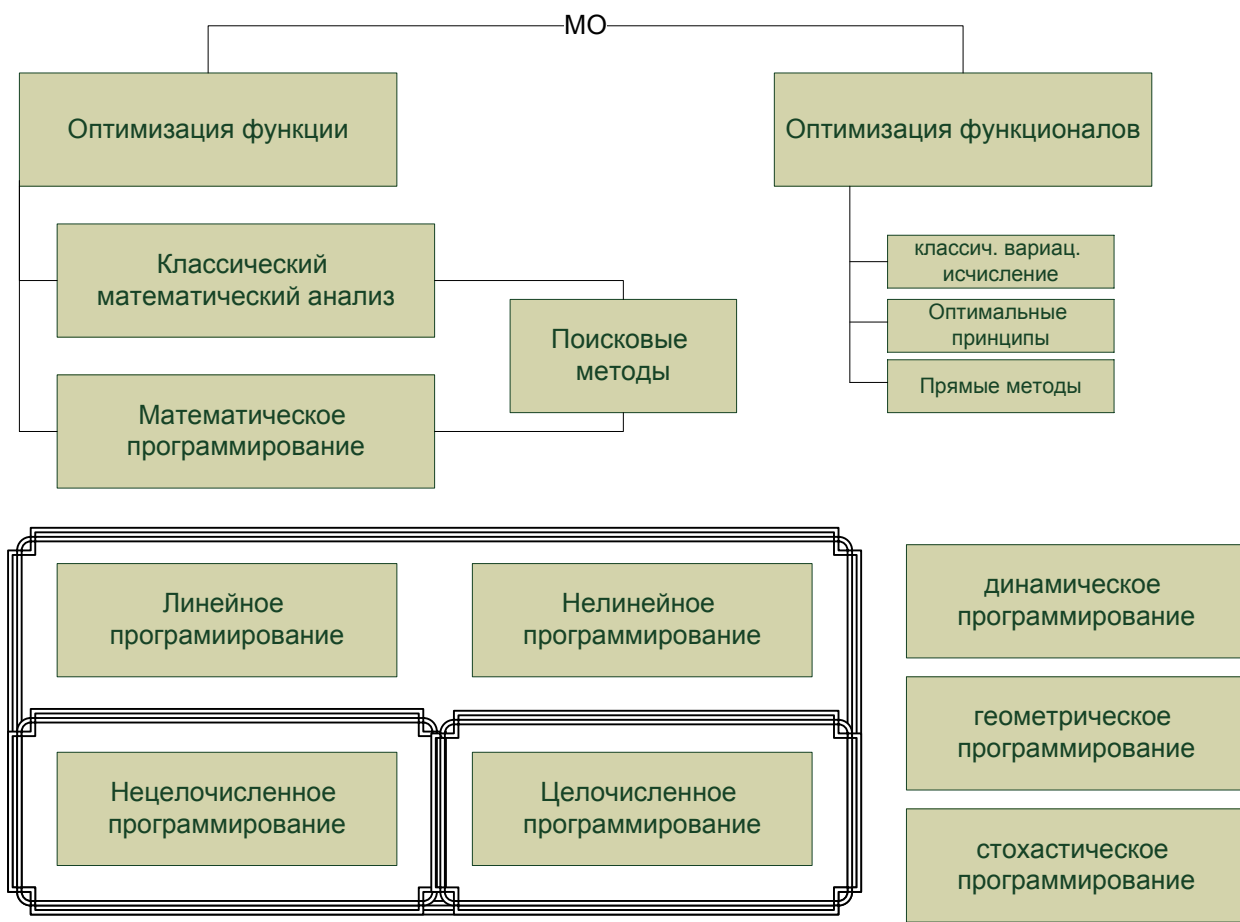
4. Оптимизация на графах

(ор. графы, неор. графы, задача о назначениях)

5. Стохастическое программирование

(стохастическая аппроксимация, генетический алгоритм)

Схема классификации МО



§1 Основные понятия и определения оптимизации

В настоящем курсе рассматриваются задачи оптимизации в конечномерном пространстве.

Пусть задана некоторая скалярная **целевая функция**. Задача оптимизации может быть сформулирована как задача оптимизации целевой функции при условии выполнения ряда заданных ограничений. \forall решение, которое удовлетворяет этим ограничениям называется **допустимым**.

Опр.1.1 Задачей оптимизации называют задачу отыскания минимумов или максимумов (экстремумов) функции на заданных множествах:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X \tag{1.1}$$

$f(x)$ – **целевая функция** или **критерий оптимальности**. X – допустимое множество решения задач. При этом т.к. мы рассматриваем только конечномерные задачи $X \subseteq \mathbf{R}^n$.

Опр.1.2 Точка $x^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ называется:

а) точкой **глобального** минимума функции f на множестве X или глобальным решением задачи (1.1), если

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X \quad (1.2)$$

б) точкой **локального** минимума f на множестве X или локальным решением задачи (1.1), если существует ε -окрестность $O_\varepsilon(x^*) \subset R^n$ точки x^* :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X \cap O_\varepsilon(x^*), \quad (1.3)$$

где $O_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n | x - x^* \leq \varepsilon\}$

Если (1.2), (1.3) выполняется строго, то x^* - **строгое** решение в глобальном или локальном смысле соответственно.

Если $x^* \in X$ - точка глобального минимума f на X , то пишут $x^* = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} f(x)$ или

$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$. Множество всех точек глобального минимума a на X

обозначается

$$\underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} f(x) = \{x^* \in X | f(x^*) = f^*\}$$

Аналогично в случае максимализации $f(x) \rightarrow \max$, при этом $-f(x) \rightarrow \min$.

Возникает вопрос о существовании решения задачи (1.1), на которую дает ответ следующая теорема:

Теорема 1.1 (вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ непрерывна на компактном множестве X , то она достигает своих точных верхних и нижних граней, т.е. \exists такие точки x_1^* и $x_2^* \in X$, что

$$f(x_1^*) = \sup_{x \in X} f(x), f(x_2^*) = \inf_{x \in X} f(x)$$

Если $X = R^n$, то задача (1.1) – общая постановка задачи безусловной оптимизации. Вообще вид $f(x)$ и области X определяет классификацию задач оптимизации.

Например, задача нелинейного программирования имеет вид:

$$f(x) \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

При ограничениях:

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \quad (1.5)$$

$$g_i(x) = 0, i = m+1, \dots, k. \quad (1.6)$$

$$x^* \in X \subset R^n.$$

Где $f(x), g_1(x), \dots, g_k(x)$ – функции определенные на R^n , $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ (1.5) – ограничения в форме неравенств, (1.6) – в форме равенств. $x \in X$, удовлетворяющий (1.5), (1.6) называется допустимой точкой. Совокупность всех допустимых точек образует допустимую область.

Опр.1.3 Оптимальным решением задачи оптимизации (1.4) – (1.6) называется допустимое решение при котором $f(x)$ достигает своего экстремального значения (т.е. лучшее допустимое решение в смысле выбранного критерия).

В случае, если в задаче (1.4) – (1.6) функции $f(x)$, $g_i(x)$ являются линейными, а также соотношения, задающее область X линейное, то сформулированная задача является задачей **линейного программирования**.

Будем изучать как **точные (оптимальные)** решения, так и **приближенные (субоптимальные)** решения, так как существует множество задач, для которых точное решение или не может быть найдено или поиск его из-за своей сложности практически неприемлим.

Глава 1. Методы поиска

§ 1. Градиентные методы

Рассмотрим задачу:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X \subset R^n \quad (1.1)$$

И процедуру построения минимизирующей последовательности точек $\{x_k\}$:

$$f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_k) > \dots \quad (1.2)$$

Опр1.1: Методы получения точек, соответствующих условию (1.2), называется методом спуска.

Опр1.2: Градиентным методом называется метод, согласно которому точка x_{k+1} выбирается по отношению к x_k в направлении $-\nabla f(x_k)$, т.е. $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, где t_k - длина шага.

При ∇ методе спуск $\{x_k\}$ подчиняется условию:

$$x_{k+1} = x_k - t_k p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

где p_k - вектор направления, t_k - длина шага.

В зависимости от выбора t_k, p_k получаются различные методы спуска:

1. Методы, использующие только значение функции – прямые методы (методы Ф-ого порядка),
2. Методы, использующие $f(x)$ и производную – градиентные методы 1ого порядка,
3. Методы, использующие также значения 2ой производной – методы 2-ого порядка.

Рассмотрим градиентные методы 1ого и 2ого порядка.

1.1 Метод наискорейшего спуска с оптимизируемой длиной шага.

Для выбора шага t_k используется условие:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k - t_k \nabla f(x_k)) \rightarrow \min_{t_k > 0} \quad (1.4)$$

В качестве p_k выбирается антиградиент $-\nabla f(x_k)$.

Алгоритм метода

Шаг1: инициализация

Выбрать $\varepsilon > 0$ определяющее множество решений

$$\Omega = \{x_k \mid \|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Выбрать начальную точку x_0

Шаг2: Критерий останова

Если $x_k \in \Omega$ – stop. Иначе к шагу 3.

Шаг3: Итерация

Вычислить $\nabla f(x_k)$, определить t_k из решения задачи одномерной минимизации

$$f(x_{k+1}) = f(x_k - t_k \nabla f(x_k)) \rightarrow \min_{t_k > 0} \square$$

Положить $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, заменить k на $k+1$, перейти к шагу 2.

1.2 Метод наискорейшего спуска с постоянным шагом

t

Условие, при котором можно выбрать постоянную длину шага $t_k =$, определяется следующей теоремой:

Теорема 1.1: $\{x_k\} \subset \mathbb{K}$ - компакт и \exists такое число L : градиент $\nabla f(x_k)$ функции $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

Тогда \exists параметр t : \forall последовательности точек $\{x_k\}$, определяемых процессом $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$ и $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$.

Алгоритм метода

Шаг1: инициализация

Выбрать $\varepsilon > 0$ определяющее множество решений

$$\Omega = \{x_k \mid \|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon\} (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Определить длину шага $t = \frac{1}{2}L$, где L определяется условием

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X$$

Выбрать начальную точку x_0

Шаг2: Критерий останова

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

Шаг3: Итерация

Положить $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, заменить k на $k+1$, перейти к шагу 2.

Замечание. Метод наискорейшего спуска хорошо работает только для точек далеко отстоящих от стационарной точки, в нуле которой метод сходится медленно за счет выбора очень маленькой длины шага и частой смены направлений.

1.3 Метод Ньютона

Относится к градиентным методам второго порядка. Рассмотрим квадратичную аппроксимацию функции $f(x) \in C^2(X)$, где X – замкнутое выпуклое множество из R^n , в точке x_k функции

$$\tilde{f}(x) = f(x_k) + (\nabla f(x_k), (x - x_k)) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H(x_k)(x - x_k), \quad (1.6)$$

где $H(x_k) = \left(\frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$ – матрица Гессе $1 \leq i, j \leq n$, $\nabla f(x)$ – градиент функции f .

Необходимое условие экстремума для функции $\tilde{f}(x)$ (1.6) в точке x_k является выполнение условия:

$$\tilde{f}'(x) = \nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = 0 \quad (1.7)$$

Предполагая существование в точке x_k матрицы H^{-1} из (1.7) получаем

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

В общем случае нельзя гарантировать существование H^{-1} и сходимости метода, тем не менее можно показать сходимость метода для некоторой окрестности точки x^* , для которой $\nabla f(x^*) = 0$ и $\exists H^{-1}(x^*)$.

Теорема 1.2: (о сходимости метода Ньютона)

$f(x) \in C^2(X)$ Рассматривая метод Ньютона определяющий плоскость точек

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

x^* – таково, что $\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \exists H^{-1}(x^*)$

Если начальная точка x_0 достаточно близка к x^* , так что \exists числа $C_1, C_2 > 0$:

$C_1, C_2 < 1 \Rightarrow$

$$(1) \|H^{-1}(x)\| \leq C_1$$

$$(2) \|\nabla f(x^*) - \nabla f(x_k) - H(x)(x^* - x_k)\| / \|x - x^*\| \leq C_2$$

Для всех x , удовлетворяющих неравенству $\|x - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|$, то тогда для последовательности точек, порождаемых методом Ньютона, сходится к x^* , а именно $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

Алгоритм метода

Шаг1: инициализация

Выбрать $\varepsilon > 0$ определяющее множество решений

$$\Omega = \{x_k \mid \|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Выбрать начальную точку x_0

Шаг2: Критерий останова

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

Шаг3: Итерация

Определить новую точку $x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$, заменить k на $k+1$, перейти к шагу 2.

§ 2. Методы прямого поиска

2.1 Метод последовательной минимизации функции по направлениям

Производится последовательная минимизация функции вдоль n линейно независимых направлений.

x_k - точка на k -ом шаге, $d_{k,1}, \dots, d_{k,n}$ - направления минимизации. Рассмотрим векторы:

$y_{k,1}, \dots, y_{k,n}$ заданные соотношениями:

$$y_{k,1} = x_k, \dots, y_{k,j+1} = y_{k,j} + t_{k,j} d_{k,j} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

Где через $t_{k,j}$ обозначено решение одномерной оптимизационной задачи

$$f(y_{k,j} + t_{k,j} d_{k,j}) \rightarrow \min_{t_{k,j}} \quad (2.2)$$

То в качестве очередной точки полагают $x_{k+1} = y_{k,n+1}$. В дальнейшем будем считать, что

$\|d_{kj}\| = 1, \forall k, j = \overline{1, n}$. Условие сходимости алгоритма даются теоремой.

Теорема 2.1: (о сходимости последовательности пробных точек)

Пусть плоскость точек $\{x_k\}$ определяется формулами (2.1)-(2.2), $\{x_k\} \in K$ - компакт и $\exists \varepsilon > 0: \det [d_{k,1}, \dots, d_{k,n}] \geq \varepsilon$ для всех k . Функция f дифференцируема и имеет единственный минимум вдоль \forall прямой в R^n , $\Omega = \{x^* | \nabla f(x^*) = 0\}$ - множество решений.

Тогда множество $\{x_k\}$, порождаемое алгоритмом либо конечно, либо все предельные точки, порождаемые плоскостью лежат в Ω .

2.2 Метод циклического покоординатного спуска

Алгоритм метода

Шаг1: инициализация

Выбрать $\varepsilon > 0$, взять в качестве d_1, \dots, d_n координаты:

$d_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, d_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, d_n = (0, 0, \dots, 1)^T$. Множество решений:

$\Omega = \{x_k | \|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Выбрав начальную точку x_1 и $y_{1,1} = x_1, k = j = 1$.

Шаг2: Критерий останова

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

Шаг3: Итерация

Положить $t_{k,j}$ равным решению задачи минимизации функции $f(y_{k,j} + t_{k,j}d_{k,j}), t_{k,j} \in R$.

Положим $y_{k,j+1} = y_{k,j} + t_{k,j}d_{k,j}$. Если $j < n$, то заменить j на $j+1$ и повторить шаг итерации. Если $j=n$, то положить $x_{k+1} = y_{k,n+1}, j = 1$. Заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 2.

Из теоремы 2.1 следует что алгоритм сходится при условии:

1. f – дифференцируема
2. минимум f вдоль \forall направления в R^n единственен
3. последовательность точек, генерируемых алгоритмом, содержится в компактном множестве и R^n .

При выбранном критерии останова условие дифференцируемости функции f является существенным. Для недифференцируемых функций метод может останавливаться в точке не являющийся стационарной. В некоторых случаях эта трудность может быть преодолена поиском вдоль направления $p_k = x_{k+1} - x_k$. Такой шаг обычно называют ускоряющим шагом.

Ускоряющий шаг часто приводит к уменьшению времени работы алгоритма и для дифференцируемых функций. Обычно эмпирическим путем устанавливается, что шаг делается через определенное число итераций. Такая модификация метода обычно ускоряет сходимость метода.

2.3 Метода покоординатного спуска с преобразованием базиса (метод Розенброка)

Х. Розенброком в 1960г.

Суть: на λ итерации строится новый ортонормированный базис.

Пусть x_k - текущая пробная точка, $d_j(x_k) j = \overline{1, n}$ - текущий ортонормированный базис.

Построение новой точки осуществляется в соответствии с процедурой минимизации по направлениям текущего базиса $d_j(x_k) j = \overline{1, n}$.

Пусть как и ранее t_k - решения задач минимизации функции: $f(y_j + td_j)$. Построение нового базиса $d_j(x_{k+1}) j = \overline{1, n}$ в новой точке x_{k+1} проводится с помощью процедуры Граммы-Шмидта:

$$l_j = \begin{cases} d_j, \text{ а̀ññè } t_j = 0 \\ \sum_{i=1}^n t_i d_i(x_k), \text{ а̀ññè } t_j \neq 0 \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} l_j, \text{ ì ðè } j = 1 \\ l_j - \sum_{i=1}^{j-1} (l_j^T d_i(x_{k+1})) d_i(x_{k+1}), \text{ ì ðè } j > 2 \end{cases}$$

$$d_j(x_{k+1}) = b_j / \|b_j\|$$

Алгоритм Розенброка

Шаг1: инициализация

Выбрать $\varepsilon > 0$, взять в качестве d_1, \dots, d_n взять ортонормированное множество решений

$$\Omega = \left\{ x_k \mid \|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \text{ Выбрав начальную точку } x_1 \text{ и } y_1 = x_1, k = j = 1.$$

Шаг2: Критерий останова

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

Шаг3: Итерация

Положить t_j равным решению задачи минимизации функции $f(y_j + td_j)$ при условии $t \in R$.

Положим $y_{j+1} = y_j + t_j d_j$. Если $j < n$, то заменить j на $j+1$ и повторить шаг итерации. Если $j = n$, то положить $x_{k+1} = y_{n+1}$ и заменить k на $k+1$. Построить в точке x_{k+1} новый ортонормированный базис в соответствии с вышеизложенной процедурой Граммы-Шмидта. Положить $j=1$ перейти к шагу 2.

Пример 2.1: Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^4 + (2x_2 - x_1)^2$ методом покоординатного спуска с преобразованием базиса.

Решение: Начальный базис $d_1(1, 0)^T, d_1(0, 1)^T$. Множество решений

$$\Omega = \left\{ x_k \mid \|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon = 0,3. \text{ Начальная пробная точка } x_0 = (3, 2)^T. \text{ Вычислим}$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1 - 1)^3 - 2(2x_2 - x_1) \\ 4(2x_2 - x_1) \end{pmatrix}. \text{ Проверим критерий остановки } \|\nabla f(x_0)\| = 30,265 > 0,3 \Rightarrow$$

строим новую пробную точку. Для $x_0 = (3, 2)^T$ определяем t , решая задачу

$$f(y_1) = (y_1 + td_1) \rightarrow \min_t. \text{ Определив } t_1 = -1, \text{ рассчитываем значения новой точки } y_2 = y_1 + t_1 d_1.$$

Решив соответствующую задачу и определив $t_2 = -1$ рассчитываем значение новой пробной точки $x_1 = y_3 = y_2 + t_2 d_2 = (2, 1)^T$. Строим новый ортонормированный базис:

$$d_1(x_1) = \begin{pmatrix} -0,70711 \\ -0,70711 \end{pmatrix} \quad d_2(x_2) = \begin{pmatrix} 0,70711 \\ -0,70711 \end{pmatrix}. \text{ Результаты вычислений в таблице 2.1}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$\ \nabla f(x_k)\ $	t_1	t_2
1	$(2, 1)^T$	1	4	0.5802	-0.2192
2	$(1.435, 0.745)^T$	0.039	0.31	0.3035	-0.0357
3	$(1.173, 0.587)^T$	$9 \cdot 10^{-4}$	0.018		

Для $x_3 = (1.173, 0.587)^T$ выполнен критерий остановки.

§ 3. Методы минимизации функции одной переменной не использующие производной

Для многих задач безусловной оптимизации при определении длины шага необходимо выполнять одномерную оптимизацию. Классический подход: $f'(x) = 0$, однако, на практике вычисление производной связано с неустойчивостью вычислений. Рассмотрим задачу одномерной минимизации функции $f(t): a \leq t \leq b$, $[a, b]$ - отрезок неопределенности.

Опр 3.1: $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и

$$\exists t^* : \forall t \in [a, b] f(t^*) \leq f(t) \text{ и } \forall \alpha, \beta \in [a, b]: f(t^*) \neq f(\alpha), f(t^*) \neq f(\beta), \text{ è } \alpha < \beta$$

выполнено:

- 1) $f(\alpha) > f(\beta)$ при $\beta < t^*$
- 2) $f(\alpha) < f(\beta)$ при $t^* \leq \alpha$

3.1 Метод дихотомического поиска

Пусть $f: R \rightarrow R$ - унимодальна

Пусть f - вычислена в точках $\alpha_1, \beta_1: a < \alpha_1 < \beta_1 < b$. В зависимости от f длина нового отрезка $\beta_1 - \alpha_1$ или $b_1 - \alpha_1$. Оптимальная стратегия выбора точек α_1, β_1 заключающихся в стремлении минимизировать тах отрезок:

$$\max \{ \beta_1 - a_1, b_1 - \alpha_1 \} \rightarrow \min_{\alpha_1, \beta_1}$$

Это может быть достигнуто если $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}$, но нам нужно 2 точки => выбираем α_1, β_1 симметрично на расстоянии $\varepsilon > 0$ от центра $[a_1, b_1]$. ε достаточно мало, чтобы обеспечить требуемую точность: $b_2 - a_2 = \varepsilon + (b_2 - a_2)/2$ (т.е. близко к искомому t^*) и одновременно значения $f(\alpha_1)$ и $f(\beta_1)$ были различны.

Алгоритм дихотомического поиска

Шаг1: инициализация

Выбрать допустимую длину отрезка неопределенности: $0 < \delta < b - a$ и константу различимости $0 < \varepsilon < \delta/2$. Задаем $[a_1, b_1]$ - начальный отрезок неопределенности. Положить $k=1$.

Основной цикл

Шаг2: Критерий останова

Если $b_k - a_k < \delta_k \rightarrow \text{stop}$ минимум $\in [a_k, b_k]$.

Шаг3: Итерация

Вычислим: $\alpha_k = (a_k + b_k)/2 - \varepsilon$, $\beta_k = (a_k + b_k)/2 + \varepsilon$. Если $f(\alpha_k) < f(\beta_k)$, положить

$a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \beta_k$. Иначе $a_{k+1} = \alpha_k$, $b_{k+1} = b_k$. Заменить k на $k+1$, к шагу 2.

Заметим, что длина отрезка неопределенности после k -ого шага:

$$(b_{k+1} - a_{k+1}) = (b_1 - a_1)/2^k + 2\varepsilon(1 - 2^{-k}).$$

Эту формулу можно использовать для определения числа итераций алгоритма для заданного δ .

3.2 Метод квадратичной аппроксимации.

Изобрел М. Пауэлл.

Если функция нелинейна, то приблизив ее квадратным трехчленом можно построить оценку точки минимума.

Пусть $f(x): R \rightarrow R$

Пусть в x_1, x_2, x_3 : $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ - заданные значения. Квадратный трехчлен:

$r(x) = c_0 + c_1(x - x_1)(x - x_2)$. Подставляем x_1, x_2 в $r(x)$, получим:

$$c_0 = f(x_1)$$

$$c_1 = [f(x_2) - f(x_1)] / (x_2 - x_1)$$

Подставим x_3 в $r(x)$:

$$c_2 = \frac{1}{x_2 - x_3} \left[\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right]$$

Оценка \hat{x}^* точки минимум $x^* f(x)$ получим уравнение:

$$\frac{dr(x)}{dx} = c_1 + c_2(x - x_2) + c_2(x - x_1) = 0 \Rightarrow \hat{x}^* = (x_1 + x_2) / 2 - c_1 / 2c_2.$$

Алгоритм

Шаг1: инициализация

Выбираем отрезок $[x_1 \ x_3]$ на котором определен минимум и внутреннюю точку x_2 . Задаем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$.

Шаг2: Критерий останова

$$f_{\min} = \min \{f(x_i)\} \ i = 1, 2, 3; \ x_{\min} = \arg \min \{f(x_i)\} \ i = 1, 2, 3.$$

$$c_1 = [f(x_2) - f(x_1)] / (x_2 - x_1); \ c_2 = \frac{1}{x_2 - x_3} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right]$$

$$\hat{x}^* = (x_1 + x_2) / 2 - c_1 / 2c_2$$

Если $|f_{\min} - f(\hat{x}^*)| < \varepsilon_1$ и $|x_{\min} - \hat{x}^*| < \varepsilon_2$, то stop. Иначе обозначить точку из $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}$

ближайшую к \hat{x}^* слева $\frac{2}{\gamma} x_1$, справа - $\frac{2}{\gamma} x_3$ и положить $x_2 = \hat{x}^*$. Повторить основной цикл.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 2. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. СИМПЛЕКС-МЕТОД

§1. Постановка задачи линейного программирования.

Опр 1.1 Задачей *линейного программирования* (ЛП) называется задача минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях на области изменения переменных.

Каноническая форма задачи ЛП:

$$c^T x \rightarrow \max \quad (1.1)$$

$$Ax = b \quad (1.2)$$

$$x \geq 0, \quad (1.3)$$

где A - матрица $m \times n$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Опр 1.2 Система (1.2) называется *непрямыми ограничениями*, (1.3) – *прямыми ограничениями*, $c^T x$ - *целевая функция*.

Опр 1.3 *Стандартная форма* задачи ЛП:

$$c^T x \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b \quad (1.4)$$

$$x \geq 0$$

Опр 1.4 *Общая задача* ЛП:

$$c^T x \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall i = k + 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, r \quad \forall r < n$$

(1.5)

Все три формы задачи эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно привести к любому из двух остальных простыми преобразованиями.

Например, если в системе не прямых ограничений (1.4) имеется неравенство:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i,$$

(1.6)

то можно ввести дополнительную переменную, называемую *переменной недостатка* x_{n+1} такую, что:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i, \quad (1.7)$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

Аналогично вводится *переменная избытка*, если в (1.4) неравенство вида \geq .

Задачу в канонической форме можно привести к стандартной:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases}$$

§2. Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП

Рассмотрим задачу ЛП:

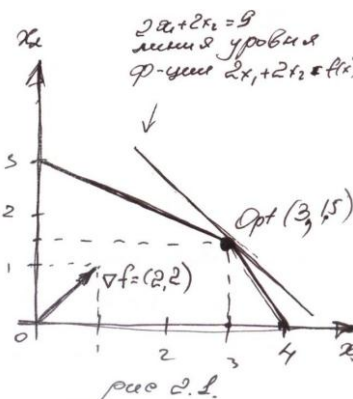
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \quad (2.1)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (2.2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2.3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

На рис 2.1 показана область допустимых решений D .



Градиент функции $f(x_1, x_2)$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2, 2)$$

перпендикулярен прямой из множества прямых, удовлетворяющих уравнению линии уровня целевой функции:

$$2x_1 + 2x_2 = k \quad (2.4)$$

Увеличение значения k соответствует движению прямой (2.4) в направлении увеличения градиента целевой функции. Для некоторого $k = k_{\max}$ произойдет «последнее касание» прямой области D . В точке касания функция (2.1) примет максимальное значение равно k_{\max} , при этом будут выполняться ограничения (2.2), (2.3). В нашем случае $k_{\max} = 9; Opt(3,1.5)$

В случаях, если линия уровня (2.1) параллельна некоторой грани, получим бесконечное множество решений.

Если область D не ограничена, то может оказаться, что бесконечное увеличение величины k приведет к бесконечному возрастанию целевой функции. В этом случае решение не существует.

§3. Общая идея решения задачи ЛП

Название метода связано с тем, что впервые он разработан для задач ЛП, где множество решений D представляло собой симплекс. Предложен впервые Дж. Б. Данцигом в 1963 г.

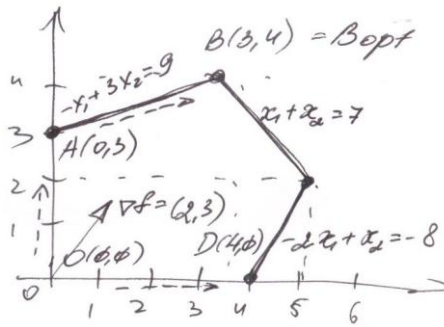
Опр 4.1 Симплексом S_n (n -мерным) называется вещественная оболочка n точек $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}^n$, не лежащая на $n-2$ мерной плоскости.

Геометрический смысл состоит в переходе от исходной точки к некоторой смежной крайней точке многогранника ограничений.

Опр 4.2 Решение, соответствующее начальной точке, называется *начальным решением*.

Пример 1.1 Рассмотрим задачу ЛП.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ -2x_1 - x_2 &\leq 8 \\ -x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$



Из точки $O(0,0)$ можно перейти к смежной точке A или D . Поскольку в целевой функции $c_1 < c_2$, то выгодно увеличивать x_2 , следовательно осуществляется переход к точке A . Далее переход $A \Rightarrow B_{opt}$.

Выбор последующей точки в симплекс-методе определяется следующими правилами:

1. Каждая последующая точка должна быть смежной с предыдущей по границам пространства решений.
2. Обратный переход производиться не может.

§5. Теорема о связи между допустимыми базисными решениями и крайними точками

При анализе геометрической интерпретации задачи ЛП сформулировано предложение, что точками, подозрительными на оптимум являются крайние точки выпуклого множества ограничений.

Пусть задана задача ЛП в канонической форме:

$$c^T x \rightarrow \max \tag{5.1}$$

$$Ax = b \tag{5.2}$$

$$x \geq 0 \tag{5.3}$$

Где A - матрица $m \times n$, при этом полагаем $m < n$ и $\text{rang}(A) = m$.

Опр 2.1 Базисом матрицы A называется набор m линейно независимых столбцов $B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}\}$

Пусть первые m столбцов матрицы A образуют базис. Представим A в виде двух подматриц. $A = (B, N)$, вектор x - в виде:

$$x = (x_B, x_N)^T \tag{5.4}$$

где $x_B = (x_1 \dots x_m)^T$, $x_N = (x_{m+1} \dots x_n)^T$.

Систему не прямых ограничений (5.2) представим в виде:

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (5.5)$$

Откуда

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (5.6)$$

Опр 2.2 Вектор x_B будем называть вектором *базисных переменных*, x_N - вектором *небазисных переменных*.

Опр 2.3 *Базисным решением* x системы не прямых ограничений (5.2), соответствующим базису B назовем частное решение системы (5.6), в котором $x_N = 0$.

Если

$$x_B = \bar{x} = B^{-1}b \geq 0, \quad (5.7)$$

где $(x_B)_{ji} = \bar{x}_i$, $i = 1, \dots, m$, то базисное решение удовлетворяет (5.3).

Опр 2.4 Такое базисное решение называют *допустимым базисным решением*.

Опр 2.5 Базисное решение x называется *вырожденным*, если вектор x_B имеет нулевые компоненты.

Теорема 2.1 Для области допустимых решений задачи ЛП (5.1)–(5.3) $D = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ вектор x тогда и только тогда является допустимым базисным решением, когда $x \in D$ является крайней точкой. ■

С каждым допустимым базисным решением x свяжем представление целевой функции:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N = c_B^T x_B - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T) x_N$$

С учетом данного представления задача может быть переформулирована в виде: найти базис B такой, что:

$$c_B^T x_B - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T) x_N \rightarrow \max$$

при условии $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0, x_N \geq 0$

Поскольку базисных допустимых решений конечное число ($\leq \frac{n!}{(n-m)!m!}$ - доказать почему), то поиск оптимального решения организуем в виде последовательного перехода от базиса к базису, стремясь на каждом шаге получить большее значение целевой функции, т.е.

$$B_k \rightarrow B_{k+1}, \text{ если } c^T x_k < c^T x_{k+1} \quad (5.8)$$

Суть симплекс-метода составляют 3 правила:

1. Правило оптимальности, позволяющее заключить что x_k - является оптимальным решением.
2. Правило отсутствия решения, позволяющее заключить, что задача ЛП не имеет решения.
3. Правило перехода к лучшей крайней точке $x_k \rightarrow x_{k+1}$, при условии выполнения (5.8).

§6. Процесс перехода к новому допустимому базисному решению.

Рассмотрим представление целевой функции:

$$c^T x = c_B^T \bar{x} - (c_B^T X - c_N^T) x_N \quad (6.1)$$

где $B = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ - базис матрицы A , $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)^T = B^{-1}b$ - вектор базисных переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$, т.е. $x_{j_i} = \bar{x}_i$, $i = \overline{1, m}$. $X = B^{-1}N = \{X_{m+1}, \dots, X_n\}$, X_j - координата разложения небазисного вектор-столбца A_j по базису B .

Опр 6.1 Симплекс разностью для j -ой переменной в базисе B называется величина:

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j = c_B^T X_j - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

Т.к. $X_j = E_j$ при $j = 1, 2, \dots, m$ и $c_B^T E_j = c_j$, то $\Delta_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, m$ (т.е. для элементов базиса). Для небазисных переменных Δ_j - это коэффициенты возрастания или убывания целевой функции.

Значит для возрастания целевой функции (6.1) целесообразно увеличивать небазисные переменные с отрицательными симплекс-разностями.

Выберем небазисную переменную x_t ($t \in J_N$ - множество индексов небазисных переменных), с отрицательной симплекс-разностью и выясним до какого значения мы можем ее увеличивать. Рассмотрим

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \geq 0$$

При $x_t > 0$ и всех остальных небазисных переменных равных нулю должно выполняться условие:

$$x_B = \bar{x} - X_t x_t \geq 0 \quad (6.3)$$

Где $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T$. Решая (6.3) относительно x_t получим:

$x_{it} x_t \leq \bar{x}_i$, откуда $x_t \leq \frac{\bar{x}_i}{x_{it}}$, для $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда

$$x_t = \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{x_{it}} \right\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (6.4)$$

В случае, если все $x_{it} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то из (6.3) следует, что x_t не ограничена сверху и при $\Delta_t < 0$ можно получить сколь угодно большое значение целевой функции (условие отсутствия решения)

Теорема 6.1 Если для какого-либо допустимого базисного решения существует хотя бы одна симплекс-разность $\Delta_t < 0$ ($t \in J_N$) и для нее все коэффициенты разложения $X_t = B^{-1}A_t$ не положительны $x_{it} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то целевая функция неограниченна сверху. ■

Пусть решение (6.4) получено. После подстановки x_t в (6.3) по крайней мере одно из неравенств станет равенством, а соответствующая координата x_B станет равна нулю, т.е. станет небазисной. Это соответствует переходу от допустимого базисного решения x_B (базиса B) к решению x'_B (базиса B').

Пусть, например, k -я координата вектора базисных переменных x_B (6.3) равна нулю: $(x_{B'})_k = \bar{x}_k - x_{kt}x_t = 0$, это возможно когда:

$$x_t = \min_{x_{it} > 0} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{x_{it}} \right\} = \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}}.$$

Переход от базиса $B = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_m\}$ к базису $B' = \{A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_t, A_{k+1}, \dots, A_m\}$ осуществляется посредством выведения из базиса вектора A_k (он становится небазисным) и вводом в него вектора A_t .

Теорема 6.2 Пусть

$$B = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_m\} \tag{6.5}$$

базис матрицы A .

Заменим A_k некоторым A_t ($t \in J_N$), получим:

$$B' = \{A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_t, A_{k+1}, \dots, A_m\} \tag{6.6}$$

B' - образует базис тогда и только тогда, когда в разложении A_t по базису B

$$A_t = x_{1t}A_1 + \dots + x_{kt}A_k + \dots + x_{mt}A_m \tag{6.7}$$

коэффициент $x_{kt} \neq 0$. ■

Основные формулы симплекс-метода

1. Пересчет допустимого базисного решения

Согласно (6.3) новое базисное решение, соответствующая базису B' , будет

$$\bar{x}'_i = \begin{cases} \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}}, i = k \\ x_{kt} \\ \bar{x}_i - \left(\frac{\bar{x}_k}{x_{kt}}\right)x_{it}, i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{k\} \end{cases} \quad (6.8)$$

2. Пересчет разложения векторов матрицы A в новом базисе (X'_i)

Из (6.7) найдем разложение вектора A_k по новому базису B' имеет вид:

$$A_k = B'X'_k = \sum_{i=1}^m \left(-\frac{x_{it}}{x_{kt}}\right)A_i + \frac{1}{x_{kt}}A_k.$$

Откуда

$$x'_{ik} = \begin{cases} -\frac{x_{it}}{x_{kt}}, i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{k\} \\ x_{kt} \\ \frac{1}{x_{kt}}, i = k \end{cases} \quad (6.9)$$

Пусть A_j - произвольный небазисный вектор отличный от A_k . X_j - его координаты в старом базисе B (6.5). Пусть $X'_j = (x'_{1j}, x'_{2j}, \dots, x'_{mj})^T$ - его координаты в новом базисе B' (6.6).

$$A_j = \sum_{i=0}^m x_{ij}A_i = \sum_{i=1}^m x_{ij}A_i + x_{kj}A_k \quad (6.10)$$

Подставим вместо A_k его представление (6.9), получим:

$$A_j = \sum_{i=1}^m \left[x_{ij} - \frac{x_{kj}}{x_{kt}}x_{it}\right]A_i + \frac{x_{kj}}{x_{kt}}A_k \quad (6.12)$$

Тогда

$$x'_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{kj}}{x_{kt}}, i = k \\ x_{kt} \\ x_{ij} - \frac{x_{kj}}{x_{kt}}x_{it}, i = 1, 2, \dots, m, i \neq k \end{cases} \quad (6.12)$$

(6.12) – основная формула симплекс-метода. Формула (6.10) – частный случай (6.12).

3. Пересчет симплекс-разностей

Симплекс-разности пересчитываются аналогично: подставим x_t из (6.4) в формулу $c^T x = c_{B_0}^T \bar{x} - \Delta_t x_t$, получим:

$$c_B^T \bar{x}' = c_{B_0}^T \bar{x} - \Delta_t \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} \quad (6.13)$$

Легко проверить, что

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_t \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.14)$$

Заметим, что $\{B_1\} = \{B_0 \setminus A_k\} \cup A_t$

Теорема об оптимальности допустимого базисного решения.

Логично предположить, что если все симплекс-разности в текущем базисе неотрицательны, то улучшить решение невозможно.

Теорема 6.3 Если в текущем допустимом базисном решении все симплекс-разности Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) неотрицательны, то текущее допустимое базисное решение оптимально. ■

Очевидно, что для задачи на минимум условие оптимальности будет неположительность всех симплекс-разностей. Осталось найти хотя бы одно допустимое базисное решение.

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ b &> 0 \end{aligned} \quad (\text{в стандартной форме})$$

Приведем ее к канонической форме:

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax + E\tilde{x} &= b \\ x, \tilde{x} &\geq 0 \\ b &> 0 \end{aligned}$$

Ясно, что решение $\begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является допустимым (т.к. $b > 0$) и соответствует единичному базису E .

§7. Процедура решения задачи симплекс-методом.

7.1 Алгоритм симплекс-метода.

Пусть дана задача ЛП в канонической форме

$$c^T x \rightarrow \max$$

$$c^T x = b$$

$$x \geq 0$$

$x = (\bar{x}_{j_1}, \dots, \bar{x}_{j_m}, 0_{j_{m+1}}, \dots, 0_{j_n}) \geq 0$ невырожденное допустимое базисное решение.

Следовательно, исходный базис:

$$B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}\} \quad (7.1)$$

Шаги алгоритма.

Шаг 1. Инициализация.

Находим разложение небазисных векторов A_{j_k} по базису (7.1):

$$X_j = B^{-1}A_j \quad (j \in J_N).$$

Для $j \in J_B$ разложение известно

$$X_j = E_j = (0_1, \dots, 0_{j-1}, 1_j, 0_{j+1}, \dots, 0_m)^T$$

Известны значения базисных переменных, соответствующих базису B .

$$x = (\bar{x}_{j_1}, \dots, \bar{x}_{j_m})^T = B^{-1}b.$$

Шаг 2. Условие оптимальности.

$\forall j = 1, 2, \dots, n$ вычисляем симплекс-разности $\Delta_j = c_B^T X_j - c_j$

Если все симплекс-разности неотрицательны ($\Delta_j \geq 0$) \Rightarrow **stop**, рассматриваемое допустимое базисное решение является *оптимальным*.

Шаг 3. Условие отсутствия решения.

Если $\exists j \in J_N$, такое, что $\Delta_j < 0$ и все элементы X_j неположительны, т.е. $(i = 1, 2, \dots, m) \Rightarrow$ **stop**, целевая функция *неограничена*. Иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Итерация.

Выберем $\Delta_t < 0$ из условия $\Delta_t = \max_{\Delta_j < 0} |\Delta_j|$ $j=1,2,\dots,n$. Соответствующая вектору-столбцу X_t небазисная переменная x_t вводится в базис.

Вычислим отношения $\frac{\bar{x}_i}{x_{it}}$ для всех i таких, что $x_{it} > 0$ и найдем минимальное:

$$\frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} = \min_{x_{it} > 0} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{x_{it}} \right\}.$$

Соответствующая k -я базисная переменная x_{j_k} ($\bar{x}_k = x_{j_k}$) выводится из базиса. При этом t -я вводимая переменная имеет вид:

$$(x_{B'})_{t_k} = x_t = \bar{x}'_k = \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} > 0,$$

а выводимая переменная обнуляется

$$x_{j_k} = \bar{x}_k = 0$$

Переходим к новому базису B' : $\{B'\} = \{B \setminus A_k\} \cup A_t$, вычислив по основным формулам новое базисное решение \bar{x}'_i (6.8), коэффициенты разложения x'_{ik} (6.9) x'_{ij} (6.12) векторов матрицы A . Переходим к шагу 2.

7.2 Симплекс-таблица

Симплекс-таблица используется для организации вычислений вручную. В столбцах запишем: коэффициенты базисных переменных: $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным c_B , базисные координаты \bar{x} - текущего базисного решения, коэффициенты разложения X_j ($j=1,2,\dots,n$) в $(m+1)$ -й строке: значения целевой функции при текущем базисном решении $c_B^T \bar{x}$ и Δ_j ($j=1,2,\dots,n$). То есть получим табличную форму задачи ЛП.

$$M_{\langle(m+1) \times (n+2)\rangle} = \begin{pmatrix} J_{B \langle m \times 1 \rangle} & c_{B \langle m \times 1 \rangle} & \bar{x}_{\langle m \times 1 \rangle} & XB^{-1}_{\langle m \times n \rangle} \\ - & - & c_B^T \bar{x} & \Delta^T_{(1 \times n)} \end{pmatrix}$$

Пример Построить симплекс-таблицу для задачи ЛП

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ b &> 0 \end{aligned}$$

Решение приведем задачу к канонической форме:

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax + E\tilde{x} &= b \\ x, \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что решение $\begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является допустимым базисным \Rightarrow начальное заполнение симплекс-таблицы имеет вид:

J_B	c_B	\bar{x}	X_1	X_2	...	X_{n+1}	...	X_{n+m}
n+1	0	b_1	a_{11}	a_{12}		1	...	0
n+2	0	b_2	a_{21}	a_{22}		0	...	0
...
n+m	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}		0	...	1
		0	Δ_1	Δ_2	...	0	0	0

Опр 1 Столбец таблицы, который вводится в базис на текущей итерации называется *ведущим*. (отмечается \uparrow). Строка таблицы, выводимая из базиса называется *ведущей* (\rightarrow). Элемент, стоящий на пересечении называется *ведущим*.

Преобразование симплекс-таблицы проводится в 3 этапа:

1. k -я ведущая строка нормируется ведущим элементом x_{kt} . Получаем

$$x'_{kt} = \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}}, \quad x'_{kj} = \frac{x_{kj}}{x_{kt}}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

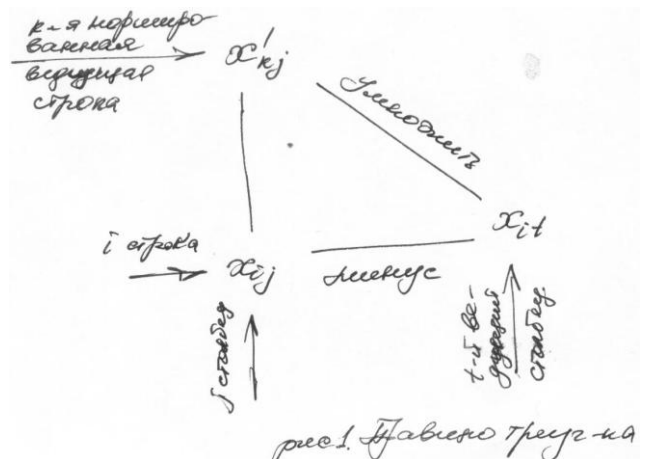
2. Пересчитываем все элементы кроме ведущей строки и ведущего столбца и столбцов с метками J_B, c_B по следующему правилу (правило треугольника)

$$\bar{x}'_i = \bar{x}_i - x_{it} \bar{x}'_k, \quad i \neq k; \quad c_B^T \bar{x}' = c_B^T \bar{x} - \Delta_t \bar{x}'_k$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_t x'_{kj}, \quad j \neq t; \quad x'_{ij} = x_{ij} - x_{it} x'_{kj}, \quad i \neq k, j \neq t$$

Правило треугольника проиллюстрировано на рис. 1.

3. Все элементы ведущего столбца обнуляются. Ведущий элемент приравнивается единице. Изменяются элементы ведущей строки и столбцов с



метками J_B и c_B

§11 Теорема двойственности

Время решения ЗЛП определяется в основном числом непрямых ограничений, поэтому представляет интерес разработка метода, обеспечивающего замену процесса решения произвольной ЗЛП с числом ограничений, не превышающих число первых. Для ЗЛП(прямой задачи) существует соответствующая двойственная задача в другом пространстве переменных, но с тем же самым оптимальным значением целевой функции (если решение существует). Обе задачи симметричны друг другу.

<u>Прямая задача</u>			<u>Двойственная задача</u>	
$c^T x \rightarrow \max$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$		\Rightarrow		$b^T y \rightarrow \min$ $A^T y \geq c$ $y \geq 0$
		(1.1)		
$c^T x \rightarrow \min$ $Ax \geq b$ $x \geq 0$		\Rightarrow		$b^T y \rightarrow \max$ $A^T y \leq c$ $y \geq 0$
		(1.2)		

Каждая из задач может быть получена из другой формальными преобразованиями:

- Заменой направления целевой функции
- Заменой b и c , транспонированием A
- Замена знака неравенств в системе непрямых ограничений на противоположный.

Опр 1.1 задача вида (1.1), (1.2) называется симметричной парой двойственных задач.

Если ЗЛП в канонической форме:

$c^T x \rightarrow \max$ $Ax = b$ $x \geq 0$	\sim	$c^T x \rightarrow \max$ $Ax \leq b$ $-Ax \leq (-b)$ $x \geq 0$	\Rightarrow	$b^T (y_1 - y_2) \rightarrow \min$ $A^T (y_1 - y_2) \geq c$ $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$	\sim	$b^T y \rightarrow \min$ $A^T y \geq c$ y – без ограничений
--	--------	--	---------------	--	--------	---

Связь между решениями прямой и двойственной задач дает следующая:

Теорема 1.1 (теорема двойственности)

- Если \hat{x}, \hat{y} - допустимые решения пары двойственных задач (1.1), то $c^T \hat{x} \leq b^T \hat{y}$
- Если целевая функция прямой задачи (1.1) неограниченно возрастает $c^T \rightarrow +\infty$, то система ограничений двойственной задачи (1.1) несовместна, т.е. $rank(A^T) \neq rank(\{A^T|c\})$, где $A^T|c$ - расширенная матрица системы ограничений двойственной задачи (1.1).

Следствие 1. Если \exists допустимые решения пары двойственных задач (1.1) – (1.2), то \exists и оптимальные.

Полученные результаты позволяют утверждать, что решив одну из пары двойственных задач, легко получить решение (оптимальное) другой задачи.

§12 Условия дополняющей нежесткости.

Теорема 1.2 Допустимые решения $\{x, y\}$ пары двойственных задач (1.1) являются оптимальными тогда и только тогда, когда выполняются условия дополняющей нежесткости:

$$\sum_{i=1}^m y_i (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i) = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j (\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i - c_j) = 0 \quad (2.2)$$

Условие дополняющей нежесткости можно сформулировать следующим образом. Для пары оптимальных решений (2.1), (2.2) справедливо:

1. Если неравенство в системе ограничений одной из задач выполняется строго, то соответствующая координата оптимального решения другой задачи = 0:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0 \quad (\forall i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i < c_j \Rightarrow x_j = 0 \quad (\forall j = \overline{1, n})$$

2. Если некоторая координата оптимального решения положительна, то соответствующее неравенство в системе ограничений двойственной задачи выполняется как равенство:

$$x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i = c_j \quad (\forall j = \overline{1, n})$$

или

$$y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (\forall i = \overline{1, m})$$

Пример 2.1 Решить ЗЛП симплекс методом, построив двойственную к данной задаче и указать ее решение.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 \leq 12$$

$$4 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 10 \quad (2.3)$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 14$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Решение: Решаем задачу симплекс методом и получаем:

$$x^* = (0, 14/11, 10/11, 0)^T, c^T x^* = 38/11 \quad (2.4)$$

Двойственная задача имеет вид:

$$12y_1 + 10y_2 + 14y_3 \rightarrow \min$$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$8y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 2 \quad (2.5)$$

$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 1$$

$$9y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Условие дополнительной нежесткости:

$$\begin{cases} x_1^*(3y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* - 1) = 0 \\ x_2^*(8y_1^* + 5y_2^* + 7y_3^* - 2) = 0 \\ x_3^*(2y_1^* + 4y_2^* + 3y_3^* - 1) = 0 \\ x_4^*(9y_1^* + 7y_2^* + 6y_3^* - 2) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} y_1^*(3x_1^* + 8x_2^* + 2x_3^* + 9x_4^* - 12) = 0 \\ y_2^*(4x_1^* + 5x_2^* + 4x_3^* + 7x_4^* - 10) = 0 \\ y_3^*(2x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* + 6x_4^* - 14) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Подставляя решение (2.4) в (2.6) и (2.7) и решив их относительно переменных

§8. Двухфазный метод решения ЗЛП.

Вопрос нахождения допустимого базисного решения решён для ЗЛП в канонической форме с невырожденным допустимым базисным решением и для задачи в стандартной форме.

В общем случае идея поиска допустимого базисного решения лежит во введении искусственного базиса.

Пусть дана ЗЛП:

$$\begin{aligned}c^T x &\rightarrow \max, \\Ax &= b, \\x &\geq 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Без ограничения общности считаем $b \geq 0$, A – любая.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned}-d^T \bar{x} &\rightarrow \max, \\Ax + E\bar{x} &= b, \\x \geq 0, \bar{x} &\geq 0,\end{aligned}\tag{5.2}$$

где $d = (1_1, 1_2, \dots, 1_m)^T$, $\bar{x} = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots, \bar{x}_{n+m})^T$ – вспомогательные переменные.

Для задачи (5.2) вектор $x_d = \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является допустимым базисным решением (так как $-d^T \bar{x} \leq 0$, то целевая функция ограничена сверху).

Пусть $x_d^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \bar{x}_{n+1}^*, \bar{x}_{n+2}^*, \dots, \bar{x}_{n+m}^*)^T$ – оптимальное решение вспомогательной задачи (5.2) и $-d^T x_d^* = \nu$. Возможны два случая: $\nu < 0$ и $\nu = 0$:

$$\nu < 0: \exists \bar{x}_{n+j} > 0$$

$$\nu = 0: \forall \bar{x}_{n+j} = 0, j = \overline{1, m}$$

Теорема 5.1 Если для задачи (5.2) $-d^T x_d^* < 0$, то система $Ax = b$ задачи (5.1) несовместна.

Пусть $-d^T x_d^* = 0$. Если векторы, соответствующие вспомогательным переменным, не входят в базис, то допустимое базисное решение для (5.1) получено (можно использовать симплекс-таблицу задачи (5.2) для (5.1)).

Если вектор, соответствующий переменной \bar{x}_{j_s} , входит в базис, то возможен один из двух случаев:

- В s -й строке есть элемент $x_{s,k} \neq 0$ для $k \leq n$. Тогда выполняем операцию замещения, выводя из базиса E_{j_s} соответствующий \bar{x}_{j_s} и замещая его вектором A_k задачи (5.1). Соответствующий элемент вектора решения по-прежнему остаётся нулевым.
- На s -й строке все $x_{s,k} = 0$ для $k \leq n$. Тогда строку s нужно удалить. После вывода всех вспомогательных переменных получим допустимое базисное решение.

§6. Правило Блэнда, устраняющее закливание.

Что делать, если вектор решения является вырожденным? Наличие нулевых координат связано с наличием в системе ограничений избыточных ограничений.

Пусть имеется вырожденное решение и $\bar{x}_k < 0$, $\bar{x}_s = 0$ и $x_{sk} > 0$.

Тогда $\min_{x_{ik} > 0} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}} \right\} = \frac{\bar{x}_s}{x_{sk}} = 0$ и вектор A_k замещает A_s . Значение целевой функции при этом

не изменяется: $c^T \bar{x} = c^T \bar{x} - \frac{\bar{x}_s}{x_{sk}} x_k = c^T \bar{x}$. Такой переход потенциально опасен, т.к. можно

прийти к возврату к исходному базису и дальнейшему закливанию.

Теорема 6.1 Правило Блэнда

Для любой ЗЛП симплекс-метод сходится за конечное число шагов, если выбирать ведущий элемент по следующему правилу:

- Выбирать ведущий столбец по первой встретившейся отрицательной симплекс-разности

$$k = \min \left\{ j \mid x_j < 0, j = \overline{1, n} \right\}.$$

- Выбирать ведущую строку, имеющую наименьший номер из тех, на которых достигается минимум соответствующего отношения:

$$s = \min_{x_{ik} > 0} \left\{ i \mid \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}} \leq \frac{\bar{x}_h}{x_{hk}}, \forall i, h = \overline{1, m} \right\}.$$

§7. Двойственный симплекс-метод.

Особенность симплекс-метода заключается в том, что переход к новому допустимому базисному решению приводит к неубыванию целевой функции. В некоторых случаях может оказаться полезным другой подход к решению ЗЛП, называемый двойственным симплекс-методом.

Пример 7.1

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &\rightarrow \min, \\
 2x_1 + x_2 &\geq 3, \\
 x_1 + 4x_2 &\geq 5, \\
 x_1, x_2 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Решение:

Перейдём к эквивалентной задаче на максимум:

$$\begin{aligned}
 -x_1 - x_2 &\rightarrow \max, \\
 -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3, \\
 -x_1 - 4x_2 + x_4 &= -5, \\
 x_i &\geq 0, i = \overline{1, 4}.
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Построим симплекс-таблицу:

J_B	c_B	\bar{x}	X_1	X_2	X_3	X_4
3	0	-3	-2	-1	1	0
4	0	-5	-1	-4	0	1
		0	1	1	0	0

Все симплекс-разности неотрицательны, т.е. выполнено условие оптимальности, но базисное решение является недопустимым. Такое решение будем называть *почти допустимым решением* ЗЛП.

Построим новую схему выбора ведущего элемента: потребуем поддержку неотрицательности симплекс-разностей. Выбор ведущего элемента начнём с выбора ведущей строки. В качестве ведущей выберем строку с отрицательной координатой вектора решения.

Пусть $\bar{x}_s < 0$. Выбор ведущего k -го столбца выполнено так, чтобы $\forall j = \overline{1, n}$:

$$\bar{x}'_j = \bar{x}_j - \frac{x_{sj}}{x_{sk}} x_k \geq 0.
 \tag{7.3}$$

В частности для $j = s$:

$$\bar{x}'_j = 0 - \frac{x_{sj}}{x_{sk}} x_k \geq 0.
 \tag{7.4}$$

Т.к. $x_{ss} = 1$ (вектор A_s из старого базиса), а $x_k \geq 0$, то (7.4) равносильно

$$x_{sk} < 0. \quad (7.5)$$

Т.е. поиск ведущего столбца осуществляется среди отрицательных элементов ведущей строки.

При $x_{sj} \geq 0$ и $x_{sk} < 0$ неравенство (7.3) выполняется всегда. В случае $x_{sj} < 0$ неравенство (7.3) равносильно

$$\frac{\bar{x}_j}{x_{sj}} - \frac{\bar{x}_k}{x_{sk}} \leq 0, \quad \frac{\bar{x}_k}{x_{sk}} \geq \frac{\bar{x}_j}{x_{sj}}.$$

Отсюда получим, что $\left| \frac{\bar{x}_k}{x_{sk}} \right| \leq \left| \frac{\bar{x}_j}{x_{sj}} \right|$. Следовательно, k выбирается такое, на котором достигается по всем $x_{sj} < 0, j = 1, n$

$$\min \left| \frac{\bar{x}_j}{x_{sj}} \right|. \quad (7.6)$$

После выбора ведущего элемента пересчёт симплекс-таблицы выполняется по схеме симплекс-метода. Это приводит к новому почти допустимому базисному решению.

Теорема 7.1 (о почти допустимом базисном решении)

Если начальное допустимое базисное решение задачи

$$c^T x \rightarrow \max, \quad (7.7)$$

$$Ax = b, \quad (7.8)$$

$$x \geq 0 \quad (7.9)$$

таково, что среди базисных переменных есть хотя бы одно $\bar{x}_s < 0$, и такое, что все $x_{sj} \geq 0, j = \overline{1, n}$, то система ограничений (7.8) данной задачи несовместна.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

Пусть дана ЗЛП с почти допустимым базисным решением:

$$c^T x \rightarrow \max,$$

$$Ax = b, \quad (7.10)$$

$$x = (\bar{x}_{j_1}, \bar{x}_{j_2}, \dots, \bar{x}_{j_m}, 0_{j_{m+1}}, \dots, 0_{j_n})^T$$

и исходным базисом

$$B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}\}. \quad (7.11)$$

Шаг 1.

Проверяем условие $\bar{x}_i \geq 0, i = \overline{1, m}$. Если оно выполнено, то stop, решение оптимально.

Если $\exists \bar{x}_i < 0$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2.

Разложим A_1, A_2, \dots, A_n по базису (7.11) и просматриваем строки, для которых $\bar{x}_i < 0, i = \overline{1, m}$.

Если $\exists \bar{x}_i < 0: x_{ij} \geq 0 (j = \overline{1, n})$, то stop – задача не имеет решения.

Если таких $\bar{x}_i < 0$ нет, то шаг 3.

Шаг 3.

Ведущую s -ю строку выбираем из эвристического условия: $\bar{x}_s = \max_{\bar{x}_i < 0} |\bar{x}_i|$, и для неё

вычисляем отношения $\frac{\bar{x}_j}{x_{sj}}$ для всех $x_{sj} < 0, j = \overline{1, n}$.

Ведущий k -й столбец выбираем из условия

$$\min_{x_{sj} < 0} \left| \frac{\bar{x}_j}{x_{sj}} \right|, j = \overline{1, n}.$$

Переходим к новому почти допустимому базисному решению, заменяя в базисе вектор A_s вектором A_k , пересчитываем симплекс-таблицу по ведущему x_{sk} элементу матрицы A . Переход к шагу 1.

Геометрически двойственный симплекс-метод можно интерпретировать как процедуру последовательного получаемых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l, \dots \in \mathbb{R}^n$, лежащих вне многогранника ограничений, с каждым шагом приближаясь к многограннику ограничений.

ЛЕКЦИЯ 6 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§14. Транспортная задача

14.1. Постановка транспортной задачи.

Имеется m пунктов производства сырья A_1, A_2, \dots, A_m . Объем производства в A_i равен a_i единиц ($i = \overline{1, m}$). Также имеется n пунктов сбыта (потребления) сырья B_1, B_2, \dots, B_n . Потребление в B_j составляет b_j единиц ($j = \overline{1, n}$). Транспортировка сырья возможна из любого A_i в любой B_j , при этом транспортные издержки равны c_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Необходимо удовлетворить запросы потребителей, вывезти все продукты и обеспечить минимальные суммарные транспортные издержки.

Схема перевозок приведена на рис. 14.1, а условие задачи может быть представлено в виде матрицы перевозок (табл. 14.1).

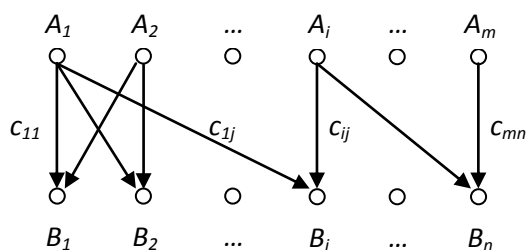


рис. 14.1

	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	

табл. 14.1

Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из A_i в B_j . Требуется определить множество x_{ij} такое, что:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad \text{– условие полного вывоза сырья} \quad (14.1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{– условие удовлетворения спроса} \quad (14.2)$$

при которых целевая функция (суммарные издержки на перевозку):

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (14.3)$$

Матрицу $X = (x_{ij})$, удовлетворяющую (14.1)–(14.3), называют *планом перевозок* транспортной задачи, $C = (c_{ij})$ – матрица издержек, x_{ij} – перевозки. В матричном виде ограничения задачи (14.1), (14.2) имеют вид:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
 \end{pmatrix}_{(m+n) \times mn} \begin{pmatrix}
 x_{11} \\
 x_{12} \\
 \dots \\
 x_{1n} \\
 x_{21} \\
 x_{22} \\
 \dots \\
 x_{2n} \\
 \dots \\
 x_{m1} \\
 x_{m2} \\
 \dots \\
 x_{mn}
 \end{pmatrix}_{mn \times 1} = \begin{pmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 \dots \\
 a_m \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 \dots \\
 b_n
 \end{pmatrix}_{(m+n) \times 1} \quad (14.4)$$

Из (14.3), (14.4) видно, что транспортная задача является задачей линейного программирования (целевая функция и ограничения линейны). Легко показать, что ранг системы ограничения (14.4) (а следовательно и количество базисных переменных задачи) равен

$$r = m + n - 1$$

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно выполнения *условия баланса*:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

В этом случае транспортная задача (14.1)–(14.3) называется сбалансированной.

Транспортная задача, как и любая ЗЛП, имеет двойственную. Обозначим переменные двойственной задачи u_1, u_2, \dots, u_m и v_1, v_2, \dots, v_n (их $m+n$ штук по количеству ограничения в системе (14.3)), которые называются потенциалами пунктов A_i и B_j соответственно. Физический смысл потенциалов:

u_i – себестоимость производства сырья в пункте A_i

v_j – приращение стоимости сырья в пункте B_j (наценка).

Теорема 14.1

Пусть $X^* = \{x_{11}^*, \dots, x_{1n}^*, x_{21}^*, \dots, x_{2n}^*, \dots, x_{m1}^*, \dots, x_{mn}^*\}$ и $Y^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*, v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задач соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^*,$$

т.е. суммарные транспортные издержки равны суммарной наценке минус суммарная себестоимость ($u_i \leq 0$).

Теорема 14.2. Для оптимальности плана X^* необходимо и достаточно существование таких X^* и Y^* , что $u_i + v_j \leq c_{ij}$ и при этом для любого базисного решения $u_i + v_j = c_{ij}$, т.е.

- если $v_j < c_{ij} + (-u_i)$, то перевозка нерентабельна $\Rightarrow x_{ij} = 0$,
- если $v_j = c_{ij} + (-u_i)$, то перевозка рентабельна $\Rightarrow x_{ij} \neq 0$ – базисная.

На практике могут встречаться задачи, в которых уравнение баланса не выполнено. В этом случае вводятся фиктивные пункты назначения или производства сырья с нулевыми транспортными расходами.

14.2. Метод решения транспортной задачи.

3 этапа:

1. Найти начальное допустимое базисное решение.
2. Выделить из числа небазисных переменную, вводимую в базис. Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности симплекс-метода, который в данном случае будет иметь вид: $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \leq 0$, закончить вычисления, иначе к этапу 3.
3. Выбрать переменную, выводимую из базиса, перейти к новому базису, далее к этапу 2.

Опр. 14.2. Опорным планом транспортной задачи называют любое её допустимое базисное решение (Заметим, что в этом решении отличных от нуля переменных не более $r = m + n - 1$).

14.3. Метод северо-западного угла.

Рассмотрим на примере.

Пусть имеется ТЗ, в которой $\{a_j\} = \{15, 20, 10\}$, $\{b_j\} = \{10, 5, 25, 5\}$. Видно, что задача является сбалансированной.

Строим таблицу. В строчке пишем неудовлетворённые потребности, а в столбцах справа – остатки невывезенного товара (табл. 14.2).

	B_1	B_2	B_3	B_4	$a_{i(0)}$	$a_{i(1)}$	$a_{i(2)}$	$a_{i(3)}$	$a_{i(4)}$	$a_{i(5)}$
A_1	10	5	0	0	15	5	0	0	0	0
A_2	0	0	20	0	20	20	20	0	0	0
A_3	0	0	5	5	10	10	10	10	5	0
$b_{j(0)}$	10	5	25	5						
$b_{j(1)}$	0	5	25	5						
$b_{j(2)}$	0	0	25	5						
$b_{j(3)}$	0	0	5	5						
$b_{j(4)}$	0	0	0	5						
$b_{j(5)}$	0	0	0	0						

табл. 14.2

Заполнение начинаем с ячейки (A_1, B_1) . Выбираем $x_{11} = \min\{a_{1(0)}, b_{1(0)}\} = 10$. Записываем в ячейку (A_1, B_1) это значение. Заполняем нулями первый столбец. $a_{1(1)} = 5$ – остаток товара. Переходим к ячейке (A_1, B_2) , куда записываем значение $x_{12} = \min\{a_{1(1)}, b_{2(1)}\} = 5$. Строка и столбец обнуляется.

Алгоритм метода северо-западного угла

1. Составляем матрицу X и заносим ограничения a_i, b_j .

Определяем $x_{11} = \min\{a_{1(0)}, b_{1(0)}\}$. Возможны три случая:

- 1) $a_1 < b_1 \Rightarrow x_{11} = a_1$, ячейки 1-ой строки заполняются нулями;
- 2) $a_1 > b_1 \Rightarrow x_{11} = b_1$, ячейки 1-го столбца заполняются нулями;
- 3) $a_1 = b_1 \Rightarrow x_{11} = a_1 = b_1$, ячейки 1-ой строки и 1-го столбца заполняются нулями.

2. Выполняем таким же образом k -ый шаг.

3. Определяем на $(k+1)$ шаге верхний левый элемент незаполненной части матрицы X . Пусть это будет $x_{\lambda\mu}$ ($\lambda + \mu = k + 2$).

$$x_{\lambda\mu} = \min\{a_{\lambda(k)}, b_{\mu(k)}\},$$

$$\text{где } a_{\lambda(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}, \quad b_{\mu(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}.$$

Если $a_{\lambda(k)} < b_{\mu(k)}$, то заполняем нулями λ -ю строку с $(\mu+1)$ -го элемента, иначе – оставшуюся часть μ -го столбца.

14.4. Метод потенциалов.

Громоздкость транспортных таблиц обуславливает использование более простых методов решения ТЗ. Метод потенциалов предложен в 1949 г. Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным. Данный метод позволяет за конечное число итераций найти оптимальный план.

Алгоритм

Предварительный этап.

Записываем матрицу перевозок и определяем начальный опорный план X_0 (методом северо-западного угла). Вычисляем предварительные потенциалы задачи:

- строим схему ТЗ из основных коммуникаций плана
- образуем индексные множества связи объектов A с B . Например, J_1 – множество индексов B_j , связанных с A_1 основными коммуникациями. I_1 – множество индексов тех A_i , которые связаны с B_j , $j \in J_1$, J_2 – тех, кто связан с A_i $i \in I_1$ и т.д.
- определяем потенциалы всех пунктов отправления A_i ($i = \overline{1, m}$), и назначения B_j ($j = \overline{1, n}$) по следующей схеме: выбираем за начало отсчета (ноль) потенциал любого пунктов, например, $u_1^{(0)} = 0$ и вычисляем систему потенциалов относительно A_1 по формуле

$$v_j^{(0)} = c_{1j} - u_1^{(0)},$$

где $j \in J_1$.

Затем по $v_j^{(0)}$ определяем потенциалы пунктов A_i ($i \in I_1$) используя формулу:

$$u_i^{(0)} = c_{ij} - v_j^{(0)},$$

где $i \in I_1$, $j \in J_1$.

- определяем аналогично потенциалы $v_j^{(0)}$ ($j \in J_1$) и т.д.

Строим матрицу оценок (симплекс-разностей):

$$\Delta_1 = (u_i^{(0)} + v_j^{(0)}) - c_{ij}.$$

Если эта матрица не содержит положительных элементов, то X_0 – оптимальный план. Иначе – к следующему шагу.

Пусть произведено k итераций. Переходим к выполнению $(k+1)$ -й итерации целью которой является построение матрицы симплекс-разностей Δ_{k+1} , а также установление оптимальности плана X_k (первый цикл), либо нахождение более экономичного плана X_{k+1} (второй цикл).

Первый цикл

Вычисляем матрицу Δ_{k+1} на основе Δ_k по следующей схеме:

- выбираем наибольший положительный элемент матрицы Δ_k (например, $c_{\lambda\mu}^k = c_k$)
- выделяем строку, содержащую элемент $c_{\lambda\mu}^k$, а элементы этой строки, отвечающие базисным переменным плана X_k , образуют множество, которое обозначим G_1
- выделяем столбцы матрицы Δ_k , содержащие элементы множества G_1 . При этом множество элементов в столбцах, которые отличны от элементов G_1 , обозначим как G_r . Процесс выделения продолжаем до тех пор, пока очередное множество не окажется пустым.

Строим матрицу Δ_{k+1} , для чего:

- прибавляем c_k ко всем выделенным столбцам и вычитаем из всех выделенных строк матрицы Δ_k . При этом все выделенные элементы матрицы Δ_k остаются равными нулю. Обращается в ноль элемент $c_{\lambda\mu}^k$.
- Если все элементы матрицы Δ_{k+1} неположительны, то X_k – оптимальный план, иначе переходим ко второму циклу.

Второй цикл

Осуществляем улучшение плана X_k , для чего:

- выбираем наибольший положительный элемент матрицы Δ_{k+1} (например, $c_{i_0 j_0}^{(k+1)} = c_{k+1}$);
- составляем цепочку из положительных элементов плана X_k , которая замыкается на вводимой в новый базис решения переменной $x_{i_0 j_0}$ методом *вычеркивания*;
- находим в получившейся цепочке минимальный нечётный по порядку следования элемент $\theta_{k+1} = \min_{\emptyset \leq \mu \leq s} x_{i_\mu j_{\mu+1}}^{(k)}$, который выводится из базиса;
- прибавляем θ_{k+1} ко всем чётным элементам цепочки и к элементу $x_{i_0 j_0}$;
- вычитаем θ_{k+1} из всех нечётных элементов. Остальные элементы X_k остаются без изменений.

План X_{k+1} построен. Он является опорным, поскольку не изменилось число его ненулевых перевозок.

Если плану X_k соответствовало значение целевой функции $f_k(x_{ij})$, то новое значение целевой функции для плана X_{k+1} будет $f_{k+1}(x_{ij}) = f_k(x_{ij}) - c_{k+1} \theta_{k+1}$. Т.к. $c_{k+1} > 0$, $\theta_{k+1} > 0$, то $f_{k+1}(x_{ij}) < f_k(x_{ij}) \Rightarrow$ план X_{k+1} является улучшенным опорным планом. Переходим к выполнению $(k+2)$ итерации.

14.5. Метод вычёркивания.

Этот метод позволяет выделить в произвольном плане X замкнутую цепочку, если она существует, и по ней произвести вывод переменной из базиса.

В плане X выделяют множество ненулевых элементов K (включая вводимую в базис переменную) и выясняют, существует ли в этом множестве циклы. Для этого рассматривают план X построчно и вычёркивают те из строк, в которых нет элементов K , если их число не больше одного.

Затем рассматривают столбцы и вычёркивают содержащие не более одного элемента K , при этом ранее вычеркнутые элементы во внимание не принимаются.

Процесс повторяется (поочерёдный просмотр строк и столбцов). В результате конечного числа шагов возможен один из следующих исходов:

1. Все строки (столбцы) вычеркнуты \Rightarrow из элементов K нельзя составить цикл, и допустимый план, составленный из элементов K , является опорным.

2. Получена подматрица в λ -й(м) строке (столбце), которой не менее двух элементов $K \Rightarrow$ множество содержит циклы из невычеркнутых элементов K , и допустимый план не является опорным.

ГЛАВА 3

Квадратичное программирование

Рассмотрим задачу квадратичного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \rightarrow \min, \\ c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq 0, i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1)$$

Построим функцию Лагранжа, даже несмотря на то, что ограничения заданы в форме неравенств:

$$L(\mathbf{x}, \Lambda) = \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=0}^m \lambda_i \left(c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right). \quad (2)$$

Преобразуем ограничение-неравенство в равенство, дополнив задачу переменными q_i :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \rightarrow \min, \\ c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + q_i = 0, i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \\ q_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3)$$

Построим функцию Лагранжа для модифицированной задачи:

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \Lambda) = \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=0}^m \lambda_i \left(c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + q_i \right). \quad (4)$$

Эта функция отличается от ранее введенной функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \Lambda)$ дополнительными переменными q_i . Очевидно, эта функция является квадратичной формой. Можно показать, что она положительно определена. Следовательно, эта функция выпуклая.

Минимум выпуклой функции в области неотрицательных значений переменных достигается в двух возможных случаях (рис. 2):

а) Минимум функции (без учета неотрицательности переменных) достигается в области неотрицательных значений переменных (рис. 2а).

б) Минимум функции (без учета неотрицательности переменных) достигается в области отрицательных значений переменных (рис. 2б). В этом случае минимум в допустимой области достигается на ее границе в точке $x = 0$. Производная в этом случае, очевидно, неотрицательна.

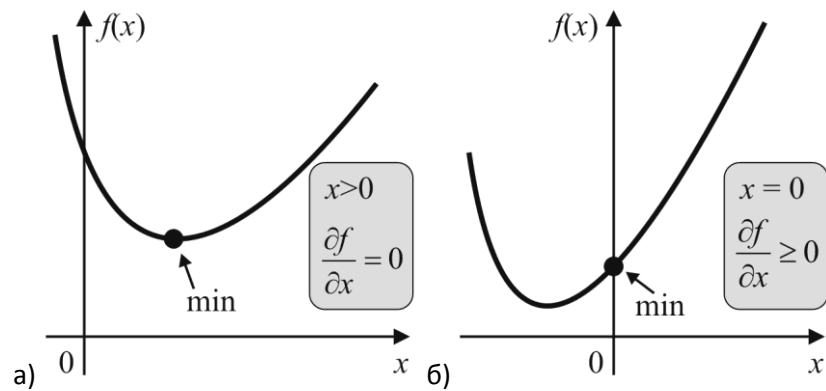


Рис. 1

В двумерном случае варианты аналогичны, но их уже четыре. На рис. 3 показаны линии уровня некоторой выпуклой функции двух переменных, точка минимума которой расположена в одной из четырех координатных четвертей.

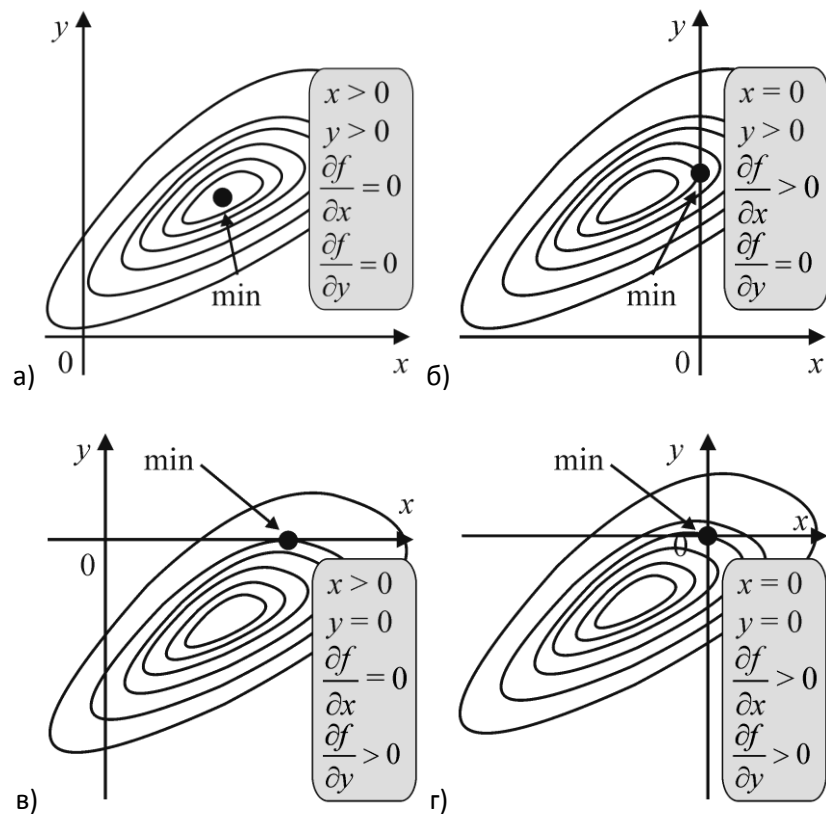


Рис. 2

Аналогично и в многомерном случае. То есть для точки минимума в области неотрицательных значений выполняется три условия:

- значение любой переменной x_j неотрицательно,
- значение частной производной по любой переменной x_j неотрицательно,
- произведение любой переменной x_j на частную производную по x_j равно нулю.

Таким образом, чтобы найти минимум модифицированной функции Лагранжа (4), надо найти точку, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}, \\ q_i \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0, i = \overline{1, m}, \\ \lambda_i \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1, m}, \\ x_j, q_i, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} \geq 0, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} \geq 0, i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_i} \geq 0, i = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (5)$$

В последнем неравенстве можно поставить знак равенства, так как для решения задачи (3) должно выполняться ограничение-равенство. Поэтому третье неравенство в (5) будем игнорировать. Выразим в полученном выражении частные производные модифицированной функции Лагранжа через исходную функцию Лагранжа (2). Обозначим $\partial L / \partial x_j = p_j$. С учетом равенства, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_j} = b_j + 2 \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=0}^m \lambda_i c_{ij} = p_j, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j = -q_i, i = \overline{1, m}, \\ x_j p_j = 0, j = \overline{1, n}, \\ q_i \lambda_i = 0, i = \overline{1, m}, \\ x_j, p_j, q_i, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Получена система $(m+n)$ линейных уравнений с $2(m+n)$ неизвестными, которая дополнена $(m+n)$ нелинейными уравнениями: $x_j p_j = 0$ и $\lambda_i q_i = 0$. Можно в каждом из этих уравнений произвольно приравнять нулю x_j либо p_j , λ_i либо q_i . Тогда первые два уравнения будут представлять собой систему $(m+n)$ линейных уравнений с $(m+n)$ неизвестными. Решив ее, получим значения оставшихся переменных x_j, p_j, λ_i, q_i , но данный способ никак не гарантирует неотрицательность полученных значений. Поэтому поступают следующим образом: вводят невязки w_j между левыми и правыми частями в первом равенстве (6), а также невязки u_i между левыми и правыми частями во втором равенстве (6), причем так, чтобы константы были неотрицательны:

$$w_j = \text{sign}(b_j) \left[b_j - \left(-2 \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{i=0}^m \lambda_i c_{ij} + p_j \right) \right],$$

$$y_i = \text{sign}(y_i) \left[y_i - \left(c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + q_i \right) \right].$$
(6)

Решается задача линейного программирования для минимизации суммарной невязки по переменным y_i . Если полученное минимальное значение равно нулю, то решается другая задача линейного программирования – минимизация суммарной невязки по переменным w_j , при этом переменные y_i уже не рассматриваются, т.е. вычеркиваются из симплекс-таблицы.

Решение обеих задач линейного программирования отличается от стандартного симплекс-метода тем, что при выборе направляющего элемента в таблице на каждом шаге надо следить, чтобы переменные x_j и p_j или λ_i и q_i не оказались одновременно в базисе (см. пример ниже).

Пример.

В треугольнике, показанном на рис. 3 (закрашен серым цветом), найти точку, ближайшую к точке с координатами (5, 4).

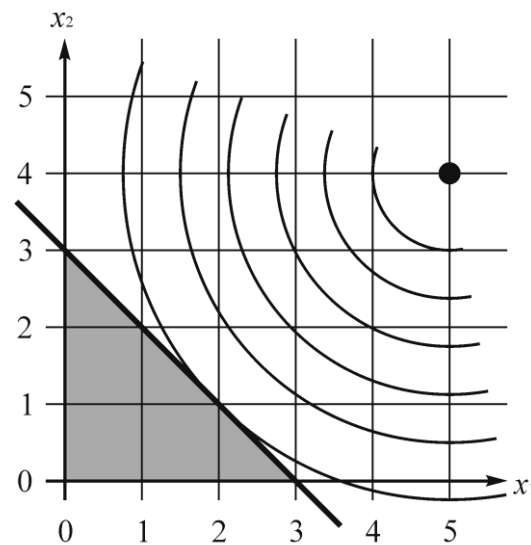


Рис. 3

Т.е. требуется решить следующую задачу квадратичного программирования:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

Решение:

Построим эквивалентную задачу:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - 3 \leq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

Строим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 3).$$

Находим ее производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 10 + \lambda_1 = p_1, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 8 + \lambda_1 = p_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 3 = -q_1. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 10 + \lambda_1 - p_1 = 0, \\ 2x_2 - 8 + \lambda_1 - p_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3 + q_1 = 0, \\ x_1 p_1 = 0, \\ x_2 p_2 = 0, \\ \lambda_1 q_1 = 0, \\ x_1, x_2, \lambda_1, p_1, p_2, q_1 \geq 0. \end{cases}$$

Для решения системы вводятся невязки:

$$\begin{cases} w_1 = 10 - (2x_1 + \lambda_1 - p_1), \\ w_2 = 8 - (2x_2 + \lambda_1 - p_2), \\ y_1 = 3 - (x_1 + x_2 + q_1). \end{cases}$$

С помощью Симплекс-метода находится минимум суммы невязок y_i (т.е. ищется опорное решение):

	C	x_1	x_2	λ_1	p_1	p_2	q_1
$\sum y_i$	3	1	1	0	0	0	1
y_1	3	<u>1</u>	1	0	0	0	1
w_1	10	2	0	1	-1	0	0
w_2	8	0	2	1	0	-1	0

	C	y_1	x_2	λ_1	p_1	p_2	q_1
$\sum y_i$	0	-1	0	0	0	0	0
x_1	3	1	1	0	0	0	1

w_1	4	-2	-2	1	-1	0	-2
w_2	8	0	2	1	0	-1	0

Получилось, что минимальная суммарная невязка по переменным u_i равна нулю. Вычеркиваем столбец u_1 и решим задачу минимизации суммарной невязки по переменным w_j :

	C	x_2	λ_1	ρ_1	ρ_2	q_1
$\sum w_j$	12	0	2	-1	-1	-2
x_1	3	1	0	0	0	1
w_1	4	-2	<u>1</u>	-1	0	-2
w_2	8	2	1	0	-1	0

	C	x_2	w_1	ρ_1	ρ_2	q_1
$\sum w_j$	4	4	-2	1	-1	2
x_1	3	1	0	0	0	1
λ_1	4	-2	1	-1	0	-2
w_2	4	<u>4</u>	-1	1	-1	2

В базис будет вводиться переменная x_2 , так как ρ_1 и q_1 вводить в базис нельзя, потому что должно быть $x_1\rho_1 = 0$ и $\lambda_1q_1 = 0$, но x_1 и λ_1 уже в базисе.

	C	w_2	w_1	ρ_1	ρ_2	q_1
$\sum w_j$	0	-1	-1	0	0	0
x_1	2	$-\frac{1}{4}$				
λ_1	6	$\frac{1}{2}$				
x_2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Т.е. $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Глава 4

Динамическое программирование

Теория

Пусть F – функционал от двух функций y и y' , каждая из которых зависит от x . Будем предполагать, что F непрерывна вместе с частными производными первого порядка. Пусть надо минимизировать следующий функционал:

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

т.е. требуется найти такую функцию $y^*(x)$, что для других кривых $y(x)$ будет выполняться неравенство:

$$J[y^*(x)] \leq J[y(x)]. \quad (2)$$

Если функция $y^*(x)$ является решением, то любое возмущение функции $y^*(x)$ будет увеличивать функционал J . Пусть $g(x) = y^*(x) + \varepsilon \eta(x)$ – возмущение функции $y^*(x)$, где $\eta(x)$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Зафиксируем функции $y^*(x)$ и $\eta(x)$. Тогда интеграл (1) становится функцией параметра ε (ε – вещественное число, таким образом, J больше не является функционалом, а является функцией). Следовательно, мы можем применить традиционное исчисление для поиска минимума функции

$$J(\varepsilon) = \int_a^b F(x, g, g') dx. \quad (3)$$

Продифференцируем функцию $J(\varepsilon)$ по ε :

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, g, g') dx = \int_a^b \frac{dF(x, g, g')}{d\varepsilon} dx. \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} = \eta(x) \text{ и } \frac{\partial g'}{\partial \varepsilon} = \frac{d\eta}{dx} = \eta'(x),$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon} &= \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial g'} \right) \left(\frac{\partial g'}{\partial \varepsilon} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) \eta(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial g'} \right) \eta', \end{aligned} \quad (5)$$

т.е.

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) \eta + \left(\frac{\partial F}{\partial g'} \right) \eta' \right] dx. \quad (6)$$

Так как для функции $y^*(x)$ достигается минимум функционала, должно быть $J'(0) = 0$:

$$J'(0) = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y^*} \right) \eta + \left(\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right) \eta' \right] dx = 0. \quad (7)$$

Проинтегрируем второе слагаемое в левой части по частям:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right) \eta' dx = \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right) \Big|_a^b - \int_a^b \eta \left(\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right] \right) dx. \quad (8)$$

Первое слагаемое равно нулю, т.е. $\eta \left(\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right) \Big|_a^b = 0$, так как $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Тогда (8) упрощается:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right) \eta' dx = - \int_a^b \eta \left(\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right] \right) dx. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим:

$$\begin{aligned} J'(0) &= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y^*} \right) \eta - \int_a^b \eta \left(\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right] \right) \right] dx = \\ &= \int_a^b \eta(x) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y^*} \right) - \left(\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right] \right) \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Множитель $\eta(x)$ – произвольный, поэтому условие (10) может выполняться только в случае, когда:

$$\frac{\partial F}{\partial y^*} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{*'}} \right] = 0. \quad (11)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа и позволяет находить стационарные точки функционала (1).

Пример

Докажем, что кратчайшей кривой, соединяющей две точки, $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, является прямая (рис. 1).

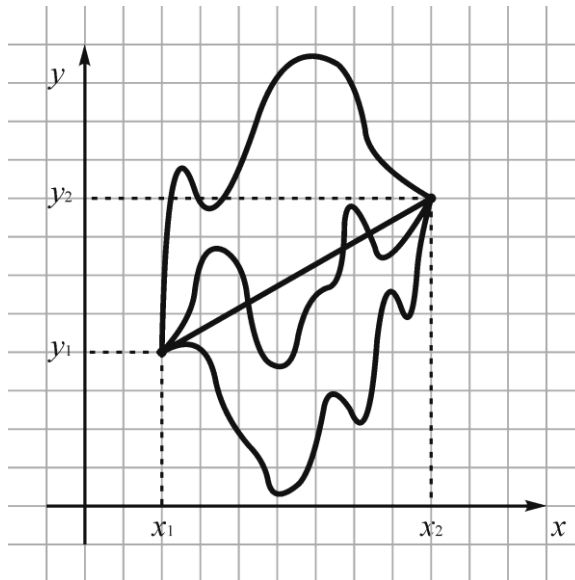


Рис. 1

Рассмотрим множество всевозможных непрерывных однозначных функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1, \\ y(x_2) &= y_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Длина кривой от точки A_1 до точки A_2 равна

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (2)$$

т.е. в нашем случае

$$F(x, y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}. \quad (3)$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа примет вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0, \quad (5)$$

из которого следует, что

$$\dot{y} = a = \text{const}, \quad (6)$$

а значит

$$y(x) = ax + b, \quad (7)$$

где числа a и b определяются из граничных условий (1).

Проверим, что найденная функция (7) доставляет минимум функционала (2).

Сначала используем критерий Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} = \frac{1}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + a^2)^{3/2}} \geq 0. \quad (8)$$

Затем используем критерий Вейерштрассе:

$$\begin{aligned} F(x, y, q) - F(x, y, \dot{y}) - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(q - \dot{y}) &= \\ &= \sqrt{1 + q^2} - \sqrt{1 + a^2} - \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}(q - a) = \\ &= \frac{\sqrt{1 + q^2} \sqrt{1 + a^2} - (1 + aq)}{\sqrt{1 + a^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + a^2 q^2 + (a^2 + q^2)} - \sqrt{1 + a^2 q^2 + 2aq}}{\sqrt{1 + a^2}} \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

так как $a^2 + q^2 \geq 2aq$.

Глава 5

Выпуклое программирование

Теоремы отделимости

Лемма теоремы об отделимости

Пусть A – выпуклое замкнутое множество (т.е. вместе с любой последовательностью элементов из этого множества в нем содержится и предел последовательности). Пусть также дана точка y вне множества A : $y \notin A$. Тогда существует единственная точка x^0 , ближайшая к y (рис. 1), т.е.

$$\forall x \in A \quad x \neq x^0 \Rightarrow \|y - x^0\| < \|y - x\|.$$

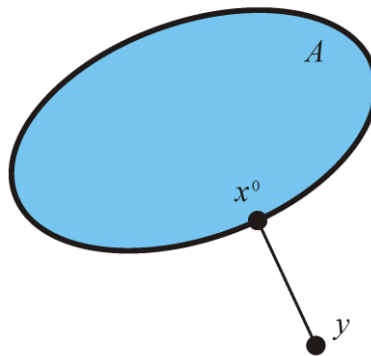


Рис. 1

Доказательство:

Сначала докажем существование такой точки x^0 .

Пусть множество A ограничено. Тогда существует точка x^0 , для которой достигается минимум функции $\|y - x\|$.

Пусть множество A ограничено. Тогда выберем произвольную точку x^* в A и построим множество $A' \subset A$, такое что $A' = \{x \in A, \|y - x\| \leq \|y - x^0\|\}$. Множество A' ограничено и в нем также существует точка x^0 , для которой достигается минимум функции $\|y - x\|$.

Теперь докажем, что точка x^0 единственная.

Пусть в A существует отличная от x^0 точка x^1 , такая, что

$$\|y - x^1\| = \|y - x^0\|.$$

Возьмем среднюю точку между x^0 и x^1 и рассмотрим расстояние от нее до y :

$$\begin{aligned} \left\| y - \frac{x^0 + x^1}{2} \right\|^2 &= \left\| \frac{y - x^0}{2} + \frac{y - x^1}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{y - x^0}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y - x^1}{2} \right\|^2 + 2 \left(\frac{y - x^0}{2}, \frac{y - x^1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \|y - x^0\|^2 + \frac{1}{4} \|y - x^1\|^2 + \frac{1}{2} \|y - x^0\| \|y - x^1\| \cos(\angle(y - x^0, y - x^1)) < \frac{1}{4} \|y - x^0\|^2 + \frac{1}{4} \|y - x^1\|^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание. Точка x^0 , обеспечивающая минимум функции $\|y - x\|$, называется проекцией внешней точки y на выпуклое замкнутое множество A .

Теорема об отделимости выпуклого замкнутого множества и не принадлежащей ему точки

Пусть A – выпуклое замкнутое множество и дана точка y вне A : $y \notin A$. Тогда эта точка может быть отделена от множества A некоторой гиперплоскостью с вектором нормали a (рис. 2), т.е.

$$\exists a: \forall x \in A \quad (a, y) > (a, x).$$

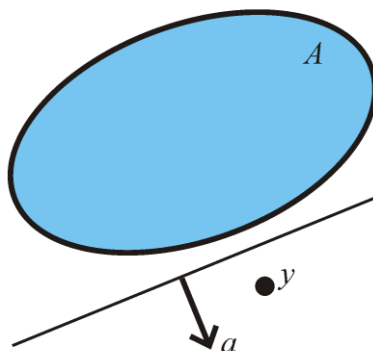


Рис. 2

Доказательство:

Пусть x^0 – проекция y на A . Очевидно, что $\|y - x^0\| > 0$, так как $y \notin A$. Выберем вектор a следующим образом:

$$a = y - x^0.$$

Тогда $(a, y - x^0) > 0$, а значит $(a, y) > (a, x^0)$.

Покажем теперь, что для любого $x \in A$ выполняется неравенство $(a, x^0) \geq (a, x)$.

Из леммы следует, что $\|a\|^2 \leq \|y - x\|^2$ для всех $x \in A$. Рассмотрим точку $x^1 = (1 - t)x^0 + tx$, где $0 < t < 1$. Очевидно, это неравенство верно и для точки x^1 , т.е.

$$\|a\|^2 \leq \|y - x^1\|^2 = \|y - (1-t)x^0 - tx\|^2 = \left\| \underset{a}{y - x^0} - t(x - x^0) \right\|^2 =$$

$$= \|a\|^2 + t^2 \|x - x^0\|^2 - 2t(a, x - x^0).$$

Сокращая $\|a\|^2$, получим неравенство

$$t^2 \|x - x^0\|^2 \geq 2t(a, x - x^0),$$

причем верное для любых сколь угодно малых значений t . Такое возможно только в том случае, когда скалярное произведение в правой части этого неравенства неположительно:

$$(a, x - x^0) \leq 0.$$

Итак, для любой точки $x \in A$ показано, что

$$(a, x) \leq (a, x^0) < (a, y).$$

Теорема об отделимости двух выпуклых замкнутых непересекающихся множеств.

Пусть A и B – выпуклые замкнутые множества, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда эти множества могут быть отделены друг от друга некоторой гиперплоскостью с вектором нормали a (рис. 3), т.е.

$$\exists a: \forall x \in A \forall y \in B (a, x) < (a, y).$$

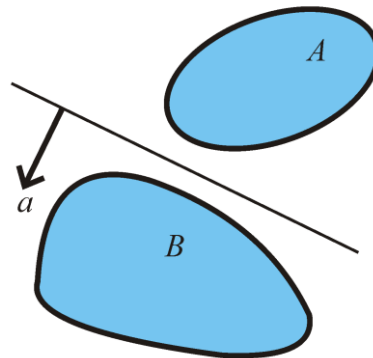


Рис. 3

Доказательство:

Построим множество Z разностей элементов из A и B :

$$Z = A - B = \{z: z = a - b, \forall a \in A, \forall b \in B\}.$$

Докажем, что это множество выпуклое. Для этого рассмотрим два элемента z^1 и z^2 из Z (причем $z^1 = a^1 - b^1, z^2 = a^2 - b^2$) и их выпуклую линейную комбинацию:

$$tz^1 + (1-t)z^2 = ta^1 - tb^1 + (1-t)a^2 - (1-t)b^2 = \left[\underbrace{ta^1 + (1-t)a^2}_{\in A} \right] - \left[\underbrace{tb^1 + (1-t)b^2}_{\in B} \right] \in Z.$$

Так как множества A и B не пересекаются, нулевой вектор не принадлежит множеству Z , а значит, по предыдущей теореме, Z можно отделить от нуля:

$$\exists a: \forall z \in Z \quad (a, 0) > (a, z).$$

Но элемент z – разность произвольных элементов x из A и y из B , а значит

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad \exists a: (a, x - y) < 0.$$

Теорема доказана.

Необходимое условие оптимальности для выпуклого программирования и теорема Милютина-Дубовицкого

Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \in \square^n. \end{cases} \quad (1)$$

Согласно основной теореме методов оптимизации, точка \mathbf{x}^0 является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда пусто пересечение следующих множеств:

$$\bigcap_{i=0}^m G_i = \emptyset, \quad (2)$$

где

$$G_0 = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)\}, \quad G_i = \{\mathbf{x} : h_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}\}. \quad (3)$$

Рассмотрим конусы возможных направлений движения из точки \mathbf{x}^0 . Это конус направлений, улучшающих значение функции:

$$\Gamma_{\mathbf{x}^0}^0 = \{\mathbf{e} : \exists \lambda > 0 : f(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{e}) < f(\mathbf{x}^0)\} \quad (4)$$

и конусы направлений, не нарушающих ограничения:

$$\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i = \{\mathbf{e} : \exists \lambda > 0 : g_i(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{e}) \leq 0\}. \quad (5)$$

Теорема Милютина-Дубовицкого:

Для того, чтобы пересечение выпуклых конусов $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i, i = \overline{0, m}$ было пусто, необходимо и достаточно, чтобы в сопряженных конусах нашлись такие вектора $\mathbf{c}^i \in (\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i)^*$, не равные одновременно нулю, чтобы тем не менее

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{c}^i = 0. \quad (6)$$

Доказательство:

Рассмотрим пространство $\tilde{\Pi} = \Pi_n^{m+1}$, представляющее собой $(m+1)$ -ю степень n -мерного Евклидова пространства. В пространстве $\tilde{\Pi}$ рассмотрим два множества $\tilde{E}_{\mathbf{x}^0}$ и Π :

$$\tilde{E}_{\mathbf{x}^0} = E_{\mathbf{x}^0}^0 \times E_{\mathbf{x}^0}^1 \times \dots \times E_{\mathbf{x}^0}^m, \quad (7)$$

где

$$E_{\mathbf{x}^0}^i = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda_i \mathbf{e}^i, \lambda_i \geq 0, \mathbf{e}^i \in \Gamma_{\mathbf{x}^0}^i \} \quad (8)$$

Множества (8) представляют собой множества точек, в которые можно попасть, двигаясь из точки \mathbf{x}^0 в направлениях, задаваемых конусом $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i$.

Множество Π – диагональ пространства $\tilde{\Pi}$, т.е. множество векторов с одинаковыми значениями компонент:

$$\Pi = \langle \Pi(0), \dots, \Pi(m) \rangle, \forall i, j : \Pi(i) = \Pi(j). \quad (9)$$

Нетрудно показать, что множества $\tilde{E}_{\mathbf{x}^0}$ и Π выпуклы и имеют не более одной общей точки. Тогда по теореме отделимости через точку \mathbf{x}^0 можно провести отделяющую гиперплоскость с ненулевым вектором нормали $\mathbf{C} = \langle \mathbf{c}^0, \dots, \mathbf{c}^m \rangle$:

$$\forall z_{\Gamma} \in \tilde{E}_{\mathbf{x}^0}, \forall z_{\Pi} \in \Pi : (\mathbf{C}, z_{\Gamma}) \geq (\mathbf{C}, z_{\Pi}), \quad (10)$$

или в покомпонентном виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m (\mathbf{c}^i, z_{\Gamma}(i)) &\geq \sum_{i=0}^m (\mathbf{c}^i, z_{\Pi}(i)) \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^m (\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^0 + \lambda_i \mathbf{e}^i) &\geq \left(\sum_{i=0}^m \mathbf{c}^i, \Pi \right) \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^m (\mathbf{c}^i, \lambda_i \mathbf{e}^i) &\geq \left(\sum_{i=0}^m \mathbf{c}^i, \Pi - \mathbf{x}^0 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Положим $\lambda_i = 0$ при $i \neq s$ и $\Pi = \mathbf{x}^0$. Тогда

$$\forall s (\mathbf{c}^s, \lambda_s \mathbf{e}^s) \geq 0.$$

Последнее неравенство означает, что $\forall s \mathbf{c}^s \in (\Gamma_{\mathbf{x}^0}^s)^*$.

Пусть теперь вектора \mathbf{c}^i , хоть и принадлежат сопряженным конусам $(\Gamma_{\mathbf{x}^0}^s)^*$, не удовлетворяют условию (6). Выберем в (11) все числа λ_i равными нулю. Тогда для абсолютно любых векторов Π должно выполняться условие

$$\left(\sum_{i=0}^m \mathbf{c}^i, \Pi - \mathbf{x}^0 \right) \leq 0. \quad (12)$$

Это условие невозможно при

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{c}^i \neq 0,$$

так как иначе, в силу произвольности Π , можно заменить Π на $2\mathbf{x}^0 - \Pi$ и получить противоположное неравенство.

Теорема доказана.

Метод множителей Лагранжа в выпуклом программировании

Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ h_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \in \square^n. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть некоторая точка \mathbf{x}^0 является решением задачи (1). Тогда в силу теоремы Милютина-Дубовицкого существует набор векторов \mathbf{c}^i , не равных одновременно нулю, таких, что, тем не менее,

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{c}^i = 0, \quad (2)$$

где все вектора \mathbf{c}^i принадлежат конусам, сопряженным с конусами $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i, \Gamma_{\mathbf{x}^0}^0$ – конус направлений, улучшающих функцию $f(\mathbf{x})$, а $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i$ – конусы направлений, не выводящих за границы допустимой области.

Рассмотрим вектор $\mathbf{c}^0 \in (\Gamma_{\mathbf{x}^0}^0)^*$. Очевидно, что конус $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^0$ состоит из направлений, составляющих тупой угол с градиентом целевой функции $\nabla f(\mathbf{x}^0)$. Сопряженный с ним конус будет включать в себя только антиградиент и вектора, коллинеарные с ним, т.е.

$$\mathbf{c}^0 = \mu_0 \nabla f(\mathbf{x}^0), \mu_0 < 0.$$

Пусть точка \mathbf{x}^0 – не находится на границе области, задаваемой i -м ограничением. Тогда, чтобы не нарушить i -е ограничение, можно передвигаться в любом направлении, а значит, конус $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i$ совпадает с пространством \square^n . Следовательно, сопряженный конус $(\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i)^*$ состоит из нулевого вектора и $\mathbf{c}^i = \mathbf{0}$.

Пусть теперь точка \mathbf{x}^0 находится на границе области, задаваемой i -м ограничением. Тогда, чтобы не нарушить i -е ограничение, можно передвигаться в любом направлении, составляющим тупой угол с градиентом $\nabla h_i(\mathbf{x}^0)$. Т.е. сопряженный конус $(\Gamma_{\mathbf{x}^0}^i)^*$ состоит из векторов, коллинеарных с антиградиентом к функции $h_i(\mathbf{x}^0)$, а потом $\mathbf{c}^i = \mu_i \nabla h_i(\mathbf{x}^0), \mu_i < 0$.

Из теоремы Милютина-Дубовицкого следует, что существует набор векторов \mathbf{c}^i , не равных одновременно нулю, таких, что

$$\mu_0 \nabla f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla h_i(\mathbf{x}^0) = 0. \quad (3)$$

Пусть выполнено условие Слейтера, т.е. $\mu_0 \neq 0$ (это условие выполняется для внутренних точек области допустимых значений). Тогда (3) можно переписать в виде:

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}^0) = 0, \quad (4)$$

где все числа λ_i неотрицательны.

Легко заметить, что в левой части (4) записан градиент функции Лагранжа.

Теоремы о Седловой точке функции Лагранжа (необходимое и достаточное условия оптимальности)

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ h_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \in \square^n. \end{cases} \quad (5)$$

Построим функцию Лагранжа, даже несмотря на то, что ограничения в (5) – неравенства:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Определение: точка $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ называется Седловой точкой функции Лагранжа, если она удовлетворяет неравенствам:

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \quad L(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \leq L(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \quad \forall \mathbf{x}. \quad (7)$$

Теорема (достаточное условие):

Для того, чтобы точка $\bar{\mathbf{x}}$ являлась решением задачи (5), достаточно, чтобы нашлись такие неотрицательные числа λ_i , чтобы пара векторов $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ являлась седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство:

Пусть $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ – седловая точка функции Лагранжа. Тогда

$$\forall \lambda \geq 0 \quad L(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) \leq L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \geq 0 \quad f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=0}^m \lambda_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) - \text{в том числе и для } \lambda_i = 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{\substack{i=0 \\ \geq 0}}^m \bar{\lambda}_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall i \quad \bar{\lambda}_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

$$\forall \mathbf{x} \quad L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) \leq L(\mathbf{x}, \bar{\lambda})$$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{x} \quad f(\bar{\mathbf{x}}) + \underbrace{\sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i h_i(\bar{\mathbf{x}})}_0 \leq f(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i h_i(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{x} \quad f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{i=0 \\ \geq 0}}^m \bar{\lambda}_i h_i(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

Теорема (необходимое условие):

Пусть точка $\bar{\mathbf{x}}$ – решение задачи (5). Тогда существует набор неотрицательных чисел λ_i , что пара векторов $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$ является седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство:

Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ – решение задачи (5). Тогда по теореме Милютина-Дубовицкого существует набор $\bar{\lambda}$ неотрицательных чисел $\bar{\lambda}_i$, для которых градиент функции Лагранжа равен нулю:

$$\nabla L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) = \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

Условие (10) является необходимым условием минимума функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \lambda)$ по переменным \mathbf{x} . Так как функции $f(\mathbf{x})$ и $h_i(\mathbf{x})$ выпуклы, то и функция Лагранжа выпуклая по переменным \mathbf{x} , а значит необходимое условие минимума является также и достаточным.

Производные функции Лагранжа по переменным λ_i неположительные и в точке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$ равны $h_i(\bar{\mathbf{x}})$, причем $\partial L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) / \partial \lambda_i < 0$ при $\bar{\lambda}_i = 0$, так как $\bar{\lambda}_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Это означает, что в области неотрицательных значений переменных λ_i функция Лагранжа в точке $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$ имеет максимум по переменным λ_i .

Теорема доказана.

Метод возможных направлений

Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования с ограничениями-равенствами:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = \overline{1, k}, \\ \mathbf{x} \in \square^n. \end{cases}$$

Область допустимых значений показана на рис. 1.

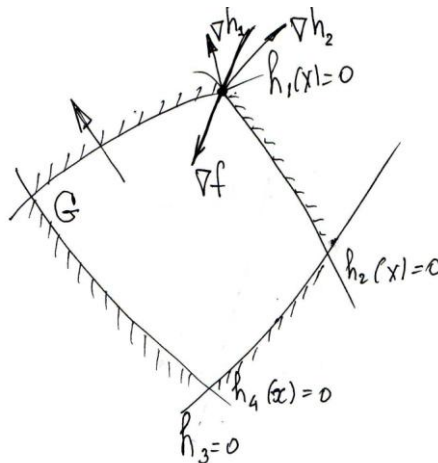


Рис. 1. Область допустимых значений для задачи (1) в случае четырех ограничений-неравенств.

Перепишем задачу (1) в канонической форме, чтобы целевая функция стала линейной:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \\ f(\mathbf{x}) \leq x_{n+1}, \\ \mathbf{x} \in \square^{n+1}, \end{cases}$$

$\mathbf{p} = (0, 0, \dots, 0, 1), \mathbf{p} \in \square^{n+1}.$

Введем управляющую константу $\delta (\delta > 0)$, которая определяет являются ли ограничения существенными. Если $h_l(\mathbf{x}^k) \leq -\delta$, то граница $h_l(\mathbf{x}) = 0$ является близкой (на рис. 2 l -я и s -я границы области являются близкими, а значит ограничения-неравенства, задающие эти границы – существенными).

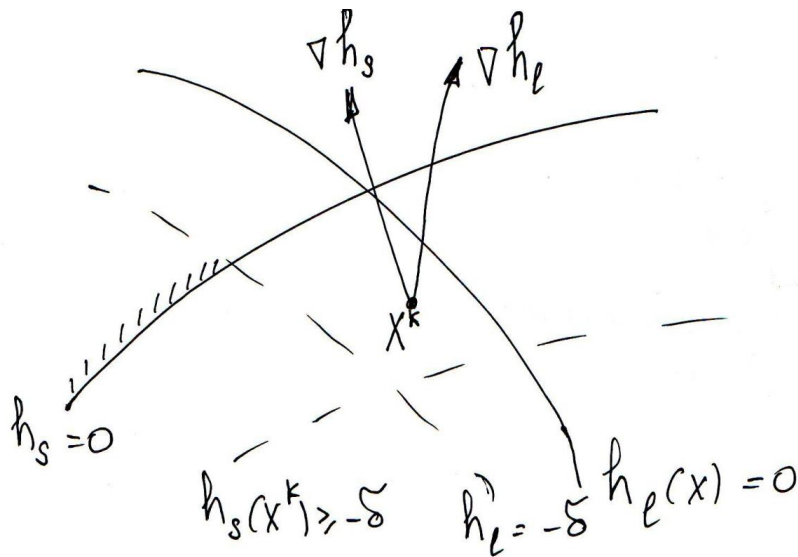


Рис. 2. Существенные ограничения

Для того, что бы при переходе от одной точки, находящейся вблизи границы области, к другой точке в направлении вектора ξ , необходимо (рис. 3), чтобы для существенных ограничений выполнялось неравенство:

$$(\nabla h_i, \xi) \leq -\lambda,$$

где λ ($\lambda > 0$) – вторая управляющая константа, которая показывает проекцию направления ξ на градиент i -го существенного ограничения ∇h_i .

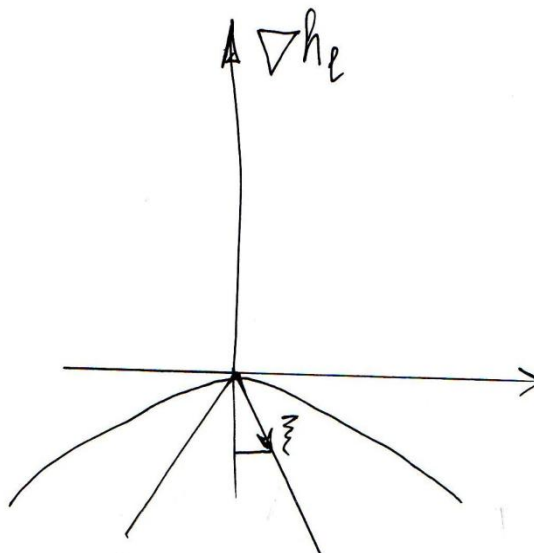


Рис. 3. Конус возможных направлений ξ , двигаясь в которых можно оставаться в допустимой области.

Если не ограничить вектор ξ , то угол раскрытия конуса будет большим, близким к 180° , и тогда выбранное алгоритмом направление ξ может совпасть с касательной к границе области и тогда следующая точка окажется недопустимой. Чтобы этого избежать, вектор ξ ограничивают. Это можно сделать несколькими способами.

1. Ограничение по модулю: $\|\xi\| \leq a$ (рис. 4а).

Недостаток этого способа заключается в том, что задаются нелинейные ограничения.

2. Ограничение по модулю компонент вектора, т.е. $|\xi_j| \leq c_j$ (рис. 4б).

В отличие от ограничения по модулю всего вектора, в этом случае приходится вводить в два раза больше ограничений. Но достоинством этого способа является линейность новых ограничений, поэтому выберем как раз этот способ.

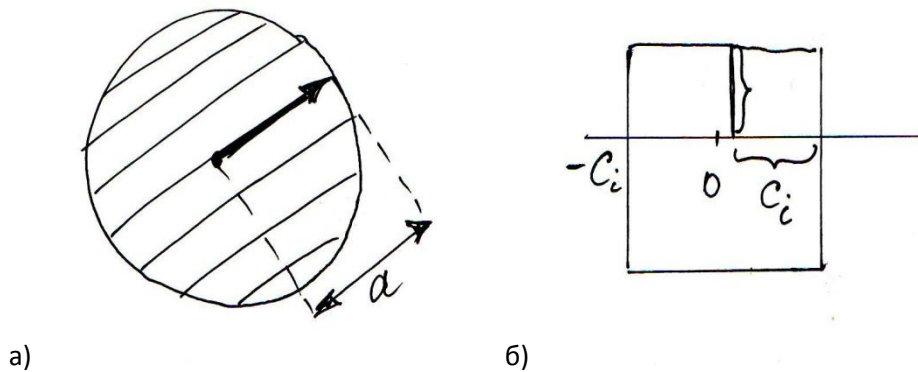


Рис. 4. Ограничение вектора по модулю (а) и ограничение по модулю компонент вектора (б).

Формальная схема метода возможных направлений следующая.

1. На каждом шаге для точки \mathbf{x}^k строится множество существенных ограничений:

$$S = \{j | h_j(\mathbf{x}^k) \geq -\delta\}.$$

2. Решается вспомогательная задача линейного программирования, позволяющая найти направление, как можно более похожее на направление антиградиента, но позволяющее оставаться в допустимой области:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \xi) \rightarrow \min, \\ (\nabla h_i(\mathbf{x}^k), \xi) \leq -\lambda, \forall j \in S, \\ |\xi_j| \leq c_j. \end{cases}$$

3. При решении задачи (3) возможно несколько случаев.

а) Решение не существует.

Но форма не может быть ограничена снизу, т.к. все $|\xi_j| \leq c_j$. Может оказаться, что область допустимых значений вспомогательной задачи линейного программирования пуста. Это означает, что либо даже далекие границы области считаются близкими и потому попадают в список существенных ограничений, либо конусы возможных направлений слишком узки, либо и то и другое. В этом случае, чтобы шире раскрыть конус, полагают $\delta = \delta/m$ (может также $\lambda = \lambda/r$) и переходят к шагу 1.

б) Решение существует, но $(\mathbf{p}, \xi) > 0$.

Переходить к новой точке в направлении \mathbf{p} нет смысла, так как значение целевой функции только возрастет. В этом случае также причиной может оказаться слишком узкие конусы возможных направлений. Поэтому и в этом случае полагают $\lambda = \lambda/r$ и переходят к шагу 2.

в) Решение существует, но $-\delta < (\mathbf{p}, \xi) < 0$.

Это означает, что в полученном направлении ξ функция будет убывать, но медленно. В полученном направлении осуществляют переход к новой точке:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\xi.$$

Но после перехода, как и в случае (а) полагают $\delta = \delta/2$ и $\lambda = \lambda/2$.

4. Если задача линейного программирования успешно решена и ни один из описанных в пункте 3 случае не выполнен, осуществляют переход к новой точке:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\xi.$$

Величину шага t выбирают так, чтобы не нарушить ни одно из ограничений. Для этого решают нелинейные уравнения

$$h_i(\mathbf{x}^k + t_i \xi) = 0,$$

чтобы определить точку пересечения выбранного направления и границы области. Затем из всех найденных значений t_i выбирается минимальное:

$$t = \min \{t_i\}.$$

Алгоритм прекращает свою работу при выполнении условия $\|t\xi\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – некоторая константа, задающая точность обнаружения минимума. Если это условие не выполняется, то осуществляется переход к шагу 1, но уже для новой точки \mathbf{x}^{k+1} .

Данному алгоритму свойственны следующие недостатки:

- нет рекомендаций по выбору управляющих констант λ и δ ,
- метод не позволяет решить задачу с ограничениями типа равенств,
- на самом первом шаге требуется точка, уже находящаяся в допустимой области.

Последний недостаток легко устраняется, так как внутреннюю точку можно также найти методом, похожим на метод возможных направлений, начиная с произвольной точки \mathbf{x}^0 :

1. Пусть $\mathbf{x}^0 \notin G$ - произвольная точка.

Строится множество нарушенных ограничений $S_1 = \{j | h_j(\mathbf{x}^0) > 0\}$.

если $S_1 = \emptyset$, то внутренняя точка уже получена. В противном случае строится множество не нарушенных, но существенных ограничений $S = \{j | j \notin S_1 \wedge h_j(\mathbf{x}^0) > -\delta\}$.

2. Выбирается некоторое нарушенное ограничение $l \in S_1$ и решается вспомогательная задача линейного программирования, состоящая в поиске такого направления ξ , чтобы ненарушенные ограничения оставались ненарушенными, но при для новой точки было также ненарушенным и l -е ограничение:

$$\begin{cases} (\nabla h_l(\mathbf{x}^0), \xi) \rightarrow \min, \\ (\nabla h_j(\mathbf{x}^0), \xi) \leq -\lambda, & \forall j \in S \\ |\xi_j| \leq c_j. \end{cases}$$

3. Возможные особые варианты решения те же самые, что и в основном алгоритме (см. выше). При их возникновении поступают аналогично.

4. Осуществляют переход к новой точке:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\xi$$

Параметр t выбирается исходя из условий:

$$\text{а) } t_l : h_l(\mathbf{x}^k + t_l\xi) \leq 0$$

т.е. в данном направлении следует двигаться до тех пор, пока l -е ограничение не перестанет быть нарушенным. Если не существует такого t_l (т.е. нет допустимых точек в этом направлении), то выбирается такое значение, чтобы нарушение было как можно слабее, т.е.

$$t_l = \min_t h_l(\mathbf{x}^k + t\xi)$$

б) Для всех ненарушенных ограничений решается уравнение:

$$t_i : h_i(\mathbf{x}^k + t_i\xi) = 0 \quad i \notin S_1$$

Выбирается величина шага:

$$t = \min\{t_i\}, (i \notin S_1 \text{ или } i = l).$$

Полученное значение t позволяет определить, на какое расстояние можно перейти так, чтобы не нарушить остальные ограничения.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\xi;$$

Далее осуществляется переход к шагу 1, но уже для новой точки \mathbf{x}^{k+1} .

Метод аппроксимации границ области

Данный метод позволяет решать следующую каноническую задачу нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ h_i(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

Будем считать, что множество допустимых решений G ограничено. Тогда, очевидно, это множество является подмножеством некоторого гиперпараллелепипеда Q_0 (рис. 1), задаваемого неравенствами

$$a_j \leq x_j \leq b_j, j = \overline{1, n}.$$

Возьмем произвольную внутреннюю точку \mathbf{x}^0 в G и решим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ \mathbf{x} \in Q_0. \end{cases}$$

Очевидно, это задача линейного программирования. Решив ее, получим точку \mathbf{q}^1 , не принадлежащую G . На прямой, соединяющей точки \mathbf{x}^0 и \mathbf{q}^1 найдем точку \mathbf{x}^1 , лежащую на границе области G :

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{q}^1 - \mathbf{x}^0),$$

где t – некоторое вещественное число из интервала $(0, 1)$.

Точка \mathbf{x}^1 принадлежит области G , а значит

$$\min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{p}, \mathbf{x}^1).$$

Область G включена в область Q_0 , а значит

$$\min_{\mathbf{x} \in Q_0} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Таким образом, получена оценка сверху и оценка снизу минимума функции (\mathbf{p}, \mathbf{x}) в области G :

$$\alpha_1 \leq \min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq \beta_1,$$

$$\text{где } \alpha_1 = \min_{\mathbf{x} \in Q_0} (\mathbf{p}, \mathbf{x}), \beta_1 = (\mathbf{p}, \mathbf{x}^1).$$

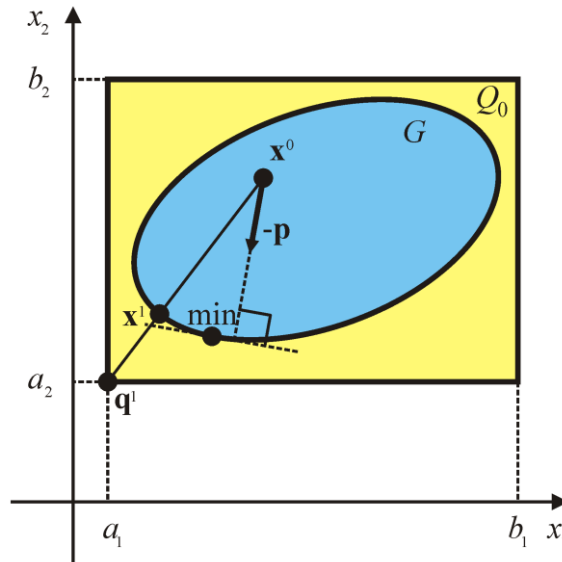


Рис. 1

Пусть точка \mathbf{x}^1 лежит на границе G , описываемой l -й кривой в (1), т.е. $h_l(\mathbf{x}^1) = 0$. Построим отсекающую гиперплоскость, касательную к области G в этой точке и рассмотрим следующую область Q_1 :

$$Q_1 = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in Q_0 \quad \& \quad (\nabla h_l(\mathbf{x}^1), \mathbf{x} - \mathbf{x}^1) \leq 0 \right\}.$$

Эта область изображена на рис. 2.

Аналогично предыдущему шагу, снова решается вспомогательная задача линейного программирования:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ \mathbf{x} \in Q_1. \end{cases}$$

Решив ее, получим точку \mathbf{q}^2 , не принадлежащую G . На прямой, соединяющей точки \mathbf{x}^0 и \mathbf{q}^2 найдем точку \mathbf{x}^2 , лежащую на границе области G . Аналогично получается оценка сверху и оценка снизу минимума функции (\mathbf{p}, \mathbf{x}) в области G :

$$\alpha_2 \leq \min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq \beta_2.$$

$$\text{где } \alpha_2 = \min_{\mathbf{x} \in Q_1} (\mathbf{p}, \mathbf{x}), \quad \beta_2 = (\mathbf{p}, \mathbf{x}^2).$$

Так как $Q_1 \subseteq Q_0$, для оценки снизу справедливо неравенство: $\alpha_2 \geq \alpha_1$.

Может оказаться, что $(\mathbf{p}, \mathbf{x}^2) \geq (\mathbf{p}, \mathbf{x}^1)$, поэтому в качестве оценки сверху вместо $(\mathbf{p}, \mathbf{x}^2)$ выберем

$$\beta_2 = \min \left\{ \beta_1, (\mathbf{p}, \mathbf{x}^2) \right\}.$$

В итоге получается последовательность сходящихся оценок, а точки \mathbf{x}^k будут приближаться к решению задачи (1).

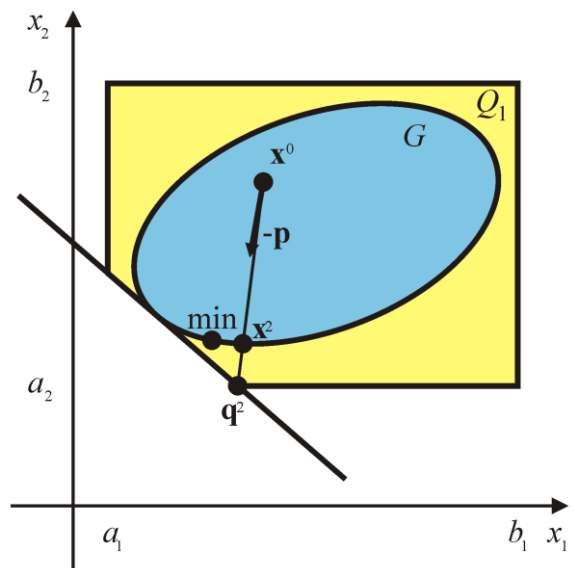


Рис. 2

Метода оптимизации функций при наличии ограничений.

§1. Метод штрафной функции (ШФ).

Достоинства метода штрафа: простота принципа и практическая эффективность.

Оптимизацию нелинейной функции при наличии функциональных ограничений не обязательно выпуклых можно свести к задаче безусловной оптимизации. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ g_i(x) &\leq 0, i = 1 \dots m \end{aligned} \quad (1.1)$$

f, g_i – непрерывны в R^n

Метод ШФ основан на преобразовании исходной задачи с ограничениями в одну или последовательность задач безусловной оптимизации. С помощью функций, задающих ограничения, строится так называемый штраф, который добавляется к целевой функции исходной задачи так, что нарушение какого-либо ограничения становится невыгодным с точки зрения полученной задачи безусловной оптимизации.

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y^2, & y \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Положим:

$$\psi(x, r) = r \sum_{i=1}^m \varphi(g_i(x)), r > 0 \quad (1.3)$$

Опр 1.1 функцию $\psi(x, r)$, определенную для всех $r > 0$ на множестве X , будем называть штрафной функцией целевой задачи (1.1)

В допустимой области $\psi(x, r) = 0$, в недопустимых $\psi(x, r) \rightarrow \infty$

Т.о. вместо задачи (1.1) решается при достаточно большом r задача:

$$F(x, r) = f(x) + \psi(x, r) \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (1.4)$$

Установим формально некоторые условия применимости метода ШФ.

Теорема 1.1 (о сходимости метода ШФ)

Пусть $f(x)$ и $g_i(x), i = 1 \dots m$ - непрерывная задача (1.1) имеет непустую область допустимых решений:

$$D = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1 \dots m\} \text{ и } \forall c \quad D_c(r) = \{x \in R^n \mid F(x, r) \leq c\} - \text{компакт}$$

Тогда

$$1. \quad \exists M = \min_{x \in D} f(x) \text{ и } \forall r \quad \exists x(r) : \min_{x \in R^n} \{F(x, r)\} = F(x(r), r) = M(r) \leq M$$

2. \exists последовательность $\{x(r_k)\} \rightarrow x^*$, где x^* - оптимальное решение (1.1) и выполняется $\{M(r_k)\} \rightarrow M$

Док-во:

Самостоятельно.

Пример 1.1

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \rightarrow \min \\ g(x) &= x \leq 0 \end{aligned}$$

Решение:

$$\text{Положим } \psi(x, r) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ rx^2, & x > 0 \end{cases}$$

$$F(x, r) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -x + rx^2, & x > 0 \end{cases} \rightarrow \min_{x \in R^n}$$

Дифференцируем и находим точки min:

$$\begin{aligned} x^*(r) &= \frac{1}{2}r, m(r) = -\frac{1}{4}r \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} x^*(r) &= x^* = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 0 \end{aligned}$$

§2. Метод отсекающей гиперплоскости.

Рассмотрим задачу:

$$c^T x \rightarrow \min, g(x) \leq 0 \quad (2.1)$$

Где $g(x)$ - выпуклая

Пусть допустимое множество $D = \{x \mid g(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ и ограниченное \Rightarrow можно найти ограниченное множество $S_0 = \{x \mid A_n^T x \leq b_n, n = 1..l\} : D \subseteq S_0$ (например, гиперкуб).

Рассмотрим задачу:

$$c^T x \rightarrow \min, x \in S_0 \quad (2.2)$$

Пусть x^* - ее оптимальное решение (\exists всегда т.к. S_0 -компакт)

Построим такую гиперплоскость $p_0^T x = \alpha$:

$$\forall x \in D \quad p_0^T x \leq \alpha \text{ и } p_0^T x_0^* > \alpha \quad (2.3)$$

- отсекающая гиперплоскость.

Пусть p_0 - субградиент функции $g(x)$ в точке x_0^* . Рассмотрим гиперплоскость:

$$H_0 = \{x \in S_0 \mid p_0^T x = \alpha = p_0^T x_0^* - g(x_0^*)\} \quad (2.4)$$

$$\text{Уравнение } p_0^T x = \alpha \quad (2.5)$$

Где $\alpha = p_0^T x_0^* - g(x_0^*)$, - это уравнение отсекающей гиперплоскости.

Покажем это:

Если $x_0^* \notin S_0$ то из $g(x_0^*) > 0$ и $p_0^T x_0^* = \alpha + g(x_0^*) \Rightarrow p_0^T x_0^* > \alpha$

Если $x \in S_0$ из выпуклости $g(x)$ следует

$$g(x) - g(x_0^*) \geq p_0^T (x - x_0^*) \quad (2.6)$$

Т.к. $g(x \leq 0)$ из (2.6) $\Rightarrow 0 \geq g(x) \geq p_0^T (x - x_0^*) + g(x_0^*)$, т.е.

$$p_0^T x \leq p_0^T x_0^* - g(x_0^*) = \alpha$$

Т.о. предложена процедура построения последовательность пробных точек $\{x_k^*\}$. Если на некотором шаге алгоритма получим $x_i^* \in D$, то найдено оптимальное решение, в противном случае получим последовательность недопустимых точек $\{x_k^*\}$. Из предположения об ограниченности множества $S_0 \Rightarrow$ что последовательность $\{x_k^*\}$ ограничена в S_0 . Из всех ограниченных последовательностей можно выделить одну сходящуюся подпоследовательность, т.е. $\exists \hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^*$

Можно показать, что при ограниченности субградиента функции $g(x)$ на множестве S_0 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_{n_k}^*) = g(\hat{x}) = 0$$

Т.о. если \hat{x} - предельная точка $\{x_k^*\}$, то $g(\hat{x}) = 0$, а также если x^* - оптимальное решение исходной задачи (2.1), то $c^T x^* \geq c^T x_k^*$ (т.е. $D \subseteq S_k$)

Из непрерывности функции $c^T x \Rightarrow c^T x^* \geq c^T \hat{x}$, т.е. \hat{x} - оптимальное решение (2.2)

§3. Метод условного градиента.

Рассмотрим задачу:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in D} \quad (3.1)$$

D – Выпуклое замкнутое непустое ограниченное множество.

$f(x)$ – дифференцируемая функция

пусть x_k - пробная точка из D . Рассмотрим схему минимизации

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (3.2)$$

В определении для любой внутренней точки x_k приращение можно представить в виде:

$$f(x) - f(x_k) = \langle \text{grad } f(x_k), x - x_k \rangle + o(\|x - x_k\|) \Rightarrow$$

Определим направление вектора p_k , решая задачу:

$$\langle \text{grad } f(x_k), x - x_k \rangle \rightarrow \min_{x \in D} \quad (3.3)$$

Пусть решением этой задачи является точка z_k

$$z_k = \arg \min_{x \in D} \langle \text{grad } f(x_k), x - x_k \rangle$$

Т.е. $\forall x \in D$ выполняется условие: $\langle \text{grad } f(x_k), x \rangle \geq \langle \text{grad } f(x_k), z_k \rangle$

В качестве направления минимизации выберем $p_k = z_k - x_k$. Т.к. $z_k \in D$, - выпуклое множество \Rightarrow точки вида:

$$x = \lambda z_k + (1 - \lambda)x_k = x_k + \lambda(z_k - x_k),$$

при $\lambda \in [0, 1]$ - допустимые точки исходной задачи \Rightarrow длина шага определяется из решения

$$\text{задачи: } f(x_k + \lambda(z_k - x_k)) \rightarrow \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \Rightarrow$$

получим схему решения задачи.

Проанализируем ее.

Пусть $f(x)$ – непрерывная дифференцируемая функция: в области задания существует константа Липшица, для ее градиента: $\|\text{grad } f(x) - \text{grad } f(y)\| \leq L \|x - y\|$

Оценим значение функции в точке x_{k+1} . Обозначим $x_\theta = x_k + \theta p_k$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(x_{k+1}) &= f(x_k) + \alpha_k \langle \text{grad } f(x_\theta) - \text{grad } f(x_k), p_k \rangle + \alpha_k \langle \text{grad } f(x_k), p_k \rangle \leq \\ &\leq f(x_k) + \alpha_k \langle \text{grad } f(x_\theta), p_k \rangle + (\alpha_k)^2 L \|p_k\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим через } \delta_k \text{ величину равную } \delta_k = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\langle \text{grad } f(x_k), p_k \rangle}{L \|p_k\|^2}$$

$$\text{Тогда при } \alpha_k^* = \min\{\delta_k, 1\} \quad (3.4)$$

Выполняется $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. В качестве условия окончания расчетов примем

$$\langle \text{grad } f(x_k), p_k \rangle = 0, \text{ т.е. } x_{k+1} = x_k$$

Пример 3.1

$$x_1^2 + x_2 \rightarrow \min$$

$$-x_1 - x_2 + 1 \leq 0, x_1 \leq 1, x_2 \leq 1$$

$$1. x_1 = (x_1', x_2') = (1, 1). \text{grad } f(x_1) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Решая задачу ЛП: } \langle \text{grad } f(x_1), x - x_1 \rangle_{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 2x_1 + x_2 - 3 \rightarrow \min_{x \in D}$$

$$\text{Получим: } z_1 = (0, 1)^T, p_1 = z_1 - x_1 = (1, 0)^T$$

Т.к. $\langle \text{grad } f(x_1), p_1 \rangle = -2 < 0$, решая задачу

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1 - \alpha_1)^2 + 1 \rightarrow \min_{\alpha_1}$$

Получаем $\alpha_1^* = 1, x_2 = x_1 + \alpha_1^* p_1 = (0, 1)^T$. Переходим к следующей итерации:

$$2. \text{grad } f(x_2) = (0, 1)^T. \text{ Решая: } x_2 - 1 \rightarrow \min_{x \in D} \text{ получим}$$

$$z_2 = (1, 0), p_2 = (1, -1)^T \text{ и } \langle \text{grad } f(x_2), p_2 \rangle = -1 < 0$$

$$\text{Решая } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \alpha_2^2 + (1 - \alpha_2) \rightarrow \min_{\alpha_2}, \text{ получим:}$$

$$\alpha_2^* = 1/2, x_3 = (1/2, 1/2)^T. \text{ Переходим к следующей итерации}$$

$$3. \text{grad } f(x_3) = (1, 1)^T. \text{ Решая } x_1 + x_2 - 1 \rightarrow \min_{x \in D}, \text{ получим:}$$

$$z_3 = (1, 0), p_3 = (-1/2, 1/2)^T \text{ и } \langle \text{grad } f(x_3), p_3 \rangle = 0 \Rightarrow x_3 = x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Глава 6

Оптимизационные задачи на графах

Предполагается, что слушатели знакомы с основами теории графов (курс «Дискретная математика»).

Гл.1 ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Наиболее интересной в этом разделе является задача построения остовного дерева минимального веса. Решается с помощью алгоритма Прима.

В терминах неориентированных графов формулируется ряд уже рассмотренных задач, в частности – задача о назначениях. Решается с помощью алгоритма Мака.

Гл.2 ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Основные вопросы:

1. Кратчайший путь между выделенной парой вершин
2. Кратчайший путь между выделенной вершиной и всеми остальными вершинами
3. Длины путей между всеми парами вершин и что это за пути.

§ 1 АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ ПОИСКА: КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ОРГРАФЕ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

Пусть орграф $G = (X, U)$; λ -й дуге $(x_i, x_j) \in U$ графа G поставим в соответствие число

$c(x_i, x_j) \geq 0$. Если дуга отсутствует, то полагаем $c(x_i, x_j) = \infty$. $c(x_i, x_j)$ - это вес дуги, или длина дуги.

Длина пути – это сумма длин дуг, составляющих путь. \forall 2х вершин s и t графа G может существовать несколько путей. Тот, который имеет минимальную длину называется **кратчайшим**. Один из наиболее эффективных алгоритмов решения задачи поиска кратчайшего пути между парой вершин является алгоритм Дейкстры (1959).

Основная идея алгоритма Дейкстры: Пусть s – начальная вершина, и известно m ближайших к ней вершин (близость определяется длиной кратчайшего пути). Пусть известны кратчайшие пути из s в эти m вершин: $x_k, k = \overline{1, m}$. Определяем $(m+1)$ -ю вершину ближайшую к s . Для этого:

поемим s и $x_k, k = \overline{1, m}$. Для λ из непомеченных вершин $x_k (k = m+1, m+2, \dots)$ построим пути непосредственно соединяющие s с помощью дуг (x_k, x_k) λ -ю помеченную вершину x с x_k .

Выберем из этих путей кратчайший – его будем считать условно кратчайшим путем из вершины s в вершину x_k . $(m+1)$ -й ближайшей вершиной к s является та, у которой условно кратчайший путь имеет минимальную длину.

Начиная с $m=1$ процедура повторяется пока не будет получен кратчайший путь в вершину s .

Алгоритм Дейкстры

Перед началом – все вершины не помечены и дуги не окрашены. Пусть $l(x_i)$ - длина кратчайшего пути из s в x_i .

Минимизация: Пусть $l(s) = 0$ - постоянная пометка s , - временные пометки. Положим $p = s$ – последняя из окрашенных вершин.

Основной цикл

Шаг 1 (обновление пометок): Для всех $x_i \in \Gamma(p)$ - (множество вершин, соединенных с x_i), пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением:

$$l(x_i) \leftarrow \min(l(x_i), l(p) + l(p, x_i))$$

Шаг 2 (превращение пометки в постоянную)

Среди всех вершин с временными пометками нашли такую, для которой $l(x_i^*) = \min\{l(x_i)\}$.

Считать пометку вершины x_i^* постоянной и положить $p = x_i^*$. Кроме того, окрасить дугу, ведущую в выбранную на данном шаге вершину x_i^* .

Шаг 3: Если $p = t$, то $l(p)$ - длина кратчайшего пути \Rightarrow stop. Кратчайший путь – единственный путь из s в t , составленный из окрашенных ребер. Если $p \neq t$ перейти к шагу 1.

Сложность алгоритма $\frac{3n(n-1)}{2}$ - операций (сложения, сравнения) + выявление помеченных/непомеченных вершин. \Rightarrow сложность $O(n^2)$

§ 2 АЛГОРИТМ ФЛОЙДА ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ МЕЖДУ ВСЕМИ ПАРАМИ ВЕРШИН ОРГРАФА В СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ МАТРИЦЫ ВЕСОВ.

Пусть требуется найти кратчайшие пути между всеми парами вершин в случае общей матрицы весов, в которой допускаются циклы отрицательной длины. Возможно решение с многократным применением алгоритма Дейкстры для всевозможных начальных вершин, но это накладно в вычислительном смысле.

Алгоритм Флойда базируется на последовательном преобразовании начальной матрицы весов. На k -й итерации матрица содержит длины кратчайших путей между k -й парой вершин с тем ограничением, что путь между x_i и x_j ($\forall x_i, x_j$) содержит в качестве промежуточных только вершины из множества (x_1, x_2, \dots, x_k) .

Введем обозначения: Перенумеруем вершины исходного графа целыми числами от 1 до n .

Положим в начальной матрице весов $c^* = [c_{ij}^*]$ для всех $i = \overline{1, n}$, $c_{ii}^0 = 0$ и $c_{ij} = \infty$, если в графе отсутствует дуга (x_i, x_j) .

Инициализация: $k=0$.

Основной цикл

Шаг 1: $k=k+1$

Шаг 2: для всех $i \neq k : c_{ik}^k \neq \infty$ и для всех $j \neq k : c_{kj}^k \neq \infty$ определить по величинам элементов матрицы C^{k-1} величины элементов c^k используя рекурсивное соотношение:

$$c_{ij}^k = \min \{ c_{ij}^{k-1}, c_{ik}^{k-1} + c_{kj}^{k-1} \}$$

При определении величины λ элемента матрицы C^k фиксировать соответствующие кратчайший путь.

Шаг 3 (проверка на окончание):

- Если существует номер $i : c_{ii}^k < 0$, то в графе G существует цикл отрицательного веса, содержащий вершину x_i и решения нет => stop.
- Если все $c_{ii}^k > 0$ и $k=n$, то получено решение. Матрица $C^n = [c_{ij}]$ дает длины всех кратчайших путей => stop.
- Если все $c_{ii}^k \geq 0$ на $k < n$, то перейти к шагу 1.

Кратчайшие пути можно найти аналогично алгоритму Дейкстры или процедурой предложенной Ху: в дополнение к матрице весов хранится и обновляется вторая ($n \times n$) матрица $O = [O_{ij}]$.

Элемент O_{ij} указывает вершину, непосредственно предшествующую вершине x_j в кратчайшем пути от x_i к x_j , т.е. $O_{ij} = \{x_i | x_i \rightarrow x_j\}$. Начальные значения $O_{ij} = x_i$ для всех x_i и x_j .

На шаге 3 алгоритма происходит обновление матрицы:

$$O_{ij} = \begin{cases} O_{kj}, & \text{если } (c_{ik} + c_{kj}) < c_{ij} \\ O_{ij} & \text{иначе} \end{cases}$$

В конце алгоритма кратчайшие пути получатся непосредственно из заключительной матрицы O . Кратчайший путь между x_i и x_j образует такую последовательность вершин $x_i, x_a, \dots, x_b, x_n, x_j$:

$$x_a = O_{ij} = \{x_a | x_a \rightarrow x_j\}, x_b = O_{ia} = \{x_b | x_b \rightarrow x_a\}$$

и т. д. до $x_i = O_{is} = \{x_i | x_i \rightarrow x_s\}, \dots, x_a = O_{ij}, x_b = O_{ia}$ и до $x_i = O_{is}$.

Если всем c_{ii} придать начальные значения γ , а не 0, то конечное значение c_{ii} будут равны весу цепи, проходящей через вершину x_i . Из матрицы O легко найти цикл отрицательного веса, если достигается $c_{ii} < 0$.

Алгоритм Флойда требует $O(|x|^3)$.

Другие задачи решаемые на графах:

- Построение максимального потока и минимального разряда (алгоритм Форда-Фалкерсона)
- Построение заданного потока минимальной стоимости

Задачи на методы поиска

1. Решить методом наискорейшего спуска задачу безусловной минимизации

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 - 5 \rightarrow \min$$

$$\varepsilon = 0.4, x^{(0)} = (0, 2)$$

2. Решить методом Ньютона задачу безусловной оптимизации

$$f(x) = x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - 3x_2 - 4 \rightarrow \min$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (2, 2)$$

3. Решить методом Флетчера-Ривса

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2, \quad x^0 = (1, 0)$$

4. Решить методом Гаусса-Зайделя

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1, \quad x^0 = (5, 3)$$

5. Решить методом Ньютона-Рафсона

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2, \quad x^0 = (5, 10)$$

6. Решить методом покоординатного спуска

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2, \quad x^0 = (4, 5)$$

7. Решить методом наискорейшего спуска

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 32x_2, \quad x^0 = (0, 0)$$

8. Решить методом Ньютона-Рафсона

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2, \quad x^0 = (1, 2)$$

9. Решить методом Флетчера-Ривса

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2, \quad x^0 = (2, 0)$$

10. Решить методом Гаусса-Зайделя задачу безусловной оптимизации

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - 3x_2 - 2 \rightarrow \min$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (2, 0)$$

11. Решить методом штрафных функций с использованием овражного метода

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 2 \rightarrow \min$$

$$x_1x_2 = 2$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (2, 0)$$

12. Решить методом штрафных функций с использованием овражного метода

$$f(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 x_2 = 1$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (1, 0)$$

Задачи на симплекс-метод

Задачи

Решить задачу симплекс-методом, найдя начальное базисное допустимое решение методом искусственного базиса:

1) $-x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0;$$

2) $-x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3, \quad 2x_1 + 3x_3 - x_4 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0;$$

3) $-x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \quad x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0;$$

4) $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min,$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \quad 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0;$$

5) $-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \min,$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10, \quad 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20, \quad 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0;$$

6) $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 \rightarrow \min,$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2, \quad x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2, \quad x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Задачи на двойственный симплекс-метод

Задачи

Решить с помощью двойственного симплекс-метода задачу, выбрав базис B^0 в качестве исходного базиса:

1) $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$,

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

$$B^0 = (A_1, A_2);$$

2) $-x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 35x_4 \rightarrow \min$,

$$2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 30x_4 = 6, \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -5,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

$$B^0 = (A_1, A_2);$$

3) $-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \rightarrow \min$,

$$x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \quad x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -2, \quad x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0,$$

$$B^0 = (A_1, A_2, A_3).$$

Задачи на выпуклое программирование

Задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве X :

1) $f(x) = x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + x_1$,

$$X = \{x \mid x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1]\};$$

2) $f(x) = x_1^3 - 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$,

$$X = \{x \mid |x_1| \leq 5, |x_2| \leq 1\};$$

3) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$,

$$X = \{x \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [-1, 2]\};$$

4) $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2$,

$$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 + x_2 \leq 9, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\};$$

5) $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$,

$$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 10, 2x_1 + 2x_2 = 5\};$$

6) $f(x) = x_1(\pi - x_1) \sin x_2 + x_2 \cos x_1$,

$$X = \{x \mid x_1 \in [0, \pi], x_2 \geq 0\};$$

7) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$,

$$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3, x_3 \leq 1\};$$

8) $f(x) = 2x_1x_2 + x_3$,

$$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 2x_1 + 1\};$$

9) $f(x) = x_1^2 - x_2^2$,

$$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 16\};$$

10) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2$,

$$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 25\};$$

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x_1 - \ln x_2$,

$$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 1\};$$

12) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$,

$$X = \{x \mid x_1x_2x_3 \leq 1, -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0\};$$

13) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 2|$,

$$X = E_2;$$

Задачи на штрафные функции

Пример со штрафами

05.10.2011

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \rightarrow \max, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 - y^2 \rightarrow \min, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0; \end{array} \right.$$



$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + \alpha (x^2 + y^2 - 1)^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4\alpha x (x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 4\alpha y (x^2 + y^2 - 1) = 0; \end{array} \right.$$

$$a) \downarrow x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = 4\alpha (x^2 + y^2 - 1) \\ 3y = 4\alpha (x^2 + y^2 - 1) \end{array} \right. \Rightarrow x = y$$

$$x = y;$$

$$3x = 4\alpha (2x^2 - 1);$$

$$2x^2 - \frac{3}{4\alpha} x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^2 + 8} \right] \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y = x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



$$b) \downarrow x = 0, y \neq 0 \Rightarrow 3y = 4\alpha (y^2 - 1); \Rightarrow y^2 - \frac{3}{4\alpha} y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^2 + 4} \right] = \pm 1.$$



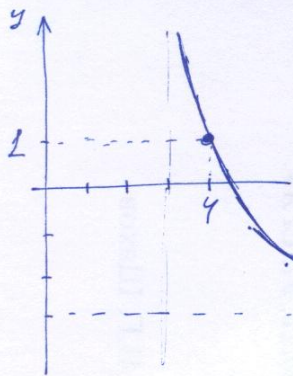
$$b) \leftarrow y = 0, x = \pm 1.$$

$$2) x = y = 0, \text{ но } x^2 + y^2 \neq 1!$$

$$\text{Ответ: } x = 0, y = 1 \quad \text{и} \quad x = 1, y = 0.$$

Задача со штрафом

12.10.2011



$$(x-3)(y+3)=4$$

Найти т. ближайшую к $(0,0)$.

Решение:

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha [(x-3)(y+3) - 4]^2 \rightarrow \min_{x,y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\alpha(y+3)[...] = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\alpha(x-3)[...] = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow x-3=u, y+3=v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+3 + \alpha v(uv-4) = 0 \\ v-3 + \alpha u(uv-4) = 0 \end{cases}$$

$$+ \Rightarrow u+v + \alpha(u+v)(uv-4) = 0$$

$$\downarrow u+v \neq 0 \Rightarrow 1 + \alpha(uv-4) = 0 \Rightarrow uv-4 = -1/\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u+3 + \alpha v(-1/\alpha) = 0 \Rightarrow v = u+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(u+3) - 4 = -1/\alpha \Rightarrow u^2 + 3u - (4 - 1/\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4(4 - 1/\alpha)}}{2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$u_1 = 1, u_2 = -4, v_1 = 4, v_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (4, 1), (x_2, y_2) = (-1, -4)$$

Задачи по нелинейному программированию

Ниже будет рассмотрено несколько задач выпуклого программирования, которые допускают возможность аналитического решения с помощью теоремы Милютина-Дубовицкого. В первых двух задачах ограничения заданы линейными функциями, т.е. область допустимых значений – выпуклый многоугольник, но, в отличие от задач линейного программирования, целевая функция нелинейная. В первой задаче решение находится на одной из сторон многоугольника, во второй – на одной из его вершин. Третья задача является примером, когда как ограничения, так и целевая функция, являются нелинейными. В четвертой задаче целевая функция линейна, ограничения нелинейные. В третьей задаче решение находится внутри области допустимых значений, а в четвертой – на ее границе, причем в точке пересечения двух кривых. В пятой задаче рассмотрен случай, когда также нелинейные и целевая функция и ограничения, но, в отличие от предыдущих задач, решение не одно, а будет найдено целых пять точек локального минимума, среди которых выбрана наилучшая. Кроме того, в этой задаче будет продемонстрировано, что с помощью теоремы Милютина-Дубовицкого можно получить точку, удовлетворяющую необходимым условиям экстремума, но на самом деле не являющуюся ей.

Задача 1

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \rightarrow \min, \\ x + y \geq 4, \\ 2x - y \leq 5, \\ 2y - x \leq 5. \end{cases} \quad (1)$$

Область допустимых значений G находится между двумя кривыми на рис. 1.

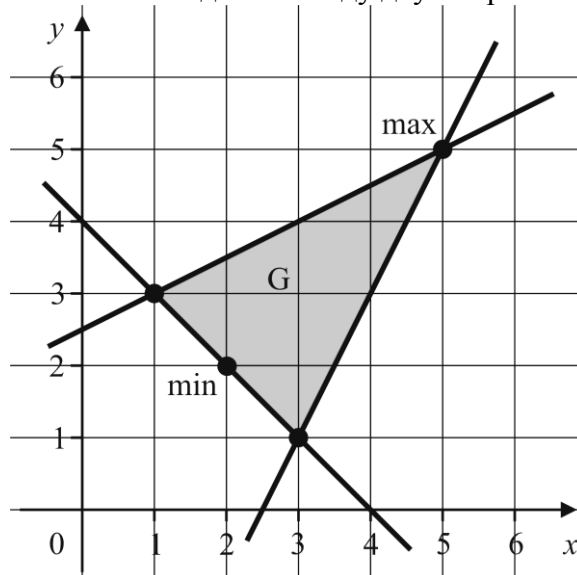


Рис. 1

Решение

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 \rightarrow \min, \\ h_1(x, y) = 4 - x - y \leq 0, \\ h_2(x, y) = 2x - y - 5 \leq 0, \\ h_3(x, y) = 2y - x - 5 \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума (x, y) должны существовать неотрицательные числа λ_1, λ_2 , такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \\ \lambda_3 h_3 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

или

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ \lambda_1(4 - x - y) = 0, \\ \lambda_2(2x - y - 5) = 0, \\ \lambda_3(2y - x - 5) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Возможны несколько вариантов:

● Случай 1. Все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (5) следует, что $x = y = 0$. Но точка $(0, 0)$ не принадлежит области допустимых значений G , так как в (2) нарушается первое неравенство.

● Случай 2. $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (5) получим:

$$\begin{cases} \lambda_3 = 3x^2, \\ 2\lambda_3 = -3y^2. \end{cases} \quad (6)$$

Так как все переменные вещественные, единственным решением системы (6) снова является точка $(0, 0)$, не принадлежащая области допустимых значений G .

● Случай 3. $\lambda_{1,3} = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Аналогично, из первых двух уравнений системы (5) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 = -3x^2, \\ \lambda_2 = 3y^2. \end{cases} \quad (7)$$

И снова, так как все переменные вещественные, единственным решением системы (7) является точка $(0, 0)$, не принадлежащая области допустимых значений G .

● Случай 4. $\lambda_{2,3} = 0, \lambda_1 \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3x^2, \\ \lambda_1 = 3y^2, \\ 4 - x - y = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из первых двух уравнений следует, что либо $x = y$, либо $x = -y$. В последнем случае из третьего уравнения получается, что $4 = 0$. Значит, возможен только случай, когда $x = y = 2$. Эта точка удовлетворяет необходимому условию минимума.

● Случай 5. $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = y = 5$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_2 = \lambda_3 = -75 < 0$. Т.е. точка $(5, 5)$ не является решением задачи (1).

● Случай 6. $\lambda_2 = 0, \lambda_{1,3} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 1, y = 3$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = 11, \lambda_3 = -8 < 0$. Т.е. точка $(1, 3)$ не является решением задачи (1).

● Случай 7. $\lambda_3 = 0, \lambda_{1,2} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -3x^2, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 3, y = 1$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = 11, \lambda_2 = -8 < 0$. Т.е. точка $(3, 1)$ не является решением задачи (1).

● Случай 8. $\lambda_{1,2,3} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Последние три уравнения данной системы несовместны.

Итак, из всех рассмотренных вариантов только точка (2, 2) может являться решением задачи (1).

Эта задача является примером, когда ее решение – точка на границе области допустимых значений, а не внутри нее. Эта точка находится на одной из кривых, задающих границу, а не на пересечении таких кривых. Этим и объясняется, что для точки (2, 2) только одно из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ оказалось не равным нулю (случай 4).

Задача 2

Область допустимых значений та же самая, что и в предыдущей задаче, но теперь у целевой функции требуется найти максимум:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \rightarrow \max, \\ x + y \geq 4, \\ 2x - y \leq 5, \\ 2y - x \leq 5. \end{cases} \quad (13)$$

Решение

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x, y) = -x^3 - y^3 \rightarrow \min, \\ h_1(x, y) = 4 - x - y \leq 0, \\ h_2(x, y) = 2x - y - 5 \leq 0, \\ h_3(x, y) = 2y - x - 5 \leq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -3x^2 \\ -3y^2 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума (x, y) должны существовать неотрицательные числа λ_1, λ_2 , такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \\ \lambda_3 h_3 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -3x^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -3y^2, \\ \lambda_1(4 - x - y) = 0, \\ \lambda_2(2x - y - 5) = 0, \\ \lambda_3(2y - x - 5) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Возможны несколько вариантов:

● Случай 1. Все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (17) следует, что $x = y = 0$. Но точка $(0, 0)$ не принадлежит области допустимых значений G .

● Случай 2. $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_3 = -3x^2, \\ 2\lambda_3 = 3y^2. \end{cases} \quad (18)$$

Так как все переменные вещественные, единственным решением системы (18) снова является точка $(0, 0)$, не принадлежащая области допустимых значений G .

● Случай 3. $\lambda_{1,3} = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Аналогично, из первых двух уравнений системы (17) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 = 3x^2, \\ \lambda_2 = -3y^2. \end{cases} \quad (19)$$

И снова, так как все переменные вещественные, единственным решением системы (19) является точка $(0, 0)$, не принадлежащая области допустимых значений G .

● Случай 4. $\lambda_{2,3} = 0, \lambda_1 \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3x^2, \\ \lambda_1 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Эта система уравнений не имеет вещественных решений при $\lambda_1 > 0$. Если же $\lambda_1 = 0$, то третье уравнение противоречиво.

● Случай 5. $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 - \lambda_3 = 3x^2, \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 3y^2, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = y = 5$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_2 = \lambda_3 = 75 \geq 0$. Т.е. точка $(5, 5)$ удовлетворяет необходимому условию решения задачи (13).

● Случай 6. $\lambda_2 = 0, \lambda_{1,3} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -3x^2, \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 1, y = 3$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = -11 < 0, \lambda_3 = 8$. Т.е. точка $(1, 3)$ не является решением задачи (13), так как $\lambda_1 < 0$.

● Случай 7. $\lambda_3 = 0, \lambda_{1,2} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = -3x^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 3, y = 1$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = -11 < 0, \lambda_2 = 8$. Т.е. точка $(3, 1)$ не является решением задачи (13), так как $\lambda_1 < 0$.

● **Случай 8.** $\lambda_{1,2,3} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -3x^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Последние три уравнения данной системы несовместны.

Итак, из всех рассмотренных вариантов только точка $(5, 5)$ может являться решением задачи (13). Эта задача, также как и предыдущая, является примером, когда ее решение – точка на границе области допустимых значений, а не внутри нее. Но точка $(5, 5)$ находится не на одной из кривых, задающих границу, а на пересечении таких кривых. Этим и объясняется, что для точки $(5, 5)$ сразу два из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ оказались не равными нулю (случай 5).

Далее рассмотрим случай, когда, в отличие от предыдущих двух задач, минимум целевой функции достигается не на границе, а внутри области допустимых значений. Кроме того, ограничения в следующем примере нелинейные.

Задача 3

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \rightarrow \min, \\ x + y \leq 4, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases} \quad (25)$$

Область допустимых значений G находится между окружностью и прямой на рис. 2. Из вида целевой функции ясно, что надо в области G найти точку, ближайшую к точке с координатами $(1, 1)$. Очевидно, что это и есть точка с координатами $(1, 1)$.

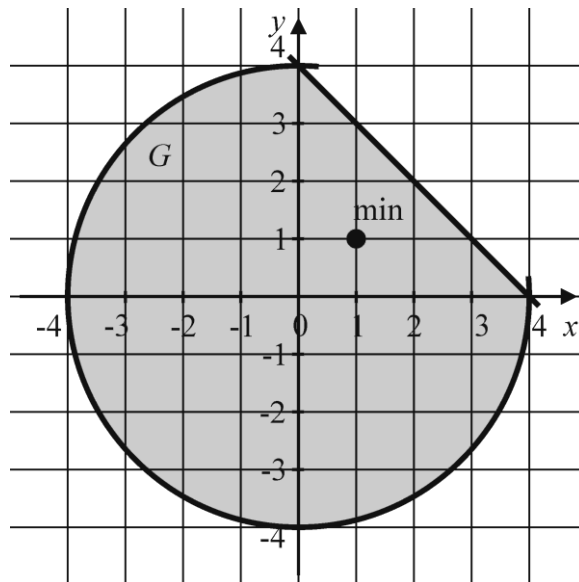


Рис. 2

Решение

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \rightarrow \min, \\ x + y - 4 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 16 \leq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}. \quad (27)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума (x, y) должны существовать неотрицательные числа λ_1, λ_2 , такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \end{cases} \quad (28)$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 2(1-x), \\ \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 2(1-y), \\ \lambda_1(x+y-4) = 0, \\ \lambda_2(x^2 + y^2 - 16) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Возможны четыре варианта:

● Случай 1. Оба числа λ_1, λ_2 равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (29) следует, что $x = y = 1$. Эта точка $(1, 1)$ принадлежит области допустимых значений G и удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (25).

● Случай 2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (29) получим:

$$\begin{cases} x\lambda_2 = 1 - x, \\ y\lambda_2 = 1 - y, \\ x^2 + y^2 - 16 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Из первых двух уравнений системы выразим x и y : $x = y = 1 / (1 + \lambda_2)$. Подставив эти значения в третье уравнение, получим $\lambda_2 = -1 \pm 1 / (2\sqrt{2}) < 0$. Т.е. в этом случае нет точки, удовлетворяющей необходимым условиям решения задачи (25).

● Случай 3. $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$.

Аналогично, из первых двух уравнений системы (29) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2(1 - x), \\ \lambda_1 = 2(1 - y), \\ x + y - 4 = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Из этих уравнений следует, что $x = y = 2$, а значит $\lambda_1 = -2 < 0$. Т.е. точка $(2, 2)$ не является решением задачи.

● Случай 4. $\lambda_{1,2} \neq 0$.

Тогда из (29) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 2(1 - x), \\ \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 2(1 - y), \\ x + y - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 16 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Из третьего уравнения следует, что $y = 4 - x$. Подставим это в четвертое уравнение, и, решив полученное квадратное уравнение, получим две точки: $(0, 4)$ и $(4, 0)$. Рассмотрим случай, когда $x = 0, y = 4$. Второй случай рассматривается аналогично. Подставив найденные значения x и y в первые два уравнения системы (32), получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_1 + 8\lambda_2 = -6. \end{cases} \quad (33)$$

Решив эту систему, получим значения $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 < 0$. Т.е. точка $(0, 4)$ тоже не является решением задачи (25).

Итак, из четырех рассмотренных вариантов только точка $(1, 1)$ может являться решением задачи (25).

Эта задача является примером, когда ее решение – точка внутри области допустимых значений, а не на ее границе. Этим и объясняется, что для точки $(1, 1)$ оба значения λ_1, λ_2 оказались равны нулю (случай 1).

Задача 4

$$\begin{cases} x - y \rightarrow \min, \\ xy \geq 6, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 25. \end{cases} \quad (34)$$

Область допустимых значений находится между двумя кривыми на рис. 3. Стрелкой показан антиградиент целевой функции.

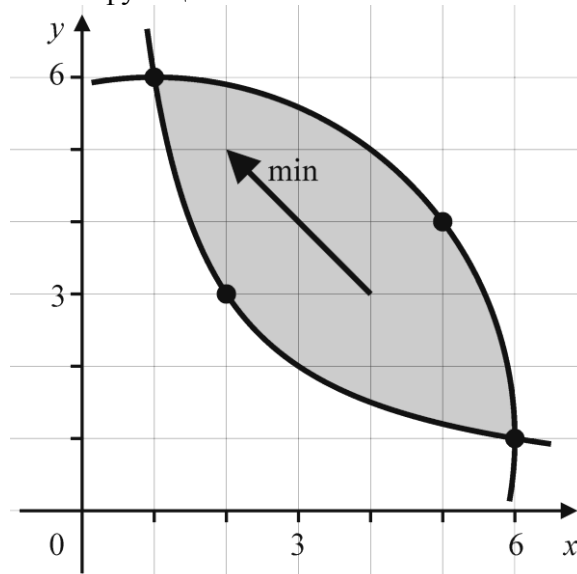


Рис. 3

Решение

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x, y) = x - y \rightarrow \min, \\ h_1(x, y) = 6 - xy \leq 0, \\ h_2(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 25 \leq 0. \end{cases} \quad (35)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ 2y-2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума (x, y) должны существовать неотрицательные числа λ_1, λ_2 , такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

или

$$\begin{cases} 1 - y\lambda_1 + 2(x-1)\lambda_2 = 0, \\ -1 - x\lambda_1 + 2(y-1)\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(6 - xy) = 0, \\ \lambda_2[(x-1)^2 + (y-1)^2 - 25] = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Возможны несколько вариантов:

● Случай 1. Оба числа λ_1, λ_2 равны нулю.

В этом случае первые два уравнения системы (38) становятся противоречивыми:

$$\begin{cases} 1 = 0, \\ -1 = 0. \end{cases} \quad (39)$$

● Случай 2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (38) получим:

$$\begin{cases} 1 + 2(x-1)\lambda_2 = 0, \\ -1 + 2(y-1)\lambda_2 = 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Выразив из первого уравнения $(x-1)$ через λ_2 , а из второго $(y-1)$ через λ_2 , получим из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x-1 = -\frac{1}{2\lambda_2}, \\ y-1 = \frac{1}{2\lambda_2}, \\ \left(-\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2 - 25 = 0, \end{cases} \quad (41)$$

что означает, что $\lambda_2 = \pm 1/(5\sqrt{2})$. Так как $\lambda_2 > 0$, выберем $\lambda_2 = 1/(5\sqrt{2})$. Получим значения x и y :

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{5}{\sqrt{2}}, \\ y = 1 + \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (42)$$

Полученная точка находится на рис. 3 левее области допустимых значений, нарушается первое ограничение, и потому эта точка не является решением задачи (34).

● Случай 3. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.

Тогда из (38) получим:

$$\begin{cases} 1 - y\lambda_1 = 0, \\ -1 - x\lambda_1 = 0, \\ 6 - xy = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Снова из первых двух уравнений выразим x и y через λ_1 и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} y = 1/\lambda_1, \\ x = -1/\lambda_1, \\ 6 + \frac{1}{\lambda_1^2} = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Третье уравнение не имеет вещественных решений.

● Случай 4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (38) получим:

$$\begin{cases} 1 - y\lambda_1 + 2(x-1)\lambda_2 = 0, \\ -1 - x\lambda_1 + 2(y-1)\lambda_2 = 0, \\ 6 - xy = 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Параметры λ_1 и λ_2 не входят в последние два уравнения (45), поэтому можно, решив сначала эти уравнения, найти x и y , после чего первые два уравнения станут линейными и позволят легко определить λ_1 и λ_2 . В общем случае решить систему двух нелинейных уравнений невозможно, но в данной задаче решение третьего и четвертого уравнений находится аналитически. Действительно, обозначив $x - 1 = a$, $y - 1 = b$, получим:

$$\begin{cases} (a+1)(b+1) = 6, \\ a^2 + b^2 = 25. \end{cases} \quad (46)$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} a + b + ab = 5, \\ (a+b)^2 - 2ab = 25. \end{cases} \quad (47)$$

Выразив из первого уравнения произведение ab через сумму $(a+b)$, подставив эту сумму во второе уравнение, и решив его как квадратное уравнение относительно суммы $(a+b)$, получим, что $a+b = -1 \pm 6$. Если $a+b = -7$, то $ab = 12$. Уравнение $a + 12/a = -7$ эквивалентно квадратному уравнению. Решив его, получим: $a = (-7 \pm 1)/2$, или $x = (-5 \pm 1)/2$. Т.е. получены две точки: $(-3, -2)$ и $(-2, -3)$. Обе эти точки находятся в третьей координатной четверти и не попадают в область допустимых значений G на рис. 3. Рассмотрим теперь случай, когда $a+b = 5$. Тогда $ab = 0$, т.е. либо $a = 0$ (тогда $b = 5$), либо $b = 0$ (тогда $a = 0$). Т.е. получены две точки: $(1, 6)$ и $(6, 1)$. Обе эти точки попадают в область допустимых значений G на рис. 3. Рассмотрим каждую из этих точек по отдельности.

● Случай 4а. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $x = 1$, $y = 6$.

Тогда первые два уравнения из (45) примут вид:

$$\begin{cases} 6\lambda_1 = 1, \\ \lambda_1 - 10\lambda_2 = -1. \end{cases} \quad (48)$$

Решив ее, получим: $\lambda_1 = 1/6$, $\lambda_2 = 7/60$. Оба эти значения неотрицательны, а потому точка $(1, 6)$ обладает необходимыми признаками решения задачи (34).

● Случай 4б. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $x = 6$, $y = 1$.

Тогда первые два уравнения из (45) примут вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 10\lambda_2 = 1, \\ 6\lambda_1 = -1. \end{cases} \quad (49)$$

Решив ее, получим: $\lambda_1 = -1/6$, $\lambda_2 = -7/60$. Здесь есть отрицательные значения, а потому точка $(6, 1)$ не может являться решением задачи (34).

Итак, из всех рассмотренных вариантов только точка $(1, 6)$ может являться решением задачи (34).

Задача 5

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \rightarrow \max, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1, \\ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} \leq 1. \end{cases} \quad (50)$$

Область допустимых значений находится внутри двух эллипсов на рис. 4. Тонкие кривые линии – линии уровня целевой функции, а стрелкой показан ее градиент.

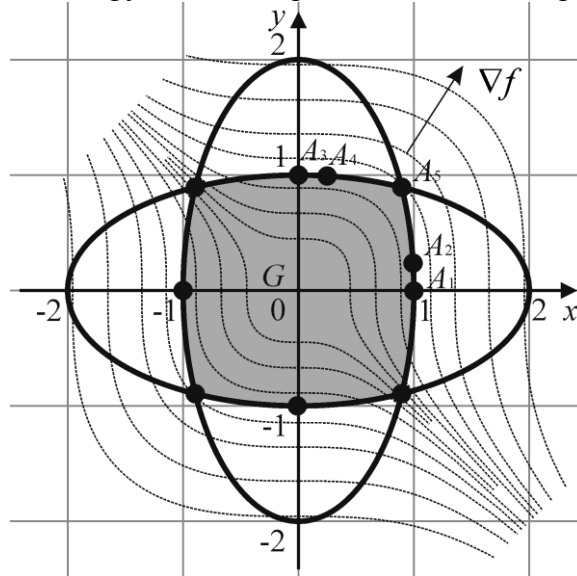


Рис. 4

Решение

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x, y) = -x^3 - y^3 \rightarrow \min, \\ h_1(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0, \\ h_2(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 \leq 0. \end{cases} \quad (51)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = -3 \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad \nabla h_1 = 2 \begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}, \quad \nabla h_2 = 2 \begin{bmatrix} 4x \\ y \end{bmatrix}. \quad (52)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума (x, y) должны существовать неотрицательные числа λ_1, λ_2 , такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \end{cases} \quad (53)$$

или

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 8\lambda_2 x = 3x^2, \\ 8\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 3y^2, \\ \lambda_1 (x^2 + 4y^2 - 4) = 0, \\ \lambda_2 (4x^2 + y^2 - 4) = 0. \end{cases} \quad (54)$$

Возможны несколько вариантов:

- Случай 1. Оба числа λ_1, λ_2 равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (54) следует, что $x = y = 0$. Эта точка удовлетворяет необходимым условиям минимума задачи (51), но, очевидно, что она не является точкой минимума, а является лишь точкой перегиба.

- Случай 2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (54) получим:

$$\begin{cases} 8\lambda_2 x = 3x^2, \\ 2\lambda_2 y = 3y^2, \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad (55)$$

Полученная система уравнений нелинейная, но она легко решается, если рассмотреть три возможных случая, когда $x = 0$, когда $y = 0$, и когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

- Случай 2а. $x = 0$.

Тогда из третьего уравнения следует, что $y = \pm 2$, а из второго – что $\lambda_2 = 3y/2 = \pm 3$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами $(0, 2)$. Легко видеть, что эта точка не принадлежит области допустимых значений, так как нарушается первое ограничение.

- Случай 2б. $y = 0$.

Тогда из третьего уравнения (55) следует, что $x = \pm 1$, а из первого – что $\lambda_2 = 3x/8 = \pm 3/8$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами $(1, 0)$ (точка A_1 на рис. 4). Она принадлежит допустимой области и, таким образом, удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Из рис. 4 видно, что линия уровня функции $f(x, y)$ в точке A_1 вертикальна и касательна к границе области. Чтобы из этой точки перейти к лучшему значению функции $f(x, y)$, надо сделать шаг вправо, но чтобы оставаться в допустимой области, можно делать шаги только влево. Т.е. точка $(1, 0)$ действительно является точкой минимума функции $f(x, y)$, но, как будет показано ниже, только точкой локального минимума. Вычислим значение функции в ней: $f(1, 0) = -1$.

- Случай 2в. $x \neq 0, y \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений (55) следует, что $\lambda_2 = 3x/8 = 3y/2$, т.е. $x = 4y$. Используя это, получим из третьего уравнения, что $x = \pm 8/\sqrt{65}$, $y = \pm 2/\sqrt{65}$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами $(8/\sqrt{65}, 2/\sqrt{65})$ (точка A_2 на рис. 4). Эта точка также удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Вычислим значение функции в ней: $f(8/\sqrt{65}, 2/\sqrt{65}) = -104/(13\sqrt{65}) \approx -0,992$. Это значение хуже, чем в случае 2б, т.е. точка A_2 – тоже точка только локального минимума.

- Случай 3. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.

Этот случай полностью аналогичен случаю 2. Из (54) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x = 3x^2, \\ 8\lambda_1 y = 3y^2, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad (56)$$

Решим эту систему тем же способом, что и систему (55), т.е. рассмотрев три возможных случая.

● Случай 3а. $x = 0$.

Тогда из третьего уравнения следует, что $y = \pm 1$, а из второго – что $\lambda_1 = 3y/8 = \pm 3/8$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами $(0, 1)$. Легко видеть, что эта точка (точка A_3 на рис. 4) принадлежит области допустимых значений и удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Действительно, из рис. 4 видно, что линия уровня функции $f(x, y)$ в этой точке горизонтальна и касательна к границе области. Чтобы из этой точки перейти к лучшему значению функции $f(x, y)$, надо сделать шаг вверх, но чтобы оставаться в допустимой области, можно делать шаги только вниз. Т.е. точка $(0, 1)$ действительно является точкой локального минимума функции $f(x, y)$. Вычислим значение функции в ней: $f(0, 1) = -1$.

● Случай 3б. $y = 0$.

Тогда из третьего уравнения следует, что $x = \pm 2$, а из первого – $\lambda_1 = 3x/2 = \pm 3$. Так как должно быть $\lambda_1 > 0$, получим точку с координатами $(2, 0)$. Легко видеть, что эта точка не принадлежит области допустимых значений, так как нарушается второе ограничение.

● Случай 3в. $x \neq 0, y \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений (56) следует, что $\lambda_1 = 3x/2 = 3y/8$, т.е. $y = 4x$. Используя это, получим из третьего уравнения, что $x = \pm 2/\sqrt{65}$, $y = \pm 8/\sqrt{65}$. Так как должно быть $\lambda_1 > 0$, получим точку с координатами $(2/\sqrt{65}, 8/\sqrt{65})$ (точка A_4 на рис. 4). Эта точка также удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Вычислим значение функции в ней: $f(2/\sqrt{65}, 8/\sqrt{65}) = -104/(13\sqrt{65}) \approx -0,992$. Это значение хуже, чем в случае 3а, т.е. точка A_4 – тоже точка только локального минимума.

● Случай 4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (54) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 8\lambda_2 x = 3x^2, \\ 8\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 3y^2, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad (57)$$

Последние два уравнения – линейная система относительно переменных x^2 и y^2 . Решив ее, получим: $x^2 = 4/5, y^2 = 4/5$. Это решение описывает четыре точки в углах области допустимых значений. Так как в этом решении $x \neq 0$ и $y \neq 0$, из первых двух уравнений также получается линейная система:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 8\lambda_2 = 3x, \\ 8\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3y, \end{cases} \quad (58)$$

которая имеет решение

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{10}(4y - x), \\ \lambda_2 = \frac{1}{10}(4x - y). \end{cases} \quad (59)$$

Так как $x = \pm 2/\sqrt{5}, y = \pm 2/\sqrt{5}$, а числа λ_1 и λ_2 должны быть положительными, то единственным решением (59) будет являться точка с координатами $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ (точка A_5 на рис. 4). Вычислим значение функции в этой точке:

$f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -16/(5\sqrt{5}) \approx -1,431$. Это значение лучше всех предыдущих найденных значений (в точках A_1, A_2, A_3, A_4) и является точкой глобального минимума в области допустимых значений.

Итак, данная задача является примером, когда оказалось целых шесть точек, удовлетворяющих необходимым условиям минимума. Точка $(0, 0)$ вовсе не является точкой минимума, хотя удовлетворяет необходимым условиям. Другие четыре точки – лишь точки локального минимума, и только одна точка с координатами $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ является наилучшей.

Транспортные задачи ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.

Фирма должна отправить некоторое количество кроватей с трёх складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25 и 20 кроватей, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 15 кроватей. Стоимость перевозки одной кровати со склада в магазин приведены в таблице.

Склады	С	Магазины				
		1	2	3	4	5
1	А					
2	А					
3	А					

Как следует спланировать перевозку, чтобы её стоимость была минимальной?

Построение математической модели

Пусть X_{ij} – количество кроватей, отправляемых со склада i в магазин j . Все $X_{ij} \geq 0$, и в силу ограничений на возможности поставки со складов (предложение) и спрос в магазинах они удовлетворяют следующим условиям:

(для предложения)

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 15 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 25 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 20 \end{cases}$$

(для спроса)

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 20 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 12 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 5 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 8 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} = 15 \end{cases}$$

Стоимость перевозок равна:

$$F = 1 \cdot X_{11} + 0 \cdot X_{12} + 3 \cdot X_{13} + 4 \cdot X_{14} + 2 \cdot X_{15} + 5 \cdot X_{21} + \dots + 4 \cdot X_{34} + 3 \cdot X_{35}.$$

Таким образом, имеем следующую математическую модель:

$$F = 1 \cdot X_{11} + 0 \cdot X_{12} + 3 \cdot X_{13} + 4 \cdot X_{14} + 2 \cdot X_{15} + 5 \cdot X_{21} + \dots + 4 \cdot X_{34} + 3 \cdot X_{35}$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 15 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 25 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 20 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} = 20 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 12 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 5 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 8 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} = 15 \\ X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Рассмотренная задача является задачей линейного программирования, но специального вида. Её результат можно обобщить на транспортную задачу общего вида.

Метод наименьшего элемента

Сущность метода в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф; в случае наличия

нескольких таких равных тарифов заполняется любая из них. В остальном действуют аналогично предыдущему способу.

Построим опорный план.

Исходная транспортная таблица:

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20	12	5	8	15	

Построение второй транспортной таблицы

Находим в таблице наименьшую стоимость перевозки – это 0 в клетке A1B2. Записываем в этой клетке значение 12 (наименьшее из сумм по строке и столбцу).

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0 12	3	4	2	15
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20	12	5	8	15	

Теперь вычеркиваем второй столбец, уменьшив сумму в первой строке на 12.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0 12	3	4	2	15 3
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20	12	5	8	15	

Находим следующую наименьшую по стоимости ячейку – их несколько, например, A1B1. Присваиваем ей значение 3, а сумму по столбцу заменяем на 17.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	3 1	0 12	3	4	2	15 3
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20 17	12	5	8	15	

Вычеркиваем первую строку.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
	3	12				3
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20 17	12	5	8	15	

Выбираем ячейку A3B3, присваиваем ей значение 5. Вычеркиваем третий столбец. Сумму по третьей строке заменяем на 15.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
	3	12				3
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	5	1	4	20 15
	20 17	12	5	8	15	

Выбираем ячейку A2B5, записываем в ней 15, уменьшаем вторую строку на 15 и вычеркиваем пятый столбец.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
	3	12				3
A2	5	1	2	3	15	25 10
A3	4	8	5	1	4	20 15
	20 17	12	5	8	15	

Выбираем ячейку A3B1, присваиваем ей 15. Уменьшаем первый столбец на 15 и вычеркиваем третью строку.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
	3	12				3
A2	5	1	2	3	15	25 10
A3	15	4	8	5	1	20 15
	20 17 2	12	5	8	15	

Ячейке A2B1 присваиваем 2 и вычеркиваем первый столбец. Сумму по второй строке заменяем на 8.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
	3	12				3
A2	5	1	2	3	3	25
	2			15		10
A3	4	8	1	4	3	20
	15		5			15
	20	12	5	8	15	
	17					
	2					

Ячейке A2B4 присваиваем 8 и вычеркиваем четвертый столбец.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
	3	12				3
A2	5	1	2	3	3	25
	2		8	15		10
A3	4	8	1	4	3	20
	15		5			15
	20	12	5	8	15	
	17					
	2					

Опорный план построен.

$X_{11} = 3, X_{12} = 12, X_{21} = 2, X_{24} = 8, X_{25} = 15, X_{31} = 15, X_{33} = 5.$

Все остальные $X_{ij} = 0.$

$F = 3*1+0*12+5*2+3*8+3*15+5*1 = 147$

Найдём теперь оптимальный план для данной задачи.

Для этого воспользуемся методом потенциалов.

Задача. На четыре базы A_1, A_2, A_3, A_4 поступил однородный груз в следующем количестве: a_1 тонн - на базу A_1, a_2 тонн - на базу A_2, a_3 тонн - на базу A_3, a_4 тонн - на базу A_4 . Полученный груз требуется перевезти в пять пунктов: b_1 тонн - на базу B_1, b_2 тонн - на базу B_2, b_3 тонн - на базу B_3, b_4 тонн - на базу B_4, b_5 тонн - на базу B_5 . Расстояния между пунктами назначений указаны в матрице расстояний.

пункты отправления	пункты назначения					запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	30	24	11	12	25	21
A2	26	4	29	20	24	19
A3	27	14	14	10	18	15
A4	6	14	28	8	2	25

потребности	15	15	15	15	20
-------------	----	----	----	----	----

Стоимость перевозок пропорциональна количеству груза и расстоянию, на которое этот груз перевозится. Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

Решение. Проверим сбалансированность транспортной задачи, для этого необходимо чтобы

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 21+19+15+25 = 80, \quad \sum_{j=1}^5 b_j = 15+15+15+15+20 = 80$$

1. Решим задачу диагональным методом или методом северо-западного угла.

Процесс получения плана можно оформить в виде таблицы:

пункты отправления	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	запасы							
A ₁	15	6	—	—	—	21	6	0	0	0	0	0	0
A ₂	—	9	10	—	—	19	19	19	10	0	0	0	0
A ₃	—	—	5	10	—	15	15	15	15	15	10	10	10
A ₄	—	—	—	5	20	25	25	25	25	25	25	25	20
потребности	15	15	15	15	20								
	0	15	15	15	20								
	0	9	15	15	20								
	0	0	15	15	20								
	0	0	5	15	20								
	0	0	0	15	20								
	0	0	0	5	20								
	0	0	0	0	20								

Получен следующий план:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

Полученный план невырожденный.

$$F(X_0) = 15 \cdot 30 + 6 \cdot 24 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 29 + 5 \cdot 14 + 10 \cdot 10 + 5 \cdot 8 + 20 \cdot 2 = 1170.$$

2. Метод наименьшей стоимости.

6	0	0	0	0
---	---	---	---	---

Получили вырожденный опорный план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 4 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$F(X_0) = 6 \cdot 30 + 15 \cdot 11 + 4 \cdot 26 + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 729.$$

4. Метод аппроксимации Фогеля.

пункты отправления	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	запасы	столбец-разность					
A ₁	× 30	× 24	15 11	6 12	× 25	21	1	1	1	1	1	1
A ₂	× 26	15 4	× 29	4 20	× 24	19	16	16	4	4	9	к
A ₃	× 27	× 14	× 14	5 10	10 18	15	4	4	4	4	4	4
A ₄	15 6	× 14	× 28	× 8	10 2	25	4	6	6	к	к	к
потребности	15	15	15	15	20							
	20	10	3	2	16							
	к	10	3	2	16							
	к	к	3	2	16							
	к	к	3	2	6							
	к	к	3	2	к							
	к	к	3	2	к							
	к	к	к	к	к							
строка- разность												

Получили невырожденный опорный план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$F(X_0) = 15 \cdot 6 + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 11 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 12 + 10 \cdot 18 + 10 \cdot 2 = 717.$$

5. Для проверки оптимальности плана используем метод потенциалов. В качестве примера возьмем опорный план, полученный методом двойного предпочтения. Так как взятый нами план является вырожденным, то вводим ε - некоторое число близкое к 0.

	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	v ₅
u ₁	6		15	+	
u ₂	4	15		ε	
u ₃				15	
u ₄	5				20

Составим систему уравнений:

$u_1 + v_1 = 30$	Пусть $u_1 = 0$	$v_1 = 30$	$u_1 + v_2 = 8 < c_{12} = 24$
$u_1 + v_3 = 11$	$u_2 = -4$	$v_2 = 8$	$u_1 + v_4 = 24 > c_{14} = 12$
$u_2 + v_1 = 26$	$u_3 = -14$	$v_3 = 11$	$u_1 + v_5 = 26 > c_{15} = 25$
$u_2 + v_2 = 4$	$u_4 = -24$	$v_4 = 24$	$u_2 + v_3 = 7 < c_{23} = 29$
$u_2 + v_4 = 20$		$v_5 = 26$	$u_2 + v_5 = 22 < c_{25} = 24$
$u_3 + v_4 = 10$			$u_3 + v_1 = 16 < c_{31} = 27$
$u_4 + v_1 = 6$			$u_3 + v_2 = -6 < c_{32} = 14$
$u_4 + v_5 = 2$			$u_3 + v_3 = 3 < c_{33} = 14$
			$u_3 + v_5 = 12 < c_{35} = 18$
			$u_4 + v_2 = -16 < c_{42} = 14$
			$u_4 + v_3 = -13 < c_{43} = 28$
			$u_4 + v_4 = 0 < c_{44} = 8$

Так как существуют суммы больше c_{ij} , то план не оптimalен. Введем в базис переменную (1,4) (так как разность здесь максимальна).

$$X_1 =$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	$6-\varepsilon$		15	ε^+	
u_2	$4+\varepsilon$	15			
u_3				15	ε^+
u_4	ε				$20-\varepsilon$

$u_1 + v_1 = 30$	Пусть $u_1 = 0$	$v_1 = 30$	$u_1 + v_5 = 26 > c_{15} = 25$
$u_1 + v_3 = 11$	$u_2 = -4$	$v_2 = 8$	$u_2 + v_4 = 8 < c_{24} = 20$
$u_1 + v_4 = 12$	$u_3 = -2$	$v_3 = 11$	$u_3 + v_1 = 28 > c_{31} = 27$
$u_2 + v_1 = 26$	$u_4 = -24$	$v_4 = 12$	$u_3 + v_2 = 6 < c_{32} = 14$
$u_2 + v_2 = 4$		$v_5 = 26$	$u_3 + v_3 = 9 < c_{33} = 14$
$u_3 + v_4 = 10$			$u_3 + v_5 = 24 > c_{35} = 18$
$u_4 + v_1 = 6$			$u_4 + v_4 = -12 < c_{44} = 8$
$u_4 + v_5 = 2$			

Так как существуют суммы больше c_{ij} , то план не оптimalен. Введем в базис переменную (3,5) (так как разность здесь максимальна).

$$F(X_1) = 6 \cdot 30 - 30\varepsilon + 15 \cdot 11 + 12\varepsilon + 4 \cdot 26 - 26\varepsilon + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 729 - 46\varepsilon.$$

$$X_2 =$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1			15	6	
u_2	$4+\varepsilon$	15			
u_3				$9+\varepsilon$	$6-\varepsilon$
u_4	$11-\varepsilon$				$14+\varepsilon$

$u_1 + v_3 = 11$	Пусть $u_1 = 0$	$v_1 = 24$	$u_1 + v_1 = 24 < c_{11} = 30$
$u_1 + v_4 = 12$	$u_2 = 2$	$v_2 = 2$	$u_1 + v_2 = 12 < c_{12} = 24$
$u_2 + v_1 = 26$	$u_3 = -2$	$v_3 = 11$	$u_1 + v_5 = 20 < c_{15} = 25$

$$\begin{aligned}
u_2 + v_2 &= 4 \\
u_3 + v_4 &= 10 \\
u_3 + v_5 &= 18 \\
u_4 + v_1 &= 6 \\
u_4 + v_5 &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= -18 \\
v_4 &= 12 \\
v_5 &= 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 + v_3 &= 13 < c_{23} = 29 \\
u_2 + v_4 &= 14 < c_{24} = 20 \\
u_2 + v_5 &= 22 < c_{25} = 24 \\
u_3 + v_1 &= 22 < c_{31} = 27 \\
u_3 + v_2 &= 0 < c_{32} = 14 \\
u_4 + v_2 &= -16 < c_{42} = 14 \\
u_4 + v_3 &= -7 < c_{43} = 28 \\
u_4 + v_4 &= -6 < c_{44} = 8
\end{aligned}$$

Так как все суммы больше c_{ij} , то план оптимален. Число ε близко к 0, следовательно план примет вид

$$X_3 = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline u_1 & & & 15 & 6 & \\ u_2 & 4 & 15 & & & \\ u_3 & & & & 9 & 6 \\ u_4 & 11 & & & & 14 \end{array}$$

$= X^*$ - оптимальный план.

$$F(X^*) = 15 \cdot 11 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 26 + 4 \cdot 15 + 9 \cdot 10 + 6 \cdot 18 + 11 \cdot 6 + 2 \cdot 14 = 165 + 72 + 104 + 60 + 90 + 108 + 28 + 66 = 693.$$

Задание.

С помощью метода потенциалов решить транспортную задачу, исходное опорное решение определить по правилу “северо-западного” угла.

Вопросы к зачету

по курсу: «Методы оптимизма»

1. Схема классификации МО. Основные понятия и определения оптимизации. Примеры оптимизационных задач.
2. Линейное программирование (ЛП): постановка задачи ЛП, геометрическая интерпретация решения задачи ЛП, выпуклое множество и крайние точки.
3. Симплекс-метод: общая идея решения задачи ЛП, теорема о связи между допустимым базисным решением и крайними точками.
4. Симплекс-метод: процесс перехода к новому допустимому базисному решению, теорема об оптимальности допустимого базисного решения.
5. Процедура решения задачи симплекс-методом.
6. Двухфазный метод решения ЗЛП. Правило Блэнда, устраняющее заикливание.
7. Двойственный симплекс-метод, алгоритм двойственного симплекс-метода.
8. Двойственная задача ЛП: теорема двойственности, условие дополняющей нежёсткости.
9. Транспортная задача (ТЗ): постановка ТЗ, метод северо-западного угла, алгоритм метода; метод потенциалов.
10. Методы безусловной оптимизации: градиентные методы.
11. Методы безусловной оптимизации: методы прямого поиска.
12. Методы безусловной оптимизации: методы оптимизации функции одной переменной не использующие производной.
13. Выпуклое программирование: выпуклые функции и их связь с выпуклыми множествами, задача выпуклого программирования.
14. Выпуклое программирование: решение задачи условной оптимизации методом множителей Лагранжа.
15. Методы оптимизации функций при наличии ограничений: метод штрафной функции (с примером).
16. Динамическое программирование. Постановка задачи. Принцип оптимальности Беллмана.
17. Оптимизационные задачи на графах: алгоритм Дейкстры.
18. Оптимизационные задачи на графах: алгоритм Флойда.
19. Потoki в сетях: Алгоритм Форда.

Вопросы рассмотрены и утверждены на заседании кафедры _____

Заведующий кафедрой _____

—

Вопрос 1

Следующая задача

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z \rightarrow \min, \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

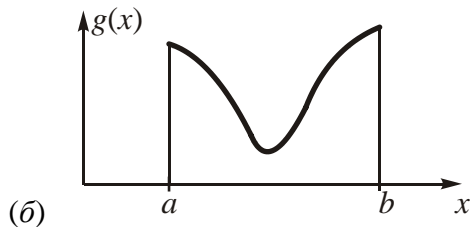
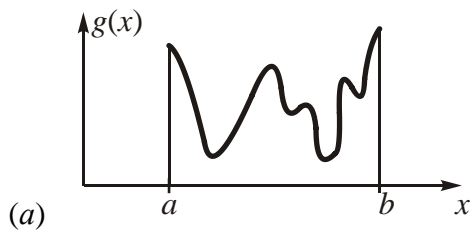
является задачей

- 1) Условной оптимизации.
- 2) Безусловной оптимизации.
- 3) Не является задачей оптимизации.

Вопрос 2

Функции на каких рисунках являются унимодальными на отрезке $[a, b]$?

- 1) Обе являются унимодальными.
- 2) Обе не являются.
- 3) Только функция на рисунке (а).
- 4) Только функция на рисунке (б).



Вопрос 3

На очередной итерации поискового метода получилось, что минимум функции $g(x)$ расположен на отрезке $[x_1, x_4]$. Измерения в точках x_2 и x_3 показали, что $g(x_2) > g(x_3)$. Как следует сузить интервал поиска минимума?

- 1) Минимум находится на отрезке $[x_1, x_2]$.
- 2) Минимум находится на отрезке $[x_2, x_3]$.
- 3) Минимум находится на отрезке $[x_3, x_4]$.
- 4) Минимум находится на отрезке $[x_2, x_4]$.
- 5) Минимум находится на отрезке $[x_1, x_3]$.
- 6) Значений функции $g(x)$ в точках x_2 и x_3 недостаточно, чтобы сузить интервал поиска.

Вопрос 4

Какие из следующих поисковых методов являются методами 0-го порядка?

- Метод Ньютона-Рафсона.
- Метод Розенброка.
- Метод наискорейшего спуска.

Вопрос 5

Какие из следующих поисковых методов являются методами 1-го порядка?

- Метод Ньютона.
- Метод наискорейшего спуска.
- Метод Гаусса-Зайделя.
- Метод Флетчера-Ривса.

Вопрос 6

Дана задача минимизации: $f(\mathbf{x}) \rightarrow \min$. Последовательность векторов \mathbf{x}^k называется релаксационной, если

- 1) Для любого k $f(\mathbf{x}^{k+1}) \geq f(\mathbf{x}^k)$.
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^k) = 0$.
- 3) Для любого k $f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k)$.

Вопрос 7

Пусть дана задача условной оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min, \\ g_i(x) = 0, i = 1, m. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть x^* – решение задачи (1).

Должна ли точка x^* являться точкой минимума функции Лагранжа?

- должна,
- не должна.

Вопрос 8

Имеется задача условной оптимизации с ограничением-равенством:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \rightarrow \min, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Какая из перечисленных ниже функций является функцией Лагранжа для указанной задачи?

- 1) $L(x, y, \lambda) = x + y - 5 + \lambda(x^2 + y^2)$.
- 2) $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y)$.
- 3) $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 5)$.
- 4) $L(x, y, \lambda) = \lambda(x^2 + y^2) + (1 - \lambda)(x + y - 5)$.

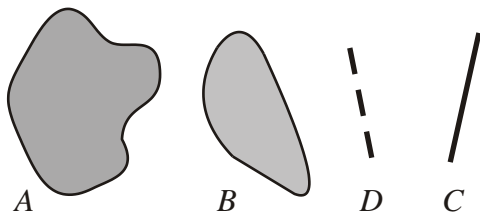
Вопрос 9

Функции штрафа применяются

- 1) К задачам условной оптимизации
- 2) К задачам безусловной оптимизации
- 3) Могут применяться к задачам как условной, так и безусловной оптимизации

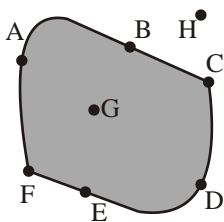
Вопрос 10

Какие из изображенных множеств являются выпуклыми?



- | | | | |
|--------------------------|--------------|--------------------------|--------------|
| <input type="checkbox"/> | Множество A. | <input type="checkbox"/> | Множество B. |
| <input type="checkbox"/> | Множество C. | <input type="checkbox"/> | Множество D. |

Вопрос 11



Какие точки на изображенном множестве называются крайними?

- 1) A, B, C, D, E, F, G, H.
- 2) A, B, C.
- 3) C, F.
- 4) H.
- 5) G.
- 6) A, C, D, F.

Вопрос 12

Из следующих четырех задач оптимизации

- | | |
|--|---|
| (a) $\begin{cases} xy^2 + z \rightarrow \max, \\ x + y \leq 5, \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$ | (б) $\begin{cases} x + y + z \rightarrow \max, \\ x + y \leq 5, \\ x, z \geq 1. \end{cases}$ |
| (в) $\begin{cases} x + y + z \rightarrow \max, \\ xyz \leq 5, \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$ | (г) $\begin{cases} xyz \rightarrow \max, \\ x + \sqrt{y} \leq 5, \\ x, z \geq 1. \end{cases}$ |

задачей линейного программирования является:

- | | | | |
|--------------------------|-----------|--------------------------|-----------|
| <input type="checkbox"/> | Задача а. | <input type="checkbox"/> | Задача б. |
| <input type="checkbox"/> | Задача в. | <input type="checkbox"/> | Задача г. |

Вопрос 13

Множество допустимых решений задачи линейного программирования может быть

- 1) Выпуклым.
- 2) Вогнутым.
- 3) Произвольным.

Вопрос 14

Симплекс-таблица с элементами α_{ij} для задачи минимизации является нормальной, если

- | | |
|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | Все $\alpha_{0j} \geq 0, j = \overline{0, n}$. |
| <input type="checkbox"/> | Все $\alpha_{0j} \geq 0, j = \overline{1, n}$, т.е. α_{00} может быть произвольным. |
| <input type="checkbox"/> | Все $\alpha_{0j} \geq 0, j = \overline{1, n}$, но должно быть $\alpha_{00} < 0$. |

Вопрос 15

При достижении оптимального плана симплекс-методом итоговая симплекс-таблица

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| <input type="checkbox"/> | Должна быть нормальной |
| <input type="checkbox"/> | Не должна быть нормальной |

Вопрос 16

Направление, в котором функция нескольких переменных убывает быстрее всего, совпадает с

- 1) Дивергенцией функции.
- 2) Антиградиентом функции.
- 3) Ротором функции.
- 4) Градиентом функции.

Вопрос 17

При переходе в задаче линейного программирования от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам количество переменных:

- увеличивается.
- уменьшается.
- не меняется.

Вопрос 18

Пересчет симплекс-таблицы при решении задачи линейного программирования соответствует

- 1) Переходу от одной грани многогранника к другой грани.
- 2) Переходу от одной вершины многогранника к другой вершине.
- 3) Не имеет геометрического смысла.
- 4) Переходу от одного ребра многогранника к другому ребру.

Вопрос 19

Симплекс метод для задачи линейного программирования позволяет найти

- 1) Точное решение
- 2) Приближенное решение

Вопрос 20

Пусть на некотором этапе решения задачи линейного программирования получена следующая симплекс-таблица:

	C	u	v	w
F	4	-1	2	1
x	3	3	-1	1
y	2	2	1	2

Какие столбцы годятся в качестве направляющих?

- Столбец C .
- Столбец u .
- Ни один.
- Столбец v .
- Столбец w .

Вопрос 21

Какой элемент в следующей симплекс-таблице следует выбрать направляющим?

	C	u	v	w
F	2	-1	1	-1
x	4	5	1	1
y	3	2	1	2

- 1) Строка F , столбец v .
- 2) Строка y , столбец w .
- 3) Строка y , столбец v .
- 4) Строка x , столбец v .
- 5) Строка x , столбец u .

б) Ни один из перечисленных.

Вопрос 22

Какие из следующих симплекс-таблиц являются нормальными при задаче минимизации?

Таблица А

	C	u	v
F	4	-1	-2
x	-3	3	-1
y	2	2	1

Таблица В

	C	u	v
F	4	1	2
x	3	3	1
y	2	2	1

Таблица С

	C	u	v
F	4	1	-2
x	3	3	1
y	2	-2	1

Таблица D

	C	u	v
F	-4	-1	-2
x	-3	3	-1
y	2	2	1

- Таблица А.
- Таблица В.
- Таблица С.
- Таблица D.

Вопрос 23

Если у задачи линейного программирования решение существует и конечно, то у двойственной задачи линейного программирования решение:

- 1) Не существует
- 2) Существует и целевые функции исходной и двойственной задач принимают равные значения
- 3) Существует, но целевые функции исходной и двойственной задач не обязаны принимать равные значения

Вопрос 24

Если в исходной задаче линейного программирования n переменных и m ограничений, то в двойственной задаче количество переменных равно

- m
- n
- mn
- $m + n$

Вопрос 25

Если в исходной задаче линейного программирования n переменных и m

ограничений, то в двойственной задаче количество ограничений равно

- m
 n
 mn
 $m + n$

Вопрос 26

Дана задача линейного программирования

$$\begin{cases} CX \rightarrow \max, \\ AX \leq B, \\ X \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

и двойственная к ней задача

$$\begin{cases} BY \rightarrow \min, \\ AY \geq C, \\ Y \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть X^* и Y^* – два допустимых (не обязательно оптимальных) решения задач (1) и (2) соответственно. Какое из следующих условий является верным:

- $CX^* \leq BY^*$
 $CX^* = BY^*$
 $BX^* \geq CY^*$
 $CX^* \geq BY^*$

Вопрос 27

Транспортная задача является частным случаем

- Задачи динамического программирования
 Задачи линейного программирования
 Задачи о назначениях

Вопрос 28

Следующая транспортная задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

является сбалансированной, если

- 1) $\prod_{i=1}^m a_i = \prod_{j=1}^n b_j$.
 2) $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

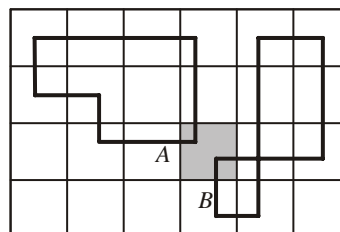
$$3) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j.$$

Вопрос 29

Для поиска опорного плана транспортной задачи подходят следующие методы:

- Метод потенциалов.
 Метод северо-западного угла.
 Метод наименьшей стоимости.
 Распределительный метод.

Вопрос 30



Для небазисной клетки (3-я строка, 4-й столбец) в таблице транспортной задачи построено два цикла, у цикла A сумма отрицательная, у цикла B – положительная. По

какому из этих циклов следует осуществлять пересчет для снижения транспортных расходов?

- 1) По циклу A .
 2) Не важно.
 3) По циклу B .
 4) Двух циклов быть не может.
 5) Ни по какому циклу нельзя пересчитывать.

Вопрос 31

При осуществлении сдвига по циклу транспортной задачи на величину a

- 1) Из всех вершин цикла вычитают величину a .
 2) Ко всем вершинам цикла прибавляют величину a .
 3) К вершинам цикла поочередно прибавляют и вычитают величину a , причем в небазисной клетке a прибавляется.

Вопрос 32

В каком из методов решения транспортной задачи можно вычислить сумму цикла, не строя сам цикл?

- 1) Метод потенциалов.
- 2) В обоих методах надо сначала построить цикл, чтобы узнать его сумму.
- 3) Распределительный метод.

Вопрос 33

Для решения задачи линейного целочисленного программирования можно

- Решить задачу без учета целочисленности переменных и полученное решение округлить.
- Итеративно решать задачу без учета целочисленности переменных и добавлять на каждом шаге правильное отсечение.
- Решить задачу без учета целочисленности переменных и полученное решение округлить в сторону увеличения для задачи максимизации и в сторону уменьшения для задачи минимизации.

Вопрос 34

Функция $f(\mathbf{x})$ называется выпуклой, если

- Она определена на выпуклом множестве.
- Для любых точек \mathbf{x}^1 и \mathbf{x}^2 выполняется неравенство:

$$f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) \leq tf(\mathbf{x}^1) + (1-t)f(\mathbf{x}^2).$$

- Она определена и непрерывна на выпуклом множестве.

Вопрос 35

Какие из следующих функций являются выпуклыми?

- $f(x) = \sin(x)$ на интервале $[-\pi, +\pi]$.
- линейная функция $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x})$.
- $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ на интервале $[-\pi, +\pi]$.
- положительно определенная квадратичная форма.
- $f(x) = (1 - x^2)$ на интервале $[-\pi, +\pi]$.

Вопрос 36

Производная непрерывной функции $f(x, y)$ по направлению, задаваемому единичным вектором e , находится как

- 1) Векторное произведение $[\nabla f, e]$.
- 2) Скалярное произведение $(\nabla f, e)$.

Вопрос 37

В задаче квадратичного программирования находится:

- 1) Экстремум квадратичной функции при линейных ограничениях.
- 2) Экстремум линейной функции при линейных ограничениях.
- 3) Экстремум квадратичной функции при квадратичных ограничениях.
- 4) Экстремум квадратичной функции при любых ограничениях.

Вопрос 38

Для решения задачи классического вариационного исчисления

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min$$

- Достаточно решить уравнение Эйлера-Лагранжа.
- Надо решить уравнение Эйлера-Лагранжа и применить достаточный признак Вейерштрасса или Лежандра.
- Надо решить уравнение Эйлера-Лагранжа и применить достаточный признак Коши или Д'Аламбера.

Вопрос 39

Теорема Дубовицкого-Милютина позволяет найти:

- 1) Глобальное решение задачи нелинейного программирования.
- 2) Локальное решение задачи линейного программирования.
- 3) Локальное решение транспортной задачи.
- 4) Локальное решение задачи нелинейного программирования.

Вопрос 40

В методе аппроксимации границ области для решения задачи нелинейного программирования на каждом шаге решается

- 1) Транспортная задача.
- 2) Задача о назначениях.
- 3) Задача линейного программирования.
- 4) Задача нелинейного программирования.

Вопрос 41

Для решения задачи глобальной оптимизации с помощью алгоритма Пиявского целевая функция должна

- Быть дважды дифференцируемой.
- Удовлетворять условию Липшица.
- Быть унимодальной.
- Удовлетворять условию Лежандра.