

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра общей и теоретической физики

А.В. Горохов

А.Ф. Крутов

А.П. Мартыненко

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Самара
Издательство "Универс групп"
2008

ББК 22.311

УДК 517.33+517.44

Г 70

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Самарского аэрокосмического университета **И.П. Завершинский**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Самарского государственного университета **А.А. Андреев**

Горохов, А.В.

Г 70 Методы математической физики : учеб. пособие / А.В. Горохов, А.Ф. Крутов, А.П. Мартыненко. - Самара :

Изд-во "Универс групп", 2008. 94 с.

ISBN 978-5-467-00177-7

Учебное пособие содержит сборник задач по основам теории функций комплексного переменного и их приложениям к ряду физических задач. Основное внимание уделено разбору методов решения задач по курсу.

Пособие предназначено студентам физических факультетов университетов, изучающим курс методов математической физики, но может быть также полезно преподавателям и студентам вузов технических специальностей.

ББК 22.311

УДК 517.33+517.44

ISBN 978-5-467-00177-7 © Горохов А.В., Крутов А.Ф.,
Мартыненко А.П. 2008

© Самарский государственный университет
2008

Содержание

Введение	6
1 Конформные отображения	8
1.1 Общие свойства конформных отображений	8
1.1.1 Примеры задач с решениями	8
1.1.2 Аудиторные задачи	12
1.1.3 Задачи для самостоятельного решения	13
1.2 Физические приложения	16
1.2.1 Примеры задач с решениями	16
1.2.2 Аудиторные задачи	21
1.2.3 Задачи для самостоятельного решения	22
2 Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов	25
2.1 Вычеты и нахождение определенных интегралов	25
2.1.1 Примеры задач с решениями	25
2.1.2 Аудиторные задачи	28
2.1.3 Задачи для самостоятельного решения	28
2.2 Вычисление определенных интегралов	30
2.2.1 Примеры задач с решениями	30
2.2.2 Аудиторные задачи	34
2.2.3 Задачи для самостоятельного решения	35
2.3 Вычисление определенных интегралов (продолжение)	37
2.3.1 Примеры задач с решениями	37
2.3.2 Аудиторные задачи	39
2.3.3 Задачи для самостоятельного решения	39
3 Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами	41
3.1 Решение дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности обыкновенной точки, регулярной особой точки дифференциального уравнения	41
3.1.1 Примеры задач с решениями	41
3.1.2 Аудиторные задачи	45
3.1.3 Задачи для самостоятельного решения	46

4 Мероморфные функции	48
4.1 Разложение мероморфных функций в ряды простейших дробей и в бесконечные произведения	48
4.1.1 Примеры задач с решениями	48
4.1.2 Аудиторные задачи	51
4.1.3 Задачи для самостоятельного решения	51
5 Асимптотические оценки интегралов	53
5.1 Метод интегрирования по частям. Метод Лапласа	53
5.1.1 Примеры задач с решениями	53
5.1.2 Аудиторные задачи	55
5.1.3 Задачи для самостоятельного решения	56
5.2 Асимптотические оценки интегралов. Метод стационарной фа- зы. Метод перевала	58
5.2.1 Примеры задач с решениями	58
5.2.2 Аудиторные задачи	63
5.2.3 Задачи для самостоятельного решения	64
6 Операционное исчисление	66
6.1 Свойства преобразования Лапласа	66
6.1.1 Примеры задач с решениями	66
6.1.2 Аудиторные задачи	69
6.1.3 Задачи для самостоятельного решения	70
6.2 Операционное исчисление. Приложения	72
6.2.1 Примеры задач с решениями	72
6.2.2 Аудиторные задачи	75
6.2.3 Задачи для самостоятельного решения	76
7 Классические ортогональные полиномы	79
7.1 Полиномы Лежандра, Чебышева-Эрмита, Чебышева-Лагерра	79
7.1.1 Примеры задач с решениями	79
7.1.2 Аудиторные задачи	81
7.1.3 Задачи для самостоятельного решения	81
7.2 Полиномы Лежандра, Чебышева-Эрмита, Чебышева-Лагерра. Интегральные представления	83
7.2.1 Примеры задач с решениями	83

7.2.2	Аудиторные задачи	84
7.2.3	Задачи для самостоятельного решения	85
8	Цилиндрические функции	86
8.1	Функции Бесселя, Ханкеля, Макдональда и их свойства . .	86
8.1.1	Примеры задач с решениями	86
8.1.2	Аудиторные задачи	89
8.1.3	Задачи для самостоятельного решения	90
	Список использованной литературы	92

Введение

Комплексный анализ имеет самые широкие приложения в современной физике – от теории электрических цепей переменного тока до дисперсионных соотношений в физике высоких энергий и квантовой теории поля. Современный физик обязан владеть такими понятиями, как вычет, аналитическое продолжение, интегральное представление, асимптотическое поведение (и т.п.) также свободно, как и понятиями логарифм, производная и интеграл.

Учебное пособие является переработанным вариантом учебно - методического пособия тех же авторов, опубликованного в СамГУ в 1995 г. Оно написано с целью организации практических занятий по первой половине курса методов математической физики, который, наряду с основами теории функций комплексного переменного, включает также интегральные преобразования, элементы операционного исчисления, решения обыкновенных дифференциальных уравнений, методы асимптотических оценок интегралов и элементы теории специальных функций. В их числе разобраны свойства полиномов Лежандра, Чебышева-Эрмита, Чебышева-Лагеррера и цилиндрических функций Бесселя, Ханкеля, Макдональда и их связь с гипергеометрической функцией. Именно эти специальные функции особенно важны для приложений в квантовой механике и в других разделах современной теоретической физики.

Пособие состоит из 8 разделов, при этом материал каждого подраздела соответствует теме одного практического (семинарского) занятия. Каждый подраздел содержит задачи с подробными решениями, аудиторные задачи и задачи, которые выделяются для самостоятельного решения. Решенные задачи подобраны так, что они иллюстрируют и дополняют лекционный курс и содержат сведения, которые могут в некоторой степени служить теоретическим минимумом по теме занятий.

Особое внимание в учебном пособии уделено физическим приложениям. В их числе моделирование с использованием аналитических функций электрических и магнитных полей, имеющих осевую симметрию; использование комплексного анализа при нахождении решений дифференциальных уравнений, описывающих так называемые *RLC*–цепи и другие радиотехнические устройства.

Авторы надеются, что разбор таких задач позволит студентам выработать необходимые навыки и искусство расчетов, которые далее пригодятся им при подготовке курсовых и дипломных работ и в последующей профессиональной деятельности.

Учебное пособие предназначено студентам физических факультетов университетов, изучающим курс методов математической физики, но может быть также полезно преподавателям и студентам технических вузов.

1 Конформные отображения

1.1 Общие свойства конформных отображений

Литература по теме:

1. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987, Гл.2,
2. Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ. - М.: Наука, 1976, Ч.1, §§2-4, §13,
3. М.А.Евграфов, Аналитические функции. - М.: Наука, 1991, Гл.5,
4. А.И.Маркушевич, Теория аналитических функций. - М.: Наука, Т.2, Гл.5, §1.

1.1.1 Примеры задач с решениями

1. Найти образ прямой $y = x + 2$ при отображении

$$w = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Решение:

Используемое в задаче отображение является частным случаем дробно-линейной функции $w = (az + b)/(cz + d)$ с коэффициентами $a = b = c = 1$, $d = -1$. Поскольку $ad - bc = -2 \neq 0$, осуществляется однолистное отображение z -плоскости на расширенную w -плоскость. Дробно-линейное отображение обладает *круговым свойством*, т.е. преобразует любую окружность расширенной z -плоскости в окружность w -плоскости.

В частности, если прямая (являющаяся окружностью в смысле \bar{C} -плоскости) *не проходит* через точку $z_0 = -d/c$, которая переводится в бесконечно удаленную точку, то ей соответствует окружность, расположенная в конечной части w -плоскости и задаваемая уравнением $|w - w_0| = R$.

Центр окружности w_0 и ее радиус R найдем, записав уравнение прямой в виде: $Re(\lambda z) = \alpha$, где $\lambda = -1 - i$, $\alpha = 2$.

Для случая общего дробно-линейного отображения

$$w_0 = \frac{2a\bar{c}\alpha + \bar{d}\bar{\alpha}a + \lambda\bar{c}b}{2\alpha|c|^2 + \operatorname{Re}(\lambda\bar{d}c)},$$

$$R = \left| \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{(ad - bc)\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}dc)} \right|.$$

В нашем случае $w_0 = \frac{2-i}{3}$, $R = \frac{|1+i|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2. Найти функцию $w = f(z)$ конформно отображающую полосу D : $-\pi/4 < \operatorname{Re}z < \pi/4$ на круг $|w| < 1$ с соответствием трех граничных точек $f(\pm\pi/4) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$, (Здесь $i\infty$ обозначает верхнюю бесконечно удаленную точку полосы).

Решение

Из общей теории конформных отображений известно, что на круг единичного радиуса всегда можно отобразить полуплоскость, ограниченную прямой, проходящей через начало координат, с использованием дробно-линейной функции. С другой стороны, правую полуплоскость можно получить из полосы шириной π симметричной относительно вещественной оси с помощью отображения, задаваемого экспонентой.

В результате искомое отображение получается композицией следующих трех отображений:

1) Поворота на $\pi/2$ и растяжения вдвое:

$$u = 2iz, \quad (1)$$

2) Экспоненциального отображения:

$$v = e^u, \quad (2)$$

3) Дробно-линейного отображения, переводящего указанные в условии задачи три граничные точки v -плоскости в точки $w = \pm 1, i$, которое имеет вид:

$$\frac{w-1}{w-i} \cdot \frac{-1-i}{-1-1} = \frac{v-i}{v} \cdot \frac{-i}{-i-i},$$

откуда:

$$w = \frac{1}{i} \cdot \frac{v-1}{v+1}. \quad (3)$$

(Легко видеть, что мнимая ось v плоскости переходит в окружность единичного радиуса.)

Подставляя (2) и (1) в (3), окончательно получаем:

$$w = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z. \quad (4)$$

Обратная функция

$$z = \operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iw}{1 - iw}. \quad (5)$$

отображает круг на полосу D .

3. Найти конформное отображение на верхнюю полуплоскость z с двумя разрезами $-\infty \leq x \leq -1$ и $1 \leq x \leq \infty$.

Решение

Заметим, прежде всего, что отображаемая область односвязна, поскольку на сфере Римана образы разрезов соединяются в полюсе, отвечающем бесконечно удаленной точке.

Введем дробно-линейное отображение

$$v = \frac{z + 1}{z - 1}. \quad (1)$$

Точка $z = -1$ переводится в точку $v = 0$, а $z = 1$ в $v = \infty$, при этом, двум разрезам соответствует луч, соединяющий в v -плоскости 0 с ∞ . Так как (1) имеет вещественные коэффициенты, то для вещественных z получаются вещественные v , и луч представляет собой либо отрицательную, либо положительную вещественную полуось. Из (1) следует, что точка $z = \infty$ переходит в $v = 1$, следовательно луч совпадает с положительной полуосью.

Вспомнив, что функция z^2 отображает верхнюю полуплоскость в комплексную плоскость с разрезом по положительной вещественной полуоси, приходим к выводу, что для получения искомого отображения необходимо извлечь квадратный корень, то есть, функция $w = \sqrt{v}$ отобразит плоскость с упомянутым разрезом в верхнюю полуплоскость.

Таким образом, исходная плоскость с двумя разрезами отображается на верхнюю полуплоскость помощью функции

$$w = \sqrt{\frac{z + 1}{z - 1}}.$$

4. Из верхней полуплоскости исключены полукруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ и луч $\text{Re } z = 0, \text{Im } z > 2$. Найти конформное отображение этой области на верхнюю полуплоскость.

Решение:

Применяя отображение

$$u = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1)$$

которое взаимно однозначно в изучаемой области (проверьте !), переведем полукруглость в отрезок $-1 \leq \text{Re } u \leq 1$, не искажая формы других частей границы. Луч из условия задачи отображается в луч $\text{Re } u = 0, \text{Im } u > 3/4$.

Функция

$$v = u^2 \quad (2)$$

преобразует эту область в плоскость с двумя выброшенными лучами: $\text{Re } v < -9/4, \text{Re } v > 0$.

Дробно-линейное отображение

$$\zeta = \frac{v + \frac{9}{16}}{v} = 1 + \frac{9}{16v} \quad (3)$$

приводит к плоскости с разрезом по положительной полуоси. Остается применить функцию $w = \sqrt{\zeta}$, чтобы получить верхнюю полуплоскость.

В результате суперпозиции отображений (1), (2) и (3) получаем функцию

$$w = \frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{2(z^2 + 1)}$$

с искомыми свойствами.

5. Найти конформное отображение внешности буквы "Т", образованной двумя разрезами $-1 < \text{Re } z < 1; -2 < \text{Im } z < 0$ на верхнюю полуплоскость.

Решение:

Задача решается с использованием принципа симметрии.

Сначала проведем вспомогательные разрезы вдоль всей мнимой оси ($\text{Im } z > 0, \text{Im } z < -2$) и отобразим на правую полуплоскость с выброшенным отрезком $(0, 1)$ вещественной оси. Эта вспомогательная задача решается следующей последовательностью отображений:

$$\zeta = z^2, \omega = \sqrt{\zeta - 1} = \sqrt{z^2 - 1}. \quad (1)$$

К этой функции применим принцип суперпозиции, согласно которому аналитическое продолжение $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ через отрезок EAB , ($E = 0, A = \infty, B = -2i$) осуществляет отображение левой полуплоскости с выброшенным отрезком $(-1, 0)$ вещественной оси на левую полуплоскость ω , при этом внешность буквы "Г" отображается на внешность отрезка $B'E'$ плоскости ω (точки $B' = -\sqrt{5}i, E' = i$ являются образами точек B и E исходной плоскости).

Внешность $B'E'$ осталось отобразить на верхнюю полуплоскость.

Функция

$$v = \frac{\omega + \sqrt{5}i}{\omega - i} \quad (2)$$

отображает внешность отрезка $B'E'$ на внешность разреза плоскости v , соединяющего точки $B'' = 0$ и $E'' = \infty$; так как точка $\omega = 0$ переходит в точку $v = -\sqrt{5}$, то разрез проходит по отрицательной вещественной полуоси. Функция

$$w = \sqrt{-v} \quad (3)$$

отображает внешность отрицательной полуоси плоскости v на верхнюю полуплоскость w и, следовательно, функция

$$w = \sqrt{\frac{\omega + \sqrt{5}i}{i - \omega}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 - i} + \sqrt{5}i}{i - \sqrt{z^2 - i}}}$$

осуществляет требуемое отображение внешности буквы "Г" на верхнюю полуплоскость.

1.1.2 Аудиторные задачи

1. Найти образ кольца $1 < |z| < 2$ при отображении функцией $w = \frac{z}{z-1}$.

Ответ: Кольцо переводится в двусвязную область, граница которой состоит из прямой $Re w = 1/2$ и окружности $|w - 4/3| = 2/3$.

2. Найти конформное отображение полукруга $|z| < 1, Im z > 0$ на верхнюю полуплоскость.

Ответ: $w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

3. Найти отображение $w = f(z)$ полуполосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость такое, что $f(\pm\pi/2) = \pm 1, f(0) = 0$.

Ответ: $w = \sin z$.

4. Конформно отобразить полосу $0 < \operatorname{Im} z < 1$ с вырезом $\operatorname{Re} z = a, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq h < 1$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$. Отдельно рассмотреть случай $h \ll 1$.

Ответ:

$$w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\cos \frac{\pi h}{2} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}} \right] + a.$$

Если $h \ll 1$, то из разложения функций $\cos, \sqrt{\quad}$ и tg в ряд по h получаем:

$$w \approx z + \frac{\pi h^2}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-a)}{2}.$$

5. Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$ с разрезом вдоль отрезка $0 \leq \operatorname{Re} z \leq h, \operatorname{Im} z = 0, (h < 1)$.

Ответ:

$$w = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h}{1 + \cos \pi z}}.$$

1.1.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Во что преобразуется квадрант $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ при отображении $w = \frac{z-i}{z+i}$?

Ответ:

В полуокруг $|w| < 1, \operatorname{Im} w < 1$

2. Во что преобразуется полоса $0 < \operatorname{Re} z < 1$ при отображении $w = \frac{z-1}{z+1}$?

Ответ:

В область, ограниченную касающимися друг друга окружностями

$$|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \text{ и } |w - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}.$$

3. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(i) = 0, \operatorname{arg} w'(i) = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ:

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

4. Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность единичного верхнего полукруга.

Ответ:

$$w = e^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{3}{4}}.$$

5. Каков прообраз верхней полуплоскости при отображении $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$? Каков предельный прообраз верхней полуплоскости при $n \rightarrow \infty$?

Ответ:

Угол $0 < \arg(z+n) < \frac{\pi}{n}$;

Полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$.

6. Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \operatorname{ch} z$:

а) полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$;

б) полуполоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0$.

Ответ:

а) Во всю w -плоскость с разрезами по вещественной оси вдоль лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

б) В правую полуплоскость с разрезом вдоль вещественной оси вдоль луча $[1, \infty)$.

7. Найти функцию $w = f(z)$, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z < 1$ с выкинутым кругом $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с условиями:

$$f(-3i) = 0, \arg f'(-3i) = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ:

$$f(z) = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \operatorname{th} \frac{\pi i(z+3i)}{4(z-i)}.$$

8. Отобразить на внешность единичного круга всю плоскость с разрезами по отрезкам $[-1, 1]$ и $[-i, i]$ (внешность креста).

Ответ:

$$w = \sqrt{z^2 + \sqrt{z^4 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

9. Найти отображение на верхнюю полуплоскость области, ограниченной окружностями $|z-1| = 1, |z+1| = 1$, с разрезом по лучу $2 \leq \operatorname{Re} z < \infty, \operatorname{Im} z = 0$.

Ответ:

$$w = \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}}}.$$

10. Отобразить верхнюю полуплоскость с разрезами по отрезкам $0 \leq y \leq a, x = \frac{\pi}{2} + n\pi, (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ на верхнюю полуплоскость.

Ответ :

$$w = \operatorname{arcsin} \frac{\sin z}{\operatorname{ch} a}.$$

(Указание: Функция $\sin z$ отображает полуполосу $y=0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ на верхнюю полуплоскость ; при этом точки $\pm \frac{\pi}{2} + ai$ переходят в точки $\pm \operatorname{ch} a$.

Функция $w = \operatorname{arcsin} \frac{\sin z}{\operatorname{ch} a}$ отображает указанную полуполосу на себя , так что лучам $x = \pm \frac{\pi}{2}, a \leq y < \infty$ соответствуют лучи $\operatorname{Re} w = \pm \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} w < \infty$).

1.2 Физические приложения

Литература по теме:

1. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987, Гл.3,§2,
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, Т.VIII, Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982, Гл.1,§3.

1.2.1 Примеры задач с решениями

1. Показать, что плоское электростатическое поле можно описать аналитической функцией $w = w(z)$ и выяснить физический смысл $Re w$, $Im w$, а также особых точек функции $w(z)$.

Решение:

Электростатическое поле в вакууме в области, где отсутствуют источники, удовлетворяет двум уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Согласно первому уравнению вектор напряженности \vec{E} можно представить в виде градиента потенциала поля: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$. Второе уравнение позволяет ввести также и "векторный потенциал": $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{A}$. В плоском случае вектор \vec{E} можно выбрать лежащим в плоскости xy и зависящим только от этих координат. Соответственно, вектор \vec{A} имеет отличную от нуля проекцию A только на ось, перпендикулярную плоскости xy . Тогда легко проверить, что компоненты \vec{E} выражаются в виде производных от ϕ и A :

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (1)$$

Если теперь ввести функцию $w = \phi - iA$, то соотношения (1) совпадают для нее с условиями Коши-Римана, что означает, что функция w является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$.

Функция w называется **комплексным потенциалом**.

Линии $\phi = \text{const}$ являются эквипотенциальными, а линии постоянных значений мнимой части w представляют собой силовые линии поля. В самом

деле, силовые линии, для которых вектор \vec{E} является касательным, определены уравнениями

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Выражая E_x и E_y через производные от A , получаем

$$dx \frac{\partial A}{\partial x} = dy \frac{\partial A}{\partial y} = dA = 0,$$

откуда $A(x, y) = \text{const.}$

Поток вектора напряженности электрического поля через какой либо отрезок эквипотенциальной линии определен интегралом

$$\int E_n dl = - \int \frac{\partial \phi}{\partial n} dl,$$

где dl элемент эквипотенциальной линии, \vec{n} - направление нормали к ней. Согласно формулам (1) $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial A}{\partial l}$, причем знак выбран так, что если смотреть в направлении \vec{n} , то положительное направление l - влево.

Поэтому

$$\int E_n dl = \int \frac{\partial A}{\partial l} dl = A_2 - A_1,$$

где A_2 и A_1 - значения функции A на обоих концах отрезка. В частности, поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi e$, где e - полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводника вдоль оси симметрии Z). Поэтому

$$e = \frac{1}{4\pi} \Delta A. \quad (2)$$

Простейшим примером плоского электростатического поля является поле равномерно заряженной бесконечной нити, вытянутой вдоль оси Z . Напряженность этого поля дается формулами

$$E_r = \frac{2e}{r}, \quad E_\theta = 0,$$

где r, θ полярные координаты в плоскости XY , а e - заряд единицы длины нити.

Соответствующий комплексный потенциал равен

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta.$$

Если заряженная нить проходит не через начало координат, а через точку $z_0 = (x_0, y_0)$, то комплексный потенциал

$$w = -2e \ln(z - z_0).$$

В общем случае, если z_0 - полюс производной w' и функция $w(z)$ имеет разложение

$$w(z) = \frac{c_n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{p}{z - z_0} + 2q \ln \frac{1}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \quad (3)$$

то q - заряд единицы длины (плоский точечный заряд); слагаемое $-\frac{p}{z - z_0}$ определяет в точке z_0 электрический дипольный момент величины p , помещенный в точке z_0 , аргумент p задает направление диполя; остальные слагаемые $\frac{c_n}{(z - z_0)^n}$ соответствуют мультиполям порядка $2n$ в точке z_0 .

Соответственно, для разложения на бесконечности

$$w = c_n z^n + \dots + p z + 2q \ln z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \dots \quad (4)$$

слагаемое $2q z$ определяет на ∞ плоский точечный заряд, а слагаемое $p z$ - диполь с моментом p .

Приведем в заключение четыре типа электростатических задач, для решения которых особенно полезно применение метода конформных отображений.

Вот эти задачи:

I. Определение электростатического поля в криволинейной полосе D между проводниками Γ_1 и Γ_2 , которые имеют общими лишь свои концы, расположенные в точке $z = \infty$. Разность потенциалов между проводниками считается заданной.

II. Определение поля в криволинейном кольце D между двумя замкнутыми непересекающимися проводниками Γ_1 и Γ_2 , разность потенциалов между которыми задана.

III. Определение поля в области D , ограниченной проводником Γ , проходящим через бесконечно удаленную точку. Считается заданной величина вектора напряженности поля в бесконечности (в предположении, что последняя не является угловой точкой контура Γ).

IV. Определение поля во внешности D замкнутого проводника Γ , состоящего из точек конечной части комплексной плоскости. Вектор напряженности поля в бесконечно удаленной точке считается заданным по величине и по направлению.

2. Найти поле двух разноименно заряженных круговых цилиндров, расположенных вне друг друга.

Решение

Заметим, прежде всего, что данная задача относится к типу II. Ее решение можно легко найти, если известно взаимно однозначное и конформное отображение $\omega = f(z)$ области D на круговое кольцо $r, |\omega| < R$. Для кругового кольца комплексным потенциалом, очевидно, будет служить многозначная функция

$$w = k i \operatorname{Ln} \omega, \quad (1)$$

где k — вещественная константа (мнимая часть $\operatorname{Im} w = k \ln |\omega|$ на окружностях $|\omega| = r$ и $|\omega| = R$ принимает постоянные значения). Подбирая константу k , мы можем добиться любой заданной разности потенциала V_0 между границами кольца. Подставляя, далее, $f(z)$ в формулу (1) вместо ω , мы и получим комплексный потенциал в области D , дающий решение задачи.

$$w = k i \operatorname{Ln} f(z).$$

В исследуемом случае нужно найти поле во внешности двух окружностей C_1 и C_2 . Пусть a_1 и a_2 — центры этих окружностей. Построим на общей к ним касательной $b_1 b_2$ как на диаметре, полуокружность C^* ; точки ее пересечения z_1 и z_2 с линией центров $a_1 a_2$ симметричны одновременно относительно обеих окружностей C_1 и C_2 .

Дробно - линейное отображение

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

преобразует точки z_1 и z_2 в точки 0 и ∞ , а окружности C_1 и C_2 в концентрические окружности с общим центром в точке $\omega = 0$.

Комплексным потенциалом вспомогательного поля является согласно (1) $w = k i \operatorname{Ln} \omega$, а для первоначального поля — функция

$$w = k i \operatorname{Ln} \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Распоряжаясь константой k , мы можем добиться заданной разности потенциала между C_1 и C_2 . Эквипотенциальными линиями служат окружности Апполония, а силовым линиям соответствует пучок окружностей, проходящих через точки z_1 и z_1 .

3. Показать, что плоское магнитное поле линейных токов I_k описывается аналитической функцией $\Psi(z)$ и выяснить ее физический смысл.

Решение

Как известно из курса общей физики (теорема Стокса), вектор напряженности магнитного поля \vec{H} , создаваемого прямолинейным током I , на расстоянии r от тока равен $\frac{2I}{r}$, лежит в плоскости перпендикулярной току, и направлен по нормали к кратчайшему расстоянию, соединяющему точку поля с линией тока в соответствии с правилом правого буравчика. Следовательно, в соответствующем плоском случае этот вектор можно представить в виде

$$\vec{H} = \frac{2I}{\bar{z}}, \quad (1)$$

По аналогии с электростатикой под комплексным (псевдо)потенциалом такого поля можно понимать функцию $\Psi(z)$

$$\Psi(z) = U + iV = 2I \ln z = c, \quad (2)$$

где U - силовая функция поля, V (псевдо)потенциал и c - произвольная постоянная.

Для системы токов I_k ($k = 1, \dots, n$), пересекающих плоскость в точках z_k , магнитное поле и комплексный потенциал получаются согласно принципу суперпозиции сложением выражений вида (1) и (2) и соответственно равны

$$\vec{H} = \sum_{k=1}^n \frac{2I_k i}{\bar{z} - \bar{z}_k},$$
$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^n 2I_k \ln(z - z_k) + c. \quad (3)$$

Из сравнения формул для комплексных потенциалов электростатического поля (предыдущая задача) и магнитного поля можно заключить, что сетка из силовых линий и линий равного потенциала электрического поля линейных зарядов, пересекающих плоскость XY в точках z_k полностью совпадает с такой же сеткой магнитного поля линейных токов, пересекающих плоскость в тех же точках. При этом лишь меняются местами силовые линии и линии равного потенциала.

Так, для системы равных по величине и одинаково направленных линейных токов, пересекающих плоскость XY в точках $\pm a$, комплексный потенциал $\Psi(z)$ равен

$$\Psi(z) = I \ln(z^2 - a^2), \quad (4)$$

силовые линии определяются соотношением

$$|z - a| |z + a| = c = const,$$

то есть, представляют собой так называемые **лемнискаты**.

(Лемнискатой называется геометрическое множество точек, произведение расстояний которых до двух точек, фокусов, постоянно.)

При $c = 0$ лемниската вырождается в пару точек $\pm a$; при $0 < c < |a|^2$ распадается на две кривые овальной формы; при $c = |a|^2$ представляет собой обычную лемнискату Бернулли; а при $c > |a|^2$ состоит из одной кривой.

1.2.2 Аудиторные задачи

1. Показать, что комплексный потенциал электростатического поля, образованного плоским точечным зарядом, находящимся в точке a в произвольной односвязной области D , определяется формулой

$$w = 2e \ln \frac{1}{f(z, a)} + c,$$

где $f(z, a)$ функция, конформно отображающая область D на единичный круг так, что $f(a, a) = 0$, и c — вещественная константа.

2. Найти эквипотенциальные линии, силовые линии и вектор напряженности поля, если комплексный потенциал $w = \frac{1}{z^2}$.

Ответ:

$$r = \sqrt{\frac{\sin 2\phi}{c}}, \quad r = \sqrt{\frac{-\cos \phi}{c}}, \quad E = \frac{2i}{z^3}.$$

3. На окружности $|z - 2i| = 1$ плотность заряда $\sigma = 1$. Какая будет плотность заряда после заземления вещественной оси?

Ответ:

После заземления

$$w = 4\pi \operatorname{Ln} \frac{z - \sqrt{3}i}{z + \sqrt{3}i};$$

в точке окружности $z = 2i + e^{i\phi}$ плотность заряда

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sin \phi}.$$

4. Найти электростатическое поле в полукруге $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, если на дугах окружности $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ потенциал равен $\pm V_0$ соответственно, а на диаметре он равен 0 (точки i и ± 1 изолирующие).

Ответ:

$$w = \frac{2V_0}{2\pi} \operatorname{Ln} \left(\frac{z-1}{(z+1)^2} \sqrt{z^2+1} \right) + \frac{V_0 \ln 2}{\pi}.$$

1.2.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти комплексные потенциалы электростатических полей, образованных плоскими точечными зарядами в следующих областях:

а) в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, зарядом q в точке z_0 ;

б) в круге $|z| < R$, зарядом q в точке z_0 ;

в) во внешности круга $|z| > R$, зарядом q в точке z_0 ;

г) во внешности отрезка $|x| < R, y = 0$, зарядом q , расположенным на ∞ .

Ответ:

а) $w = 2q \ln \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + c;$

б) и в): $w = 2q \ln \frac{R^2 - \bar{z}_0 z}{R(z - z_0)} + c$

$$r) w = 2q \ln \frac{1}{z(z)} + c, \text{ где } f(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - R^2}}{R}.$$

2. Найти электростатическое поле

а) в круге $|z| < R$, образованное диполем p в точке a ;

б) во внешности отрезка $|x| < R, y = 0$, диполем $p = \rho e^{i\alpha}$, расположенном на бесконечности.

Ответ:

а)

$$w = \frac{p}{z-a} + \frac{p^*}{z-a^*} + c,$$

$$\left(a \neq 0, a^* = \frac{R^2}{\bar{a}}, p^* = \frac{R^2 \bar{p}}{\bar{a}^2} \right),$$

$$w = \frac{p}{z} - \frac{\bar{p}}{R^2} z + c, (f=0), c$$

вещественное число.

$$б) w = \rho (z \cos \alpha + i \sin \alpha \sqrt{z^2 - R^2}) + const,$$

3. В односвязной области D построить электростатическое поле, образованное точечными зарядами q_k , расположенными в точках $a_k, (k = 1, 2, \dots, n)$ и точечным диполем p , в точке a .

Ответ:

$$w = \sum_{k=1}^n 2 q_k \ln \frac{1}{f(z, a_k)} + f'(a, a) \left[\frac{p}{f(z, a)} - \bar{p} f(z, a) \right] = c,$$

где $f(z, a_k)$ и $f(z, a)$ конформно отображают D на единичный круг с нормировкой $f(a_k, a_k) = f(a, a) = 0, f'(a, a) > 0$ и c - вещественное число.

4. Определить характер электростатического поля, определенного в области D комплексным потенциалом $w = 2q \ln \frac{1}{f(z)}$, если функция $f(z)$ отображает область D на:

а) плоскость с разрезами по концентрическим круговым дугам с центром в начале координат;

б) круг с разрезами по концентрическим круговым дугам с центром в начале координат;

в) круговое кольцо с разрезами по концентрическим круговым дугам с центром в начале координат.

Во всех случаях найти потоки вектора напряженности через граничные контуры.

Ответ:

а) Если $f(a) = 0, f(b) = \infty$, то поле образовано зарядами $\pm q$, расположенными в точках a и b соответственно, причем поток вектора напряженности поля через каждый граничный вектор равен нулю; б) если $f(a) = 0$, то поле образовано точечным зарядом q , размещенном в этой точке, поток вектора \vec{E} через граничный контур, в направлении нормали, внешней к области D , равен $4\pi q$, а через каждый другой контур равен нулю; в) поле всюду регулярное. Поток вектора \vec{E} через граничные контуры, переходящие в окружности, в направлении нормали, внешней к D , равен $\pm 4\pi q$ (+ для контура, переходящего во внешнюю окружность), а через все остальные контуры равен нулю.

2 Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

2.1 Вычеты и нахождение определенных интегралов

Литература:

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
3. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980.

2.1.1 Примеры задач с решениями

1. Доказать, что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{z_k, \operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} R(z), \quad (1)$$

где $R(x)$ - рациональная функция, z_k - особые точки функции $R(z)$ ($\operatorname{Im} z_k = 0$). Предполагается, что интеграл I сходится.

К интегралу I нельзя непосредственно применить теорему о вычетах, так как контур интегрирования бесконечная незамкнутая кривая. Чтобы воспользоваться теоремой о вычетах, введем вспомогательный контур Γ_R (см. Рис.1), состоящий из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности C_R ($|z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi$), и рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma_R} R(z)dz = \int_{-R}^R R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz \quad (2)$$

при $R \rightarrow \infty$.

Проведем оценку интеграла по полуокружности C_R . Пусть $R(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ - многочлены степени n и m соответственно. Из сходимости интеграла I вытекает, что $k = m - n \geq 2$. Следовательно,

$$R(z) \sim \frac{A}{z^k}, \quad (z \rightarrow \infty, k \geq 2 -),$$

так что $|R(z)| \leq c|z|^{-2}$ при достаточно больших $|z|$. Тогда на полуокружности C_R выполняется неравенство $|R(z)| \leq cR^{-2}$ и, следовательно,

$$\left| \int_{C_R} R(z)dz \right| \leq cR^{-2}\pi R \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Тем самым доказана формула (1), где вычеты берутся по всем полюсам функции $R(z)$ лежащим в верхней полуплоскости.

Аналогично доказывается формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_{z_k, \text{Im}z_k < 0} \text{res}R(z). \quad (3)$$

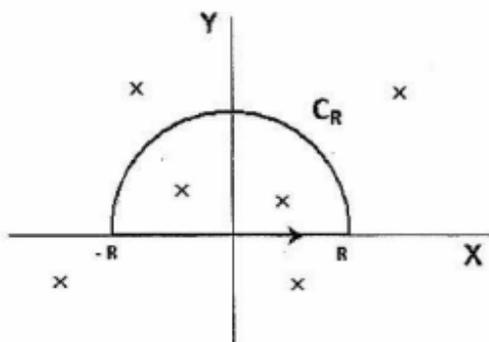


Рис. 1. Контур интегрирования C_R , используемый для доказательства формулы (1). Крестиками на рисунке показаны особые точки функции $R(z)$ в комплексной плоскости $Z=X+iY$

2. Доказать, что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)dx = 2\pi i \sum_{z_1, \text{Im}z_1 > 0} \text{res}(e^{i\alpha z} R(z)) + \frac{1}{2} 2\pi i \sum_{x_k, \text{Im}x_k = 0} \text{res}(e^{i\alpha z} R(z)), \quad (4)$$

где $\text{Im}\alpha > 0$, $R(z)$ обладает следующими свойствами:

1. в верхней полуплоскости она имеет конечное число особых точек z_1, z_2, \dots, z_k ;
2. аналитична во всех точках действительной оси, кроме точек x_1, x_2, \dots, x_k , являющихся простыми полюсами;
3. $R(z) \rightarrow 0$, если $z \rightarrow \infty$ и $\text{Im}z \geq 0$.

Интеграл в формуле (4) понимается в смысле главного значения.

Для доказательства формулы (4) рассмотрим в комплексной плоскости z контур Γ_R и вычислим интеграл от функции $e^{i\alpha z} R(z)$ по этому контуру.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} R(z)dz &= \int_{-R}^{x_1-\epsilon} e^{i\alpha x} R(x)dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} e^{i\alpha x} R(x)dx + \dots + \\ &+ \int_{x_k+\epsilon}^R e^{i\alpha x} R(x)dx + \int_{C_1} e^{i\alpha z} R(z)dz + \dots + \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z)dz = \\ &= 2\pi i \sum_{z_1} \text{res}(e^{i\alpha z} R(z)) + 2\pi i \sum_{x_1} \text{res}(e^{i\alpha z} R(z)) \end{aligned} \quad (5)$$

Оценим интеграл по полуокружности C_R :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z) dz \right| &\leq \int_{C_R} R d\phi |R(z)| e^{-\alpha R \sin \phi} \leq \\ &\leq \max |R(z)| R \int_0^\pi d\phi e^{-\alpha R \sin \phi} \leq 2 \max |R(z)| R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi e^{-2R \frac{\alpha}{\pi} \phi} = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \max |R(z)| \rightarrow 0, \quad pR \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались тем, что на C_R $z = Re^{i\phi}$, $dz = iRe^{i\phi} d\phi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R \cos \phi + iR \sin \phi)}| = e^{-\alpha R \sin \phi},$$

и неравенством:

$$\sin \phi \geq \frac{2}{\pi} \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Имея ввиду, что

$$\int_{C_i} e^{i\alpha z} R(z) dz = \frac{1}{2} \operatorname{res}_{z=x_i} (e^{i\alpha z} R(z)) \cdot 2\pi i,$$

получим окончательно формулу (4).

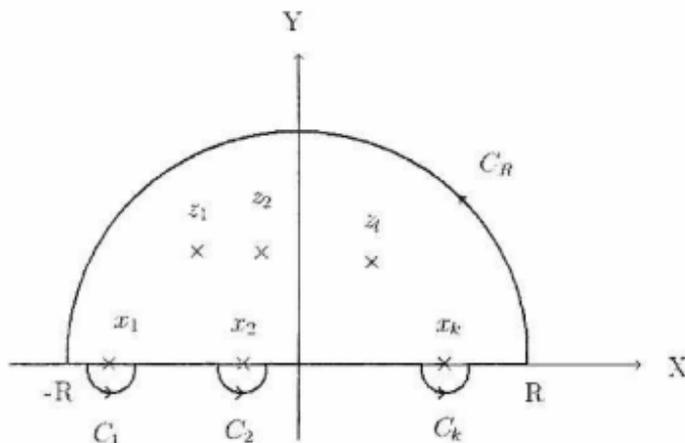


Рис. 2. Контур интегрирования C_R , используемый для доказательства формулы (4). Крестиками на рисунке показаны особые точки функции $R(z)$ в верхней полуплоскости (z_1, z_2, \dots, z_k) и на вещественной оси x_1, x_2, \dots, x_k комплексной плоскости $Z = X + iY$

2.1.2 Аудиторные задачи

Вычислить интегралы:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}. \quad \text{Ответ: } -\frac{\pi}{27}$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad (a \geq 0). \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{4a}.$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad (n - p). \quad \text{Ответ: } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 3) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n - 2) 2},$$

если $n > 1$; $\frac{\pi}{2}$, если $n = 1$.

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad (a > 0, b > 0). \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{ab(a + b)}.$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx. \quad \text{Ответ: } \pi i, \text{ если } t > 0; \quad 0, \text{ если } t = 0; \quad -\pi i, \text{ если } t < 0.$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}. \quad \text{Ответ: } \pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3).$$

2.1.3 Задачи для самостоятельного решения

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 4)(x - 1)}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{5}(\cos 1 - \frac{1}{e^2}).$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + 1} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3} \left[\sin |t| + e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}} \left(\sin \left| \frac{t}{2} \right| + \sqrt{3} \cos \frac{t}{2} \right) \right].$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + x^2 + 1} dx, \quad a > 0. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3} \left[2 \sin \frac{a}{2} - \sin \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right] e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^3 + 13x)}{x^4 + 13x^2 + 36} \sin x dx. \quad \text{Ответ: } \pi(e^{-2} + e^{-3}).$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x)}{x^4 + 10x^2 + 9} \sin x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{2}(e^{-1} + e^{-3}).$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{5\pi}{12}.$$

7. Пусть $R(\xi, \eta)$ - рациональная функция и пусть функция $R(\cos \phi, \sin \phi)$ не имеет полюсов на действительной оси. Доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (6)$$

8. Пусть $f(z)$ периодическая функция с периодом 2π , мероморфная в полуплоскости $Im z > -\eta$, $\eta > 0$. Предположим, что функция $f(z)$ не имеет полюсов на границе полуплоскости $Im z > 0$, $|Re z| < \pi$, а внутри её имеет полюсы в точках $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ и только в них. Доказать, что если функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(z) \rightarrow A \neq \infty$ при $Im z \rightarrow \infty$, то имеет место формула

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi = 2\pi A + 2\pi i \sum_{k=1}^n res_{a_k} f(z). \quad (7)$$

Указание. Применить теорему о вычетах к функции $f(z)$ в прямоугольнике $|Re z| < \pi$, $0 < Im z < R$, а затем перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$. Учтеть, что в силу периодичности функции $f(z)$ интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника взаимно уничтожаются.

9. Пусть выполнены условия задачи N8, за исключением того, что функция $f(z)$ имеет ещё и полюсы b_1, b_2, \dots, b_m , лежащие на интервале $(-\pi, \pi)$. Доказать формулу:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi = 2\pi A + 2\pi i \sum_{k=1}^n res_{a_k} f(z) + \pi i \sum_{k=1}^m res_{b_k} f(z) \quad (8)$$

(в предположении, что интеграл существует).

$$10. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{5 + 3 \cos \phi}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{2}.$$

$$11. \int_0^{\pi} \frac{\cos^4 \phi}{1 + \sin^2 \phi} d\phi. \quad \text{Ответ: } 2\pi(\sqrt{2} - \frac{5}{4}).$$

$$12. \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(a + \sin \phi)}, \quad a > 1. \quad \text{Ответ: } \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

$$13. \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \phi}{1 - a \sin^2 \phi} d\phi, \quad 0 < a < 1. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{a}(1 - \sqrt{1-a}).$$

2.2 Вычисление определенных интегралов

Литература по теме:

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982.

2.2.1 Примеры задач с решениями

1. Доказать, что интеграл

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{z_k, k=1}^n \operatorname{res}[z^{\alpha-1} R(z)], \quad (9)$$

где α - нецелое действительное число, $R(z)$ - рациональная функция, которая имеет полюса z_k , не лежащие на полуоси $(0, \infty)$, причем

$$\lim_{z \rightarrow 0} [|z|^{\alpha} R(z)] = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{\alpha} R(z) = 0. \quad (10)$$

Можно считать, что точка $z=0$ не является ни нулем, ни полюсом функции $R(z)$.

При таком предположении относительно поведения $R(z)$ в нуле первое из условий (6) имеет место только в том случае, когда $\alpha > 0$. Рассмотрим второе из условий (6). Заметим, что для функции $R(z)$ справедлива асимптотическая формула

$$R(z) \sim \frac{A}{z^k}, \quad (z \rightarrow \infty, A \neq 0, k > 0), \quad (11)$$

и, следовательно, второе из условий (6) выполняется тогда и только тогда, когда $k - \alpha > 0$. Таким образом, интеграл (5), где $R(z)$ - рациональная функция, не имеющая полюсов на действительной полуоси $[0, \infty)$ и такая, что $R(0) \neq 0$, сходится тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < k$, где k определяется из асимптотической формулы (7). Из этих условий следует, что $R(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Чтобы воспользоваться теорией вычетов при вычислении интеграла (6), продолжим аналитически подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Пусть D - плоскость с разрезом $[0, \infty)$. Выделим в области D регу-

лярную ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, положительную на верхнем берегу разреза. Обозначим эту ветвь символом $z^{\alpha-1}$, так что $h(z) = z^{\alpha-1}$

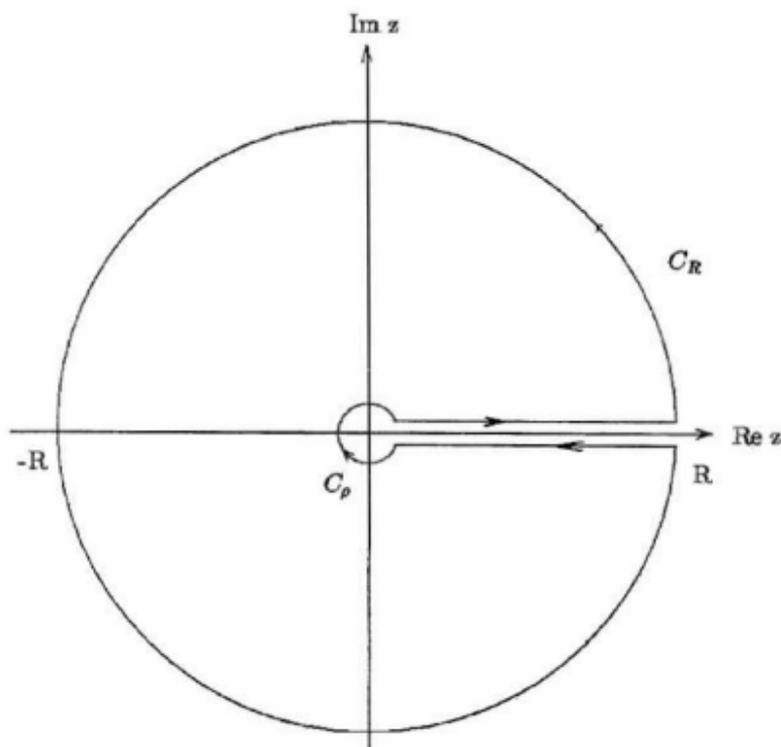


Рис. 3. Контур интегрирования C_R , используемый для доказательства формулы (9)

В области D имеем $z = re^{i\phi}$, где $r = |z|$, $\phi = \arg z$, $0 < \phi < 2\pi$ и, следовательно,

$$h(z) = z^{\alpha-1} = (re^{i\phi})^{\alpha-1} = r^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)\phi}, 0 < \phi < 2\pi. \quad (12)$$

На верхнем берегу разреза $\phi = 0$, так что

$$h(x + i0) = h(x) = x^{\alpha-1} > 0 \quad (x > 0). \quad (13)$$

Если же точка z лежит на нижнем берегу разреза, т.е. $z = \tilde{x} = x - i0$ ($x > 0$), то $\phi = 2\pi$ и $h(x - i0) = h(\tilde{x}) = x^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}$ или

$$h(\tilde{x}) = h(x)e^{2\pi i\alpha}, h(x) > 0 \quad (x > 0). \quad (14)$$

Обозначим $f(z) = h(z)R(z) = z^{\alpha-1}R(z)$. Тогда $f(\bar{x}) = h(\bar{x})R(x) = e^{2\pi i\alpha}f(x)$. Для доказательства формулы (6) рассмотрим в комплексной плоскости контур Γ (см. рис.3), состоящий из окружностей $C_\rho: |z| = \rho$, $C_R: |z| = R$ и отрезков $[\rho, R]$, $[R, \rho]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза. Пусть $R > 0$ настолько велико, а $\rho > 0$ настолько мало, что внутри контура Γ лежат все полюсы функции $R(z)$. Тогда по теореме о вычетах имеем

$$I_\Gamma = \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{res}(z^{\alpha-1}R(z)),$$

где сумма берется по всем полюсам функции $R(z)$. С другой стороны данный интеграл представляется в виде суммы четырех интегралов

$$I_\Gamma = \int_\rho^R f(x)dx + \int_R^\rho f(\bar{x})dx + \int_{C_\rho} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz.$$

Пусть $M(\rho) = \max|f(z)|$ на C_ρ , $M(R) = \max|f(z)|$ на C_R . Оценим интегралы по C_ρ, C_R .

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)dz \right| \leq M(\rho)2\pi\rho,$$

$$M(\rho) = \max|z^{\alpha-1}R(z)| = \rho^{\alpha-1}\max|R(z)|, \quad z \in C_\rho.$$

Поэтому $M(\rho) \cdot \rho = \rho^\alpha \max|R(z)| \rightarrow 0$, при $\rho \rightarrow 0$. Аналогичная оценка имеет место и для второго интеграла по C_R . Переходя в интеграле I_Γ к пределу $R \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$ мы получим формулу (6).

2. Доказать, что

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha R(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \left(\sum_{z_k, k=1}^n \text{res}f(z) + \text{res}f(z)_{z=\infty} \right), \quad (15)$$

где α - действительное нецелое число ($-1 < \alpha < 1$), $R(x)$ - рациональная функция, не имеющая полюсов на отрезке $[0,1]$, z_k - конечные полюсы функции $R(z)$, $f(z) = [z/(1-z)^\alpha]R(z) = h(z)R(z)$.

Пусть D - плоскость с разрезом по отрезку $[0,1]$. Выделим в этой области регулярную ветвь $h(z)$ функции $(z/1-z)^\alpha$ положительную на верхнем берегу разреза $z=x+i0$, $0 < x < 1$:

$$h(x+i0) = h(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha > 0.$$

Найдем функцию $h(z)$ на нижнем берегу разреза, когда $z = \bar{x} = x - i0$:

$$h(z) = \left| \frac{z}{1-z} \right|^\alpha e^{i\alpha(\phi_1 - \phi_2)},$$

где ϕ_1 - аргумент z , ϕ_2 - аргумент $(1-z)$ на нижнем берегу разреза: $\phi_1 = 2\pi, \phi_2 = 0$.

$$h(\bar{x}) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha e^{2\pi i \alpha} = h(x)e^{2\pi i \alpha}. \quad (16)$$

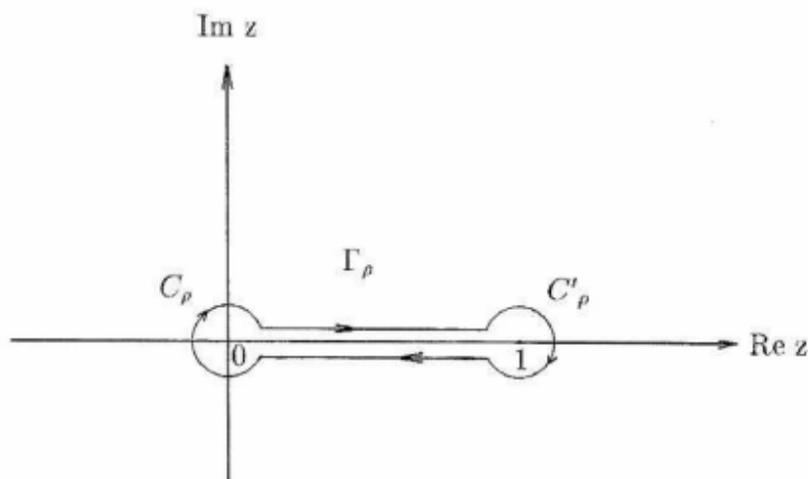


Рис. 4. Контур интегрирования Γ_ρ , необходимый для доказательства формулы (15)

Для доказательства формулы (15) рассмотрим в комплексной плоскости контур Γ_ρ (см. рис. 4), который состоит из окружностей $C_\rho: |z| = \rho$, и $C'_\rho: |z - 1| = \rho$ и отрезков $l_1: \rho \leq x \leq 1 - \rho$, $l_2: \rho \leq x \leq 1 - \rho$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза.

По теореме о вычетах имеем

$$I_\rho = \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{z_k, k=1}^n \operatorname{res} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \right), \quad (17)$$

где ρ выбрано столь малым, что все полюсы функции $R(z)$ лежат вне контура Γ_ρ . С другой стороны этот же интеграл можно представить в виде:

$$I_\rho = \int_{C_\rho} f(z) dz + \int_\rho^{1-\rho} f(x) dx + \int_{C'_\rho} f(z) dz + \int_{1-\rho}^\rho f(\bar{x}) dx. \quad (18)$$

Оценим интегралы по окружностям C_ρ, C'_ρ . По условию функция $R(z)$ регулярна в точке $z=0$, поэтому при малых z $|R(z)| \leq M$. Также имеем

$$|h(z)| = \frac{|z|^\alpha}{|1-z|^\alpha} \leq M_1 |z|^\alpha, \quad z.$$

Поэтому если $z \in C_\rho$, то $|f(z)| = |h(z)| \cdot |R(z)| \leq MM_1|z|^\alpha = MM_1\rho^\alpha$.
Поэтому

$$M(\rho) = \max|f(z)| \leq M_2 \cdot \rho^\alpha, \quad \text{а} \quad \rho M(\rho) \leq M_2\rho^{\alpha+1} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \alpha + 1 > 0.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{C_\rho} f(z) dz \right| \leq M_2\rho^{\alpha+1} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Аналогично доказывается, что интеграл по второй окружности также стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Поэтому, переходя в (18) к пределу $\rho \rightarrow 0$, получим формулу (15).

Найдем вычет в точке $z = \infty$, предполагая, что функция $R(z)$ регулярна в этой точке, т.е.

$$R(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| > R. \quad (19)$$

Разложим $h(z) = (z/(1-z))^\alpha$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$h(z) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right)^\alpha \cdot (-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha} = e^{i\pi\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{z} + \dots\right). \quad (20)$$

Следовательно, при $|z| > R$

$$f(z) = e^{i\pi\alpha} \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{z} + \dots \right) = e^{i\pi\alpha} \left(c_0 + \frac{c_1 + c_0\alpha}{z} + \dots \right), \quad (21)$$

откуда получим значение необходимого вычета:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi} (\alpha c_0 + c_1). \quad (22)$$

Аналогично доказывается и формула более общего вида:

$$I = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^\alpha R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \left(\sum_{z_k} \operatorname{res} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \right), \quad (23)$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi} [\alpha c_0(b-a) + c_1].$$

2.2.2 Аудиторные задачи

Вычислить интегралы:

$$1. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{(1+x)^2}, \quad (-1 < p < 2). \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{\sin p\pi} \left[2^p \left(1 - \frac{p}{2}\right) - 1 \right].$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx, \quad (-1 < p < 2). \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{\sin p\pi} \left(\sin \frac{p\pi}{2} + \cos \frac{p\pi}{2} - 1 \right).$$

$$3. \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a}, \quad (-1 < p < 1, a > 0). \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{\sin p\pi} \left[1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^p\right].$$

$$4. \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{4}.$$

$$5. \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4)x^{1/3}}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{-4/3}$$

2.2.3 Задачи для самостоятельного решения

$$1. \int_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3} dx. \quad \text{Ответ: } \pi(4 - \sqrt{15}).$$

2. Пусть рациональная функция $f(z)$ имеет на положительной части действительной оси полюсы лишь первого порядка b_1, b_2, \dots, b_m , а среди других ее полюсов a_1, a_2, \dots, a_n нет равного нулю. Пусть далее p -такое действительное число, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^{p+1} f(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{p+1} f(z)] = 0.$$

Доказать, что:

а. Если p - нецелое число, то

$$\int_0^\infty x^p f(x) dx = -\frac{\pi}{\sin \pi p} e^{-\pi p i} \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[z^p f(z)]_{a_k} - \pi \operatorname{ctg} \pi p \sum_{k=1}^m b_k^p \operatorname{res}[f(z)]_{b_k}. \quad (24)$$

б. Если p - целое число, то

$$\int_0^\infty x^p f(x) dx = -\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[z^p \ln(z) f(z)]_{a_k} - \sum_{k=1}^m b_k^p (\ln(b_k) + \pi i) \operatorname{res}[f(z)]_{b_k}, \quad (25)$$

где $\ln(z) = \ln|z| + i \operatorname{arg}(z)$ и $0 \leq \operatorname{arg}(z) < 2\pi$.

$$3. \int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}. \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$4. \int_0^\infty \frac{\sin(\ln(x))}{x^2 + 4} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi \sin(\ln 2)}{4 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}.$$

5. Пусть рациональная функция $R(z)$ имеет при $a < z < b$ полюсы в точках b_1, b_2, \dots, b_m и удовлетворяет условиям

$$R(z) = O((z-a)^{-p}) \quad (z \rightarrow a); \quad R(z) = O((z-b)^q) \quad (z \rightarrow b),$$

где p, q - некоторые числа ($p < q$). В предположении, что интеграл существует, доказать формулу

$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1} R(x) dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \sum_{k=1}^n \operatorname{res} R(z) \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha-1} + \pi \sum_{k=1}^m \operatorname{res} R(z)_{b_k} \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1}, \quad (26)$$

где $p < \operatorname{Re} \alpha < q$. Первая сумма вычетов берется по всем полюсам функции $R(z)$, лежащим вне отрезка $[a, b]$, и при вычислении входящих в неё вычетов берется ветвь функции $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha-1}$, отвечающая значениям $-\pi < \arg \frac{z-a}{z-b} < \pi$. Во второй сумме $\arg \frac{z-a}{z-b} = 0$.

$$6. \int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x+2} dx.$$

$$\text{Ответ: } \pi \left(\frac{7}{2} - \sqrt{12} \right).$$

$$7. \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} dx.$$

$$\text{Ответ: } \pi \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

$$8. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{3x-x^2-2}}.$$

$$\text{Ответ: } 3\pi \cdot 2^{-\frac{5}{2}}.$$

$$9. \int_0^1 \sqrt{x^3-x^4} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{16}.$$

$$10. \int_0^3 \frac{[x^3(3-x)]^{\frac{1}{4}}}{5-x} dx.$$

$$\text{Ответ: } \pi \sqrt{2} \left(\frac{17}{4} - 250^{\frac{1}{4}} \right).$$

2.3 Вычисление определенных интегралов (продолжение)

Литература по теме:

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1992.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982.

2.3.1 Примеры задач с решениями

1. Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x) dx, \quad (27)$$

где α действительное число, $m \geq 1$ целое, $R(z)$ - рациональная функция, которая имеет полюса z_k , не лежащие на полуоси $(0, \infty)$, причем

$$\lim_{z \rightarrow 0} [|z|^{\alpha} R(z)] = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{\alpha} R(z) = 0. \quad (28)$$

Можно считать, что точка $z=0$ не является ни нулем, ни полюсом функции $R(z)$. Интеграл (27) можно вычислить непосредственно с помощью вычетов. Пусть D -плоскость с разрезом $[0, \infty)$, $h(z)=z^{\alpha-1}$ регулярная ветвь функции $z^{\alpha-1}$ в области D , положительная на верхнем берегу разреза. Фиксируем регулярную ветвь логарифма, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза; обозначим ее $\ln z$. Тогда в области D

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Тогда на верхнем берегу разреза $z=x+i0$ ($x > 0$), $\arg z=0$ и $\ln(x+i0)=\ln x$. На нижнем берегу разреза $z=x-i0=\bar{x}$ ($x > 0$), $\arg z=2\pi$ и $\ln(x-i0)=\ln \bar{x} = \ln x + 2\pi i$. Обозначим $f(z) = h(z)(\ln z)^m R(z) = z^{\alpha-1}(\ln z)^m R(z)$; тогда $f(x+i0) = f(x) = x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)$ подинтегральная функция в (27), а значение функции на нижнем берегу разреза равно:

$$f(x-i0) = f(\bar{x}) = e^{2\pi i \alpha} x^{\alpha-1} (\ln x + 2\pi i)^m R(x).$$

Рассмотрим интеграл

$$I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad (29)$$

где Γ - контур, указанный на рис.3. Если выполнены условия (28), тогда интегралы по C_R и C_ρ стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$. Тогда как и при вычислении интеграла (9) имеем:

$$\int_0^\infty [f(x) - f(\hat{x})]dx = 2\pi i \sum_{z_k} \text{res} f(z), \quad (30)$$

где вычеты берутся по полюсам рациональной функции $R(z)$. Рассмотрим два возможных случая применения формулы (30).

1. Число α нецелое.

Тогда левая часть (30) содержит $I(1 - e^{2\pi i \alpha})$, а также (при $m > 1$) интегралы вида:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^s R(x) dx, \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

В частности при $m=1$ из (30) имеем

$$(1 - e^{2\pi i \alpha})I - 2\pi i e^{2\pi i \alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x) dx = 2\pi i \sum_{z_k, k=1}^n \text{res} (z^{\alpha-1} R(z) \ln z). \quad (31)$$

Из этой формулы можно непосредственно найти как интеграл I , так и интеграл

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x) dx.$$

2. Число α - целое.

Тогда исходный интеграл (17) имеет вид:

$$\int_0^\infty (\ln x)^m R(x) dx, \quad (32)$$

В этом случае в качестве подинтегральной функции в (30) нужно взять $(\ln z)^{m+1} R(z)$, а не $(\ln z)^m R(z)$. Тогда из формулы (30) следует:

$$\int_0^\infty [(\ln x)^{m+1} R(x) - (\ln x + 2\pi i)^{m+1} R(x)] dx = 2\pi i \sum_{z_k} \text{res} [(\ln z)^{m+1} R(z)]. \quad (33)$$

При $m=1$ получим:

$$-\int_0^\infty 4\pi i \cdot \ln x \cdot R(x) dx + 4\pi^2 \int_0^\infty R(x) dx = 2\pi i \sum_{z_k} \text{res} [(\ln z)^2 R(z)]. \quad (34)$$

Приравнивая в этом выражении мнимые части, имеем:

$$\int_0^\infty \ln x \cdot R(x) dx = -\frac{1}{2} \text{Re} \sum_{z_k} \text{res} [(\ln z)^2 R(z)]. \quad (35)$$

При $m=0$ из (30) получим другую важную формулу (α - целое):

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x) dx = -\sum_{z_k} \text{res} [z^{\alpha-1} \cdot \ln z \cdot R(z)]. \quad (36)$$

2.3.2 Аудиторные задачи

Вычислить интегралы:

$$1. \int_0^{\infty} \sqrt{x} \ln x \frac{dx}{(x+1)^2}. \quad \text{Ответ: } \pi.$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx, a > 0. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^2 + a^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{8a} (\pi^2 + 4 \cdot \ln^2 a).$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}} \left(\frac{3}{2} \ln a - 1 - \frac{3\pi}{4} \right).$$

2.3.3 Задачи для самостоятельного решения

$$1. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)\sqrt{x}} dx. \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \cdot dx}{x^{\frac{1}{3}}(x+1)^2}. \quad \text{Ответ: } 2\pi \left(\frac{\pi}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \cdot dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x}}. \quad \text{Ответ: } -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}.$$

4. Пусть $R(z)$ - рациональная функция, не имеющая полюсов при $z > 0$, и пусть интеграл

$$I_{\alpha} = \int_0^{\infty} R(x)x^{\alpha-1} \ln(x) dx, \quad (\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (37)$$

сходится. Доказать формулу:

$$I_{\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \sum \operatorname{res} R(z) (-z)^{\alpha-1} \ln(-z) - \frac{\pi^2 \cos \pi \alpha}{\sin^2 \pi \alpha} \sum \operatorname{res} R(z) (-z)^{\alpha-1}, \quad (38)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $R(z)$, не лежащим на луче $[0, \infty]$, а $-\pi < \arg(-z) < \pi$.

$$5. \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)\sqrt{x}} dx. \quad \text{Ответ: } \pi^2.$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(x)}{\operatorname{ch}(x)} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi^3}{8\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\operatorname{th}^2\frac{\pi}{2}\right).$$

7. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на положительной части действительной оси и в точке $z=0$, причем $f(z)=O(1/z)$ при $z \rightarrow \infty$. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x) dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{\ln(z) - \pi i} \right]_{z=a_k}, \quad (39)$$

где $a_1 = -1$, а a_2, a_3, \dots, a_n — полюсы функции $f(z)$, отличные от -1 , и $\ln(z) = \ln|z| + i \operatorname{arg}(z)$, $0 \leq \operatorname{arg}(z) < 2\pi$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\ln(z) - \pi i} dz,$$

где контур C указан на рис.3.

$$8. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x + \pi^2)}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{1-a} + \frac{1}{\ln(a)} \quad (p \ a = 1, I = \frac{1}{2}).$$

$$9. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + \pi^2)}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{2a(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4})} - \frac{1}{1+a^2}.$$

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{(x^2 + \pi^2)\operatorname{ch} x}. \quad \text{Ответ: } 1.$$

3 Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

3.1 Решение дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности обыкновенной точки, регулярной особой точки дифференциального уравнения

Литература по теме:

1. Ли Цзун Дао Математические методы в физике.- М.: Мир, 1965.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.- М.: Высшая школа, 1989.
3. Найфэ А. Введение в методы возмущений.-М.: Мир, 1982.

3.1.1 Примеры задач с решениями

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + x \cdot y' + 2y = 0. \quad (40)$$

Построим два линейно независимых решения этого уравнения вблизи начала координат. Точка $x=0$ является обыкновенной точкой данного дифференциального уравнения. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (41)$$

где a_n - неизвестные коэффициенты этого ряда. Продифференцируем ряд (.) по x

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}, \quad (42)$$

и подставим производные в исходное уравнение:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, \quad (43)$$

Следующий шаг заключается в том, чтобы приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x . Для этого сделаем замену индекса суммирования n таким образом, чтобы степени x под знаком каждой суммы оказались одинаковыми, а именно положим $n=m+2$ в первой сумме и $n=m$ во второй и

третьей суммах. В результате находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty} ma_mx^m + 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_mx^m = 0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+1)(m+2)a_{m+2} + (m+2)a_m]x^m = 0.$$

Далее, приравняв нулю коэффициенты при x^m , получим рекуррентное соотношение вида:

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

При этом из (44) следует, что

$$a_2 = -a_0, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{3},$$

$$a_5 = \frac{a_1}{2 \cdot 4}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{3 \cdot 5}, \dots$$

Таким образом, коэффициенты a_n с четными и нечетными индексами оказываются не связанными друг с другом: все четные коэффициенты выражаются через a_0 , а все нечетные - через a_1 . В результате мы имеем два линейно независимых решения, в одно из которых входит множителем коэффициент a_0 , а в другое - коэффициент a_1 . Следовательно, общее решение уравнения (40) можно представить в виде:

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x), \quad (45)$$

где

$$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{3 \cdot 5} + \frac{x^8}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m m! x^{2m}}{(2m)!}, \quad (46)$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^m m!} = xe^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (47)$$

Ясно, что ряд в (47) сходится, так как мы смогли записать его сумму в замкнутой форме. Применяя теперь признак Даламбера к ряду (46), имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{(m-1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-2)^m m! x^{2m} (2m-2)!}{(2m)! (-2)^{m-1} (m-1)! x^{2m-2}} = 0, \quad (48)$$

и, следовательно, ряд (46) также сходится для всех значений x .

2. Построить два линейно независимых решения уравнения Бесселя первого порядка

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1)y(x) = 0. \quad (49)$$

Точка $x=0$ есть регулярная особая точка этого уравнения. Поэтому уравнение (49) обладает двумя решениями в так называемой форме Фробениуса:

$$y(x) = x^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n}. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (49), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\sigma+n)^2 - 1] a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0. \quad (51)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях $x^\sigma, x^{\sigma+1}$, получим *определяющие уравнения* для нахождения *характеристического показателя* σ .

$$(\sigma^2 - 1)a_0 = (\sigma - 1)(\sigma + 1)a_0 = 0, \quad (52)$$

$$[(\sigma + 1)^2 - 1]a_1 = \sigma(\sigma + 2)a_1 = 0. \quad (53)$$

При этом соотношение (51) принимает вид:

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(\sigma+n)^2 - 1] a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0. \quad (54)$$

Для того, чтобы привести показатели степени x в каждой сумме к одинаковому виду, положим $n=m+2$ в первой сумме и $n=m$ - во второй. В результате получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{[(\sigma+m+2)^2 - 1]a_{m+2} + a_m\} x^{\sigma+m+2} = 0. \quad (55)$$

Приравнивание коэффициентов при последовательных степенях x приводит к рекуррентному соотношению:

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(\sigma+m+1)(\sigma+m+3)}. \quad (56)$$

Из формулы (52) следует, что при $a_0 \neq 0$ показатель σ равен ± 1 . Тогда из (53) находим, что $a_1 = 0$ и, следовательно, $a_3 = a_5 = a_7 = \dots a_{2n+1} = \dots = 0$. Полагая в (56) $\sigma = -1$, имеем

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{m(m+2)}. \quad (57)$$

Если положить теперь в формуле (57) $m=0$, то коэффициент a_2 оказывается равным бесконечности. Таким образом, описанная выше методика не позволяет получить решение при $\sigma = -1$.

В случае, когда $\sigma = 1$, из рекуррентной формулы (56) следует, что

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(m+2)(m+4)}. \quad (58)$$

Поэтому

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}, \dots \quad (59)$$

и, следовательно,

$$y_1(x) = J_1(x) = a_0 x \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right]. \quad (60)$$

Построенный ряд представляет собой одно из решений уравнения 49); при $a_0 = \frac{1}{2}$ он обычно называется функцией Бесселя 1-го рода первого порядка и обозначается через $J_1(x)$.

Для того, чтобы найти второе линейно независимое решение уравнения (49), можно воспользоваться следующим приемом. Выразим коэффициенты a_m через a_0 , не подставляя соответствующие значения σ . Тогда из формулы (56) имеем

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\sigma+1)(\sigma+3)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)},$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2(\sigma+7)}, \dots$$

и, следовательно,

$$y(x) = x^\sigma \left[a_0 - \frac{a_0 x^2}{(\sigma+1)(\sigma+3)} + \frac{a_0 x^4}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)} - \frac{a_0 x^6}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2(\sigma+7)} + \dots \right]. \quad (61)$$

Как и ранее, если положить в этом разложении $\sigma = -1$, то соответствующие коэффициенты обратятся в бесконечность ввиду наличия в их знаменателях множителя $(\sigma+1)$. Для того, чтобы обойти это затруднение, выберем a_0 равным $b(\sigma+1)$. При этом из разложения (50) имеем

$$y(x) = bx^\sigma \left[(\sigma+1) - \frac{x^2}{\sigma+3} + \frac{x^4}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)} - \frac{x^6}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2(\sigma+7)} + \dots \right], \quad (62)$$

откуда после подстановки в дифференциальное уравнение (49) находим

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - 1)y(x) = b(\sigma+1)(\sigma-1)x^\sigma. \quad (63)$$

Наличие множителя $(\sigma+1)^2$ в правой части (63) приводит к тому, что функции $y(x)$ и $\partial y / \partial \sigma$ должны удовлетворять исходному дифференциальному

уравнению при $\sigma = -1$. Поэтому, дифференцируя (63) по σ и принимая $b=1$ имеем

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \quad (64)$$

$$= y \ln x + x^\sigma \left[1 + \frac{x^2}{(\sigma+3)^2} - \left[\frac{2}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)} + \frac{1}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2} \right] x^4 + \dots \right],$$

откуда, полагая $\sigma = -1$, находим

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{5x^4}{2^2 4^2} + \dots \right]. \quad (65)$$

Таким образом, разложения (60), (65) представляют собой два линейно независимых решения уравнения (.). Используя признак Даламбера, можно легко показать, что построенные для y_1 и y_2 ряды сходятся при любых значениях x .

3.1.2 Аудиторные задачи

1. Построить два линейно независимых решения в окрестности точки $x=0$ следующих уравнений:

$$a) \quad y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 0,$$

$$b) \quad y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0.$$

2. Рассмотреть уравнение Эрмита

$$y''(x) - 2xy'(x) + \gamma y(x) = 0.$$

Найти два линейно независимых частных решения этого уравнения, представляя их в виде степенных рядов в окрестности точки $x=0$, и показать, что один из них вырождается в конечную сумму в случае, если $\gamma=2n$, где $n=0,1,2,\dots$.

3. Рассмотреть уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \gamma y(x) = 0,$$

Построить два линейно независимых решения этого уравнения, представляя их в виде степенных рядов в окрестности точки $x=0$, и показать, что один из

них вырождается в конечную сумму в случае, если $\gamma = n(n-1)$, где $n=0,1,2,\dots$

4. Построить два линейно независимых решения уравнения Чебышева

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \gamma y(x) = 0,$$

представляя их в виде степенных рядов в окрестности точки $x=0$, и показать, что один из них вырождается в конечную сумму в случае, если $\gamma = n^2$, где $n=0,1,2,\dots$

5. Для следующего уравнения построить два линейно независимых решения, представляя их в виде соответствующих степенных рядов в окрестности точки $x=0$:

$$9x(1-x)y''(x) - 12y'(x) + 4y(x) = 0.$$

3.1.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, представляя их в окрестности точки $x=0$ в виде степенных рядов:

a) $2x(1-x)y''(x) + (1-x)y'(x) + 3y(x) = 0.$

b) $x^2y''(x) + x^2y'(x) - 2y(x) = 0.$

2. Рассмотреть модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка

$$xy''(x) + y'(x) - xy(x) = 0.$$

Показать, что в окрестности точки $x=0$ оно имеет следующее ограниченное решение

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Найти второе линейно независимое решение этого уравнения.

3. Рассмотреть уравнение Бесселя порядка ν

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$$

Показать, что одно из решений этого уравнения есть

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (66)$$

Показать, что в случае, когда ν отлично от целого числа, решением этого уравнения служит также функция

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{n! \Gamma(-\nu + n + 1)}. \quad (67)$$

4. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, представляя их в окрестности точки $x=0$ в виде степенных рядов:

a) $(2x + x^2)y''(x) + y'(x) - 6xy(x) = 0.$

b) $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 4)y(x) = 0.$

4 Мероморфные функции

4.1 Разложение мероморфных функций в ряды простейших дробей и в бесконечные произведения

Литература по теме:

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – М, 1950.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982.

4.1.1 Примеры задач с решениями

1. Пусть все полюсы z_k ($k=1,2,\dots$) мероморфной функции $f(z)$, регулярной в точке $z=0$, являются простыми и занумерованы в порядке неубывания их модулей: $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$. Пусть имеется последовательность контуров Γ_n ($n=1,2,\dots$), вложенных друг в друга, содержащих точку $z=0$ и таких, что:

$$\frac{S_n}{d_n} \leq C, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где S_n – длина контура Γ_n , d_n – расстояние от начала координат до кривой Γ_n , причем $d_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Если функция $f(z)$ ограничена на этой системе контуров Γ_n , т.е.

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \Gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда функция $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right), \quad A_k = \operatorname{res} f(z)_{z=z_k}, \quad (68)$$

который сходится равномерно в каждой ограниченной области с выколотыми в ней полюсами функции $f(z)$.

Для доказательства формулы (68) рассмотрим интеграл

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{zf(z)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta,$$

где $z \in G_n$ (G_n - внутренность кривой Γ_n) и $z \neq z_k$ ($k=1,2,\dots$). Пусть $F(\zeta) = zf(\zeta)/\zeta(\zeta - z)$.

В области G_n функция $F(\zeta)$ имеет простые полюсы $\zeta = z, \zeta = z_k \in G_n$; точка $\zeta = 0$ является либо простым полюсом, либо точкой регулярности (если $f(0)=0$) для функции $F(\zeta)$. По теореме о вычетах

$$I_n(z) = \operatorname{res}F(\zeta)_{\zeta=0} + \operatorname{res}F(\zeta)_{\zeta=z} + \sum_{z_k \in G_n} \operatorname{res}F(\zeta)_{\zeta=z_k}.$$

Вычисляя вычеты получим

$$\operatorname{res}F(\zeta)_{\zeta=0} = \left[\frac{zf(\zeta)}{\zeta - z} \right]_{\zeta=0} = -f(0),$$

$$\operatorname{res}F(\zeta)_{\zeta=z} = \left[\frac{zf(\zeta)}{\zeta} \right]_{\zeta=z} = f(z),$$

$$\operatorname{res}F(\zeta)_{\zeta=z_k} = \left[\frac{z}{\zeta(\zeta - z)} \right]_{\zeta=z_k} \operatorname{res}f(\zeta)_{\zeta=z_k}.$$

Тогда исходный интеграл I_n примет вид

$$I_n(z) = -f(0) + f(z) + \sum_{z_k \in G_n} \frac{A_k z}{z_k(z_k - z)}. \quad (69)$$

Оценим интеграл $I_n(z)$. Пусть D - ограниченная область. Тогда существует круг $K: |z| < R$ такой, что $D \subset K$. Имеем

$$|I_n(z)| < \frac{|z|}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta||\zeta - z|} |d\zeta|.$$

Здесь $|z| < R$ ($z \in D \subset K$), $|\zeta| \geq d_n$ (d_n - расстояние от начала координат до контура Γ_n), $|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| > d_n - R$, $|f(\zeta)| \leq M$. Следовательно,

$$|I_n(z)| \leq \frac{MR}{2\pi} \frac{1}{d_n(d_n - R)} S_n \leq \frac{CMR}{2\pi(d_n - R)},$$

так как $S_n \leq Cd_n$ по условию задачи. Таким образом, $I_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$ ($z \neq z_k, k=1,2,\dots$) и в пределе $n \rightarrow \infty$, получаем формулу (68). Суммирование в (68) проводится в следующем порядке: сначала берутся слагаемые, которые относятся к полюсам, лежащим внутри Γ_1 , затем к этим слагаемым последовательно добавляются группы слагаемых, относящихся к полюсам, лежащим между Γ_1 и Γ_2 , между Γ_2 и Γ_3 и т.д.

Замечание 1. Формулу (68) можно обобщить на случай когда

$$|f(z)| \leq M|z|^p, \quad z \in \Gamma_n (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где $p \geq 0$ - целое. В этом случае имеет место следующая формула:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{z_k^p} \right). \quad (70)$$

2. Пусть целая функция $f(z)$ такова, что мероморфная функция $F(z) = f'(z)/f(z)$ удовлетворяет условиям задачи 1. Тогда

$$f(z) = f(0)e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{\frac{z}{z_k}}, \quad B = \frac{f'(0)}{f(0)}. \quad (71)$$

Бесконечное произведение (71) равномерно сходится в каждой ограниченной части плоскости. В этой формуле каждый сомножитель $(1 - z/z_k)e^{z/z_k}$ повторяется столько раз, какова кратность нуля z_k .

Функция $F(z)$ имеет простые полюсы в точках z_k , где z_k нули функции $f(z)$, и не имеет других полюсов. Тогда $A_k = \text{res} F(z)_{z=z_k} = n_k$, где n_k кратность нуля z_k функции $f(z)$. Из формулы (68) задачи 1 имеем

$$F(z) = F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} \right). \quad (72)$$

Так как $F(z) = d[\ln f(z)]/dz$, то интегрируя ряд (72) по некоторой кривой, соединяющей точки $0, z$ и не проходящей через нули функции $f(z)$, получаем

$$\ln f(z) - \ln f(0) = F(0)z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) + \frac{z}{z_k} \right]. \quad (73)$$

Потенцируя (73), находим

$$f(z) = f(0)e^{F(0)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{\frac{z}{z_k}}, \quad (74)$$

и формула (71) доказана.

Замечание 2. В условиях указанных в замечании 1, формула (71) заменяется следующей формулой

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{h_k(z)}, \quad (75)$$

где $h_k(z) = z/z_k + z^2/(2z_k^2) + \dots + z^p/(pz_k^p)$,
 $g(z)$ - многочлен степени не выше p .

3. Доказать следующую формулу

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) \quad (76)$$

Для разложения синуса в бесконечное произведение рассмотрим целую функцию $f(z) = \sin(z)/z$, которая имеет простые нули в точках $z_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Далее функция $F(z) = f'(z)/f(z) = \operatorname{ctg}(z) - 1/z$ удовлетворяет условиям задачи 2 и для нее применима формула (71). Так как $f(z) = \sin z/z = 1 - z^2/3! + \dots$, то $f(0)=1$, $f'(0)=0$, и по формуле (71) находим

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z^2}{k^2\pi^2}} \right]. \quad (77)$$

Преобразуя это выражение, окончательно получаем формулу (76).

4.1.2 Аудиторные задачи

Доказать формулы:

$$1. \quad \frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}.$$

$$2. \quad \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z + \frac{1}{2} - n)^2}.$$

$$3. \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n}.$$

$$4. \quad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

$$5. \quad \operatorname{sh} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

4.1.3 Задачи для самостоятельного решения

Доказать формулы:

$$1. \quad \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi}{z^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}.$$

2. $tg z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}.$
3. $\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}.$
4. $\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2} \right).$
5. $th z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 + (\frac{z}{\pi n})^2}{1 + (\frac{z}{\pi(n-\frac{1}{2})})^2} \right].$
6. $ch z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4n^4 \pi^4} \right).$
7. $e^z - 1 = ze^{\frac{z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2 \pi^2} \right).$

5 Асимптотические оценки интегралов

5.1 Метод интегрирования по частям. Метод Лапласа

Литература по теме:

1. М.В.Федорюк, Асимптотика: Интегралы и ряды, М.: Наука, 1987 (Гл. 2,§1).
2. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1987 (Гл.5, §3, п.77, Гл.7, §2, п. 94, §3, п.97)
3. Ф.Олвер, Асимптотика и специальные функции, М.: Наука, 1990 (Гл.3, §§1,2,7).
4. А.Найфэ, Введение в методы возмущений, М.: Мир, 1984 (Гл.3, §§3.2, 3.3)
5. Г.Джеффрис, Б.Свирлс, Методы математической физики, М.: Мир, 1970 (т.3, Гл. 17).

5.1.1 Примеры задач с решениями

1. Найти асимптотику дополнительной неполной гамма-функции:

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x),$$

здесь $\Gamma(\alpha)$ гамма-функция Эйлера, $\gamma(\alpha, x)$ неполная гамма-функция.

Дополнительная неполная гамма-функция записывается в виде интеграла:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (1)$$

Решение

Асимптотику данного интеграла при $x \rightarrow \infty$ можно найти используя интегрирование по частям.

$$u = t^{\alpha-1}, \quad dv = e^{-t} dt, \quad \rightarrow \quad du = (\alpha - 1)t^{\alpha-2}, \quad v = -e^{-t} \quad (2).$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha, x) &= -t^{\alpha-1} e^{-t} \Big|_x^{\infty} + (\alpha-1) \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-2} dt = \\ &= e^{-x} x^{\alpha-1} + (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1, x)\end{aligned}$$

После n -кратного интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha, x) &= e^{-x} x^{\alpha-1} \left(1 + \frac{\alpha-1}{x} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{x^{n-1}} \right) + \varepsilon_n(x).\end{aligned}$$

здесь $\varepsilon_n(x)$ - остаточный член.

Окончательно для асимптотического разложения имеем:

$$\Gamma(\alpha, x) \sim e^{-x} x^{\alpha-1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k)}{x^k} \right] \quad (3)$$

Заметим, что полученный ряд может расходиться.

2. Найти асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$ интеграла:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega(x^2-2x)} \ln(1+x) dx. \quad (1)$$

Решение

Для нахождения асимптотики воспользуемся общей формулой для главного члена асимптотики в методе Лапласа:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \sim \left[-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)} \right]^{1/2} e^{\lambda S(x_0)} f(x_0). \quad (2)$$

В формуле (2) x_0 - точка единственного максимума функции $S(x)$ во внутренних точках отрезка $[a, b]$. Предполагается, что $S''(x_0) \neq 0$.

В нашем случае:

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1+x), \quad S(x) = -(x^2-2x), \\ x_0 &= 1, \quad a = 0, \quad b = \infty, \quad \lambda = \omega.\end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая (3), получаем из (2) главный член асимптотического разложения интеграла (1):

$$F(\omega) \sim \left[\frac{\pi}{\omega} \right]^{1/2} e^{\omega} \ln 2.$$

3) Найти асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$ интеграла:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega(x^2+2x)} (1+x)^{5/2} dx.$$

Решение

В данной задаче в отличие от предыдущей функция $S(x) = -(x^2 + 2x)$ достигает максимума не во внутренней точке, в граничной $x_0 = a = 0$, при этом $S'(a) \neq 0$. Для отыскания асимптотики воспользуемся общим выражением для главного члена асимптотики интеграла типа (2) из предыдущей задачи в данном случае:

$$F(\lambda) \sim \frac{e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \cdot f(a), \quad (1)$$

Используя обозначения (3) предыдущей задачи, получаем следующее выражение для асимптотики:

$$F(\omega) \sim -\frac{1}{2\omega}.$$

5.1.2 Аудиторные задачи

1) Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots \right].$$

2) Показать, что асимптотика интегрального косинуса имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt &\sim - \cos x \left[\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^8} - \dots \right] + \\ &+ \sin x \left[\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots \right]. \end{aligned}$$

3) Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega x^2}}{\sqrt{x+x^2}} dx \sim \frac{\Gamma(1/4)}{2\omega^{1/4}}.$$

Указание: воспользоваться леммой Ватсона (см., например, М.В.Федорюк, стр.57)

4) Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\int_1^2 e^{-x(t+1/t)} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{4x}} e^{-2x}.$$

5) Доказать формулу для асимптотики Γ -функции Эйлера:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}.$$

Записать формулу Стирлинга для факториала.

6) Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\infty} \exp(-t - xt^\alpha) t^{\beta-1} dt \sim \frac{\Gamma(\beta/\alpha)}{\alpha x^{\beta/\alpha}}.$$

7) Показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} \ln t dt \sim \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \ln x.$$

5.1.3 Задачи для самостоятельного решения

1) Показать, что асимптотика дополнительного интеграла вероятностей имеет вид:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k x^{2k}}.$$

2) Показать, что асимптотика интегрального синуса имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt &\sim \frac{\pi}{2} - \cos x \left[\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots \right] - \\ &- \sin x \left[\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \dots \right] \end{aligned}$$

3) Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega x^2} x^{5/2} \ln(1+x) dx \sim \frac{\Gamma(7/4)}{2\omega^{7/4}}.$$

4) Показать, что при больших n :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Указание: см., например, М.В.Федорюк, стр.69, формула (1.28')

5) Показать, что асимптотика модифицированной функции Бесселя при $x \rightarrow +\infty$ имеет вид:

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \theta} \cos n\theta d\theta \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Записать аналогичную формулу при $x \rightarrow -\infty$.

6) Показать, что асимптотика функции Макдональда нулевого порядка имеет вид:

$$K_0(x) = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+2)}} dt \sim e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

7) Показать, что асимптотика полиномов Лежандра при $n \rightarrow \infty$:

$$P_n(x) \sim \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n} \sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

Воспользоваться интегральным представлением для полиномов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta.$$

8) Показать, что при $n \rightarrow \infty$:

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

9) Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\pi^2/4} e^{x \cos \sqrt{t}} dt \sim e^x \frac{2}{x}.$$

10) Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt^2} \ln(1 + t + t^2) dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4x^{3/2}}.$$

5.2 Асимптотические оценки интегралов. Метод стационарной фазы. Метод перевала

Литература по теме:

1. М.В.Федорюк, Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987 (Гл. 3,§1; Гл. 4, §§1,3,4)
2. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987 (Гл.5, §3, п.77)
3. Ф.Олвер, Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990 (Гл.3, §§11-14; Гл. 4, §§7-9)
4. А.Найфэ, Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984 (Гл.3, §3.5, в том числе примеры)
5. Г.Джеффрис, Б.Свирлс, Методы математической физики. – М.: Мир, 1970 (Т.3, Гл. 17)

5.2.1 Примеры задач с решениями

1. Показать, что при $\alpha > 0$, $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\infty} (1+x)^{-\alpha} e^{i\lambda x} dx \sim i\lambda^{-1}.$$

Решение

Интеграл в данной задаче является интегралом типа:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx. \quad (1)$$

Функции $f(x)$ и $S(x)$ в условиях нашей задачи являются бесконечно дифференцируемыми функциями в области интегрирования и $S'(x) \neq 0$. Для оценки асимптотики можно использовать общую формулу метода стационарной фазы при данных условиях на функции $f(x)$ и $S(x)$:

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} [b_n e^{i\lambda S(b)} - a_n e^{i\lambda S(a)}] (i\lambda)^{-n-1}, \quad (2)$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам:

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{S'(x)} \cdot \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=a}, \quad (3)$$

$$b_n = (-1)^n \left(\frac{1}{S'(x)} \cdot \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=b}. \quad (4)$$

В условиях задачи равенство (4) нужно понимать как предел при $x \rightarrow \infty$. Для решения задачи достаточно взять в (2) главный член разложения ($n = 0$). Т.к. $S'(x) = 1$,

$$a_0 = \frac{1}{(1+x)^\alpha} \Big|_{x=0} = 1, \quad b_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)^\alpha} = 0. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) получаем искомый результат.

2. Доказать, что асимптотика функции Бесселя целого порядка при $x \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4).$$

Решение

Воспользуемся интегральным представлением для функции Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi, \quad n \geq 0 \text{ — целое число.} \quad (1)$$

Интегральное представление (1) можно преобразовать к следующему виду (проделайте это):

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \exp(ix \sin \varphi - in\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Интеграл в (2) является интегралом стандартного типа для метода стационарной фазы (см. формулу (1) предыдущей задачи). В нашем случае:

$$x \rightarrow \varphi, \quad \lambda \rightarrow x, \quad f(x) \rightarrow f(\varphi) = \exp(-in\varphi), \quad S(x) \rightarrow S(\varphi) = \sin \varphi \quad (3)$$

Функция $S(\varphi)$ имеет на отрезке интегрирования одну стационарную точку: $S'(\varphi) = \cos \varphi = 0, \rightarrow \varphi = \pi/2$. В этой точке $S'' = -1 \neq 0, \quad S = 1$. Для этого случая метод стационарной фазы дает для интеграла стандартного типа (см. формулу (1) предыдущей задачи) следующую общую формулу:

$$F(\lambda) \sim e^{i[\lambda S(x_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x_0)]} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} f(x_0). \quad (4)$$

В равенстве (4) x_0 - стационарная точка. Применяя формулу (4) к интегралу (2) и отделяя вещественную часть получаем искомое равенство.

3) Показать, что асимптотика интеграла при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp[\lambda(x + ix - x^3)] dx \sim \\ \sim e^{-i\pi/16} 2^{-1/3} 3^{-1/4} \pi^{1/2} \lambda^{-1/2} \exp(2^{7/4} 3^{-3/2} e^{3i\pi/8} \lambda).$$

Решение

Будем рассматривать интеграл, данный в задаче как интеграл в комплексной плоскости по контуру, представляющему собой вещественную ось:

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} \exp[\lambda(z + iz - z^3)] dz \quad (1)$$

Интеграл является частным случаем интеграла общего вида:

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz. \quad (2)$$

К этому интегралу можно применить метод перевала. Для этого необходимо найти седловую точку. Она определяется равенством:

$$S'(z) = 0. \quad (3)$$

В нашем случае:

$$S'(z) = 1 + i - 3z^2 = 0, \quad \rightarrow z_{1,2} = \pm 2^{1/4} 3^{-1/2} e^{i\pi/8}. \quad (4)$$

Деформируем контур $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ так, чтобы новый контур проходил через седловую точку $z_0 = z_1$. Это можно сделать в области голоморфности подинтегральной функции, значение интеграла при этом не изменится. Из общей теории метода перевала деформированный контур должен быть таким, чтобы в малой окрестности седловой точки на этом контуре удовлетворялись следующие условия:

- 1) $\text{Im}S(z) = \text{const}$,
- 2) $\text{Re}S(z)$ - имеет единственный максимум.

В малой окрестности седловой точки с учетом равенства (1) справедливо разложение:

$$S(z) = S(z_0) + \frac{1}{2} S''(z_0)(z - z_0)^2, \quad S''(z_0) = -6z_0, \quad S(z_0) = z_0 + iz_0 - z_0^3. \quad (5)$$

Представим величины в равенствах (5) в полярной форме:

$$S''(z_0) = -|S''(z_0)|e^{i\pi/8}, \quad z - z_0 = re^{i\theta}. \quad (6)$$

Выделим в (5) действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Im}S(z) = \operatorname{Im}S(z_0) - K \sin(\pi/8 + 2\theta), \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}S(z) = \operatorname{Re}S(z_0) - K \cos(\pi/8 + 2\theta), \quad (8)$$

Постоянные $\operatorname{Im}S(z_0)$, $\operatorname{Re}S(z_0)$, K легко могут быть вычислены с помощью равенств (4) – (6).

В малой окрестности точки z_0 условие 1) обеспечивается равенствами:

$$\operatorname{Im}S(z) = \operatorname{Im}S(z_0) = \operatorname{const} \rightarrow \sin(\pi/8 + 2\theta) = 0. \quad (9)$$

Уравнение в (9) дает решения:

$$\theta = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{8} + n\pi \right), \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (10)$$

Различные n дают четыре различных направления перехода через седловую точку, вдоль которых выполняется условие 1). Изобразим на рисунке эти направления в окрестности седловой точки (см. рис.5). Указанные направления отвечают различным направлениям движения вдоль прямых АВ и CD. Пунктирной линией на рисунке изображены направления координатных осей, по отношению к которым отсчитываются углы.

Нам предстоит теперь выбрать одно из направлений пересечения седловой точки. Для этого найдем и изобразим на рисунке прямые на которых выполняется условие $\operatorname{Re}S(z) = \operatorname{Re}S(z_0) = \operatorname{const}$. Из (8) находим:

$$\cos(\pi/8 + 2\theta) = 0 \quad (11)$$

Решение (11) дает

$$\theta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + n \right) \pi - \frac{\pi}{8} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (12)$$

Направлениям (12) на рисунке отвечают прямые EF и GH. Отметим, что они смещены по отношению к прямым АВ и CD на 45 градусов. При переходе через прямые EF и GH мы попадаем из "впадины" ($\operatorname{Re}S(z) < \operatorname{Re}S(z_0)$) на "холмы" ($\operatorname{Re}S(z) > \operatorname{Re}S(z_0)$). "Впадины" и "холмы" легко найти из равенства (8) (при расчете обратите внимание на знак "минус" перед синусом в (8)). Положение первой "долины" задается неравенствами:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2\theta\right) > 0, \quad \rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{8} + 2\theta < -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{3\pi}{16} > \theta < -\frac{5\pi}{16}.$$

На рисунке "холмы" отмечены знаком +, а "впадины" знаком -.

Чтобы выполнилось условие 2), контур $\tilde{\gamma}$ в окрестности седловой точки должен лежать во "впадине". Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяет направление АВ, т.е.

$$\theta = -\pi/6. \quad (13)$$

Применим теперь общую формулу метода перевала для интегралов, определенных формулой вида (1):

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} f(z_0) e^{i\theta}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) равенства (4) - (6), (13) получаем искомый результат.

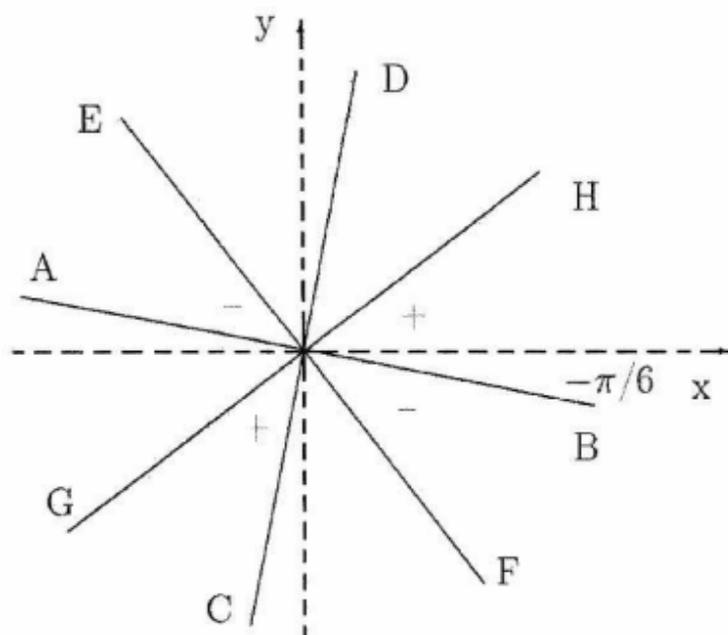


Рис. 5. Направления в окрестности седловой точки. Пунктирными линиями показаны координатные оси

5.2.2 Аудиторные задачи

1) Доказать, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливо разложение ($\alpha > 0$):

$$\int_x^{\infty} t^{-\alpha} e^{it} dt \sim \frac{ie^{ix}}{x^\alpha}$$

2) Доказать, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\pi} \exp(i\lambda \cos t) \cos^2 t dt \sim \sqrt{2\pi/\lambda} \cos(\lambda - \pi/4).$$

3) Вычислить асимптотику функции Бесселя $J_\nu(\nu x)$ при $\nu \rightarrow \infty$ и $x > 1$ — фиксированном.

$$J_\nu(\nu x) \sim \left[\frac{2}{\pi\nu\sqrt{x^2-1}} \right]^{1/2} \cos\left(\nu \arccos(x^{-1}) - \nu\sqrt{x^2-1} + \pi/4\right).$$

Указание. Воспользоваться интегральным представлением:

$$J_\nu(\nu x) = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \cos[\nu(\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi - \\ - \pi^{-1} \sin \nu\pi \int_0^{\infty} \exp[-\nu(t + x \operatorname{sh} t)] dt.$$

4) Доказать, что при $t \rightarrow \infty$ ($\alpha > 1$)

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} (1+t^\alpha x)^{-1} dx \sim (\alpha-1) t^{-\alpha} \log t.$$

5) Показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} (1+x^2)^{-\lambda} dx \sim \left[\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{\lambda} \right]^{1/2} e^{-\lambda(\sqrt{2}-1)} (2(\sqrt{2}-1))^{-\lambda}.$$

6) Показать, что асимптотика функции при $\alpha \rightarrow +\infty$ Эйри имеет вид:

$$Ai(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x^3/3 + \alpha x) dx \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} \alpha^{1/4}} e^{-(2/3)\alpha^{3/2}}.$$

Указание: интеграл от косинуса заменить интегралом от экспоненциальной функции в пределах $(-\infty, \infty)$.

5.2.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Получить асимптотическое разложение для интеграла Френеля при $x \rightarrow +\infty$:

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} e^{it^2} dt \sim e^{ix^2} \frac{i}{2\sqrt{x}}$$

2. Доказать лемму Эрдейи. Пусть $\alpha \geq 0, \beta > 0$, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $[0, a]$ и обращается в нуль вместе со всеми производными в точке $x = a$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо следующее разложение:

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-(k+\beta)/\alpha},$$

где коэффициенты a_k определяются по формулам:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k! \alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \exp\left\{i\frac{\pi}{3} \frac{k+\beta}{\alpha}\right\}.$$

Указание: см., например, М.В.Федорюк, стр. 157.

3. Показать, что при $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\int_0^1 e^{i\alpha t^3} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \alpha^{-1/6} e^{i\pi/12}.$$

Указание. См. док-во леммы в домашней задаче N 2.

4. Показать, что при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^1 e^{i\lambda x^3} dx \sim \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \lambda^{-1/3} e^{i\pi/6}.$$

5. Вычислить асимптотику $J_\nu(\nu)$:

$$J_\nu(\nu) \sim \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) [2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3}]^{-1}$$

Указание. Воспользоваться интегральным представлением в аудиторной задаче N 3, а также обобщением метода стационарной фазы (см. М.В.Федорюк Гл.3, теорема 1.5).

6. Показать, что при $n \rightarrow \infty$:

$$\int_{-1}^{\infty} (x^3 + 3x - 2i)^{-n} e^{ix} dx \sim 2e(i/4)^n (\pi/(3n))^{1/2}.$$

7. Показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \exp(-2\lambda z^2 - 4\lambda/z) dz \sim \pi^{1/2} (6\lambda)^{-1/2} \exp(3\lambda + 3\sqrt{3}i\lambda).$$

8. Показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} z^{2^2} \exp(-\lambda z^2) dz \sim i\pi^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2\lambda-1}\right).$$

9. Показать, что при $n \rightarrow \infty$:

$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} e^{-z^2} (1+z)^{-n} dz \sim \left(\frac{\pi}{2e}\right)^{1/2} i^{-n} e^{n/2} (n/2)^{-n/2}.$$

10. Показать, что асимптотика функции Бесселя целого порядка при $x \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4).$$

Указание. Воспользоваться интегральным представлением для функции Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

6 Операционное исчисление

6.1 Свойства преобразования Лапласа

Литература по теме:

1. В.А.Диткин, А.П.Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, М.: Наука, 1974 (Гл.2, §§1-4)
2. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1987 (Гл.6, §1)
3. М.А.Евграфов, Аналитические функции, М.: Наука, 1968 (Гл.7, §§1,2)

6.1.1 Примеры задач с решениями

1. Доказать, что $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$, n - целое положительное число, $\operatorname{Re} p > 0$.

Решение

Эту задачу можно решить непосредственно, используя определение преобразования Лапласа:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

В случае оригинала, данного в задаче $f(t) = t^n$, интеграл (1) сходится при $\operatorname{Re} p > 0$. Будем вычислять его по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt &= -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt = \\ &= \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt \end{aligned} \quad (2)$$

Выполняя процедуру (2) n раз, окончательно получим:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (3)$$

Многие задачи на вычисление лапласовских образов от сложных функций решаются с использованием свойств преобразования Лапласа и образов более простых функций, которые получаются непосредственным интегрированием

(1). Продемонстрируем это на примере решения данной задачи. Воспользуемся формулой для производной от образа (см. ауд. задачу N 7):

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)], \quad (4)$$

здесь $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$. При решении будем использовать также лапласовский образ от 1 (см. ауд. задачу N1):

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad (5)$$

Положим в формуле (4) $f(t) = 1$, тогда из (5) следует, что

$$F(p) = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad (6)$$

Дифференцируя (6) n раз, получаем:

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \frac{n!}{p^n} \quad (7)$$

Подставляем (7) в (4) с учетом $f(t) = 1$:

$$(-1)^n \frac{n!}{p^n} = \mathcal{L}[(-t)^n] \quad (8)$$

Отсюда получаем искомое равенство (3).

2. Доказать, что

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$$

Решение

Для решения задачи воспользуемся одним из основных свойств преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(p) dp, \quad (1)$$

здесь $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

В нашем случае $f(t) = \sin \omega t$. Известно изображение для синуса (см. ауд. задачу N 4) при $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (2)$$

Подставляем изображение (2) в (1):

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$$

3. Пусть $F(p) = A(p)B^{-1}(p)$ – рациональная функция, причем степень алгебраического многочлена $A(p)$ меньше степени алгебраического многочлена $B(p)$, корни которого $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ простые. Доказать, что оригиналом $F(p)$ является функция:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Решение

Данная формула является одной из основных для нахождения оригинала по известному изображению. Для ее доказательства используем обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (1)$$

Из общих теорем об образе Лапласа известно, что $F(p)$ голоморфна при $\operatorname{Re} p > a$, следовательно, все особенности $F(p)$ лежат слева от прямой $(a - i\infty, a + i\infty)$. В нашем случае особенности $F(p)$ представляют простые полюса (простые нули функции $B(p)$). Рассмотрим интеграл:

$$\int_{\gamma} e^{pt} F(p) dp. \quad (2)$$

здесь $t > 0$ и контур интегрирования включает прямую $(a - i\infty, a + i\infty)$, проходящую снизу вверх, и замыкается дугой большого круга на бесконечности слева.

Поскольку степень $A(p)$ меньше степени $B(p)$, то слева от прямой $(a - i\infty, a + i\infty)$ выполняются условия леммы Жордана и, следовательно, интеграл по дуге большого круга равен нулю. Получаем:

$$\int_{\gamma} e^{pt} F(p) dp = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp = 2\pi i \sum_{p_k} \operatorname{Res}(e^{pt} F(p)). \quad (3)$$

Если использовать известную формулу для вычета в простом полюсе:

$$\operatorname{Res}_{p_k} e^{pt} \frac{A(p)}{B(p)} = e^{p_k t} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)},$$

получим искомую формулу.

6.1.2 Аудиторные задачи

Считая, что функция-оригинал $f(t) = 0$ при $t \leq 0$ доказать следующие формулы:

$$1) \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$$

$$2) \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$$

$$3) \mathcal{L}[t^\nu] = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Указание: Воспользоваться интегральным представлением для Γ -функции Эйлера:

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^{\infty} t^\nu e^{-t} dt.$$

$$4) \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$$

$$5) \mathcal{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$$

$$6) \mathcal{L}[t \cos \omega t] = \frac{(p^2 - \omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$$

7) Пусть $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ и $\operatorname{Re} p > s_0$. Доказать, что

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$$

8) Найти изображение ступенчатой функции:

$$f(t) = A(\vartheta(t) + \vartheta(t - \tau) + \vartheta(t - 2\tau) + \dots),$$

здесь $\vartheta(t)$ - функция Хевисайда.

(Начертите график функции $f(t)$.)

Ответ: $\mathcal{L}[f(t)] = (A/2p) (1 + \operatorname{cth}[(p\tau)/2])$

9) Пусть

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

функция ошибок. Доказать, что

$$\mathcal{L}[e^{-(\alpha t)^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{p^2/(4\alpha^2)} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)\right) \frac{1}{\alpha}.$$

10) Доказать формулу интеграла Дюамеля:

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L} \left[g(t)f(0) + \int_0^t f'(t-\tau)g(\tau)d\tau \right].$$

Указание: воспользоваться формулой для изображения свертки и правилом дифференцирования оригинала.

11) Найти оригинал $f(t)$ для функции $F(p)$:

$$F(p) = p^{-\alpha-1}, \quad -1 < \alpha < 0$$

Ответ: $t^\alpha [\Gamma(1 + \alpha)]^{-1}$.

6.1.3 Задачи для самостоятельного решения

Считая, что функция-оригинал $f(t) = 0$ при $t > 0$ доказать следующие формулы:

$$1) \mathcal{L} [\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \omega|$$

$$2) \mathcal{L} [\text{ch } \lambda t] = \frac{p}{p^2 - \lambda^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \lambda|$$

$$3) \mathcal{L} [t \sin \omega t] = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \omega|$$

$$4) \mathcal{L} [e^{\lambda t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(p^2 - \lambda^2)^2 + \omega^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \omega| + \text{Re } \lambda$$

$$5) \mathcal{L} \left[\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} \right] = \frac{1}{\sqrt{p + \alpha}}, \quad \text{Re } p > -\alpha$$

Указание: воспользоваться теоремой смещения:

$$\mathcal{L} [e^{ip_0 t} f(t)] = F(p - p_0)$$

и результатом ауд. задачи N 3.

$$6) \mathcal{L} \left[\frac{e^{-2\alpha\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi t}} \right] = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\alpha^2/p} \left(1 - \text{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}} \right) \right)$$

Указание: см. ауд. задачу N 9.

7) Найти изображение функции $f(t) = t^n \sin \omega t$, n — целое положительное,

$\omega \in \mathbf{C}$.

Ответ:

Изображение равно:

$$n! \frac{\operatorname{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|.$$

8) Найти изображение функции

$$f(t) = A(\vartheta(t) - 2\vartheta(t - \tau) + 2\vartheta(t - 2\tau) - \dots)$$

здесь $\vartheta(t)$ - функция Хевисайда.

(Начертите график функции $f(t)$.)

Ответ:

$$\frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

9) Пусть $F(p) = A_n(p)/B_m(p)$, где $A_n(p)$ и $B_m(p)$ - алгебраические многочлены степени n и m соответственно, причем $n < m$ и $A_n(p)$ и $B_m(p)$ не имеют общих нулей. Доказать, что, если p_1, p_2, \dots, p_l - нули $B_m(p)$ кратности m_1, m_2, \dots, m_l соответственно, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} [(p - p_k)^{m_k} F(p) e^{pt}]_{p=p_k}.$$

10) Найти оригинал $f(t)$ для функции $F(p)$:

$$F(p) = p^{-1} e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \alpha > 0.$$

Ответ:

$$f(t) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right).$$

6.2 Операционное исчисление. Приложения

Литература по теме:

1. В.А.Диткин, А.П.Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974 (Гл.2, §6)
2. М.А.Лаврентьев, В.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987 (Гл.6, §2 в том числе примеры)
3. М.А.Евграфов, Аналитические функции. – М.: Наука, 1968 (Гл.7, §3)

6.2.1 Примеры задач с решениями

1. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = 4$$

при начальных условиях:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -2.$$

Решение

Для решения задачи будем использовать правило дифференцирования оригинала:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1)$$

В этой формуле:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)], \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

Применим формулу (1) к производным уравнения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'''(t)] &= p^3 F(p) - p^2 y(0) - p y'(0) - y''(0) = \\ &= p^3 F(p) - p^2 - 2p + 2 \\ \mathcal{L}[y''(t)] &= p^2 F(p) - p + 2, \quad \mathcal{L}[y'(t)] = p F(p) - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Учтем также, что

$$\mathcal{L}[4] = 4/p. \quad (3)$$

(см. ауд. задачу 1 в разделе 7.1).

Действуя оператором преобразования Лапласа на исходное уравнение с учетом (2),(3), получаем алгебраическое уравнение относительно изображения $F(p)$:

$$F(p)(p^3 - 2p^2 + p) = \frac{4}{p} + p^2 - 5. \quad (4)$$

Для изображения получаем выражение:

$$F(p) = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2}. \quad (5)$$

Раскладываем на простейшие множители:

$$\frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{(p-1)^2}$$

Обычным способом находим:

$$A = 3, \quad B = 4, \quad C = -2, \quad D = 0$$

По известному изображению, используя результаты задач (1), ауд. задач (1), (2), (5) из раздела 7.1, находим оригинал, т.е. решение исходной задачи, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(t) = 3 + 4t - 2e^t$$

2. Решить операционным методом систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = -2x + y + 2z, \end{cases} \quad (1)$$

при условиях:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 0.$$

Решение

Введем обозначения для изображений функций:

$$\mathcal{L}[x] = F(p), \quad \mathcal{L}[y] = G(p), \quad \mathcal{L}[z] = H(p).$$

Поддействуем оператором преобразования Лапласа на систему (1) и воспользуемся формулой (1) из предыдущей задачи. Получим систему линейных уравнений относительно изображений:

$$\begin{cases} pF(p) &= H(p), \\ pG(p) + 1 &= -F(p) + G(p) + H(p), \\ pH(p) &= -2F(p) + G(p) + 2H(p). \end{cases}$$

Перепишем в другом виде:

$$\begin{cases} -pF(p) + H(p) &= 0, \\ -F(p) + (1-p)G(p) + H(p) &= 1, \\ -2F(p) + G(p) + (2-p)H(p) &= 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений одним из стандартных способов получаем:

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}, \quad G(p) = \frac{-1}{(p-1)} + \frac{1}{(p-1)^3}, \\ H(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}$$

Используя таблицу преобразований (см. ауд. задачу (5) из 7.1), получаем решение (1):

$$x(t) = (t^2/2)e^t, \quad y(t) = -e^t + (t^2/2)e^t, \\ z(t) = te^t + (t^2/2)e^t.$$

3. Используя свойства преобразования Лапласа, записать решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$f(t) = \int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau + g(t), \quad (1)$$

здесь $k(t)$ ядро уравнения, $g(t)$ заданная функция.

Решение

Если $k(t, \tau)$ - ядро Вольтерра, то оно обращается в нуль при $0 < t < \tau$. В нашем случае ядро зависит от разности аргументов и, следовательно, обращается в нуль, когда разность отрицательна. Т.е. ядро в (1) является оригиналом преобразования Лапласа. Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$f(t) = \int_0^\infty k(t-\tau)f(\tau)d\tau + g(t) = k * f + g(t), \quad (2)$$

здесь звездочкой обозначена свертка функций. Введем обозначения для изображений функций:

$$\mathcal{L}[f] = F(p), \quad \mathcal{L}[g] = G(p), \quad \mathcal{L}[k] = K(p).$$

Подействуем оператором Лапласа на равенство (2) и воспользуемся формулой для изображения свертки:

$$F(p) = G(p) + K(p)F(p). \quad (3)$$

Выразим из (3) изображение неизвестной функции:

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - K(p)}. \quad (4)$$

Решение интегрального уравнения (1) получаем, применяя обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)](t)$$

6.2.2 Аудиторные задачи

Решить задачу Коши:

1) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1.$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t).$

2) $y''(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t).$

3) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

Ответ: $x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}$

Решить системы дифференциальных уравнений:

4)
$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = e^t, \\ y'(t) + 3x(t) - 2y(t) = 2e^t. \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = y(t) = e^t$.

$$5) \quad \begin{cases} x'(t) + y(t) = f_1(t), \\ y'(t) + x(t) = f_2(t). \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1; \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Ответ:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 < t < 1, \\ 1 - e^{-t} - \operatorname{sh}(t-1), & 1 < t < 2, \\ -e^{-t} - \operatorname{sh}(t-1) + \operatorname{ch}(t-2), & t > 2. \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 < t < 1, \\ -e^{-t} + \operatorname{ch}(t-1), & 1 < t < 2, \\ -e^{-t} - \operatorname{sh}(t-2) + \operatorname{ch}(t-1), & t > 2. \end{cases}$$

Решить интегральное уравнение:

$$6) \quad \varphi(t) = \int_0^t (t-\xi)\varphi(\xi)d\xi + \sin t.$$

Ответ: $\varphi(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}\sin t$.

6.2.3 Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу Коши:

$$1) \quad x''(t) + \lambda^2 x(t) = 0, \quad \lambda \neq 0,$$

$$x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

Ответ: $x(t) = \alpha \cos \lambda t + (\beta/\lambda) \sin \lambda t$.

$$2) \quad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3 e^{-2t},$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Ответ: $x(t) = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{t^5}{20} \right)$.

Решить системы дифференциальных уравнений:

$$3) \quad \begin{cases} x''(t) - x(t) + y(t) + z(t) = 0, \\ y''(t) + x(t) - y(t) + z(t) = 0, \\ z''(t) + x(t) + y(t) - z(t) = 0. \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3} \cos t, \quad y(t) = z(t) = x(t) - \operatorname{ch}(\sqrt{2}t)$.

$$4) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t), \\ y'(t) = z(t) + x(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t). \end{cases}$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = -e^{-t}, \quad y(t) = e^{-t}, \quad z(t) = 0$.

Решить интегральное уравнение:

$$5) \quad t = \int_0^t e^{t-\xi} \varphi(\xi) d\xi$$

Ответ: $\varphi(t) = 1 - t$.

6) В RLC -контур включена Э.Д.С. $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$. Используя метод преобразования Лапласа найти ток в контуре.

Ответ:

$$J(t) = \frac{\varepsilon_0}{Z} \sin(\omega t - \delta) - \frac{\varepsilon_0}{\omega_0 Z \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t - \delta_0),$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X}{R}, \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\omega_0 X}{\sigma_0 X'}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad X = L\omega - 1/C\omega,$$

$$X' = L\omega + 1/C\omega, \quad \sigma_0 = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 - \text{собственная частота колебаний}$$

7) В RLC -контур включена Э.Д.С. $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$, которая действует в течение времени $0 < t < \pi/\omega$, а затем выключается. Найти ток при $t > \pi/\omega$.

Ответ:

$$J(t) = -\frac{\varepsilon_0}{\omega_0 Z \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t} [\sin(\omega_0 t - \delta_0) + e^{\pi\sigma_0/\omega} \sin(\omega_0 t - \delta_0 - \pi\omega_0/\omega)].$$

Обозначения даны в ответе к дом. задаче N 6.

8) Два одинаковых RLC -контура индуктивно связаны (коэффициент взаимной индукции катушек равен M). К одному из них с момента времени $t = 0$ приложена постоянная Э.Д.С. U_0 . Найти ток в другом контуре. Ответ:

$$J_2(t) = \frac{U_0}{2} \left\{ \frac{e^{-\sigma_1 t} \sin \omega_1 t}{(L+M)\omega_1} - \frac{e^{-\sigma_2 t} \sin \omega_2 t}{(L-M)\omega_2} \right\}.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{R}{2(L \pm M)}, \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{C(L \pm M)} - \sigma_{1,2}^2.$$

9) Рассмотрим простую модель живой клетки, в которой происходит обмен веществ с окружающей средой. В клетку поступает из внешней среды некоторое вещество (кислород, глюкоза), скорость поступления зависит от разности концентраций этих веществ в среде и в клетке

($n_{a0} - n_a$) с коэффициентом пропорциональности k_1 . Внутри клетки происходит обратимая реакция превращения с коэффициентами k_2 и k_{-2} . Скорость реакции пропорциональна концентрации исходных веществ (n_a, n_b). Продукты реакции (углекислый газ, вода) выбрасываются в окружающую среду, скорость выброса пропорциональна разности концентраций этих веществ в среде и в клетке ($n_{b0} - n_b$) с коэффициентом k_3 . Концентрации веществ в окружающей среде n_{a0} и n_{b0} постоянны. Найти зависимость концентраций веществ в клетке от времени при произвольных начальных условиях. Исследовать решение при $t \rightarrow \infty$.

7 Классические ортогональные полиномы

7.1 Полиномы Лежандра, Чебышева-Эрмита, Чебышева-Лагерра

Литература по теме:

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.

7.1.1 Примеры задач с решениями

1. Полиномами Лежандра называются многочлены, являющиеся решением дифференциального уравнения:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \quad n - . \quad (78)$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

Доказать формулу Родрига для полиномов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (79)$$

Для доказательства рассмотрим функцию

$$u(x) = (x^2 - 1)^n$$

и продифференцируем ее по x :

$$\frac{du}{dx} = n \cdot 2x(x^2 - 1)^{n-1}.$$

Умножим обе части на $(x^2 - 1)$ и продифференцируем полученное равенство n раз по x :

$$(x^2 - 1)\frac{du(x)}{dx} - 2nxu(x) = 0,$$
$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} \frac{d^k v}{dx^k}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$(1 - x^2)u^{(n+1)} + n(n+1)u^{(n-1)} = 0.$$

Дифференцируя это равенство еще раз по x , видим, что функция $y(x) = u^{(n)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (78).

2. Доказать условие ортогональности для полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, n \neq m. \quad (80)$$

Для доказательства запишем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют P_n, P_m :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'] + n(n+1)P_n = 0, \quad (81)$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'] + m(m+1)P_m = 0, \quad (82)$$

Умножим первое из этих уравнений на P_m , а второе на P_n и вычтем из первого соотношения второе. Тогда получим:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)] = (m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx, \quad (83)$$

откуда следует условие (80).

3. Доказать, что полиномы Лежандра удовлетворяют следующему условию нормировки:

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (84)$$

Для доказательства воспользуемся рекуррентными соотношениями, которым удовлетворяют $P_n(x)$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P_n(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^1 P_n(x) \left[\frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \right] dx = \\ &= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) \right] dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}P_{n-1}dx. \end{aligned}$$

Понижая порядок полиномов Лежандра с помощью рекуррентных соотношений, получим:

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1} \|P_0\|^2 = \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad (85)$$

что необходимо было доказать.

7.1.2 Аудиторные задачи

1. Доказать рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1) \cdot x \cdot P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (86)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{(2n+1)}(P'_{n+1} - P'_{n-1}). \quad (87)$$

2. Доказать, что полиномы Чебышева-Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (88)$$

являются решением следующего дифференциального уравнения:

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0, \quad n - . \quad (89)$$

3. Доказать, что многочлены Чебышева-Эрмита удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m. \quad (90)$$

4. Доказать рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева-Эрмита:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (91)$$

7.1.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать условие нормировки полиномов Чебышева-Эрмита:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_n(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (92)$$

2. Доказать, что многочлены Чебышева-Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad (93)$$

являются решением уравнения:

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0. \quad (94)$$

3. Доказать, что многочлены Чебышева-Лагерра удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^{\infty} L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx = 0, \quad n \neq m. \quad (95)$$

4. Доказать рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева-Лагерра:

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+1+\alpha-x)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (96)$$

5. Доказать условие нормировки для полиномов Чебышева-Лагерра:

$$\|L_n^\alpha\|^2 = \int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \quad (97)$$

7.2 Полиномы Лежандра, Чебышева-Эрмита, Чебышева-Лагерра. Интегральные представления

Литература по теме:

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984.
3. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. – М.: Атомиздат, 1972.

7.2.1 Примеры задач с решениями

1. Доказать интегральное представление Шлефли для полиномов Лежандра:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt, \quad (98)$$

где C -замкнутый контур комплексной плоскости, который охватывает точку $t=z$.

Для доказательства используем интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{t - z}, \quad (99)$$
$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t - z)^{n+1}}.$$

Полагая в формуле (99) $f(t) = (t^2 - 1)^n$, получим соотношение:

$$\frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{(t^2 - 1)^n dt}{(t - z)^{n+1}},$$

из которого следует необходимое интегральное представление.

2. Доказать, что производящая функция для полиномов Лежандра равна:

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + \dots + P_n(x)t^n + \dots \quad (100)$$

Для доказательства воспользуемся формулой (105) (см. ауд. задачу N2):

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2} \sin\phi)^n d\phi = \quad (101)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n (x + i\sqrt{1-x^2} \sin\phi)^n \right\} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{d\phi} (1 - tx - it\sqrt{1-x^2} \sin\phi). \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.
 \end{aligned}$$

3. Разложить функцию $f(x) = e^{-x}$ в ряд Фурье по многочленам Чебышева-Лагерра.

В искомом разложении

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x) \quad (102)$$

коэффициенты c_n вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{\|L_n^\alpha\|^2} \int_0^\infty x^\alpha e^{-2x} L_n^\alpha(x) dx = \\
 &= \frac{1}{\|L_n^\alpha\|^2} \int_0^\infty e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) dx.
 \end{aligned}$$

Производя n -кратное интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left\{ e^{-x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \Big|_0^\infty + \right. \\
 &+ e^{-x} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \Big|_0^\infty + \dots + \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-2x} dx \Big\}.
 \end{aligned}$$

Подстановка пределов в проинтегрированные слагаемые дает нуль. Поскольку

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-2x} dx = \frac{1}{2^{n+\alpha+1}} \Gamma(n+\alpha+1),$$

окончательно имеем:

$$c_n = \frac{n!}{2^{n+\alpha+1}}. \quad (103)$$

7.2.2 Аудиторные задачи

1. Доказать интегральное представление Лапласа для полиномов Лежандра:

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \phi]^n d\phi. \quad (104)$$

2. Доказать, что для полиномов Лежандра справедливо следующее интегральное представление:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z + i\sqrt{1-z^2} \sin\phi]^n d\phi, \quad (|z| < 1). \quad (105)$$

3. Доказать интегральное представление для полиномов Чебышева-Эрмита:

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} (-1)^n \oint_C \frac{e^{-t^2} dt}{(t-x)^{n+1}}, \quad (106)$$

где контур C охватывает точку $t=x$.

4. Доказать, что $H(x, t) = e^{2xt-t^2}$ является производящей функцией для полиномов Чебышева-Эрмита.

7.2.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что полиномы Чебышева-Лагерра имеют следующее интегральное представление:

$$L_n^\alpha(x) = x^{-\alpha} e^x \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{n+\alpha} e^{-z} dz}{(z-x)^{n+1}}, \quad (107)$$

где контур C охватывает точку $z=x$.

2. Доказать, что производящей функцией для полиномов Чебышева-Лагерра является функция

$$L^\alpha(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{xt}{1-t}}, \quad \alpha > -1. \quad (108)$$

3. Доказать, что разложение функции $f(x) = |x|$ по полиномам Лежандра имеет вид:

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (4n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n+1)!} P_{2n}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (109)$$

4. Доказать, что разложение функции $f(x) = \text{sign } x$ по полиномам Чебышева-Эрмита имеет вид:

$$\text{sign } x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1)n!} H_{2n+1}(x). \quad (110)$$

5. Доказать, что полиномы Лежандра ограничены на замкнутом интервале $[-1, 1]$: $|P_n(x)| \leq 1$.

8 Цилиндрические функции

8.1 Функции Бесселя, Ханкеля, Макдональда и их свойства

Литература по теме:

1. А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров, Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978. (Гл. III, §§11–14).
2. В.Я.Арсенин, Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. (Гл.XIV).
3. Ф.Олвер, Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. (Гл.2, §§9–10, Гл. 7, §§4–8, Гл. 10, §§7,8; Гл. 11, §10, Гл. 12, §1).
4. Г.Джеффрис, Б.Свирлс, Методы математической физики. – М.: Мир, 1970 (Т.3, Гл. 21, 22).

8.1.1 Примеры задач с решениями

1. Доказать свойство ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right) J_\nu\left(\frac{\beta}{l}x\right) dx = 0,$$

здесь $\nu > -1$, $\alpha \neq \beta$, числа α и β являются корнями одного из трех уравнений:

$$J_\nu(x) = 0, \quad J'_\nu(x) = 0, \quad x J'_\nu(x) + h J_\nu(x) = 0. \quad (1)$$

Решение

Запишем два равенства, следующих из уравнения для функции Бесселя:

$$x \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\lambda x) + \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\lambda x) = 0,$$

$$x \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\mu x) + \frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) + \left(\mu^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu x) = 0,$$

Первое из этих равенств умножаем на $J_\nu(\mu x)$, второе на $J_\nu(\lambda x)$, вычтем из первого равенства второе и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Получаем:

$$\int_0^l x \left\{ J_\nu(\mu x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\mu x) \right\} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \left\{ J_\nu(\mu x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) \frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) \right\} dx = \\
& = (\mu^2 - \lambda^2) \int_0^l x J_\nu(\mu x) J_\nu(\lambda x) dx.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что левую часть последнего равенства можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\mu x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) \frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) \right] \right\} dx = \\
& = (\mu^2 - \lambda^2) \int_0^l x J_\nu(\mu x) J_\nu(\lambda x) dx.
\end{aligned}$$

Левую часть выражения можно проинтегрировать:

$$\begin{aligned}
& \left\{ x \left[J_\nu(\mu x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) \frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) \right] \right\} \Big|_0^l = \\
& = (\mu^2 - \lambda^2) \int_0^l x J_\nu(\mu x) J_\nu(\lambda x) dx. \quad (2)
\end{aligned}$$

Используя представление функции Бесселя рядом (см. задачу N 2), можно записать:

$$\begin{aligned}
J_\nu(\lambda x) &= \frac{(\lambda x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+2} P_\lambda(x), \\
\frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) &= \frac{\nu}{x} \cdot \frac{(\lambda x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+1} Q_\lambda(x),
\end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в левую часть выражения (2), получаем:

$$\begin{aligned}
& x \left[J_\nu(\mu x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) \frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) \right] = \\
& = x^{2\nu+2} R_1(x) + x^{2\nu+4} R_2(x), \quad (3)
\end{aligned}$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — степенные ряды.

При $\nu > -1$ правая часть равенства (3) обращается в нуль при $x = 0$. Используя этот факт при вычислении нижнего предела в левой части (2), а также новые переменные $\lambda = \alpha/l$, $\mu = \beta/l$, получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l x J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right) J_\nu\left(\frac{\beta}{l}x\right) dx = \\
& = \frac{l^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[\alpha J_\nu(\beta) \frac{d}{d\alpha} J_\nu(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) \frac{d}{d\beta} J_\nu(\beta) \right].
\end{aligned}$$

Из последнего равенства при условиях (1) следует ортогональность функций Бесселя.

2. Найти производящую функцию для функций Бесселя целого порядка.

Решение

По определению производящей функции $F(x, \xi)$:

$$F(x, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \xi^n \quad (1)$$

Из определения видно, что в силу $J_0(0) = 1$ производящая функция удовлетворяет условию:

$$F(0, \xi) = 1. \quad (2)$$

Продифференцируем разложение (1):

$$\frac{dF}{dx}(x, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) \xi^n.$$

При помощи рекуррентных соотношений (см., дом. задачу N 4) данное равенство можно преобразовать:

$$\frac{dF}{dx}(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x) \xi^n - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x) \xi^n. \quad (3)$$

Поскольку пределы суммирования включают все целые числа выражение (3) можно представить:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x, \xi) &= \frac{1}{2} \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x) \xi^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x) \xi^{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) F(x, \xi). \end{aligned}$$

Т.е. мы получили дифференциальное уравнение с граничным условием (2):

$$\frac{dF}{dx}(x, \xi) = \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) F(x, \xi).$$

Решая его, получаем:

$$F(x, \xi) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \right].$$

8.1.2 Аудиторные задачи

1. Выразить функцию Бесселя через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Указание: Выполнить преобразование $F(a; c; kx) = \exp(\alpha x) x^{-\beta} y(x)$. Постоянные α, β, k, a, c выбрать так, чтобы уравнение для вырожденной гипергеометрической функции перешло в уравнение Бесселя для функции $y(x)$. Использовать нормировочное условие $J_0(0) = 1$.

2. Используя явный вид производящей функции, найти интегральное представление Зоммерфельда для функции Бесселя целого порядка:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \sin \varphi - in\varphi) d\varphi.$$

3. Используя решение уравнения для цилиндрических функций в виде контурного интеграла:

$$y(x) = C_\nu x^\nu \int_\Gamma e^{sx} (s^2 + 1)^{\nu-1/2} ds,$$

записать интегральное представление для функций Ханкеля 1-го и 2-го рода. Контур интегрирования удовлетворяет условию:

$$e^{sx} (s^2 + 1)^{\nu+1/2} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

s_1, s_2 – конечные точки контура.

4. Используя результаты предыдущей задачи, найти для функций Ханкеля представление в виде ряда.

5. Используя решение уравнения для цилиндрических функций в виде контурного интеграла (см. ауд. задачу N 3), доказать связь между функцией Бесселя и функциями Ханкеля:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)).$$

Указание: см., интегральное представление для функции Бесселя в дом. задаче N 3.

6. Доказать, что

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(x), \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(x).$$

7. Используя определение сферической функции Бесселя:

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(x),$$

написать уравнение для сферических функций.

8.1.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить квадрат нормы функции Бесселя:

$$|J_\nu(\alpha x/l)|^2 = \int_0^l x J_\nu^2\left(\frac{\alpha}{l}x\right) dx.$$

Указание: перейти к пределу $\beta \rightarrow \alpha$ в соотношении ортогональности (см., задачу N 1).

2. Используя связь функции Бесселя с вырожденной гипергеометрической функцией (см. аудиторную задачу N 2), записать для функции Бесселя представление в виде ряда.

3. Используя связь функции Бесселя с вырожденной гипергеометрической функцией (см. аудиторную задачу N 2), записать для функции Бесселя интегральное представление Пуассона:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos(xt) dt.$$

Указание: воспользоваться интегральным представлением для вырожденной гипергеометрической функции.

4. Используя представление через ряд (см. домашнюю задачу N2), доказать рекуррентные соотношения:

$$2 J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \quad \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x).$$

5. Показать, что уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 v(r, \varphi, z) + \lambda v(r, \varphi, z) = 0,$$

в цилиндрических координатах при условиях:

$$v(r, \varphi, z) = v(r, \varphi), \quad v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi)$$

сводится к уравнению для цилиндрических функций.

Указание: используя условие периодичности, разложить функцию $v(r, \varphi)$ в

ряд Фурье.

6. Используя выражение для модифицированной функции Бесселя:

$$I_\nu(x) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ix),$$

записать для нее представление через ряд, интегральное представление Пуассона, интегральное представление Зоммерфельда.

7. Используя выражение для функции Макдональда:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(ix),$$

найти для нее интегральное представление.

8. Используя интегральное представление для функций Ханкеля (см. аудиторную задачу N 3) и связь между функциями Ханкеля и Бесселя найти явный вид $H_{1/2}^{(1,2)}(x)$, $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$, $J_{-3/2}(x)$.

9. При помощи разложения в ряд доказать, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

10. Доказать теорему сложения Неймана:

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2)$$

Указание: Использовать производящую функцию.

Список литературы

- [1] Шабат, Б.В. *Введение в комплексный анализ. Ч.1.* / Б.В.Шабат – М.: Наука, 1976.
- [2] Лаврентьев, М.А. *Методы теории функций комплексного переменного.* / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат – М.: Наука, 1987.
- [3] Евграфов, М.А. *Аналитические функции.* / М.А. Евграфов – М.: Наука, 1992.
- [4] Маркушевич, А.И. *Теория аналитических функций. Т.1.* / А.И.Маркушевич – М.: Наука, 1967. –
- [5] Евграфов, М.А. *Сборник задач по теории аналитических функций.* / М.А.Евграфов, Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин, К.А.Бежанов – М.: Наука, 1969.
- [6] Волковыский, Л.И. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* / Л.И.Волковыский, Г.Л.Лунц, И.Г.Араманович – М.: Наука, 1970.
- [7] Сидоров, Ю.В. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* / Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин – М.: Наука, 1982.
- [8] Ландау, Л.Д. *Теоретическая физика, Т.VIII. Электродинамика сплошных сред.* / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, – М.: Наука, 1982.
- [9] Градштейн, И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М.: Физматгиз, 1963.
- [10] Диткин, В.А. *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* / В.А.Диткин, А.П.Прудников – М.: Наука, 1974.
- [11] Федорюк, М.В. *Асимптотика: Интегралы и ряды.* / М.В.Федорюк – М.: Наука, 1987.
- [12] Федорюк, М.В. *Метод перевала.* / М.В.Федорюк – М.: Наука, 1977.
- [13] Найфэ, А. *Введение в методы возмущений.* / А.Найфэ – М.: Мир, 1982.

- [14] **Самойленко, А.М.** *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.* / А.М.Самойленко, С.А.Кривошея, Н.А.Перестюк – М.: Высшая школа, 1989.
- [15] **Олвер, Ф.** *Асимптотика и специальные функции.* / Ф.Олвер – М.: Наука, 1990.
- [16] **Арсенин, В.Я.** *Методы математической физики и специальные функции.* / В.Я.Арсенин – М.: Наука, 1984.
- [17] **Никифоров, А.Ф.** *Специальные функции математической физики.* / А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров – М.: Наука, 1984.
- [18] **Джеффрис, Г.** *Методы математической физики. Т.3.* / Г.Джеффрис, Б.Свирлс – М.: Мир, 1970.
- [19] **Ли, Цзун Дао** *Математические методы в физике.* / Ли Цзун Дао – М.: Мир, 1965.
- [20] **Мэтьюз, Дж.** *Математические методы физики* / Дж.Мэтьюз, Р.Уокер – М.: Атомиздат, 1972.
- [21] **Горохов, А.В.** *Методы математической физики* / А.В.Горохов, А.Ф.Крутов, А.П.Мартыненко – Самара: Изд. СамГУ, 1995.
- [22] **Арфкен, Г.** *Математические методы в физике.* / Г. Арфкен – М.: Атомиздат, 1970.
- [23] **Arfken, George B.** *Mathematical Methods for physicists.* / George B. Arfken, Hans J. Weber – Amsterdam Boston Heidelberg London New York Oxford Paris San Diego San Francisco Singapore Sydney Tokyo: Elsevier. Scientific Press, 2005.
- [24] **Weber, H.J.** *Essential mathematical methods for physicists* / H.J.Weber, G.B.Arfken – NY: Academic Press, 2003.