

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

В. Д. КУЗЕНКОВ

МЕТОДЫ И УСТРОЙСТВА
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ

Учебное пособие

КУЙБЫШЕВ 1988

Методы и устройства цифровой обработки сигналов.
Учеб. пособие / В. Д. Кузенков; Куйб. авиац. ин-т.
Куйбышев, 1988. — 96 с.

Излагаются основы теории линейных дискретных систем, алгоритмы обработки сигналов, основанные на дискретном преобразовании Фурье. Рассматриваются основы теории и расчета цифровых фильтров, эффекты конечной разрядности регистров и их влияние на точность цифровых фильтров.
Из. 47. Библиогр. — 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета института

Рецензенты: Е. А. Муштаков, С. А. Шехурдин

© Куйбышевский авиационный институт, 1988

Кузенков Виктор Дмитриевич

МЕТОДЫ И УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Редактор Е. Д. Антонова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Н. С. Курьянова

Свод. тем. пл. № 970

Сдано в набор 16.06.88 г. Подписано в печать 14.10.88 г.
ЕО 00300. Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. п. л. 5,6. Уч.-изд. л. 5,0. Т. 500 экз.
Заказ 777. Цена 20 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. академика С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. ЭОЗ Куйбышевского авиационного института,
443001. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цифровая обработка сигналов находит постоянно расширяющееся практическое применение, поэтому знание основ цифровой обработки сигналов безусловно необходимо современному радиоинженеру. Как область науки цифровая обработка интенсивно развивается и пока еще далека от своего завершения. К настоящему времени в свет вышло немало фундаментальных монографий, посвященных этой области знаний [1, 2, 4, 8, 9, 10, 11]. Вместе с тем существующая литература по тем или иным причинам малодоступна для студентов. Это обстоятельство побудило автора к написанию настоящего учебного пособия, в котором нашли отражение лишь основные аспекты цифровой обработки сигналов, относящиеся к цифровой фильтрации и спектральному анализу. В пособии излагаются, в частности, начала теории дискретных сигналов и линейных дискретных систем; алгоритмы обработки сигналов, основанные на дискретном преобразовании Фурье; свойства, особенности и методы расчета цифровых фильтров; влияние эффектов, обусловленных конечной разрядностью регистров процессоров цифровых фильтров.

Пособие предназначено для студентов радиотехнических специальностей, а также для слушателей ФПКИ.

СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

- АФ — аналоговый фильтр;
- АЧХ — амплитудно-частотная характеристика;
- АЦП — аналого-цифровой преобразователь;
- БПФ — быстрое преобразование Фурье;
- ДПФ — дискретное преобразование Фурье;
- ДС — дискретная система;
- ДФ — дискретный фильтр;
- ИХ — импульсная характеристика;
- НЦФ — неперекрестивный цифровой фильтр;
- ПтФ — передаточная функция;
- РЦФ — рекурсивный цифровой фильтр;
- ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь;
- ЦФ — цифровой фильтр;
- ФЧХ — фазочастотная характеристика.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

1.1. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ

Сигналом называют процесс, несущий информацию. Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Аналоговые сигналы непрерывны по времени и по своим значениям. Дискретные сигналы дискретны по времени, но непрерывны по значениям (амплитуде). Они могут рассматриваться как последовательности отсчетов аналогового сигнала $x_a(t)$, взятые с периодом дискретизации T : $x(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$. Часто аргумент дискретных процессов выражается в масштабе нормированного времени $t_n = t/T$. В этом случае запись дискретного сигнала упрощается: $x(n)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ — целочисленный аргумент. Ниже мы будем пользоваться обоими способами записи дискретного сигнала без дополнительных замечаний, так как способ записи ясен из контекста.

При цифровой обработке сигналы представляются в виде последовательностей чисел. Цифровой сигнал образуется посредством временной дискретизации аналогового сигнала с шагом T и дальнейшего преобразования полученных дискретных отсчетов в цифровую форму. При таком преобразовании каждому отсчету сигнала ставится в соответствие двоичный код — физическое представление числа. Отсчеты сигнала имеют конечную величину разрядности, ограниченную точностью представления чисел в ЭВМ. Поэтому отсчеты цифрового сигнала могут принимать одно из ряда допустимых дискретных значений — уровней квантования. Шаг квантования по уровню определяется весом младшего разряда двоичного числа сигнала (рис. 1.1). Таким образом цифровые сигналы являются дискретными по времени (аргументу) и квантованными по значениям (уровню). При

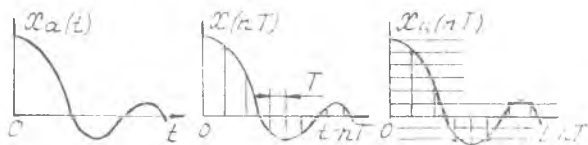


Рис. 1.1

ограниченном числе разрядов двоичных чисел обычные операции сложения и умножения применительно к цифровому сигналу оказываются, вообще говоря, нелинейными. Во избежание связанных с этим трудностей исследование эффектов, обусловленных квантованием сигналов, выделяют в особый класс задач. Во всех других случаях в качестве модели цифрового сигнала берутся дискретные сигналы, которые можно рассматривать как цифровые, амплитуда которых определена с неограниченно высокой точностью.

Приведем примеры некоторых дискретных сигналов (рис. 1.2):

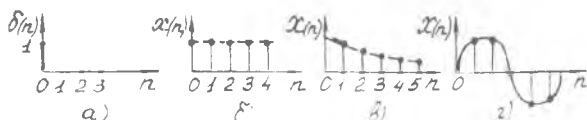


Рис. 1.2

$$\text{единичный импульс} \quad \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0; \\ 0 & \text{при } n \neq 0; \end{cases} \quad (1.1, \text{а})$$

$$\text{единичная ступень} \quad u(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0; \\ 0 & \text{при } n < 0; \end{cases} \quad (1.1, \text{б})$$

$$\text{дискретная экспонента} \quad x(n) = \begin{cases} C^n & \text{при } n \geq 0; \\ 0 & \text{при } n < 0; \end{cases} \quad (1.1, \text{в})$$

$$\text{дискретная синусоида} \quad x(n) = \sin \omega n. \quad (1.1, \text{г})$$

1.2. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Обобщенная система цифровой обработки сигналов, структурная схема которой изображена на рис. 1.3, состоит из АЦП,

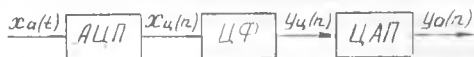


Рис. 1.3

осуществляющего дискретизацию и квантование входного аналогового сигнала $x_a(t)$; ЦФ, преобразующего в соответствии с заданным алгоритмом входную последовательность $x_u(n)$ в выходную $y_u(n)$; ЦАП, восстанавливающего аналоговый сигнал $y_a(t)$. Физически ЦФ — это процессор, оперирующий с двоичными кодами — отсчетами цифрового сигнала. Посколь-

ку при ограниченной разрядности регистров процессора арифметические операции в нем выполняются не совсем точно (например, за счет усечения или округления произведений), ЦФ, строго говоря, представляют собой нелинейные устройства. К ним не применимы методы синтеза и анализа линейных систем, даже в случаях, когда алгоритмы обработки являются линейными. Однако, как правило, величина разрядности чисел, циркулирующих в ЦФ, выбирается достаточно большой, чтобы ошибки, связанные с неточностью вычислений, были малыми. В этих условиях цифровые сигналы и ЦФ приближенно можно считать дискретными сигналами и соответственно дискретными фильтрами. Ниже преимущественно будут изучаться линейные, инвариантные к временному сдвигу, стационарные ДФ. Заметим, что инвариантность к сдвигу означает, что временный сдвиг последовательности на входе системы приводит лишь к пропорциональному сдвигу выходной последовательности. Параметры стационарных систем не изменяются во времени. Так как мы полагаем, что в ЦФ алгоритмы обработки сигналов реализуются точно, то, если не оговорим особо, не будем делать различий между ДФ и ЦФ. Это позволяет использовать аппарат теории линейных систем применительно к ЦФ.

Известны два основных метода (класса методов), используемых в задачах анализа и синтеза линейных дискретных систем. Один из них основан на использовании структурных схем, передаточных функций, частотных характеристик, интегральных преобразований Лапласа, Фурье или Z-преобразования. Мы сначала ознакомимся с этим методом. Затем обратимся ко второму — методу пространства состояний.

1.3. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

В теории ЦФ Z-преобразование имеет такое же значение, как преобразование Лапласа в теории АФ. Покажем связь этих преобразований. Запишем преобразование Лапласа

$$X_a(p) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-pt} dt, \quad (1.2)$$

где $x_a(t)$ — аналоговая функция времени ($x_a(t) = 0$ при $t < 0$);

$X_a(p)$ — ее отображение по Лапласу.

Воспользуемся для вычисления (1.2) численным методом прямоугольников, положив $t = nT$ и $dt = T$, получим

$$X_a(p) = T \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-npT}. \quad (1.3)$$

Выражение, с точностью до множителя T совпадающее с выражением (1.3), называется *дискретным преобразованием*

Лапласа:

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (1.4)$$

Введем комплексную переменную

$$z = e^{pT} \quad (1.5)$$

и получим формулу прямого Z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}. \quad (1.6)$$

Изучение соответствия между p - и z -плоскостями, на которых задаются L - и Z -отображения, является весьма важным, так как проектирование АФ часто основывается на анализе распределения нулей и полюсов передаточной функции системы на p -плоскости. Это относится также к ЦФ и z -плоскости. Преобразование (1.4) в (1.6) с помощью переменной (1.5) означает конформное отображение комплексной плоскости p в комплексную z -плоскость (рис. 1.4). При этом ось мнимых p -плоскости отображается в окружность единичного радиуса z -плоскости, а левая p -полуплоскость --

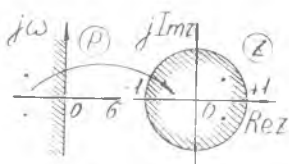


Рис. 1.4

во внутренность круга радиуса $|z|=1$.

Сформулируем основные теоремы Z-преобразования.

Теорема линейности. Z-преобразование суммы $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ равно сумме Z-преобразований слагаемых $X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$.

Доказательство: учитывая формулу (1.6), запишем

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)] z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + \\ &+ b \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Теорема о сдвиге во временной области. Если $X(z) = Z\{x(n)\}$ и $x(n) = 0$ при $n < 0$, то Z-преобразование сдвинутой последовательности $Z\{x(n-r)\} = z^{-r}X(z)$.

Доказательство: Z-преобразование сдвинутой последовательности $Z\{x(n-r)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-r)z^{-n} = \sum_{n=r}^{\infty} x(n-r)z^{-n}$.

Заменим переменную $m = n-r$ и получим $Z\{x(n-r)\} = z^{-r} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = z^{-r}X(z)$.

Теорема о Z -преобразовании свертки. Дискретной сверткой $y(n)$ двух последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ называют выражение $y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) h(n-r)$. Свойства и значение свертки мы рассмотрим ниже. Здесь докажем теорему: Z -преобразование свертки $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n}$ равно произведению Z -преобразований свертываемых последовательностей $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$.

Доказательство: запишем $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} x(r) h(n-r) z^{-n}$.

Переменим порядок суммирования и учтем, что $h(n) = 0$ при $n < 0$. Тогда $Y(z) = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) \sum_{n=0}^{\infty} h(n-r) z^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) \times$
 $\times \sum_{n=r}^{\infty} h(n-r) z^{-n}$. Заменяем во внутренней сумме переменную суммирования $m = n - r$ и получим $Y(z) = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) z^{-r} \times$
 $\times \sum_{m=0}^{\infty} h(m) z^{-m} = X(z) H(z)$.

Рассмотрим методы вычисления обратного Z -преобразования. Обращение Z -преобразования $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$ можно выполнить несколькими методами.

Контурный интеграл

$$x(n) = (1/2\pi j) \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.8)$$

позволяет получить выражение для временной последовательности в замкнутом виде. Здесь контур интегрирования охватывает все особые точки (полюсы) функции $X(z)$. Для доказательства (1.8) умножим выражение (1.6) на z^{n-1} и запишем

$$X(z) z^{n-1} = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) z^{n-r-1}$$

и вычислим контурные интегралы от левой, правой частей полученного выражения.

Тогда

$$\oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) \oint_c z^{n-r-1} dz. \quad (1.9)$$

Согласно известной в теории функций комплексного переменного теореме Коши

$$\int_C z^{n-j-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{при } r = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, в правой части выражения (1.9) только один член суммы отличен от нуля, для которого $r = n$. Учитывая это, получим выражение $2\pi j x(n) = \oint_C X(z) z^{n-1} dz$, равносильное (1.8).

Метод получения обратного Z-преобразования на основании разложения функции $X(z)$ в степенной ряд по степеням z^{-1} не требует интегрирования в комплексной плоскости. В самом деле запишем бесконечный ряд

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (1.10)$$

Далее запишем формулу (1.6) прямого Z-преобразования в виде

$$X(z) = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots \quad (1.11)$$

В результате сравнения формул (1.11) с (1.10) получим

$$x(0) = c_0; \quad x(1) = c_1; \quad x(2) = c_2 \dots \quad (1.12)$$

Для дробно-рациональных функций $X(z) = A(z)/B(z)$, где $A(z)$, $B(z)$ — полиномы от z^{-1} , разложение (1.10) нетрудно получить простым делением числителя $A(z)$ на знаменатель $B(z)$. Метод разложения в степенной ряд дает только численное решение для $x(n)$.

На практике для получения обратного Z-преобразования можно пользоваться таблицами такого преобразования, которые приведены в справочной литературе [3].

3 1.4. ЛИНЕЙНАЯ ДИСКРЕТНАЯ СВЕРТКА. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДС

Во временной области линейная инвариантная к сдвигу ДС полностью определяется своей ИХ $h(n)$, а алгоритм фильтрации — линейной дискретной сверткой. По определению ИХ — это отклик фильтра на единичный импульс $\delta(n)$ (1.1а).

Выходной $y_a(t)$ и входной $x_a(t)$ сигналы линейной АС связаны интегралом свертки $y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(\tau) x_a(t-\tau) d\tau$, где

$h_a(t)$ — ИХ системы.

В дискретной свертке операцию интегрирования следует заменить суммированием:

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r) x(n-r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n-r) x(r), \quad (1.13)$$

где $x(n)$, $y(n)$ — входная и выходная последовательности соответственно, $h(n)$ — дискретная ИХ ЦФ.

Для физически реализуемых (каузальных) ДФ $h(n) = 0$ при $n < 0$. Если, кроме того, $x(n) = 0$ при $n < 0$, то

$$y(n) = \sum_{r=0}^n h(r) x(n-r) = \sum_{r=0}^n h(n-r) x(r). \quad (1.14)$$

Соотношение (1.14), имеющее большое значение при математическом описании и анализе ЦФ, известно под названием *линейной дискретной свертки*.

ДФ математически описываются дифференциальными уравнениями. Подобным образом ЦФ можно описать разностными уравнениями. В зависимости от вида этих уравнений различают два типа ЦФ: рекурсивные и нерекурсивные.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{r=0}^L b_r y(n-r) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m), \quad (1.15)$$

где $x(n)$, $y(n)$ — отсчеты входной и выходной последовательностей, соответственно; a_i , b_i — коэффициенты (постоянные для стационарных фильтров).

Положим в выражении (1.3) $b_0 = 1$ и перепишем его в виде

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m) - \sum_{r=1}^L b_r y(n-r). \quad (1.16)$$

Уравнениями вида (1.16) описывается РЦФ. Как видно, в этом фильтре величина отсчета выходной последовательности n в текущем моменте времени n определяется значениями отсчета входной последовательности $x(n)$ в этом же времени, M -входными предшествующими воздействиями, а также L -выходными отсчетами в предшествующих моментах времени. Таким образом РЦФ — это система с обратной связью. Она обладает бесконечной памятью, так как каждое значение выходной последовательности определяется всей предысторией входного воздействия. ИХ такой системы имеет бесконечную длительность, поэтому РЦФ называют также БИХ (с бесконечной ИХ) фильтрами.

Разностное уравнение для НЦФ можно получить, если положить в (1.16) $b_r \equiv 0$, тогда

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m). \quad (1.17)$$

В этом случае отсчет выходной последовательности $y(n)$ зависит только от входных отсчетов: текущего $x(n)$ и в M предшествующих моментах времени и не зависит от значений выхо-

да. Эти системы обладают конечной памятью и, соответственно, ИХ, имеющей конечное число отсчетов. Такие фильтры называют также КИХ (с конечной ИХ) — фильтрами.

Покажем, что в ИЦФ величины коэффициентов разностного уравнения (1.17) тождественно равны отсчетам ИХ фильтра. Предположим, что длина импульсной характеристики составляет $N = M - 1$ отсчетов, и запишем свертку (1.2) для значений времени $n \geq N - 1$:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(n-m) x(m). \quad (1.18)$$

Как видно, выражения (1.17) и (1.18) эквивалентны при условии $a_m = h(m)$.

Ц

1.5. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЦФ

В области Z -отображений ЦФ описывается своей передаточной функцией (ПтФ).

Получим выражение для ПтФ. Для этого применим к левой и правой частям разностного уравнения (1.16) операцию Z -преобразования и, используя теорему о временном сдвиге, запишем

$$Y(z) \left(1 + \sum_{r=1}^L b_r z^{-r}\right) = X(z) \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}, \quad (1.19)$$

где $Y(z) = Z\{y(n)\}$, $X(z) = Z\{x(n)\}$.

ПтФ ЦФ определяется как отношение Z -отображения выходной последовательности к Z -отображению входной последовательности

$$H(z) = Y(z) / X(z). \quad (1.20)$$

Используя формулы (1.19), (1.20), получим выражение для ПтФ РЦФ

$$H(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} / \left(1 + \sum_{r=1}^L b_r z^{-r}\right). \quad (1.21)$$

Подобным образом, на основе уравнения (1.17), для ПтФ ИЦФ можно получить

$$H(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}. \quad (1.22)$$

Определение неизвестной последовательности выходного сигнала ЦФ $y(n)$ через известную последовательность — входной сигнал $x(n)$ в случае, когда фильтр задан своими коэффициентами, может быть выполнено двумя способами; во временной области, путем решения разностных уравнений (1.16) или

(1.17), и в области Z -отображений. Во втором случае задача решается в три этапа.

1. Определение Z -преобразования входной последовательности $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ и ПтФ $H(z)$ (1.21) или (1.22) в зависимости от типа фильтра. Ясно, что $X(z)$ должно вычисляться для каждой реализации входной последовательности, в то время как ПтФ $H(z)$ — единожды для данного фильтра.

2. Определение Z -отображения выходной последовательности в соответствии с формулой (1.20):

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z). \quad (1.23)$$

3. Вычисление обратного Z -преобразования по формуле $y(n) = (1/2\pi j) \oint_c Y(z) z^{n-1} dz$ либо другим способом, рассмотренным в п. 1.4. Заметим, что часто используется модификация приведенного алгоритма, которая основана на использовании частотных характеристик фильтров. На этом алгоритме подробнее остановимся ниже.

ПтФ ЦФ $H(z)$ связана с ИХ $h(n)$ Z -преобразованием:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}. \quad (1.24)$$

Это соотношение нетрудно получить, если применить операцию Z -преобразования к свертке (1.14) и учесть формулу (1.23). Ясно, что справедлива также формула обращения

$$h(n) = (1/2\pi j) \oint_c H(z) z^{n-1} dz. \quad (1.25)$$

Для физически реализуемых систем ПтФ — суть дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются полиномами комплексной переменной z^{-1} (см. выражение 1.21). Разложив полиномы числителя и знаменателя выражения $H(z)$ на элементарные множители, запишем ПтФ ЦФ в виде

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{r=1}^L (1 - d_r z^{-1})} = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{z^M \prod_{r=1}^L (z - d_r)}. \quad (1.26)$$

где H_0 — константа; d_r — полюсы ПтФ (корни знаменателя); c_m — нули (корни числителя).

ПтФ с действительными коэффициентами могут иметь полюсы и нули либо действительные, либо комплексно-сопряженные пары. Распределением полюсов и нулей на комплексной z -плоскости полностью определяются свойства и характеристики ЦФ

(см. п. 1.7). Для НЦФ коэффициенты знаменателя ПтФ равны нулю, и все полюсы этих фильтров расположены в начале координат z -плоскости.

1.6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦФ

В устойчивых системах отклик на ограниченное воздействие также является ограниченным. Так как ИХ дискретной системы представляет собой отклик на единичный импульс, то условием устойчивости будет

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (1.27)$$

Устойчивость системы можно определить по положению полюсов на z -плоскости. В п. 1.3 отмечалось, что конформное отображение p -плоскости в z -плоскость переводит левую полуплоскость первой из них во внутренность единичного круга второй (см. рис. 1.4). Известно, что полюсы устойчивых аналоговых систем (АС) располагаются в левой p -полуплоскости. Это означает, что полюсы устойчивой ДС должны находиться в пределах круга радиуса $|z| < 1$. Иначе для устойчивости фильтра необходимо и достаточно выполнение условия

$$|d_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (1.28)$$

где d_k — k -й полюс ПтФ $H(z)$.

Ясно, что РЦФ при некоторых условиях теряют устойчивость, поэтому необходима проверка их устойчивости. НЦФ обладает абсолютной устойчивостью (всегда устойчивы).

5

1.7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦФ

Частотную характеристику ЦФ можно получить, воспользовавшись следующим фундаментальным свойством линейных инвариантных к временному сдвигу систем: при воздействии на вход такой системы гармонического колебания выходной сигнал также является гармоническим колебанием той же частоты и отличается от входного только значением амплитуды и запаздыванием фазы. Иначе, при воздействии на входе комплексной синусоиды с частотой ω_c

$$x(nT) = e^{j\omega_c nT} \quad (1.29)$$

выходной сигнал определяется выражением

$$y(nT) = H(e^{j\omega_c T}) e^{j\omega_c nT}, \quad (1.30)$$

где $H(e^{j\omega_c T}) = H(e^{j\omega T})|_{\omega=\omega_c}$ — значение комплексного ко-

ε-эффекта передачи (частотной характеристики) на частоте $\omega = \omega_c$.

Подставим выражение (1.29) в свертку (1.14) и получим

$$y(nT) = \sum_{r=0}^{\infty} h(rT) e^{j\omega_c(n-r)T} = e^{j\omega_c nT} \sum_{r=0}^{\infty} h(rT) e^{-j\omega_c rT}. \quad (1.31)$$

Сравнивая выражения (1.30) с (1.31) и полагая значение частоты ω_c произвольным, получим для частотной характеристики

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (1.32)$$

Как видно, выражения (1.32) и (1.24) совпадают, если в последнем положить $z = e^{j\omega T}$. Это совпадение не случайно. В самом деле, частотную характеристику АС можно получить, если взять значения ее передаточной функции на p -плоскости вдоль оси мнимых: $H_a(j\omega) = H_a(p)|_{p=j\omega}$. Подобным образом частотную характеристику ДС составляют значения передаточной функции $H(z)$, взятые на z -плоскости по окружности единичного радиуса: $H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$. Таким образом, если известно выражение ПтФ $H(z)$, то для получения частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$ в этом выражении достаточно выполнить подстановку $z = e^{j\omega T}$. Частотная характеристика (1.32) является комплексной функцией вещественного аргумента ωT : $H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j \arg H(e^{j\omega T})}$, модуль которой $A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ составляет АЧХ, а аргумент $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$ — ФЧХ фильтра. Имея в виду ПтФ (1.21), нетрудно получить выражения для АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^M a_m \cos m \omega T)^2 + (\sum_{m=0}^M a_m \sin m \omega T)^2}{(1 + \sum_{r=1}^L b_r \cos r \omega T)^2 + (\sum_{r=1}^L b_r \sin r \omega T)^2}} \quad (1.33)$$

и для ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\sum_{r=1}^L b_r \sin r \omega T}{1 + \sum_{r=1}^L b_r \cos r \omega T} + \arctg \frac{\sum_{m=0}^M a_m \sin m \omega T}{\sum_{m=0}^M a_m \cos m \omega T}. \quad (1.34)$$

Если выражение ПтФ записано в виде (1.26), то можно получить

$$H(e^{j\omega T}) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega T} - c_m)}{e^{j\omega(L-M)T} \prod_{r=1}^L (e^{j\omega T} - d_r)}. \quad (1.35)$$

Представив в выражении (1.35) сомножители в показательной форме

$$e^{j\omega T} - c_m = A_{nm} e^{j\varphi_{nm}}; \quad e^{j\omega T} - d_r = A_{nr} e^{j\varphi_{nr}}, \quad (1.36)$$

получим

$$A(\omega) = H_0 \prod_{m=1}^M A_{nm} / \prod_{r=1}^L A_{nr}; \quad \varphi(\omega) = \sum_{m=1}^M \varphi_{nm} - \sum_{r=1}^L \varphi_{nr} - \omega(M-L)T. \quad (1.37)$$

Формулы (1.37) удобны для графоаналитического расчета АЧХ и ФЧХ. Модули и углы векторов в (1.36) определяются по векторной диаграмме, которая строится на основе распределения нулей и полюсов ПтФ на z -плоскости. Для РЦФ второго порядка векторная диаграмма приведена на рис. 1.5. АЧХ и ФЧХ можно получить по (1.37), повторяя процедуру определения векторов для ряда точек на единичной окружности. Точки a и b этой окружности соответствуют частотам 0 и π/T , а полный оборот вектора $e^{j\omega T}$ против часовой стрелки соответствует приращению частоты $\omega_0 = 2\pi/T$ в радианах на секунду. Отметим, что $\omega_0 = 2\pi f_0$ — это частота дискретизации цифрового сигнала. Важная особенность ДС состоит в том, что их частотные характеристики, в отличие от подобных характеристик АС, являются периодическими функциями частоты ω с периодом $2\pi/T$. В самом деле, если вектор $e^{j\omega T}$ на рис. 1.5 совершит k полных оборотов, то значения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ останутся неизменными, и поэтому $H(e^{j(\omega+k\omega_0)T}) = H(e^{j\omega T})$ — периодическая функция. То же самое можно показать на основании (1.32):

$$\begin{aligned} H(e^{j(\omega+k\omega_0)T}) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j(\omega+k\omega_0)nT} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega nT} = H(e^{j\omega T}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.38)$$

Нетрудно показать физическую причину этого явления. Дискретные сигналы $\sin(\omega nT)$ и $\sin[(\omega+k\omega_0)nT]$ имеют совпадающие отсчеты (рис. 1.6), и поэтому фильтр на эти сигналы должен реагировать одинаково.

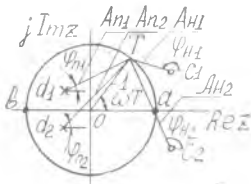


Рис. 1.5

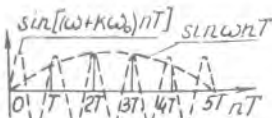


Рис. 1.6

Типичный вид АЧХ и ФЧХ цифрового ФНЧ показан на рис. 1.7, а и б соответственно. Как видно, основной период частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$ ограничен частотным интервалом — $\pi/T \dots \pi/T$, который обычно называют *основным диапазоном*. Рабочий диапазон частот ЦФ ограничен по сути дела основным диапазоном.

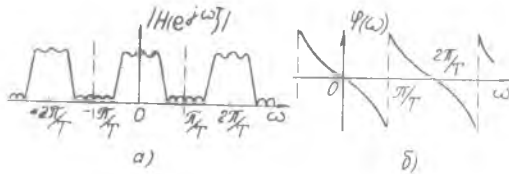


Рис. 1.7

Обратимся к вопросу получения ИХ ДС по ее частотной характеристике. Учтем, что выражение (1.32) представляет собой разложение периодической функции $H(e^{j\omega T})$ в ряд Фурье. Коэффициенты этого ряда, составляющие отсчеты ИХ, определяются обычным, известным из теории рядов Фурье, способом:

$$h(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.39)$$

Интегрирование в (1.39) производится на интервале $(-\pi/T, \pi/T)$ — периоде частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$.

1.8. СПЕКТР ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

Комплексный спектр $X(e^{j\omega T})$ дискретной последовательности $x(nT)$ можно получить с помощью преобразования Фурье:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (1.40)$$

Пределы суммирования здесь выбраны в предположении, что сигнал $x(nT)$ может существовать как в области положительного, так и отрицательного времени. Спектр $X(e^{j\omega T})$ является периодической функцией частоты с периодом $\omega_0 = 2\pi/T$, что можно показать подобно (1.38).

Сигнал $x(nT)$ через его спектр можно выразить с помощью обратного Фурье-преобразования

$$x(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.41)$$

Интегрирование в (1.41) производится на интервале $-\pi/T \dots \pi/T$, равном одному периоду спектра $X(e^{j\omega T})$. Ясно, что спектр

сигнала на выходе ДС равен произведению спектра на входе на частотную характеристику системы:

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T}).$$

Отсюда следует, что отклик ДС на входную последовательность $x(nT)$ может быть определен с помощью интеграла Фурье вида

$$y(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.42)$$

Во многих случаях полезным является равенство Парсеваля, которое для ДС можно получить из (1.40):

$$\begin{aligned} \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1T) x(n_2T) \times \\ &\times e^{j\omega(n_2 - n_1)T} d\omega = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1T) x(n_2T) \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega(n_2 - n_1)T} d\omega. \end{aligned}$$

Так как интеграл

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega(n_2 - n_1)T} d\omega = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 = n_2, \\ 0 & \text{при } n_1 \neq n_2, \end{cases}$$

то получим окончательно

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)|^2 &= (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \\ &= (T/\pi) \int_0^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Рассмотрим задачу дискретизации АС и определим структуру спектра дискретной последовательности и характер его связи со спектром исходного аналогового процесса.

Пусть задан аналоговый сигнал $x_a(t)$ и его спектр $X_a(j\omega)$ (рис. 1.8, а). Аналоговый сигнал выражается через свой спектр с помощью обратного преобразования Фурье:

$$x_a(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.44)$$

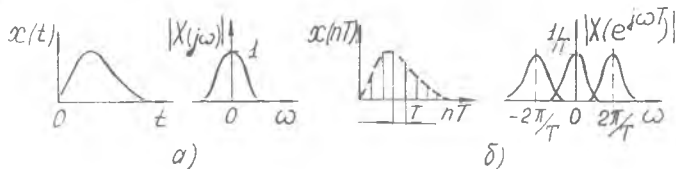


Рис. 1.8

Полагая в выражении (1.35) $t = nT$, для дискретной последовательности $x(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$ запишем

$$\begin{aligned} \lambda(nT) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega = \\ &= (1/2\pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/T}^{(2k+1)\pi/T} X_a(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \end{aligned} \quad (1.45)$$

В выражении (1.45) ось частот $(-\infty, \infty)$, вдоль которой производится интегрирование, разбивается на совокупность отрезков длиной $2\pi/T$ каждый. Исходный интеграл представляется в виде суммы частных интегралов, взятых на указанных частотных подынтервалах. В правой части выражения (1.45) заменим переменную интегрирования $\omega' = \omega - 2\pi k/T$ и переменим порядок суммирования и интегрирования:

$$\lambda(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + (2\pi/T)k)] e^{j\omega nT} d\omega.$$

Соотношение спектров дискретного и аналогового сигналов нетрудно получить путем сравнения полученного выражения с (1.41):

$$X(e^{j\omega T}) = (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + (2\pi/T)k)]. \quad (1.46)$$

Выражение (1.46) объясняет сущность образования периодического спектра дискретного сигнала. Этот спектр состоит из взвешенной суммы (весовой множитель $1/T$) бесконечного числа спектров аналогового сигнала, сдвинутых по частоте на величину $2\pi k/T$, $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$ (рис. 1.8,б). Если спектр аналогового сигнала ограничен по частоте и сосредоточен в полосе частот $|\omega| \leq \pi/T$ ($X_a(j\omega) = 0$ при $\omega > \pi/T$), то спектр дискретной последовательности (на одном периоде) и спектр аналогового сигнала совпадают. В этом случае при цифроаналоговом преобразовании из дискретной последовательности может быть выделен исходный аналоговый процесс без искажений. Если указанное выше ограничение полосы спектра аналогового сигнала не выполняется, то сдвинутые вдоль оси абсцисс копии спектра этого процесса перекрываются и при сложении искажаются. В результате возникают ошибки наложения. Сказанное основывается на известной в теории сигналов теореме отсчетов Котельникова. Следует, однако, иметь в виду, что реально условия теоремы Котельникова могут выполняться приближенно, так как ограниченные по времени сигналы теоретически имеют бесконечные по частоте спектры и наоборот. Поэтому ошибки, связанные с дискретизацией сигналов по време-

ни, принципиально неизбежны. Величиной этих ошибок можно управлять путем выбора величины частоты дискретизации $f_0 = 1/T$.

1.9. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В современной теории систем и сигналов находит применение метод пространства состояний. Рассмотрим основы этого метода. Геометрическая интерпретация метода дается на основе понятия многомерного обобщенного пространства [5].

В пространстве состояний любая сложная линейная система рассматривается как многомерная и описывается системой дифференциальных уравнений или системой разностных уравнений первого порядка в зависимости от вида системы (аналоговая или дискретная).

Благодаря низкому (первому) порядку, эти системы уравнений решаются непосредственно во временной области, без использования интегральных (частотных) преобразований. В этом состоит одна из наиболее существенных особенностей метода.

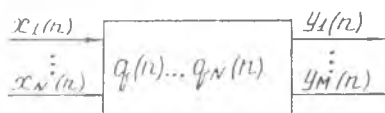


Рис. 1.9

Многомерная ДС имеет N входов и M выходов (рис. 1.9), на которых действуют сигналы $x_1(n) \dots x_N(n)$ и $y_1(n) \dots y_M(n)$ соответственно. Кроме того, в методе пространства состояний вводятся переменные состояния $q_1(n) \dots q_N(n)$, характеризующие состояние системы в текущем времени n (здесь n — безразмерное время). Многомерные сигналы и переменные состояния удобно представить в виде векторов, а для уравнений, их связывающих, использовать матричную форму. В таком случае входные и выходные сигналы, переменные состояния можно рассматривать как координаты соответствующих векторов, заданных в обобщенном многомерном фазовом пространстве.

Ясно, что состояние системы в любой момент времени характеризуется совокупностью координат вектора состояния. С этими представлениями связано наименование метода.

Описание систем в пространстве состояний, матричная форма уравнений являются удобными для решения на ЭВМ. Метод пространства состояний может применяться к некоторым типам нестационарных и нелинейных систем. В этом состоит достоинства метода. Вместе с тем рассмотренный выше частотный метод во многих случаях обладает большей компактностью и наглядностью.

1.10. АНАЛИЗ ДС В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ*

Описание ДС в пространстве состояний позволяет сравнительно просто провести временной анализ. Обратимся сначала к более общему случаю нестационарных ДС. К нестационарным относятся адаптивные системы, оптимальные и квазиоптимальные фильтры типа Калмана и другие. Хотя такие системы в настоящем пособии не изучаются, они имеют большое практическое значение.

Для метода пространства состояний характерно описание системы уравнениями вида

$$\bar{q}(n+1) = \bar{A}(n)\bar{q}(n) + \bar{B}(n)\bar{x}(n); \quad (1.47)$$

$$\bar{y}(n) = \bar{C}(n)\bar{q}(n) + \bar{D}(n)\bar{x}(n), \quad (1.48)$$

первое из которых обычно называют *уравнением состояния*, а второе — *уравнением выхода*. Здесь $\bar{x}(n) = [x_1(n) x_2(n) \dots x_N(n)]^T$ — N -мерный вектор входного сигнала (T — символ транспонирования); $\bar{y}(n) = [y_1(n) y_2(n) \dots y_M(n)]^T$ — M -мерный вектор выходного сигнала; $\bar{q}(n) = [q_1(n) q_2(n) \dots q_N(n)]^T$ — N -мерный вектор переменных состояния; $\bar{A}(n)$, $\bar{B}(n)$, $\bar{C}(n)$, $\bar{D}(n)$ — матрицы коэффициентов с переменными параметрами соответствующих размерностей. Ясно, что система с такими коэффициентами является нестационарной.

По своей форме уравнение (1.47) является векторно-матричным неоднородным разностным уравнением первого порядка. По логической сущности это уравнение означает, что вектор состояния системы в последующем шаге (на следующем тактовом интервале времени) определяется значением вектора состояний в текущем шаге и значением вектора входа также в текущем времени. Ясно, что такая структура уравнения состояния позволяет моделировать инерционность системы. В самом деле, чем больше вес вектора состояния в правой части (1.47), тем сильнее инерционность системы. Уравнение выхода является алгебраическим векторно-матричным.

Решение (1.47) можно получить с помощью следующей итерационной процедуры:

$$\text{шаг } n = 0 \quad \bar{q}(1) = \bar{A}(0)\bar{q}(0) + \bar{B}(0)\bar{x}(0);$$

$$\begin{aligned} \text{шаг } n = 1 \quad \bar{q}(2) &= \bar{A}(1)\bar{q}(1) + \bar{B}(1)\bar{x}(1) = \\ &= \bar{A}(1)\bar{A}(0)\bar{q}(0) + \bar{A}(1)\bar{B}(0)\bar{x}(0) + \bar{B}(1)\bar{x}(1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{произвольное } q(n) &= \bar{A}(n-1)\bar{A}(n-2) \dots \bar{A}(1)\bar{q}(0) + \\ n-1 \quad &+ \bar{A}(n-1)\bar{A}(n-2) \dots \bar{A}(1)\bar{B}(0)\bar{x}(0) + \end{aligned}$$

* В данном учебном пособии только в п. 1.10 буквы с черточкой сверху означают векторы.

$$+ \bar{A}(n-1)\bar{A}(n-2)\dots\bar{A}(2)\bar{B}(1)\bar{x}(1) + \dots + \\ + \bar{A}(n-1)\bar{B}(n-2)\bar{x}(n-2) + \bar{B}(n-1)\bar{x}(n-1).$$

Введем переходную матрицу состояния

$$\bar{\Phi}(n, r+1) = \bar{A}(n-1) \cdot \bar{A}(n-2) \dots \bar{A}(r+1)$$

для $r = -1, 0, 1, 2, \dots, n-2$; ($n > r+1$); и

$$\bar{\Phi}(n, r+1) |_{n=r+1} = \bar{\Phi}(r+1, r+1) = I, \quad (1.49)$$

где I — единичная (диагональная) матрица.

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\bar{q}(n) = \bar{\Phi}(n, 0) \bar{q}(0) + \sum_{r=0}^{n-1} \bar{\Phi}(n, r+1) \bar{B}(r) \bar{x}(r). \quad (1.50)$$

В формуле (1.50) текущее состояние системы $\bar{q}(n)$ выражается через начальное состояние $\bar{q}(0)$ и все предшествующие входные воздействия $x(r)$, $r=0, \dots, n-1$, поэтому эта формула является решением уравнения состояния (1.47). Так как решение алгебраических уравнений вида (1.48) обычно не встречает затруднений, то решение задачи временного анализа ДС можно считать законченным.

В стационарном случае решение (1.50) упрощается. Для стационарной системы элементы матриц в уравнениях (1.47), (1.48) — константы, поэтому эти уравнения можно записать в виде

$$\bar{q}(n+1) = \bar{A}\bar{q}(n) + \bar{B}x(n). \quad (1.51)$$

$$y(n) = \bar{C}\bar{q}(n) + Dx(n). \quad (1.52)$$

В этих формулах также учитывается, что реально ЦФ, составляющие предмет нашего изучения, имеют одномерный (т. е. скалярный) вход и выход, поэтому в формулах (1.51), (1.52) $x(n), y(n)$ полагаются скалярными переменными, D — скалярная постоянная, \bar{C} — вектор-строка, составленная из постоянных коэффициентов.

Так как матрица \bar{A} в уравнении (1.51) не зависит от времени, то переходная матрица стационарной системы является функцией разности значений дискретного времени, обозначенных в ее аргументе:

$$\bar{\Phi}(n, r+1) = \bar{\Phi}(n-r-1) = \bar{A}^{n-r-1}, \quad (1.53)$$

$$\bar{\Phi}(n, 0) = \bar{\Phi}(n) = \bar{A}^n. \quad (1.54)$$

Подставим выражения (1.53), (1.54) в формулу (1.50) и получим решение уравнения состояния для стационарной системы

$$\bar{q}(n) = \bar{A}^n \bar{q}(0) + \sum_{r=0}^{n-1} \bar{A}^{n-r-1} \bar{B}x(r), \quad (1.55)$$

где $\bar{A}^0 = I$.

Подставим (1.55) в уравнение (1.54) и получим

$$y(n) = \bar{C} \bar{A}^n q(0) + \bar{C} \sum_{r=0}^{n-1} \bar{A}^{n-r-1} \bar{B} x(r) + D x(n). \quad (1.56)$$

При нулевых начальных условиях $x(n) = 0$ при $n < 0$ и $\bar{q}(0) = 0$, т. е. для предварительно невозбужденного фильтра выражение (1.56) приводится к виду

$$y(n) = \bar{C} \sum_{r=0}^{n-1} \bar{A}^{n-r-1} \bar{B} x(r) + D x(n). \quad (1.57)$$

Формулы (1.56), (1.57) позволяют рассчитать отклик ДС на произвольное воздействие на входе, провести исследование прохождения сигналов через фильтр. Суждение о динамических характеристиках ДС как таковой можно получить по импульсной характеристике — отклику системы на тест-сигнал — единичный импульс (1,1,a):

$$h(n) = \bar{C} \sum_{r=0}^{n-1} \bar{A}^{n-r-1} \bar{B} \delta(r) + D \delta(n). \quad (1.58)$$

При $n=0$ сумма в правой части (1.58) равна нулю и, следовательно, $h(0) = D \delta(0) = D$. Для $n > 0$ можно написать

$$h(n) = \bar{C} \bar{A}^{n-1} \bar{B} \delta(0) + \bar{C} \bar{A}^{n-2} \bar{B} \delta(1) + \dots + D \delta(n). \quad (1.59)$$

Так как $\delta(0) = 1$ и $\delta(r) = 0$ при $r \neq 0$, в правой части отличается от нуля только первое слагаемое. Следовательно

$$h(n) = \begin{cases} D & \text{при } n=0; \\ \bar{C} \bar{A}^{n-1} \bar{B} & \text{при } n>0. \end{cases} \quad (1.60)$$

1.11. ОПИСАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДС

Выше предполагалось, что параметры ДС в пространстве состояний заданы. Их можно также получить путем соответствующего преобразования разностных уравнений. Рассмотрим эту задачу применительно к стационарным ДС. Возьмем ДС (рекурсивный фильтр), которая описывается разностным уравнением N -го порядка

$$y(n) = \sum_{r=0}^N a_r x(n-r) - \sum_{r=1}^N b_r y(n-r). \quad (1.61)$$

Рассмотрим процедуру приведения описания (1.61) к виду (1.51), (1.52), в которой разностное уравнение N -го порядка преобразуется в систему N уравнений первого порядка. Введем вспомогательную промежуточную переменную $v(n)$ и пред-

ставим фильтр, соответствующий уравнению (1.61), в виде двух последовательно включенных фильтров Φ_1 и Φ_2 (рис. 1.10,а). Разностные уравнения, описывающие эти фильтры, запишем как

$$v(n) = \sum_{r=0}^N a_r x(n-r), \quad (1.62)$$

$$y(n) = v(n) - \sum_{r=1}^N b_r y(n-r). \quad (1.63)$$

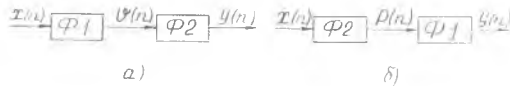


Рис. 1.10

Так как исходная ДС линейная и стационарная, то порядок включения фильтров Φ_1 и Φ_2 можно изменить (рис. 1.10,б). Тогда получим

$$p(n) = x(n) - \sum_{r=1}^N b_r p(n-r), \quad (1.64)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^N a_r p(n-r). \quad (1.65)$$

где $p(n)$ — новая промежуточная вспомогательная переменная.

Введем переменные $q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n)$:

$$\begin{aligned} q_1(n) &= p(n-N), \\ q_2(n) &= p(n-N+1), \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\dots$$

$$q_N(n) = p(n-1).$$

Теперь можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned} q_1(n+1) &= q_2(n), \\ q_2(n+1) &= q_3(n), \\ &\dots \\ q_{N-1}(n+1) &= q_N(n), \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$q_N(n+1) = -b_1 q_N(n) - b_2 q_{N-1}(n) - \dots - b_N q(n) + x(n).$$

Первые $N-1$ уравнения системы (1.67) непосредственно следуют из системы (1.66). Последнее уравнение нетрудно получить, если соответственно в последнее соотношение (1.66) подставить (1.64).

Запишем систему (1.67) в матричной форме

$$\bar{q}(n+1) = \bar{A}\bar{q}(n) + \bar{B}x(n), \quad (1.68)$$

где

$$\bar{q}(n) = \begin{pmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \dots \\ q_N(n) \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \dots & -b_1 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь составим уравнение выхода. Для этого перепишем уравнение (1.65) в виде

$$y(n) = a_0 p(n) + \sum_{r=1}^N a_r p(n-r). \quad (1.69)$$

В первое слагаемое правой части (1.69) подставим (1.64):

$$y(n) = a_0 x(n) + \sum_{m=1}^N (a_m - a_0 b_m) p(n-m). \quad (1.70)$$

Заменим в выражении (1.70) переменную суммирования $r = N - m + 1$ и запишем

$$y(n) = a_0 x(n) + \sum_{r=1}^N (a_{N-r+1} - a_0 b_{N-r+1}) p(n-N+r-1). \quad (1.71)$$

Обозначим константы $c_r = a_{N-r+1} - a_0 b_{N-r+1}$ и заменим переменные $p(n-N+r-1)$ в соответствии с (1.66). В результате получим

$$y(n) = \sum_{r=1}^N c_r q_r(n) + a_0 x(n). \quad (1.72)$$

Перепишем уравнение (1.72) в векторной форме

$$y(n) = \bar{C}\bar{q}(n) + a_0 x(n), \quad (1.73)$$

где $\bar{C} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]$ — N -мерный вектор-строка коэффициентов.

Выпишем уравнения (1.68) и (1.73):

$$\bar{q}(n+1) = \bar{A}\bar{q}(n) + \bar{B}x(n), \quad (1.74)$$

$$y(n) = \bar{C}\bar{q}(n) + a_0 x(n). \quad (1.75)$$

Ясно, что (1.74) — это уравнение состояния, а (1.75) — уравнение выхода. Эти формулы совпадают с (1.51), (1.52), если принять $D = a_0$. Таким образом мы получили описание ДС в пространстве состояний.

Связь уравнений состояния с передаточной функцией системы можно получить разными способами [1,5]. Воспользуемся соотношением (1.24):

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

и подставим в него выражение для импульсной характеристики (1.60):

$$H(z) = D + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C} \bar{A}^{n-1} \bar{B} z^{-n}.$$

Выполнив операцию суммирования, для ПтФ получим [5]

$$H(z) = \bar{C}[zI - \bar{A}]^{-1} \bar{B} + D, \quad (1.76)$$

где $[zI - \bar{A}]^{-1}$ — обратная матрица.

45 2. АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ, ОСНОВАННЫЕ НА ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ

2.1. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретное преобразование Фурье устанавливает связь между временными и частотными представлениями дискретных сигналов, составляет основу алгоритмов фильтрации сигналов в частотной области и спектрального анализа, а также ряда других эффективных алгоритмов обработки сигналов. Использование ДПФ получило особенно широкое распространение после того, как были разработаны экономные алгоритмы БПФ.

ЭВМ, как арифметическое устройство, обладающее конечным объемом памяти, оперирует только с дискретными значениями функций времени и спектральных функций, определенными на конечных интервалах. Дискретным представлением сигналов и их спектров обусловлены особенности ДПФ, среди которых важным является свойство периодичности. Рассмотрим суть этого свойства.

Из теории сигналов известно, что конечные по длительности сигналы имеют, вообще говоря, бесконечные по частоте спектры. С другой стороны, сигналы, обладающие спектрами, строго ограниченными некоторой полосой частот, должны иметь неограниченную (бесконечную) длительность. Помимо этого, как показано в п. 1.3 (см. также рис. 1.8), дискретные сигналы имеют периодические спектры, а линейчатым (дискретным) спектрам соответствуют периодические сигналы. В памяти ЭВМ, однако, могут храниться только дискретные значения сигналов и спектров и только конечные по длительности их реализации. Кажущееся противоречие между представлением сигналов, следующим из теории, и возможным представлением их в памяти ЭВМ разрешается следующим образом.

Одновременная дискретизация сигнала по времени с шагом T и его спектра с шагом дискретизации по частоте F означает,

что дискретный сигнал и соответствующий ему дискретный спектр — бесконечные периодические последовательности, причем период временной последовательности составляет $1/F$, а спектральной — $1/T$ (рис. 2.1). Очевидно, что число отсчетов последовательностей на периоде составляет $N = 1/FT$. Как будет

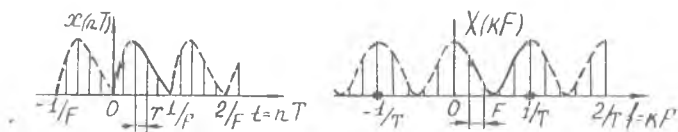


Рис. 2.1

показано, между периодом временной последовательности и одним периодом спектральной последовательности имеет место взаимнооднозначное соответствие. Поэтому нет необходимости в запоминании бесконечных периодических последовательностей сигнала и его спектра: в памяти ЭВМ достаточно хранить по одному периоду той и другой последовательности. Выше была введена нормированная шкала времени $t_n = t/T$, в которой аргумент функции времени $x(nT)$ представляется безразмерным целочисленным временем n . Подобно этому введем нормированную шкалу частот $f_n = f/F$, и вместо размерной дискретной частоты kF , $k=0, 1, 2, \dots$ будем пользоваться также безразмерной частотой k . В этом случае функцию частоты $X(kF) = X(f)|_{f=kF}$ запишем в виде $X(k)$.

Рассмотрим периодическую последовательность с периодом N : $\bar{x}(n) = \bar{x}(n+rN)$, $r=0, 1, 2, \dots$ (знак \sim означает периодичность последовательности). В силу периодичности последовательность может быть разложена в ряд Фурье, т. е. представлена суммой комплексных гармонических последовательностей с частотами, кратными основной частоте $2\pi/N$ (частоте периодичности $\bar{x}(n)$):

$$\bar{x}(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk}. \quad (2.1)$$

Верхний предел в сумме (2.1) ограничен, так как вследствие периодичности комплексной экспоненты $e^{j(2\pi/N)(k+rN)n} = e^{j(2\pi/N)nk}$, r — целое, существует только N гармонических последовательностей с различными частотами $\omega_k = (2\pi/N)k$. Нормирующий множитель $1/N$ в (2.1) не имеет принципиального значения.

Определим последовательность отсчетов спектра $\bar{X}(k)$. Для этого умножим обе части выражения (2.1) на $e^{-j(2\pi/N)nm}$ и просуммируем от $n=0$ до $N-1$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk} \right] e^{-j(2\pi/N)nm}.$$

Переменим порядок суммирования в правой части этого соотношения и запишем

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-m)n}.$$

Так как геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-m)n} = \begin{cases} N & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad (2.2)$$

то получим

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk}. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что спектральная последовательность $\bar{X}(k)$ периодическая, с периодом N . В самом деле

$$\begin{aligned} \bar{X}(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)(k+mN)n} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk} e^{-j2\pi nm} = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{j(2\pi/N)nk} = \bar{X}(k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим для удобства $W_N = e^{j(2\pi/N)}$ и перенпишем формулы (2.1), (2.3) в виде

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) W_N^{nk}, \quad (2.5)$$

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) W_N^{-nk}. \quad (2.6)$$

Выражения (2.5), (2.6) могут рассматриваться как пара преобразований и являются представлением периодической последовательности дискретным рядом Фурье.

Выделим из периодических бесконечных последовательностей $x(n)$, $X(k)$ конечные подпоследовательности длиной в один период N по правилам

$$x(n) = \begin{cases} \bar{x}(n) & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (2.7)$$

и

$$X(k) = \begin{cases} \bar{X}(k) & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.5), (2.6) справедливы также для конечных последовательностей (2.7), (2.8):

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$x(n) = \begin{cases} (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Формулы (2.9), (2.10) собственно и составляют пару дискретного преобразования Фурье, причем первая из них имеет смысл прямого ДПФ, а вторая — обратного ОДПФ. В ДПФ как сигнал $x(n)$, так и его спектр $X(k)$ являются комплексными последовательностями.

Пару ДПФ (2.9), (2.10) мы получили путем усечения бесконечных последовательностей $\tilde{x}(n)$ и $\tilde{X}(k)$. Однако свойства ДПФ конечных последовательностей совпадают со свойствами преобразования (2.5) и (2.6). Эти свойства истекают из подразумеваемой периодичности ДПФ (2.9) и (2.10). Формулы ДПФ могут рассматриваться в качестве алгоритма приближенного вычисления интегрального преобразования Фурье с помощью ЭВМ. Разумеется, что по отношению к дискретным последовательностям пара ДПФ является совершенно точным преобразованием.

2.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДПФ

Линейность. ДПФ суммы $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ равно сумме ДПФ $X(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$, где a, b — константы.

Сдвиг последовательности. Если $\tilde{x}(n)$ — периодическая последовательность с периодом N отсчетов и ДПФ $\{\tilde{x}(n)\} = \tilde{X}(k)$, то ДПФ $\{\tilde{x}(n - n_0)\} = X(k) e^{-j(2\pi/N)kn_0}$, где n_0 — целое число (временной сдвиг). Для конечных последовательностей сформулированное выше свойство справедливо при круговом сдвиге, который характеризуется перестановкой отсчетов последовательности из конца в начало или, наоборот, из начала в конец в зависимости от направления сдвига (рис. 2.2). В этом проявляется подразумеваемая периодичность ДПФ.

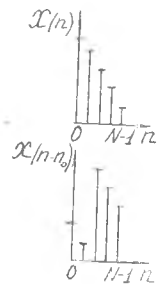


Рис. 2.2

Симметрия. Если последовательность $\tilde{x}(n)$ является действительной, то ее ДПФ имеет четную действительную и нечетную мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{X}(k) &= \operatorname{Re} \tilde{X}(-k) = \operatorname{Re} \tilde{X}(N-k), \\ \operatorname{Im} \tilde{X}(k) &= -\operatorname{Im} \tilde{X}(-k) = -\operatorname{Im} \tilde{X}(N-k). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае, если $\bar{x}(n)$ — мнимая последовательность, то ее ДПФ имеет нечетную действительную и четную мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{X}(k) &= -\operatorname{Re} \bar{X}(-k) = -\operatorname{Re} \bar{X}(N-k), \\ \operatorname{Im} \bar{X}(k) &= \operatorname{Im} \bar{X}(-k) = \operatorname{Im} \bar{X}(N-k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

На практике последовательности во временной области обычно являются действительными. В этом случае, при необходимости, две последовательности могут быть объединены в одну комплексную последовательность, действительную часть которой составляет одна последовательность, а мнимую — вторая. Используя свойства симметрии (2.11) и (2.12), ДПФ совокупной последовательности нетрудно разделить на две составляющие, являющиеся ДПФ исходных временных последовательностей. Таким образом представляется возможным с помощью одной процедуры Фурье-преобразования получить ДПФ двух последовательностей.

Периодическая (круговая) свертка. Пусть заданы две периодические последовательности $\bar{x}(n)$ и $\bar{h}(n)$, имеющие одинаковый период N отсчетов. ДПФ этих последовательностей

$$\bar{X}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}(m) W_N^{mk}; \quad \bar{H}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} \bar{h}(r) W_N^{rk}. \quad (2.13)$$

Требуется определить третью последовательность $\bar{y}(n)$, ДПФ которой

$$\bar{Y}(k) = \bar{X}(k) \bar{H}(k). \quad (2.14)$$

Подставим формулы (2.13), (2.14) в выражение ОДПФ:

$$\begin{aligned} \bar{y}(n) &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{Y}(k) W_N^{-nk} = \\ &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(r) W_N^{(m+r-n)k}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

переменим порядок суммирования и запишем

$$\bar{y}(n) = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(r) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m+r-n)k}. \quad (2.16)$$

Внутренняя сумма в выражении (2.16) есть геометрическая прогрессия, для которой справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m+r-n)k} = \begin{cases} N & \text{при } r = (n-m) + lN, \quad l=0, 1, \dots \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases} \quad (2.17)$$

Подставим равенство (2.17) в выражение (2.16). В результате получим

$$\bar{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(n-m). \quad (2.18)$$

Из уравнения (2.18) видно, что искомая последовательность $\bar{y}(n)$ представляет собой свертку последовательностей $\bar{x}(n)$ и $\bar{h}(n)$. Так как свертываемые последовательности периодические, то и свертка $\bar{y}(n)$ также представляет собой периодическую последовательность с тем же периодом N . Кроме того, периодическая свертка (2.18) отличается от линейной свертки (1.13) по своим значениям, что очень существенно для ее практического использования (подробнее см. п. 2.5). При использовании алгоритма ДПФ (2.9), (2.10) для конечных последовательностей необходимо учитывать подразумеваемую периодичность свертываемых последовательностей. Иначе, в этом случае свертка также определяется выражением (2.18).

2.3. АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ. ОБЩИЙ ПОДХОД

Быстрыми называют алгоритмы существенно (на несколько порядков) сокращающие число арифметических операций, необходимых для вычисления ДПФ. Рассмотрим сначала общий подход к созданию экономных алгоритмов, а затем обратимся к конкретным алгоритмам БПФ.

Возьмем N -точечное ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}; \quad k=0, \dots, N-1; \quad W_N = e^{-j2\pi/N}. \quad (2.19)$$

При прямом вычислении $X(k)$ по формуле (2.19) для каждого k требуется N комплексных умножений и $N-1$ комплексное сложение или $4N$ умножений действительных чисел и $4N-2$ сложений (напомним, что в алгоритме БПФ все переменные являются комплексными). При необходимости вычисления $X(k)$ во всех N точках число комплексных умножений составит N^2 , а сложений $N(N-1)$. При большом N (например $N=1024$) затраты на вычисление ДПФ по формуле (2.19) оказываются непомерно большими. По этой причине ДПФ до открытия «быстрых» алгоритмов считалось практически малозначимым.

Предпосылками к повышению эффективности вычисления ДПФ являются свойства периодичности и симметрии комплексной экспоненты W_N^{nk} ; $W_N^{nk} = W_N^{(n \cdot N)k}$; $W_N^{k(N-n)} = (W_N^{nk})^*$, где $*$ — знак комплексно-сопряженной величины. В БПФ предполагается вычисление ДПФ для всех N значений переменной k . Основной принцип этих алгоритмов состоит в разложении операции ДПФ последовательности длины N на операции ДПФ меньшей длины, именуемом понижением порядка ДПФ. Покажем, что понижение порядка приводит к уменьшению количества арифметических операций, необходимых для выполнения

ДПФ. Понижение порядка возможно только в случае, если размерность ДПФ N — составное число. Пусть $N = N_1 \cdot N_2$, причем N_1 и N_2 произвольные целые числа. Тогда переменные n и k в формуле (2.19) можно представить следующим образом:

$$n = N_1 n_2 + n_1; \quad k = N_2 k_1 + k_2, \quad (2.20)$$

где $n_1, k_1 = 0, \dots, N_1 - 1$; $n_2, k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$.

Подставим (2.20) в (2.19) и учитывая, что $W_N^{N_1 n_2, n_1, k_1} = e^{-j2\pi n_2 k_1} = 1$, получим

$$X(N_2 k_1 + k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_N^{N_1 n_1, k_1} W_N^{n_1, k_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(N_1 n_2 + n_1) W_N^{N_1 n_2, k_2}.$$

Положим $W_{N_1} = W_N^{N_1} = e^{-j2\pi/N_1}$; $W_{N_2} = W_N^{N_2} = e^{-j2\pi/N_2}$ и запишем

$$X(N_2 k_1 + k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{n_1, k_1} W_{N_2}^{n_1, k_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(N_1 n_2 + n_1) W_{N_2}^{n_2, k_2}. \quad (2.21)$$

Как видно из формулы (2.21), $N_1 N_2$ -точечное ДПФ можно выполнить в три этапа:

а) вычислить N_2 -точечное ДПФ:

$$Y(n_1 k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(N_1 n_2 + n_1) W_{N_2}^{n_2, k_2}; \quad (2.22)$$

б) умножить $Y(n_1 k_2)$ на комплексные множители $W_{N_1}^{n_1, k_2}$ (которые принято называть поворачивающими или фазовыми);

в) вычислить N_1 -точечное ДПФ:

$$X(N_2 k_1 + k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} |Y(n_1 k_2) W_{N_1}^{n_1, k_2}| W_{N_1}^{n_1, k_1}.$$

Последовательность операций в описанной процедуре может быть иной: сначала умножение на поворачивающие множители, затем — два ДПФ, N_1 - и N_2 -точечные соответственно. В этом случае

$$X(N_2 k_1 + k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{n_2, k_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [x(N_1 n_2 + n_1) W_{N_1}^{n_1, k_2}] W_{N_1}^{n_1, k_1}. \quad (2.23)$$

Алгоритмы (2.21), (2.23), как показано ниже, приводят к разным типам БПФ. Общим этим алгоритмам, эквивалентным по вычислительной сложности, присуща важная особенность, которая состоит в перестановке очередности следования отсчетов во входной или выходной последовательностях $x(n)$ и $X(k)$. Нетрудно показать, что с помощью выражения (2.20) последовательности — одномерные массивы отсчетов $x(n)$, $n = 0, \dots, N-1$; $X(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, преобразуются в двухмерные массивы

$N_1 \times N_2$. Существо этого преобразования удобно пояснить на конкретном примере.

Пусть $N = 12$, $n = 0, \dots, 11$ и $k = 0, \dots, 11$. Возьмем $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, тогда преобразование индексов по первой формуле (2.20) имеет вид $n = 3n_2 + n_1$; $n_1 = 0, 1, 2$; $n_2 = 0, 1, 2, 3$. Нетрудно заметить, что при вычислении ДПФ по формуле (2.21) при каждом значении переменной n_1 переменная n_2 пробегает все значения от 0 до $N_2 - 1$ (в рассматриваемом примере от 0 до 3). Иначе, при вычислении N_2 -точечного ДПФ (2.22) отсчеты $x(n) = x(N_1 n_2 + n_1)$ выбираются из столбцов двухмерного массива (рис. 2.3,а), а в совокупности при вычислении (2.21) отсчеты входной последовательности берутся в порядке $x(0), x(3), x(6), x(9), x(1), x(4), x(7), x(10), x(2), x(5), x(8), x(11)$. Индексы выходной последовательности $x(k)$, $k = 4k_1 + k_2$, $k_1 = 0, 1, 2$; $k_2 = 0, 1, 2, 3$ получаются в соответствии с размещением в столбцах таблицы (рис. 2.3,б). Отсчеты последовательности $X(k)$ в этом случае имеют естественный порядок следования. Ясно, что перед вычислением ДПФ по формуле (2.21) необходимо предварительно осуществить перестановку отсчетов входной последовательности $x(n)$.

$n = 3n_2 + n_1$

$n_1 \backslash n_2$	0	1	2
0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$
1	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$
2	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$
3	$x(9)$	$x(10)$	$x(11)$

а

$k = 4k_1 + k_2$

$k_1 \backslash k_2$	0	1	2
0	$X(0)$	$X(4)$	$X(8)$
1	$X(1)$	$X(5)$	$X(9)$
2	$X(2)$	$X(6)$	$X(10)$
3	$X(3)$	$X(7)$	$X(11)$

б

Рис. 2.3

В выражении (2.23) при каждом значении переменной n_2 переменная n_1 принимает все значения от 0 до $N_1 - 1$. Таким образом, вычисление «внутреннего» ДПФ в формуле (2.23) происходит по строкам таблицы (см. рис. 2.3,а). При этом входные отсчеты $x(n)$ берутся в естественном порядке (без перестановки). Отсчеты выходной последовательности в таком случае соответствуют их размещению по строкам таблицы (см. рис. 2.3,б) и следуют в очередности $X(0), X(4), X(8), X(1), X(5), X(9), X(2), X(6), X(10), X(3), X(7), X(11)$, т. е. оказываются переставленными. Ясно, что для восстановления естественного порядка следования отсчеты $X(k)$ необходимо переупорядочить. Таким образом в обоих случаях к трем основным этапам алгоритма БПФ должна быть добавлена процедура перестановки.

Оценим вычислительные затраты на выполнение алгоритмов (2.21), (2.23) и (2.19). В качестве критерия эффективности алгоритмов обычно берут количество операций умножения как наиболее сложных. Выше отмечалось, что прямое вычисление N -точечного ДПФ $N = N_1 N_2$ по формуле (2.19) требует $N_1^2 N_2^2$ умножений. Вычисления по формулам (2.21) и (2.23) разбиваются

на $N_1 N_2$ -точечных ДПФ, $N_2 N_1$ -точечных ДПФ и $N_1 N_2$ умножений на поворачивающие множители. Итого получим $P = N_1 N_2^2 + N_1^2 N_2 + N_1 N_2 = N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)$ умножений, что, очевидно, меньше $N_1^2 N_2^2$. Таким образом, процедура понижения порядка ДПФ приводит к уменьшению вычислительных затрат.

При условии, что размерность ДПФ N обладает большим числом множителей, процедура понижения порядка может быть применена многократно, а эффективность алгоритма БПФ соответственно повышена. Это условие, а также регулярность структуры БПФ-алгоритма обеспечиваются, если размерность N — степень целого числа. На практике наибольшее распространение получили БПФ-алгоритмы по основанию 2, для которых $N = 2^L$, где L — целое число.

2.4. АЛГОРИТМЫ БПФ ПО ОСНОВАНИЮ 2

Известно два вида быстрых алгоритмов по основанию 2, имеющих соответственно БПФ с прореживанием по времени и БПФ с прореживанием по частоте. Обратимся к БПФ с прореживанием по времени и рассмотрим ДПФ $X(k)$ последовательности $x(n)$ длиной $N = 2^L$. При таком составном N алгоритм БПФ может вычисляться рекурсивно. На первом шаге БПФ выполняется при $N_1 = 2$ и $N_2 = 2^{L-1}$, что эквивалентно разбиению N -точечной последовательности $x(n)$ на две $(N/2)$ -точечные последовательности $x(2n)$ и $x(2n+1)$, соответствующие четным и нечетным отсчетам $x(n)$. Воспользуемся выражением (2.21) и, учитывая, что $W_N^{N/2} = -1$, получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}; \quad (2.24)$$

$$X(k+N/2) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk};$$

$$k=0, \dots, N/2-1.$$

Обозначим $a(n) = x(2n)$, $b(n) = x(2n+1)$.

Выпишем выражения для $(N/2)$ -точечных ДПФ:

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} a(n) W_{N/2}^{nk}, \\ B(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} b(n) W_{N/2}^{nk}, \end{aligned} \right\} k=0, \dots, N/2-1. \quad (2.25)$$

Учитывая (2.25), перепишем выражение (2.24) в виде

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= A(k) + W_N^k B(k) \\ X(k+N/2) &= A(k) - W_N^k B(k) \end{aligned} \right\} k=0, \dots, N/2-1. \quad (2.26)$$

Как видно, на первом шаге N -точечное ДПФ представляется комбинацией двух $(N/2)$ -точечных преобразований, которая осуществляется с помощью N сложений и $N/2$ умножений на W_N^k . На следующем шаге два $(N/2)$ -точечные ДПФ $A(k)$ и $B(k)$ комбинируются из четырех $(N/4)$ -точечных ДПФ, для чего также необходимы N сложений и $N/2$ умножений. Ясно, что такая процедура может продолжаться $L = \log_2 N$ шагов, пока элементарные ДПФ не станут двухточечными. В этой процедуре на некотором i -м шаге ($i=1, \dots, L-1$) 2^i 2^{L-i} -точечные ДПФ сводятся к 2^{i+1} 2^{L-i-1} -точечным ДПФ посредством N сложений и $N/2$ умножений. На последнем L -м шаге вычисляются $N/2$ двухточечных ДПФ $F(k)$, $k=0,1$, последовательности $j(n)$, $n=0,1$:

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + W_2^0 f(1); \\ F(1) &= f(0) - W_2^0 f(1), \end{aligned} \quad (2.27)$$

для выполнения которых требуется N сложений и $N/2$ умножений (заметим, что умножения в (2.27) тривиальные, т. к. $W_2^0=1$, но это обстоятельство мы учтем ниже). Таким образом, число комплексных умножений P и число комплексных сложений A , требуемых для вычисления N -точечного БПФ по основанию 2, составляет:

$$P = (N/2) \log_2 N, \quad (2.28)$$

$$A = N \log_2 N. \quad (2.29)$$

Удобное и наглядное графическое представление алгоритма БПФ дает его направленный граф. В направленном графе (рис. 2.4) каждая вершина (узел) соответствует переменной, а каждая дуга (стрелка) означает перенос переменной от вершины к вершине с весом (множителем), обозначенным около дан-

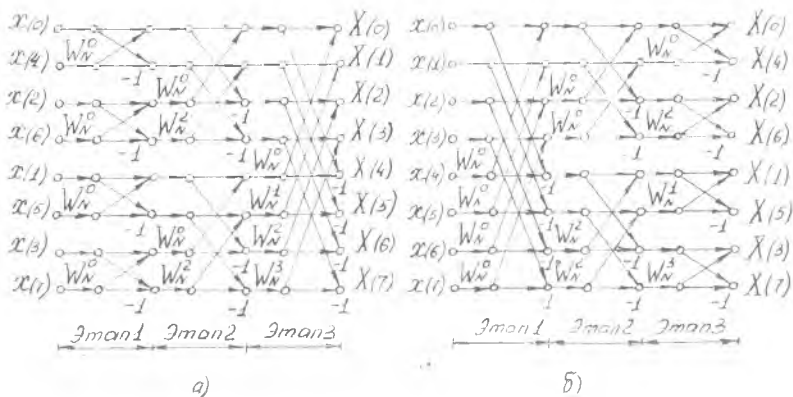


Рис. 2.4

ной дуги. Значение перемещенной, предписанное некоторой вершине, образуется как сумма значений всех переменных, соответствующих исходным вершинам всех дуг, входящих в данную вершину, умноженных на весовые коэффициенты этих дуг.

Граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени показан на рис. 2.4,а. Применительно к этому графу описанную выше пошаговую процедуру понижения порядка следует рассматривать от конца графа к началу. Тогда на первом этапе вычисляются по формулам (2.27) $N/2=4$ 2-точечных ДПФ, а на последнем—по (2.26) два 4-точечных ДПФ комбинируются в одно 8-точечное. Алгоритм БПФ, соответствующий графу (рис. 2.4,а), имеет особенность, которая состоит в том, что только выходная последовательность имеет естественный порядок следования индексов, в то время как входная последовательность вводится в упорядоченном виде. Эта упорядоченность обусловлена общим подходом к построению алгоритмов БПФ путем понижения порядка, рассмотренным в п. 2.3. Номера (индексы) упорядоченной последовательности могут быть определены методом двоичной инверсии, которая состоит в поразрядно-обратной перестановке битов двоичных кодов исходных номеров. Поясним суть этой перестановки на примере. Пусть $N=8$, $L=3$ и исходный номер $n_{\text{исх}}=6$, L — разрядный двоичный код числа 6 будет 110. После поразрядной инверсии получим код 011, которому соответствует десятичное $n_{\text{нов}}=3$. Для 8-точечного БПФ последовательность индексов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 методом двоичной инверсии преобразуется в последовательность 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.

Простой перестановкой строк направленного графа (см. рис. 2.4,а) без нарушений связей между вершинами графа можно получить естественный порядок следования индексов входного массива. Однако при этом на выходе устанавливается двоично-инверсный порядок. Граф такого вида алгоритма 8-точечного БПФ с прореживанием по времени представлен на рис. 2.4,б.

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте строится на основе способа понижения порядка ДПФ, обусловленного выражением (2.23). Для получения этой формы БПФ-алгоритма входная последовательность из N отсчетов $x(n)$, $n=0, \dots, N-1$ также разбивается на две равные части с естественным порядком следования индексов.

При этом можно записать

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \\ = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + W_N^{Nk/2} x(n+N/2)] W_N^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.30)$$

Учтем, что $W_N^{Nk/2} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$, а также $W_N^2 = W_{N/2}$ и

перепишем выражение (2.30) отдельно для четных и нечетных значений k :

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)] W_{N/2}^{nk}, \quad k=0, \dots, N/2-1; \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)] W_N^{nk} W_{N/2}^{nk}, \quad k=0, \dots, N/2-1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Перепишем выражения (2.31) в виде

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk}, \quad k=0, \dots, N/2-1; \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk}, \quad k=0, \dots, N/2-1, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $x_1(n) = x(n) + x(n+N/2)$, $n=0, \dots, N/2-1$;

$$x_2(n) = [x(n) - x(n+N/2)] W_N^n, \quad n=0, \dots, N/2-1. \quad (2.33)$$

Таким образом, N -точечное ДПФ $X(k)$ исходной последовательности $x(n)$ сводится к вычислению по формулам (2.32) двух $N/2$ -точечных ДПФ $X(2k)$ и $X(2k+1)$ соответственно подпоследовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$, $n=0, \dots, N/2-1$. Для образования этих подпоследовательностей необходимо согласно (2.33) выполнить N сложений и $N/2$ умножений. Ясно, что описанная процедура на следующем шаге понижения порядка может быть применена к подпоследовательностям $x_1(n)$ и $x_2(n)$. Как и в случае прореживания по времени, этот метод может использоваться рекурсивно для вычисления N -точечного ДПФ за $L = \log_2 N$ шагов, причем на последнем шаге выполняются $N/2$ двухточечных ДПФ. Каждый такой шаг требует N сложений и $N/2$ умножений. Следовательно, вычислительные затраты методов прореживания по времени и по частоте одинаковы. Граф 8 точечного БПФ с прореживанием по частоте, определяющий структуру вычислений для этого метода, приведен на рис. 2.5. Легко видеть, что графы (см. рис. 2.4,б и рис. 2.5) изоморфны, но отличаются значениями весовых коэффициентов.

Рассмотрим некоторые свойства и особенности БПФ.

Однотипность операций алгоритма БПФ. Анализируя графы БПФ, нетрудно убедиться, что алгоритм БПФ можно составить из однотипных базовых операций. Для метода с прореживанием по времени алгоритм базовой операции определяется выражениями (2.26). Граф, соответствующий этой операции, показан на рис. 2.6,а. Этот граф благодаря своему виду, как, впрочем, и сама базовая операция, носит название «бабочка». Базовая операция (бабочка) требует выполнения одного комплексного умножения и двух комплексных сложений.

Умножение на «-1» не учитываем, так как эта операция фактически не является умножением. Нетрудно видеть, что на каждом из $L = \log_2 N$ этапов БПФ выполняется по $N/2$ бабочек.

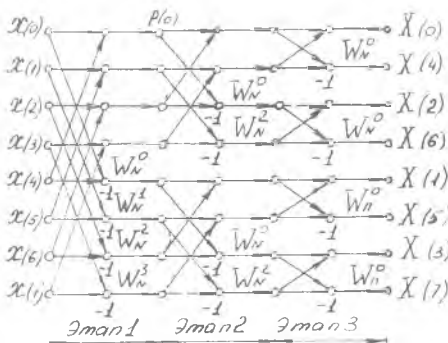


Рис. 2.5

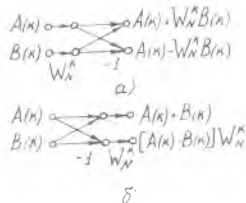


Рис. 2.6

Граф бабочки для метода с прореживанием по частоте приведен на рис. 2.6,б. Здесь, в отличие от графа (см. рис. 2.6,а), сначала производятся операции комплексного сложения входных переменных, а затем умножение одной из сумм на комплексный поворачивающий множитель.

Экономия вычислительных затрат. Поскольку БПФ-алгоритм вычисляет ДПФ за $(N/2) \log_2 N$ операций умножения вместо N^2 , то практический выигрыш $\epsilon = N/2 / (N/2 \log_2 N) = 2 / \log_2 N$ может быть очень большим. Так для 1024-точечного ДПФ $N = 2^{10}$ и $\epsilon \approx 200$.

Фактическое количество операций умножения в алгоритме БПФ меньше (2.28), если учесть, что умножения на $W_N^0 = 1$ и на $\pm j$ тривиальны. Это относится, в частности, к двухточечным ДПФ, которые выполняются на одном из этапов всех видов БПФ. Поэтому в алгоритме БПФ может быть получена дополнительная экономия.

Свойство замещения памяти. Алгоритмы БПФ позволяют выполнять вычисление с замещением памяти, суть которого состоит в следующем. Из графа бабочки (см. рис. 2.6) видно, что вычисления двух элементов выходных данных необходимы только два элемента данных входного массива. Помимо этого эти элементы в последующих вычислениях не используются. Поэтому вновь вычисленные данные могут заноситься в ячейки памяти ЭВМ, в которых хранились исходные данные. Тем самым экономится требуемая память ЭВМ.

Отметим, что помимо БПФ с основанием 2 практическое распространение получили также алгоритмы с другими основаниями, в частности, с основанием 4 [11].

2.5. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СВЕРТКИ

Существуют прямой (во временной области) и косвенный (в частотной области) методы вычисления дискретной свертки.

В п. 1.4 отмечалось, что процесс на выходе линейной ДС определяется сверткой входной последовательности $x(n)$ с ИХ системы $h(n)$. Таким образом линейной сверткой (1.14) описывается процесс цифровой фильтрации сигналов во временной области.

В данном разделе будет рассматриваться свертка конечных последовательностей. Предположим, что последовательности ограничены по длительности и содержат M и N отсчетов соответственно: $x(n)$, $n=0, \dots, M-1$; $h(n)$, $n=0, \dots, N-1$. Нетрудно видеть, что свертка $y(n)$ этих последовательностей имеет длину не более $N+M-1$ ненулевых отсчетов (см. также пример ниже). Учитывая это, запишем линейную свертку (1.14) в виде

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^n x(n-m)h(m), \quad n=0, \dots, N+M-2. \quad (2.34)$$

Заметим, что в выражении (2.34) фактические пределы суммирования определяются интервалом значений переменной m , на котором выражение под знаком суммы не равно нулю, и могут отличаться от обозначенных в этой формуле. На рис. 2.7,а приведен пример линейной дискретной свертки для $M=5$, $N=3$.

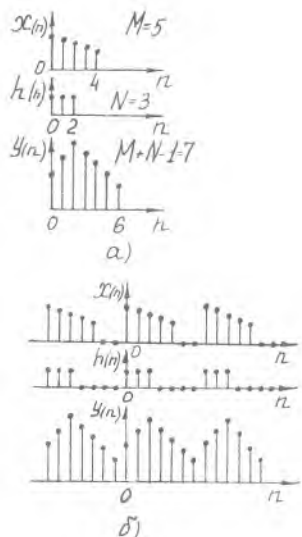


Рис. 2.7

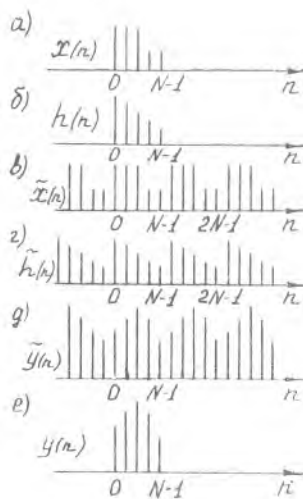


Рис. 2.8

В частотной области (косвенным методом) вычисление линейной свертки основано на использовании теоремы о свертке из теории ДПФ (см. п. 2.2). Вообще говоря, теорема о свертке относится не к линейной, а к круговой свертке, поэтому в частотной области линейная свертка выражается через круговую свертку. Этот алгоритм имеет большое практическое значение, поэтому ознакомимся со свойствами круговой свертки подробнее.

Отметим, что вообще периодическую (круговую) свертку можно вычислить во временной и в частотной (с помощью БПФ) областях. Вычисление во временной области (имеющее только методический интерес) выполняется по формуле

$$\bar{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} \bar{h}(m) \bar{x}(n-m). \quad (2.35)$$

В периодической свертке последовательности $x(n)$ и $h(n)$ имеют одинаковую длину по N отсчетов. В выражении (2.35) $\bar{x}(n)$ и $\bar{h}(n)$ полагаются бесконечными периодическими последовательностями с периодом N . Ясно, что свертка $\bar{y}(n)$ также является периодической и имеет период N отсчетов. Поясним сказанное на примере (рис. 2.8), где $x(n)$, $h(n)$ — конечные последовательности длиной по N отсчетов (рис. 2.8,а,б); $\bar{x}(n)$, $\bar{h}(n)$ — их периодическое расширение (рис. 2.8,в,г); $\bar{y}(n)$ — периодическая свертка (рис. 2.8,д); $y(n)$ — один период этой свертки (рис. 2.8,е).

Линейная и круговая свертки одних и тех же последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ в общем случае не совпадают ни по длительности, ни по структуре. Это наглядно видно из приведенного примера (см. рис. 2.8). В самом деле для последовательностей $x(n)$, $h(n)$, взятых в примере, линейная свертка должна иметь длину $2N-1$ отсчетов, в то время как круговая свертка на одном периоде имеет длину только N отсчетов. Однако существует способ преобразования свертываемых последовательностей, в результате которого круговая свертка (на одном периоде) и линейная свертка тождественно совпадают. Используя это преобразование, составим алгоритм цифровой фильтрации сигналов в частотной области.

Пусть, как и выше, заданы две последовательности: сигнал $x(n)$, $n=0, \dots, M-1$ и ИХ НЦФ $h(n)$, $n=0, \dots, N-1$. Фильтрацию сигнала $x(n)$ можно осуществить с помощью следующей пошаговой процедуры.

Шаг 1. Выберем число L — минимальную целую степень числа 2 так, чтобы $L \geq N+M-1$, и дополним последовательности $x(n)$ и $h(n)$ нулевыми отсчетами до длины L . Иначе, образуем новый сигнал $\bar{x}(n)$, $n=0, \dots, L-1$:

$$\begin{aligned}\bar{x}(n) &= x(n) \quad \text{при } n=0, \dots, M-1; \\ \bar{x}(n) &= 0 \quad \text{при } n=M, M+1, \dots, L-1\end{aligned}\quad (2.36)$$

и новую ИХ $\bar{h}(n)$, $n=0, \dots, L-1$ так, чтобы

$$\begin{aligned}\bar{h}(n) &= h(n) \quad \text{при } n=0, \dots, N-1; \\ \bar{h}(n) &= 0 \quad \text{при } n=N, N+1, \dots, L-1.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Шаг 2. Вычислим БПФ последовательностей $\bar{x}(n)$ и $\bar{h}(n)$:

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \bar{x}(n) W_L^{nk}, \quad k=0, \dots, L-1; \quad (2.38)$$

$$\bar{H}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \bar{h}(n) W_L^{nk}, \quad k=0, \dots, L-1, \quad (2.39)$$

где $W_L = e^{i(2\pi/L)}$.

Шаг 3. Вычислим комплексное произведение $\bar{X}(k)$ и $\bar{H}(k)$, представляющее собой дискретный спектр выходного сигнала фильтра:

$$\bar{Y}(k) = \bar{X}(k) \bar{H}(k), \quad k=0, \dots, L-1. \quad (2.40)$$

Шаг 4. Вычислим обратное БПФ последовательности $\bar{Y}(k)$:

$$\bar{y}(n) = (1/L) \sum_{k=0}^{L-1} \bar{Y}(k) W_L^{-nk}, \quad n=0, \dots, L-1. \quad (2.41)$$

Последовательность $\bar{y}(n)$ в соответствии с теоремой о свертке является периодической сверткой последовательностей $\bar{x}(n)$ и $\bar{h}(n)$. Последовательность $\bar{y}(n)$ совпадает с линейной сверткой $y(n)$ (2.36) в $N+M-1$ точках. Если $L > N+M-1$, то остальные точки этой последовательности — нулевые. Иначе

$$\begin{aligned}\bar{y}(n) &= y(n) \quad \text{при } n=0, \dots, N+M-2, \\ \bar{y}(n) &= 0 \quad \text{при } n=N+M-1, \dots, L-1.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Таким образом, решается задача получения линейной свертки в частотной области (косвенным методом) через вычисление периодической свертки. *Фиг. 2.45*

Сравним вычислительные затраты прямого и косвенного методов. В качестве критерия эффективности алгоритмов по-прежнему возьмем требуемое число операций умножения. Непосредственной проверкой можно убедиться, что требуемое число умножений для вычисления всех $N+M-1$ отсчетов линейной свертки по формуле (2.34) составляет

$$P_{\text{лин}} = MN. \quad (2.43)$$

При фильтрации в частотной области затраты на вычисление ДПФ ИХ (2.39) можно не учитывать, так как это ДПФ можно определить заранее и единожды для данного фильтра.

Таким образом для вычисления свертки в частотной области необходимо выполнить БПФ (2.38), ОБПФ (2.41) и L комплексных умножений в соответствии с (2.40). Учитывая выражение (2.28), получим требуемое число комплексных умножений

$$P_{\text{к пер}} = 2(L/2) \log_2 L + L = L(\log_2 L + 1) \quad (2.44,а)$$

и число действительных умножений

$$P_{\text{д пер}} = 4L(\log_2 L + 1). \quad (2.44,б)$$

Нетрудно заметить, что эффективность свертки в частотной области зависит от соотношения величин L и $N+M-1$. При выполнении условий $L = 2^j$ и $N+M-1 \leq L$ в смысле вычислительной эффективности благоприятным является соотношение $N+M-1 \approx 2^j$ и менее благоприятным $N+M-1 \approx 2^{j-1}$.

Анализ, выполненный на основе выражений (2.43) и (2.44,а,б), показывает, что метод свертки в частотной области эффективнее прямой свертки при длине ИХ $N > 40$. Эффективность метода свертки в частотной области обусловлена использованием в нем БПФ, поэтому этот метод называют также *быстрой сверткой*.

В быстрой свертке при действительных входных сигналах, используя свойство симметрии ДПФ (см. п. 2.2), можно дополнительно сократить число операций умножения примерно в два раза. Для этого достаточно из двух действительных последовательностей сформировать искусственный комплексный сигнал и обработать его за один проход алгоритма (2.36) — (2.42).

2.6. МЕТОДЫ СЕКЦИОНИРОВАНИЯ СВЕРТКИ

При работе в реальном масштабе времени фильтр, использующий алгоритм свертки во временной области (2.34), выдает отсчеты выходного сигнала в темпе поступления на его вход отсчетов входной последовательности. Память такого фильтра равна длительности ИХ N . Соответственно этому запаздывание сигнала имеет величину, пропорциональную длине ИХ. В отличие от этого процесс обработки в фильтре, использующем метод свертки в частотной области (2.36) — (2.42), может начаться лишь после того, как в запоминающем устройстве процессора фильтра накоплена вся выборка входного сигнала объема L отсчетов. Вследствие этого в таком ЦФ отсутствует возможность выдачи отсчетов выходного сигнала в темпе поступления отсчетов на вход фильтра. Сигнал на выходе образуется не раньше окончания и накопления всей реализации входного сигнала. При длинных (квазибесконечных) входных сигналах такая задержка в выдаче выходного сигнала недопустима. Кроме того,

для запоминания длинной последовательности может потребоваться большой объем памяти, превышающий наличный ресурс. Поэтому при длинных реализациях входного сигнала, когда $L \gg N$, применяется секционирование свертки, суть которого состоит в разбиении входного сигнала на секции ограниченной длины, вычислении сверток каждой секции в отдельности с ИХ фильтра и последующем объединении частных результатов в единую выходную последовательность. Существует два, примерно эквивалентных по вычислительным затратам метода секционирования свертки.

Метод перекрытия с суммированием. Разделим входную квазibesконечную последовательность $x(n)$ на секции $x_r(n)$ — смежные подпоследовательности длиной по M_1 отсчетов

$$x(n) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(n), \quad (2.45)$$

где
$$x_r(n) = \begin{cases} x(n) & \text{при } rM_1 \leq n < (r+1)M_1; \\ 0 & \text{при других значениях } n. \end{cases}$$

Предположим, что ИХ $h(n)$ содержит N ненулевых отсчетов. Тогда для линейной свертки последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ можно записать

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_r(n-m) h(m) = \sum_{r=0}^{\infty} y_r(n). \quad (2.46)$$

Каждая частная свертка $y_r(n)$ имеет длину $N + M_1 - 1$ отсчетов и перекрывается с последующей сверткой $y_{r+1}(n)$ на участке длиной $N - 1$ отсчетов (рис. 2.9). Как видно, на интервалах, на которых перекрытие частных сверток отсутствует, их отсчеты переносятся в результирующую последовательность без изменения; на интервалах перекрытия отсчеты частных сверток суммируются.

Практически частные линейные свертки $y_r(n)$ вычисляются через круговую свертку косвенным методом в соответствии с формулами (2.36) — (2.42). Особенность этого метода состоит в том, что размерность БПФ L может быть произвольной — ее следует выбрать из ряда чисел $L = 2^J$, где J — целое число. Размерность БПФ $L > N$ выбирается в соответствии с заданной длиной ИХ N . Основания для выбора конкретного числа L мы приведем ниже.

Выбор размерности БПФ предопределяется также выбор длины секции $x_r(n)$. В самом деле условием адекватности линейной и круговой (на одном периоде) сверток является $L \geq N + M_1 - 1$. Отсюда для длины секции получим $M_1 = L - N + 1$.

Метод перекрытия с накоплением. В этом методе входная последовательность $x(n)$ делится на секции длиной L отсчетов (L -размерность БПФ), перекрывающиеся в $N-1$ точках (рис. 2.10). Необходимость перекрытия обусловлена особенностями вычисления частных сверток. Поясним этот алгоритм подробнее.

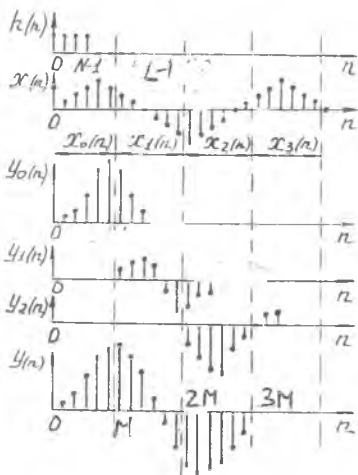


Рис. 2.9

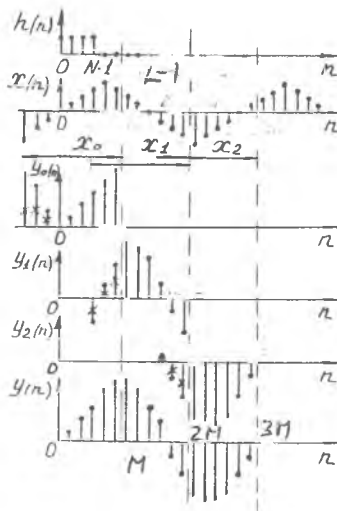


Рис. 2.10

Шаг 1. Выбираем размерность БПФ L сообразно заданной ИХ. Длина ИХ полагается равной N . Ясно, что должно быть $L > N$.

Шаг 2. На этом шаге вычисляется БПФ ИХ. Предварительно ИХ $h(n)$, $n=0, \dots, N-1$ дополняется нулевыми отсчетами до длины L , т. е. преобразуется к виду

$$\bar{h}(n) = h(n) \quad \text{при } n=0, \dots, N-1.$$

$$\bar{h}(n) = 0 \quad \text{при } n=N, \dots, L-1.$$

Ясно, что искомое преобразование

$$\bar{H}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \bar{h}(n) W_L^{nk}, \quad k=0, \dots, L-1.$$

Шаг 3. Выбирается секция входного сигнала $x_r(n)$, $n=0, \dots, L-1$, состоящая в общем случае из ненулевых отсчетов, и вычисляется БПФ

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x_r(n) W_L^{nk}, \quad k=0, \dots, L-1.$$

Обратим внимание, что здесь, в отличие от предшествующего случая, секции сигнала нулевыми отсчетами не пополняются.

Шаг 4. Вычисляется комплексное произведение

$$Y_r(k) = X_r(k) \cdot \bar{H}(k).$$

Шаг 5. Вычисляется обратное преобразование Фурье

$$y_r(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{Y}_r(k) W_L^{-nk}, \quad n=0, \dots, L-1.$$

Шаг 6. Объединяются частные свертки в $y_r(n)$ единую выходную последовательность $y(n)$. Поясним способ такого объединения.

Как отмечалось, линейная свертка двух последовательностей L и N отсчетов имеет длину $N+L-1$ отсчетов. В рассматриваемом алгоритме циклически свертываются секция сигнала, состоящая из L нулевых отсчетов, и ИХ, также имеющая L отсчетов, из которых только N отсчетов отличны от нуля, а остальные $L-N$ отсчетов — нулевые. Получаемая круговая свертка имеет период L отсчетов. Как видно, длина линейной свертки больше периода круговой свертки. Это означает, что не все отсчеты круговой свертки верны. Непосредственной проверкой (см. также [9]) можно убедиться в том, что первые $N-1$ отсчеты круговой свертки $y_r(n)$, $n=0, \dots, N-2$ неправильные, тогда как отсчеты от $N-1$ до $L-1$ соответствуют отсчетам линейной свертки*. Заметим, что число верных отсчетов равно числу нулей в ИХ $\bar{h}(n)$ плюс единица, т. е. $L-N+1$. Отсюда видна целесообразность соблюдения неравенства $L \gg N$ при выборе величины L .

Таким образом процедура секционирования на каждом этапе получает $M=L-N+1$ отсчетов, которые включаются в выходную последовательность $y(n)$. Неправильные $N-1$ отсчеты (помеченные на рис. 2.10 крестиками) отбрасываются. Подпоследовательности правильных отсчетов должны быть примыкающими. Ясно, что последовательность $y(n)$ можно составить из отрезков по M правильных отсчетов, когда последовательные секции $x_r(n)$ входного сигнала перекрываются на $N-1$ точек. Это перекрытие носит условный характер: первые $N-1$ отсчетов текущей секции повторяют $N-1$ отсчетов предыдущей секции. Отметим, что при программной реализации алгоритм перекрытия с накоплением предпочтительнее алгоритма перекрытия с суммированием, так как он проще реализуется при использовании стандартных программных средств [8].

* В приложении рассмотрен другой способ реализации метода перекрытия с накоплением, в котором расположение неверных отсчетов в частной свертке иное.

Обратимся к вопросу обоснованного выбора размерности БПФ в методе фильтрации сигналов в частотной области. Как было показано, в каждом цикле итераций этого метода фильтруется только $L-N+1$ отсчетов входной последовательности. Для того чтобы отфильтровать J отсчетов входного сигнала, необходимо выполнить $J/(L-N+1)$ циклов. Определим полное число операций умножения, в этой процедуре, с учетом формулы (2.44,б), получим

$$P_{\text{полн}} = [J/(L-N+1)] (4L \log_2 L + 1). \quad (2.47)$$

Как видно из выражения (2.47), при заданных J и N полное число операций умножения является функцией L . Задача вычисления L , при которой $P_{\text{полн}}$ минимально, рассмотрена в литературе [4]. Результаты расчета оптимального L , в зависимости от длины ИХ N , приведены ниже:

Длина ИХ N	11	11...17	18...29	30...52	53...94	95...171	172...310	311...575
Оптимальное L	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Нетрудно заметить, что оптимальное значение L растет с увеличением N не в прямой, а более высокой пропорции. Вместе с тем, число операций умножения «не очень быстро» [4] возрастает при отклонении выбранного значения L от оптимального. Поэтому в случае, если доступный объем памяти недостаточен для оптимального $L_{\text{опт}}$, можно использовать субоптимальное значение без резкого снижения эффективности алгоритма. Так, например, если выбирается $L \sim 2N$, то требуемое число операций умножения возрастает лишь в 1,33 раза.

2.7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ БПФ

ДПФ можно рассматривать как алгоритм вычисления интегрального преобразования Фурье с помощью ЭВМ. Однако применение ДПФ для спектрального анализа имеет особенности.

Выберем некоторое значение переменной k_1 из множества $k=0, \dots, N-1$ и вычислим в этой точке ДПФ $X(k_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)nk_1}$. Предположим, что $x(n)$ — комплексная дискретная синусоида: $x(n) = e^{j\omega n}$, $n=0, \dots, N-1$. В таком случае

$$X(k_1) = X_{k_1}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j[\omega - (2\pi/N)k_1]n}. \quad (2.48)$$

Как видно, сумма в правой части (2.48) — геометрическая прогрессия. Просуммировав прогрессию, получим

$$X(k_1) = \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j[\omega - (2\pi/N)k_1]}} = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2 - \pi k_1/N)} e^{j[\omega N/2 - \pi(N-1)k_1/2]}. \quad (2.49)$$

Обозначим

$$A_{k_1}(\omega) = |X_{k_1}(e^{j\omega})| = \sin(N\omega/2) / \sin(\omega/2 - \pi k_1/N). \quad (2.50)$$

Функция (2.50) показывает зависимость модуля k_1 -го отсчета ДПФ от частоты гармонического колебания единичной амплитуды.

Нетрудно заметить, что функция $A_{k_1}(\omega)$, график которой показан на рис. 2.11,а, эквивалентна АЧХ полосового фильтра с центральной частотой $\omega_{k_1} = (2\pi/N)k_1$. Как видно из выражения (2.50) и рис. 2.11,а, эта АЧХ имеет относительно большие боковые лепестки. Алгоритм БПФ позволяет вычислить сразу N спектральных составляющих. Поэтому этот алгоритм эквивалентен гребенке из N фильтров, настроенных на частоты $\omega_k = (2\pi/N)k$, $k=0, \dots, N-1$. График АЧХ этой гребенки для 8-точечного БПФ приведен на рис. 2.11,б (здесь показаны только главные лепестки характеристик — боковые лепестки опущены).

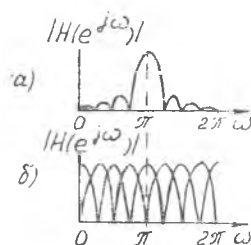


Рис. 2.11

Лепестковость характеристик фильтров весьма нежелательна, так как приводит к явлению «растекания» или «утечки». В самом деле, энергия сигнала, частота которого принадлежит некоторому фильтру гребенки, но не совпадает точно с его центральной частотой $\omega_k = (2\pi/N)k$, будет проходить в другие каналы, через боковые лепестки их АЧХ и наоборот. Как видно, БПФ эквивалентно набору фильтров с относительно невысоким разрешением по частоте и большими лепестками характеристик. Уменьшение лепестковости АЧХ можно обеспечить путем почленного умножения заданной последовательности сигнала $x(n)$ на некоторую весовую последовательность $w(n)$, $n=0, \dots, N-1$. При выборе весовой функции, называемой также *временным окном*, можно учитывать различные требования, которым соответствуют различные виды окон (см. подробнее разд. 3). Здесь же отметим характерную особенность окон: все они, вне зависимости от конкретного вида, плавно нарастают вначале и также плавно спадают в конце. С учетом взвешивания для БПФ

последовательности $x_r(n)$ на некотором r -м интервале наблюдения можно написать

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) \omega(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k=0; \dots, N-1. \quad (2.51)$$

Дискретная функция $I_r(k)$, называемая *периодограммой*

$$I_r(k) = |X_r(k)|^2 / \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n), \quad k=0, \dots, N-1, \quad (2.52)$$

может служить характеристикой спектральной плотности мощности детерминированного дискретного сигнала.

Для получения оценки спектральной плотности мощности (СПМ) $\hat{S}_x(\hat{f}_k)$, где $\hat{f}_k = k/N$, случайного временного ряда необходимо вычислить периодограммы (2.52) в последовательности наблюдений $r = 1, \dots, M$ и осуществить усреднение периодограмм по множеству реализаций

$$\bar{S}_x(\hat{f}_k) = (1/M) \sum_{r=1}^M I_r(k). \quad (2.53)$$

Оценка (2.53) является случайной. Дисперсия этой оценки уменьшается с ростом M — количества усредняемых периодограмм. Существует модификация метода периодограмм, позволяющая получить оценку СПМ по меньшей длине анализируемой случайной последовательности [9].

2.8. ВЫЧИСЛЕНИЯ ДПФ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ ЛЧМ-ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим ДПФ последовательности $x(n)$, $n=0, \dots, N-1$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1 \quad (2.54)$$

и, учитывая соотношение $nk = -(k-n)^2/2 + n^2/2 + k^2/2$, приведем (2.54) к виду

$$X(k) = W_N^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) W_N^{n^2/2}] W_N^{-(k-n)^2/2}. \quad (2.55)$$

Покажем, что ДПФ (2.55) можно получить с помощью линейного НЦФ с ИХ вида

$$h(n) = e^{j\pi n^2/N} = W_N^{-n^2/2}, \quad n = 0, \dots, 2N-1. \quad (2.56)$$

Этот фильтр обычно называют ЛЧМ-фильтром из-за его сходства с АФ, используемым в радиолокации для согласованной фильтрации ЛЧМ-сигналов. Возьмем некоторый вспомогательный сигнал $v(n)$, $n = 0, \dots, N-1$ и рассмотрим его прохождение через ЛЧМ-фильтр. Ясно, что выходной сигнал фильтра

$y(n)$ представляет собой линейную дискретную свертку сигнала $v(n)$ с импульсной характеристикой $h(n)$ и имеет длительность $3N - 1$ отсчетов. На интервале $N \leq m \leq 2N - 1$ эта свертка имеет вид

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) h(m-n), \quad m=N, \dots, 2N-1. \quad (2.57)$$

Изменим в выражении (2.57) начало отсчета $k=m-N$ и, учитывая формулу (2.56), запишем

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) h(k-n+N) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) W_N^{-(k-n+N)^2/2}, \quad k=0, \dots, N-1.$$

После элементарных преобразований нетрудно получить

$$y(k) = e^{j\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) W_N^{-(k-n)^2/2}. \quad (2.58)$$

Заметим, что здесь $e^{j\pi N} = 1$ при четном N и $e^{j\pi N} = -1$ при нечетном N .

Сопоставив выражения (2.55) и (2.58), увидим: для того, чтобы получить N -точечное ДПФ последовательности $x(n)$ методом ЛЧМ-преобразования на вход фильтра нужно подать последовательность $v(n) = x(n) W_N^{n^2/2}$, выбрать отсчеты выходной последовательности $y(n)$ с номерами $n=N, \dots, 2N-1$ и умножить их на весовые коэффициенты $W_N^{k^2/2} e^{-j\pi N} = W_N^{(n-N)^2/2} \times \times e^{-j\pi N}$. Очередность этих операций показана на рис. 2.12.

ДПФ — алгоритм на основе ЛЧМ-преобразования имеет практическое значение. В частности, к настоящему времени созданы приборы с зарядовой связью (ПЗС) и устройства на

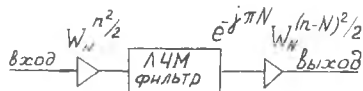


Рис. 2.12

поверхностных акустических волнах (ПАВ), с помощью которых сложные фильтры можно реализовать на одном кристалле и использовать их для вычисления ДПФ. Устройства на ПЗС и ПАВ наиболее эффективны для работы в реальном масштабе времени.

3. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

3.1. ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦФ

В наиболее общем смысле под ЦФ понимают линейную, инвариантную к временному сдвигу ЛС, которая реализуется на основе арифметического устройства с конечной точностью.

* Здесь учтен сдвиг $k = m - N$ и обозначение переменной m заменено на n , т. к. сигнал на выходе фильтра — функция времени.

В проектировании ЦФ можно выделить три основных этапа: определение требуемых характеристик фильтра; аппроксимация этих характеристик на основе использования физически реализуемых дискретных систем;

реализация ЦФ на основе технических устройств, использующих арифметику с ограниченной точностью.

На первом этапе применительно к частотно-избирательным фильтрам определяются требования к АЧХ в полосе пропускания и полосе задерживания, ширине переходной полосы, а также к ФЧХ или групповому времени запаздывания. Для специальных, например согласованных фильтров, эти требования могут быть иными.

На этапе аппроксимации разрабатывается физически реализуемая математическая модель ЦФ, которая приближенно воспроизводит заданные характеристики. В качестве такой модели удобно выбрать ПтФ (1.21)

$$H(z) = \sum_{m=0}^N a_m z^{-m} / (1 + \sum_{m=1}^N b_m z^{-m}) \quad (3.1)$$

или разностное уравнение (1.16)

$$y(n) = \sum_{m=0}^N a_m x(n-m) - \sum_{m=1}^N b_m y(n-m). \quad (3.2)$$

На этапе реализации решают три задачи. Одна из них заключается в построении структурной схемы ЦФ, соответствующей его ПтФ. Структурная схема, по сути дела, представляет собой графическое изображение алгоритма ЦФ и позволяет описать процесс обработки сигналов в фильтре на интервале одного периода следования отсчетов входной последовательности, а также выяснить состав оборудования специализированного устройства при аппаратной реализации ЦФ. Задача выбора структурной схемы не имеет однозначного решения. Существует, вообще говоря, множество различных структур, реализующих одну и ту же ПтФ или одно и то же разностное уравнение. Выбор структурной схемы влияет на шумы и ошибки воспроизведения характеристик ЦФ, обусловленные конечным числом разрядов регистров вычислителя, на динамический диапазон ЦФ, а также на аппаратные затраты при построении специализированного вычислителя.

Вторая задача, решаемая на этапе реализации, состоит в определении влияния на характеристики фильтра уже упомянутых ошибок реальных арифметических устройств, обладающих ограниченной точностью, и в выборе на этой основе разрядности регистров.

Третья задача состоит в выполнении (технической реализации) ЦФ, которое возможно в двух формах: программной или

аппаратной. В первом случае осуществляется моделирование структурной схемы на ЭВМ; во втором — схема фильтра реализуется в виде конкретной цифровой аппаратуры.

3.2. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦФ

ЦФ могут быть реализованы по различным структурным схемам. Для рекурсивных (БИХ) ЦФ наиболее часто используются прямая, каноническая, каскадная, параллельная формы.

Прямая форма (рис. 3.1) непосредственно следует из разностного уравнения (3.2). Как видно, в этом случае ЦФ реализуется с помощью $2N+1$ умножителей, сумматора и $2N$ элементов задержки (регистров).

Каноническую форму можно получить, если ПтФ (3.1) представить в виде произведения

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) = [1 / (1 + \sum_{m=1}^N b_m z^{-m})] (\sum_{m=1}^N a_m z^{-m}). \quad (3.3)$$

ПтФ $H_1(z)$ и $H_2(z)$ реализуются в прямой форме (рис. 3.2,а). Произведению ПтФ $H_1(z) H_2(z)$ соответствует последовательное включение фильтров, которые эти функции представляют. Существо процессов в ЦФ не изменится, если в устройстве (см. рис. 3.2,а)

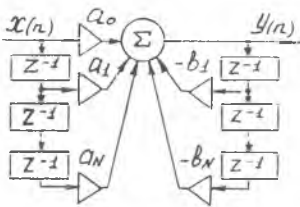


Рис. 3.1

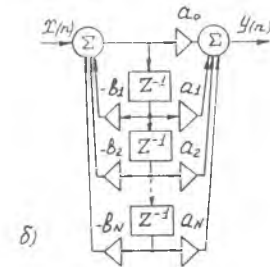
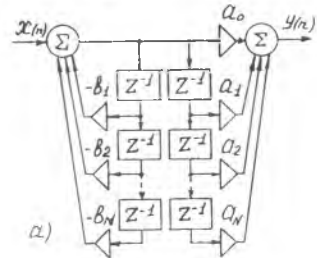


Рис. 3.2

использовать одну общую цепочку элементов задержки. Таким образом, приходим к канонической форме ЦФ (рис. 3.2,б). Из сравнения прямой и канонической форм видно, что для реализации последней требуется меньше элементов задержки (в два раза в первом приближении), но число сумматоров возрастает до двух.

В прямой и канонических формах фильтров высокого порядка наблюдается нежелательная чувствительность частотных характеристик к погрешностям коэффициентов ПтФ, которые возникают вследствие конечности разрядной сетки ЭВМ, и возможны существенные искажения частотных характеристик по этой причине. Поэтому такие схемы для ЦФ выше второго порядка применять не рекомендуется.

Каскадная (последовательная) форма (рис. 3.3) реализации образуется путем каскадного соединения однотипных звеньев (блоков) второго порядка, соответствующего представлению ПтФ (3.1) в виде произведения

$$H(z) = \prod_{i=1}^k H_i(z); H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}. \quad (3.4)$$

Блоки — фильтры второго порядка в выражении (3.4), которые часто называют биквадратными, могут рассматриваться как универсальные звенья, пригодные для построения любых фильтров.

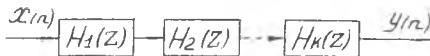


Рис. 3.3

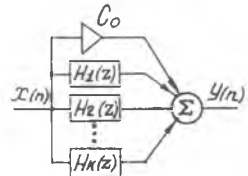


Рис. 3.4

Параллельная форма (рис. 3.4) образуется путем параллельного включения однотипных звеньев-блоков. Передаточные функции звеньев получаются разложением ПтФ фильтра (3.1) на элементарные дроби:

$$H(z) = \sum_{i=1}^k H_i(z); H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i} z^{-1}}{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}. \quad (3.5)$$

Звенья в (3.4), (3.5) выполняются по прямой или канонической форме. Многозвенные структуры (3.4), (3.5) менее чувствительны к точности представления коэффициентов и поэтому являются предпочтительными.

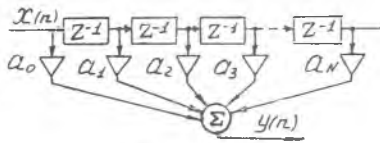


Рис. 3.5

Нерекурсивные (КИХ) ЦФ также могут быть реализованы по различным формам. Простейшей является прямая форма реализации (рис. 3.5.), которая соответствует ПтФ вида

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)}. \quad (3.6)$$

Прямая форма НРЦ является наиболее употребительной. Поэтому мы воздержимся от описания более сложных схем.

3.3. РАСЧЕТ РЕКУРСИВНЫХ (БИХ) ЦФ

3.3.1. Общие сведения

Для расчета РЦФ, под которым мы понимаем процедуру получения ПтФ, представляется возможным использовать хорошо разработанную теорию АФ, поэтому наибольшее распространение нашли методы расчета РЦФ по аналоговому прототипу, предполагающие на первом этапе расчет соответствующего АФ и последующее преобразование аналоговых характеристик в цифровые. Методика расчета АФ подробно рассмотрена в литературе [6], поэтому мы ограничимся лишь изложением методов дискретизации АФ, получивших наибольшее практическое распространение. Помимо расчета по аналоговому прототипу используются прямые методы проектирования РЦФ. Сведения об этих методах можно найти в литературе [9].

ПтФ РЦФ должны удовлетворять ряду условий:

ПтФ должна быть дробно-рациональной функцией с вещественными коэффициентами;

порядок числителя должен быть равен или меньше порядка знаменателя;

полюсы ПтФ должны лежать внутри круга единичного радиуса на z -плоскости. Выполнение первых двух условий означает физическую реализуемость фильтра, последнее является признаком устойчивости РЦФ.

3.3.2. Метод инвариантности ИХ

В этом методе суть преобразования (дискретизации) АФ-прототипа в ЦФ состоит в том, что в качестве отсчетов ИХ ЦФ принимаются значения ИХ АФ, взятые с постоянным шагом: $h(nT) = h_a(t)|_{t=nT}$. Таким образом ИХ ЦФ и ИХ АФ в моменты времени $t=nT$ инвариантны. В общих чертах процедура расчета ЦФ несложна: по ПтФ АФ $H_a(p)$, которая полагается известной, определяется ИХ АФ $h_a(t)$; далее производится дискретизация ИХ $h_a(t) \rightarrow h(nT)$; затем с помощью Z -преобразования ИХ получают ПтФ РЦФ. Рассмотрим процедуру расчета фильтра подробнее. Эта процедура выполняется в течение ряда шагов.

Шаг 1. В соответствии с целевым назначением ЦФ определяются его требуемые параметры; по этим параметрам выбирается тип и рассчитывается ПтФ АФ $H_a(p)$.

Шаг 2. ПтФ АФ-прототипа раскладывается на элементарные дроби и представляется в виде

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^M c_k / (p - p_k), \quad (3.7)$$

где $p_k \rightarrow k$ -й полюс $H_a(p)$; c_k — константы.

Такое разложение возможно, так как ПтФ физически реализуемого АФ $H_a(p) = A(p)/B(p)$ — дробно-рациональная функция и $A(p)$, $B(p)$ — полиномы от p .

Шаг 3. Определяется ИХ АФ. Применяв к ПтФ (3.7) обратное преобразование Лапласа, получим

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^M c_k e^{p_k t} u(t), \quad (3.8)$$

где $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases}$ — функция единичного скачка;

Шаг 4. Осуществляется дискретизация ИХ АФ. Период дискретизации T , если он не задан, выбирается в соответствии с теоремой отсчетов Котельникова.

В результате для ИХ ЦФ получим

$$h(nT) = \sum_{k=1}^M c_k e^{p_k nT} u(n). \quad (3.9)$$

Шаг 5. Рассчитывается ПтФ ЦФ. Искомую ПтФ получаем, выполнив Z -преобразование ИХ (3.9):

$$H(z) = \sum_{k=1}^M c_k / (1 - e^{p_k T} z^{-1}). \quad (3.10)$$

Метод инвариантности ИХ преобразует устойчивый АФ в устойчивый ЦФ, так как полюсы аналоговой ПтФ, находящиеся в левой p -полуплоскости, при преобразовании (3.10) переносятся вовнутрь круга единичного радиуса в z -плоскости (см. также п. 1.3). Вместе с тем, при дискретизации АФ методом инвариантности ИХ возможны искажения частотных характеристик, обусловленные эффектом наложения. Рассмотрим сущность этих искажений.

Связь между комплексными частотными характеристиками ЦФ и АФ прототипа можно получить в общем виде. Для этого используем подобие между процедурами дискретизации аналогового сигнала и преобразования ИХ аналогового фильтра в ИХ цифрового фильтра методом инвариантности. В обоих случаях происходит дискретизация функций времени: в первом случае сигнала $x_a(t)$, во втором — ИХ $h_a(t)$. Поэтому воспользуемся результатами, полученными в п. 1.8, и аналогично (1.46) за-

пишем

$$H(e^{j\omega T}) = (1/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a[j(\omega + (2\pi/T)m)] \quad (3.11)$$

Из формулы (3.11) следует, что частотная характеристика ЦФ, будучи периодической функцией частоты, представляет собой бесконечную взвешенную сумму частотных характеристик АФ, сдвинутых относительно друг друга на частоту дискретизации $\omega_0 = 2\pi/T$ (рис. 3.6). Такая структура частотной характеристики ЦФ предопределяет возможность возникновения эффекта наложения и сопутствующих ему искажений характеристик. Нетрудно заметить, что эффект наложения ослабляется по мере уменьшения полосы пропускания фильтра или шага дискретизации T , поэтому метод инвариантности ИХ пригоден преимущественно для расчета узкополосных фильтров. В отсутствие наложений этот метод дает хорошие результаты для ФНЧ и полосовых фильтров Баттерворта, Бесселя, Чебышева. К достоинствам метода следует также отнести сохранение в ЦФ таких же фазовых характеристик и характеристик затухания, как и у исходного АФ.

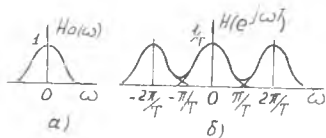


Рис. 3.6

3.3.3. Метод билинейного преобразования

Этот метод основан на преобразовании ПтФ АФ $H_a(p)$ в ПтФ ЦФ путем замены комплексной переменной по формуле

$$p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (3.12)$$

Рассмотрим сначала особенности метода, а затем определим их влияние на процедуру расчета ЦФ. Билинейное преобразование представляет собой конформное отображение p -плоскости в z -плоскость, причем каждой точке комплексной p -плоскости $p = \sigma + j\omega$ однозначно ставится в соответствие определенная точка z -плоскости $z = e^{(\sigma + j\omega)T} = |z|e^{j\omega T}$. Выражение (3.12) можно представить в виде $z = (2/T + p)/(2/T - p)$. Отсюда нетрудно получить

$$|z| = \{[(2/T + \sigma)^2 + \omega^2] / [(2/T - \sigma)^2 + \omega^2]\}^{1/2}, \quad (3.13)$$

$$\Omega T = \text{arc tg}[\omega / (2/T + \sigma)] + \text{arc tg}[\omega / (2/T - \sigma)]. \quad (3.14)$$

Как видно из выражения (3.13), при $\sigma < 0$ имеем $|z| < 1$, при $\sigma > 0$ — $|z| > 1$ и при $\sigma = 0$ — $|z| = 1$. Это означает, что билинейное преобразование отображает: левую полуплоскость

p -плоскости в единичный круг ($|z| < 1$) z -плоскости; правую p -полуплоскость в область, расположенную вне единичного круга ($|z| > 1$); мнимую ось $j\omega$ p -плоскости в единичную окружность ($|z| = 1$) на z -плоскости (рис. 3.7).

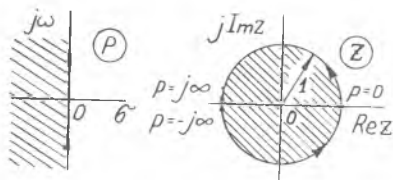


Рис. 3.7

Проведем дополнительное исследование взаимного соответствия оси мнимых $j\omega$ и единичной окружности $|z| = 1$. Очевидно, что при $\sigma = 0$ и $|z| = 1$ выражение (3.14) принимает вид $\Omega = (2/T) \times \text{arctg}(\omega T/2)$. Отсюда следует, что начало координат

p -плоскости ($\sigma=0, \omega=0$) отображается в точку z -плоскости с координатами $(1,0)$, бесконечно удаленные точки оси мнимых ($\sigma=0, j\omega=j\infty$ и $\sigma=0, j\omega=-j\infty$) в точки $(+\pi, 0)$ и $(-\pi, 0)$ соответственно, а положительная и отрицательная мнимые полуоси $j\omega$ p -плоскости отображаются соответственно в верхнюю и нижнюю полуокружности $|z| = 1$ z -плоскости. Кроме того видно, что связь между шкалами «цифровой» Ω и «аналоговой» ω частот нелинейная.

Видом конформного отображения предопределяется характер связи между ПтФ аналогового и цифрового фильтров. Для метода инвариантности ИХ — это бесконечная сумма (3.11); для метода билинейного преобразования — это простое алгебраическое выражение

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p=(2T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} \quad (3.15)$$

Из проведенного анализа следует:

методом билинейного преобразования устойчивый АФ преобразуется в устойчивый ЦФ;

$H(z)$ является физически реализуемой ПтФ, поскольку в результате преобразования (3.15) дробно-рациональная функция $H_a(p)$ преобразуется также в дробно-рациональную функцию, а отношение порядков числителя и знаменателя не изменяется;

искажения частотных характеристик, связанные с эффектом паложения и характерные для метода инвариантности ИХ, отсутствуют;

методу билинейного преобразования присущ эффект деформации шкалы частот, обусловленный отмеченным выше нелинейным характером связи шкал частот. Эффект деформации приводит к искажению частотных характеристик ЦФ относительно характеристик исходного АФ. Однако эти искажения оказываются иными, чем в методе инвариантности ИХ.

Рассмотрим влияние эффекта деформации шкалы частот. Нетрудно заметить, что шкала частоты ω АФ и шкала частоты Ω ЦФ связаны соотношением

$$\omega = (2/T) \operatorname{tg} (\Omega T/2). \quad (3.16)$$

График, иллюстрирующий формулу (3.16), приведен на рис. 3.8, а, б. Кроме того, на рис. 3.8, а изображены АЧХ аналогового и цифрового фильтров, а на рис. 3.8, б — их фазочастотные характеристики. Как видно, в области низких частот $\Omega < 0,3 T$

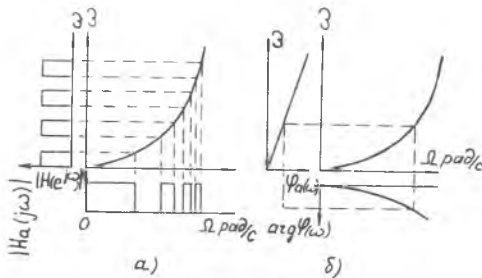


Рис. 3.8

зависимость (3.16) близка к линейной ($\omega \approx \Omega$) и искажения незначительны. В области высоких частот шкала частот ЦФ деформируется. Соответственно искажаются АЧХ и ФЧХ ЦФ.

Если интересоваться только амплитудной характеристикой, то влияние деформации шкалы частот может быть во многих случаях скомпенсировано путем введения предуслажений в АФ. Такая процедура позволяет получить ЦФ с заданными параметрами: требуемыми значениями полос пропускания или непропускания и т. п. Однако при этом не обеспечивается в ЦФ сохранение формы АЧХ и ФЧХ АФ (например, линейности ФЧХ).

Расчет ЦФ методом билинейного преобразования выполняется в следующей последовательности:

Шаг 1. Определение требуемых параметров и характеристик ЦФ в соответствии с его назначением. Определение на шкале частот характерных точек: граничных частот полос пропускания и непропускания или каких-либо других.

Шаг 2. Введение предуслажений путем пересчета характерных частот по соотношению (3.16) в аналоговую область.

Шаг 3. Расчет АФ-прототипа с учетом коррекции шкалы частот по стандартным методикам.

Шаг 4. Расчет ПтФ ЦФ в соответствии с выражением (3.15).

Метод билинейного преобразования благодаря своей простоте нашел широкое практическое применение, в частности для расчета цифровых ФНЧ, полосовых фильтров Баттерворта, Чебышева, эллиптических фильтров. Помимо рассмотренных известны также другие методы расчета РЦФ, сведения о них можно найти в литературе [1, 2, 7, 9, 11].

3.3.4. Частотные преобразования фильтров

В теории частотно-избирательных фильтров показана возможность преобразования фильтра одного вида в фильтр другого вида с сохранением в преобразованном фильтре определенных свойств и характеристик исходного фильтра. Такие методы носят название *частотных преобразований фильтров*.

Частотные преобразования позволяют осуществить масштабирование фильтров по частоте («сжатие—растяжение» их частотных характеристик), а также преобразование полосы частот совместно с преобразованием фильтра одного вида в фильтр другого вида (например, ФНЧ в полосовой фильтр и т. п.).

Использование частотных преобразований позволяет унифицировать процедуру расчета фильтров, свести ее к двум основным этапам: расчету нормированного фильтра основного типа и последующего преобразования фильтра основного типа в требуемый фильтр. В качестве основного фильтра используется ФНЧ с нормированной полосой пропускания (полагается обычно частота среза $\Omega_c = 1$ рад/с), но с заданными характеристиками избирательности. Ясно, что такая унификация открывает широкие возможности по использованию для расчета фильтров разного рода справочников (таблиц, номограмм), а также типового математического обеспечения для ЭВМ.

Методы частотных преобразований разработаны как для АФ, так и для рекурсивных ЦФ. Поэтому при расчете ЦФ по АФ-прототипу возможны 2 схемы:

1. Расчет аналогового нормализованного ФНЧ → преобразование полосы частот в аналоговой области → дискретизация АФ → ЦФ с заданными характеристиками.

2. Расчет аналогового нормализованного ФНЧ → дискретизация АФ → преобразование полосы частот в цифровой области → ЦФ с заданными характеристиками.

Подробное изложение методов частотных преобразований выходит за рамки настоящего пособия. Сведения о них можно найти в литературе [1, 2, 4, 11].

3.4. СВОЙСТВА НЕРЕКУРСИВНЫХ (ННХ) ЦФ

В нерекурсивной форме могут выполняться АФ различных видов: частотно-избирательные, дифференциаторы, преобразователи Гильберта, а также обладающие специальными характеристиками, например согласованные фильтры.

Перечислим особенности НЦФ. К достоинствам этих фильтров можно отнести: возможность получения строго линейной ФЧХ; абсолютная устойчивость; возможность проще, чем в РЦФ, минимизировать шумы, возникающие за счет выполнения арифметических операций с конечной точностью.

Вместе с тем НЦФ присущи также и негативные качества. Для получения высокой избирательности в полосно-пропускающих фильтрах требуются «длинные» ИХ с большим числом отсчетов. Соответственно большим оказывается количество арифметических операций, необходимых для выполнения свертки сигнала с такой ИХ. При аппаратной реализации НЦФ для получения «хороших» амплитудных характеристик обычно требуются большие аппаратные затраты, чем в РЦФ. ПтФ НЦФ (см. п. 1.4) представляет собой полином относительно z^{-1} степени $N-1$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}, \quad (3.17)$$

где $h(n)$ — отсчеты ИХ, $a_n = h(n)$ — коэффициенты фильтра. Перепишем (3.17) в виде

$$H(z) = (1/z^{N-1}) \sum_{n=0}^{N-1} h_i(n) z^{N-1-n}. \quad (3.18)$$

Из формулы (3.18) видно, что ПтФ НЦФ имеет $N-1$ полюсов, расположенных в начале координат $z=0$, и $N-1$ нулей. Различные виды НЦФ характеризуются присущим им упорядочением расположения нулей в z -плоскости.

Целесообразно выделить два вида НЦФ: минимально-фазовые и с линейной ФЧХ. Характерным признаком фильтров первого вида является расположение нулей внутри и на окружности единичного радиуса комплексной z -плотности (рис. 3.9,а). Минимально-фазовые фильтры обладают хорошим разрешением по времени: при одинаковых условиях по избирательности такие фильтры имеют более короткую ИХ.

Линейность ФЧХ во многих приложениях имеет особое значение.

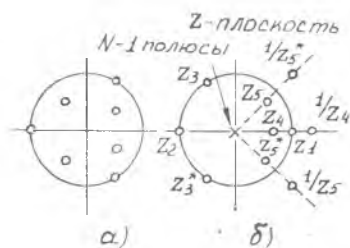


Рис. 3.9

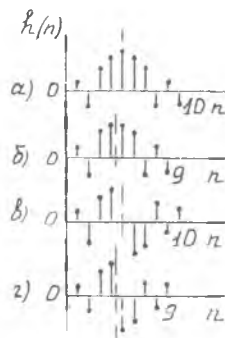


Рис. 3.10

Далее покажем, что условием получения строго линейной ФЧХ в НЦФ является симметрия ИХ или, что то же самое, симметрия коэффициентов a_n в ПтФ (3.17). Эта симметрия может быть четной и нечетной. Симметричные ИХ НЦФ показаны на рис. 3.10. Нетрудно заметить, что существует четыре варианта таких характеристик, соответственно различают фильтры четырех видов:

Вид 1

N — нечетное, симметричные коэффициенты (рис. 3.10,а);

$$a_m = a_{N-1-2m}, \quad m = 0, \dots, (N-3)/2.$$

Вид 2

N — четное, симметричные коэффициенты (рис. 3.10,б);

$$a_m = a_{N-1-m}, \quad m = 0, \dots, N/2-1.$$

Вид 3

N — нечетное, антисимметричные коэффициенты (рис. 3.10,в);

$$a_m = -a_{N-1-2m}, \quad m = 0, \dots, (N-3)/2.$$

Вид 4

N — четное, антисимметричные коэффициенты (рис. 3.10,г).

$$a_m = -a_{N-1-m}, \quad m = 0, \dots, N/2-1.$$

Воспользовавшись соотношением

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{-j\omega m}, \quad (3.19)$$

нетрудно получить комплексные частотные характеристики этих фильтров. В самом деле, для фильтра вида 1 можно записать

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{(N-3)/2} a_m e^{-j\omega m} + a_{(N-1)/2} e^{-j\omega(N-1)/2} + \left[\sum_{m=(N+1)/2}^{N-1} a_m e^{-j\omega m} \right].$$

Во второй сумме правой части заменим переменную суммирования $l = N-1-m$ и, изменив затем обозначение переменной суммирования, запишем

$$H(e^{j\omega}) = a_{(N-1)/2} e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} [a_m e^{-j\omega m} + a_{N-1-2m} e^{-j\omega(N-1-m)}].$$

Учитывая симметрию коэффициентов, получим окончательно

$$H(e^{j\omega}) = \{a_{(N-1)/2} + 2 \sum_{m=0}^{(N-3)/2} a_m \cos[\omega(m - (N-1)/2)]\} e^{-j\omega(N-1)/2}. \quad (3.20)$$

Нетрудно убедиться в строгой линейности ФЧХ рассматриваемого фильтра. В самом деле, выражение в фигурных скобках (3.20) является вещественным и на фазу не влияет; выражение в показателе комплексной экспоненты, составляющее ФЧХ, является линейной функцией частоты ω .

Подобным образом, учитывая приведенные выше условия, можно получить выражения частотных характеристик для фильтров видов 2, 3, 4. Для частотных характеристик фильтров можно получить следующие выражения:

$$\text{Вид 1.} \quad H(e^{j\omega}) = e^{j\omega L} \sum_{l=0}^L c_l \cos \omega l, \quad (3.21)$$

где

$$L = (N-1)/2; \quad c_0 = a_{(N-1)/2}; \quad c_l = 2 a_{(N-1)/2-l}; \\ l=1, \dots, (N-1)/2.$$

$$\text{Вид 2.} \quad H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(L+0,5)} \sum_{l=0}^L c_l \cos \omega (l+0,5), \quad (3.22)$$

где $L=N/2-1$; $c_l=2 a_{N/2-1-l}$; $l=0, \dots, N/2-1$.

$$\text{Вид 3.} \quad H(e^{j\omega}) = e^{j\omega L} \sum_{l=1}^L c_l \sin \omega l, \quad (3.23)$$

где $L=(N-1)/2$; $c_l=2 a_{(N-1)/2-l}$; $l=1, \dots, (N-1)/2$.

$$\text{Вид 4.} \quad H(e^{j\omega}) = e^{j\omega(L+0,5)} \sum_{l=0}^L c_l \sin \omega (l+0,5), \quad (3.24)$$

где $L=N/2-1$; $c_l=2 a_{N/2-1-l}$; $l=0, \dots, N/2-1$.

Фильтры с линейной ФЧХ характеризуются вполне определенными закономерностями расположения нулей в z -плоскости (см. типовую диаграмму на рис. 3.9,б):

вещественные нули могут располагаться на единичной окружности в точках $z_l = \pm 1$ (точки z_1, z_2 на рис. 3.9,б);

комплексно-сопряженные пары нулей могут располагаться на единичной окружности z_3, z_3^* ;

вещественные нули, лежащие не на единичной окружности, образуют пары, симметричные относительно этой окружности $z_4, 1/z_4$;

комплексные нули, расположенные не на единичной окружности, должны образовывать группы из четырех нулей с взаимно симметричным расположением ($z_5, 1/z_5^*$ и $z_5^*, 1/z_5$). Полностью вида (3.17), обладающие таким размещением нулей, называются *зеркально-отражающими*. Приведенные сведения о размещении нулей НЦФ могут быть полезными в задачах анализа и синтеза фильтров.

18-19

3.5.1. Подход к задаче расчета НЦФ

Для синтеза НЦФ применяются преимущественно прямые методы расчета без использования АФ-прототипа. Ниже рассматриваются некоторые методы решения задачи аппроксимации характеристик НЦФ с линейной ФЧХ на основе использования физических реализуемых дискретных систем. Рассмотрим общие подходы к этой задаче. Как и ранее, предположим, что требуемые (желательные) или «идеальные» характеристики, которые также будем называть *целевыми функциями*, определены из условий использования фильтра по назначению на предшествующем этапе проектирования ЦФ (см. п. 3.1).

Для описания целевой функции $D(\omega)$ может использоваться весьма широкий набор средств. В то же время, частотная характеристика физически реализуемого НЦФ, как следует из формул (3.21) — (3.24), представляется тригонометрическим полиномом конечной длины. Таким образом, возникает задача аппроксимации целевой функции тригонометрическим рядом. Основными этапами решения этой задачи являются:

выбор критерия аппроксимации, т. е. уточнение смысла приближенного равенства $H(e^{j\omega}) \approx D(\omega)$ на заданном интервале частот;

оценка необходимого порядка фильтра N ;

расчет коэффициентов передаточной функции фильтра, при которых выполняется упомянутое условие $H(e^{j\omega}) \approx D(\omega)$ в смысле выбранного критерия;

проверка выполнения заданных требований к характеристикам фильтра. В случае, если заданные требования не выполняются, то следует изменить порядок фильтра N и выполнить последующие шаги повторно.

К задаче аппроксимации, в свою очередь, возможен различный подход. Наиболее эффективными являются методы, в которых оптимизируется вся совокупность коэффициентов фильтра из условия минимума ошибки аппроксимации. В частности, практическое применение находят:

метод наименьших квадратов, в котором минимизируется средний взвешенный квадрат ошибки аппроксимации [2]:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} q(\omega) |H(e^{j\omega}) - D(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min, \quad (3.25)$$

где $q(\omega)$ — весовая функция, позволяющая управлять точностью аппроксимации на различных участках частотного интервала (ω_1, ω_2) ;

метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации:

$$\max |H(e^{j\omega}) - D(\omega)| \rightarrow \min. \quad (3.26)$$

Суть чебышевского метода состоит в минимизации взвешенного модуля максимальной ошибки аппроксимации.

Процедуры (3.25) и (3.26) являются оптимальными. Это значит, что не существует другого порядка фильтра $N_1 < N$, при котором обеспечивается меньшая ошибка аппроксимации в соответствии с выбранным критерием. Помимо этого находят применение методы синтеза НЦФ, в которых оптимизируются значения не всех, а только части коэффициентов фильтра. Эти методы естественно не приводят к строго оптимальным решениям. Более того, существуют методы, в которых без применения процедур оптимизации, по некоторому правилу желательной физически нереализуемой частотной характеристикой (целевой функции), ставится в соответствие характеристика физически реализуемого ЦФ. Упомянутые методы отличаются по сложности и используются в зависимости от характера решаемой задачи.

3.5.2. Метод взвешивания с использованием временных «окон»

Метод «окна» является одним из наиболее простых методов расчета НЦФ. В качестве отправного пункта в этом методе берется целевая функция $D(\omega)$ — требуемая частотная характеристика, которая, как отмечалось, не обязательно должна удовлетворять условиям физической реализуемости. Простейшим примером такого рода может служить идеальный ФНЧ (рис. 3.11,а).

С помощью обратного преобразования Фурье можно получить ИХ, соответствующую целевой функции $D(\omega)$:

$$h_D(n) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} D(\omega) e^{j\omega n} d\omega. \quad (3.27)$$

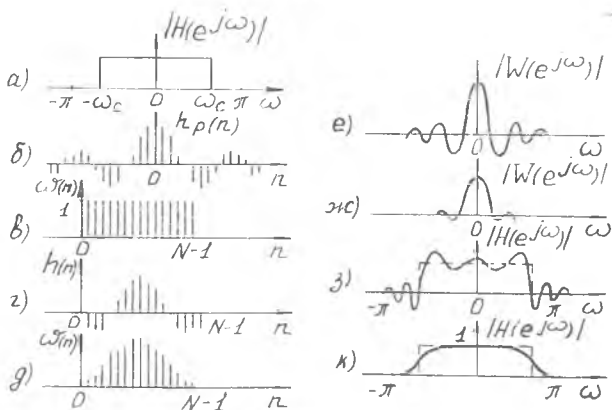


Рис. 3.11

Полученная таким образом ИХ, как правило, определена на интервале $(-\infty, \infty)$, т. е. бесконечна по длительности (рис. 3.11,б). Ясно, что такая ИХ не удовлетворяет условию физической реализуемости, так как отлична от нуля в области отрицательного времени $n < 0$. Кроме того, бесконечная ИХ не соответствует КИХ — структуре синтезируемого фильтра. Отмеченные затруднения можно устранить путем усечения ИХ по длительности и сдвига усеченной характеристики в область положительного времени. Такой сдвиг не влияет на АЧХ фильтра, а вносит лишь соответствующее запаздывание по фазе.

В обобщенном смысле усечение можно рассматривать как умножение ИХ на временное «окно». Временное «окно» $\omega(n)$ — это дискретная последовательность конечной длительности $n = 0, \dots, N-1$. Простейшим является «окно» прямоугольной формы (рис. 3.11,в). Ясно, что применение прямоугольного «окна» эквивалентно простому усечению. Полученная таким образом ИХ $h(n) = h_D(n)\omega(n)$ соответствует физически реализуемому КИХ-фильтру (рис. 3.11,г). По причинам, которые поясним ниже, обычно используют «окна», не прямоугольные, а специальной формы [12]. Их общей особенностью является плавное нарастание амплитуды отсчетов последовательности «окна» в начале, а также плавное спадание в конце. Типичное «окно» показано на рис. 3.11,д. Операцию умножения ИХ на «окно» называют *взвешиванием*, а само «окно» — *весовой последовательностью*. С этим связано название метода — *метод взвешивания*. Операция взвешивания приводит к тому, что частотная характеристика фильтра изменяется и оказывается отличной от исходной целевой функции. Для определения характера этого изменения рассмотрим суть операции взвешивания.

Из теории преобразования Фурье известно, что умножению двух временных функций (ИХ и «окна») в частотной области соответствует свертка их спектров (в нашем случае целевой функции и спектра окна), поэтому частотную характеристику физически реализуемого фильтра (т. е. с учетом взвешивания) можно получить с помощью свертки

$$H(e^{j\omega}) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} D(\Omega) W(e^{j(\omega-\Omega)}) d\Omega, \quad (3.28)$$

где $W(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \omega(n) e^{-j\Omega n}$ — спектр «окна» $\omega(n)$.

Комплексный спектр прямоугольного «окна» $\omega(n) = 1$ при $n=0, \dots, N-1$, $\omega(n) = 0$ при других n имеет вид

$$W_{\text{пр}}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}. \quad (3.29)$$

На рис. 3.11,е показан амплитудный спектр прямоугольного «окна», а на рис. 3.11,з — модуль свертки (3.28) целевой функции $D(\omega)$ со спектром этого «окна». Как видно, при использовании прямоугольного «окна» в АЧХ синтезируемого фильтра $|H(e^{j\omega})|$ появляются пульсации. В теории сигналов это явление называют *эффектом Гиббса*. Эффект Гиббса состоит в возникновении колебания АЧХ синтезируемого фильтра в окрестности резкого изменения целевой функции. Пульсации АЧХ, обусловленные этим эффектом, приводят к ухудшению избирательности фильтров. Частотные характеристики фильтров при использовании прямоугольного «окна» в большинстве приложений оказываются неудовлетворительными. Отметим, что увеличение длины характеристик «окна» не приводит к улучшению качества характеристик, так как при этом изменяются амплитуда и частота пульсаций, однако площадь между кривой пульсаций и осью абсцисс остается неизменной.

Спектры «окон» специальной формы имеют малый уровень боковых лепестков (рис. 3.11,ж). Влияние таких окон на требуемые, обычно «идеальные» частотные характеристики (целевую функцию), состоит в сглаживании в них разрывов характеристики в пределах некоторой переходной полосы конечной ширины. Суть такого сглаживания применительно к идеальному ФНЧ показана на рис. 3.11,к. Как видно, в результате этого сглаживания устраняются лепестки в АЧХ за счет некоторого обычно небольшого расширения главного лепестка и сопутствующего увеличения среднего квадрата ошибки аппроксимации

$$\varepsilon^2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |D(\omega) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

В связи с этим отметим, что для многих фильтров наиболее приемлемым критерием оптимальности является минимум максимальной абсолютной ошибки

$$\varepsilon = |D(\omega) - H(e^{j\omega})| \rightarrow \min.$$

В смысле этого критерия специальные «окна» имеют лучшие показатели по сравнению с прямоугольным «окном», так как лепестковость спектра последнего приводит к большим абсолютным ошибкам. Поэтому взвешивание ИХ специальными весовыми функциями приводит к улучшению избирательности фильтров.

Требования, предъявляемые к весовым функциям («окнам»), являются противоречивыми. С одной стороны, частотная характеристика (спектр) «окна» должна обладать возможно узким главным лепестком (для уменьшения ошибки ε^2), а с другой стороны — малыми боковыми лепестками. Во временной области «окно» должно описываться достаточно простыми функциями

ми. Разработано большое число различных «окон», в разной степени удовлетворяющих этим и ряду других требований [1, 2, 12]. В качестве примера приведем описание некоторых оконных функций:

функция Хэмминга

$$\omega(n) = 0,54 + 0,46 \cos [2 \pi n / (N - 1)],$$

$$n = -(N - 1) / 2, \dots, (N - 1) / 2;$$

функция Ланцоша

$$\omega(n) = \{\sin [2 \pi n / (N - 1)] / [2 \pi n / (N - 1)]\}^L,$$

$$n = -(N - 1) / 2, \dots, (N - 1) / 2;$$

где L — положительное целое, параметр окна;

функция Кайзера

$$\omega(n) = I_0\{\alpha \sqrt{1 - [2n / (N - 1)]^2}\} / I_0\{\alpha(N - 1) / 2\},$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,

α — положительное число, параметр окна.

Возможный подход к выбору параметров окон изложен в п. 3.5.5. Так как в методе «окна» не производится оптимизация параметров, то оказывается затруднительным предсказать точное значение параметров фильтра (например полосы пропускания или задерживания), которые получатся в результате синтеза. Поэтому может потребоваться корректировка параметров фильтра, которая выполняется путем повторного расчета методом проб и ошибок. При использовании ЭВМ этот недостаток метода не является существенным.

Метод «окон» применим для расчета широкого класса НЦФ.

3.5.3. Метод частотной выборки

Рассмотрим сначала упрощенный подход к задаче синтеза НЦФ на основе частотной выборки. Пусть на частотной шкале в равноотстоящих точках заданы выборочные значения $H(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$ требуемой частотной характеристики НЦФ. Выборки можно задать на основе целевой функции $D(\omega)$.

Пример взятия такой частотной выборки для идеального ФНЧ показан на рис. 3.12,а.

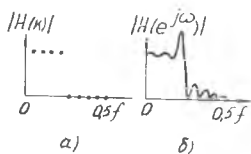


Рис. 3.12

Потребуем, чтобы значения частотной характеристики $H(e^{j\omega})$ синтезируемого фильтра на выбранных частотах $\omega_k = (2 \pi / N)k$, $k = 0, \dots, N - 1$ совпадали с выборкой $H(k)$. Однако на

всех промежуточных частотах $\omega \neq (2\pi/N)k$ не будем накладывать каких-либо условий на соответствие реальной и идеальной частотных характеристик (в рассматриваемом упрощенном подходе). Тогда для получения ИХ-фильтра достаточно выполнить обратное ДПФ над частотной выборкой:

$$h(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nk}, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (3.30)$$

Заметим, что на рис. 3.12,а взяты амплитуды $|H(k)|$, в то время как в формуле (3.30) фигурируют комплексные отсчеты $H(k) = |H(k)|e^{j\varphi(\omega_k)}$. На способе доопределения частотной выборки, т. е. на учете ФЧХ, мы остановимся ниже.

ПТФ НЦФ по частотной выборке можно получить с помощью Z-преобразования, подставив (3.30) в (3.17):

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} [(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nk}] z^{-n} = \\ &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)k} z^{-1}]^n. \end{aligned}$$

Здесь во втором выражении в правой части внутренняя сумма — геометрическая прогрессия. Просуммируем прогрессию и запишем:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j(2\pi/N)k} z^{-1}}. \quad (3.31)$$

Положим в (3.31) $z = e^{j\omega}$ и после элементарных преобразований получим комплексную частотную характеристику фильтра

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)}}{N} e^{-j\pi k/N}. \quad (3.32)$$

В (3.32) не учитывается принадлежность фильтра к какому-либо классу: с линейной ФЧХ минимально-фазовые. В дальнейшем ограничимся случаем НЦФ с линейной ФЧХ. Учтем, что вещественные фильтры имеют четную АЧХ и нечетную ФЧХ и для выборочных значений амплитудной и фазовой характеристик фильтра с линейной фазой при нечетном N запишем

$$\begin{aligned} |H(k)| &= |H(N-k)|, \quad k=1, \dots, (N-1)/2, \\ \varphi(k) &= \begin{cases} -[(2\pi/N)(N-1)/2]k, & k=0, \dots, (N-1)/2, \\ [(2\pi/N)(N-1)/2](N-k), & k=(N+1)/2, \dots, N-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Формулы (3.33) для модуля и фазы частотной выборки $H(k) = |H(k)|e^{j\varphi(k)}$ используем для доопределения частотной выборки в

(3.32). Опуская выкладки [4, с. 85—86), для АЧХ-фильтра получим

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|H(0)|}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{|H(k)|}{N} \left[\frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right] \quad (3.34)$$

Соответственно при четном N можно записать

$$\begin{aligned} |H(k)| &= |H(N-k)|, \quad k = 1, \dots, N/2-1, \\ H(N/2) &= 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$q(k) = \begin{cases} -(2\pi/N)(N-1)/2]k, & k=0, \dots, N/2-1; \\ [(2\pi/N)(N-1)/2](N-k), & k=N/2+1, \dots, N-1; \\ 0, & k=N/2. \end{cases}$$

Используя формулы (3.35), для АЧХ-фильтра можно получить

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|H(0)|}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} \left[\frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right]. \quad (3.36)$$

Формулы (3.34), (3.35) составляют основу для расчета НЦФ с линейной ФЧХ видов 1 и 2 (см. п. 3.4) (подобные формулы для фильтров видов 3 и 4 можно найти в [4]). Эти выражения удобны для практического использования, так как в них входят лишь отсчеты модуля требуемой частотной характеристики. Рассмотренная процедура расчета (в рамках упрощенного подхода) обеспечивает лишь совпадение полученной характеристики $|H(e^{j\omega})|$ с выборкой $|H(k)|$ на частотах $\omega_k = (2\pi/N)k$ и не представляет возможности предсказать поведение частотной характеристики между частотными выборками. Более того, фильтры, синтезируемые в соответствии с этой процедурой, без принятия специальных мер оказываются неудовлетворительными вследствие недопустимо больших пульсаций АЧХ. Для примера на рис. 3.12,б показана АЧХ цифрового ФНЧ, соответствующая частотной выборке, приведенной на рис. 3.12,а.

Для уменьшения пульсаций используется оптимизирующая

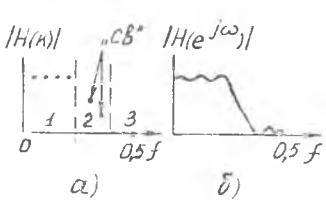


Рис. 3.13

процедура расчета, в которой наряду с полосами пропускания и непропускания области (1, 3 на рис. 3.13,а) выбирается переходная полоса конечной ширины (область 2).

В переходной полосе, в отличие от полос пропускания и непропускания, отсчеты частотной характе-

ристки $|H(k)|$ на выборочных частотах полагаются неопределенными, «свободными». Свободные элементы выборки подбираются таким образом, чтобы расхождение в полосах пропускания и (или) непропускания расчетной характеристики и требуемой характеристики (целевой функции) было минимальным (рис. 3.13,б).

Для оптимизации используются итерационные алгоритмы, хорошо реализующиеся на ЭВМ. В задаче оптимизации частотные характеристики (3.34), (3.36) удобно представить в обобщенном виде

$$|H(e^{j\omega})| = \sum_{k=0}^M |H(k)| S_k(e^{j\omega}). \quad (3.37)$$

Выражение (3.37) можно рассматривать как взвешенную сумму интерполирующих функций $S_k(e^{j\omega})$. Весьма существенно то, что множество этих функций не зависит от конкретных параметров синтезируемого фильтра (кроме порядка N). В этом можно убедиться путем непосредственного сравнения выражения (3.37) с формулами (3.34) и (3.36). Благодаря этому, приняв за основу множество функций $S_k(e^{j\omega})$, можно построить процедуру синтеза НЦФ произвольного вида из класса фильтров с линейной ФЧХ, в которой оптимизация АЧХ осуществляется путем варьирования свободными частотными выборками. Итерационная процедура оптимизации частотной характеристики минимизирует максимальное значение взвешенной ошибки

$$e(\omega) = |q(\omega)| |D(\omega) - H(e^{j\omega})|,$$

где $q(\omega)$ — некоторая весовая функция, позволяющая устанавливать различные уровни ошибок на разных интервалах аппроксимации.

На начальном этапе итерационной процедуры изменяемые (свободные) выборки $|H(k)|$ в (3.37) выбираются произвольно.

Для получения коэффициентов ПФ синтезируемого фильтра (или ИХ, что то же самое) необходимо выполнить операцию обратного ДПФ над частотной выборкой $H(k)$, в которой учитываются также оптимизированные элементы.

Метод частотной выборки можно применять для НЦФ различных типов: ФНЧ, ФВЧ, полосно-пропускающих и полосно-заграждающих фильтров, дифференциаторов и преобразователей Гильберта. Этот метод наиболее эффективен при расчете узкополосных фильтров, поскольку в этом случае большая часть частотных выборок равна нулю.

3.5.4. Метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации

Основу метода составляет теорема о чебышевском альтернансе (обобщенная теорема Чебышева). Сформулируем сначала эту теорему. Пусть заданы: $D(\omega)$ — непрерывная на интервале частот (α_1, α_2) целевая функция, $Q_N(\omega)$ — линейная комбинация N косинусов:

$$Q_N(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \cos \omega m; \quad (3.38)$$

$q(\omega)$ — кусочно-непрерывная на интервале (α_1, α_2) весовая функция. Ставится задача аппроксимации целевой функции тригонометрическим рядом (3.38) с весом $q(\omega)$.

Ошибка аппроксимации $e(\omega)$ можно записать как

$$e(\omega) = |q(\omega)| |D(\omega) - Q_N(\omega)|, \quad \alpha_1 \leq \omega \leq \alpha_2. \quad (3.39)$$

Теорема Чебышева утверждает, что ошибка равномерного приближения $e(\omega)$ (3.39) в зависимости от частоты имеет колебательный (пульсирующий) характер, и существует признак, присущий наилучшей аппроксимации.

В соответствии с этим признаком для выделения наилучшего приближения необходимо и достаточно, чтобы ошибка $e(\omega)$ принимала равные друг другу по абсолютной величине и чередующиеся противоположные по знаку экстремальные значения в $N+1$ последовательно расположенных точках $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ частотного интервала (α_1, α_2) . Иначе, ошибка имеет пульсирующий характер, амплитуды пульсаций при наилучшем равномерном приближении должны быть одинаковыми. Этому условию соответствует одна единственно возможная совокупность значений коэффициентов c_m в функции (3.38). При любых других значениях коэффициентов приближение не будет наилучшим, и признак не выполняется. Аналитически условие теоремы Чебышева выражается соотношениями

$$e(\omega_0) = -e(\omega_1) = \dots = (-1)^N e(\omega_N)$$

при $\alpha_1 \leq \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N \leq \alpha_2$

$$|e(\omega_j)| \geq |e(\omega)|, \quad j = 0, \dots, N; \quad \alpha_1 \leq \omega \leq \alpha_2. \quad (3.40)$$

Частоты $\omega_0, \omega_1, \dots$, на которых ошибка $e(\omega)$ принимает экстремальные значения, называют *точками альтернанса*. Отсюда следует и название самой теоремы.

Теорема Чебышева справедлива также для случая, когда аппроксимируемая целевая функция задана не на всем интервале частот (α_1, α_2) , а только на отдельных подынтервалах, не имеющих общих точек. В таком случае эта функция должна быть доопределена на промежуточных подынтервалах так, что-

бы получилась непрерывная функция на замкнутом интервале, включающем все заданные подынтервалы. Однако все точки альтернанса должны располагаться только на заданных подынтервалах. Это обстоятельство весьма существенно при проектировании частотно-избирательных фильтров, когда предъявляются требования к точности аппроксимации характеристик только в полосах пропускания и непропускания, разделенных переходной полосой. В качестве примера на рис. 3.14 приведена графическая интерпретация чебышевской аппроксимации частотной характеристики идеального ФНЧ, здесь ЦФ — целевая функция, заданная только в полосах пропускания и заграждения, и АФ — аппроксимирующая функция при $N = 6$.

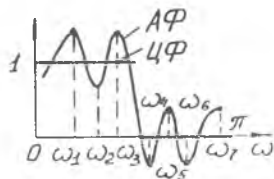


Рис. 3.14

Использование чебышевской аппроксимации предполагает возможность представления характеристик физически реализуемых фильтров выражением вида (3.38). Однако, как видно из формул (3.22) — (3.24), ПФ физически реализуемых фильтров не всегда описываются тригонометрическим рядом вида (3.38). Для НЦФ с линейной ФЧХ возникающие в связи с этим затруднения можно избежать, если представить частотную характеристику фильтра в виде

$$H(e^{j\omega}) = P(\omega) Q_N(\omega), \quad (3.41)$$

где $P(\omega)$ — некоторая подходящая непрерывная функция, значение которой будет ясно из последующего.

В этом случае ошибку аппроксимации можно выразить как

$$\epsilon(\omega) = |q(\omega)| |D(\omega) - H(e^{j\omega})| = \bar{q}(\omega) |D(\omega) - Q_N(\omega)|, \quad (3.42)$$

где $\bar{q}(\omega) = q(\omega) \cdot P(\omega)$ и $\bar{D}(\omega) = D(\omega) / P(\omega)$.

Как видно, если частотные характеристики представимы в виде (3.41), то задача аппроксимации сводится к классической постановке (3.39). Покажем на конкретных примерах такую возможность для НЦФ с линейной фазой.

Опуская в выражении (3.21) член с линейной фазой (так можно поступить, так как в формулах (3.39) и в (3.42) рассматривается модуль ошибки), видим, что в этом случае задача определения функции $P(\omega)$ тривиальная и $P(\omega) = 1$. Рассмотрим далее (3.23). Линейную комбинацию синусов в этом выражении можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^N c_n \sin \omega n = \sin \omega \sum_{r=0}^{N-1} \bar{c}_r \cos \omega r, \quad (3.43)$$

$$c_k = (\bar{c}_{k+1} - \bar{c}_{k-1}) / 2,$$

В этом случае $P(\omega) = \sin \omega$. Подобные примеры можно продолжить. Таким образом, мы показали возможность использования метода при проектировании различных физически реализуемых фильтров.

Теперь обратимся к центральной задаче метода: способу определения аппроксимирующей функции $Q_N(\omega)$ наилучшего равномерного приближения. Предложено несколько способов решения этой задачи, из которых наиболее практичен метод, основанный на итерационной процедуре, известной под названием *второго алгоритма Ремеза*, и для которого созданы эффективные машинные программы [2, 10, 11]. Поясним логическую сущность этого метода.

Напомним, что функция $Q_N(\omega)$ определяется N своими коэффициентами c_n , $n=0, \dots, N-1$. Таким образом, задача состоит в отыскании оптимального вектора коэффициентов $\{c\}$. Предположим, что порядок фильтра составляет N . Заметим, что для оценки порядка фильтра существует приближенная эмпирическая формула (см. п. 3.55). Основа алгоритма Ремеза состоит в следующем. В теореме о чебышевском альтернансе (3.40) утверждается, что в случае оптимального решения ошибка аппроксимации имеет $N+1$ экстремумов. Предположим условно вначале, что множество частот экстремумов ω_k , $k=0, \dots, N$ известно. Тогда на каждой из этих частот модуль ошибки (3.39) составит некоторую (неизвестную) величину δ . Учитывая знакопеременный характер ошибки, можно составить систему $N+1$ уравнений

$$|\bar{q}(\omega_k)| |\bar{P}(\omega_k) - Q_N(\omega_k)| = (-1)^k \delta, \quad k=0, \dots, N, \quad (3.44)$$

в которой неизвестными являются коэффициенты c_n ряда (3.38) и ошибка δ . Система (3.44) может быть решена и определены, таким образом, искомые коэффициенты. Однако, вследствие исходной неопределенности, множество частот ω_k может не соответствовать точкам альтернанса. Соотношения (3.40) в этом случае выполняться не будут, поэтому поиск оптимального решения проводится итерационным способом. Каждый цикл итераций проводится в два шага [2].

Шаг 1. Выбирают $N+1$ значений частот ω_k , решают систему уравнений (3.44), вычисляют в результате этого коэффициенты c_n и δ . Таким образом получают тригонометрический полином по косинусам, который в точках ω_k ($k=0, \dots, N$) отличается от целевой функции на величину $\pm \delta$.

Шаг 2. Анализируют ошибку $e(\omega)$ на всем интервале частот (на плотной частотной сетке). Если ошибка $|e(\omega)| \leq \delta$ на всей области аппроксимации, то полученное решение является оптимальным. Если найдутся частоты $\alpha_1 \leq \omega \leq \alpha_2$, на кото-

рых $|e(\omega)| > \delta$, то выбирают новое множество экстремальных частот путем рассмотрения $N+1$ точек, в которых ошибка максимальна и имеет чередующийся знак. Далее описанная процедура повторяется. Можно показать, что в этой процедуре δ на каждом шаге возрастает и в конце концов сходится к своей верхней границе. Начальное множество частот можно взять произвольно.

Отметим, что в алгоритме Ремеза предложен способ вычислений, позволяющий избежать решения системы (3.44) на каждом шаге итераций. Тем самым повышается эффективность алгоритма [2].

3.5.5. Особенности практической реализации методов расчета НЦФ

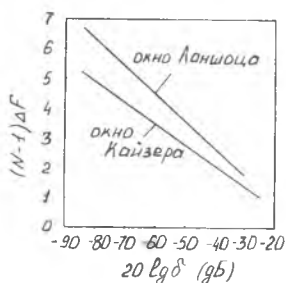
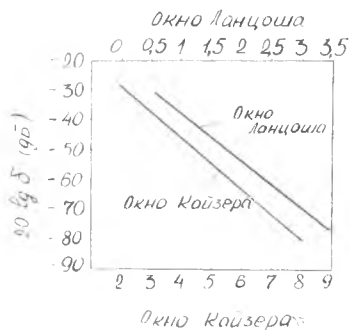
Рассмотренные методы расчета НЦФ реализуются с помощью ЭВМ. В результате расчета требуется получить минимальное число (порядок фильтра) и значения коэффициентов ПтФ, при которых обеспечивается заданная точность аппроксимации целевой функции: требуемая избирательность, допустимые пульсации в полосе прозрачности δ_1 и полосе заграждения δ_2 и т. п. Однако все рассмотренные выше методы не вполне соответствуют такой постановке задачи, так как в них сначала выбирается порядок фильтра N , а уже затем рассчитываются коэффициенты. Ясно, что для выбора N необходима априорная информация. Практически выбор порядка N производится на основе эмпирических формул, графиков, таблиц, построенных по экспериментальным данным. Разумеется, такая предварительная оценка порядка может оказаться неточной. Тогда приходится производить многократный расчет, последовательно приближаясь к оптимальному решению. При использовании ЭВМ итерационные процедуры последовательных приближений оказываются вполне приемлемыми для практического использования. Рассмотрим особенности методов расчета НЦФ, связанные с их практическим использованием.

Метод окна. Неравномерность АЧХ-фильтра, полученного с помощью метода, зависит от амплитуды боковых лепестков выбранной функции окна, и, когда окно выбрано, эти амплитуды, очевидно, фиксированы. В свою очередь амплитуды боковых лепестков зависят от величины параметра окна (если таковой в формуле окна имеется). Для выбора параметра окна удобно пользоваться графиком вида (рис. 3.15), на котором показана зависимость максимального уровня пульсаций АЧХ в полосе пропускания и задерживания ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$) для окон Ланцоша и Кайзера от параметров этих функций [4].

Ширина переходной полосы ΔF АЧХ фильтра зависит от ширины основного лепестка амплитудного спектра окна (см. рис. 3.11), которая, в свою очередь, определяется величиной N . Когда выбран вид используемой функции окна и подобрана величина ее параметра, два других параметра N и ΔF могут свободно, но совместно варьироваться, поскольку они связаны соотношением неопределенности вида

$$N \Delta F = c, \quad (3.45)$$

где c — константа, зависящая от вида окна и его параметра. Для выбора N можно воспользоваться графиком вида (рис. 3.16), на котором показана зависимость произведения $(N-1) \Delta F$ от максимального уровня пульсаций.



Метод частотной выборки. В этом случае для поиска оптимального решения в выражении (3.37) может быть использовано развитое математическое обеспечение современных ЭВМ. В работе [4] для решения задачи оптимизации используется стандартная программа с именем АРММ из библиотеки научных программ языка Фортран ЕС ЭВМ. Суть этой оптимизации состоит в минимизации максимальной ошибки в полосе задерживания фильтра. Амплитуды пульсаций в полосе задерживания зависят от числа варьируемых выборок N , которые нужно выбрать априори. Эмпирические данные уровня пульсаций в децибелах относительно уровня передачи в полосе пропускания, относящиеся к цифровым ФНЧ, имеют значения [4]:

Число варьируемых выборок	1	2	3
Пределы ожидаемого уровня максимальной ошибки в полосе задерживания, дБ	44 ... 54	65 ... 75	85 ... 95

Отметим, однако, что к этим данным следует относиться с осторожностью, так как в случаях, когда проектируемый фильтр имеет «очень узкую» или «очень широкую» полосу пропускания, затухание в полосе задержания может выходить за указанные пределы.

Для оценки порядка фильтра N предположим, что заданы ширина полос пропускания задерживания и переходной полосы, а также уровень пульсаций δ_2 в полосе задерживания. Тогда, воспользовавшись вышеприведенными данными, можно определить число варьируемых выборок N_v , попадающих в переходную полосу шириной ΔF . Далее нетрудно определить общее число выборок, приходящихся на полосу частот $(0,1)$, $N = (1/\Delta F) N_v$. Заметим, что здесь частота полагается нормированной (безразмерной).

В практической работе следует иметь в виду, что программа АРММ чувствительна к точности вычислений, поэтому при росте числа переменных N_v и соответствующем уменьшении уровня пульсаций может потребоваться двойная точность вычислений.

Минимаксный чебышевский метод аппроксимации. Для оценки минимального порядка фильтра $N_{\text{мин}}$ по этому методу предлагается следующая эмпирическая формула, справедливая для ФНЧ [2]:

$$N_{\text{мин}} = D_1 (\delta_1, \delta_2) / \Delta F + D_2 (\delta_1, \delta_2) \Delta F + 1,$$

где

$$\begin{aligned} D_1 (\delta_1, \delta_2) &= [5,309 \cdot 10^{-3} (\lg \delta_1)^2 + 7,114 \cdot 10^{-2} \lg \delta_1 - \\ &- 4,761 \cdot 10^{-1}] \lg \delta_2 + [-2,66 \cdot 10^{-3} (\lg \delta_1)^2 - \\ &- 5,91 \cdot 10^{-1} \lg \delta_1 - 4,278 \cdot 10^{-1}]; \\ D_2 (\delta_1, \delta_2) &= 11,01217 + 0,51244 (\lg \delta_1 - \lg \delta_2). \end{aligned}$$

Для чебышевского метода аппроксимации предложена эффективная программа для ЭВМ, в которой используется алгоритм Ремеза [2, 10]. Программа обладает большими возможностями: ее можно использовать для расчета сложных, в том числе многополосных, частотно-избирательных фильтров, дифференциаторов, преобразователей Гильберта.

4. ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ В ЦФ

4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

ОБ ЭФФЕКТАХ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ

Ясно, что разрядность регистров памяти реальных цифровых процессоров ограничена. Поэтому числа, с которыми оперируют

такие процессоры, имеют конечное количество разрядов (бит), и представляются в ЭВМ с ограниченной точностью. Ошибки, обусловленные эффектами конечной разрядности, могут существенно влиять на свойства и характеристики устройств цифровой обработки сигналов, а в некоторых случаях даже на их нормально функционирование — поэтому необходим обоснованный выбор разрядности регистров. В этой задаче мы ограничимся случаем, получившем практическое распространение, когда в процессоре ЦФ используется арифметика с фиксированной точкой. Кроме того, предположим, что используется двоичная система счисления в дополнительном коде. В таком случае влияние конечной разрядности регистров проявляется в эффектах квантования и переполнения. Обратимся сначала к первому из этих эффектов.

В ЦФ переменные обычно нормируются так, чтобы $|x| < 1$. При этом условии в дополнительном коде двоичное число x и его десятичный эквивалент x_d связаны соотношением

$$x_d = -x^{(0)} + \sum_{i=1}^b x^{(i)} 2^{-i}, \quad (4.1)$$

где $x^{(i)} \in 0, 1, i \neq 0$ — значение бита i -го разряда; $x^{(0)} \in 0, 1$ — знаковый бит; b — длина кода числа x (без знакового бита).

Шаг квантования q определяется весом младшего разряда двоичного числа и, как видно из соотношения (4.1), составляет $q = 2^{-b}$. Квантование можно рассматривать как нелинейное преобразование m -разрядного двоичного числа b -разрядное число с меньшим количеством разрядов ($b < m$). Квантование сопровождается ошибками

$$e = Q(x) - x, \quad (4.2)$$

где x — квантуемое число, e — ошибка квантования, $Q(x)$ — характеристика преобразования.

В ЦФ различают три вида ошибок квантования: ошибки квантования коэффициентов ПЦФ, ошибки квантования отсчетов входных сигналов в АЦП (см. рис. 1.3) и ошибки квантования произведений (результатов арифметических операций). Эти ошибки в большинстве случаев можно считать случайными величинами. Ошибки зависят также от способа квантования: округление или усечение чисел.

Округление выполняется по правилу: если старший бит отбрасываемой части квантуемого числа «1», то в младший разряд сохраняемой части (т. е. b -й разряд числа (4.1) прибавляется «1». В противном случае отбрасываемая часть просто игнорируется. При усечении отбрасываемая часть квантуемого числа игнорируется без анализа ее значения.

Характеристики преобразования для округления и усечения приведены на рис. 4.1, а и б соответственно. Последняя справедлива только для чисел, кодируемых в дополнительном коде. Как видно, ошибки округления и усечения удовлетворяют условиям

$$-2^{-b}/2 \leq e_{\text{окр}} \leq 2^{-b}/2, \quad (4.3,а)$$

$$-2^{-b} \leq e_{\text{ус}} \leq 0. \quad (4.3,б)$$

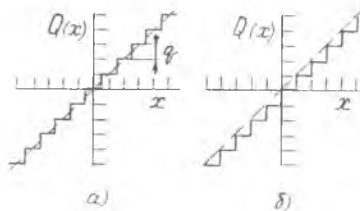


Рис. 4.1

Ошибки квантования $e_{\text{окр}}$ и $e_{\text{ус}}$ являются случайными величинами и подчинены равномерному закону распределения.

Как видно, максимальная ошибка округления составляет половину шага квантования $e_{\text{окр макс}} = q/2$, в то время как при усечении $e_{\text{ус макс}} = q$. На практике используются оба способа квантования. Технически усечение реализуется проще. Мы, однако, ограничимся анализом влияния только округления, так как в этом случае анализ оказывается более простым.

В оценке влияния квантования на работу ЦФ используются детерминированный и вероятностный подходы. Детерминированные оценки позволяют определить абсолютные границы ошибок квантования.

Вероятностный подход более удобен для анализа влияния ошибок квантования аналитическими методами. В таком случае используется линейная модель нелинейного преобразования квантования. Согласно этой модели, справедливой при малом шаге квантования q , квантованные значения отсчетов сигнала полагаются равными сумме исходного (точного) значения и случайной ошибки квантования. При таком подходе случайные ошибки квантования (4.2), взятые во времени с периодом временной дискретизации T , образуют дискретный случайный процесс (шум),

$$e(nT) = Q[x(nT)] - x(nT). \quad (4.4)$$

Если выполняется условие $x(nT) - x(nT - T) \gg q$, т. е. если за время T квантуемый сигнал изменяется на величину, существенно большую шага квантования, то отсчеты шума $e(nT)$, $n = 0, 1 \dots$ оказываются взаимно независимыми, случайными величинами, а шум квантования (4.4) — белым шумом. В большинстве практических случаев это условие выполняется. Поэтому, если не будет оговорено особо, полагаем процесс $e(nT)$ белым шумом.

При равномерном распределении дисперсия шума округления σ_e^2 и математическое ожидание m_e составляют

$$\sigma_e^2 = q^2/12 = 2^{-2b}/12; m_e = 0. \quad (4.5)$$

Второй вид эффектов конечной разрядности — эффекты переполнения разрядной сетки — могут наблюдаться в сумматорах цифровых процессоров. В ЦФ эти эффекты приводят к сильным искажениям сигналов, а в некоторых случаях к возникновению нежелательных колебательных процессов.

4.2. ПОМЕХИ В ЦФ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ КВАНТОВАНИЕМ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Для анализа такого рода помех воспользуемся линейной моделью квантования, в соответствии с которой квантованный сигнал на входе фильтра полагается аддитивной суммой входного сигнала $x(nT)$ и шума квантования $e(nT)$ (рис. 4.2). Нетрудно заметить, что шум квантования входного сигнала является внешним по отношению к фильтру.

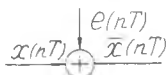


Рис. 4.2

Определим дисперсию этого шума на выходе фильтра. Будем считать при этом, что влияние других эффектов конечной разрядности отсутствует и что алгоритм цифровой фильтрации выполняется точно. Такой подход правомочен при малом шаге квантования q . В этом случае к другим источникам ошибок квантования также применима линейная модель. Это означает, что различные источники ошибок в такой линеаризованной системе можно рассматривать отдельно и независимо.

Энергетический спектр шума квантования входного сигнала на выходе дискретной системы нетрудно определить обычным образом, умножив спектр шума на входе на квадрат модуля частотной характеристики системы $\Phi_{\text{вых}}(\omega) = \Phi_{\text{вх}}(\omega) \cdot |H(e^{j\omega T})|^2$. Для определения дисперсии помехи на выходе $\sigma_{\text{вых}}^2$ проинтегрируем ее энергетический спектр:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_{\text{вх}}(\omega) |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \quad (4.6)$$

В z -плоскости интегрирование производится по контуру, в качестве которого выбрана окружность единичного радиуса $|z| = 1$:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (1/2\pi j) \int_{|z|=1} \Phi_{\text{вх}}(z) H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (4.7)$$

Особый интерес представляет случай, когда на входе действует шум с равномерной спектральной плотностью — бе-

льный шум, для которого

$$\Phi_{\text{вх}}(\omega) = \Phi_0 = \text{const.} \quad (4.8)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 &= (\Phi_0 T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \\ &= (\Phi_0 T/\pi) \int_0^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Примем во внимание важную особенность дискретного белого шума. В отличие от аналогового белого шума, дисперсия которого полагается бесконечно большой, дискретный шум имеет конечную дисперсию. В самом деле, учтем, что спектральные функции дискретных процессов определены на конечном интервале частот $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$. В таком случае для дисперсии белого шума справедливо соотношение

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi(\omega) d\omega = (\Phi_0 T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega = \Phi_0. \quad (4.10)$$

Как видно, дисперсия дискретного белого шума и его спектральная плотность мощности имеют равновеликие значения. Подставив соотношение (4.10) в (4.8) и (4.9) для дисперсии выходного шума получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (\sigma_{\text{вх}}^2 T/\pi) \int_0^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \quad (4.11)$$

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (\sigma_{\text{вх}}^2/2\pi j) \int_{|z|=1} H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (4.12)$$

Рассмотрим случай, когда ЦФ задается своей ИХ, а не ПтФ. Воспользуемся равенством Парсеваля (1.43), которое запишем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = \begin{cases} (T/\pi) \int_0^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \\ (1/2\pi j) \int_{|z|=1} H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz. \end{cases} \quad (4.13)$$

Учитывая выражения (4.11), (4.13), получим выражение для дисперсии выходного шума:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT). \quad (4.14)$$

Для нерекursивных (КИХ) ЦФ верхний предел суммирования в формуле (4.14) ограничен длиной ИХ и составляет $N-1$, где N — порядок фильтра.

Нами была рассмотрена задача прохождения шума через дискретную систему в общем виде, без учета характеристик источника шума. В конкретном случае для шума квантования входного сигнала с учетом формул (4.5), (4.11) и (4.14) получим

$$\sigma_{\text{кв вых}}^2 = (2^{-2b_c} / 12) (T/\pi) \int_0^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega = (2^{-2b_c} / 12) \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT), \quad (4.15)$$

где b_c — разрядность АЦП (без знакового бита).

На основании выражения (4.15) можно рассчитать разрядность входного АЦП: задавшись допустимым уровнем дисперсии помехи $\sigma_{\text{вых доп}}^2$, нетрудно определить разрядность b_c (см. п. 4.4).

21. 4.3. ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Анализ ошибок квантования произведений проведем сначала применительно к РЦФ. Перепишем для удобства разностное уравнение ПтФ (1.16)

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m) - \sum_{r=1}^L b_r y(n-r) \quad (4.16)$$

и выражение ПтФ (1.21)

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 + \sum_{r=1}^L b_r z^{-r}}, \quad (4.17)$$

которыми описываются эти фильтры. Произведение двух b_1 - и b_2 -разрядных чисел вида (4.1) имеет $b_1 + b_2$ разрядов (знаковые биты, как ранее, не учитываем). Поэтому в отсутствие квантования произведений в рекурсивных структурах вида (4.16) разрядность чисел с течением времени от рекурсии к рекурсии должна неограниченно возрастать. Ясно, что в таких ЦФ принципиально необходимо квантование произведений. Практически произведения квантуются и в других устройствах цифровой обработки сигналов.

Анализ влияния эффектов квантования произведений в ЦФ осуществляется на основе линейной модели квантования чисел, описанной в п. 4.1. В соответствии с этой моделью в каждый умножитель на его выходе включается источник аддитивного белого шума, учитывающий ошибку квантования. Соответственно в каждое слагаемое в правой части (4.16) добавляется случайная компонента шума округления:

$$\bar{y}(n) = \sum_{m=0}^M [a_m x(n-m) + e_m(n)] - \sum_{r=1}^L [b_r \bar{y}(n-r) + e_r(n)], \quad (4.17, a)$$

где $e_i(n)$ — шум i -го источника: $\bar{y}(n)$ — отсчеты выходного сигнала, искаженные под воздействием шума квантования.

Заметим, что здесь имеются в виду искажения, обусловленные прохождением через цепи фильтра всего совокупного шума квантования всех произведений. Ясно, что отсчеты входного сигнала $x(n)$ таким искажениям не подвержены, и поэтому они в формуле (4.17,а) полагаются точными. Структурная схема РЦФ в прямой форме,

в которой введены источники шума квантования, показана на рис. 4.3,а. Из структурной схемы видно, что источники шума всех умножителей, подключенных к одному сумматору, могут быть объединены в один эквивалентный источник $e_{\Sigma}(n)$, воздействующий на выход этого сумматора (рис. 4.3,б). При этом эффект воздействия шумов на ЦФ не изменится. Таким образом, уравнение (4.17) можно представить в виде

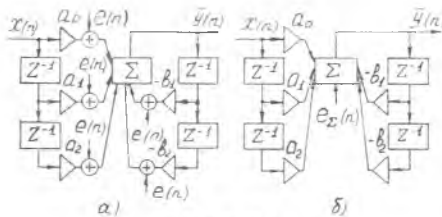


Рис. 4.3

объединены в один эквивалентный источник $e_{\Sigma}(n)$, воздействующий на выход этого сумматора (рис. 4.3,б). При этом эффект воздействия шумов на ЦФ не изменится. Таким образом, уравнение (4.17) можно представить в виде

$$\bar{y}(n) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m) - \sum_{r=1}^L b_r \bar{y}(n-r) + e_{\Sigma}(n). \quad (4.18)$$

Парциальные шумы в уравнении (4.17,а) являются независимыми белыми.

В случае округления все они имеют нулевые средние $m_{ei}=0$ и одинаковые дисперсии $\sigma_{ei}^2 = 2^{-2b_{ei}}/12$, где b_{ei} — разрядность (без знакового бита) произведений после округления. Ясно, что эквивалентный шум по-прежнему будет иметь нулевое среднее, а дисперсия увеличится в $M + L + 1$ раз по числу умножителей в уравнении (4.16) и составит

$$\sigma_{e_{\Sigma}}^2 = (M+L+1) q^2/12 = (M+L+1) 2^{-2b_{ei}}/12. \quad (4.19)$$

Определим ошибку округления на выходе фильтра как

$$\varepsilon(n) = \bar{y}(n) - y(n). \quad (4.20)$$

Подставим в формулу (4.20) уравнения (4.16) и (4.18) и получим

$$\varepsilon(n) + \sum_{r=1}^L b_r \varepsilon(n-r) = e_{\Sigma}(n). \quad (4.21)$$

Как видно, ошибка $\varepsilon(n)$ определяется только шумом $e_{\Sigma}(n)$ и параметрами фильтра и не зависит от значений сигналов, циркулирующих в фильтре. Это является следствием статистиче-

ской независимости шума квантования $e(n)$ и квантуемого сигнала, а также линейности ЦФ.

Разностному уравнению (4.21) соответствует линейная система с ПтФ

$$\frac{1}{B(z)} = 1 / (1 + \sum_{r=1}^L b_r z^{-r}), \quad (4.22)$$

где $B(z)$ — знаменатель ПтФ (4.17).

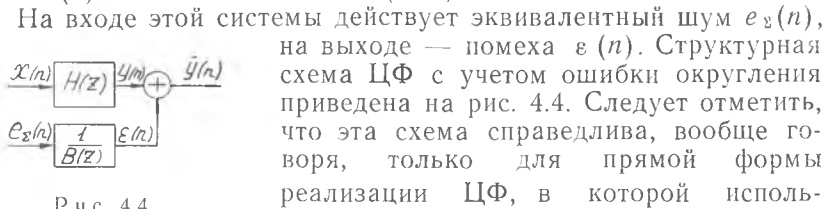


Рис. 4.4

формах, например в канонической (см. рис. 3.2,б), количество сумматоров в которых больше одного, парциальные шумы квантования группируются в эквивалентные источники другим образом, отличным от показанного на рис. 4.3,а и б. Количество эквивалентных источников шума в таких структурах определяется числом сумматоров, к которым подключены множители. Соответственно иной оказывается и эквивалентная структурная схема. Общий случай мы рассмотрим ниже, а пока вернемся к РЦФ в прямой форме. Имея в виду (4.19) и (4.22), нетрудно по формуле (4.12) вычислить дисперсию помехи на выходе фильтра:

$$\sigma_{\text{ш вых}}^2 = (M+L+1) \cdot 2^{-2b_{\text{ш}}} / 12 \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z B(z) B(z^{-1})}. \quad (4.23)$$

В п. 4.2 отмечалось, что РЦФ высокого порядка выполняются по многозвенным, последовательной или параллельной, формам. Распространим результат (4.23) на последовательную каскадную форму.

В последовательной форме ПтФ ЦФ записывается в виде

$$H(z) = \prod_{i=1}^K H_i(z), \quad (4.24)$$

$$H_i(z) = (1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}) / (1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}). \quad (4.25)$$

По аналогии с предыдущим случаем (см. рис. 4.4), введем в каждый биквадратный блок $H_i(z)$ дополнительное звено с ПтФ $1/B_i(z) = 1 / (1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2})$. Таким образом, при учете ошибок округления структурная схема ЦФ (см. рис. 3.3) преобразуется к виду, приведенному на рис. 4.5. Для шума ок-

ругления $e_{\Sigma i}$, образующегося в i -м каскаде фильтра, ПтФ относительно выхода фильтра составляет

$$\frac{1}{B_i(z)} \cdot H_{i+1}(z) \dots H_k(z), \quad i=1, 2, \dots, k-1,$$

$$\frac{1}{B_i(z)}, \quad i=k. \quad (4.26)$$

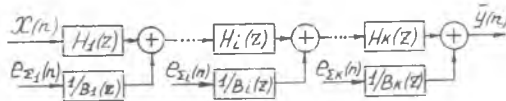


Рис. 4.5

Учитывая выражение (4.26), нетрудно распространить результат (4.23) на каскадную форму ЦФ. Таким образом для дисперсии i -й составляющей помехи на выходе фильтра получим

$$\sigma_{\text{п вых } i}^2 = \begin{cases} 4(2^{-2b_{\text{п}}}/12) \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z B_i(z) B_i(z^{-1})} \prod_{m=i+1}^k H_m(z) H_m(z^{-1}). \\ 4(2^{-2b_{\text{п}}}/12) \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z B_k(z) B_k(z^{-1})}; \quad (i=k). \end{cases} \quad (4.27)$$

В формулах (4.27) учтено, что биквадратный блок $H_i(z)$ в (4.24) содержит 4 умножителя. Составляющие ошибки (4.27) $\sigma_{\text{п вых } i}^2$; $i=1, \dots, k$ статистически независимы друг от друга. Поэтому дисперсия полной помехи на выходе фильтра равна сумме дисперсий составляющих:

$$\sigma_{\text{п вых полн}}^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_{\text{п вых } i}^2. \quad (4.28)$$

Проведенный анализ относится, как отмечалось, к частному случаю—РЦФ в прямой форме. Рассмотренный метод нетрудно распространить на фильтры других видов и форм. Для этого воспользуемся обобщенной шумовой моделью ЦФ.

Обобщенная шумовая модель представляет собой направленный граф (рис. 4.6), узлы которого соответствуют сумматорам, а дуги (ветви) — умножителям и элементам задержки структурных схем фильтров. Верхняя половина графа предназначена для анализа эффектов квантования, а нижняя — эффектов переполнения. На рис. 4.6 используются обозначения: $x(n)$ — дискретный («точный»), не квантованный по уровню входной сигнал; $\bar{y}(n)$ — выходной сигнал, включающий в себя выходной шум квантования; $e_c(n)$ — шум квантования входного сигнала (шум АЦП); $e_{\Sigma i}$ — эквивалентный шум квантования

в i -м узле суммирования, возникающий вследствие округления результатов операций умножения в регистрах умножителей, подключенных к i -му сумматору; $G_i(z)$, $g_i(n)$ — соответственно ПтФ и ИХ-части ЦФ от выхода i -го сумматора до выхода фильтра; $v(n)$ — выходной сигнал i -го сумматора; $F_i(z)$, $f_i(n)$ — соответственно ПтФ и ИХ-части ЦФ от его входа до выхода i -го сумматора; $H(z)$, $h(n)$ — ПтФ и ИХ всего фильтра в целом.

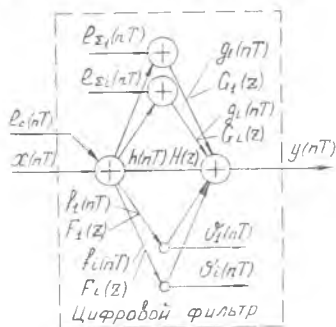


Рис. 4.6

На основе обобщенной шумовой модели нетрудно составить соответственно обобщенные выражения для расчета шума квантования на выходе фильтра. Для этого воспользуемся описанной в 4.2 методикой определения дисперсии шума на выходе линейной дискретной системы. Обратимся к шуму квантования произведений. Источниками шума на схеме рис. 4.6 являются сумматоры. Имея в виду, что импульсная характеристика для i -го источника шума относительно выхода фильтра есть $g_i(n)$ для

$$\sigma_{\text{п. вых. } i}^2 = (2^{-2b_{\text{п}}}/12) \sum_i r_i \sum_{n=0}^{\infty} g_i^2(nT), \quad (4.29)$$

где r_i — число умножителей, подключенных к i -му сумматору.

Подобным образом в случае, если известны ПтФ $G_i(z)$, запишем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{п. вых.}}^2 &= (2^{-2b_{\text{п}}}/12) \sum_i r_i \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} G_i(z) G_i(z^{-1}) z^{-1} dz = \\ &= (2^{-2b_{\text{п}}}/12) \sum_i r_i (T/\pi) \int_0^{\pi} |G_i(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Нетрудно заметить, что расчеты, выполненные на основе обобщенной схемы и по ранее описанным методикам, приводят к адекватным результатам. В самом деле, если в формуле (4.30) в качестве ПтФ $G(z)$ использовать (4.22) или (4.26), то для дисперсии шума получим выражения, эквивалентные (4.23) либо (4.27), (4.28) соответственно.

Основная трудность в построении обобщенной шумовой модели состоит в определении ее параметров по структурной схеме ЦФ. Представление о подходе к этой задаче для канонической формы РЦФ можно составить на основании рис. 4.7.

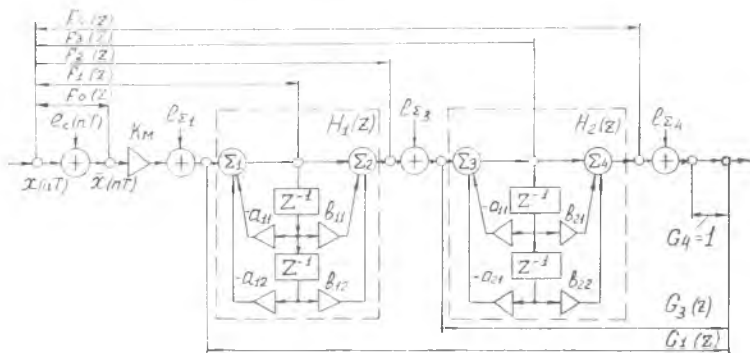


Рис. 4.7

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРЯДНОСТЕЙ ОТСЧЕТОВ ВХОДНОГО СИГНАЛА И РЕГИСТРОВ УМНОЖИТЕЛЕЙ

Как отмечалось, для определения разрядностей данных и регистров в ЦФ используются вероятностный и детерминированный подходы. В первом случае задача формулируется следующим образом: выбранные разрядности отсчетов входного сигнала (входного АЦП) и регистров умножителей должны обеспечить достаточно малый уровень мощности совокупного шума квантования, не превышающий некоторый допустимый $P_{ш доп}$. Допустимый уровень шума определяется из условия обеспечения требуемого отношения сигнал/помеха R_m (дБ) на выходе при работе в заданном динамическом диапазоне сигналов D (дБ). Ясно, что заданное отношение сигнал/шум должно обеспечиваться при минимальной мощности сигнала в динамическом диапазоне $D = 10 \lg (P_{с макс} / P_{с мин}) = 20 \lg (A_{макс} / A_{мин})$, где $A_{макс}$, $A_{мин}$ — максимальная и минимальная амплитуды сигнала. Учтем также, что при гармоническом сигнале $P_c = A^2/2$. Тогда

$$P_{ш доп} = (A_{макс}^2 / 2) 10^{-(D+R_m)/10}. \quad (4.31)$$

Так как дисперсия выходного шума квантования складывается из двух независимых компонент, то и допустимую мощность шума на выходе следует разделить на два допуска: $P_{с ш доп}$ — допуск для шума, обусловленного квантованием входного сигнала (шума АЦП), и $P_{п ш доп}$ — допуск для шума, обусловленного квантованием произведений (внутреннего шума). Введем коэффициент отношения этих допусков β и запишем

$$P_{с ш доп} = \beta P_{п ш доп}, \quad P_{п ш доп} = P_{ш доп} - P_{с ш доп}. \quad (4.32)$$

При выборе величины коэффициента β обычно исходят из предположения, что мощность собственных шумов (шумов округ-

ления произведений) должна быть малой по сравнению с мощностью внешнего по отношению к фильтру шума округления отсчетов входного сигнала. Поэтому можно принять $\beta=0,8\dots0,9$ [2].

Для оптимизации режима работы сигналы в фильтрах обычно масштабируются (см. п. 4.6). С учетом масштабирования примем $A_{\text{макс}} = 1$. Тогда, используя формулы (4.15), (4.32), получим, что разрядность без учета знакового бита отсчетов входного сигнала (входного АЦП) должна составлять

$$b_c = \text{int} \left\{ 0,5 \log_2 \left[(\pi/T) \int_0^{T/2} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega / (12 \beta P_{\text{ш. доп}}) \right] \right\} \quad (4.33)$$

либо

$$b_c = \text{int} \left\{ 0,5 \log_2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) / (12 \beta P_{\text{ш. доп}}) \right] \right\}. \quad (4.34)$$

Подобным образом, используя формулы (4.29), (4.30) для разрядности регистров умножителей получим

$$b_{\text{н}} = \text{int} \left\{ 0,5 \log_2 \frac{\sum_l r_l \frac{T}{\pi} \int_0^{T/2} |G_l(e^{j\omega T})|^2 d\omega}{12 P_{\text{ш. доп}} - 2^{-2b_c} \frac{T}{\pi} \int_0^{T/2} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega} \right\}, \quad (4.35)$$

или в другом представлении

$$b_{\text{н}} = \text{int} \left\{ 0,5 \log_2 \frac{\sum_l r_l \sum_{n=0}^{\infty} |g_l(nT)|^2}{12 P_{\text{ш. доп}} - 2^{-2b_c} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2} \right\}. \quad (4.36)$$

Для НЦФ, как отмечалось выше, отсчеты ИХ равны коэффициентам фильтра $h(mT) = a_m$, $m = 0, \dots, N-1$ и, кроме того, для структурной схемы НЦФ в прямой форме (см. рис. 3.5) в выражении (4.36) следует положить $g_l(nT) = 1$.

Таким образом для НЦФ вместо формул (4.34) и (4.36) получим

$$b_c = \text{int} \left\{ 0,5 \log_2 \left[\sum_{m=0}^{N-1} a_m^2 / (12 \beta P_{\text{ш. доп}}) \right] \right\}, \quad (4.37)$$

$$b_{\text{н}} = \text{int} \left\{ 0,5 \log_2 \left[N / (12 P_{\text{ш. доп}} - 2^{-2b_c} \sum_{m=0}^{N-1} a_m^2) \right] \right\}. \quad (4.38)$$

При детерминированном подходе критерий для выбора разрядностей b_c и $b_{\text{н}}$ состоит в следующем. Задается максимальная допустимая абсолютная ошибка $\delta_{\text{макс}}$ значений выходного

сигнала

$$|y(nT) - \bar{y}(nT)| \leq \delta_{\text{макс}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $y(nT)$ — «точный» выходной сигнал, образующийся в предположении, что все числа и регистры имеют неограниченно большую разрядность; $\bar{y}(nT)$ — выходной сигнал, искаженный ошибками, обусловленными квантованием входного сигнала и произведений. Требуется выбрать величины разрядностей b_c и b_n из условия, что фактическая максимальная ошибка не превышает заданное значение. Как видно, при таком подходе расчет ведется «на наихудший случай». Ясно, что максимальная ошибка на выходе, обусловленная округлением отсчетов входного сигнала $e_{c \text{ вых макс}}$, не превысит величину $e_{c \text{ вых макс}} \leq e_{\text{окр макс}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|$, где $e_{\text{окр макс}} = q/2 = 2^{-b_c - 1}$ — ошибка округления отсчетов сигнала на входе. Отсюда следует, что

$$b_c = \text{int} \left\{ \log_2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| / (2 \beta \delta_{\text{макс}}) \right] \right\}. \quad (4.39)$$

Подобным образом для разрядности регистров умножителей нетрудно получить

$$b_n = \text{int} \left\{ \log_2 \frac{\sum_i r_i \sum_{n=0}^{\infty} |g(nT)|}{2 \delta_{\text{макс}} - 2^{-b_c} \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|} \right\}. \quad (4.40)$$

Для ИЦФ выражения (4.39), (4.40) приводятся к виду

$$b_c = \text{int} \left\{ \log_2 \left[\sum_{m=0}^{N-1} |a_m| / (2 \beta \delta_{\text{макс}}) \right] \right\} \quad (4.41)$$

и

$$b_n = \text{int} \left\{ \log_2 \left[N / (2 \delta_{\text{макс}} - 2^{-b_c} \sum_{m=0}^{N-1} |a_m|) \right] \right\}. \quad (4.42)$$

1.5. КВАНТОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Ошибки, обусловленные квантованием коэффициентов, приводят к нарушению положения нулей и полюсов ИТФ в z -плоскости, что, в свою очередь, проявляется в искажении частотных характеристик фильтра. Ясно, что квантование коэффициентов не влияет на шумовые характеристики ЦФ. Разрядность коэффициентов выбирается из условий удовлетворения требований к частотной характеристике, тогда как число разрядов регистров, предназначенных для хранения отсчетов сигнала — из условия обеспечения требуемого отношения сигнал-помеха.

Рассмотрим задачу выбора разрядности коэффициентов применительно к РТФ, ПтФ которого имеет вид (4.17). Предположим, что числа коэффициентов имеют b_k — бит справа от двоичной точки (см. формулу (4.1)). Практически числа коэффициентов могут иметь целую часть, для представления которой обычно предусматривается один бит слева от двоичной точки. Учитывая знаковый бит, получим всего $b_k + 2$ битов. Реальные коэффициенты представим в виде

$$\begin{aligned}\bar{a}_i &= a_i + \alpha_i, \\ \bar{b}_i &= b_i + \beta_i,\end{aligned}\quad (4.43)$$

где a_i, b_i — значения коэффициентов ПтФ, полученные на этапе аппроксимации частотных характеристик ЦФ; α_i, β_i — ошибки квантования, удовлетворяющие при округлении условиям $|\alpha_i| \leq 2^{-b_k-1}$, $|\beta_i| \leq 2^{-b_k-1}$. Очевидно, что ПтФ реального фильтра

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M \bar{a}_m z^{-m}}{1 + \sum_{r=1}^L \bar{b}_r z^{-r}} = \frac{\sum_{m=0}^M (a_m + \alpha_m) z^{-m}}{1 + \sum_{r=1}^L (b_r + \beta_r) z^{-r}} \quad (4.44)$$

отличается от идеальной передаточной функции (4.17)

Для определения влияния ошибок α_i, β_i на частотные характеристики и для выбора разрядности коэффициентов используются различные способы. Достаточно общее представление о характере этого влияния можно получить из анализа изменения распределения нулей и полюсов ПтФ фильтров на z -плоскости. Воспользуемся описанным в п. 1.7 графо-аналитическим методом определения частотных характеристик (амплитудной и фазовой) фильтра по расположению нулей и полюсов. Для определенности возьмем РЦФ второго порядка с ПтФ вида

$$H(z) = \frac{c_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = H_0 \frac{(z-c_1)(z-c_2)}{(z-d_1)(z-d_2)}, \quad (4.45)$$

где c_1, c_2 — нули, d_1, d_2 — полюсы ЦФ, H_0 — коэффициент. Предположим, что фильтр имеет пару комплексно-сопряженных полюсов:

$$d_{1,2} = \rho e^{\pm j\theta}; \quad \rho = \sqrt{b_2}; \quad \cos \theta = b_1/2\sqrt{b_2}. \quad (4.46)$$

Определим изменение полярных координат полюсов $\Delta \rho$ и $\Delta \theta$, возникающее вследствие квантования коэффициентов. Для этого возьмем дифференциалы

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial \rho}{\partial b_2} db_2,$$

$$d(\cos \Theta) = -\sin \Theta d\Theta = \frac{\partial \cos \Theta}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial \cos \Theta}{\partial b_2} db_2$$

заменяем конечными приращениями

$$d\rho \approx \Delta\rho, \quad d\Theta \approx \Delta\Theta, \quad db_1 \approx \beta_1, \quad db_2 \approx \beta_2.$$

В результате получим

$$\Delta\rho = \frac{\partial \rho}{\partial b_1} \beta_1 + \frac{\partial \rho}{\partial b_2} \beta_2; \quad -\Delta\Theta \sin \Theta = \frac{\partial \cos \Theta}{\partial b_1} \beta_1 + \frac{\partial \cos \Theta}{\partial b_2} \beta_2.$$

Воспользуемся выражениями (4.46) и после несложных преобразований приведем приращения координат полюсов к виду

$$\Delta\rho = \beta_2/2\rho \text{ и } \Delta\Theta = -\beta_1/(2\rho \sin \Theta) + \beta_2/(2\rho^2 \operatorname{tg} \Theta). \quad (4.47)$$

Вычислив таким образом $\Delta\rho$ и $\Delta\Theta$, с помощью процедуры, описанной в п. 1.7, нетрудно оценить искажения АЧХ и ФЧХ, обусловленные квантованием коэффициентов.

Другой подход состоит в вычислении по формуле (1.33) АЧХ идеального фильтра $A(\omega)$ и АЧХ фильтра с квантованными коэффициентами $\bar{A}(\omega)$. Квантование коэффициентов приводит к появлению ошибки $\Delta A(\omega) = A(\omega) - \bar{A}(\omega)$. Заданные требования к АЧХ будут удовлетворены, если $\Delta A(\omega) \leq \Delta A_{\max}$, где ΔA_{\max} — максимально допустимая ошибка.

Оптимальное число разрядов коэффициентов можно определить путем вычисления ошибки $\Delta A(\omega)$ как функции частоты для возрастающего числа разрядов до выполнения заданного условия точности. Такой подход соответствует методу проб и ошибок и может потребовать значительного объема вычислений.

Существуют также статистические методы оценки требуемого количества разрядов коэффициентов. В этих методах, исходя из предположения о случайной природе ошибок α_i и β_i в (4.43), вычисляют ошибки АЧХ, удовлетворяющие некоторым доверительным вероятностям. На основании этого определяется разрядность коэффициентов, при которой выполняются заданные требования. Подробное изложение таких методов можно найти в литературе [1].

4.6. МАСШТАБИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Практически ЦФ эффективно работают в ограниченном диапазоне амплитуд входных сигналов. При превышении амплитудой сигнала верхней границы допустимого динамического диапазона возникает эффект переполнения, и выходной сигнал сильно искажается. С другой стороны, при малых амплитудах сигналов ухудшается отношение сигнал—шум на выходе фильт-

ра, в частности, из-за влияния шума квантования. Поэтому необходимо согласование динамического диапазона сигналов с динамическим диапазоном фильтра. В связи с этим в ЦФ предусматривается масштабирование сигналов. Масштабные множители вводятся на входах звеньев фильтров.

В случае использования арифметики с фиксированной точкой и выравнивания слева переполнения могут возникнуть только в операциях сложения. Ясно, что явления переполнения поразному проявляются в зависимости от вида структурной схемы ЦФ, так как количество сумматоров и значения суммируемых чисел для разных схем фильтров различны при прочих равных условиях (ср., например, прямую и каноническую формы на рис. 3.1 и 3.2).

Особенность анализа условий, исключающих возникновение переполнений, состоит в необходимости определения баланса амплитуд в произвольной точке внутри структурной схемы ЦФ (узла суммирования), а также в случайном характере сигналов. Задача такого анализа в общей постановке достаточно сложна. Рассмотрим возможный способ ее решения, имея в виду расчет на «наихудший случай», для чего воспользуемся обобщенной шумовой моделью ЦФ (см. рис. 4.6).

Выберем для анализа внутри фильтра один произвольный узел суммирования. Предположим, что известна импульсная характеристика части ЦФ $f_i(n)$ от входа фильтра до выхода внутреннего узла суммирования (Если $f_i(n)$ неизвестна, то ее можно определить по структурной схеме фильтра, см. например, рис. 4.7). Воспользовавшись выражением для дискретной свертки (1.14), запишем для сигнала на выходе i -го узла суммирования

$$v_i(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f_i(m) x(n-m),$$

где $x(n)$ — входная последовательность. Если верхняя граница диапазона входных сигналов не превышает $x_{\text{макс}}$, то абсолютное значение сигнала на выходе сумматора соответственно не превысит

$$|v_{i \text{ макс}}| \leq x_{\text{макс}} \left| \sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)| \right|. \quad (4.48)$$

Как уже отмечалось, при использовании арифметики с фиксированной точкой и выравнивании слева абсолютные значения сигналов не должны быть больше единицы. Поэтому положим в выражении (4.48) $x_{\text{макс}} = 1$, тогда

$$|v_{i \text{ макс}}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)|. \quad (4.49)$$

Во избежание переполнения разрядной сетки сумматора максимальное значение сигнала на его выходе также должно удовлетворять условию $|v_{ма.с}| \leq 1$. Для выполнения этого условия в схему фильтра включается масштабирующий множитель

$$K_M \leq 1 / \sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)|. \quad (4.50)$$

Ясно, что условия, исключающие переполнения, должны выполняться для всех сумматоров ЦФ $i = 1, 2, \dots$. Соответственно этому выбирается $K_M = K_{M\text{мин}}$, обеспечивающее работу всех сумматоров фильтра. С помощью масштабирующих множителей, выбранных в соответствии с (4.50), гарантируется отсутствие переполнений во всех случаях. Однако на практике выполненное таким образом масштабирование обычно обладает большим запасом.

Отметим, что существуют методы расчета масштабирующих множителей, в которых учтены вид частотных характеристик фильтров и спектральные характеристики ожидаемого класса сигналов [1, 9].

При практической реализации масштабирующие множители целесообразно выбирать равными целым степеням числа 2. Благодаря этому операции умножения заменяются простыми сдвигами двончных чисел.

4.7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ПУЛЬСАЦИИ ПЕРЕПОЛНЕНИЯ

Описанная в п. 4.1 линейная модель квантования сигналов по уровню основывалась на предположении, что уровни сигналов, проходящих через фильтр, и их изменение в течение шага дискретизации по времени значительно превышают шаг квантования по уровню. При этих условиях отсчеты шумов являются статистически независимыми от выборки к выборке и от источника к источнику. Однако, если приведенные предположения не выполняются, то становится неправомерной и линейная модель квантования. Отсчеты ошибок квантования оказываются сильно коррелированными между собой и со значениями сигнала и уже не могут рассматриваться в качестве источника аддитивного шума.

Такое положение возникает, например, в случае, если входная последовательность постоянна по величине или имеет малые значения, меньшие шага квантования по уровню. В таких случаях эффекты квантования могут привести либо к режиму периодических колебаний на выходе, либо к постоянному поддержанию ненулевого выходного сигнала при нулевом входном.

Эти колебания называют «колебаниями низкого уровня» (в отличие от колебаний большого уровня, на которых остановимся ниже) или *предельными циклами*.

Анализ предельных циклов весьма сложен, поэтому ограничимся тем, что рассмотрим существование этих колебаний на простейшем примере системы первого порядка

$$y(n) = x(n) - by(n-1). \quad (4.51)$$

Определим отклик $y(n)$ этой системы на единичный импульс:

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при других значениях } n, \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях $y(-1) = 0$ и для двух случаев: разрядность регистров не ограничена, произведения округляются до 4 бит (без знакового разряда). Для коэффициента b в примере (4.51) возьмем два значения (-0,5 и 0,5).

В результате получим:

	для $b = -0,5$							
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(n)$ точное	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
$\bar{y}(n)$ округленное	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16
	для $b = 0,5$							
$y(n)$ точное	1	-1/2	1/4	-1/8	1/16	-1/32	1/64	-1/128
$\bar{y}(n)$ округленное	1	-1/2	1/4	-1/8	1/16	-1/16	1/16	-1/16

Как и следовало ожидать, точная (без округления произведений) последовательность $y(n)$ в обоих случаях убывает по абсолютной величине как экспонента. При разрядности регистра $b_n = 4$ отсчеты сигнала, величины которых по абсолютному значению меньше $|1/16|$, округляются до ближайшего большего (т. е. до $1/16$). Поэтому по достижении уровня $|1/16|$ дальнейшее уменьшение значений отсчетов последовательности не происходит. При $b = 0,5$ в фильтре устанавливается колебательный режим. Предельные циклы возникают вследствие нелинейного характера процесса округления.

В системе первого порядка связь между амплитудой этих колебаний и разрядностью регистров очевидна. В системах второго и более высокого порядка анализ предельных циклов значительно усложняется [1, 10, 11]. Однако общая закономерность сохраняется: для обеспечения малости колебаний необходимо использовать регистры достаточной большой разрядности.

Укажем еще на один вид возможных колебаний, связанных с ограниченностью разрядности регистров ЦФ. Такие колеба-

ния могут возникнуть при переполнении сумматоров ЦФ. Рассмотрим суть этих колебаний. Из-за цикличности арифметики с представлением чисел в дополнительном коде при наступлении переполнения выход соответствующего сумматора изменяется от максимального положительного значения в диапазоне представления чисел до минимального отрицательного значения и наоборот.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Возьмем положительное число, близкое к максимально представимому в диапазоне $+1...-1$, и сложим его с небольшим приращением. Суммирование двух положительных чисел $0,8750 + 0,1875 = 1,0625$ приводит к переполнению разрядной сетки 5-разрядного двоичного сумматора, работающего в дополнительном коде с фиксированной точкой: $0.1110 + 0.0011 = 1.0001$. Результат суммирования является ошибочным, так как он в соответствии с формулой (4.1) интерпретируется как отрицательное число $-0,9375$, близкое к минимально представимому (-1).

Характеристика сумматора, работающего в дополнительном коде, имеет вид, представленный на рис. 4.8, а. Такой вид характеристики сумматора при наличии переполнений может служить причиной возникновения в ЦФ пульсаций, которые в отличие от предельных циклов имеют высокий уровень, близкий к максимальной величине выходного сигнала. Ясно, что такие пульсации нарушают работу ЦФ.

Пульсации переполнения устраняются при использовании арифметики с насыщением. Характеристика сумматора с насыщением приведена на рис. 4.8, б. Когда наступает переполнение в таком сумматоре, результат представляется максимальным по абсолютному значению числом, имеющим тот же знак, что и слагаемые.

ЦФ с такой характеристикой суммирования в моменты переполнения становится нелинейным. Эта нелинейность приводит к возникновению дополнительных ошибок, поэтому с помощью масштабирования сигналов желательно обеспечить такой режим, при котором относительное время вхождения фильтра в нелинейный режим оказывается малым.

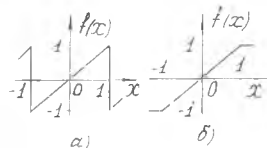


Рис. 4.8

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
2. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.

3. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования: Пер. с нем. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
4. Каппелини В., Константиноидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 360 с.
5. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.
6. Лем Г. Аналоговые и цифровые фильтры: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 592 с.
7. Мизин И. А. Матвеев А. А. Цифровые фильтры. — М.: Связь, 1979. — 287 с.
8. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1985. — 245 с.
9. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. — М.: Связь, 1979. — 416 с.
10. Пеллед А., Лиу Б. Цифровая обработка сигналов: Теория проектирования, реализация: Пер. с англ. — Киев: Вища школа, 1979. — 264 с.
11. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. — 848 с.
12. Харрис Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР. Т. 68, 1978. № 1.

Приложение

СПОСОБ СЕКЦИОНИРОВАНИЯ СВЕРТКИ В МЕТОДЕ ПЕРЕКРЫТИЯ С НАКОПЛЕНИЕМ

Секционирование свертки в методе перекрытия с накоплением можно выполнить способом [11], отличающимся от описанного в п. 2.6.

В рассматриваемом случае, как и ранее, образуются секции сигнала длиной по L отсчетов, перекрывающиеся на отрезке длиной в $N-1$ отсчетов (рис. П1). При этом в некоторую r -ю секцию $x_r(n)$ из исходной секционированной последовательности $x(n)$ непосредственно переносятся только $L-N+1$ отсчетов. Остальные $N-1$ отсчетов берутся из предшествующей $r-1$ -й секции $x_{r-1}(n)$ или, что то же самое, из последовательности $x(n)$ на интервале, непосредственно предшествующем секции $x_r(n)$ (на рис. П1 этому варианту соответствует пунктирная стрелка). Эти $N-1$ отсчетов включаются в конец секции $x_r(n)$. Таким образом, здесь при формировании секций сигнала осуществляется не только выделение L отсчетов из исходной последовательности $x(n)$, но и их перестановка.

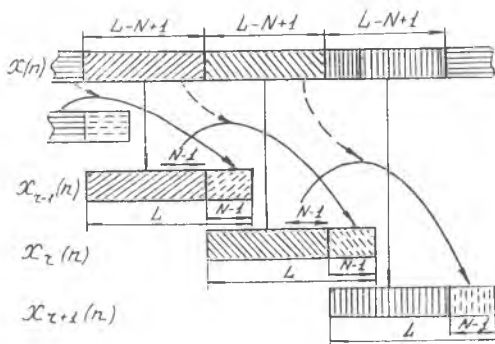


Рис. П1

Над секциями сигнала $x_r(n)$, $r = 1, 2, \dots$ производится операция вычисления круговой свертки с ИХ-фильтра $h(n)$, $n = 0, \dots, N-1$. Эта процедура выполняется в соответствии с алгоритмом, описанным в п. 2.6. В результате получаются частные круговые свертки $y_r(n)$. Каждая свертка $y_r(n)$ наряду с верными содержит также $N-1$ неверных отсчетов, которые при накоплении отбрасываются. Однако, в отличие от ранее рассмотренного способа секционирования, в данном случае неверные отсчеты располагаются не в начале, а в конце последовательности $y_r(n)$ (для сравнения см. рис. 2.10). Выбор того или иного способа реализации свертки зависит от удобства программирования.

В известных руководствах обычно описывается одна из разновидностей метода перекрытия с накоплением, причем не акцентируется внимание на их особенностях. Обучающиеся, как показывает опыт, не всегда учитывают эти особенности, тем более, что в популярном справочнике [2] имеет место неточность. На рис. 1.15 с. 26 этого справочника приведены эноры сигналов, соответствующие первому из описанных выше способов секционирования, в то время как в тексте утверждается, что неверные отсчеты образуются в конце частных круговых свертки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ	5
1.1. Дискретные и цифровые сигналы	5
1.2. Дискретные и цифровые фильтры	6
1.3. Z-преобразование и его свойства	7
1.4. Линейная дискретная свертка. Разностные уравнения ДС	10
1.5. Передаточная функция ЦФ	12
1.6. Устойчивость ЦФ	14
1.7. Частотные характеристики ЦФ	14
1.8. Спектр дискретного сигнала	17
1.9. Метод пространства состояний. Общие сведения	20
1.10. Анализ ДС в пространстве состояний	21
1.11. Описание в пространстве состояний линейных стационарных ДС	23
2 АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ, ОСНОВАННЫЕ НА ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ	26
2.1. Дискретное преобразование Фурье	26
2.2. Основные свойства ДПФ	29
2.3. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Общий подход	31
2.4. Алгоритмы БПФ по основанию 2	34
2.5. Методы вычисления дискретной свертки	39
2.6. Методы секционирования свертки	42
2.7. Спектральный анализ с помощью БПФ	46
2.8. Вычисления ДПФ на основе линейной ЛЧМ-фильтрации	48
3 ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	49
3.1. Задача проектирования ЦФ	49
3.2. Структурные схемы ЦФ	51
3.3. Расчет рекурсивных (БИХ) ЦФ	53
3.4. Свойства нерекурсивных (КИХ) ЦФ	58
3.5. Расчет нерекурсивных (КИХ) ЦФ	62
4 ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ В ЦФ	75
4.1. Общие сведения об эффектах конечной разрядности	75
4.2. Помехи в ЦФ, обусловленные квантованием входного сигнала	78
4.3. Ошибки квантования произведений	80
4.4. Определение разрядностей отсчетов входного сигнала и регистров умножителей	85
4.5. Квантование коэффициентов	87
4.6. Масштабирование сигналов	89
4.7. Предельные циклы и пульсации переполнения	91
Библиографический список	93