

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. академика С. П. КОРОЛЕВА

В. Д. Кузенков

МЕТОДЫ
ЦИФРОВОЙ
ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ

КУЙБЫШЕВ 1983

УДК 681.327.8

Кузенков В. Д. *Методы цифровой обработки сигналов.* — Куйбышев: КуАИ, 1983. — 94 с.

Излагаются основы теории линейных дискретных систем, основы теории и расчета цифровых фильтров, алгоритмы быстрого преобразования Фурье и их приложения, вопросы точности цифровых фильтров.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальности «Радиотехника» и по смежным специальностям.

Ил. 50, табл. 1, библи. 8 назв.

Рецензенты: д. т. н. проф. В. К. Морозов,
к. т. н. доц. Е. А. Муштаков

Утверждено редакционным советом
института в качестве учебного пособия

© Куйбышевский авиационный институт, 1983

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ	7
1.1. Дискретные и цифровые сигналы	7
1.2. Линейные, инвариантные к сдвигу дискретные системы с постоянными коэффициентами	9
1.3. Z-преобразование и его свойства	11
1.4. Применение Z-преобразования для решения разностных уравнений. Передаточная функция линейной дискретной системы	13
1.5. Частотные характеристики дискретных систем и спектры дискретных сигналов	15
1.6. Определение частотной характеристики по диаграмме полюсов и нулей передаточной функции	21
1.7. Дискретное преобразование Фурье	23
1.8. Свойства ДПФ	27
1.9. Линейная свертка конечных последовательностей	30
1.10. Быстрая свертка конечной и бесконечной последовательностей	32
2. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	38
2.1. Структурные схемы ЦФ	38
2.2. Задача проектирования ЦФ	42
2.3. Расчет цифровых БИХ (рекурсивных) фильтров по данным аналоговых фильтров	44
2.4. Свойства и расчет КИХ (нерекурсивных) ЦФ	48
3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	57
3.1. Исходные предпосылки	57
3.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени по основанию 2	58
3.3. БПФ с прореживанием по частоте по основанию 2	66
3.4. Спектральный анализ с помощью БПФ	68
4 ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ РЕГИСТРОВ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ	71
4.1. Общие сведения об эффектах конечной разрядности	71
4.2. Шум квантования входного сигнала	73

4.3. Ошибки в ЦФ, возникающие вследствие квантования коэффициентов	74
4.4. Ошибки округления в ЦФ	75
4.5. Колебания предельного цикла	78
4.6. Колебания переполнения	80
ЛИТЕРАТУРА	82
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	83
П.1.1. Доказательства теорем Z-преобразования	83
П.1.2. Примеры вычисления прямого Z-преобразования	84
П.1.3. Примеры вычисления обратного Z-преобразования	85
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	
П.2.1. Краткие сведения об аналоговых фильтрах и способах их расчета	86
П.2.2. Примеры расчета цифровых БИХ фильтров НЧ	90

При цифровой обработке сигналы представляются в виде последовательности чисел. Цифровой сигнал получают посредством временной дискретизации аналогового сигнала с некоторым, обычно постоянным, шагом и дальнейшего преобразования полученных дискретных отсчетов сигнала в цифровую форму. При таком преобразовании каждому отсчету сигнала ставится в соответствие двоичный код — физическое представление числа.

В процессе обработки цифровой сигнал подвергается линейным или нелинейным преобразованиям, цель которых состоит в оценке информационных параметров сигнала или в получении новой выходной последовательности со свойствами, отличными от свойств исходной входной последовательности. В цифровых устройствах могут быть реализованы практически все известные в радиоэлектронике преобразования сигналов. Однако наибольшее распространение цифровые методы получили в цифровой фильтрации и спектральном анализе. Поэтому в данном пособии преимущественное внимание уделяется этим областям цифровой обработки сигналов.

Цифровая обработка сигналов как самостоятельное научное направление развивается с середины 60-х годов. Развитие цифровых методов обусловлено рядом их достоинств, важнейшими среди которых являются гарантированная точность и стабильность, абсолютная воспроизводимость вне зависимости от условий производства и эксплуатации аппаратуры (технологического разброса параметров элементной базы, влияния климатических условий, старения и т.п.), а также простота изменения характеристик, удобство при построении адаптивных и автоматических систем.

Вместе с тем, цифровым методам присущи негативные свойства. Этими методами реализуются обычно не оптимальные, а квазиоптимальные алгоритмы обработки сигналов. В цифровых

устройствах возникают специфические ошибки, обусловленные дискретизацией и квантованием сигналов. При грамотном проектировании влияние этих факторов обычно удается свести к допустимому минимуму.

Развитие цифровой обработки сигналов связано с успехами в области микроэлектроники и ЭВМ. Цифровые алгоритмы могут быть реализованы программным способом на «больших», универсальных ЭВМ или в виде специализированных процессоров. В последнем случае цифровые устройства оказываются конкурентоспособными с аналоговыми процессорами только при условии применения БИС, микропроцессоров. Цифровые устройства, выполненные на такой элементной базе, имеют малые массу, габариты, потребление энергии.

Применяется цифровая обработка сигналов в различных областях: радиолокации, гидролокации, системах передачи данных, акустике, ядерной технике, биомедицине, сейсмологии и во многих других. Перспективность и постоянно расширяющееся практическое применение цифровых методов обусловили необходимость изучения этих методов студентами радиотехнических специальностей. Вместе с тем, известные монографии по данной теме, например [1—3], имеют большой объем, изданы малыми тиражами и малодоступны для студентов. Этими причинами вызвана необходимость в настоящем пособии.

Пособие охватывает только основные вопросы теории цифровой обработки сигналов. Способы реализации и основные приложения предполагается изложить отдельно.

1. Основы теории линейных дискретных систем

1.1. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ [1, 2, 3]

Сигналом называют процесс, несущий информацию о некоторой физической системе (ее состоянии, движении). Ниже будут рассматриваться временные процессы, хотя в общем случае независимая переменная может иметь произвольный физический смысл.

Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Аналоговые сигналы непрерывны по времени и по своим значениям. Дискретные сигналы дискретны по времени, но непрерывны по значениям (амплитуде). Они могут рассматриваться как последовательности отсчетов аналоговых сигналов:

$$x(nT) = x_a(t) \Big|_{t = nT}.$$

где $x_a(t)$ — аналоговый сигнал, T — период (шаг) дискретизации. Часто аргумент дискретных функций выражается в масштабе нормированного времени $t^1 = t/T$. В этом случае запись дискретного сигнала упрощается: $x(n)$, $N_1 \leq n \leq N_2$, где N_1 и N_2 соответствуют моментам времени начала и конца сигнала. Ниже мы будем пользоваться обеими формами записи дискретного сигнала.

Цифровые сигналы — это сигналы, у которых дискретны и аргумент (время), и значения (амплитуда). Дискретность амплитуды обусловлена конечной величиной разрядности чисел этого сигнала и ограниченной точностью представления чисел в ЭВМ. Суть этих особенностей цифрового сигнала иллюстрируется с помощью рис. 1.1.

Дискретные сигналы можно рассматривать как цифровой сигнал, амплитуда которого определена с неограниченно высокой точностью. Поэтому в дальнейшем там, где точность определения амплитуды не имеет принципиального значения (и не оговорена особо), мы не будем делать различий между цифровыми и дискретными сигналами.

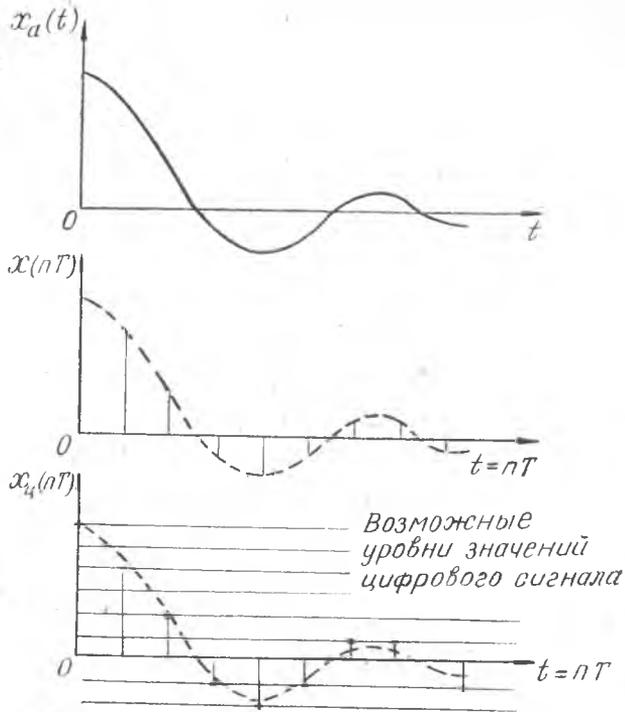


Рис. 1.1

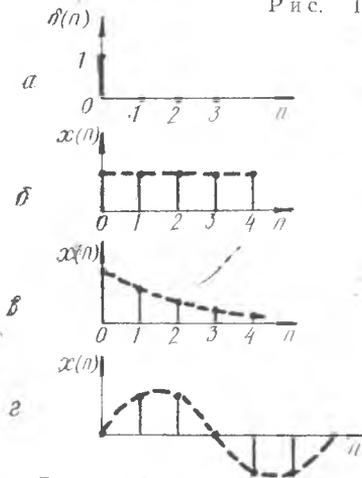


Рис. 1.2

Приведем примеры некоторых важных дискретных сигналов (рис. 1.2).

1) Единичный импульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

2) Единичная ступень

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0; \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

3) Дискретная экспонента

$$x(n) = \begin{cases} c^n & \text{при } n \geq 0; \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

4) Дискретная синусоида

$$x(n) = \sin \omega n.$$

Общая схема обработки сигналов с использованием ЭВМ представлена на рис. 1.3, где $x_a(t)$, $x_n(n)$ — входные аналоговый и цифровой сигналы, $y_a(t)$, $y_n(n)$ — выходные сигналы.

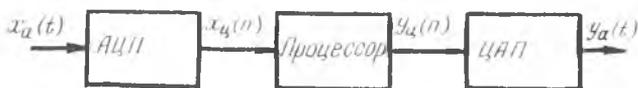


Рис. 1.3

Цифровая часть этой системы осуществляет преобразование входной последовательности чисел $x_n(n)$ в выходную последовательность $y_n(n)$ в соответствии с заданным алгоритмом.

1.2. ЛИНЕЙНЫЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ К СДВИГУ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1, 2, 3]

Линейные системы, как известно, подчиняются принципу суперпозиции. Инвариантность к сдвигу означает, что временному сдвигу входной последовательности соответствует пропорциональный временной сдвиг выходной последовательности. Линейные, инвариантные к сдвигу системы полностью описываются во временной области импульсной характеристикой $h(n)$ или частотными характеристиками (передаточной функцией) в частотной области (области отображений).

Входной и выходной сигналы такого вида аналоговой системы связаны интегралом свертки

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(\tau) x_a(t - \tau) d\tau,$$

где $h_a(t)$ — импульсная характеристика системы.

Аналогичное выражение, называемое линейной сверткой последовательностей $h(n)$ и $x(n)$, справедливо для дискретных систем:

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r) x(n-r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(n-r) x(r). \quad (1.1)$$

Для физически реализуемых систем $h(n) = 0$ при $n < 0$. Тогда

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} h(r) x(n-r) = \sum_{r=0}^{\infty} h(n-r) x(r). \quad (1.2)$$

Если импульсная характеристика $h(n)$ — конечная последовательность, то верхний предел в (1.2) также будет конечным.

В приложениях важное значение имеет подкласс линейных инвариантных к сдвигу систем, удовлетворяющих линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{r=0}^L a_r y(n-r) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m). \quad (1.3)$$

Для дискретных систем это уравнение имеет значение, подобное дифференциальному уравнению применительно к аналоговым системам. Положим в (1.3) $a_0 = 1$ и перепишем это выражение в виде

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{r=1}^L a_r y(n-r). \quad (1.4)$$

В частном случае, когда $a_r \cong 0$, получим

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x(n-m). \quad (1.5)$$

В системе, которая описывается уравнением (1.4), отсчет выходной последовательности $y(n)$ в некоторый момент времени n определяется отсчетом входного сигнала $x(n)$ в этот момент, а также значениями отсчетов входного сигнала в M предшествующих моментах времени, и, кроме того, значениями выходного сигнала в L предшествующих моментах. Это система с обратной связью. Она обладает бесконечной памятью, так как каждое значение выходного сигнала определяется всей предысторией входного сигнала. Импульсная характеристика такой системы имеет соответственно бесконечную длительность. Поэтому такие системы называют БИХ (с бесконечной импульсной характеристикой) или рекурсивными системами.

В системах, соответствующих (1.5), значение выходного сигнала $y(n)$ в некоторый момент времени зависит от значения входного процесса $x(n)$ в этот момент и от значений в M предшествующих моментах времени. Такие системы обладают конечной памятью и, соответственно, импульсной характеристикой, имеющей конечное число отсчетов. Эти системы называются КИХ (с конечной импульсной характеристикой) или нерекурсивными системами. Сопоставим с уравнением (1.5) свертку

$$y(n) = \sum_{m=0}^M h(m) x(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m), \quad (1.6)$$

где $N = M + 1$ — число отсчетов импульсной характеристики. Как видно, (1.5) и (1.6) эквивалентны при условии $b_m = h(m)$. Таким образом, для КИХ — системы коэффициенты b_m передаточной функции равны отсчетам импульсной характеристики $h(m)$.

Важным качеством систем является устойчивость. В устойчивых системах отклик на ограниченное воздействие также является ограниченным. Так как импульсная характеристика дискретной системы представляет собой отклик на единичный импульс, то условие устойчивости можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (1.7)$$

БИХ-системы при некоторых условиях теряют устойчивость, поэтому необходима проверка их устойчивости. КИХ-системы всегда устойчивы.

1.3. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА [1, 2, 7]

В теории дискретных систем Z-преобразование имеет такое же значение, как преобразование Лапласа в теории аналоговых систем.

Импульсная характеристика аналоговой системы $h_a(t)$ и передаточная функция $H_a(p)$ связаны преобразованием Лапласа

$$H_a(p) = \int_0^{\infty} h_a(t) e^{-pt} dt. \quad (1.8)$$

Вычисление (1.8) численными методами приводит к

$$H_a(p) = T \sum_{n=0}^{\infty} h_a(nT) e^{-pnT}, \quad (1.9)$$

где $t = nT$, $dt = T$.

Выражение, с точностью до множителя T совпадающее с (1.9), называется дискретным преобразованием Лапласа:

$$H(p) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-pnT}. \quad (1.10)$$

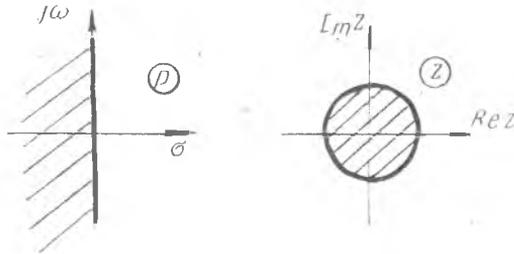
Положив в (1.10)

$$z = e^{pT}, \quad (1.11)$$

получим формулу прямого Z-преобразования:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}. \quad (1.12)$$

Преобразование (1.10) в (1.12) с помощью (1.11) осуществляет конформное отображение комплексной плоскости p в комплексную Z-плоскость (рис. 1.4). При таком отображении левая



Р и с. 1.4

p -полуплоскость переходит во внутренность круга единичного радиуса в z -плоскости. Отсюда следует условие устойчивости дискретных систем: полюсы устойчивых систем должны находиться в пределах круга $|z| < 1$.

Сформулируем некоторые теоремы z -преобразования. Доказательства этих теорем приведены в приложении 1. Там же даны примеры вычисления прямого z -преобразования некоторых дискретных сигналов.

1. *Теорема о линейности Z-преобразования.* Z-преобразование суммы $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ равно сумме Z-преобразований слагаемых $X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$.

2. *Теорема о сдвиге во временной области.* Если $X(z) = Z\{x(n)\}$, то $Z\{x(n-r)\} = z^{-r}X(z)$.

3. *Теорема о Z-преобразовании свертки.* Z-преобразование $Z\{y(n)\}$ свертки $y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} x(r)h(n-r)$ равно произведению Z-преобразований свертываемых последовательностей:

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (1.13)$$

Обратное Z-преобразование $h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}$ можно выполнить несколькими способами. Контурный интеграл

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=1} H(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.14)$$

позволяет получить выражение для временной последовательности $h(nT)$ в замкнутом виде. Доказательство (1.14) приведено в приложении 1.

Второй способ не требует интегрирования в комплексной плоскости, но дает только численное решение для $h(nT)$. Этот способ исходит из представления $H(z)$ в виде дробно-рациональной функции

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{r=1}^L a_r z^{-r}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m-1} z^{-M+1} + b_m z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{L-1} z^{-L+1} + a_L z^{-L}} \quad (1.15)$$

Функцию (1.15) можно разложить в степенной ряд:

$$H(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (1.16)$$

Принимая во внимание соотношение $z^{-1}\{X(z)\} = x(0)$ при $X(z) = 1$, а также свойство линейности и теорему о сдвиге во временной области, выполним обратное Z -преобразование левой и правой частей равенства (1.16).

При этом получим

$$h(0) = c_0; \quad h(T) = c_1; \quad h(2T) = c_2 \quad \text{и т. д.} \quad (1.17)$$

Примеры вычисления обратного Z -преобразования некоторых функций с помощью (1.14) и 1.17) приведены в приложении 1.

1.4. ПРИМЕНЕНИЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ [1, 2, 3, 5, 6]

Из теории аналоговых систем известно, что с помощью преобразования Лапласа решение дифференциальных уравнений, описывающих систему, можно привести к решению алгебраических уравнений. Применение Z -преобразования позволяет подробным образом решать разностные уравнения (1.3), (1.4).

Решение уравнения

$$\sum_{r=0}^L a_r y(n-r) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

состоит в определении неизвестной последовательности $y(n)$ (выходной сигнал) через известную последовательность $x(n)$ (входной сигнал).

Применив к (1.3) операцию Z -преобразования и используя теорему о временном сдвиге, получим

$$Y(z) \left(1 + \sum_{r=0}^L a_r z^{-r} \right) = X(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}, \quad (1.18)$$

где $Y(z) = Z\{y(n)\}$, $X(z) = Z\{x(n)\}$.

Введем функцию

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{r=0}^L a_r z^{-r}}, \quad (1.19)$$

которая устанавливает связь между Z -отображениями входного и выходного сигналов $H(z) = Y(z)/X(z)$ (1.20) и носит название передаточной функции дискретной системы.

Вычислив

$$Y(z) = X(z) H(z), \quad (1.21)$$

искомое решение $y(n)$ уравнения (1.3) получим посредством обратного Z -преобразования:

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\}. \quad (1.22)$$

Как видно, решение разностного уравнения (1.3) выполняется с помощью операций прямого и обратного Z -преобразований и вычисления произведения (1.21).

Передаточная функция линейной системы с постоянными параметрами не зависит от значений действующих в системе сигналов и определяется своими коэффициентами. Передаточная функция (1.19) определена на всей z -плоскости, кроме конечного числа точек, полюсов системы — корней знаменателя (1.19), т. е. уравнения

$$\sum_{r=0}^L a_r z^{-r} = 0. \quad (1.23)$$

Как отмечалось, полюсы устойчивой дискретной системы должны находиться в z -плоскости внутри круга единичного радиуса $|z| = 1$.

Можно показать, что передаточная функция связана с импульсной характеристикой Z -преобразованием:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n}. \quad (1.24)$$

В самом деле, последовательность на выходе линейной дискретной системы определяется сверткой входной последовательности с импульсной характеристикой системы:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} h(r) x(n-r).$$

Воспользовавшись теоремой о свертке для Z -преобразования данного выражения, получаем результат $Y(z) = X(z) H(z)$, совпадающий с (1.21). Отсюда следует справедливость (1.24).

1.5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И СПЕКТРЫ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ [1, 2, 3, 5]

Формально частотную характеристику дискретной системы $H(e^{j\omega T})$ можно ввести через передаточную функцию, положив в (1.19)

$$z = e^{j\omega T}. \quad (1.25)$$

Подстановка (1.25) означает, что частотная характеристика есть передаточная функция, определенная в z -плоскости на окружности единичного радиуса.

Частотную характеристику можно также получить, воспользовавшись следующим фундаментальным свойством линейных инвариантных к временному сдвигу систем: при воздействии на вход такой системы гармонического колебания выходной сигнал также является гармоническим колебанием той же частоты и отличается от входного только значением амплитуды и запаздыванием фазы. Иначе, при воздействии на входе комплексной синусоиды с частотой ω_c

$$x(nT) = e^{j\omega_c nT}, \quad (1.26)$$

выходной сигнал определяется выражением

$$y(nT) = H(e^{j\omega_c nT}) e^{j\omega_c nT}, \quad (1.27)$$

где $H(e^{j\omega_c nT}) = H(e^{j\omega T})|_{\omega = \omega_c}$ — значение комплексного коэффициента передачи (частотной характеристики на частоте $\omega = \omega_c$).

Подставим (1.26) в сверку (1.2) и получим

$$y(nT) = \sum_{r=0}^{\infty} h(rT) e^{j\omega_c(n-r)T} = e^{j\omega_c nT} \sum_{r=0}^{\infty} h(rT) e^{-j\omega_c rT}. \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.27) и (1.28) и полагая значение частоты ω_c произвольным, получим для частотной характеристики

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (1.29)$$

Как видно, уравнения (1.29) и (1.24) совпадают, если в последнем положить $z = e^{j\omega T}$.

Передаточная функция (1.29) является комплексной функцией вещественного аргумента $H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j\varphi(\omega)}$, модуль которой составляет АЧХ, а аргумент $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$ — ФЧХ-системы.

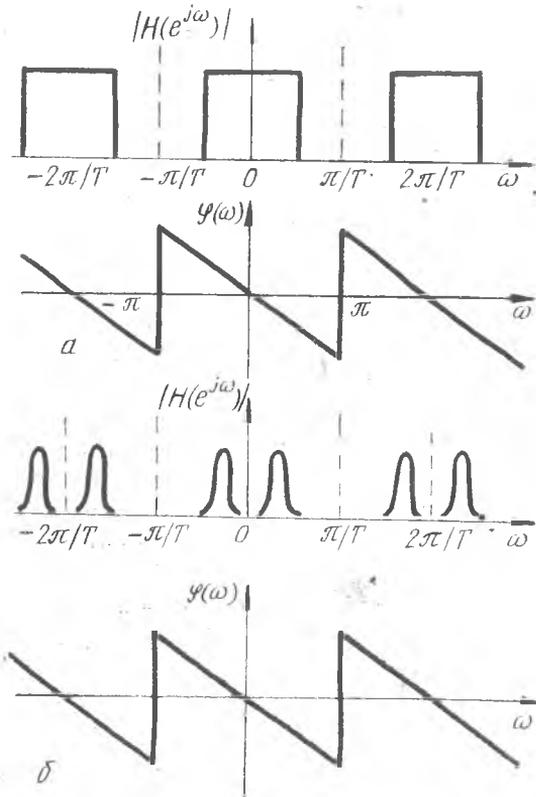


Рис. 1.5

Частотные характеристики дискретных систем, в отличие от подобных характеристик аналоговых систем, являются периодическими функциями частоты ω с периодом $2\pi/T$.

В самом деле

$$H(e^{j(\omega + m2\pi/T)T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j(\omega T + m2\pi)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega nT} = H(e^{j\omega T}), \quad m = 1, 2, \dots$$

Для иллюстрации сути этого свойства на рис. 1.5,а приведены возможные амплитудная и фазовая характеристики цифрового ФНЧ, а на рис. 1.6,б — цифрового полосового фильтра. Фазовая характеристика для простоты принята линейной. Как видно, частотные характеристики цифровых систем полностью определены на интервале частот $-\pi/T, \pi/T$ или, что то же самое, на интервале $0, 2\pi/T$.

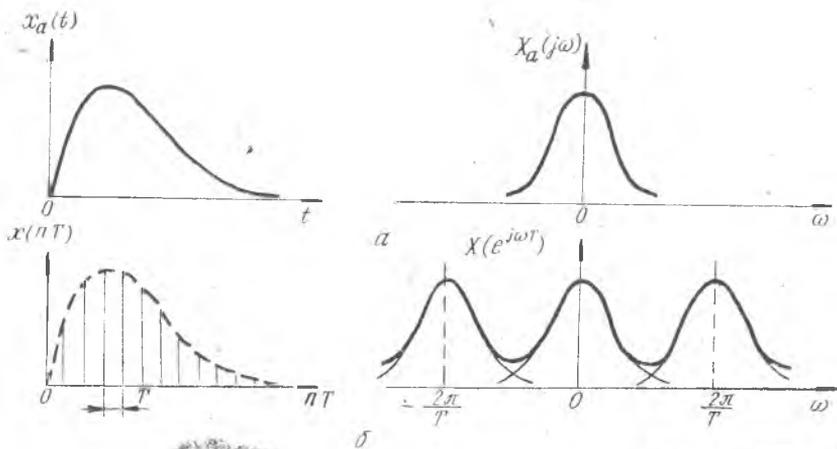


Рис. 1.6

Покажем способ получения импульсной характеристики дискретной системы по ее частотной характеристике. Для этого учтем, что уравнение (1.29) представляет собой разложение периодической функции $H(e^{j\omega T})$ в ряд Фурье. Коэффициенты этого ряда, представляющие собой отсчеты импульсной харак-

теристики, определяются обычным, известным из теории рядов Фурье способом:

$$h(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{j\omega T}) e^{-j\omega nT} d\omega. \quad (1.30)$$

Интегрирование в (1.30) производится на интервале $-\pi/T$, π/T -периоде частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$.

Обратимся к задаче о спектре дискретного сигнала. Импульсная характеристика дискретной системы и дискретный сигнал представляют собой временные последовательности. Поэтому спектр этого сигнала $x(nT)$ можно вычислить аналогично (1.29) по формуле

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (1.31)$$

Здесь нижний предел суммирования берется $-\infty$, так как сигнал $x(nT)$ может существовать в области отрицательного времени. Спектр сигнала также является периодической функцией частоты, период которой составляет $2\pi/T$. Обратное (1.31) преобразование Фурье осуществляется по формуле

$$x(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.32)$$

Из (1.21) видно, что спектр сигнала на выходе дискретной системы равен произведению спектра на входе на частотную характеристику системы:

$$Y(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T}) X(e^{j\omega T}). \quad (1.33)$$

В свою очередь, из (1.32) и (1.33) следует, что отклик дискретной системы на входную последовательность $x(nT)$ может быть определен с помощью интеграла Фурье вида

$$y(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.34)$$

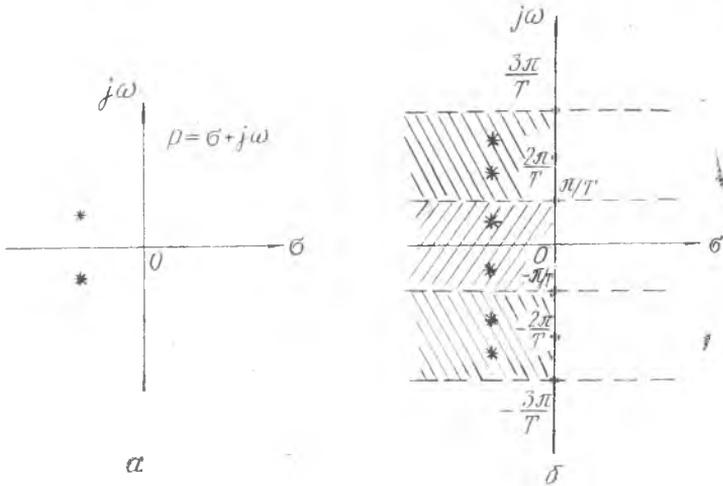
Рассмотрим соотношение между спектрами аналогового и дискретного сигналов. Предположим, что задан аналоговый сигнал $x_a(t)$ и его спектр $x_a(j\omega)$ (рис. 1.6,а). Определим структуру спектра дискретной последовательности, полученной в результате дискретизации сигнала $x_a(t)$, и характер его связи со спектром исходного аналогового процесса.

Аналоговый сигнал выражается через свой спектр с помощью интеграла Фурье:

$$x_a(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.35)$$

Полагая в (1.35) $t = nT$, для дискретной последовательности $x(nT) = x_a(t) |_{t=nT}$ запишем:

$$x(nT) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega = (1/2\pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/T}^{(2k+1)\pi/T} X_a(j\omega) \times e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.36)$$



В выражении (1.36) область частоты (ось мнимых, вдоль которой производится интегрирование в p -плоскости) разбивается на последовательность отрезков, длиной по $2\pi/T$ каждый (рис. 1.7.6). Исходный интеграл представляется в виде суммы частных интегралов, взятых на указанных частотных интервалах. Заменим переменную интегрирования во втором интеграле (1.36) $\omega' = \omega - \frac{2\pi k}{T}$ и переменим порядок суммирования и интегрирования. Получим при этом

$$x(nT) = (T/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + (2\pi/T)k)] e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.37)$$

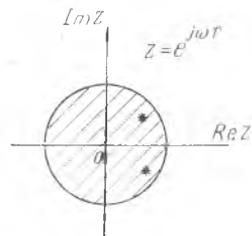


Рис. 1.7

Соотношение спектров дискретного и аналогового сигналов установим путем сравнения (1.32) с (1.37):

$$X(e^{j\omega T}) = (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a [j(\omega + (2\pi/T)k)]. \quad (1.38)$$

Из (1.38) видно, что периодическая спектральная функция дискретной последовательности состоит из взвешенной суммы бесконечного числа сдвинутых на $2\pi k/T$ ($k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) спектров аналогового сигнала (рис. 1.6,б). Если спектр аналогового сигнала ограничен по частоте и сосредоточен в полосе частот $|\omega| < \pi/T$ ($X_a(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \pi/T$), то спектр дискретной последовательности на одном периоде и спектр аналогового сигнала тождественно совпадают. В этом случае при цифроаналоговом преобразовании из дискретной последовательности может быть выделен исходный аналоговый процесс без искажений. Если указанное выше ограничение спектра аналогового сигнала не выполняется, то сдвинутые вдоль оси абсцисс копии спектров этого процесса перекрываются и при суммировании в (1.38) искажаются, вследствие чего возникают ошибки наложения.

Сказанное выше основывается на известной в теории сигналов [5] теореме отсчетов Котельникова. Следует, однако, иметь в виду, что условия теоремы Котельникова реально могут выполняться только приближенно, так как ограниченные во времени сигналы теоретически имеют бесконечные по частоте спектры. Поэтому ошибки, связанные с дискретизацией сигналов по времени, принципиально неизбежны. Величиной этих ошибок можно управлять путем выбора величины частоты дискретизации $f_0 = 1/T$.

Полученное выше соотношение (1.38) между спектрами дискретного и аналогового сигналов нетрудно обобщить соответственно на их Z -преобразование и преобразование Лапласа. Для этого в (1.38) перейдем от вещественной переменной ω к комплексной переменной p ($j\omega \rightarrow p$) и, учитывая выражение $z = e^{pT}$,

$$\text{запишем } X(z) = 1/T \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(p + j \frac{2\pi}{T}k). \quad (1.39)$$

Выражение (1.39) позволяет уяснить суть конформного отображения комплексной p -плоскости в z -плоскость, соответствующего переходу от дискретного преобразования Лапласа к Z -преобразованию.

Аналоговому сигналу $x_a(t)$ с ограниченной шириной спектра соответствует интегральное преобразование Лапласа, отличное от нуля в полосе p -плоскости, расположенной вдоль оси σ

(рис. 1.7,а). Ширина этой полосы определяется шириной спектра сигнала. Для удобства дальнейших рассуждений предположим, что функция $X_a(p)$ обладает особыми точками (полюсами, нулями) и отметим эти точки на рис. 1.7,а.

Обеспечение выполнения условий теоремы Котельникова предполагает выбор шага дискретизации T так, чтобы величина отрезка $2\pi/T$ на оси мнимых соответствовала ширине вышеуказанной полосы. Дискретизация сигнала $x_a(t) \rightarrow x(nT)$ означает образование в p -плоскости бесконечно большего числа полос с шириной $2\pi/T$, в пределах каждой из которых повторяется картина распределения преобразования Лапласа (особых точек) (рис. 1.7,б). Комплексный оператор $z = e^{pT}$ конформно отображает каждую из полос p -плоскости на всю z -плоскость. При этом левая (заштрихованная на рис. 1.7,б) полуполоса отображается во внутренность единичного круга, а правая — на всю внешнюю область. Вся совокупность левых полуполос, многократно накладываясь, образует однозначную внутренность единичного круга z -плоскости. Правые полуполосы отображаются подобным образом во внешнюю область. Таким образом, левая полуплоскость p -плоскости отображается в единичный круг z -плоскости, а правая полуплоскость — в область вне этого круга (рис. 1.7,в). Ось мнимых в p -плоскости, на которой определяется спектр сигнала, отображается в z -плоскость на окружность $|z| = 1$, причем каждому отрезку оси $j\omega$ длиной $2\pi/T$ в z -плоскости соответствует полная длина окружности.

Приведенные геометрические представления позволяют глубже уяснить суть преобразования сигналов при их дискретизации.

1.6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО ДИАГРАММЕ ПОЛЮСОВ И НУЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ [1]

Разложим полиномы от переменной z^{-1} в числителе и знаменателе (1.15) на элементарные множители и запишем выражение для передаточной функции дискретной системы в виде

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{r=1}^L (1 - d_r z^{-1})}, \quad (1.40)$$

где H_0 — константа.

Каждому сомножителю $1 - c_m z^{-1} = (z - c_m)/z$ в z -плоскости соответствуют нуль передаточной функции в точке $z = c_m$ и полюс в начале координат. В свою очередь, сомножителю знаменателя $1/(1 - d_r z^{-1}) = z/(z - d_r)$ соответствуют полюс в точке $z = d_r$ и нуль в начале координат.

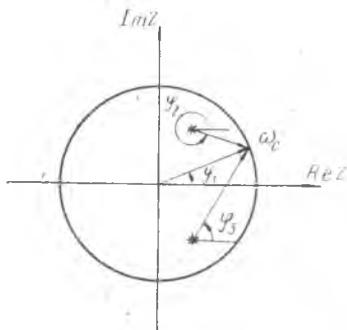


Рис. 1.8

Выше отмечалось, что частотная характеристика может быть определена в z плоскости как передаточная функция на единичной окружности (рис. 1.8). На этом рисунке изображена диаграмма нулей и полюсов двух сомножителей знаменателя. Их нули совмещены с началом координат, а полюсы — комплексно-сопряженные. Определим влияние этой пары сомножителей на частотную характеристику на некоторой частоте $\omega = \omega_c$. Этой частоте на окружности

радиуса $|z|=1$ соответствует представляющая точка, смещенная на угол $\varphi_1 = e^{j\omega_c T}$. Нетрудно убедиться в том, что вклад каждого из сомножителей в АЧХ равен отношению длины вектора, исходящего из нуля в представляющую точку, к длине вектора, исходящего из полюса. Вклад в ФЧХ равен разности их углов $\varphi_1 - \varphi_2$ ($\varphi_1 - \varphi_3$).

Вклад сомножителей числителя передаточной функции определяется аналогично. В частности, вклад в АЧХ определяется отношением длины вектора, исходящего из нуля в представляющую точку, к длине вектора, исходящего из начала координат (полюса) также в представляющую точку на единичной окружности. Результирующая АЧХ равна произведению частных отношений, а ФЧХ — сумме частных разностей. Таким образом может быть определена частотная характеристика системы с точностью до множителя H_0 (см. 1.40).

Наиболее существенное влияние на АЧХ оказывает местоположение полюсов. Из картины изменения векторов видно, что пики АЧХ возникают на частотах, на которых представляющая точка находится вблизи полюса. В случае, если полюс располагается на единичной окружности, то на соответствующей частоте значение АЧХ устремляется в бесконечность и система теряет устойчивость.

При изменении частоты на величину $2\pi/T$ представляющая точка совершает полный цикл вращения по окружности. При

дальнейшем изменении частоты такие циклы повторяются, что указывает на периодический характер частотной характеристики дискретной системы.

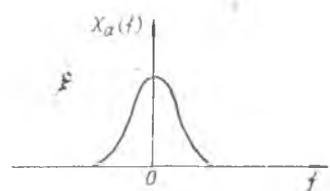
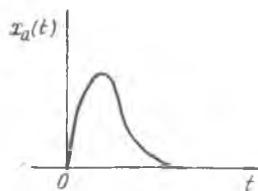
1.7. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ [1, 2, 3]

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — это алгоритм вычисления интегрального преобразования Фурье на ЭВМ. ЭВМ, как арифметическое устройство, обладающее конечным объемом памяти, оперирует только с дискретными значениями функций времени и спектральных функций, определенными на конечных интервалах. Дискретное представление сигналов и их спектров обуславливает особенности ДПФ, среди которых важным является свойство периодичности. Покажем суть этого свойства.

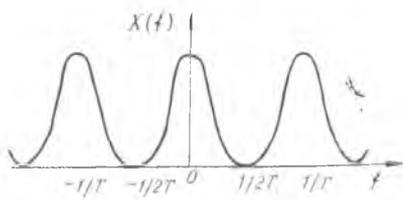
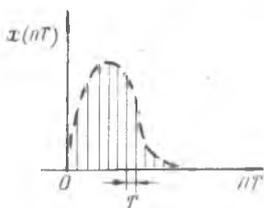
Предположим, что заданы аналоговая функция времени $x_a(t)$ (сигнал) и ее амплитудный спектр $X_a(j)$ (рис. 1.9,а). Дискретизация этого сигнала по времени с шагом T , как показано выше, обуславливает периодичность его спектра по частоте с периодом $f_0 = 1/T$ (рис. 1.9,б). Из теории сигналов известно, что бесконечные периодические сигналы имеют линейчатые (т. е. дискретные) спектры. Иначе, дискретизация спектра с некоторым шагом F предполагает соответствие этому спектру бесконечного периодического сигнала, период которого составляет $1/F$ (рис. 1.9,в).

Одновременная дискретизация по времени и по частоте означает, что сигнал и соответствующий ему спектр суть бесконечные периодические последовательности, причем период временной последовательности составляет $1/F$, а спектральной — $1/T$. Очевидно, что число отсчетов последовательностей на периоде составляет $N = 1/FT$, иначе, период обеих последовательностей, выраженный через число отсчетов, составляет N (рис. 1.9,г).

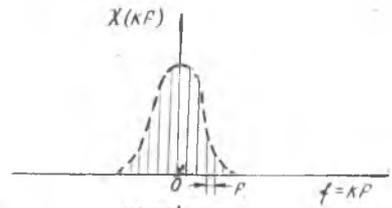
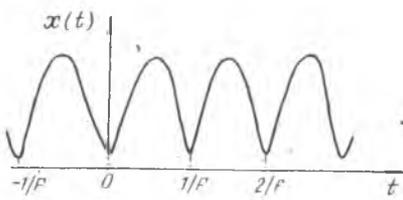
Следует отметить, что сигналам и спектрам, изображенным на рис. 1.9, а, б и в, могут быть поставлены в соответствие физические модели, т. е. такие сигналы с некоторым приближением можно реализовать практически. Суть приближения состоит, например, в замене временного отсчета — импульса с бесконечно малой длительностью — коротким, но конечным по длительности импульсом; бесконечной периодической последовательности — конечной протяженной квазипериодической последовательностью. Вместе с тем, сигнал со спектром (рис. 1.9,г) реализуется лишь во внутреннем представлении в ЭВМ. Это,



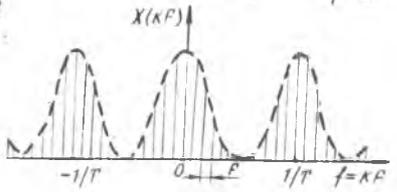
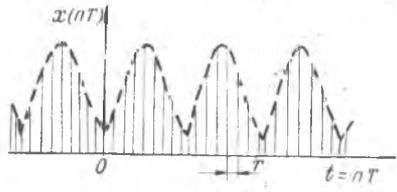
a



b



b



2

Р и с. 1.9

однако, не умаляет практического значения этого сигнала. Поэтому мы займемся ниже изучением сигнала (рис. 1.9,г) и его спектра, связанных между собой дискретным преобразованием Фурье.

Выше была введена нормированная временная шкала времени $t' = t/T$, в которой аргумент функции времени $x(n)$ представляется безразмерным временем n . Подобно этому введем нормированную шкалу частот $f' = f/F$, а вместо размерной дискретной частоты kF , $k = 0, 1, 2, \dots$ будем пользоваться безразмерной частотой k . При этом функция частоты $X(kF) = X(f) |_{f=kF}$ запишется в виде $X(k)$.

Рассмотрим периодическую последовательность $\bar{x}(n)$ с периодом N , т. е. $\bar{x}(n+rN)$, $r=0, 1, 2, \dots$ (Знак \sim означает периодичность последовательности. В случаях, когда периодичность не имеет принципиального значения, этот знак будем опускать).

В силу периодичности, последовательность $\bar{x}(n)$ может быть разложена в ряд Фурье, т. е. представлена суммой комплексных гармонических последовательностей с частотами, кратными основной частоте $2\pi/N$ (частоте периодичности $\bar{x}(n)$):

$$\bar{x}(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (1.41)$$

В отличие от рядов Фурье, представляющих собой разложение непрерывных функций, верхний предел в сумме (1.41) ограничен, так как вследствие периодичности комплексной экспоненты

$e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = e^{j \frac{2\pi}{N} n(k+N)}$ существует только N гармонических последовательностей с различными частотами $\frac{2\pi}{N} k$. Нормирующий множитель $1/N$ в (1.41) не имеет принципиального значения.

Определим последовательность отсчетов спектра $\bar{X}(k)$. Используя (1.41), можно записать соотношение

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = \sum_{n=0}^{N-1} [(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk}] e^{-j(2\pi/N)nm}.$$

Переменим порядок суммирования в правой части равенства и напишем

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)(k-m)n}.$$

Так как геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-m)n} = \begin{cases} N & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases}$$

то получим

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk}. \quad (1.42)$$

Как и следовало ожидать, последовательность $X(k)$ периодическая.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k + mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j(2\pi/N)n(k+mN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} e^{-j(\frac{2\pi}{N})nm} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk} = \tilde{X}(k); \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Выражения (1.41) и (1.42) могут рассматриваться как пара дискретного преобразования Фурье, из которых (1.42) — прямое (ДПФ), а (1.41) — обратное преобразование (ОДПФ). Обозначим для удобства $W_N = e^{-j2\pi/N}$. Тогда

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}; \quad (1.43)$$

$$\tilde{x}(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}. \quad (1.44)$$

В (1.43), (1.44) $\tilde{x}(n)$, $\tilde{X}(k)$ — последовательности комплексных чисел.

Рассмотрим последовательности конечной длины $\tilde{x}(n)$ и $\tilde{X}(k)$, которые получаются соответственно из $\tilde{x}(n)$ и $\tilde{X}(k)$ выделением одного периода, т. е.

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & \text{при } 0 \leq n \leq N-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.45)$$

и

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k) & \text{при } 0 \leq k \leq N-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.46)$$

Выражения (1.43), (1.44) справедливы и для конечных последовательностей (1.45), (1.46):

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (1.47)$$

$$x(n) = \begin{cases} (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.48)$$

Формулы (1.47), (1.48) собственно и составляют пару дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Эти формулы могут рассматриваться в качестве алгоритма приближенного вычисления интегрального преобразования Фурье с помощью ЭВМ.

Пару ДПФ (1.47), (1.48) мы получили путем усечения бесконечных последовательностей $\bar{x}(n)$, $\bar{X}(k)$ в (1.43), (1.44). Однако свойства преобразования (1.47), (1.48) совпадают со свойствами преобразования (1.43), (1.44). Эти свойства истекают из подразумеваемой периодичности ДПФ (1.47), (1.48).

1.8. СВОЙСТВА ДПФ [1, 2, 3].

Перечисленные ниже свойства 1, 2, 3 имеют элементарные доказательства. Поэтому эти доказательства опущены. Кроме того, свойства 1, 2 подобны соответствующим теоремам Z -преобразования, доказательства которых приведены в приложении 1.

1. **Линейность.** ДПФ суммы последовательностей равно сумме ДПФ слагаемых: если $\bar{x}(n) = a\bar{x}_1(n) + b\bar{x}_2(n)$, то $\bar{X}(k) = a\bar{X}_1(k) + b\bar{X}_2(k)$.

2. **Сдвиг последовательности.** Если $\bar{x}(n)$ — периодическая последовательность с периодом N отсчетов и ДПФ $\{\bar{x}(n)\} = \bar{X}(k)$, то

$$\text{ДПФ } \{\bar{x}(n - n_0)\} = \bar{X}(k) e^{-j(2\pi/N) n_0 k}, \quad (1.49)$$

где n_0 — константа (временной сдвиг).

Для конечных последовательностей $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ сформулированное выше свойство справедливо при круговом сдвиге, который характеризуется перестановкой элементов последовательности. В этом проявляется подразумеваемая периодичность ДПФ. Суть кругового сдвига можно уяснить из рис. 1.10, на котором изображены исходная $x(n)$ и сдвинутая $x(n - n_0)$ последовательности.



Рис. 1.10

3. Симметрия. Если последовательность $\bar{x}(n)$ является действительной, то ее ДПФ имеет четную действительную и нечетную мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{X}(k) &= \operatorname{Re} \bar{X}(-k) = \operatorname{Re} \bar{X}(N-k), \\ \operatorname{Im} \bar{X}(k) &= -\operatorname{Im} \bar{X}(-k) = -\operatorname{Im} \bar{X}(N-k). \end{aligned} \quad (1.50)$$

В случае, если $\bar{x}(n)$ является мнимой последовательностью, то ДПФ имеет нечетную действительную и четную мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{X}(k) &= -\operatorname{Re} \bar{X}(-k) = -\operatorname{Re} \bar{X}(N-k), \\ \operatorname{Im} \bar{X}(k) &= \operatorname{Im} \bar{X}(-k) = \operatorname{Im} \bar{X}(N-k). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Свойства симметрии сохраняются также для конечных последовательностей.

На практике последовательности во временной области обычно являются действительными. В этом случае, при необходимости, две временные последовательности могут быть объединены в одну комплексную последовательность, действительную часть которой составляет одна последовательность, а мнимую — вторая.

Используя свойства симметрии (1.50) и (1.51), ДПФ совокупной комплексной последовательности можно разделить на две комплексные подпоследовательности, являющиеся дискретными преобразованиями Фурье действительных временных последовательностей. Таким образом, используя свойство симметрии, представляется возможным с помощью одной операции вычисления получить ДПФ двух последовательностей.

4. Периодическая (круговая) свертка. Со свойствами БПФ тесно связано понятие периодической свертки. Рассмотрим суть такой свертки.

Пусть заданы две периодические последовательности $\bar{x}(n)$ и $\bar{h}(n)$, имеющие одинаковый период N отчетов. ДПФ этих последовательностей

$$\begin{aligned} \bar{X}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}(m) W_N^{mk}; \\ \bar{H}(k) &= \sum_{r=0}^{N-1} \bar{h}(r) W_N^{rk}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Определим временную последовательность $\bar{y}(n)$, для которой $\bar{Y}(k) = \bar{X}(k) \bar{H}(k)$. Подставим (1.52) в выражение ОДПФ:

$$\bar{y}(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{Y}(k) W_N^{nk},$$

и получим

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(r) W_N^{(m+r-n)k} = \\ &= (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(r) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m+r-n)k}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Внутренняя сумма в (1.53) есть геометрическая прогрессия, для которой справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m+r-n)k} = \begin{cases} N & \text{при } r = (n - m) + lN, l=0, 1, \dots, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.54)$$

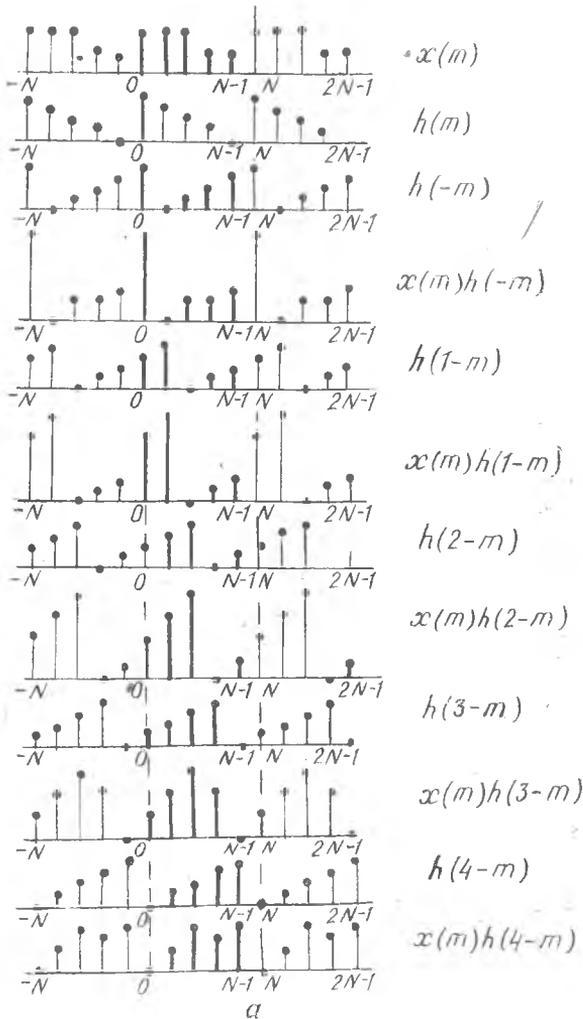


Рис. 1.11 а

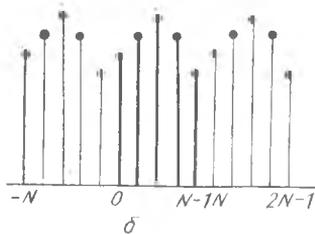


Рис. 1.11 б

Подставим (1.54) в (1.53). В результате получим

$$\bar{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}(m) \bar{h}(n-m). \quad (1.55)$$

Из (1.55) видно, что искомая последовательность $y(n)$ представляет собой свертку последовательностей $\bar{x}(n)$, $\bar{h}(n)$. Так как свертываемые последовательности периодические, то свертка $\bar{y}(n)$ также

представляет собой периодическую последовательность. Процедура формирования периодической свертки показана на рис. 1.11, а. На рис. 1.11, б приведена свернутая последовательность $\bar{y}(n)$.

При получении свертки последовательностей $x(n)$, $h(n)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$), конечной длительности (по 1.55) с помощью алгоритма ДПФ необходимо учитывать подразумеваемую периодичность свертываемых последовательностей. Поэтому, несмотря на то что свертка $y(n)$ имеет конечную длительность и содержит N отсчетов, она совпадает с периодической сверткой на одном ее периоде.

1.9. ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА КОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ [1, 2, 3]

Выше, в 1.2, отмечалось, что процесс на выходе линейной дискретной системы определяется сверткой входной последовательности $x(n)$ с импульсной характеристикой системы $h(n)$. Предположим, что последовательности $x(n)$ и $h(n)$ конечны и содержат по N_1 и N_2 отсчетов соответственно:

$$(x(n), n = 0, 1, \dots, N_1 - 1; h(n), n = 0, 1, \dots, N_2 - 1).$$

Тогда выражение (1.2) для свертки примет вид

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m) x(n-m) = \sum_{m=0}^n x(n-m) h(m). \quad (1.56)$$

Свертка (1.56), в отличие от периодической, называется линейной (апериодической). Линейная свертка двух конечных последовательностей конечна и содержит не более $N_1 + N_2 - 1$ ненулевых отсчетов (рис. 1.12).

Линейная свертка может быть вычислена разными методами: прямым непосредственно по (1.56) и косвенным с использованием алгоритма БПФ. При больших величинах $N_1 + N_2 - 1$ прямой метод оказывается малоэффективным, так как требует выполнения большого числа операций умножения и сложения и, соответственно, больших затрат машинного времени ЭВМ.

Косвенный метод основан на рассмотренном выше (1.7, п.4) свойстве ДПФ и выполняется в три этапа. Сначала определяются ДПФ $X(k)$, $H(k)$ последовательностей $x(n)$, $h(n)$; затем вычисляется их произведение $Y(k) = X(k)H(k)$; на третьем этапе выполняется ОДПФ, в результате которого получается искомая последовательность $y(n)$. Однако такой алгоритм приводит, как отмечалось в 1.7, не к линейной, а к периодической свертке и, кроме того, требует, чтобы свертываемые последовательности $x(n)$ и $h(n)$ имели одинаковую длину. Трудности, связанные с этими обстоятельствами, легко устранить, если дополнить последовательности $x(n)$, $h(n)$ нулевыми отсчетами до длины $N_1 + N_2 - 1$. При этом свертываемые последовательности, естественно, имеют одинаковые длины, а длительность периода периодической свертки оказывается равной длине линейной

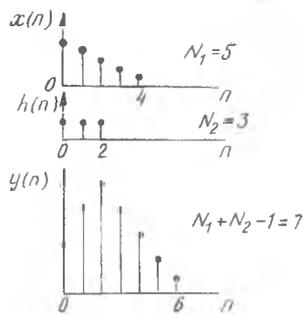


Рис. 1.12

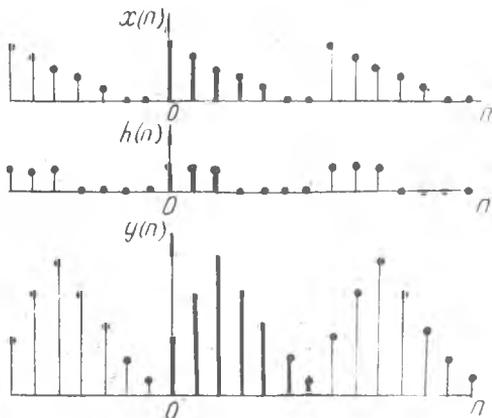


Рис. 1.13

свертки. В результате получается периодическая свертка, период которой тождественно совпадает с линейной сверткой. Пример такой свертки приведен на рис. 1.13.

Косвенный метод вычисления свертки получил распространение в связи с разработкой высокоэффективных, «быстрых» алгоритмов ДПФ. (Методы вы-

числения ДПФ рассматриваются ниже в разделе 3). При большой и даже умеренной величине $N_1 + N_2 - 1$ (> 30) применение «быстрых» алгоритмов ДПФ в косвенной свертке позволяет существенно уменьшить число арифметических операций по сравнению с прямым способом вычисления линейной свертки. Поэтому косвенный метод свертки с применением алгоритмов «быстрого» ДПФ получил название быстрой свертки.

1.10. БЫСТРАЯ СВЕРТКА КОНЕЧНОЙ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ [1, 2, 3]

Рассмотренная в 1.9 процедура позволяет вычислить свертку двух последовательностей конечной длины с помощью ДПФ. Однако во многих случаях одна последовательность (импульсная характеристика) имеет конечную длину, а вторая (входной сигнал) — бесконечна. Такая ситуация возникает, например, при цифровой обработке в реальном масштабе времени акустических, радиолокационных, гидролокационных сигналов.

Теоретически можно ввести в память ЭВМ всю последовательность квазибесконечного сигнала, а затем реализовать процедуру быстрой свертки для конечных последовательностей. Однако при этом требуется большой объем памяти ЗУ ЭВМ, усложняется реализация алгоритма ДПФ и возникает недопустимая для многих приложений задержка выходного сигнала $y(n)$ (свертки) относительно входного $x(n)$.

Поэтому в таких случаях применяется секционирование свертки, суть которого состоит в разбиении квазибесконечной последовательности входного сигнала на секции ограниченной длины, вычислении частных сверток секций с импульсной характеристикой и последующем объединении частных результатов в единую выходную последовательность.

Известны два метода секционирования свертки. Первый из них носит название метода перекрытия с суммированием. Рассмотрим сущность этого метода.

Представим входную последовательность $x(n)$ в виде суммы

$$x(n) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(n), \quad (1.57)$$

в которой каждая секция имеет только L ненулевых точек:

$$x_r(n) = \begin{cases} x(n) & \text{при } rL \leq n \leq (r+1)L; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.58)$$

Примем, что импульсная характеристика $h(n)$ содержит N ненулевых отсчетов. Тогда для линейной свертки последовательностей $x(n)$, $h(n)$ можно написать:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{x}_r(n-m) h(m) = \sum_{r=0}^{\infty} y_r(n). \quad (1.59)$$

Каждая из последовательностей $y_r(n)$ имеет длину $M = L + N - 1$ и, кроме того, соседние последовательности при суммировании по (1.59) перекрываются в $N - 1$ точках. Способ формирования выходной последовательности показан на рис. 1.14, на котором приведены импульсная характеристика $h(n)$, входная последовательность $x(n)$, частные выходные последовательности $y_0(n)$, $y_1(n)$, $y_2(n)$ и результирующая последовательность $y(n)$. Как видно, на интервалах, на которых перекрытие частных последовательностей отсутствует, отсчеты этих последовательностей переносятся в результирующую последовательность без измерения; на интервалах перекрытия соответствующие отсчеты последовательностей суммируются.

В другом методе секционирования свертки, именуемом обычно методом перекрытия с накоплением, входная последовательность $x(n)$ делится на секции длиной M отсчетов, перекрывающиеся в $N - 1$ точках. При таком делении первые $N - 1$ отсчетов последующей секции входной последовательности повторяют последние $N - 1$ отсчетов предыдущей секции. Процедура секционирования входного сигнала показана на рис. 1.15, на котором приведены последовательности импульсной характеристики $h(n)$ и сигнала $x(n)$, выделены секции сигнала длиной $M = L + N - 1$ и сформированы из них периодические последовательности $\bar{x}_r(n)$. На графиках $\bar{x}_r(n)$ секции сигнала, составляющие период этих последовательностей, отмечены жирными линиями.

В рассматриваемом случае все отсчеты на периоде последовательности $\bar{x}_r(n)$ могут быть ненулевыми. (Последовательность $\bar{x}_0(n)$ в этом смысле нехарактерна. Нулевые отсчеты в каждом периоде этой последовательности являются следствием того, что $x(n) = 0$ при $n < 0$). Заметим, что в предшествующем методе перекрытия с суммированием период последовательности $x_0(n)$ также имеет длину $M = L + N - 1$ отсчетов, однако из них ненулевыми могут быть только L отсчетов. Период последовательности $\bar{h}(n)$ здесь по-прежнему содержит L нулевых из M отсчетов. Циклическая свертка с помощью ДПФ последовательностей $\bar{x}_r(n)$ и $\bar{h}(n)$, имеющих длину периода $M = L + N - 1$, также является периодической последовательностью с тем же периодом. Вследствие отмеченного выше характера последова-

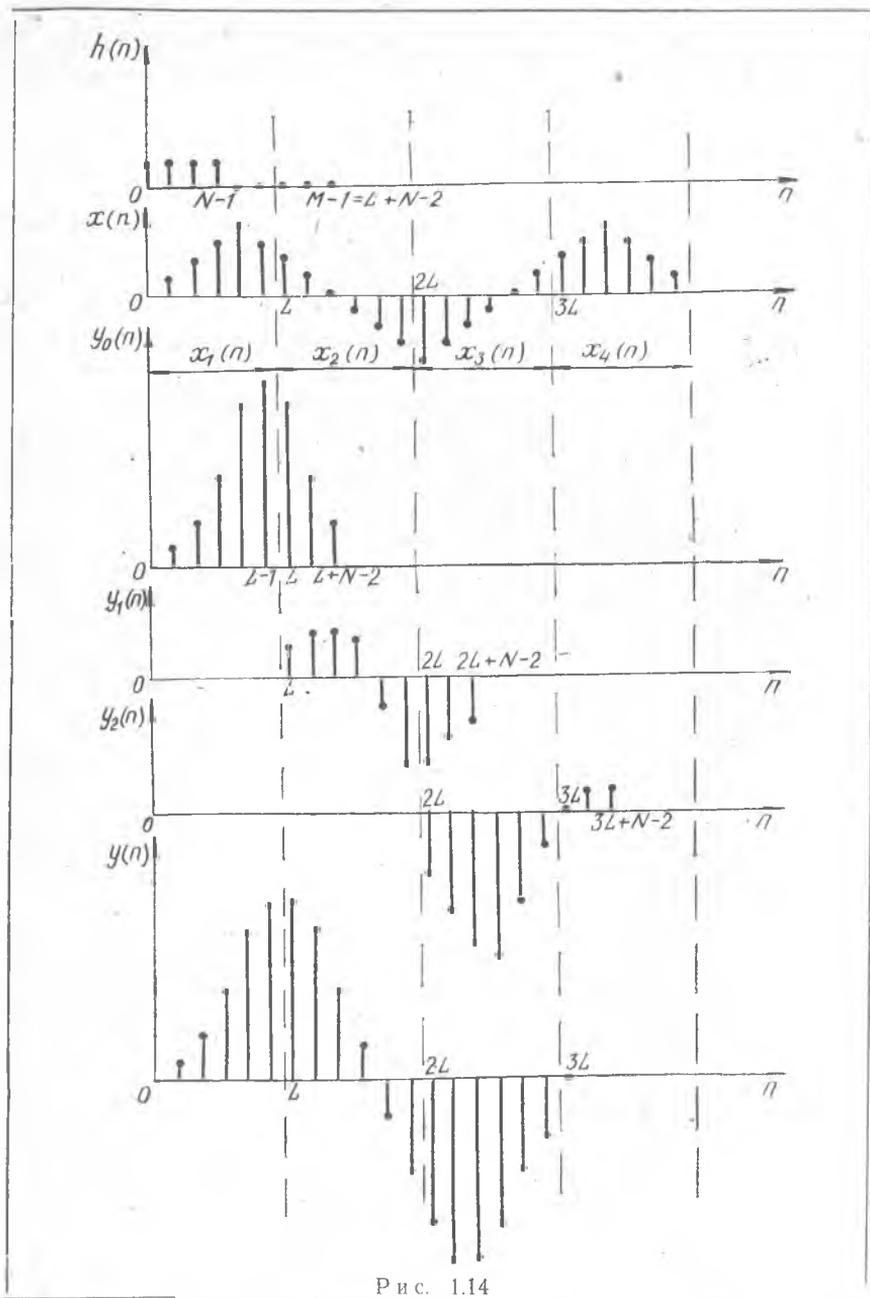


Рис. 1.14

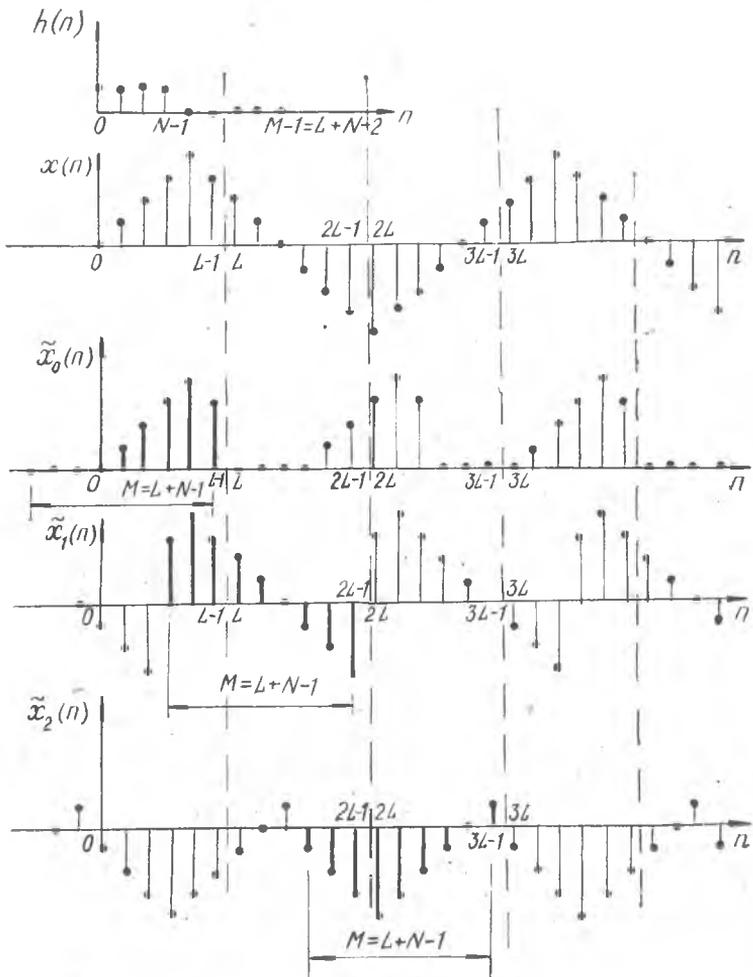


Рис. 1.15

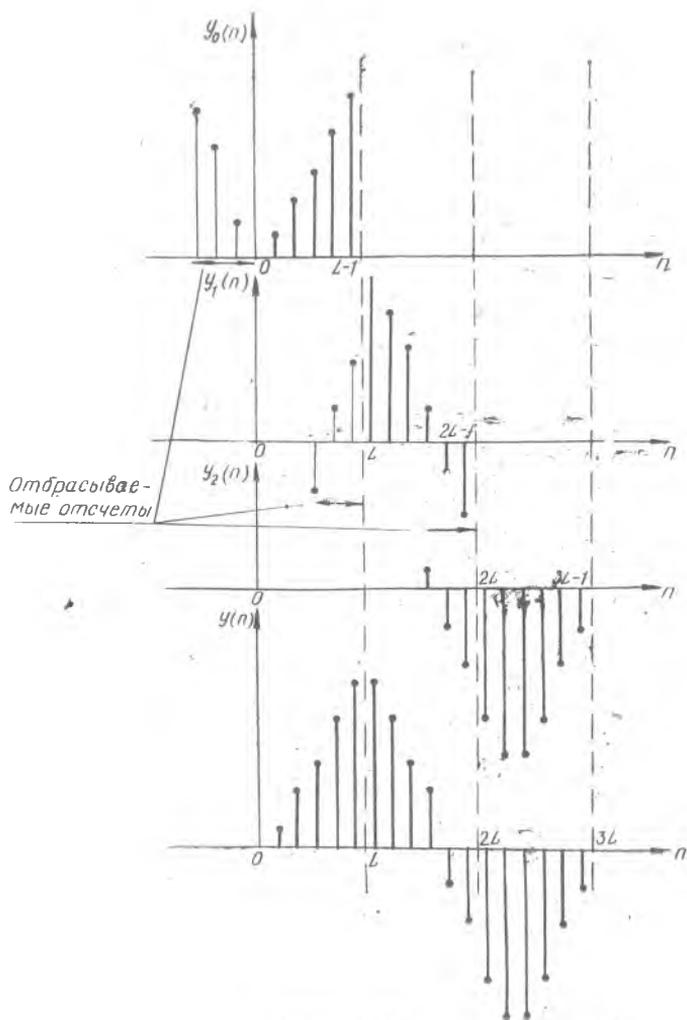


Рис. 1.16

тельности $x_r(n)$, только в L точках периода периодическая свертка совпадает с линейной сверткой конечных последовательностей $x_r(n)$, $n = 0, 1, \dots, L-1$ и $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Эти отсчеты периодической свертки могут быть включены в результирующую последовательность $y(n)$. Остальные $N-1$ отсчетов — неверные и должны быть отброшены.

Процедура формирования выходной последовательности $y(n)$ показана на рис. 1.16, на котором изображены конечные последовательности $y_0(n)$, $y_1(n)$, ..., составляющие один период свертки $\tilde{y}_0(n)$, $\tilde{y}_1(n)$, Первые $N-1$ отсчетов этих последовательностей неверные. Результирующая последовательность $y(n)$ получается путем примыкания оставшихся верных L отсчетов каждой частной свертки.

По вычислительным затратам оба рассмотренных метода секционирования быстрой свертки примерно эквивалентны.

2. Цифровые фильтры

2.1. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦФ [1, 2, 3, 5, 6]

Цифровым фильтром называют линейную, инвариантную во времени дискретную систему, которая описывается разностным уравнением (1.6):

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{r=1}^N a_r y(n-r). \quad (2.1)$$

В области отображений для ЦФ существует адекватное (2.1) описание:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{r=1}^N a_r z^{-r}}, \quad (2.2)$$

где $H(z)$ — передаточная функция ЦФ.

По аналогии с электрическими цепями алгоритм (2.1) часто называют цифровой цепью. В такой терминологии ЦФ представляют собой частотно-избирательные цифровые цепи.

ЦФ можно реализовать по различным структурным схемам. Для БИХ ЦФ известны прямая, каноническая и каскадная формы.

Прямая форма (рис. 2.1) непосредственно следует из уравнения (2.2). Как видно, ЦФ реализуется с помощью элементов задержки, умножителей и сумматора.

Каноническую форму можно получить, представив передаточную функцию (2.2) в виде произведения:

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) = \left(\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \right) \left(\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right). \quad (2.3)$$

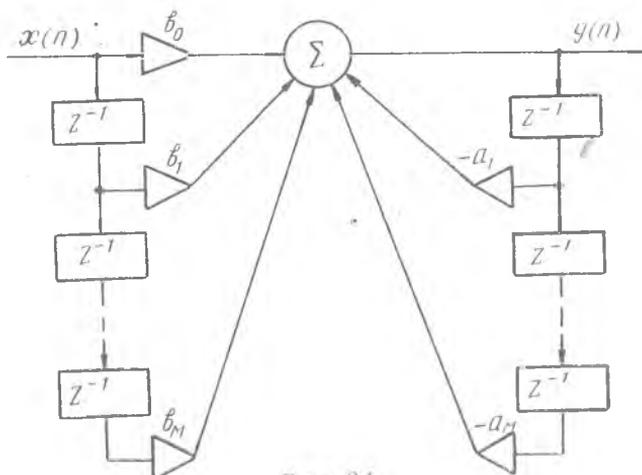


Рис. 2.1

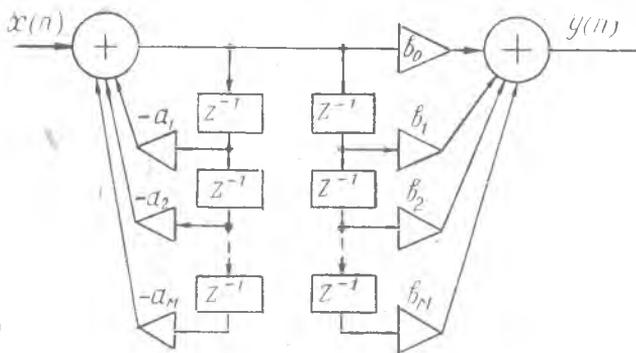
Произведению передаточных функций $H_1(z)H_2(z)$ соответствует последовательное включение фильтров, которые эти функции представляют (рис. 2.2,а). Существо процессов в ЦФ не изменится, если в устройстве (рис. 2.2,а) использовать одну общую цепочку элементов задержки. Таким образом приходим к канонической форме ЦФ (рис. 2.2,б). Из сравнения прямой и канонической форм видно, что последняя для реализации требует меньших аппаратных затрат: число элементов задержки (объем памяти ЭВМ) сокращается (в два раза в первом приближении).

В прямой и канонической формах наблюдается нежелательная чувствительность частотных характеристик фильтра к погрешностям коэффициентов, которые, в свою очередь, возникают вследствие конечности разрядной сетки ЭВМ. Поэтому при $M > 2$ такие схемы ЦФ применять не рекомендуется.

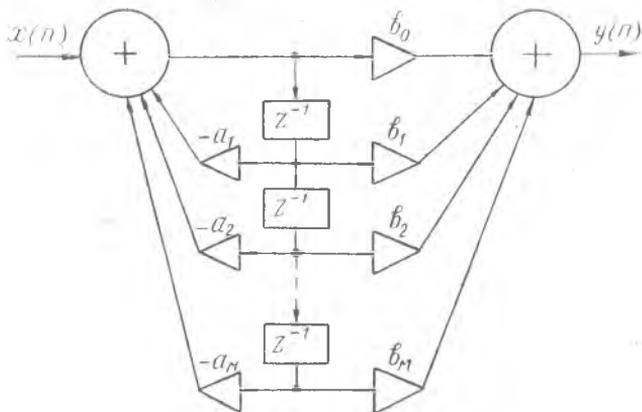
Последовательную каскадную форму ЦФ получим, если запишем передаточную функцию (2.2) в виде произведения передаточных функций более низкого порядка:

$$H(z) = H_0 \sum_{i=1}^R H_i(z). \quad (2.4)$$

Такая процедура позволяет реализовать исходный ЦФ как каскадное соединение более простых фильтров (блоков) (рис. 2.3). Передаточная функция исходного фильтра (2.2) может иметь простые или комплексно-сопряженные полюсы и нули.



a



б

Рис. 2.2

Простому полюсу и нулю соответствует блок первого порядка:

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1}}{1 + a_{1i} z^{-1}}, \quad (2.5)$$

а паре комплексно-сопряженных полюсов и нулей — блок второго порядка:

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}. \quad (2.6)$$

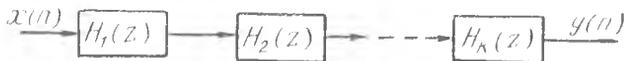


Рис. 2.3

Параллельную каскадную форму можно получить, если разложить передаточные функции ЦФ (2.2) на элементарные дроби:

$$H(z) = c_0 + \sum_{i=1}^k H_i(z), \quad (2.7)$$

где

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad (2.8)$$

либо

$$H_i(z) = \frac{b_{0i}}{1 + a_{1i}z^{-1}} \quad (2.9)$$

Структурная схема ЦФ в параллельной каскадной форме представлена на рис. 2.4.

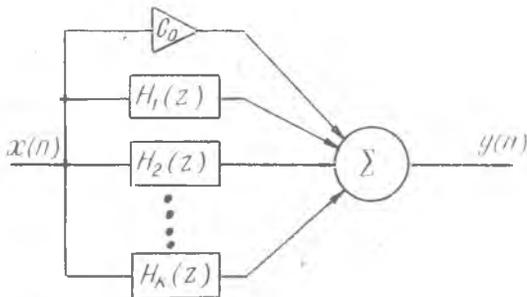


Рис. 2.4

Каскадные формы ЦФ менее чувствительны к точности представления коэффициентов и поэтому являются наиболее предпочтительными.

Простейшая (прямая) форма реализации КИХ ЦФ (рис. 2.5) может быть получена из выражения для передаточной функции такого ЦФ:

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}. \quad (2.10)$$

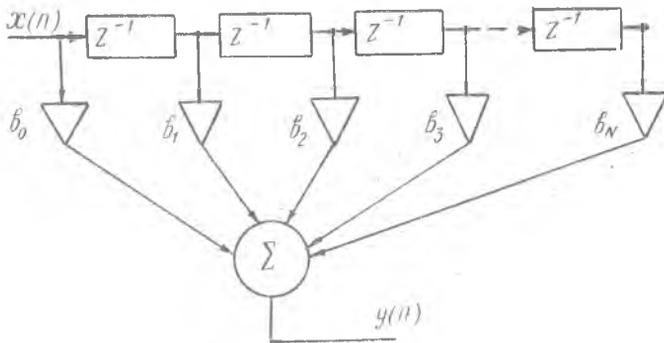


Рис. 2.5

Существуют другие более сложные схемы КИХ-фильтров, соответствующих (2.10), однако прямая форма является наиболее употребительной. Поэтому сложные схемы мы не будем рассматривать.

2.2. ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦФ [2]

Проектирование ЦФ состоит из трех основных этапов:

- а) определение требуемых характеристик фильтра;
- б) аппроксимация этих характеристик на основе использования физически реализуемых дискретных систем;
- в) реализация фильтра при использовании арифметики с ограниченной точностью.

На первом этапе к определению требуемых характеристик возможен различный подход. В большинстве практических применений необходимы частотно-избирательные фильтры. Для таких фильтров требуемые характеристики задаются в частотной области. Определение требований к конкретному фильтру поясним на примере ФНЧ (рис. 2.6). В этом случае задаются: а) полоса пропускания, в пределах которой АЧХ должна ап-

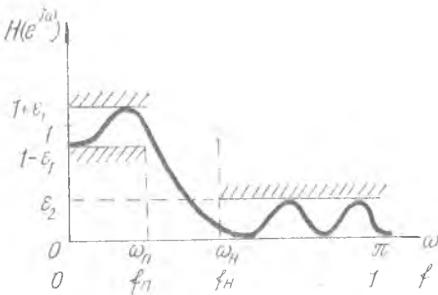


Рис. 2.6

проксимироваться величиной 1 с ошибкой $\pm \varepsilon_1$: $1 - \varepsilon_1 \leq H(e^{j\omega}) \leq 1 + \varepsilon_1$; б) полоса непропускания, в которой АЧХ аппроксимируется нулевым значением с ошибкой ε_2 , т. е. $|H(e^{j\omega})| < \varepsilon_2$; в) переходная полоса ненулевой ширины, в пределах которой АЧХ плавно спадает от значений в полосе пропускания к значениям в полосе непропускания. Частоты среза $f_{\text{пр}}$ для полосы пропускания и $f_{\text{нп}}$ для полосы непропускания ограничивают ширину этой полосы.

Кроме АЧХ определенные требования могут предъявляться также к фазовой характеристике. Например, иногда необходима линейность фазовой характеристики ЦФ.

Иной подход к определению желательных характеристик ЦФ применяется в задачах согласованной фильтрации сигналов на фоне помех. Их характеристики выбираются с учетом характеристик полезного сигнала и помех. Условия согласования фильтра с ожидаемым сигналом рассмотрены в [4, 5]. В настоящем разделе изучаются способы расчета частотно-избирательных фильтров. Поэтому не будем здесь касаться вопросов согласованной фильтрации.

Следующий этап — нахождение линейной дискретной системы (т. е. определение передаточной функции), характеристика которой изменяется в пределах допусков. В такой постановке расчет фильтра является задачей аппроксимации требуемой характеристики для БИХ (рекурсивных) фильтров с помощью дробнорациональной функции и для КИХ (нерекурсивных) фильтров — полиномиальной функции. На заключительном этапе проектирования необходимо учесть влияние на характеристики фильтра ограниченной точности задания коэффициентов фильтров в ЭВМ и выполнения арифметических операций, а также других эффектов, связанных с конечной разрядностью регистров ЭВМ. Эти вопросы будут рассмотрены в разделе 4.

При проектировании БИХ-фильтров в значительной мере может быть использована хорошо разработанная методика проектирования аналоговых фильтров. Процедура проектирования состоит в расчете АФ прототипа и в дальнейшем преобразовании аналоговых характеристик в цифровые.

Помимо расчета по аналоговому прототипу, принимаются и прямые методы проектирования ЦФ, не требующие предварительного расчета АФ.

2.3. РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ БИХ (РЕКУРСИВНЫХ) ФИЛЬТРОВ ПО ДАННЫМ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ

2.3.1. МЕТОД ИНВАРИАНТНОСТИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1, 2, 3, 5, 6]

Суть этого метода состоит в том, что в качестве импульсной характеристики ЦФ берутся отсчеты импульсной характеристики АФ, взятые с постоянным шагом, т. е. $h(nT) = h_a(t) \big|_{t=nT}$.

Процедура расчета цифрового фильтра состоит в следующем:

а) передаточная функция аналогового фильтра-прототипа раскладывается на элементарные дроби и представляется в виде

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{p - p_k}, \quad (2.11)$$

где p_k — k -й полюс передаточной функции $H_a(p)$. Такое разложение возможно, так как передаточная функция физически реализуемого аналогового фильтра $H_a(p) = B(p)/A(p)$ — дробно-рациональная функция, $A(p)$, $B(p)$ — полиномы от p .

Импульсную характеристику АФ с передаточной функцией (2.11) нетрудно получить с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^M c_k e^{p_k t} u(t), \quad (2.12)$$

где $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$ — функция единичного скачка.

В результате дискретизации импульсной характеристики (2.12) для ЦФ получим

$$h(nT) = \sum_{k=1}^M c_k e^{p_k nT} u(n). \quad (2.13)$$

Z-преобразование импульсной характеристики (2.13) дает искомую передаточную функцию ЦФ:

$$H(z) = \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}. \quad (2.14)$$

Метод импульсной инвариантности преобразует устойчивый АФ в устойчивый ЦФ, так как полюсы аналоговой передаточ-

ной функции, находящиеся в левой p -полуплоскости, при преобразовании (2.14) переносятся внутрь круга единичного радиуса в z -плоскости.

Связь между передаточными функциями ЦФ и АФ-прототипа можно получить в общем виде. Между процедурами дискретизации аналогового сигнала и преобразования аналогового фильтра в цифровой методом инвариантности импульсной характеристики имеется полное подобие. В обоих случаях происходит дискретизация функции времени: в первом случае — сигнала $x_a(t)$, во втором — импульсной характеристики $h_a(t)$. Поэтому можно воспользоваться результатами, полученными в п. 1.4 и устанавливающими связь между Z -преобразованием дискретного сигнала и преобразованием Лапласа, соответствующего ему аналогового сигнала. Итак, учитывая (1.39), напомним:

$$H(z) = (1/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(p + j(2\pi/T)m). \quad (2.15)$$

Очевидно, что для частотной характеристики ЦФ справедливо соотношение

$$H(e^{j\omega T}) = (1/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a[j(\omega + (2\pi/T)m)].$$

Такая структура частотной характеристики ЦФ предопределяет возможность возникновения эффекта наложения (рис. 2.7),

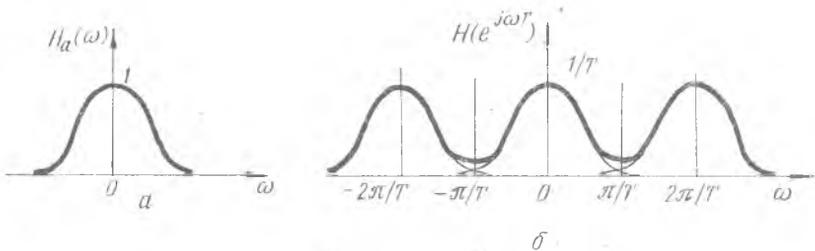


Рис. 2.7

следствием которого является искажение частотной характеристики ЦФ относительно АФ-прототипа. Нетрудно видеть, что эффект наложения ослабляется по мере уменьшения полосы пропускания фильтрации или шага дискретизации T . Поэтому метод инвариантности импульсной характеристики пригоден преимущественно для расчета узкополосных фильтров.

2.3.2. МЕТОД БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
[1, 2, 3, 6, 7]

Этот метод основан на преобразовании $H_a(p) \rightarrow H(z)$ путем замены в передаточной функции АФ комплексной переменной p по формуле $p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

Выражение (2.16) называется билинейным преобразованием. Такое преобразование, будучи алгебраическим, обеспечивает преобразование рациональной функции $H_a(p)$ также в рациональную функцию $H(z)$. Заметим, что иррациональные передаточные функции не приводят к физически реализуемым системам.

Отметим различие конформных отображений p -плоскости в z -плоскость при дискретизации АФ методами инвариантности импульсной характеристики и билинейного преобразования. В первом случае, как указывалось выше, каждая полоса p -плоскости шириной $2\pi/T$ вдоль оси мнимых отображается на всю z -плоскость, а при отображении всей p -плоскости в z -плоскость происходит многократное наложение отображений. При билинейном преобразовании вся p -плоскость однозначно отображается в z -плоскость. При этом вся мнимая ось p -плоскости отображается в окружность единичного радиуса в z -плоскости, левая полуплоскость — во внутренность этой окружности, а правая полуплоскость — во внешнюю относительно круга область (рис. 2.8). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим отображение оси мнимых в z -плоскость.

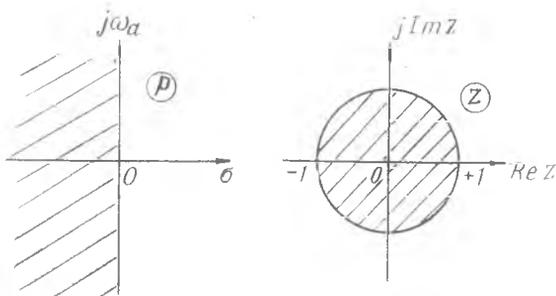


Рис. 2.8

Определим z для случая, когда значения p лежат на оси мнимых, т. е. $p = j\omega_a$. Из (2.16) имеем

$$z = \frac{2/T + p}{2/T - p} \Big|_{p = j\omega_a} = \frac{2/T + j\omega_a}{2/T - j\omega_a} = e^{j2 \arctg \omega_a T/2} \quad (2.17)$$

Здесь ω_a — частота, аргумент частотной характеристики АФ-прототипа.

Очевидно, что (2.17) — уравнение окружности единичного радиуса, так как $|z| = 1$ независимо от значения ω_a . Точке $\omega_a = 0$ мнимой оси p -плоскости в z -плоскости соответствует $z = 1$, бесконечно удаленной точке $\omega_a = \infty$ соответствует $z = -1$. В промежутке $0 < \omega < \infty$ аргумент $z = e^{j\omega T}$ монотонно изменяется в интервале от 0 до π . Следовательно, верхняя мнимая полуось p -плоскости отображается в дугу (полуокружность) на z -плоскости. Нижняя мнимая полуось отображается соответственно во вторую полуокружность. Таким образом, ось мнимых однозначно отображается в единичную окружность, что и требовалось доказать.

Вид конформного отображения предопределяет характер связи между передаточными функциями цифрового и аналогового фильтров. Для метода импульсной инвариантности — это бесконечная сумма (2.15), для метода билинейного преобразования — простое алгебраическое выражение $H(z) = H_a(p) / p = (2/T) (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})$.

Из сказанного следует; а) методом билинейного преобразования устойчивый АФ преобразуется в устойчивый ЦФ; б) эффекты искажения частотных характеристик, связанные с эффектом наложения, характерные для метода инвариантности импульсной характеристики, отсутствуют.

При билинейном преобразовании соотношение между шкалами частот аналогового фильтра ω_a и цифрового фильтра ω оказывается нелинейным. В самом деле, положим в (3.16)

$$p = j\omega_a, \quad z = e^{j\omega T} \text{ и получим } j\omega_a = 2/T \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}}. \text{ Отсюда следует: } \omega_a = (2/T) \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (2.18)$$

График (2.18) приведен на рис. 2.9. Там же изображены АЧХ полосового АФ-прототипа и ЦФ.

Как видно, в области низких частот зависимость (2.18) линейная. В области высоких частот шкала частот ЦФ деформируется. Соответственно искажается частотная характеристика ЦФ. Такие искажения частотных характеристик можно в существенной мере скомпенсировать. Для этого необходимо выбрать АФ-прототип с учетом деформации шкалы частот; в частности, рассчитать значения частот характерных точек этого фильтра (граничных частот полос пропускания и непропускания) по (2.18). Такая процедура позволяет получить ЦФ с заданными параметрами: значениями полос пропускания или непропуска-

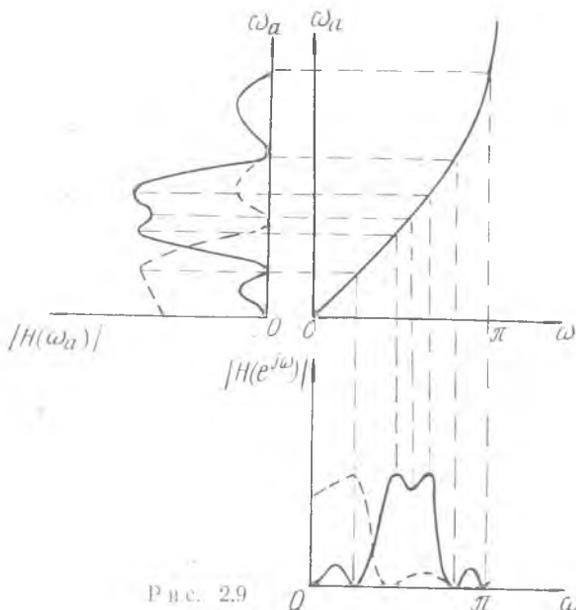


Рис. 2.9

ния и т. п. Однако сохранение формы АЧХ, вида ФЧХ АФ при этом не обеспечивается.

Метод билинейного преобразования, благодаря своей простоте, нашел широкое практическое применение, в частности: для расчета цифровых ФНЧ, полосовых фильтров Баттерворда, Чебышева. Краткий обзор методов расчета АФ Баттерворда и Чебышева и примеры их дискретизации методом билинейного преобразования приведены в приложении 2.

Кроме рассмотренных, известно большое число других методов расчета БИХ-фильтров. При необходимости сведения по этим методам можно найти в литературе [1, 2, 7].

2.4. СВОЙСТВА И РАСЧЕТ КИХ (НЕРЕКУРСИВНЫХ) ЦФ

2.4.1. ЛИНЕЙНОСТЬ ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1, 2] •

БИХ-фильтры позволяют получить «хорошие» АЧХ. Однако фазовые характеристики БИХ-фильтров нелинейны. Строго линейную фазовую характеристику можно получить только в КИХ-фильтрах. Покажем это свойство КИХ-фильтров и опреде-

Этим условием, при котором оно выполняется. Передаточная функция КИХ-фильтра была получена выше и представляет собой полином относительно z^{-1} степени $N - 1$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}. \quad (2.20)$$

Перепишав (2.20) как $h(z) = (1/z^{N-1}) \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{N-1-n}$,

нетрудно видеть, что в z -плоскости $H(z)$ имеет $N - 1$ полюсов в начале координат $z = 0$ и $N - 1$ произвольно расположенных нулей. Частотная характеристика КИХ-фильтра

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (2.21)$$

является тригонометрическим полиномом.

КИХ-фильтр полностью определяется N отсчетами импульсной характеристики $h(n)$ или N выборочными отсчетами частотной характеристики $H(e^{j\omega})$. Первое утверждение непосредственно следует из (2.20), (2.21), второе — из факта, что частотная выборка и импульсная характеристика однозначно связаны дискретным преобразованием Фурье.

КИХ-фильтр имеет линейную фазовую характеристику при условии симметрии импульсной характеристики:

$$h(n) = h(N - 1 - n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.22)$$

В самом деле, подставим (2.22) в (2.21) и для нечетного N получим

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}.$$

В последней сумме правой части произведем замену переменной суммирования $m = N - 1 - n$ и запишем

$$H(e^{j\omega}) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} [h(n) e^{j\omega n} + h(N-1-n) e^{-j\omega(N-1-n)}].$$

Воспользовавшись свойством (2.22), получим окончательно

$$H(e^{j\omega}) = \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) \cos\left(\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right] e^{-j\omega(N-1)/2}, \quad (2.23a)$$

где выражение в квадратных скобках есть вещественная функция.

Аналогичным образом для четного N можно получить

$$H(e^{j\omega}) = \left[2 \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) \cos \left(\omega \left(n + \frac{N-1}{2} \right) \right) \right] e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (2.23б)$$

Из (2.23,а и б) видно, что КИХ-фильтр при выполнении условия (2.21) обладает линейной фазовой характеристикой. Групповое запаздывание $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -(N-1)/2$, где $\varphi(\omega)$ — фазовая характеристика, при нечетном N составляет целое число интервалов дискретности, а при четном N — дробное число интервалов.

2.4.2. МЕТОД ВЗВЕШИВАНИЯ (С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВРЕМЕННЫХ «ОКОН») [1, 2]

Задачу проектирования КИХ-фильтра можно поставить следующим образом. Предположим, что задана некоторая «идеальная» требуемая частотная характеристика фильтра $H_T(e^{j\omega})$. С помощью преобразования Фурье можно получить импульсную характеристику такого фильтра:

$$h_T(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_T(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

которая в общем случае определена на интервале $-\infty < n < \infty$ и имеет бесконечную длительность. Такая импульсная характеристика не удовлетворяет условию физической реализуемости фильтра. Наиболее простой способ получения физически реализуемого КИХ-фильтра состоит в усечении $h_T(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} h_T(n) & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{при других значениях } n. \end{cases} \quad (2.24)$$

Более общий подход состоит в умножении $h_T(n)$ на некоторую весовую последовательность конечной длины $\omega(n)$, именуемую обычно «окном»:

$$h(n) = h_T(n) \omega(n). \quad (2.25)$$

Простейшим, соответствующим (2.24), является прямоугольное окно:

$$\omega(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Простое усечение импульсной характеристики, т. е. применение П-образной весовой последовательности (прямоугольного окна) приводит к возникновению известного в теории Фурье преобразования эффекта Гиббса [8]. Проявление этого эффекта состоит в возникновении колебательности частотной характеристики в точках резкого ее изменения. Рассмотрим суть этого явления.

Выше отмечалось, что спектру, являющемуся произведением спектров двух последовательностей, соответствует во временной области круговая свертка этих последовательностей. Учитывая дуальность преобразования Фурье, можно утверждать, что произведению двух последовательностей во временной области соответствует спектр, представляющий собой в частотной области комплексную свертку спектров сомножителей. Поэтому для частотной характеристики физически реализуемого КИХ-фильтра можно написать

$$H(e^{j\omega}) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H_T(e^{j\Omega}) W(e^{j(\omega-\Omega)}) d\Omega, \quad (2.27)$$

$$\text{где } W(e^{-j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} \quad (2.28)$$

— частотная характеристика (спектр) временного окна.

Частотная характеристика прямоугольного окна (2.26) имеет вид

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2} e^{-j\omega(N-1)/2}. \quad (2.29)$$

АЧХ этого окна изображена на рис. 2.10,а.

Рассмотрим качественно процесс свертки частотных характеристик $H_T(e^{j\omega})$ и $W(e^{j\omega})$. Предположим, что модуль $H_T(e^{j\omega})$ имеет строго П-образную форму (рис. 2.10,б), а окно — прямоугольное. Как видно из рис. 2.10,в, свертка, представляющая собой частотную характеристику реализуемого фильтра, оказывается «размытой» и имеет колебательность, что является следствием эффекта Гиббса.

На практике размытие и колебательность частотной характеристики КИХ-фильтра желательно устранить или по возможности уменьшить. Этого можно достигнуть, если выбрать такое окно, спектр которого обладает малой шириной и имеет минимум боковых лепестков. При этом $H(e^{j\omega})$ будет подобной $H_T(e^{j\omega})$.

Нетрудно убедиться, что прямоугольное окно практически не обеспечивает такого рода возможность. В самом деле, при

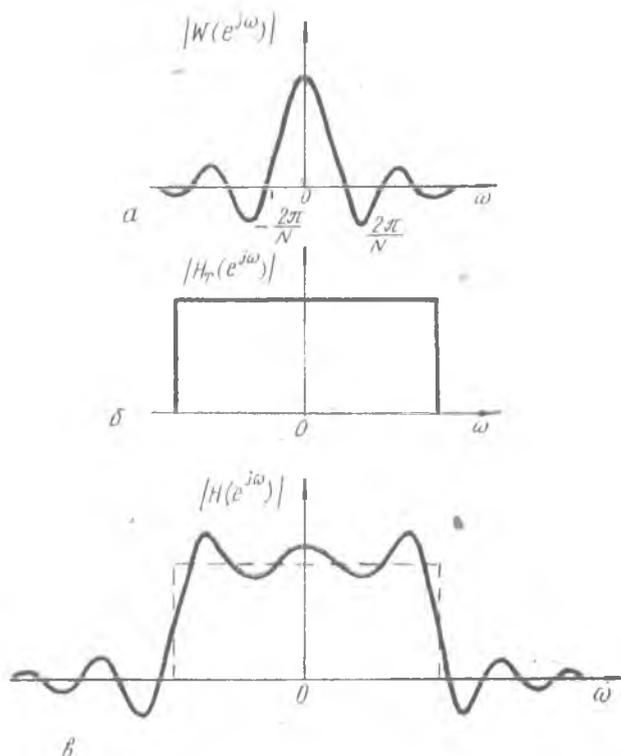


Рис. 2.10

увеличении длительности окна N ширина «главного лепестка» и боковых лепестков спектра окна уменьшается, а амплитуды лепестков увеличиваются таким образом, что площадь под каждым лепестком сохраняется постоянной. Поэтому при увеличении N колебания частотной характеристики $H(e^{j\omega})$ в области резкого изменения происходят более быстро, но не уменьшаются по амплитуде.

Кроме прямоугольного окна в настоящее время предложено большое число других окон, общей особенностью которых является плавное уменьшение $\omega(n)$ в начале и в конце. Спектры этих окон по сравнению со спектром прямоугольного окна имеют незначительно расширенный основной лепесток и существенно меньшие амплитуды боковых лепестков. Такие окна осуществляют менее резкое усечение последовательности $h_T(n)$. При этом за счет более широкой переходной полосы в точке резкого

перехода частотной характеристики $H(e^{j\omega})$ устраняется (существенно снижается) колебательность в этой характеристике.

Приведем выражения для некоторых распространенных окон:

а) окно Бартлета (треугольное окно)

$$\omega(n) = \begin{cases} 2n/(N-1) & \text{при } 0 \leq n \leq (N-1)/2; \\ 2 - 2n/(N-1) & \text{при } (N-1)/2 \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (2.30)$$

б) окно Хэннинга

$$\omega(n) = 1/2 [1 - \cos(2\pi n/(N-1))], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2.31)$$

в) окно Хэмминга

$$\omega(n) = 0,54 - 0,46 \cos[2\pi n/(N-1)], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2.32)$$

г) окно Блекмана

$$\omega(n) = 0,42 - 0,5 \{ \cos[2\pi n/(N-1)] + 0,08 \cos[4\pi n/(N-1)] \} \\ \text{при } 0 \leq n \leq N-1,$$

д) окно Кайзера

$$\omega(n) = \frac{I_0[\alpha \sqrt{(\frac{N-1}{2})^2 - (n - \frac{N-1}{2})^2}]}{I_0(\alpha \frac{N-1}{2})}, \quad (2.33)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, α — константа.

На рис. 2.11 в качестве примера приведены окно Кайзера $\omega(n)$ и его амплитудный спектр $|W(e^{j\omega})|$. Окно Кайзера является хорошим приближенным к окнам, оптимальным в смысле обладания наибольшей энергией в главном лепестке спектра при данной амплитуде пика бокового лепестка.

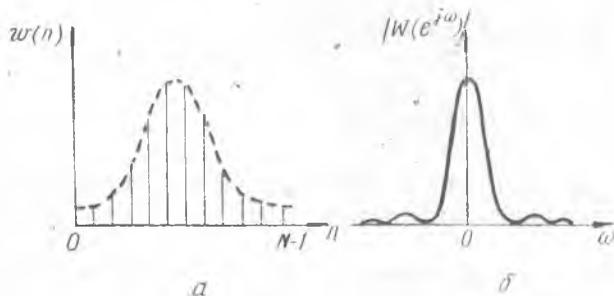


Рис. 2.11

Представляет интерес сравнение качества приведенных окон по критерию точности воспроизведения частотной характеристики физически реализуемого фильтра $H(e^{j\omega})$ характеристики идеального фильтра $H_T(e^{j\omega})$. Если принять за критерий оптимальности наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию или, иначе, минимум ошибки

$$\sigma^2 = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} [H_T(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})]^2 d\omega, \quad (2.34)$$

то наилучшим оказывается прямоугольное окно. Это является следствием того факта, что спектр прямоугольного окна имеет наиболее узкий главный лепесток. Однако для многих фильтров приемлемым критерием оптимальности является минимум максимальной абсолютной ошибки

$$\sigma = |H_T(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})| \rightarrow \min. \quad (2.35)$$

В смысле этого критерия специальные окна имеют лучшие показатели по сравнению с прямоугольным окном вследствие большой лепестковости спектра последнего. При расчете КИХ-фильтров методом взвешивания часто оказывается затруднительно заранее выбрать тип окна и его длину, при которых фильтр удовлетворяет заданным требованиям.

В этом состоит ограничение метода. В таких случаях с помощью ЭВМ методом проб и ошибок ищется приемлемый вариант решения задачи.

2.4.3. РАСЧЕТ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ [1, 2]

Частотная выборка $H(k) = H(z) | z = e^{-j(2\pi/N)k}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ связана с импульсной характеристикой парой ДПФ:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad (2.36)$$

$$h(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nk}. \quad (2.37)$$

Как уже отмечалось, КИХ-фильтр полностью определяется N отсчетами либо импульсной характеристики, либо частотной выборки.

Передаточную функцию по частотной выборке можно получить, если подставить (2.37) в (3.20):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j 2\pi N n k} \right] z^{-n}.$$

Переменив порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} H(z) &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k} z^{-1)^n} = \\ &= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j(2\pi/N)k} z^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Положим в (2.38) $z = e^{j\omega}$, представим частотную характеристику в виде

$$H(e^{j\omega}) = (e^{-j\omega(N-1)/2} / N) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) \sin(\omega N/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j\omega k N}. \quad (2.39 a)$$

После несложных преобразований можно также записать

$$H(e^{j\omega}) = (e^{-j\omega(N-1)/2} / N) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) \sin[N(\omega - 2\pi k/N)/2]}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{j\omega k (1 - \frac{1}{N})}. \quad (2.39 б)$$

Вышеприведенные выражения позволяют построить метод расчета КИХ-фильтров, общая схема которого состоит в следующем. Из требуемой частотной характеристики ЦФ на интервале $0 \leq k \leq N-1$ берется частотная выборка. Пример такой выборки для ФНЧ показан на рис. 2.12,а. Затем по (2.39) рас-

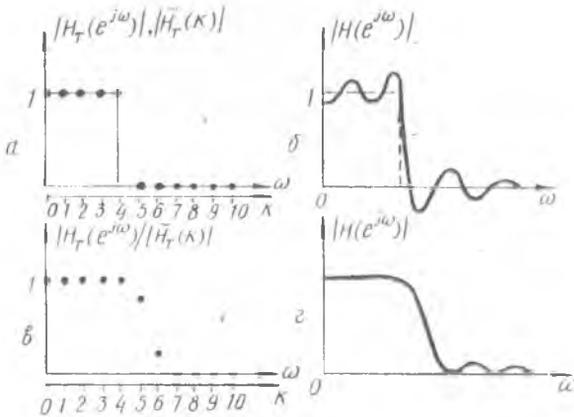


Рис. 2.12

считывается частотная характеристика КИХ-фильтра (рис. 2.12,б), а по (2.37) — импульсная характеристика. Однако фильтры, рассчитанные по такому простейшему методу, обладают неудовлетворительными для большинства приложений характеристиками. Это связано с тем, что метод частотной выборки обеспечивает совпадение частотной характеристики рассчитанного физически реализуемого фильтра и идеальной (требуемой) частотной характеристики только на конечном числе значений частоты $\omega_k = (2\pi/N)k$, $k = 0, \dots, N-1$. На других частотах эти характеристики могут существенно различаться. В рассмотренном примере частотная характеристика фильтра имеет большие лепестки и малое затухание в полосе непропускания.

Выше показано, что для уменьшения уровня лепестков частотной характеристики в ней необходимо расширить переходную полосу. В 2.4.2 это выполнялось посредством использования окон. При расчете ЦФ по частотной выборке эта задача решается путем выделения в частотной характеристике переходной полосы и разбиения элементов выборки на 3 группы. Элементы выборки, принадлежащие полосам пропускания и непропускания, берутся равными отсчетам требуемой частотной характеристики $H_T(e^{j\omega})$. В переходной полосе элементы выборки считаются свободными (незаданными). В процессе синтеза фильтра эти отсчеты подбираются таким образом, чтобы характеристика фильтра оптимизировалась. Для этого применяются итерационные алгоритмы, хорошо реализующиеся на ЭВМ (симплекс-метод) [9]. Пример такой оптимизации приведен на рис. 2.12,в,г, в котором на переходную полосу выделено два элемента частотной выборки.

Метод частотной выборки наиболее эффективен при расчете узкополосных фильтров, в которых число ненулевых отсчетов, попадающих в полосу пропускания, невелико. Кроме рассмотренных методов известны другие методы расчета КИХ-фильтров. В частности, весьма эффективен метод, в котором используется чебышевская аппроксимация частотных характеристик [1, 2].

3. Вычисление дискретного преобразования Фурье. Спектральный анализ

3.1. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ [1, 2, 3]

Дискретное преобразование Фурье находит чрезвычайно широкое практическое применение. Распространение БПФ стало возможным благодаря наличию эффективных алгоритмов его вычисления. Эти алгоритмы известны как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Напомним, что ДПФ и ОДПФ определяются соответственно выражениями:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1; \quad (3.1)$$

$$x(n) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

где $W_N = e^{-i2\pi/N}$.

В (3.1) и 3.2) предполагается, что $x(n), X(k)$ являются комплексными переменными.

Прямое вычисление $X(k)$ по (3.1) для каждого k требует N комплексных умножений и $N-1$ комплексных сложений или $4N$ умножений действительных чисел и $4N-2$ сложений. При необходимости вычисления $X(k)$ во всех N точках число комплексных умножений составит N^2 , а сложений $N(N-1)$. При большом N (например, $N = 1024$) прямое вычисление БПФ оказывается чрезвычайно неэкономным. В алгоритмах БПФ число комплексных умножений, как показано ниже, составляет лишь $(N/2) \log_2 N$. Предпосылками к улучшению эффективности вычисления ДПФ являются свойства периодичности и симметрии комплексной экспоненты W_N^{nk} ;

$$W_N^{nk} = W_N^{n(k+N)} = W_N^{(n+N)k}, \quad W_N^{k(N-n)} = (W_N^{nk})^*$$

где $*$ — знак комплексно-сопряженной величины.

Алгоритмы БПФ предполагают вычисление ДПФ для всех N значений переменной k . Основной принцип этих алгоритмов состоит в разложении операции ДПФ последовательности длины N на операции ДПФ меньшей длины. В последующем суммировании частных преобразований используется свойство периодичности ДПФ.

Существует два сопоставимых по эффективности основных класса алгоритмов БПФ: прореживание по времени и прореживание по частоте. В первом классе алгоритмов уменьшение размерности БПФ достигается путем разложения по некоторому правилу последовательности $x(n)$ на уменьшающиеся по длине подпоследовательности. Во втором классе подобная операция осуществляется над последовательностью $X(k)$.

Алгоритмы БПФ разработаны в предположении, что N — составное число. Они наиболее эффективны в случае, когда длина N соответствует целой степени числа 2, именуемого основанием, т. е. $N=2^L$ при L -целом. Ниже мы ограничимся изучением только таких алгоритмов.

3.2. АЛГОРИТМ БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ПО ОСНОВАНИЮ 2 [1, 2, 3]

Процедуру представления ДПФ последовательности длины N через ДПФ последовательностей меньшей длины часто называют понижением порядка ДПФ. Рассмотрим способ понижения порядка путем прореживания по времени исходной последовательности и убедимся в его целесообразности.

Разобьем исходную последовательность $x(n)$ на две подпоследовательности:

$$\left. \begin{aligned} a(n) &= x(2n), \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1, \\ b(n) &= x(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Последовательности $a(n)$, $b(n)$ имеют длину $N/2$ и содержат соответственно четные и нечетные элементы $x(n)$. Воспользуемся разбиением (3.3) и запишем (3.1) в виде

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n-\text{четные}} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n-\text{нечетные}} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \\ &+ \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учтем, что $W_N^2 = e^{-j2(2\pi/N)} = e^{-j2\pi(N/2)} = W_{N/2}$ и представим (3.4) как

$$X(k) = A(k) + W_N^k B(k), \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} a(n) W_{N/2}^{nk} \\ B(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} b(n) W_{N/2}^{nk} \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, N/2 - 1, \quad (3.6)$$

где $A(k), B(k)$ — $(N/2)$ точечные ДПФ последовательностей $a(n)$ и $b(n)$.

В (3.5), (3.6) $A(k), B(k)$ определены на интервале $0 \leq k \leq N/2 - 1$, в то время как аргумент $X(k)$ может принимать значения $0 \leq k \leq N - 1$. Поэтому необходимо доопределить (3.5). Для этого учтем, что $A(k), B(k)$ периодические последовательности и имеют период $N/2$.

Запишем

$$\begin{aligned} X(k + N/2) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} a(n) W_{N/2}^{n(k+N/2)} + W_N^{k+N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} b(n) W_{N/2}^{n(k+N/2)} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} a(n) W_{N/2}^{nk} \underbrace{W_{N/2}^{nN/2}}_{=1} + W_N^k \underbrace{W_N^{N/2}}_{=-1} \sum_{n=0}^{N/2-1} b(n) W_{N/2}^{nk} \underbrace{W_{N/2}^{nN/2}}_{=1} = \\ &= A(k) - W_N^k B(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Объединим (3.5) и (3.7) и получим

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= A(k) + W_N^k B(k), \\ X(k + N/2) &= A(k) - W_N^k B(k) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \quad (3.8)$$

Таким образом, ДПФ размерности N представляется комбинацией двух ДПФ размерности $N/2$. Такое комбинирование составляет основу алгоритма БПФ. Поэтому операция (3.8) называется базовой операцией алгоритма.

В качестве оценки сложности алгоритма примем число комплексных умножений, необходимых для его выполнения. Если частные $A(k), B(k)$ вычисляются по (3.6), а $X(k)$ — по (3.8), то число комплексных умножений составит $2 \cdot (N/2)^2 + N = N^2/2 + N$ операций. Как видно, при большом N ($N^2/2 \gg N$) число комплексных умножений в результате одного понижения порядка ДПФ по сравнению с прямым вычислением по (3.1) сокращается примерно в 2 раза. Очевидно, что вычисление $A(k), B(k)$ по (3.6) нецелесообразно, если возможно дальнейшее понижение порядка ДПФ, так как при этом произойдет такое же снижение числа операций умножения.

В следующей ступени понижения порядка ДПФ разбиваются уже последовательности $a(n), b(n)$, причем каждая подобно

(3.3) на четную и нечетную подпоследовательности. В частности, для $a(n)$ можно написать

$$\left. \begin{aligned} c(n) &= a(2n), \quad n = 0, 1, \dots, N/4 - 1, \\ d(n) &= a(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots, N/4 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

При этом, аналогично (3.8), можно составить базовую операцию

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= C(k) + W_{N/2}^k D(k) = C(k) + W_N^{2k} D(k), \\ A(k + N/4) &= C(k) - W_{N/2}^k D(k) = C(k) - W_N^{2k} D(k), \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$k = 0, 1, \dots, N/4 - 1,$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } C(k) &= \sum_{n=0}^{N/4-1} c(n) W_{N/4}^{nk} \\ D(k) &= \sum_{n=0}^{N/4-1} d(n) W_{N/4}^{nk} \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \quad (3.11)$$

С помощью (3.10) $(N/2)$ -точечное преобразование представляется комбинацией двух $(N/4)$ -точечных ДПФ. В свою очередь, последовательное применение (3.6) и (3.10) позволяет получить ДПФ последовательности длины N как комбинацию четырех $(N/4)$ -точечных ДПФ.

Разбиения длины последовательности подобно (3.3) и (3.9) повторяются $L = \log_2 N$ раз до тех пор, пока не потребуется вычисления двухточечного преобразования.

Теперь можно представить общую структуру алгоритма БПФ (рис. 3.1). Этот алгоритм состоит из L этапов. На первом этапе вычисляются двухточечные ДПФ. Количество этих операций составляет $N/2$. На последующих этапах путем комбинирования ДПФ низкого порядка образуются ДПФ более высокого порядка: из двухточечных \rightarrow четырехточечные, ..., из $(N/2)$ -точечных \rightarrow N -точечное.

В алгоритме БПФ вся совокупность элементов входной последовательности $x(n)$ включается в обработку. Поэтому эту последовательность, которая должна быть накоплена до начала вычислений, можно рассматривать как входной массив данных. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени имеет особенность, которая состоит в том, что входная последовательность задается не в ее естественном порядке, а в упорядоченном виде. Эта упорядоченность обусловлена рассмотренным выше разбиением входной последовательности на подпоследовательности с четными и нечетными номерами.

Порядок, в котором задаются номера упорядоченной последовательности во входном массиве, могут быть определены с по-

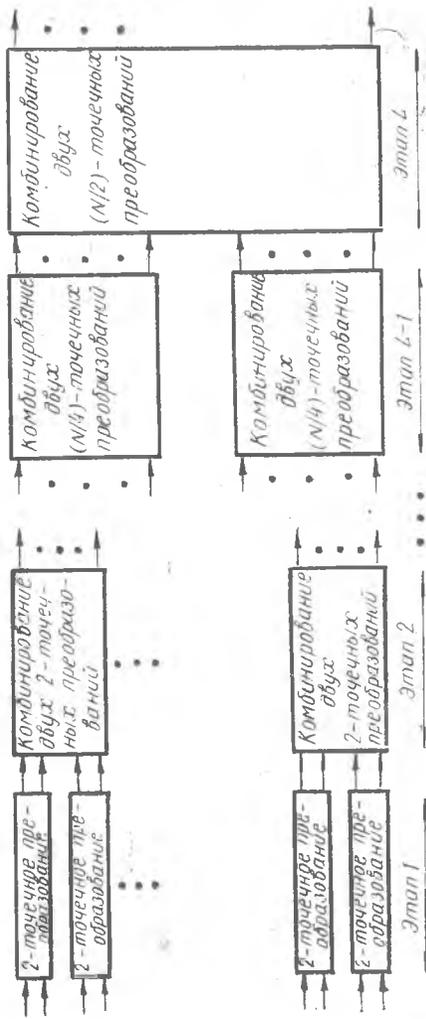


Рис. 3.1

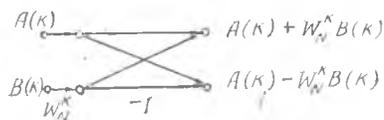
мощью процедуры двоичной инверсии. Такая процедура состоит из преобразования десятичных номеров исходной последовательности в двоичные числа, их инверсии и обратного преобразования двоично-инвертированных чисел в десятичные. Пример метода двоичной инверсии для восьмиточечного ДПФ приведен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

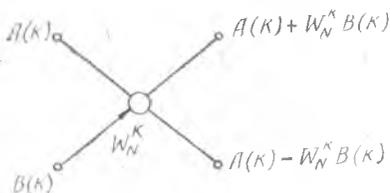
Исходный номер	Двоичный код	Инверсия	Инвертированный номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Элементы $X(k)$ в выходном массиве данных при этом имеют естественный порядок следования.

Удобное графическое представление алгоритма БПФ дает его направленный граф. Направленный граф базовой операции (3.8) изображен на рис. 3.2, а.



а



б

Рис. 3.2

Ветвь (стрелка) графа символизирует перенос числа от узла к узлу. Несколько ветвей, исходящих из одного узла, передают равные числа. Поступление в один узел нескольких ветвей означает суммирование в узле поступающих по ветвям чисел. Надпись рядом с ветвью символизирует множитель, на который умножается передаваемое по ветви число. Надпись рядом с узлом характеризует имеющуюся в этом узле величину.

Кроме рассмотренной иногда применяют другую, более компактную, форму направленных графов (рис. 3.2.6) [1]. Здесь центральный незачерненный кружок означает операции суммирования и вычитания, стрелка — операцию умножения. Ниже мы отдадим предпочтение первой форме, полагая ее более наглядной.

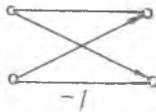
Вернемся к графу базовой операции. Этот граф, благодаря своему виду, как, впрочем, и сама базовая операция, носит название «бабочки». Базовая операция требует выполнения одного комплексного умножения и двух комплексных сложений. Заметим, что комплексный множитель W_N^k называется поворачивающим множителем. Умножение на «-1» не учитываем, так как эта операция фактически не является умножением.

Уясним суть второй элементарной операции, используемой в алгоритме БПФ, — двухточечного преобразования. Для этого рассмотрим ДПФ $F(k)$, $k=0,1$ последовательности $f(n)$, $n=0,1$. В соответствии с (3.1) напомним $F(k) = \sum_{n=0}^1 f(n) W_2^{nk}$ или в развернутом виде

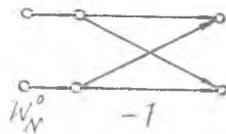
$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f(1), \\ F(1) &= f(0) + W_2^1 f(1) = f(0) - f(1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Как видно из (3.12), двухточечное преобразование выполняется посредством двух комплексных сложений и не требует операций умножения. Граф двухточечного ДПФ приведен на рис. 3.3,а.

Формально двухточечное преобразование можно получить как комбинацию двух «одноточечных преобразований». «Бабочка», соответствующая такой операции, приведена на рис. 3.3,б.



а



б

Рис. 3.3

Учитывая, что здесь поворачивающий множитель $W_N^0 = 1$, можно заключить, что графы (рис. 3.3,а и б) идентичны. Отсюда следует, что весь алгоритм БПФ состоит из однотипных операций — бабочек.

В качестве примера рассмотрим восьмиточечное БПФ. Направленный граф этого преобразования представлен на рис. 3.4.

Алгоритм выполняется в $L = \log_2 8 = 3$ этапа. На первом этапе вычисляются четыре двухточечных преобразования, на втором этапе — двухточечные ДПФ комбинируются в четырехточеч-

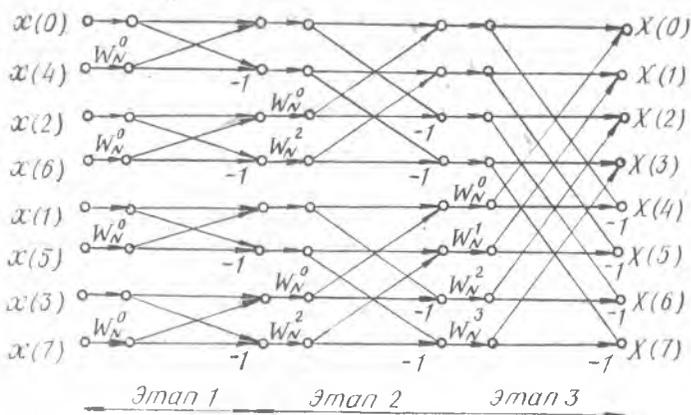


Рис. 3.4

ные, на третьем этапе образуется восьмиточечное преобразование как комбинация двух четырехточечных преобразований. На рис. 3.5 показан процесс упорядочения входной последовательности путем разбиения на подпоследовательности с четными и нечетными номерами.

Рассмотрим некоторые свойства и особенности алгоритма БПФ.

Число арифметических операций. Как отмечалось, алгоритм БПФ выполняется в $\log_2 N$ этапов. Каждый этап содержит $N/2$ бабочек. В свою очередь, каждая бабочка требует выполнения одного комплексного умножения и двух сложений. Итого, для выполнения алгоритма БПФ требуется

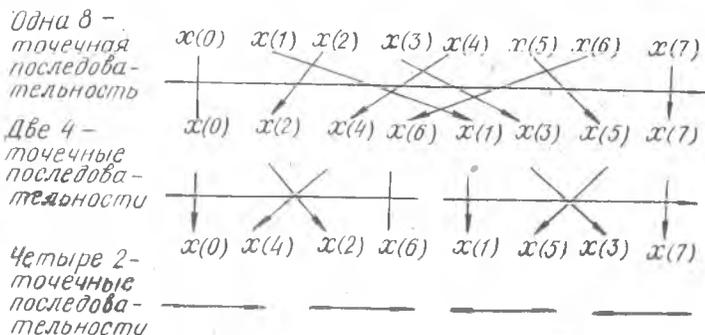


Рис. 3.5

приблизительно $(N/2)\log_2 N$ комплексных умножений и $N \log_2 N$ комплексных сложений. Оговорку «приблизительно» нужно понимать в том смысле, что на первом этапе бабочки не требуют выполнения умножений. Кроме того, при значениях поворачивающих множителей $W_N^0 = 1$, $W_N^{N/2} = -1$ также отсутствует необходимость в операциях умножения.

При больших N алгоритм БПФ существенно экономнее прямого метода вычисления ДПФ. Так, при $N = 1024$ объем вычислений сокращается примерно на два порядка. Это позволяет выполнять обработку сигналов, включающую вычисление ДПФ, в случаях, в которых до появления БПФ она считалась практически неосуществимой.

Экономия объема памяти ЗУ ЭВМ. Алгоритм БПФ позволяет выполнять вычисления с замещением. Суть замещения состоит в следующем. Из направленного графа бабочки видно, что для вычисления двух элементов выходных данных необходимы только два элемента данных входного массива. Кроме того, эти элементы в последующих вычислениях не используются. Поэтому вновь вычисленные данные могут заноситься в ячейки памяти ЭВМ, в которых хранились исходные данные. При этом экономится требуемая память ЭВМ.

Необходимость упорядочения последовательностей. Особенность описанного алгоритма состоит в том, что входная последовательность должна иметь двоично-инверсный порядок следования, в то время как выходная последовательность имеет естественную нумерацию элементов. Эта особенность свойственна всем алгоритмам БПФ с замещением.

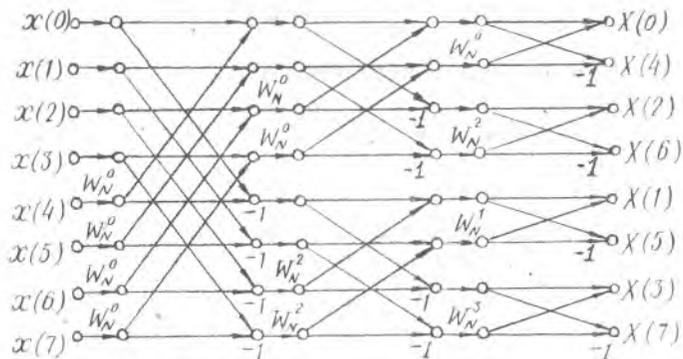


Рис. 3.6

Простой перестановкой строк направленного графа без изменения связи между ними (см. рис. 3.4) можно получить на входе естественный порядок следования элементов. Однако на выходе при этом установится двоично-инверсный порядок. Граф такого рода восьмиточечного алгоритма с прореживанием по времени представлен на рис. 3.6.

3.3. БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ ПО ОСНОВАНИЮ 2 [1, 2, 3]

Алгоритмы БПФ с прореживанием по времени, как показано выше, основаны на разложении ДПФ путем формирования уменьшающихся по длительности подпоследовательностей входной последовательности $x(n)$. В алгоритме, известном как БПФ с прореживанием по частоте, производится подобное разбиение выходной последовательности на уменьшающиеся подпоследовательности. В этом случае входная последовательность берется в естественном порядке, а порядок выходной последовательности получается в двоично-инвертированном виде. Рассмотрим коротко суть этого алгоритма.

Разобьем входную последовательность на две половины и запишем

$$x_1(n) = x(n), \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1,$$

$$x_2(n) = x(n + N/2), \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

При этом N -точечное ДПФ можно представить в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Заменим во второй сумме переменную суммирования и получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_N^{nk} + W_N^{(N/2)k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_N^{nk},$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.13)$$

Суммы в правой части (3.13) содержат по $(N/2)$ точек каждая. Однако эти суммы не являются $(N/2)$ -точечными ДПФ, так как весовой множитель в них имеет значение W_N^{nk} , а не $W_{N/2}^{nk}$. Учтем, что $W_N^{N/2} = e^{-j\pi} = -1$ и перепишем (3.13) в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + (-1)^k x_2(n)] W_N^{nk},$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.14)$$

Разобьем последовательность элементов ДПФ $X(k)$ в (3.14) на две части с четными и нечетными номерами:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_N^{2nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_{N/2}^{nk}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) - x_2(n)] W_N^{n(2k+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \{ [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n \} W_{N/2}^{nk}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.15) и (3.16) следует, что последовательности четных и нечетных элементов ДПФ можно получить как $(N/2)$ -точечные преобразования последовательностей $p(n)$, $q(n)$, равных

$$\begin{aligned} p(n) &= x_1(n) + x_2(n), \\ q(n) &= [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n, \\ n &= 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обе эти последовательности могут быть получены из начальной последовательности с помощью одной операции комплексного умножения и двух комплексных сложений.

Направленный граф базовой операции — бабочки при прореживании по частоте представлен на рис. 3.7. Основное отличие этой бабочки от бабочки ДПФ с прореживанием по времени состоит в том, что здесь сначала выполняются операции сложения — вычитания и затем умножения, а не наоборот.

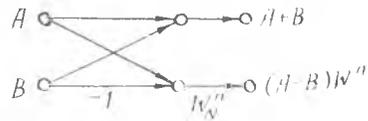


Рис. 3.7

Выражения (3.15), (3.16) позволяют свести вычисление N -точечного ДПФ к вычислению двух $(N/2)$ -точечных ДПФ. В свою очередь $(N/2)$ -точечные ДПФ (т.е. $X(2k)$, $X(2k+1)$) можно представить в виде комбинации $(N/4)$ -точечных БПФ. Этот процесс продолжается до тех пор, пока размерность подлежащего вычислению ДПФ достигнет величины 2. На последнем этапе алгоритма вычисляется двухточечное ДПФ, которое, как отмечалось выше, требует выполнения двух операций комплексного сложения. На рис. 3.8 представлен направленный граф такого БПФ для случая $N=8$.

Между алгоритмами БПФ с прореживанием по времени и по частоте существует глубокая связь. В общем случае можно ут-

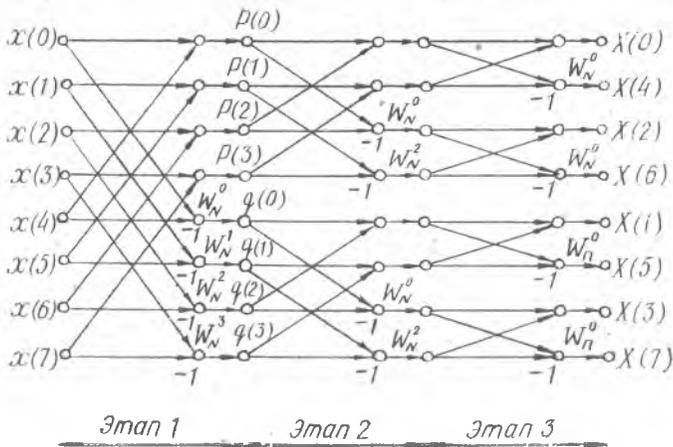


Рис. 3.8

верждать, что для каждого алгоритма с прореживанием по времени существует такой алгоритм БПФ с прореживанием по частоте, который соответствует взаимной замене входа и выхода и обращению направлений всех стрелок в направленном графе. Непосредственным сравнением графов, изображенных на рис. 3.4 и 3.8, можно убедиться в этом.

3.4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ БПФ [1, 4]

Выше отмечалось, что ДПФ можно рассматривать как алгоритм вычисления интегрального преобразования Фурье с помощью ЭВМ. Однако применение ДПФ имеет свои особенности.

Интегральное преобразование Фурье ограниченной по длительности реализации аналогового процесса $x_a(t)$ ($0 \leq t \leq T_c$) имеет вид

$$X_a(j\omega) = \int_0^{T_c} x_a(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.18)$$

Предположим, что частота ω , на которой определяется спектр $X_a(j\omega)$, и время T_c согласованы: $\omega_c = k \cdot 2\pi/T_c$, где k — произвольное целое число. Тогда (3.18) можно переписать как

$$X_a(j\omega_c) = \int_0^{T_c} x_a(t) e^{j\omega_c(T_c-t)} dt. \quad (3.19)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (3.19) есть свертка двух функций $x_a(t)$ и $e^{j\omega_c t}$. Следовательно, $X_a(j\omega_c)$ может быть получено путем фильтрации процесса $x_a(t)$ с помощью фильтра с импульсной характеристикой $h_a(t) = e^{j\omega_c t} u(t)$. Физически такую импульсную характеристику имеет полосовой фильтр без потерь с центральной частотой ω_c . При поступлении на его вход δ -импульса в нем возбуждаются незатухающие колебания (так как потери отсутствуют) на частоте ω_c . Этот отклик фильтра и есть его импульсная характеристика. Подобным образом дискретное преобразование Фурье

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$

можно получить с помощью КИХ-цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h_k(n) = e^{j(2\pi/N)nk}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$). Алгоритм БПФ позволяет вычислить сразу N спектральных составляющих. Поэтому этот алгоритм эквивалентен гребенке из N фильтров, «настроенных» на частоты $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$).

Передаточная функция k -го фильтра гребенки имеет вид

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)nk} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1} e^{j(2\pi/N)k}}. \quad (3.20)$$

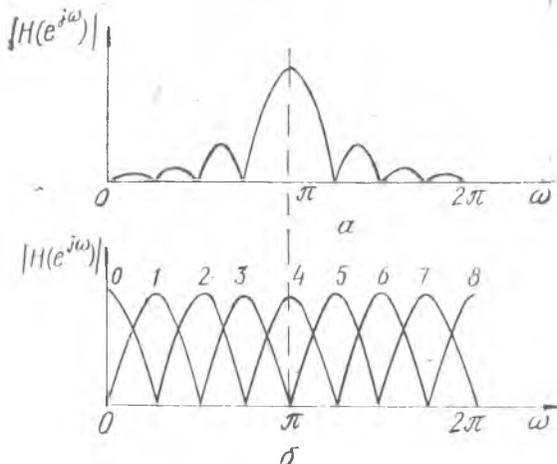


Рис. 3.9

Полагая в (3.20) $z = e^{j\omega}$, для АЧХ эквивалентного фильтра получим

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)}. \quad (3.21)$$

На рис. 3.9,а представлен график АЧХ одного фильтра, а на рис. 3.9,б — графики АЧХ всей гребенки, эквивалентной БПФ для $N = 8$ (на рис. 3.9,б изображены только главные лепестки функций (3.21); боковые лепестки опущены). Как видно, БПФ эквивалентно набору фильтров с относительно невысоким разрешением по частоте и с большими боковыми лепестками характеристик.

Уменьшение лепестковости характеристик и подавление сигнала вне полосы пропускания эквивалентного фильтра можно обеспечить путем почленного умножения заданной последовательности сигнала $x(n)$ на весовую последовательность $w(n)$ (окно). Вопросы применения окон при цифровой фильтрации обсуждались в п. 2.4.2. Учитывая эквивалентность БПФ и цифровой фильтрации, отметим, что сказанное в 2.4.2 в отношении применения окон в полной мере относится также и к БПФ.

4. Эффекты конечной разрядности регистров в цифровых фильтрах

4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭФФЕКТАХ КОНЕЧНОЙ РАЗЯДНОСТИ

Выше при анализе алгоритмов и характеристик устройств цифровой обработки предполагалось, что постоянные (коэффициенты ЦФ) и переменные (отсчеты сигналов) являются непрерывными по амплитуде, т. е. могут принимать любые значения с неограниченной точностью. Реально точность цифровых процессоров ограничена, так как используемые в них регистры имеют конечное число разрядов. Все элементы процессора оперируют двоичными кодами (словами) с конечным числом бит. Эффекты конечной разрядности могут существенно влиять на точность и характеристики цифровых систем, а в некоторых случаях, — даже на их нормальное функционирование. Поэтому необходим обоснованный выбор разрядности регистров.

Эффекты конечной разрядности по-разному проявляются в зависимости от способа представления чисел в процессоре: с фиксированной или плавающей точкой. Ниже мы ограничимся представлением чисел с фиксированной точкой.

В процессорах ЦФ, использующих арифметику с фиксированной точкой, влияние конечной разрядности регистров проявляется в двух основных категориях: эффектах квантования и переполнения.

В свою очередь эффекты квантования подразделяются на: а) квантование входной последовательности; б) квантование коэффициентов фильтров; в) округление или усечение результатов арифметических операций (произведений).

Во многих случаях квантование и округление можно рассматривать как источник аддитивной помехи (шума). Для анализа ошибок, обусловленных такими шумами, необходимы некоторые сведения из теории дискретных случайных процессов, а

именно: способ определения дисперсии помехи на выходе цифровой системы при воздействии на ее входе стационарного дискретного шума.

Пусть задана ограниченная по длительности случайная последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ с нулевым средним. Комплексный спектр $X(e^{j\omega})$ некоторой реализации этого процесса можно определить по (1.31) способом, приведенным в разделе 1. Энергетический спектр реализации $\Phi_p(\omega)$ получим как произведение спектра $X(e^{j\omega})$ на комплексно-сопряженный спектр с последующим делением на длину последовательности:

$$\Phi_p(\omega) = (1/N) X(e^{j\omega}) X^*(e^{-j\omega}). \quad (4.1)$$

Имея в виду соотношения $z = e^{j\omega}$ для произвольной точки z -плоскости можно написать

$$\Phi_p(z) = (1/N) X(z) X^*(z^{-1}). \quad (4.1,а)$$

Для того, чтобы перейти от спектра некоторой реализации к спектру случайного дискретного процесса, необходимо в (4.1), (4.1,а) выполнить усреднение по множеству реализаций

$$\Phi(\omega) = E \{ \Phi_p(\omega) \},$$

$$\Phi(z) = E \{ \Phi_p(z) \},$$

где $E\{\cdot\}$ —символ усреднения. Кроме того, если последовательность $x(n)$ бесконечна, то необходимо также выполнить предельный переход при $N \rightarrow \infty$.

Энергетический спектр на выходе дискретной системы можно получить обычным образом, умножив спектр на входе на квадрат модуля частотной характеристики системы:

$$\Phi_{\text{вых}}(\omega) = \Phi_{\text{вх}}(\omega) |H(e^{j\omega})|^2. \quad (4.2)$$

Применительно к (4.1,а) запишем

$$\Phi_{\text{вых}}(z) = \Phi_{\text{вх}}(z) H(z) H^*(z^{-1}). \quad (4.2а)$$

Для получения дисперсии помехи на выходе $\sigma_{\text{вых}}^2$ проинтегрируем ее энергетический спектр:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{\text{вх}}(\omega) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (4.3)$$

В z -плоскости интегрирование выполняется по окружности единичного радиуса:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (1/2\pi j) \oint_{|z|=1} \Phi_{\text{вх}}(z) H(z) H^*(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (4.4)$$

Особый интерес представляет случай, когда на входе воздействует шум с равномерной спектральной плотностью — белый шум, для которого $\Phi_{\text{вх}}(\omega) = \Phi_0 = \text{const}$. В этом случае

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (\Phi_0/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (\Phi_0/2\pi j) \oint_{|z|=1} H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (4.6)$$

В разделе 1 показано, что спектральные функции дискретных процессов полностью определены на интервале частот $-\pi \leq \omega \leq \pi$ или, что то же самое, на интервале $1/2 \leq f \leq 1/2$. Поэтому дискретный белый шум имеет конечную дисперсию (мощность). При полосе частот, равной 1, дисперсия белого шума $\sigma_0^2 = \Phi_0$ (рис. 4.1). Учитывая это, перепишем (4.5), (4.6) как

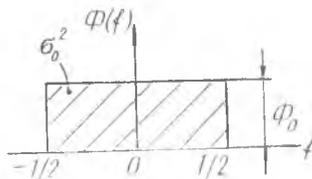


Рис. 4.1

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{j2\pi f})|^2 df = (\sigma_0^2/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (\sigma_0^2/2\pi j) \oint_{|z|=1} H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (4.8)$$

4.2. ШУМ КВАНТОВАНИЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Квантователь по уровню, функции которого выполняет входной аналого-цифровой преобразователь АЦП, преобразует входной сигнал в одно из 2^{b-1} допустимых значений, где b — порядность двоичного кода, в котором представляются выборочные значения сигнала. Здесь величина b учитывает знаковый бит двоичного числа. Такой квантователь имеет нелинейную ступенчатую характеристику вход — выход (рис. 4.2). Если предположить, что динамический диапазон входного сигнала заключен в пределах $(-1, 1)$, то величина шага квантования составит $\Delta = 2^{-b+1}$.

Существуют различные критерии, по которым устанавливается соответствие между аналоговым и квантованным значениями сигнала. В часто используемом способе округления квантованному значению сигнала присваивается ближайший допустимый

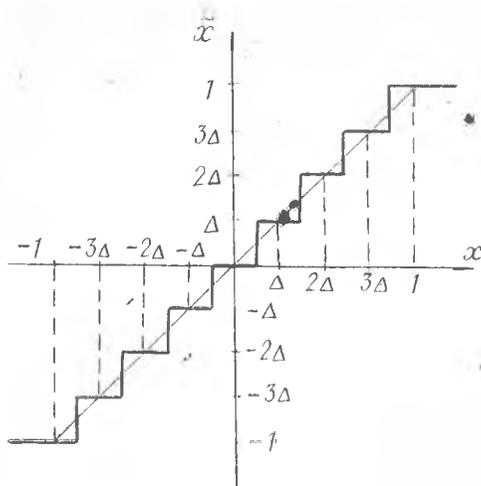


Рис. 4.2

уровень $k\Delta$, если величина аналогового сигнала находится в интервале $(k - 1/2)\Delta < x < (k + 1/2)\Delta$.

Квантованный (цифровой) сигнал $x_c(n)$ можно написать в виде суммы исходного значения сигнала и некоторой случайной ошибки квантования: $x_c(n) = x(n) + e_{кв}(n)$. Очевидно, что при округлении ошибка не превышает половины шага квантования $|e_{кв, \max}| \leq \Delta/2$. Ошибка имеет равномерное распределение плотности вероятности на интервале $\pm \Delta/2$. Среднее ошибки $\langle e \rangle = 0$, а дисперсия составляет $\sigma_{кв}^2 = \langle e_{кв}^2 \rangle = \Delta^2/12 = 2^{-2b}/3$. Отсчеты последовательности $e_{кв}(n)$ некоррелированы между собой и с входной последовательностью $x(n)$. Поэтому такую помеху можно рассматривать как дискретный белый шум. Дисперсия шума квантования на выходе фильтра согласно (4.5) составляет

$$\sigma_{кв \text{ вых}}^2 = (2/3 \cdot 2^{-2b}) (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (4.9)$$

Дисперсия $\sigma_{кв \text{ вых}}^2$ может служить в качестве количественной меры ошибки, обусловленной квантованием входного сигнала.

На практике величина разрядности b выбирается в пределах $8 \div 20$ бит, наиболее часто — 12 бит.

4.3. ОШИБКИ В ЦФ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ВСЛЕДСТВИЕ КВАНТОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ [1]

Квантование коэффициентов приводит к ошибкам частотных характеристик ЦФ.

Рассмотрим такого рода ошибки применительно к БИХ-фильтру.

Передаточная функция реального БИХ-фильтра

$$H_p(z) = \left(\sum_{i=0}^M b_{ni} z^{-i} \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^M a_{ni} z^{-i} \right) \quad (4.10)$$

отличается от передаточной функции идеального фильтра

$$H(z) = \left(\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i} \right) \quad (4.11)$$

значениями коэффициентов a_{ni} , b_{ni} . Квантованные коэффициенты реального ЦФ можно представить в виде

$$a_{ni} = a_i + \alpha_i,$$

$$b_{ni} = b_i + \beta_i,$$

где α_i , β_i — погрешности квантования.

Эти погрешности суть случайные независимые величины с равномерной плотностью распределения вероятности. В случае округления при квантовании коэффициентов погрешности имеют нулевое среднее. Дисперсия зависит от числа бит в двоичном коде коэффициентов и может быть определена подобно дисперсии квантования сигнала (см. 4.2).

Среднеквадратическую ошибку частотной характеристики нетрудно получить, используя (4.10), (4.11):

$$\sigma_{\text{коэф}}^2 = E \left[(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |H_p(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \right], \quad (4.12)$$

где $E\{\cdot\}$ — символ усреднения по множеству.

4.4. ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЯ В ЦФ

Анализ ошибок округления проведем также применительно к БИХ ЦФ. Такого рода ошибки в ЦФ возникают при округлении произведений чисел. Рассмотрим суть этих ошибок.

Для этого обратимся к алгоритму (2.1) БИХ-фильтра

$$y_{ni}(n) = \sum_{i=0}^M b_{ni} x_{ni}(n-i) - \sum_{i=1}^L a_{ni} y_{ni}(n-i). \quad (4.13)$$

В (4.13) предполагается, что все частные произведения $b_{ni} x_{ni}(n-i)$, $a_{ni} y_{ni}(n-i)$ вычисляются абсолютно точно. Однако реально реализовать такой алгоритм не представляется возможным вследствие увеличения разрядности произведения по сравнению с разрядностью сомножителей.

Предположим, что отсчеты сигнала $x_{\Pi}(n)$ находятся в интервале $(-1, 1)$ и представлены двоичными кодами длиной b_c бит. Разрядность выходной величины $y_{\Pi}(n)$ примем также b_c бит. В свою очередь, для коэффициентов a_{y_i} , b_{y_i} примем разрядность b_k бит и предположим $|a_{\Pi}| \leq 1$, $|b_{\Pi}| \leq 1$. При этих условиях частные произведения в (4.13) по абсолютной величине не превышают 1 и имеют разрядность $b_c + b_k$ бит. Для того, чтобы поместить частное произведение в регистр с разрядностью b_c бит, необходимо соответственно укоротить его.

Существует два способа ограничения длины кода произведения: усечение и округление. В случае усечения сохраняются старшие b_c бит, а младшие b_k бит отбрасываются. При округлении предварительно анализируется значение $(b_c + 1)$ -го бита произведения. В случае, если значение этого бита нуль, то производится описанная выше процедура усечения. Если значение $(b_c + 1)$ -го бита = 1, то после процедуры усечения в младший разряд произведения прибавляется 1. Округление обеспечивает большую точность, но сопряжено с дополнительными затратами. Иначе мы ограничимся лишь анализом ошибок округления.

Как видно, процедура округления произведений подобна квантованию сигнала, рассмотренному выше в 4.2. Поэтому оказываются подобными характеристики ошибок квантования и округления. В частности, ошибка округления является случайной величиной с максимальным абсолютным значением 2^{-b_c} , нулевым средним и дисперсией $2^{-b_c}/3$. Значения ошибки округления каждого частного произведения статистически независимы и поэтому образуют дискретный белый шум.

Таким образом, каждое слагаемое в правой части (4.13) включает в себя случайную компоненту ошибки округления. В фильтр удобно ввести источники помехи (шума), имитирующие эти ошибки. Алгоритм фильтра, учитывающий округление произведений, содержит $M + L + 1$ таких источников шума. Все эти источники взаимно независимы. Они могут быть объединены в один источник. Введение источников шума в умножители ЦФ и объединение их в совокупный источник для прямой формы БИХ-фильтра второго порядка показано на рис. 4.3,а и б соответственно.

Среднее совокупного шума по-прежнему равно нулю, а дисперсия увеличивается пропорционально числу источников, т. е. в $M + L + 1$ раз. Учитывая сказанное, можно написать

$$y_{\Pi \text{ окр}}(n) = \sum_{i=0}^M b_{\Pi i} x_{\Pi}(n-i) - \sum_{i=1}^L a_{\Pi i} y_{\Pi \text{ окр}}(n-i) + e_{\Sigma}(n), \quad (4.14)$$

где $y_{ц\text{окр}}(n)$ — выходной сигнал при учете округления произведений, $e_{\Sigma}(n)$ — суммарный белый шум, обусловленный округлением. Кроме того,

$$\langle e_{\Sigma}(n) \rangle = 0, \quad \langle e_{\Sigma}^2 \rangle = (M + L + 1) 2^{b_c} / 3. \quad (4.15)$$

Для ошибки округления на выходе фильтра

$$\varepsilon(n) = y_{ц\text{окр}}(n) - y_{ц}(n)$$

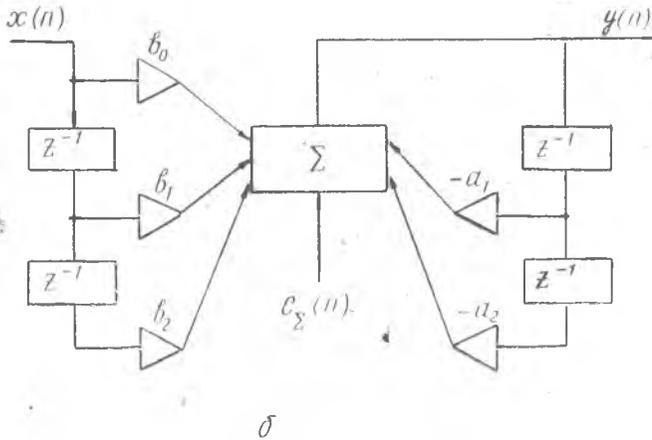
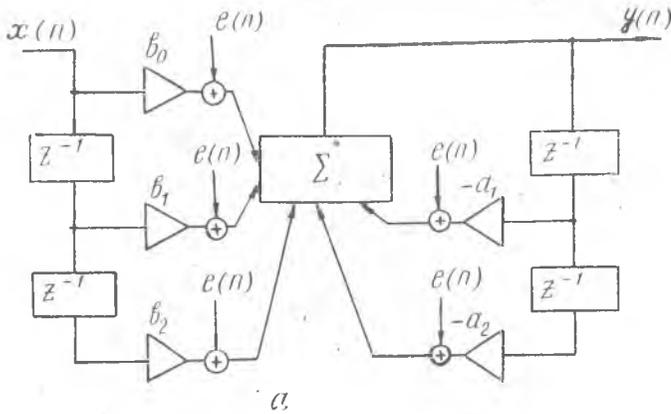


Рис. 4.3

из (4.13) и (4.14) можно получить линейное разностное уравнение

$$\varepsilon(n) + \sum_{i=1}^L a_{ni} \varepsilon(n-i) = e_{\Sigma}(n). \quad (4.16)$$

Из (4.16) видно, что ошибка $\varepsilon(n)$ определяется только шумом $e_{\Sigma}(n)$ и параметрами фильтра и не зависит от значений сигналов, циркулирующих в фильтре. Это является следствием статистической независимости такого рода помехи и сигнала.

Уравнению (4.16) соответствует линейная система с передаточной функцией

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^L a_{ni} z^{-i}}, \quad (4.17)$$

где $A(z) = 1 + \sum_{i=1}^L a_{ni} z^{-i}$ — знаменатель передаточной функции ЦФ (4.11).

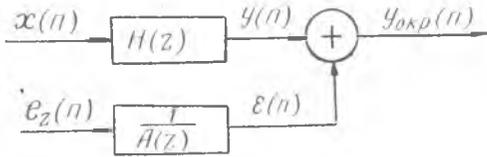


Рис. 4.4

На входе этой системы действует шум $e_{\Sigma}(n)$, на выходе — помеха $\varepsilon(n)$.

Структурная схема ЦФ с учетом ошибки округления приведена на рис. 4.4. Имея в виду (4.15) и (4.17), нетрудно по (4.8) вычислить дисперсию помехи на выходе фильтра:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окр вых}}^2 &= \langle e_{\Sigma}^2 \rangle = (1/2 \pi j) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z A(z) A(z^{-1})} = \\ &= (M + L + 1) (2^{-bc}/3 \cdot 1/2 \pi j) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z A(z) A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.5. КОЛЕБАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

Выше, в 4.4, предполагалось, что отсчеты шума округления $\varepsilon(n)$ некоррелированы между собой, а также с отсчетами входной последовательности. Такое предположение справедливо, если отсчеты входной последовательности изменяются достаточно быстро, так, что разность величин соседних отсчетов превышает шаг квантования по уровню Δ . Однако, если это условие

не выполняется, то становится несправедливым и предположение об отмеченной выше некоррелированности шума округления. Такое положение имеет место, например, когда входная последовательность постоянна по величине или имеет нулевое значение. В таких случаях в ЦФ могут возникнуть нежелательные эффекты и, в частности, колебания, которые носят название колебаний предельного цикла.

Анализ колебаний предельного цикла весьма сложен. Поэтому мы ограничимся тем, что рассмотрим суть таких колебаний на простейшем примере системы первого порядка:

$$y(n) = x(n) - ay(n-1). \quad (4.19)$$

Определим отклик $y(n)$ этой системы на единичный импульс

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при других значениях времени } n \end{cases}$$

для двух случаев: а) разрядность регистров не ограничена, б) разрядность составляет 4 бита (включая знаковый). Для коэффициента a примем два значения ($-0,5$ и $0,5$).

		$a = -0,5$							
n		0	1	2	3	4	5	6	7
$y(n)$	(точное)	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
$y(n)$	(округление до 4 бит)	1	1/2	1/4	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
		$a = 0,5$							
n		0	1	2	3	4	5	6	7
$y(n)$	(точное)	1	-1/2	1/4	-1/8	1/16	-1/32	1/64	-1/128
$y(n)$	(округление до 4 бит)	1	-1/2	1/4	-1/8	1/8	-1/8	1/8	-1/8

Графики последовательности $y(n)$ для этих случаев приведены на рис. 4.5.

Как следовало ожидать, точная (без округления произведений) последовательность $y(n)$ при нулевой входной последовательности $x(n)$ в обоих случаях убывает по абсолютной величине как экспонента. При разрядности регистра $b_c = 4$ отсчеты сигнала, величины которых по абсолютному значению меньше $1/8$, округляются до ближайшего большего (т. е. до $1/8$). Поэтому по достижении уровня $1/8$ дальнейшее уменьшение значений последовательности $y(n)$ не происходит. При $a = 0,5$ в фильтре устанавливается колебательный режим.

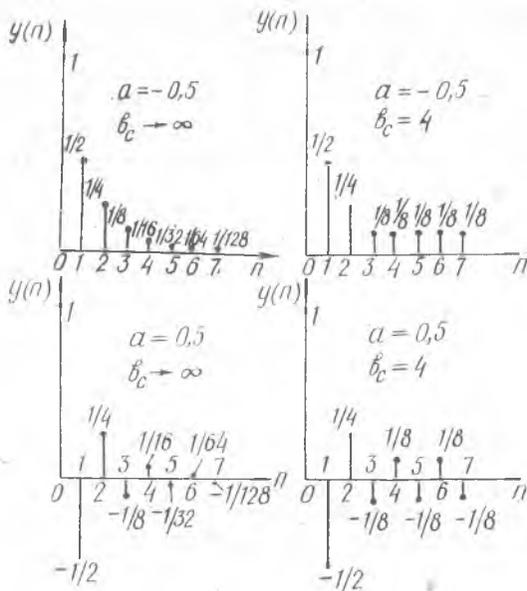


Рис. 4.5

Колебания предельного цикла возникают вследствие нелинейного характера процесса округления. В системе первого порядка связь между амплитудой этих колебаний и разрядностью регистров достаточно проста и очевидна. В системах второго и более высокого порядка анализ колебаний предельного цикла существенно усложняется [1.2]. Однако общая закономерность сохраняется: для обеспечения малости колебаний необходимо использовать регистры достаточно большой разрядности.

4.6. КОЛЕБАНИЯ ПЕРЕПОЛНЕНИЯ

Рассмотрим еще один вид возможных колебаний, возникновение которого связано с ограниченностью разрядности регистров в ЦФ. Такие колебания происходят при переполнении сумматоров ЦФ.

Выше, в 4.4, отмечалось, что в ЦФ входная, выходная последовательности и промежуточные значения сигналов нормируются так, чтобы по абсолютной величине они не превосходили 1. Двоичный b -битовый код такого числа содержит знаковый стар-

ший бит ($0 \rightarrow \llcorner + \gg$; $1 \rightarrow \llcorner - \gg$), справа от которого располагается точка (запятая), разделяющая целую и дробную части числа, и далее кодовая последовательность из $b-1$ бит, представляющая дробную часть. Наибольшее положительное число, представимое в такой системе, имеет величину $1-2^{-b+1}$. Например, при $b=5$ — это $0.1111 \rightarrow 0,9375$. При использовании системы счисления в дополнительном коде, в тех же условиях, наибольшим по абсолютному значению отрицательным числом будет $1.0000 \rightarrow -1,0$. Нетрудно видеть, что положительное число, большее предельно допустимого, будет зафиксировано как отрицательное. В самом деле $0.1111 + 0.0001 = 1.0000 \rightarrow -1,0$. Характеристика сумматора, работающего в дополнительном коде, имеет вид, представленный на рис. 4.6. Такой вид характеристики сум-

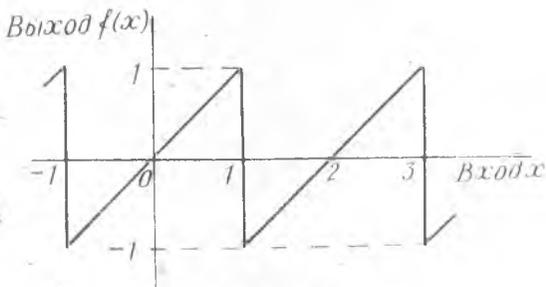


Рис. 4.6

матора при наличии переполнения может служить причиной возникновения колебаний в ЦФ при постоянном сигнале на входе или даже при отсутствии входного сигнала. В отличие от колебаний предельного цикла колебания переполнения имеют высокий уровень, близкий к максимальной величине выходного сигнала.

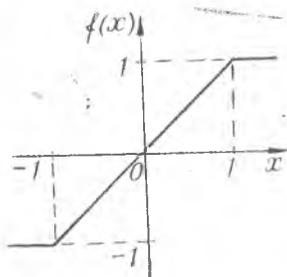


Рис. 4.7

Колебания переполнения устраняются путем изменения характеристики сумматора. В частности, замена обычного сумматора чисел в дополнительном коде на сумматор с насыщением гарантирует исключение колебаний переполнения. Характеристика сумматора с насыщением приведена на рис. 4.7. Фильтр с такой характеристикой в моменты переполнения становится нелинейным. Эта нелинейность приводит к возникновению ошибок

фильтрации. Поэтому необходимо масштабирование сигналов, при котором относительное время вхождения фильтра в нелинейный режим оказывается малым.

В заключение отметим, что вопросы, связанные с эффектами конечной разрядности в ЦФ, достаточно сложны и не исчерпываются сведениями, приведенными в настоящем разделе. Более полное освещение этих вопросов дано в многочисленных книгах и публикациях в периодической печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ./Пер. Л. А. Зайцева, Э. Г. Назаренко, Н. Н. Тететкина. Под ред. Ю. Н. Александрова — М.: Мир, 1978, 848 с.
2. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ./Пер. В. А. Лексаченко, В. Ч. Челпанова: Под ред. С. Я. Шаца. — М.: Связь, 1979, 416 с.
3. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ./Под ред. А. М. Трахтмана. — М.: Сов. радио, 1973, 367 с.
4. Применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. А. М. Румянцева. Под ред. Э. Оппенгейма — М.: Мир, 1980, 550 с.
5. Голденберг Л. М., Левчук Ю. П., Поляк М. Н. Цифровые фильтры.—М.: Связь, 1974, 80 с.
6. Лихарев В. А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. — М.: Сов. радио. 1973, 456 с.
7. Мизин И. А., Матвеев А. А. Цифровые фильтры. — М.: Связь, 1979, 237 с.
8. Хэмминг Р. В. Цифровые фильтры: Пер. с англ./Пер. В. И. Ермишина; Под ред. А. М. Трахтмана. — М.: Сов. радио, 1980, 224 с.

П.1.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. *Свойство линейности.* Подставим выражение $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ в (1.12):

$$X(z) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = a X_1(z) + b X_2(z).$$

Полученное равенство доказывает свойство линейности Z-преобразования.

2. *Теорема о сдвиге во временной области.* Запишем

$$Z\{x(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k) z^{-n}.$$

Предположим, что $x(n) = 0$ при

$$n < 0. \text{ Тогда, если } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k) z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} x(n-k) z^{-n} = z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} = z^{-k} X(z),$$

что и требовалось доказать.

3. *Теорема о Z-преобразовании свертки.* Запишем свертку

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) h(n-m).$$

Определим Z-преобразование свертки:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m) h(n-m) \right] z^{-n}.$$

Переменим порядок суммирования и учтем, что $h(n) = 0$ при $n < 0$. При этом

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \sum_{n=m}^{\infty} h(n-m) z^{-n}, \tag{П.1.1}$$

Заменим во второй сумме (П.1.1) переменную суммирования $r = n - m$. Тогда $Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} \sum_{r=0}^{\infty} h(r) z^{-r} = X(z) H(z)$, что и требовалось доказать.

4. Теорема об обратном Z-преобразовании. Умножим равенство $X(z) = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) z^{-r}$ на z^{n-1} :

$$X(z) z^{n-1} = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) z^{n-r-1}$$

и далее вычислим контурные интегралы от левой и правой частей полученного выражения. В качестве контура интегрирования в Z-плоскости (см. рис. 1.4) выберем окружность единичного радиуса $|z|=1$. Получим при этом

$$\oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{r=0}^{\infty} x(r) \oint_{|z|=1} z^{n-r-1} dz. \quad (\text{П.1.2})$$

Согласно известной в теории функций комплексного переменного теореме Коши

$$\oint_{|z|=1} z^{n-r-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{при } r = n, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, в правой части (П.1.2) только один член суммы отличен от нуля, для которого $r = n$. Учитывая это, получим формулу обратного Z-преобразования

$$x(n) = (1/2\pi j) \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz.$$

П.1.2. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЯМОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вычислим Z-преобразования сигналов, приведенных в 2.1.

$$1) \quad x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(n) z^{-n} \Big|_{n=0} = 1.$$

$$2) \quad x(n) = \begin{cases} c^n & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0, \end{cases} \quad |c| < 1.$$

$$\text{Выражение } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (c z^{-1})^n \quad (\text{П.1.3})$$

является геометрической прогрессией. Область сходимости суммы в (П.1.3) составляет $|cz^{-1}| < 1$ или $|z| \geq c$.

$$\text{В этой области } X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (cz^{-1})^{N+1}}{1 - cz^{-1}} = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$

$$3) \ x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Полагая в результате, полученном в предшествующем примере $c = 1$, для области z -плоскости, где $|z^{-1}| > 1$, получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Заметим, что область сходимости в данном случае — вся z -плоскость, кроме внутренности круга единичного радиуса.

$$4) \ x(n) = \sin \omega n; \ n \geq 0.$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \omega n z^{-n} = (1/2j) \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega n} z^{-n} \right).$$

В области $|z^{-1}| > 1$ суммы в правой части этого равенства сходятся. Учитывая результат, полученный в примере 2, запишем

$$X(z) = 1/2j \left(\frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}} \right) = \frac{\sin \omega \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

П.1.3. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$1) \ X(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1}).$$

Определим $x(n)$ по (1.14):

$$x(n) = (1/2\pi j) \oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{1 - 0,5z^{-1}} dz = (1/2\pi j) \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z - 0,5} dz. \quad (\text{П.1.4})$$

Контурный интеграл в (П.1.4) в пределах контура интегрирования $|z|=1$ имеет один простой полюс в точке $z_0=0,5$. Вычет относительно простого полюса составит $\text{Res}(z_0) = 2\pi j 0,5^n$ при $n \geq 0$. Следовательно,

$$x(n) = \begin{cases} 0,5^n & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Заметим, что здесь решается обратная задача по отношению к примеру 2 (П.1.2) для случая $c = 0,5$.

рим эти методы для двух наиболее известных типов фильтров: Баттерворда и Чебышева.

Фильтры Баттерворда. Такие фильтры имеют максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания. Кроме того, АЧХ является монотонной как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания. Эти свойства следуют из выражения для квадрата модуля частотной характеристики фильтров Баттерворда:

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{пр}}}\right)^{2n}}, \quad (\text{П.2.1})$$

где $\omega_{\text{пр}}$ — частота среза полосы пропускания, n — порядок фильтра.

На границе полосы пропускания при $\omega = \omega_{\text{пр}}$ $|H_a(j\omega_a)|^2 = 0,5$ и, следовательно, затухание составляет 3 дБ. Из (П.2.1) видно, что $|H_a(j\omega)|^2$ монотонно убывает. Избирательность фильтра возрастает по мере роста его порядка n . При $n \rightarrow \infty$ $|H_a(j\omega)|^2$ аппроксимирует идеальную П-образную характеристику фильтра. Графики АЧХ фильтра для $n=2, 4, 8$ приведены на рис. П.2.1.

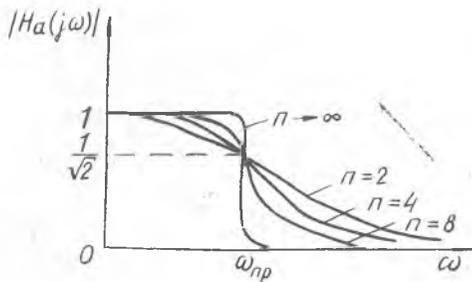


Рис. П.2.1

Рассмотрим процедуру получения передаточной функции фильтра $H_a(p)$ по квадрату модуля его частотной характеристики. Для этого представим (П.2.1) в виде

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{j\omega_{\text{пр}}}\right)^{2n}}. \quad (\text{П.2.2})$$

Далее разложим правую часть (П.2.2) на два множителя и выделим множитель, полюсы которого лежат в левой p -полуплоскости, т. е. соответствующие передаточной функции устойчивой системы.

Полюсы (П.2.2) определяются решением уравнения

$$\left(\frac{p}{j\omega_{\text{пр}}}\right)^{2n} + 1 = 0. \quad (\text{П.2.3})$$

Уравнение (П.2.3) имеет $2n$ корней;

$$p_k = e^{\pm j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)} \cdot \omega_{np}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П.2.4})$$

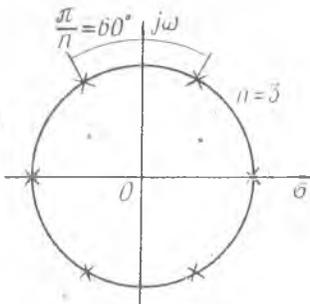


Рис. П.2.2

Из (П.2.4) видно, что полюсы (П.2.2) в p -плоскости равномерно распределены по окружности радиуса ω_{np} симметрично оси мнимых $j\omega$ (рис. П.2.2). Ясно, что полюсы не могут лежать на мнимой оси, так как это соответствовало бы неустойчивой системе.

Таким образом, для передаточной функции фильтра можно написать:

$$H_a(p) = \frac{c_0}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)} \quad (\text{П.2.5})$$

где p_k — полюсы, расположенные в левой полуплоскости, c_0 — постоянная нормирования. При заданной полосе пропускания ω_{np} и затухании в полосе непропускания (на частоте ω_{np}) расчет фильтра включает в себя: а) выбор порядка фильтра по (П.2.1), обеспечивающего требуемое затухание на частоте ω_{np} ; б) вычисление полюсов по (П.2.4); в) расчет передаточной функции $H_a(p)$ по (П.2.5).

Фильтры Чебышева. Фильтры Чебышева имеют равновеликие пульсации АЧХ в полосе пропускания и монотонную АЧХ в полосе непропускания (I тип) или, наоборот, монотонную АЧХ в полосе пропускания и равновеликие пульсации в полосе непропускания (II тип). Ниже рассматриваются только фильтры I типа. Чебышевские фильтры по сравнению с фильтрами Баттерворда имеют меньшую максимальную ошибку аппроксимации АЧХ. Выражение для квадрата модуля частотной характеристики фильтра Чебышева имеет вид

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_{np})}, \quad (\text{П.2.6})$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева n -й степени, ε — параметр, характеризующий пульсации АЧХ в полосе пропускания. График квадрата АЧХ (П.2.6) для $n = 4$ приведен на рис. П.2.3. Там же приведен для сравнения график АЧХ фильтра Баттерворда.

Полином Чебышева n -й степени определяется выражением

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x) & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{П.2.7})$$

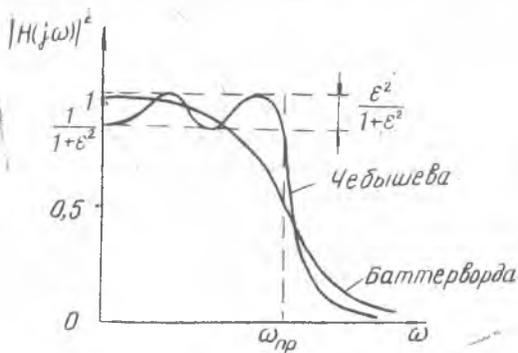


Рис. П.2.3

Полиномы Чебышева также удовлетворяют рекуррентной формуле

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (\text{П.2.8})$$

причем $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Из (П.2.7) видно, что в полосе пропускания фильтра при $(\omega/\omega_{пр}) \leq 1$ полином $T_n^2(\omega/\omega_{пр})$ принимает значения между нулем и единицей; вне полосы пропускания при $(\omega/\omega_{пр}) > 1$ выражение $\arccos \cos(\omega/\omega_{пр})$ принимает мнимые значения. При этом полином $T_n(\omega/\omega_{пр})$ ведет себя как гиперболический косинус: монотонно возрастает с увеличением аргумента. Поэтому, как следует из (П.2.6), $|H_a(j\omega)|^2$ имеет пульсирующий характер между 1 и $1/(1 + \epsilon^2)$ для $0 \leq (\omega/\omega_{пр}) \leq 1$ и монотонно спадает при $(\omega/\omega_{пр}) > 1$.

Фильтр Чебышева полностью определяется величинами ϵ , $\omega_{пр}$ и n . Порядок фильтра выбирается исходя из обеспечения требуемого затухания в полосе непропускания. Передаточная функция $H_a(p)$ определяется из $|H_a(j\omega)|^2$ как и ранее по (П.2.5). Можно показать [1, 2], что для фильтра с единичной полосой $\omega_{пр} = 1$ полюсы функции $H_a(p)$ $H_a(-p)$ лежат на эллипсе с большой полуосью $\text{ch } \gamma_n$ (вдоль оси $j\omega$) и малой полуосью $\text{sh } \gamma_n$ (рис. П.2.4), где $\gamma_n = (1/n) \text{Arsh } 1/\epsilon$.

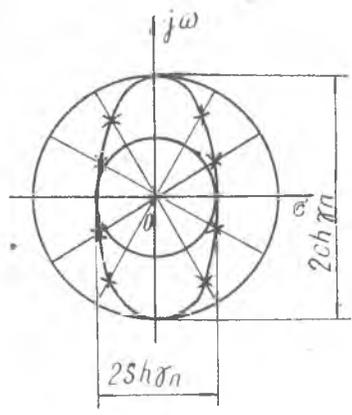


Рис. П.2.4

Искомые n полюсов, расположенные в левой p -полуплоскости, находятся в точках

$$p_k = \text{sh } \gamma_n \sin [(2k-1)\pi/2n] + j \text{ch } \gamma_n \cos [(2k-1)\pi/2n]. \quad (\text{П.2.9})$$

Графический способ размещения полюсов фильтров Чебышева на эллипсе состоит на первом этапе в делении большой окружности (радиуса, равного большой полуоси эллипса) точно так, как это выполнялось при определении полюсов фильтров Баттерворда (рис. П.2.4). Далее необходимо провести радиусы, проходящие через точки деления окружности. Точки пересечения радиусов с эллипсом определяют координаты полюсов фильтра Чебышева.

П.2.2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЦИФРОВЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ НЧ

Пример 1. Рассчитать БИХ-фильтр, имеющий по уровню — 3 дБ полосу пропускания $0 \div 1000$ Гц, полосу непропускания с затуханием не менее 10 дБ на частотах выше 2000 Гц. Амплитудная характеристика ЦФ в полосах пропускания и непропускания должна быть монотонной. Частоту дискретизации принять равной 10 кГц.

Решение. Заданному требованию по виду АЧХ удовлетворяет фильтр Баттерворда. Применим для расчета ЦФ метод билинейного преобразования. Расчет выполним в три этапа.

1. *Коррекция искажения частотной шкалы, характерного для метода билинейного преобразования.* Коррекцию проведем путем перерасчета по (2.18) граничных частот полосы пропускания $\omega_{\text{пр}}$ и полосы непропускания $\omega_{\text{нп}}$ ЦФ в соответствующие частоты $\omega_{\text{а пр}}$, $\omega_{\text{а нп}}$ аналогового фильтра — прототипа:

$$\omega_{\text{а пр}} = \frac{2}{T} \text{tg } \frac{\omega_{\text{пр}} T}{2} = \frac{2}{10^{-4}} \text{tg } \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}}{2} = 0,6498 \cdot 10^4 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{\text{а нп}} = \frac{2}{T} \text{tg } \frac{\omega_{\text{нп}} T}{2} = \frac{2}{10^{-4}} \text{tg } \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}}{2} = 1,4531 \cdot 10^4 \text{ рад/с}.$$

2. *Расчет аналогового фильтра Баттерворда:*

а) Определим порядок фильтра n из условия обеспечения требуемого затухания (10 дБ) на частоте $\omega_{\text{а нп}}$. Как видно из (П.2.1), это условие обеспечивается при выполнении неравенства $1 + (\omega_{\text{а нп}}/\omega_{\text{а пр}})^{2n} \geq 10$.

Подставим значения $\omega_{\text{а пр}}$, $\omega_{\text{а нп}}$ и получим $2,2361^{2n} \geq 10$.

Решением этого уравнения является $n \geq 1,3659$.

Принимаем $n = 2$.

б) Ищем полюсы аналогового фильтра Баттерворда по (П.2.4). Передаточная функция (П.2.2) имеет $2n$ полюсов, равномерно расположенных в p -плоскости на окружности радиуса $\omega_{a_{пр}}$. Так как n — четное, то на вещественной оси полюсов нет. В левой полуплоскости лежат два комплексно сопряженных полюса:

$$p_{1,2} = 0,6498 \cdot 10^{+4} (\cos 135^\circ \pm j \sin 135^\circ) = (-0,4611 \pm j 0,4611) 10^{+4}.$$

в) Определим по (П.2.5) передаточную функцию АФ:

$$H_a(p) = \frac{p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Множитель $p_1 p_2$ в числителе выбираем из условия

$H_a(0) = 1$. После подстановки данных получим

$$\bar{H}_a(p) = \frac{0,4232 \cdot 10^8}{p^2 + 0,9211 \cdot 10^4 p + 0,4232 \cdot 10^8}.$$

3. Дискретизация АФ методом билинейного преобразования. Запишем оператор билинейного преобразования

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{10^4} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Выполним преобразование $H_a(p) \rightarrow H(z)$ по (2.16). В результате для передаточной функции ЦФ получим

$$H(z) = \frac{0,0676 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + 1,4116z^{-1} + 0,4124z^{-2}}.$$

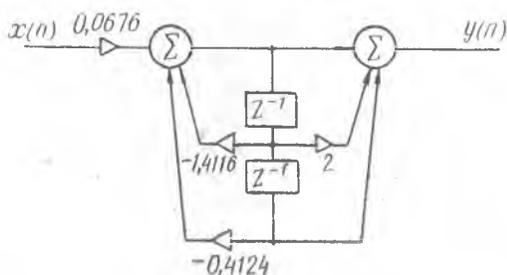


Рис. П.2.5

Структурная схема ЦФ в канонической форме приведена на рис. П.2.5. Для получения одного отсчета выходного сигнала необходимо выполнить три операции умножения и четыре операции

сложения. Умножение на 2 не учитываем, так как в двоичной системе счисления такому умножению соответствует сдвиг на один разряд влево.

Пример 2. Рассчитать ЦФ, имеющий полосу пропускания от 0 до 100 Гц при колебаниях характеристики 0,5 дБ. АЧХ фильтра вне полосы пропускания должна быть монотонной. Требуемое затухание на частоте 183 Гц должно составлять не менее 19 дБ. Частота дискретизации 1000 Гц.

Решение. Требуемый вид АЧХ имеет фильтры Чебышева 1 рода. Применим метод билинейного преобразования.

1. Преобразование характерных частот ЦФ 100 и 183 Гц в аналоговые частоты:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f T}{2},$$

$$\omega_{a \text{ пр}} = 2 \cdot 10^3 \operatorname{tg} (2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3}/2) = 0,6498 \cdot 10^3 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{a \text{ ин}} = 2 \cdot 10^3 \operatorname{tg} (2\pi \cdot 183 \cdot 10^{-3}/2) = 1,2596 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

2. Расчет аналогового ФПЧ Чебышева:

а) Рассчитаем параметр ε^2 . Из (П.2.6) видно, что заданной колебательности АЧХ соответствует условие

$$1 + \varepsilon^2 = 10^{0,05} = 1,12202; \quad \varepsilon^2 = 0,12202.$$

б) Определим порядок фильтра n . Для этого решаем уравнение $1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{a \text{ ин}}/\omega_{a \text{ пр}}) = 10^{1,9}$.

$$\text{Учтем, что } (\omega_{a \text{ ин}}/\omega_{a \text{ пр}}) = 1,2596 \cdot 10^3/0,6498 \cdot 10^3 \approx 2.$$

Тогда

$$1 + 0,12202 \cdot T_n^2(2) = 79,4328. \quad (\text{П.2.10})$$

Решаем это уравнение методом перебора.

Из (П.2.8) следует, что $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 2x^3 - 3x$. Для $n = 2$ имеем $T_2(2) = 7$. При этом (П.2.10) принимает вид $1 + 0,12202 \cdot 7^2 = 6,98143 < 79,4328$.

При $n = 2$ требуемая избирательность не обеспечивается.

Для $n = 3$ получим $T_3(2) = 26$. При этом

$$1 + 0,12202 \cdot 26^2 = 81,112 > 79,4329.$$

Таким образом, $n = 3$.

в) Процедура отыскания полюсов передаточной функции фильтра Чебышева по (П.2.9) достаточно громоздкая. Поэтому разработаны таблицы и расчетные графики для таких фильтров, которые приведены в справочниках. В частности, передаточная функция фильтра НЧ Чебышева третьего порядка с единичной полосой и при пульсации АЧХ в пределах 0,5 дБ определяется выражением

$$H_a(p) = \frac{c}{p^3 + 1,2529 p^2 + 1,5349 p + 0,7157}.$$

Применяя частотное преобразование [1, 2]

$$p \rightarrow p/\omega_{a \text{ нр}} = p/0 \cdot 10^{-3},$$

получим передаточную функцию АФ с требуемой полосой пропускания:

$$H_a(p) = \frac{0,2046 \cdot 10^{-9}}{p^3 + 0,8255 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,6862 \cdot 10^{-6} p + 0,2046 \cdot 10^{-9}}.$$

Здесь коэффициент $c = 0,1023 \cdot 10^{-3}$ в знаменателе выбран из условия нормирования $H_a(0) = 1$.

3. Дискретизация передаточной функции АФ. Выполнив операцию билинейного преобразования

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a^*(p) \Big|_{p = 2 \cdot 10^3 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}},$$

получим искомую передаточную функцию цифрового БИХ-фильтра:

$$H(z) = \frac{0,0159 (1 + 3 z^{-1} + 3 z^{-2} + z^{-3})}{1 - 0,9749 \cdot z^{-1} + 1,5243 \cdot z^{-2} - 0,4538 z^{-3}}.$$

Св. план, 1983. поз. 935

Виктор Дмитриевич Кузенков

МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Редактор Т. К. Крeт и н и н а

Техн. редактор Н. М. Каленюк

Корректоры С. С. Рубан, Н. С. Куприянова

Сдано в набор 24.01.83 г. Подписано в печать 23.03.83 г.

ЕО 00138. Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная белая.

Литературная гарнитура. Высокая печать.

Усл. п. л. 5,5. Уч.-изд. л. 5,0. Т. 500 экз.

Заказ 90. Цена 15 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. академика С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка или формула	Напечатано	Следует читать
1	2	3	4
12	11 снизу	$x(n) = ax_1 + x_2(n)$	$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$
18	6 снизу	$x_a(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{j(2\pi/N)n(k+mN)} \times$	$\bar{x}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)n(k+mN)} =$
26	8 сверху	$\times \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk} e^{-j(2\pi/N)nm} =$	$= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk} e^{-j2\pi nm} =$
33	ф (1.59)	$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} X_r(n-m) h(m) = \sum_{r=0}^{\infty} y_r(n)$	$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x_r(n-m) h(m) = \sum_{r=0}^{\infty} y_r(n)$
33	8 снизу	$x_0(n)$	$\bar{x}(n)$
38	ф (2.1)	$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{r=1}^N a_r y(n-r)$	$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{r=1}^L a_r y(n-r)$
43	1 сверху	$1 - \epsilon_1 \ll H(e^{j\omega}) \ll$	$1 - \epsilon_1 \ll H(e^{j\omega}) \ll$
54	1 снизу	(3.20)	(2.20)
55	1 сверху	$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} [(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi/Nnk}] z^{-n}$	$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} [(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi/Nnk}] z^{-n}$
74	ф (4.9)	$\sigma_{\text{КВ Вых}}^2 = (2/3^{-2b}) (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	$\sigma_{\text{КВ Вых}}^2 = (2^{-2b}/3) (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
77	ф (4.15)	$\langle e_{\Sigma}(n) \rangle = 0, \langle e_{\Sigma}^2(n) \rangle = (M+L+1)2b\epsilon/3$	$\langle e_{\Sigma}(n) \rangle = 0, \langle e_{\Sigma}^2(n) \rangle = (M+L+1)2^{-2b}\epsilon/3$

1	2	3	4
78	ϕ (4.18)	$\sigma_{\text{вкр вих}}^2 = \langle e_2^2 \rangle = (1/2 \pi i) \oint_{ z =1} \times$ $\times \frac{dz}{z A(z) A(z^{-1})} = (M + L + 1)(2 - bc/3 \cdot 1/2 \pi i) \times$ $\times \oint_{ z =1} \frac{dz}{z A(z) A(z^{-1})}.$ <p> $\rho \rightarrow \rho/\omega_a \text{ нр} = \rho/0 \cdot 10^{-3}$ $c = 0,1043 \cdot 10^{-3}$ </p>	$\sigma_{\text{вкр вих}}^2 = \langle e_2^2 \rangle = (1/2 \pi i) \oint_{ z =1} \times$ $\times \frac{z A(z) A(z^{-1})}{dz} = (M + L + 1)(2 - 2bc/3) \times$ $\times (1/2 \pi i) \oint_{ z =1} \frac{dz}{z A(z) A(z^{-1})}.$ <p> $\rho \rightarrow \rho/\omega_a \text{ нр} = \rho/0,6498 \cdot 10^{-3}$ $c = 0,2046 \cdot 10^{-3}$ </p>
93	3 сверху		
93	7 сверху		