

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

*В.А. Глущенко, М.Г. Лосев, А.Н. Логвинов*

МЕТОД СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
РАВНОВЕСИЯ И УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ  
В ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ  
(ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД).  
ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ  
ЗАДАЧ

*Учебное пособие*

УДК 621.98.0163

**Метод совместного решения уравнений равновесия и условия пластичности в теории обработки металлов давлением (инженерный метод). Теория и примеры решения типовых задач: Учеб. пособие/ В. А. Глуценков, М.Г.Лосев, А.Н. Логвинов; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. 36 с.**

**ISBN 5-7883-0095-9**

Приведены исходные уравнения теории пластичности, являющиеся основой инженерного метода. Рассмотрены теоретические предпосылки и алгоритмы решения задач ОМД этим методом. Дано решение типовых задач ОМД.

Пособие предназначено для студентов вечернего факультета ТОАП специальности 110600. Работа выполнена на кафедре ОМД СГАУ.

Ил. 8.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензенты: *Иголкин А.Ю., Мошин В.С*

**ISBN 5-7883-0095-9**

© В.А. Глуценков, М.Г. Лосев, А.Н. Логвинов, 2000.

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2000.

# **1. МЕТОД СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ В ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ (ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД)**

## **1.1. Общие положения**

Одной из основных задач теории обработки металлов давлением является задача определения полей напряжений и деформаций в очаге пластического течения металла при проектировании конкретных технологических процессов. Знание напряженно-деформированного состояния (НДС) позволяет понять картину поведения металла в этом процессе, оценить его рациональность, включая особенности материала, наконец, рассчитать технологические параметры процесса (в основном деформирующее усилие), конечные геометрические размеры продукции, оценить последеформационные свойства металла.

Существует 3 группы методов решения поставленной задачи:

- теоретические;
- экспериментально-теоретические;
- экспериментальные.

Наибольший интерес, хотя бы с экономической точки зрения, представляют теоретические методы.

Инженерный метод является наиболее распространенным представителем теоретических методов.

Теоретические методы базируются на уравнениях теории пластичности [1], которых с привлечением граничных условий вполне достаточно для определения НДС.

Так, например, деформационная теория использует в декартовой системе координат  $(X, Y, Z)$ :

- три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z &= 0; \\ \partial \tau_{yx} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{yz} / \partial z &= 0; \\ \partial \tau_{zx} / \partial x + \partial \tau_{zy} / \partial y + \partial \sigma_z / \partial z &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

- условие пластичности

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_s, \quad (2)$$

где  $\sigma_s$  - предел текучести. Если металл не упрочняется,  $\sigma_s = const$ , в противном случае  $\sigma_s = \Phi(\epsilon)$ .

- шесть геометрических уравнений (уравнения связи деформаций и перемещений):

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial U_x / \partial x; & \gamma_{xy} &= \partial U_x / \partial y + \partial U_y / \partial x; \\ \epsilon_y &= \partial U_y / \partial y; & \gamma_{yz} &= \partial U_y / \partial z + \partial U_z / \partial y; \\ \epsilon_z &= \partial U_z / \partial z; & \gamma_{zx} &= \partial U_z / \partial x + \partial U_x / \partial z; \end{aligned}$$

- шесть физических уравнений связи напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} (\sigma_i / \epsilon_i) \epsilon_x; & \tau_{xy} &= \frac{1}{3} (\sigma_i / \epsilon_i) \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} (\sigma_i / \epsilon_i) \epsilon_y; & \tau_{yz} &= \frac{1}{3} (\sigma_i / \epsilon_i) \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} (\sigma_i / \epsilon_i) \epsilon_z; & \tau_{zx} &= \frac{1}{3} (\sigma_i / \epsilon_i) \gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + 3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Уравнения (1)-(3) представляют собой систему 17 уравнений с 17 неизвестными. Задача статически определима, приведенных уравнений достаточно, чтобы оценить НДС в любой точке деформируемого тела. Для связи НДС с внешним воздействием, кроме того, необходимо дополнительно знать граничные условия. Граничные условия - это известные условия на поверхности, выраженные, например, через напряжения, т.е. на границе (контуре) тела имеется поверхность с заданным распределением напряжений. Кроме статических граничные условия могут быть и кинематическими, и смешанными.

К сожалению, на сегодняшний день аналитических методов решения 17 уравнений с 17 неизвестными не существует. И если даже предположить, что удалось бы ее решить, то решение было бы настолько сложным, что не имело бы практического значения.

Поэтому в теории ОМД вводятся допущения, позволяющие решаемые задачи с той или иной степенью приближения свести к частным случаям НДС: плоскодеформированному; осесимметричному или плосконапряженному.

Условие плоскодеформированного состояния можно использовать при анализе таких процессов, как продольная прокатка, осадка прямоугольного бруса, длина которого во много раз превышает ширину, гибка широкой полосы и другие (рис. 1).

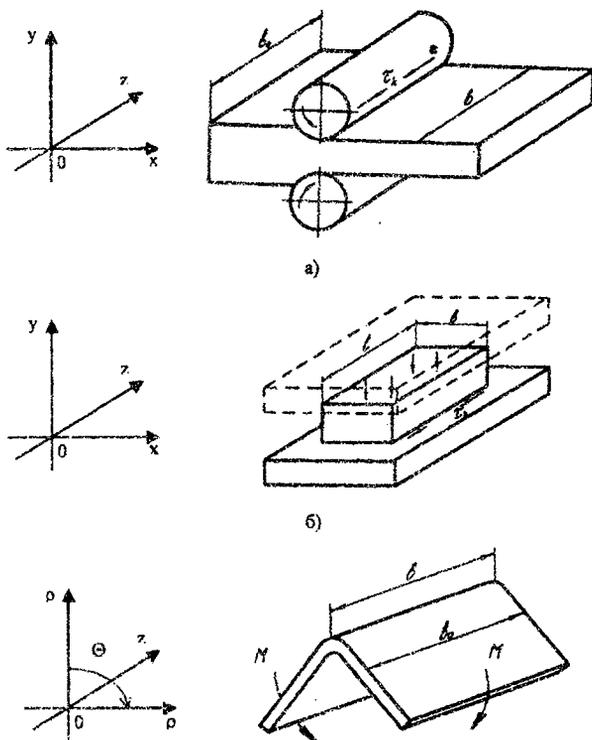


Рис. 1. Технологические схемы деформирования заготовок, когда можно принять НДС плоскодеформированным. а - продольная прокатка, б - осадка прямоугольного бруса, в - гибка широкой полосы

При продольной прокатке и гибке широкой полосы ширина заготовки практически неизменна  $h_0 \approx b$ , аналогично при осадке прямоугольного бруса  $l_0 \approx l$ . Поэтому в указанных случаях деформацией в направлении координаты  $z$  можно пренебречь, т.е.  $\epsilon_z = 0$ . Тогда  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ ,

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Если заготовка рассматривается в цилиндрической системе координат  $(\rho, \theta, z)$ , как в случае гибки широкой полосы (рис. 1, в), то

$$\epsilon_z = 0; \quad \gamma_{\rho z} = \gamma_{z\rho} = \gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = 0; \quad \tau_{\rho z} = \tau_{z\rho} = \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0;$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2}; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

В этом случае количество используемых уравнений равновесия (1) при плоскодеформированном состоянии уменьшается до двух, а оставшиеся - упрощаются:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Аналогично уменьшается количество и упрощаются уравнения равновесия в цилиндрической системе координат  $(\rho, \theta, z)$ . Вместо трех уравнений для объемной задачи

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0$$

остаются только два:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta\rho}}{\rho} = 0.$$

Осесимметричное напряженно-деформированное состояние реализуется в таких процессах, как волочение круглого прутка, осадка цилиндрической заготовки, протяжка цилиндрической заготовки в вырезных бойках и т.д. (рис.2).

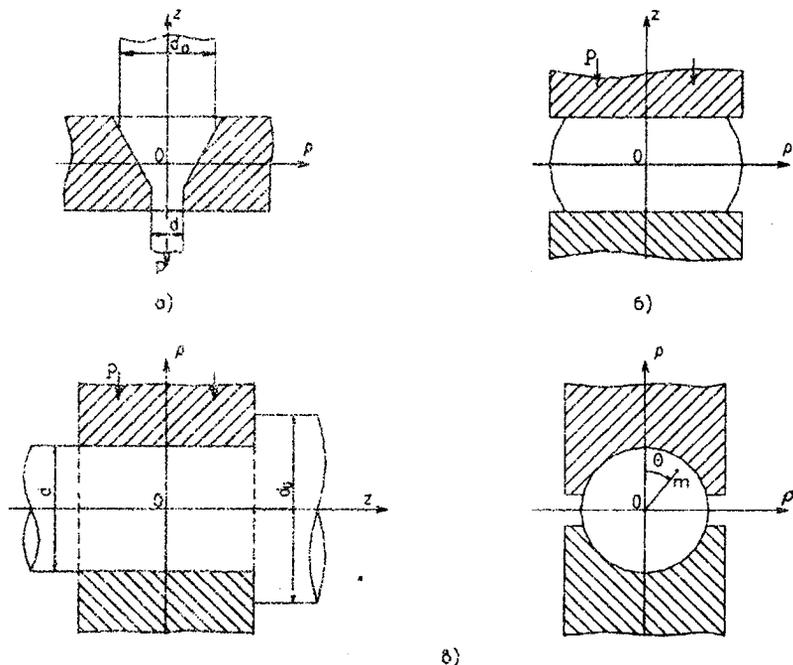


Рис. 2. Технологические схемы деформирования заготовок, при которых можно принять НДС, осесимметричным: а - волочение круглого прутка, б - осадка цилиндрической заготовки, в - протяжка цилиндрической заготовки

Во всех указанных случаях напряжения и деформации не зависят от координаты  $\theta$ , кроме того,  $\gamma_{\rho\theta} = \gamma_{\theta\rho} = \gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = 0$ ,  $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0$ ,  $\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$ . Уравнения равновесия (5) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{\rho} = 0.$$
(7)

Если цилиндрическая заготовка до деформации остается цилиндрической и после деформации, то  $\varepsilon_r \approx \varepsilon_\theta$ ,  $\sigma_r \approx \sigma_\theta$ . Данный факт относится к частному случаю осесимметричной задачи.

Для большинства операций листовой штамповки можно принять схему напряженного состояния плоской [1]. Например, для таких операций как вытяжка без утонения стенки, отбортовка, обжим, раздача, формовка, размеры очага деформации вдоль срединной поверхности заготовки и радиусы кривизны срединной поверхности обычно значительно больше толщины заготовки. При таких размерах очага деформации величины напряжений, перпендикулярных к срединной поверхности заготовки, малы по сравнению с напряжениями, действующими параллельно касательным к срединной поверхности.

Таким образом, схема напряженного состояния с достаточной точностью может быть принята плоской. Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ) уравнения равновесия в полярных координатах ( $\rho$ ,  $\theta$ ) имеют вид (6)

$$\rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + 2\tau_{\rho\theta} = 0.$$

Здесь  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\theta$  - нормальные напряжения, действующие в меридиональном (радиальном) и широтном (окружном) направлениях;  $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho}$  касательные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных к широтному и меридиональному направлениям.

В случае осесимметричного деформирования  $\tau_{\rho\theta} = 0$  и уравнения (6) заменяются одним уравнением, где напряжения являются функцией одной координаты  $\rho$ :

$$\rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0.$$
(8)

Уравнение равновесия (8) можно использовать для случая, когда заготовка или участок очага деформации плоские, а их срединная поверхность совпадает с плоскостью  $\rho$ ,  $\theta$ .

Для пространственной заготовки или пространственного участка очага деформации, обладающих осевой симметрией и неизменной толщиной, одно уравнение равновесия, полученное проецированием сил, действующих на бесконечно малый элемент, на касательную к поверхности заготовки в меридиональном направлении, должно быть дополнено вторым уравнением, полученным проецированием сил на перпендикуляр к поверхности заготовки.

При проецировании сил на касательную к поверхности заготовки в меридиональном направлении (рис.3) получим

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \mu \sigma_H \frac{\rho}{S \cdot \sin \alpha} = 0. \quad (9)$$

При проецировании сил на нормаль к поверхности заготовки (рис.3) имеем

$$\frac{\sigma_H}{S} - \frac{\sigma_\rho}{R_\rho} - \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} = 0. \quad (10)$$

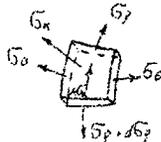
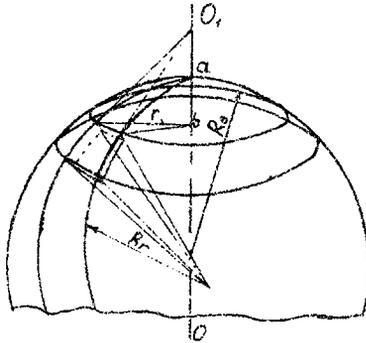


Рис. 3. Схема сил, действующих при деформировании тонкостенной осесимметричной оболочки

Подставим значение  $\sigma_n$  из (10) в (9):

$$\rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\mu\rho}{\sin\alpha} \left( \frac{\sigma_r}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0. \quad (11)$$

Здесь  $\rho$  - расстояние элемента от оси симметрии;  $R_\rho$  и  $R_\theta$  - радиусы кривизны срединной поверхности в меридиональном и широтном сечениях;  $\mu$  - коэффициент трения.

Уравнение (11) является общим уравнением равновесия элемента заготовки постоянной толщины выделенного в пространственном участке очага деформации при осесимметричном деформировании заготовки с наличием трения на контактной поверхности.

## 1.2. Дополнительные допущения инженерного метода

Инженерный метод в основном предназначен для определения энергосиловых параметров процесса - деформирующего усилия (работа, мощность).

Деформирующее усилие передается заготовке через контактную поверхность инструмента и заготовки или посредством примыкающих, пластически не деформируемых жестких участков тела. При операциях осадки, протяжки, прошивки, выдавливания, объемной штамповки и др. деформирующее усилие передается через поверхность контакта подвижного инструмента с деформируемым телом. При операциях волочения, вытяжки листового металла, некоторых процессах гибки наблюдается второй случай.

Зная величину и распределение напряжений на поверхности контакта (для первого случая) или на границе между очагом деформации и «жесткой» зоной (для второго случая), можно определить величину деформирующего усилия:

$$P = \iint_F \sigma_n dF, \quad (12)$$

где  $\sigma_n$  - закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности;  $F$  - проекция площади контакта на плоскость, перпендикулярную к направлению движения инструмента.

Если деформирующее тело рассматривается в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  и проекция плоскости контакта параллельна плоскости  $xOy$ , то выражение (12) можно переписать в виде

$$P = \iint_F \sigma_n dx dy.$$

В случае, когда нормальное напряжение  $\sigma_n$  представляет собой величину постоянную или может быть заменено его средней величиной, то в выражении (12)  $\sigma_n$  можно вынести за знак интеграла:

$$P = \sigma_n F \text{ (при } \sigma_n = \text{const).}$$

Инженерный метод позволяет определить величину и распределение нормальных напряжений на контактной поверхности, непосредственно воспринимающей активное усилие. При этом можно сделать ряд допущений, позволяющих упростить решение задач:

а) Распределение нормальных напряжений определяют только для контактной поверхности (что и требуется для вычисления деформирующего усилия) при отказе от выявления распределения напряжений внутри тела. При этом считают, что нормальные напряжения внутри тела равны напряжениям на контактной поверхности. Для случая осадки

(рис.4) данное допущение выражается в том, что  $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$ . Используя

данное допущение, несмотря на наличие контактного трения, деформацию заготовки принимают однородной (равномерной) и бочкообразованием заготовки пренебрегают, при этом напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  (рис.4) на контактной поверхности зависят только от координаты  $x$ . Таким образом из системы уравнений (4) остается только первое уравнение.

б) Второе дополнительное допущение метода касается касательных напряжений, вызванных силами трения. Эти касательные напряжения, вообще говоря, не постоянны как вдоль контактной поверхности, так и по глубине деформируемого тела. На самой контактной поверхности  $\tau_{xy} = \tau_k$  (см. рис.4). Для описания контактного трения наиболее часто употребляется закон Амонтона  $\tau_k = \mu \sigma_n$  и закон Зибеля  $\tau_k = \mu_s \sigma$ , здесь  $\mu$  - коэффициент трения,  $\mu_s$  - фактор трения, который отличается от  $\mu$  и является коэффициентом трения по напряжению текучести. На основании экспериментальных данных в инженерном методе принимают, что касательные напряжения в глубину деформированного тела распределяются по линейному закону. На контактных поверхностях  $\tau_{xy} = \tau_k$  (см. рис.4) и равны нулю в середине заготовки.

Графически данное допущение выражается  $\Delta ABC$  (см. рис.4) и позволяет в оставшемся уравнении равновесия (4) заменить второй член

$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ , записанный в дифференциальной форме, через конечные константы  $\tau_k$  и  $h$ , а именно:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \text{tg } \gamma = \frac{\tau_k}{\frac{h}{2}} = \frac{2\tau_k}{h}. \quad (13)$$

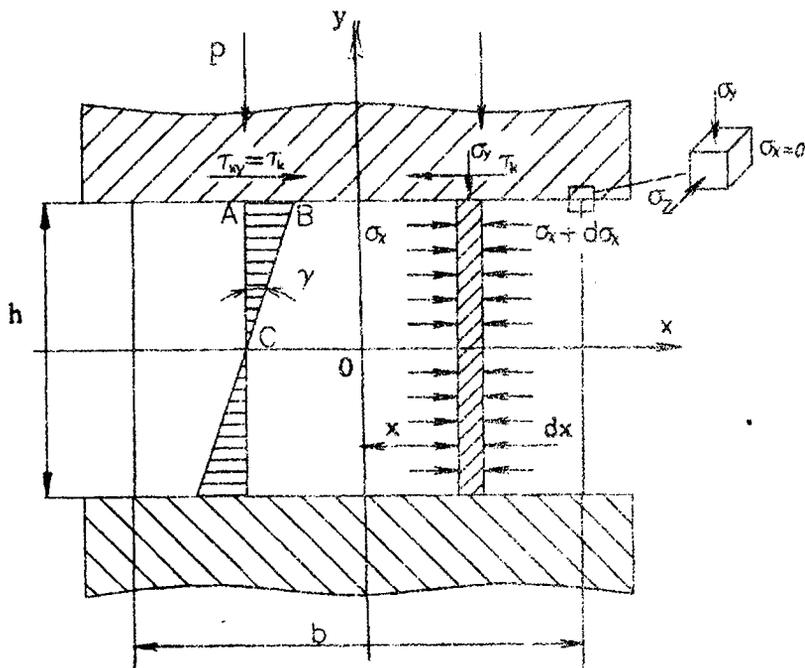


Рис. 4. Схема осадки прямоугольной заготовки в условиях плоскодеформированного состояния,  $\epsilon_z = 0$

С учетом (13) первое уравнение системы (4) перепишется в виде

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (14)$$

в) В инженерном методе условия пластичности обычно используют также приближенные. Рассмотрим вывод приближенных условий пластичности. Энергетическое условие пластичности в компонентах тензора напряжений для неупрочняемого тела в декартовой системе координат записывается в виде (2)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_s$$

или

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2. \quad (15)$$

Рассмотрим случай плоскодеформированного состояния. Предположим  $\epsilon_z = 0$ , тогда

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Условие (15) несколько упростится, а именно:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2. \quad (16)$$

Введем обозначение  $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ . Величину  $k$  часто называют постоянной пластичности, тогда (16) можно записать в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (17)$$

Рассмотрим два крайних случая, когда касательные напряжения отсутствуют  $\tau_{xy} = 0$  и когда касательные напряжения достигают максимального значения  $\tau_{xy} = \tau_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ , тогда выражение (17) в том и

другом случае запишется следующим образом:

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm 2k, \quad \tau_{xy} = 0; \quad (18)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = k. \quad (19)$$

Условия (18) и (19) являются точными условиями пластичности для указанных случаев. Однако возникает вопрос, до каких значений  $\tau_{xy}$  можно использовать либо условие (18), либо (19).

Данный вопрос исследовал Е.П. Унксов [2], который показал, что с погрешностью до 10% (что вполне допустимо в практике) при величине касательных напряжений

$$0 \leq \tau_{xy} \leq 0,7k$$

можно использовать условие (18), а при

$$0,7k < \tau_{xy} \leq k$$

- условие пластичности (19). Здесь условие пластичности (18) будет точным при  $\tau_{xy} = 0$  и приближенным при  $\tau_{xy} \rightarrow 0,7k$ , а условие (19) будет точным при  $\tau_{xy} = k$  и приближенным при  $\tau_{xy} \rightarrow 0,7k$ . Если продифференцировать выражения (18) и (19), получим дифференциальную форму условия пластичности

$$d\sigma_x = d\sigma_y. \quad (20)$$

В рассмотренном случае напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  являются главными только при  $\tau_{xy} = 0$ .

Если условие пластичности (15) записать в главных напряжениях, т.е.  $\tau_{xy} = 0$ , то оно записывается в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2. \quad (21)$$

Здесь строго выполняется правило

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Для плоскодеформированного состояния:  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ ,

тогда условие (21) примет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm 2k \text{ или } \sigma_1 - \sigma_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s. \quad (22)$$

Анализируя выражения (18), (19) и (22), можно сделать вывод, что при использовании условия (18) необходимо учитывать, какое из напряжений  $\sigma_x$ , или  $\sigma_y$  максимальное (с учетом знака напряжения).

Рассмотрим энергетическое условие пластичности (15) для случая осесимметричного напряженно-деформированного состояния в цилиндрической системе координат (9)

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 2\sigma_s^2.$$

При использовании инженерного метода для определения деформирующего усилия считают, что цилиндрическая заготовка до деформации остается цилиндрической и после деформации, т.е. бочкообразованием пренебрегают. Тогда  $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta$ ,  $\sigma_\rho - \sigma_\theta$  и выражение (9) примет вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 3\tau_{\rho z}^2 = \sigma_s^2 \text{ или } (\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 3\tau_{\rho z}^2 = 3k^2. \quad (23)$$

Если в выражении (23) аналогично плоскодеформированному состоянию принять два крайних случая, т.е.  $\tau_{\rho z} = 0$  и  $\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z \max} = k$ , то получим:

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \pm \sigma_s, \quad \tau_{\rho z} = 0; \quad (24)$$

$$\sigma_\rho - \sigma_z = 0, \quad \tau_{\rho z} = k. \quad (25)$$

Условие пластичности (24) справедливо в интервале

$$0 \leq \tau_{\rho z} \leq 0,7k,$$

причем оно будет точное при  $\tau_{\rho z} = 0$ , а при  $\tau_{\rho z} \rightarrow 0,7k$  будет приближенное.

Условие пластичности в виде (25) можно использовать, когда

$$0,7k < \tau_{\rho z} \leq k,$$

причем при  $\tau_{\rho z} = k$  оно точное, а при  $\tau_{\rho z} \rightarrow 0,7k$  - приближенное.

В выражении (24) необходимо учитывать, какое из напряжений  $\sigma_\rho$  или  $\sigma_z$  максимальное, а какое минимальное. Дифференциальная форма записи условия пластичности (24) и (25) будет аналогична (20):

$$d\sigma_p = d\sigma_z. \quad (26)$$

Сопоставляя выражения (18) и (24), необходимо отметить, что они отличаются только коэффициентами при  $\sigma_p$ , т.е.

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p$$

и

$$\sigma_p - \sigma_z = \pm 2\sigma_s.$$

Если учесть, что  $\sigma_x$  и  $\sigma_p$  - максимальные напряжения, а  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  - минимальные, то можно записать общую формулу приближенного условия пластичности для плоскодеформированного и осесимметричного состояний

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \beta \sigma_s, \quad (27)$$

где  $\beta$  - коэффициент Лодэ.

Коэффициент  $\beta$  учитывает влияние среднего по величине нормального напряжения при записи приближенного условия пластичности,

причем  $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155$  при плоскодеформированном состоянии и

$\beta = 1$  при осесимметричном напряженно-деформированном состоянии.

Плосконапряженное состояние, как уже отмечалось, обычно реализуется при анализе процессов листовой штамповки, где величиной напряжения, нормального к поверхности заготовки, обычно пренебрегают. Поэтому трение здесь не может достигать максимальных величин, следовательно, касательные напряжения не превышают  $0,7k$  и условия пластичности в виде (19) и (25) для плосконапряженного состояния не существуют.

Если предположить, что касательные напряжения полностью отсутствуют, а нормальные напряжения являются главными, то условия пластичности в виде (21) для плосконапряженного состояния ( $\sigma_2 = 0$ ) запишутся в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_s^2. \quad (28)$$

Данное условие пластичности имеет квадратичность и его применение вызывает ряд математических трудностей. Однако выражение (28) можно записать в упрощенной форме (27). Но здесь надо учитывать, что напряжение, равное нулю, может быть не только средним, но и крайним (максимальным или минимальным).

Предположим, что в цилиндрической системе координат  $\sigma_z = 0$ . Если

напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_\theta$  имеют разные знаки, т.е.  $\sigma_p \cdot \sigma_\theta < 0$ , то напряжение  $\sigma_z = 0$  является средним. Тогда условие пластичности (27) можно записать

$$\sigma_p - \sigma_\theta = \pm \beta \sigma_s. \quad (29)$$

Если напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_\theta$  положительны ( $\sigma_p \cdot \sigma_\theta > 0$ ), то  $\sigma_z = 0$  будет минимальным. В случае, когда  $\sigma_p$  и  $\sigma_\theta$  отрицательны ( $\sigma_p \cdot \sigma_\theta > 0$ ), тогда  $\sigma_z = 0$  будет максимальным. В данных случаях необходимо учитывать, какое из напряжений  $\sigma_p$  или  $\sigma_\theta$  наибольшее по абсолютной величине. Учитывая сказанное, для плосконапряженного состояния на основании уравнения (27) получим

$$\sigma_p = \pm \beta \sigma_s \text{ (при } \sigma_p \cdot \sigma_\theta > 0 \text{ и } |\sigma_p| > |\sigma_\theta| \text{)}, \quad (30)$$

$$\sigma_\theta = \pm \beta \sigma_s \text{ (при } \sigma_p \cdot \sigma_\theta > 0 \text{ и } |\sigma_p| > |\sigma_\theta| \text{)}. \quad (31)$$

В выражениях (29), (30) и (31) коэффициент Лодэ  $\beta$  принимают среднеинтегральным предельных значений возможного изменения данного коэффициента, т.е.  $\beta=1,1$ .

### 1.3. Алгоритм решения задач ОМД методом совместного решения упрощенных уравнений равновесия и пластичности

1. Проанализировать условие задачи, обратив внимание на схему НДС и возможность сведения ее к плоской или осесимметричной. Оценить величину контактного трения, которая может изменяться в пределах от нуля до максимальной величины, равной  $k$ . Рассмотреть состояние материала заготовки с точки зрения температуры (если эти условия не оговорены в задаче). Если деформирование заготовки проводится при повышенных температурах (горячая обработка), то упругим деформированием материала можно пренебречь,  $\sigma_s = const$ . В противном случае необходимо выбрать подходящую аппроксимирующую функцию кривой упрочнения.

2. Графически изобразить расчетную схему рассматриваемого процесса, НДС которого подлежит определению. Выбрать систему координат, наиболее удобную для рассматриваемой конфигурации деформируемого тела. В очаге деформации выделить бесконечно малый элемент и показать характер его нагружения.

3. Записать три уравнения равновесия и с учетом принятого допущения (задачу приводят к осесимметричной или плоской) преобразовать их к двум. Используя первое и второе дополнительное допущения инженерного метода, преобразовать оставшиеся два уравнения равновесия к одному.

4. Записать в упрощенной форме условие пластичности (24) или (25). Оценить, какое из напряжений будет максимальным, а какое - минимальным. Так же записать дифференциальную форму условия пластичности, если это необходимо для нахождения закона распределения нормальных напряжений на контактной поверхности заготовки.

5. Упрощенное условие пластичности или его дифференциальную форму подставить в уравнение равновесия и, разделив переменные, интегрировать полученное уравнение. В оставшемся уравнении равновесия заменить член, содержащий касательное напряжение в дифференциальной форме, на конечное контактное касательное напряжение, определяемое принятым законом трения, используя при этом второе дополнительное допущение инженерного метода - линейное распределение касательных напряжений, вызванных силами трения, по глубине деформируемого металла.

6. Найти постоянную интегрирования «С», используя граничные условия (обычно это равенство нулю напряжения на свободной поверхности) и упрощенное условие пластичности, которое позволяет выразить одно напряжение (контактное) через другое (на свободной поверхности).

Конечная цель решения - определить закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности заготовки и найти полное или удельное усилие.

## 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### *Задача №1*

**Условие задачи:** Определить закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке прямоугольной заготовки между плоскими бойками. Длина заготовки во много раз превышает ее ширину. Условия трения по всей контактной поверхности одинаковы и подчиняются закону Амонтона. Материал заготовки принять неупрочняемым.

### Решение задачи

Решение задачи рассмотрим в соответствии с вышеприведенным алгоритмом.

1. Анализ условия задачи. Принимая во внимание, что длина полосы во много раз превышает ее ширину, деформацией вдоль длины полосы можно пренебречь вследствие значительных в этом направлении сил трения. Тогда НДС осаживаемой заготовки можно принять плоскодеформированным. Трение на контактной поверхности определяется законом  $\tau_k = \mu \sigma_n$ , где  $\sigma_n$  - нормальное напряжение на контактной поверхности. Материал заготовки не упрочняется, следовательно  $\sigma_y = const$ .

1. Графическое изображение расчетной схемы. По условию задачи осаживаемая заготовка прямоугольная, поэтому ее удобно рассматривать в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . Пусть ось  $x$  совпадает с шириной заготовки, ось  $y$  - с высотой, ось  $z$  - с длиной (см. рис.4).

Деформацией вдоль длины заготовки пренебрегаем, следовательно  $\varepsilon_z = 0$ . Закон трения можно переписать в виде  $\tau_k = \mu \sigma_y$ . На выделенный элемент заготовки (см. рис.4) действуют нормальные напряжения  $\sigma_x$  как функции координаты  $x$ .

3. Вывод упрощенного уравнения равновесия. В общем случае для выделенного элемента заготовки можно записать три уравнения равновесия (1). С учетом принятого допущения о плоскодеформированном состоянии, т.е.  $\varepsilon_z = 0$ , уравнения (1) примут вид уравнений (4):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

С учетом первого дополнительного допущения считаем, что напряжение  $\sigma_y$  постоянно относительно координаты  $y$  (нормальные напряжения внутри тела равны напряжениям на контактной поверхности).

Следовательно,  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$  и второе уравнение равновесия (32) обра-

щаются в тождество.

Согласно второму дополнительному допущению (касательное напряжение  $\tau_{xy}$  является линейной функцией координаты  $y$ ) считаем, что

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{2\tau_k}{h}.$$

Подставляя данное выражение в первое уравнение равновесия (32) и учитывая, что напряжение  $\sigma_x$  является функцией только одной координаты  $x$ , т.е.  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dx}$ , получим

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (33)$$

После подстановки закона изменения трения  $\tau_k = \mu\sigma_y$ , в уравнение (33) окончательно получим

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\mu\sigma_y}{h} = 0. \quad (34)$$

4. Запись упрощенного условия пластичности. Упрощенное условие пластичности запишем в виде (27) с учетом того, что для плоскоде-

формированного состояния коэффициент Лодэ  $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Определим

максимальное и минимальное напряжения, действующие на выделенный элемент заготовки (см. рис.4). Основным деформирующим напряжением является  $\sigma_y$ , напряжение  $\sigma_x$  вызвано силами трения, поэтому

$|\sigma_y| > |\sigma_x|$ . Оба эти напряжения являются сжимающими (отрицатель-

ными), поэтому  $\sigma_x = \sigma_{max}$  (как менее отрицательное), а  $\sigma_y = \sigma_{min}$ .

Упрощенное условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s. \quad (35)$$

Дифференциальная форма условия будет иметь вид (20)

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dx} = 0, \quad d\sigma_x = -d\sigma_y. \quad (36)$$

5. Совместное решение упрощенных уравнений равновесия и пластичности. Подставим дифференциальное условие пластичности (36) в уравнение равновесия (34), получим

$$\frac{d\sigma_y}{dx} + \frac{2\mu\sigma_y}{h} = 0.$$

Разделим переменные

$$\int \frac{d\sigma_y}{\sigma_y} = -\frac{2\mu}{h} \int dx$$

и, интегрируя, получим

$$\ln \sigma_y = -\frac{2\mu}{h} x + C. \quad (37)$$

После потенцирования, уравнение (37) имеет вид

$$\sigma_y = C e^{-\frac{2\mu}{h} x}, \quad (38)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования.

Выражение (38) является общим решением уравнений (34) и (35).

6. Нахождение постоянной интегрирования. Для нахождения постоянной интегрирования необходимо воспользоваться граничными условиями. На границе контактной поверхности, в точке, отвечающей координате  $x=b/2$ , (см. рис.4),  $\sigma_x=0$ . Из условия пластичности (35), связывающего напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , получим, что при  $x=b/2$  в рассматриваемой точке

$$\sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s.$$

Данные условия подставим в выражение (38) и решив его относительно  $C$ , получим

$$C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cdot e^{\frac{\mu b}{h}}. \quad (39)$$

Выражение (39) подставим в уравнение (38) и тогда закон распределения напряжения  $\sigma_y$  вдоль контактной поверхности будет

$$\sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cdot e^{\frac{\mu}{h}(b-2x)} \quad \text{или} \quad \sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cdot \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-2x)\right].$$

## Задача №2

**Условие задачи:** Определить закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке цилиндрической заготовки между плоскими бойками. Условия трения на контактной поверхности подчиняются закону Зибеля. Материал заготовки считать неупрочняемым, бочкообразованием заготовки пренебречь.

### Решение задачи

1. Осаживаемая заготовка цилиндрическая, поэтому НДС можно принять осесимметричным. Все напряжения не зависят от окружной координаты. Трение на контактной подчиняется закону  $\tau_k = \mu_s \sigma_s$ .

Материал заготовки не упрочняется, т.е.  $\sigma_s = const$ .

2. Данную заготовку необходимо рассматривать в цилиндрической системе координат  $(\rho, \theta, z)$ . Поместим центр системы координат в середину заготовки. Ось  $z$  совместим с осью симметрии (рис.5). На выделенный элемент заготовки действуют напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\rho$  и  $\tau_{\rho z} = \tau_k$ . Все напряжения не зависят от координаты  $\theta$ . По условию задачи бочкообразованием заготовки пренебрегаем, поэтому  $\epsilon_\rho = \epsilon_\theta$ , следовательно,  $\sigma_\rho = \sigma_\theta$ .

3. Уравнения равновесия (5) при осесимметричном НДС переписутся в виде (7) и с учетом равенства напряжений  $\sigma_\rho = \sigma_\theta$  примут вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} = 0; \quad (40)$$

$$\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0.$$

Первое дополнительное допущение метода позволяет принять, что

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \text{ Касательные напряжения на контактной поверхности, выз-$$

ванные трением, не зависят от координаты  $\rho$ , поэтому  $\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} = 0$ .

Согласно второму дополнительному допущению метода

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} = \frac{2\tau_k}{h}.$$

Следовательно, уравнения равновесия (40) можно заменить одним уравнением

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (41)$$

4. Упрощенное условие пластичности запишем в виде (27), учитывая при этом, что для осесимметричного НДС  $\beta=1$ . Напряжение  $\sigma_\rho$  будет максимальным, а  $\sigma_z$  - минимальным, т.к. оба напряжения отрицательные и  $|\sigma_z| > |\sigma_\rho|$ . Упрощенное условие пластичности примет вид

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \sigma_s. \quad (42)$$

и его дифференциальная форма запишется в виде

$$d\sigma_\rho = d\sigma_z. \quad (43)$$

5. Подставим выражение (43) в уравнение равновесия (41) и учитывая, что  $\tau_k = \mu_s \sigma_s$ , получим

$$\frac{d\sigma_z}{d\rho} + \frac{2\mu_s \sigma_s}{h} = 0.$$

Разделим переменные

$$\int d\sigma_z = -\frac{2\mu_s \sigma_s}{h} \int d\rho$$

и, интегрируя, получим

$$\sigma_s = -\frac{2\mu_s \sigma_s}{h} \rho + C. \quad (44)$$

6. На границе контактной поверхности, в точке, отвечающей координате  $\rho = \frac{d}{2}$  (см. рис.5),  $\sigma_\rho = 0$  (боковая поверхность заготовки свободна от нагрузки). Из условия пластичности (42) получим  $\sigma_z = -\sigma_s$ . Данное значение  $\sigma_z$  подставим в уравнение (44) и найдем постоянную интегрирования С:

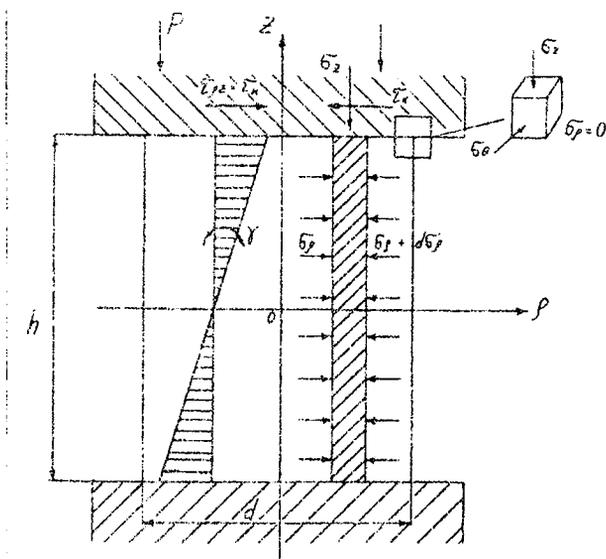


Рис. 5. Схема осадки цилиндрической заготовки

$$C = \sigma_s \left( \frac{\mu_s d}{h} - 1 \right) \quad (45)$$

Выражение (45) подставим в (44) и окончательно получим

$$\sigma_z = \sigma_s \left[ \frac{\mu_s}{h} (d - 2\rho) - 1 \right]$$

### Задача № 3

Условие задачи: Определить необходимое удельное усилие для прожки цилиндрической заготовки в вырезных байках. Условие трения а контактной поверхности заготовки подчиняется закону

$$k = -2\mu_s \sigma_s \frac{z}{l_0}. \text{ Материал заготовки считать неупрочняемым.}$$

### Решение задачи

Деформирующую силу определим на основании интеграла (12). аделив выражение для деформирующей силы на площадь проекции

контактной поверхности, получим искомое удельное усилие. Для определения деформирующей силы необходимо найти характер распределения нормальных напряжений на контактной поверхности. Для упрощения решения рассмотрим случай, когда вырез бойков охватывает заготовку по всей окружности контура (см. рис.2, в). НДС заготовки в очаге деформации является осесимметричным.

Примем цилиндрическую систему координат, расположив ось  $z$  по оси заготовки, а плоскость  $\rho\theta$  по плоскости раздела течения металла, которая делит  $l_0$  пополам (рис.6).

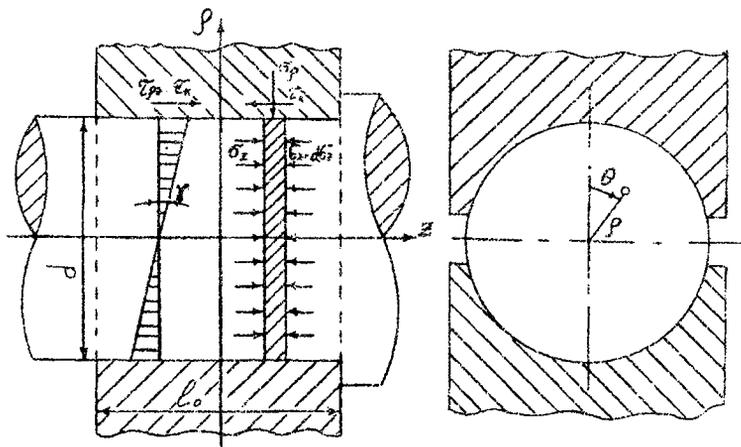


Рис. 6. Схема протяжки цилиндрической заготовки в вырезных бойках

Цилиндрическая заготовка в процессе деформации остается цилиндрической, поэтому  $\epsilon_\rho = \epsilon_0$ , а следовательно,  $\sigma_\rho = \sigma_\theta$ . Уравнения равновесия после принятых допущений примут вид (40).

Первое дополнительное допущение метода позволяет принять

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = 0. \text{ Согласно второму дополнительному допущению}$$

$$\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} = \frac{\tau_k}{d} = \frac{2\tau_k}{d}, \quad \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = \frac{\tau_k}{\frac{d}{2}} = \frac{2\tau_k}{d}.$$

Благодаря дополнительным допущениям из системы уравнений (40)

останется второе уравнение, которое имеет вид

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{4\tau_k}{d} = 0. \quad (46)$$

Упрощенное условие пластичности для протяжки запишется в виде

$$\sigma_z - \sigma_p = \beta\sigma_s, \beta = 1 \quad (47)$$

или

$$d\sigma_z = d\sigma_p. \quad (48)$$

Подставим дифференциальную форму условия пластичности (48) в уравнение равновесия (46) и, учитывая, что  $\tau_k = 2\mu_s\sigma_s z / l_0$  (этот закон является разновидностью закона Зибеля), получим

$$\frac{d\sigma_p}{dz} - \frac{8\mu_s\sigma_s z}{dl_0} = 0$$

Разделив переменные, имеем

$$\int d\sigma_p = \frac{8\mu_s\sigma_s}{dl_0} \int z dz.$$

После интегрирования

$$\sigma_p = \frac{4\mu_s\sigma_s}{dl_0} z^2 + C. \quad (49)$$

Из граничных условий при  $z=l/2$   $\sigma_z=0$ , а из условия пластичности (47)  $\sigma_z = -\sigma_s$ . Данное условие подставим в (49) и, решив его относительно  $C$ , получим

$$C = -\sigma_s \left( 1 + \frac{\mu_s l_0}{d} \right)$$

Окончательно имеем

$$\sigma_p = -\sigma_s \left[ 1 + \frac{4\mu}{dl_0} \left( \frac{l_0^2}{4} - z^2 \right) \right].$$

Деформирующую силу определим на основании интеграла (12), учитывая, что  $dF = d \cdot dz$  ( $\sigma_p$  не зависит от  $\theta$ ):

$$P = 2 \int_0^{0.5l} \sigma_p d \cdot dz = 2 \int_0^{0.5l_0} \sigma_p \left[ 1 + \frac{4\mu_s}{dl_0} \left( \frac{l_0^2}{4} - z^2 \right) \right] d \cdot dz.$$

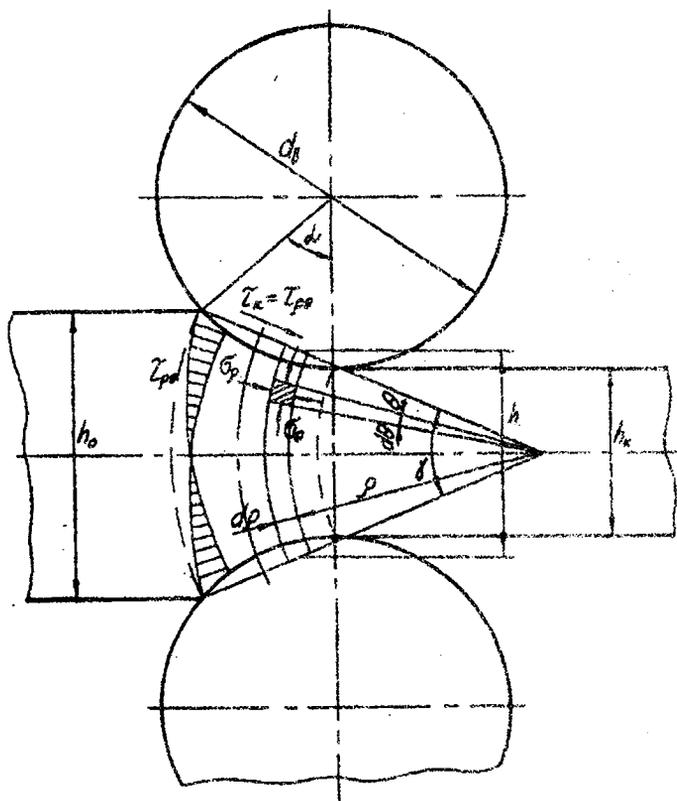


Рис. 7. Схема процесса прокатки

После интегрирования получим

$$P = dl_0 \sigma_s \left( 1 + \frac{2}{3} \mu_s \frac{l_0}{d} \right)$$

Разделив на площадь проекции контактной поверхности  $dl_0$ , определим давление

$$p = \sigma_s \left( 1 + \frac{2}{3} \mu_s \frac{l_0}{d} \right).$$

#### Задача № 4

**Условие задачи:** Определить величину нормальных контактных напряжений при прокатке широкой полосы (рис. 7). Дугу захвата заменить хордой. Считать контактные напряжения по дуге захвата по-

стоянными и имеющими максимальное значение  $\tau_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s$ . Уши-

рением полосы и упрочнением металла пренебречь. Высота полосы  $h$  в любом сечении связана с радиусом  $\rho$  и углом захвата  $\alpha$  выражением

$$h = \rho \cdot \alpha.$$

#### Решение задачи

При прокатке широкой полосы можно принять, что ширина полосы не изменяется, т.е.  $\epsilon_z = 0$ . Тогда дифференциальное уравнение равновесия в направлении оси  $z$  отсутствует:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0.$$

Для определения деформирующего усилия необходимо знать характер распределения нормальных напряжений  $\sigma_\theta$  на контактной поверхности. Поэтому можно считать, что напряжение  $\sigma_\theta$  постоянно вдоль координаты  $\theta$  и равно по величине его значению на контактной поверхности (первое допущение инженерного метода), тогда

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Касательные напряжения, вызванные трением на контактной поверхности (вдоль координаты  $\rho$ ), считаем постоянными, т.е.

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} = 0.$$

Характер изменения напряжений  $\tau_{\rho\theta}$  в глубину тела (вдоль координаты  $\theta$ ) принимаем по линейному закону, на контактной поверхности  $\tau_{\rho\theta} = \tau_k$ , поэтому

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} = \frac{\tau_k}{\alpha/2} = \frac{2\tau_k}{\alpha}.$$

Приведенные допущения обращают в тождество второе уравнение равновесия, а в первом все напряжения зависят только от координаты  $\rho$ , следовательно

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = \frac{d\sigma_\rho}{d\rho}.$$

Окончательно получим упрощенное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{2\tau_k}{\alpha} = 0. \quad (50)$$

Энергетическое условие пластичности для случая плоской деформации имеет вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2. \quad (51)$$

Согласно условию задачи  $\tau_k = \tau_{\rho\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ . Подставляя данное выражение в условие пластичности (51), получим

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = 0. \quad (52)$$

Дифференциальное условие пластичности запишется в виде

$$d\sigma_\rho = d\sigma_\theta. \quad (53)$$

Подставляя выражения (52) и (53) в уравнение равновесия (50), учитывая, что  $\tau_k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ , получим

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\alpha} = 0. \quad (54)$$

В выражении (54) заменим переменную  $\rho$  на  $h$ :

$$\rho = \frac{h}{\alpha}, \quad d\rho = \frac{dh}{\alpha}.$$

Тогда выражение (5) перепишем в виде

$$\frac{d\sigma_\theta}{dh} + \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\alpha \cdot h} = 0. \quad (55)$$

В уравнении (55) разделим переменные

$$\int d\sigma_\theta = -\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\alpha} \int \frac{dh}{h}.$$

После интегрирования получим

$$\sigma_\theta = -\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\alpha} \ln h + C. \quad (56)$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из граничных условий

при  $h = h_0$ ,  $\sigma_\rho = 0$ ,  $\tau_{\rho\theta} = 0$ , тогда из условия пластичности (51)

получим  $\sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ .

Подставляя граничные условия в выражение (56), получим

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \left( \frac{1}{\alpha} \ln h_0 - 1 \right)$$

Постоянную интегрирования  $C$  подставим в общее решение (56) и

окончательно запишем

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \left( \frac{1}{\alpha} \ln \frac{h_0}{h} - 1 \right)$$

### Задача №5

Условие задачи: Определить характер изменения напряжений  $\sigma_\rho$  на участке  $ab$  при обжиге тонкостенной трубы в конической матрице (рис. 8).

Принять:  $R_p = \infty$ ;  $R_\theta = p / \cos \alpha$ ;  $|\sigma_\theta| > |\sigma_\rho|$ . Материал заготовки неупругоэластичный, толщина стенки постоянна.

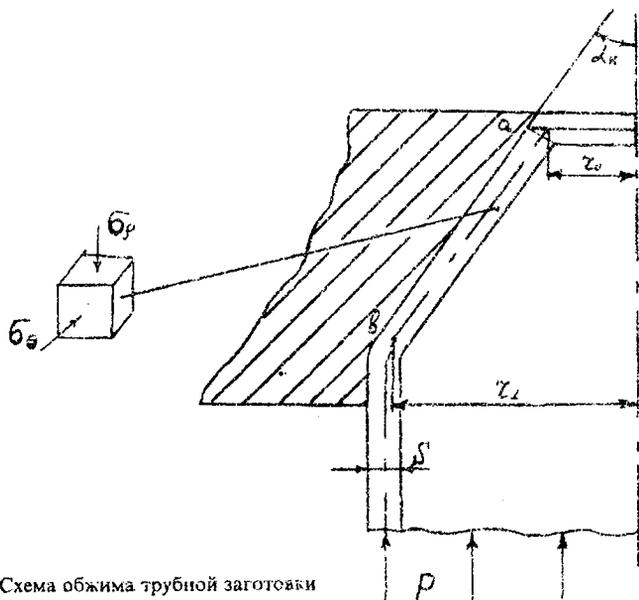


Рис. 8. Схема обжима трубной заготовки

### Решение задачи

Запишем общее уравнение равновесия тонкостенной, осесимметричной заготовки постоянной толщины:

$$\rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\mu\rho}{\sin\alpha} \left( \frac{\sigma_r}{R_p} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0.$$

Подставим в данное уравнение значения  $R_p$  и  $R_\theta$  для участка  $ab$ , получим

$$\rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \sigma_r - \sigma_\theta (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 0. \quad (57)$$

Условие пластичности

$$-\sigma_\theta = \beta \sigma_r, \quad (58)$$

где  $\beta = 1,1$  - коэффициент Лодэ.

В условии (58) учтено, что  $\sigma_\theta < 0$  и  $\sigma_r < 0$ ,  $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$ ,  $\sigma_z = 0$ ,

поэтому  $\sigma_z$  является максимальным напряжением, а  $\sigma_\rho$  - минимальным.

Подставив условие пластичности в уравнение равновесия (57), получим

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + k = 0, \quad (59)$$

где  $k = l, l\sigma_s(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha)$ .

В уравнении (59) разделим переменные, для этого умножим уравнение (59) на  $d\rho$ , разделим на  $\rho$  и на  $\sigma_\rho + k$ , тогда имеем

$$\int \frac{d(\sigma_\rho + k)}{\sigma_\rho + k} = - \int \frac{d\rho}{\rho},$$

после интегрирования

$$\ln(\sigma_\rho + k) = - \ln \rho + C$$

или

$$\sigma_\rho = \frac{C}{\rho} - k. \quad (60)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из граничных условий:

$\rho = r_0, \sigma_\rho = 0$ . Тогда из выражения (60) получим  $C = r_0 k$ .

Полученное значение постоянной интегрирования подставим в выражение (60) и окончательно получим

$$\sigma_\rho = l, l\sigma_s(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) \left( \frac{r_0}{\rho} - 1 \right).$$

#### Задача №6

**Условие задачи:** Определить характер распределения напряжения  $\sigma_\rho$  на плоском участке фланца при вытяжке плоской заготовки в цилиндрическое полое изделие (рис. 9). Вытяжка осуществляется без прижима, поэтому можно принять, что трение на участке  $AB$  отсутствует. Нормальное напряжение к плоскому участку  $\sigma_z = 0$ .

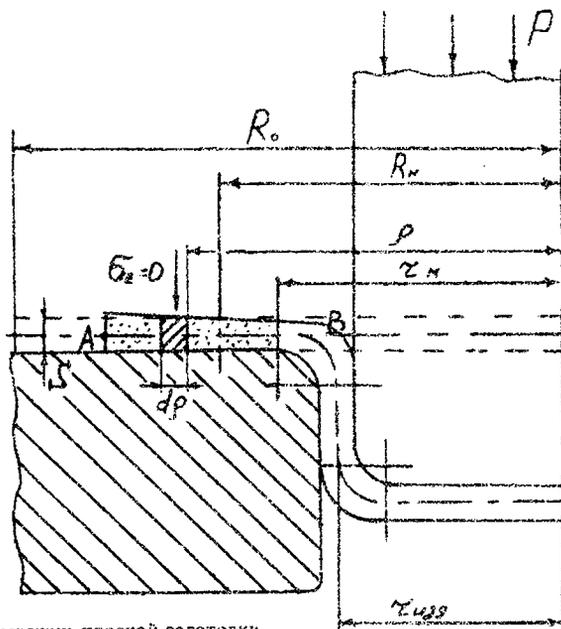


Рис. 9. Схема вытяжки плоской заготовки в цилиндрическое полое изделие

### Решение задачи

Из исходного уравнения

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{\mu\rho}{\sin\alpha} \left( \frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0,$$

принимая, что трение на участке  $AB$  отсутствует, т.е.  $\mu = 0$ , уравнение равновесия будет иметь вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \quad (61)$$

Упрощенное условие пластичности

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = 1,1\sigma_s \quad (62)$$

подставим в (61), получим

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{1,1\sigma_s}{\rho} = 0.$$

После разделения переменных

$$d\sigma_\rho = -1,1\sigma_s \frac{d\rho}{\rho}$$

и интегрирования запишем общее решение уравнений (61) и (62):

$$\sigma_\rho = -1,1\sigma_s \ln \rho + C. \quad (63)$$

Используя граничные условия на участке  $AB$  при  $\rho = R_H$ ,  $\sigma_\rho = 0$ ,

т.к. наружная кромка заготовки не нагружена. Определим постоянную интегрирования  $C$  из уравнения (63):

$$C = 1,1\sigma_s \ln R_H.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (63), окончательно получим

$$\sigma_\rho = 1,1\sigma_s \ln \frac{R_H}{\rho}.$$

#### Задачи для самостоятельного решения

*Задача №1.* Определить закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке прямоугольной заготовки между плоскими плитами. Длина заготовки во много раз превышает ее ширину. Условие трения на контактной поверхности подчиняется зако-

ну  $\tau_k = \mu\sigma_s \frac{x}{h}$ . Материал заготовки принять неупрочняемым,

$$\sigma_s = const.$$

*Задача №2.* Определить закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке цилиндрической заготовки между плоскими банками. Условия трения на контактной поверхности подчиняются закону Амонтона  $\tau_k = \mu \sigma_H$ , где  $\sigma_H$  - нормальные напряжения на контактной поверхности. Материал заготовки считать неупругим, бочкообразованием заготовки пренебречь.

*Задача №3.* Определить закон распределения нормальных напряжений на контактной поверхности при протяжке круглой заготовки в вырезных байках. Трение на контактной поверхности подчиняется закону  $\tau_k = \mu \sigma_s$ . Материал заготовки считать неупругим.

*Задача №4.* Определить характер распределения напряжений  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\theta$  по радиусу  $\rho$  при гибке широкой полосы в зонах растяжения и сжатия. Принять:  $\varepsilon_z = 0$ ;  $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho} = 0$ ;  $s = const$ ;  $\sigma_s = const$ .

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сторожев М.В., Попов Е.А.* Теория обработки металлов давлением. - М.: Машиностроение, 1977. - 423 с.
2. *Унксов Е.П.* Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. - М.: Машгиз, 1955. - 280 с.

Учебное издание

*Глуценков Владимир Александрович*  
*Лосев Михаил Григорьевич*  
*Логвинов Анатолий Николаевич*

**Метод совместного решения уравнений равновесия  
и условия пластичности в теории обработки металлов давлением  
(инженерный метод).**

**Теория и примеры решения типовых задач**

Учебное пособие

Редактор *Т.К. Крестина*  
Техн. редактор *Г.А. Усачева*  
Корректор *Т.И. Щелокова*

Лицензия ЛР №020301 от 30.12.96.

Подписано в печать 30.04.2000. Формат 60x84/16. Бумага газетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отт. 2,21, Уч.-изд. л. 2,25.  
Тираж 100 экз. Заказ 44. Арт. С-11/2000.

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева,  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.  
ИПО Самарского государственного аэрокосмического  
университета. 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.