

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. АЛЕКСЕЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 01.03.03, 01.04.03 Механика и математическое моделирование, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2018

УДК 531.01(075)+519.876(075)

ББК 22.21я7+22.1я7

А 471

Рецензенты: д-р техн. наук, доц. А. В. С е д е л ь н и к о в,
канд. техн. наук М. В. Б о р и с о в

Алексеев, Алексей Владимирович

А471 Математическое моделирование движения твердых тел с жидким наполнением: учеб. пособие / А.В. Алексеев. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. – 108 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1313-9

В данном пособии рассмотрены основные методы построения математических моделей движения твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, относительно неподвижной точки. Приведены особенности составления уравнений движения в предельных случаях: идеальная жидкость, жидкость большой вязкости, жидкость малой вязкости.

Пособие предназначено для студентов по направлениям подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение в рамках дисциплин по математическому моделированию, а также для бакалавриата 01.03.03 Механика и математическое моделирование в рамках курса «Прикладные задачи динамики твердого тела».

Пособие разработано на кафедре теоретической механики.

УДК 531.01(075)+519.876(075)

ББК 22.21я7+22.1я7

ISBN 978-5-7883-1313-9

© Самарский университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава I УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ	8
§1. Принцип Гамильтона–Остроградского	8
§2. Некоторые формулы кинематики и векторного анализа	11
§3. Основные динамические величины	18
§4. Вывод уравнений движения свободного твердого тела с жидкостью	20
§5. Уравнения Лагранжа	30
§6. Силы давления жидкости на твердое тело	33
§7. Уравнения движения системы относительно центра масс	36
§8. Интегралы уравнений движения	39
Глава II ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, НАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ	50
§1. Постановка задачи. Возможность разложения движения рассматриваемой системы на движение около центра тяжести и поступательное движение	50
§2. Формулы проекций главного момента количеств движения полости и заключенной в ней жидкости	51
§3. Дифференциальные уравнения движения тела с полостями, наполненными жидкостью. Эквивалентные тела. Жироскопический эффект жидких масс в случае многосвязных полостей	55
Глава III ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ (ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА)	59
§1. Основные уравнения	59
§2. Анализ гидродинамической задачи	65
§3. О решении линейной стационарной краевой задачи	69
§4. Некоторые частные формы полостей	74
§5. Уравнения динамики тела с жидкостью	80
Глава IV ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ (ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА)	86
§1. Основные уравнения	86
§2. Анализ гидродинамической задачи	91
§3. Уравнения динамики тела с жидкостью	100
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	106

Введение

Задача о движении твердого тела, имеющего полости, целиком заполненные жидкостью, начала привлекать к себе внимание ученых свыше ста пятидесяти лет назад.

Стокс был, по-видимому, первым, кто обратил внимание (1842-1847 гг.) на эту интересную проблему механики; ею занимались Гельмгольц (1860 г.), Любек (1873 г.) и Ламб (1873 г.), рассмотревшие ряд частных случаев, а также Нейман (1883 г.), интересовавшийся этой задачей в связи с изучением движения твердых тел в жидкости.

Первое обстоятельное изучение динамики твердого тела, имеющего полости, полностью заполненные однородной несжимаемой жидкостью, в общей постановке было проведено Н.Е. Жуковским (1885 г.). Жуковский показал, что потенциальное движение жидкости в полости определяется движением тела, само же движение тела совершается так, как если бы жидкость была заменена эквивалентным твердым телом.

Одновременно с изучением задачи о движении твердых тел с полостями, наполненными жидкостью, возник интерес к изучению вопросов устойчивости движения таких тел. В своих опытах с тонкостенным сфероидальным волчком, заполненным жидкостью, Кельвин (1877 г.) обнаружил, что если форма полости достаточно сжатая, а волчок вращается быстро, то он устойчив. Если же волчок имеет слегка вытянутую форму, он становится сильно неустойчивым, какую бы угловую скорость ему ни сообщали. Математическим объяснением этого явления занимались Гринхилл (1880 г.), Ф.А. Слудский (1895 г.), Гаф (1895 г.), Пуанкаре (1910 г.) и Бассет (1911 г.), рассматривавшие однородное вихревое движение жидкости в эллипсоидальной полости. В частности, Гаф исследовал малые

колебания в окрестности равномерного вращения твердого тела и жидкости в его полости как одного твердого тела вокруг главной оси инерции, получил необходимые условия устойчивости и проанализировал их для случая оболочки пренебрежимо малой массы. Пуанкаре рассмотрел также эту задачу при учете упругости оболочки и неоднородности жидкости.

Большой интерес к задаче о движении твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, снова возник в наше время, и особенно в последние 40-50 лет, причем наряду с изучением движения тел с полостями, полностью заполненными жидкостью, была поставлена и получила большое развитие новая задача о движении твердого тела с полостями, не полностью наполненными жидкостью.

Развитие этой теории стимулировалось появлением разнообразных задач прикладного характера. Сюда относятся и задачи динамики ракет, содержащих жидкое наполнение, и задачи прочностных расчетов резервуаров и емкостей, подвергающихся действию сейсмических нагрузок. Целый ряд подобных задач опубликован в связи с проблемами гидростроительства и теории корабля. Благодаря этим обстоятельствам в разных странах мира появилось много разнообразных исследований, посвященных различным аспектам динамики тела с жидкостью. В Советском Союзе целый ряд результатов этой теории связан с именами С.Л. Соболева, Н.Г. Четаева, Л.Н. Сретенского, Д.Е. Охоцимского, Г.С. Нариманова, А.Ю. Ишлинского, М.Е. Темченко, С. В. Малашенко, Б.И. Рабиновича, И.М. Рапопорта и многих других авторов. Библиография работ в этой области насчитывает огромное число наименований, в связи с чем нет возможности перечислить всех авторов.

В этом огромном количестве работ можно, однако, выделить три основных направления: 1) исследование линеаризованных уравнений движения, применение методов теории малых колебаний и спектральной теории операторов; 2) исследование полных нелинейных уравнений движения, применение методов аналитической механики; 3) экспериментальные исследования.

Наибольшее число работ посвящено различным линейным аспектам теории. Здесь, прежде всего, следует выделить вопросы малых колебаний около положения равновесия твердого тела с идеальной несжимаемой тяжелой жидкостью. Это наиболее простой раздел теории, но именно он нашел широкие практические применения. Здесь до конца выяснены все вопросы, возникающие в связи с разрешимостью соответствующих математических задач: определена структура спектра, доказана разрешимость задачи Коши и т. д. Выяснен целый ряд механических особенностей колебаний тела с жидкостью. Установлено, например, что для устойчивости колебаний подобной системы с бесконечным числом степеней свободы, необходима и достаточна устойчивость некоторого твердого тела. Получил большое развитие и вычислительный аспект этой теории. Решение многих задач теории колебаний доведено до уровня стандартных программ.

Более сложным является случай, когда жидкость подвержена действию сил поверхностного натяжения. Правда, чисто математические вопросы теории малых колебаний также не представляют собой сложности: задачу удается свести к операторному уравнению с вполне непрерывным самосопряженным оператором и все математическое содержание легко сводится к элементарным фактам спектральной теории линейных операторов. Однако вычислительный аспект почти не разработан.

Еще менее разработана теория малых колебаний твердого тела с вязкой жидкостью. В этой области имеются только отдельные результаты: для больших чисел Рейнольдса развиты асимптотические методы, которые позволяют эффективно исследовать некоторые динамические задачи. Кроме того, достигнут известный успех в развитии методов исследования движения твердого тела, если в полостях находится сильно вязкая жидкость.

По второму из указанных направлений работ опубликовано значительно меньше. До последнего времени не предпринималось никаких попыток развить эффективные численные методы

исследования нелинейных уравнений движения; это обстоятельство легко понять в свете состояния, в котором находятся численные методы решения уравнений Навье-Стокса. Основное внимание сосредоточивалось на исследовании общих свойств движений (рассмотрение различных форм нелинейных уравнений движения твердого тела с жидкостью, выяснение их эквивалентности, условий существования первых интегралов уравнений движения и т. п.) и, прежде всего, устойчивости движения. Здесь удалось достигнуть определенных успехов, которые связаны почти исключительно с применением и развитием методов Ляпунова.

Глава I УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

Эта глава содержит вывод уравнений движения твердых тел с жидкостью, рассматриваемых как одна механическая система. В основу динамики положен принцип наименьшего действия в форме Гамильтона-Остроградского. Вариационная формулировка задач динамики имеет определенные достоинства, например, с точки зрения обоснования необходимости и достаточности выводимых уравнений и граничных условий, а рассмотрение тела и жидкости как одной системы позволяет достигнуть известной краткости. Истолкован механический смысл уравнений, которые представлены в нескольких различных формах, в частности в виде уравнений Лагранжа. Рассмотрен вопрос об интегралах уравнений движения и тех условиях, при которых они имеют место. Глава заканчивается рассмотрением уравнений движения твердого тела с вязкой жидкостью в полости.

§1 Принцип Гамильтона-Остроградского

Как известно, в основу механики голономных систем может быть положен вариационный принцип наименьшего действия в форме Гамильтона-Остроградского. Согласно этому принципу для действительного движения какой-либо механической системы с идеальными геометрическими связями:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T + \sum_g F_g \cdot \delta r'_g) dt = 0. \quad (1.1)$$

Здесь и далее t обозначает время, t_0 и t_1 – фиксированные пределы интегрирования, T – кинетическую энергию системы, F_g – вектор заданной активной силы, приложенной к \mathcal{G} -й точке, причем

суммирование происходит по всем точкам системы, $r'_g = \sum_{i=1}^3 x'_g i'_i$ – радиус-вектор точки системы относительно начала O' (рис.1) некоторой неподвижной (инерциальной) прямоугольной системы осей координат $O'x'_1x'_2x'_3$. Единичные векторы (орты) направлений осей x'_s обозначены через i'_s ($s=1, 2, 3$). Символ δ обозначает вариацию или изменение соответствующей величины, перед которой он стоит, на возможном перемещении системы. Любое сравниваемое (мыслимое) движение, допускаемое наложенными на систему связями, и действительное движение происходят одновременно ($\delta t = 0$) между двумя фиксированными положениями системы. Вариации радиус-векторов всех точек системы должны, поэтому, обращаться в 0 в этих конечных положениях, т. е. при $t = t_0$ и $t = t_1$, $\delta r' = 0$.

Принцип (1.1) можно получить интегрированием из принципа Даламбера-Лагранжа, справедливого для всякой материальной системы с идеальными связями. В силу этого принцип Гамильтона-Остроградского справедлив для любой механической системы с голономными связями, включая сплошную среду; им можно воспользоваться и для вывода уравнений движения твердых тел с полостями, содержащими жидкость.

Мы будем изучать движение абсолютно твердого тела, т. е. такого тела, расстояния между двумя любыми точками которого остаются неизменными все время. Допустим, что тело имеет одну или несколько полостей, частично или полностью наполненных однородными несжимаемыми идеальными жидкостями. В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением случая только одной полости, так как в случае нескольких полостей надо будет в уравнениях движения лишь просуммировать величины, относящиеся к жидкости, по всем полостям, что не вносит принципиальных трудностей. Твердое тело и жидкость будем рассматривать как одну механическую систему.

Пусть ρ обозначает постоянную плотность жидкости, τ – объем области, занятой жидкостью в данный момент времени, S' – границу области τ , σ – поверхность стенок полости (рис. 1).

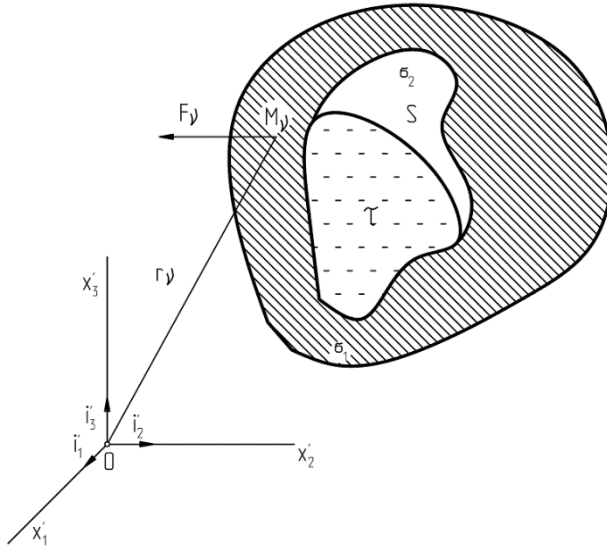


Рис. 1. Схема механической системы, состоящей из твердого тела и полости, частично заполненной жидкостью

Если жидкость полностью заполняет полость, то, очевидно, S' совпадает с σ . Если же жидкость лишь частично наполняет полость, то поверхность S' состоит из свободной поверхности жидкости S и части σ_1 поверхности σ , с которой жидкость соприкасается в данный момент времени, т. е.

$$S' = S + \sigma_1, \sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где σ_2 обозначает часть поверхности σ , не соприкасающуюся в данный момент с жидкостью. В этом случае оставшая часть полости или заполнена воздухом, ограниченным поверхностью $S + \sigma_2$, давление которого P_0 считается постоянным и массой которого будем пренебрегать, или представляет собой вакуум с давлением $P_0 = 0$. Замкнутую линию пересечения поверхностей S и σ обозначим через s .

Далее будем предполагать, что поверхность S' является гладкой или состоит из конечного числа кусков гладких поверхностей.

Так как жидкость предполагается несжимаемой, то в каждой ее точке вариации радиус-векторов должны удовлетворять в любой момент времени условию несжимаемости:

$$\operatorname{div} \delta r' = \frac{\partial \delta x'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \delta x'_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial \delta x'_3}{\partial x'_3} = 0.$$

Умножая это уравнение на неопределенный множитель Лагранжа $p(r', t)$, интегрируя по объему жидкости τ и, прибавляя результат к уравнению (1.1), запишем принцип Гамильтона-Остроградского для рассматриваемой нами механической системы в виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_g F_g \cdot \delta r'_g + \int_{\tau} p \operatorname{div} r' d\tau) dt = 0. \quad (1.2)$$

Символ $\int_{\tau} (...) d\tau$ обозначает тройной интеграл, взятый по объему τ области, занятой жидкостью. В дальнейшем аналогичным образом будем записывать двойные и криволинейные интегралы, взятые соответственно по некоторой поверхности S или линии s .

Из аналитической механики известно, что множитель Лагранжа пропорционален реакции связи. В данном случае связью является уравнение несжимаемости, поэтому множитель Лагранжа $p(r', t)$ отождествляется с гидродинамическим давлением p , которое можно рассматривать как реакцию связи – условия несжимаемости.

§2 Некоторые формулы кинематики и векторного анализа

Кроме неподвижной системы осей координат, введем в рассмотрение также подвижную прямоугольную систему осей координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в некоторой точке O твердого тела, жестко связанную с твердым телом и одноименную (т.е. правую или левую) с неподвижной системой координат. Единичные векторы подвижных осей обозначим через i_s ($s = 1, 2, 3$). Радиус-вектор какой-либо точки системы относительно точки O :

$$r = \sum_{s=1}^3 x_s i_s,$$

причем

$$r'_g = r'_0 + r_g, \quad (1.3)$$

где r'_0 – радиус-вектор точки O относительно неподвижной точки O' (рис. 2).

Положение подвижной системы осей координат $Ox_1x_2x_3$, а вместе с ней и твердого тела в пространстве $O'x'_1x'_2x'_3$ можно определить радиус-вектором $r'_0 = \sum_{s=1}^3 x'_{0s} i'_s$ и косинусами $\gamma_{sr} = i'_s \cdot i_r$ ($s, r = 1, 2, 3$) углов между неподвижными и подвижными осями. Между девятью величинами γ_{sr} имеют место зависимости:

$$\sum_{r=1}^3 \gamma_{sr}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^3 \gamma_{sj} \gamma_{rj} = 0 \quad (s \neq r = 1, 2, 3),$$

так что независимыми будут лишь какие-либо три из величин γ_{sr} ($s, r = 1, 2, 3$).

В дальнейшем движение нашей механической системы по отношению к неподвижной системе осей координат будем называть абсолютным, а по отношению к подвижной системе координат – относительным. Уравнения движения будем относить к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

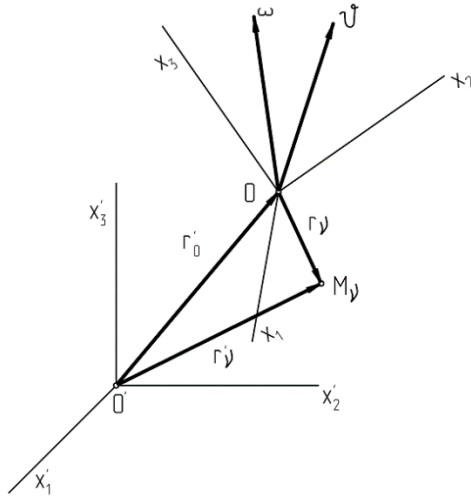


Рис. 2. Кинематические величины в абсолютной и подвижной системах координат

По теореме о сложении скоростей вектор абсолютной скорости V какой-либо точки системы можно представить в виде:

$$V = V_0 + \omega \times r + u, \quad (1.4)$$

где V_0 – вектор скорости точки O , ω – вектор мгновенной угловой скорости тела, u – вектор относительной скорости. По определению

$u = \frac{dr}{dt}$, причем производная по времени берется в подвижной системе

координат, при фиксированных i_s ; для точек твердого тела $u = 0$, очевидно. Напомним, что производная по времени от некоторого

вектора a в неподвижной системе координат $\left(\frac{da}{dt}\right)'$ связана с

локальной производной $\frac{da}{dt}$ соотношением:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)' = \frac{da}{dt} + \omega \times a,$$

Отсюда, в частности, для ортов неподвижных осей $i'_s = const$, получаем в подвижных осях дифференциальные уравнения Пуассона:

$$\frac{di'_s}{dt} + \omega \times i'_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Проекции какого-либо вектора a на подвижные оси координат условимся обозначать через $a_i (i = 1, 2, 3)$.

Переход от мгновенного положения нашей механической системы в действительном движении к одновременному положению ее в сравниваемом движении можно осуществить, сообщая всей системе как одному твердому телу бесконечно малые поступательное δl и вращательное $\delta \theta$ перемещения, а также относительные перемещения $\delta_1 r (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ частицам жидкости, удовлетворяющие условию несжимаемости и не зависящие от δl и $\delta \theta$. Символ δ_1 обозначает вариацию при фиксированных $i_s (s = 1, 2, 3)$. Очевидно, записанное в неподвижных осях уравнение несжимаемости (1.5) эквивалентно уравнению:

$$\operatorname{div} \delta_1 r = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \delta x_s}{\partial x_s} = 0$$

в силу равенства (1.3).

Обозначим через $v_0 + \delta v_0$ и $\omega + \delta \omega$ векторы мгновенных поступательной и угловой скоростей твердого тела в сравниваемом движении и найдем выражения для δv_0 и $\delta \omega$ через векторы δl и $\delta \theta$.

Пусть i_s^* обозначают орты подвижных осей в сравниваемом движении, причем $i_s^* = i_s + \delta i_s$, $\delta i_s = \delta \theta \times i_s$ ($s = 1, 2, 3$) (рис. 3). Тогда, например, проекция вектора $\omega + \delta \omega$ на ось x_1 в сравниваемом положении последней равна:

$$\omega_1 + \delta \omega_1 = (\omega + \delta \omega) \cdot i_1^* = \omega_1 + \omega_2 \delta \theta_3 - \omega_3 \delta \theta_2 + \frac{d\delta \theta_1}{dt},$$

так как с точностью до малых второго порядка малости:

$$i_1 \cdot i_1^* = 1, \quad i_2 \cdot i_1^* = \delta \theta_1, \quad i_3 \cdot i_1^* = -\delta \theta_2, \quad \delta \theta \cdot i_1^* = \delta \theta_1.$$

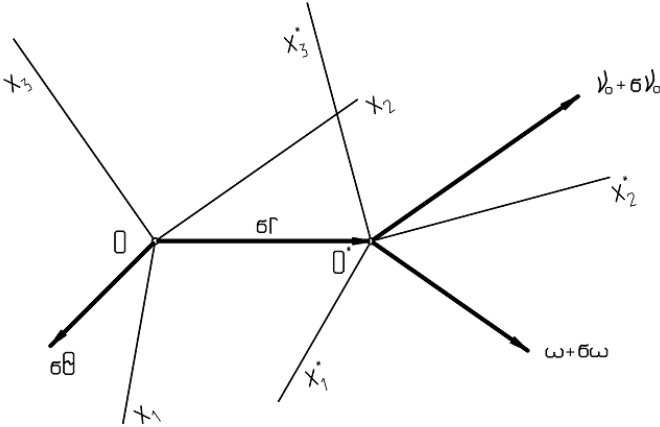


Рис. 3. Вариации кинематических параметров

Аналогично получим два других равенства, из которых находим выражение для вектора $\delta \omega$:

$$\delta \omega = \frac{d\delta \theta}{dt} + \omega \times \delta \theta. \quad (1.6)$$

Пусть $r'_0 + \delta r'_0$ есть радиус-вектор точки O тела в сравниваемом движении. Тогда, например,

$$r_{01} + \delta v_{01} = \left(\frac{dr'_0}{dt} + \frac{d\delta r'_0}{dt} \right) \cdot i_1^* = v_{01} + v_{02} \delta \theta_3 - v_{01} \delta \theta_2 + \omega_2 \delta l_3 - \omega_3 \delta l_2 + \frac{d\delta l_1}{dt},$$

так как с точностью до малых второго порядка:

$$\frac{dr'_0}{dt} \cdot i_1^* = v_{01} + v_{02} \delta \theta_3 - v_{03} \delta \theta_2, \quad dr'_0 \cdot i_1^* = \delta l_1,$$

$$\frac{d\delta r'_0}{dt} \cdot i_1^* = \frac{d\delta l_1}{dt} + \omega_2 \delta l_3 - \omega_3 \delta l_2.$$

Аналогично получим два других равенства, из которых находим выражение для вектора δr_0 :

$$\delta r_0 = \frac{d\delta l}{dt} + \omega \times \delta l + r_0 \times \delta \theta. \quad (1.7)$$

Отметим, что равенства (1.6) и (1.7) можно было бы получить иным путем, сравнивая, например, производные от вариаций квазиординат δl_i и $\delta \theta_i$ с вариациями квазискоростей δv_{0i} и $\delta \omega_i$. Из равенства (1.3) находим:

$$\delta r' = \delta r'_0 + \delta r.$$

Но

$$\delta r'_0 = \delta l,$$

$$\delta r = \sum_{i=1}^3 (x_i \delta i_i + \delta x_i i_i) = \delta \theta \times r + \delta_1 r,$$

так что

$$\delta r' = \delta l + \delta \theta \times r + \delta_1 r. \quad (1.8)$$

Далее приведем для справок некоторые формулы векторного анализа, которыми нам придется часто пользоваться.

Пусть S' – какая-либо замкнутая поверхность, ограничивающая область τ . Допустим, что S' является гладкой поверхностью или состоит из конечного числа кусков гладких поверхностей, каждый из которых обладает непрерывными нормалью и кривизной. Пусть в области τ заданы некоторые однозначные конечные и непрерывные

вместе с частными производными первого порядка по координатам вектор-функция $a(r)$ и скалярная функция $\varphi(r)$. Тогда справедлива теорема Гаусса-Остроградского:

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от расхождения вектора:

$$\int_{S'} a_n dS = \int_{\tau} \operatorname{div} a d\tau, \quad (1.9)$$

где $a_n = a \cdot n$ – проекция вектора a на внешнюю нормаль к поверхности S' , определяемую ортом n . В частности, имеют место также формулы:

$$\int_{S'} \varphi n_i dS = \int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau, \quad \int_{S'} n_i dS = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Пусть, далее, в области τ заданы непрерывные и имеющие непрерывные производные до второго порядка скалярные функции $\varphi(r)$ и $\phi(r)$. При этих условиях справедлива теорема Грина. Первая форма теоремы Грина:

$$\int_{\tau} (\nabla \varphi \cdot \nabla \phi) d\tau = \int_{\tau} \varphi \Delta \phi d\tau = \int_{S'} \phi \frac{d\phi}{dn} dS. \quad (1.10)$$

Вторая форма теоремы Грина:

$$\int_{\tau} (\varphi \nabla \phi - \phi \nabla \varphi) d\tau = \int_{S'} \left(\varphi \frac{d\phi}{dn} - \phi \frac{d\varphi}{dn} \right) dS. \quad (1.11)$$

где $\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} i_i$ – оператор Гамильтона, причем

$\Delta \varphi = \operatorname{grad} \varphi$, $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа,

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i$ – производная по нормали n от функции φ .

Рассмотрим теперь некоторую поверхность S , ограниченную замкнутой кривой (контуром) s , которой приписываем определенное направление обхода. Для каждого элемента dS , поверхности

построим нормаль n , ориентированную так, что она образует с направлением обхода контура s систему, одноименную с координатной системой. Тогда справедлива теорема Стокса:

$$\int_s \text{rot}_a a dS = \int_s a \cdot dS, \quad (1.12)$$

где вихрь вектора a определяется равенством:

$$\text{rota} = \nabla \times a = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) i_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) i_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) i_3,$$

а интеграл в правой части равенства (1.12) называется циркуляцией вектора a .

Следствие из теоремы Стокса:

если $a = \text{grad}\phi$, то

$$\int_s a \cdot ds = 0,$$

следовательно, $a = 0$, и так как это справедливо для всякого направления, то

$$\text{rotgrad}\phi = 0.$$

Обратно, если $\text{rota} = 0$, то циркуляция a по всякому контуру, могущему быть стянутым в точку, равна нулю, т. е. $a = \text{grad}\phi$.

Итак, необходимое и достаточное условие для того, чтобы $a = \text{grad}\phi$, состоит в выполнении равенства $\text{rota} = 0$.

Наконец, для производных по времени от интегралов, взятых по жидкому объему τ или по незамкнутой жидкой поверхности S , в случае несжимаемой жидкости справедливы формулы:

$$\frac{d}{dt} \int_s a d\tau = \int_s \frac{da}{dt} d\tau,$$

$$\frac{d}{dt} \int_s a_n dS = \int_s \left[\frac{da_n}{dt} + v_n \text{div} a + \text{rot}_n(a \times r) \right] dS.$$

§3 Основные динамические величины

Основные динамические величины – кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} \sum_v m_v v_v^2,$$

количество движения:

$$Q = \sum_v m_v v_v,$$

и момент количеств движения:

$$G = \sum_v r_v \times m_v v_v.$$

Системы слагаются из соответствующих величин для твердого тела и жидкости. Величины, относящиеся к твердому телу, будем далее отмечать индексом 1; к жидкости – индексом 2; m_v обозначает массу v -й точки системы.

Используя формулу (1.4), получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 v_0^2 + M_1 r_0 \cdot (\omega \times r) + \frac{1}{2} \omega \cdot \Theta^{(1)} \cdot \omega,$$

$$T_2 = \rho \int_{\tau} J d\tau = \frac{1}{2} M_2 v_0^2 + M_2 r_0 \cdot (\omega \times r_2) + \frac{1}{2} \omega \cdot \Theta^{(2)} \cdot \omega + r_0 \cdot \rho \int_{\tau} u d\tau + \omega \cdot \rho \int_{\tau} r \times u d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} u^2 d\tau,$$

где $J = \frac{1}{2} v^2$ – плотность кинетической энергии жидкости,

$$M_i = \sum_v (v) m - \text{массы, } r_i = \frac{1}{M_i} \sum_v (v) m_v r_v$$

– радиус-векторы относительно точки O центров масс твердого тела ($i=1$) и жидкости ($i=2$), причем символ $\sum_v (i)$ обозначает суммирование только по точкам твердого тела ($i=1$) или жидкости ($i=2$),

$$\Theta^{(d)} = \sum_{r,i} \Theta_{ri}^{(d)} i_r i_i \quad (i=1, 2) \quad (1.13)$$

– симметричные тензоры инерции тела и жидкости для точки O .

Диагональные компоненты тензора инерции:

$$\Theta_{11}^{(d)} = A_i, \quad \Theta_{22}^{(d)} = B_i, \quad \Theta_{33}^{(d)} = C_i,$$

представляют собой моменты инерции, а взятые со знаком минус недиагональные компоненты:

$$\Theta_{23}^{(d)} = \Theta_{32}^{(d)} = -D_i, \quad \Theta_{31}^{(d)} = \Theta_{13}^{(d)} = -E_i, \quad \Theta_{12}^{(d)} = \Theta_{21}^{(d)} = -F_i$$

– центробежные моменты, или произведения инерции относительно осей x_1, x_2, x_3 . Таким образом, кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + M v_0 \cdot (\omega \times r_1) + \frac{1}{2} \omega \cdot \Theta \cdot \omega + v_0 \cdot \rho \int_{\tau} u d\tau + \omega \cdot \rho \int_{\tau} r \times u d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} u^2 d\tau, \quad (1.14)$$

здесь $M = M_1 + M_2$, $r_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 M_i r_i$

– радиус-вектор относительно точки O центра масс системы,

$\Theta = \Theta^{(1)} + \Theta^{(2)}$ – тензор инерции системы для точки O .

В некоторых случаях формулы (1.13) и (1.14) можно упростить. Например, если за подвижные оси координат принять главные центральные оси инерции твердого тела, то в этом случае $r_1 = 0$, $\Theta_{sr}^1 = 0$ ($s \neq r$). В случае свободного твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью, за подвижные оси целесообразно принять главные центральные оси инерции системы, тогда

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \Theta \cdot \omega + r_0 \cdot \rho \int_{\tau} u d\tau + \omega \cdot \rho \int_{\tau} r \times u d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} u^2 d\tau,$$

причем тензор инерции системы имеет диагональный вид:

$$\Theta = \sum_{i,r=1}^3 \Theta_{ri} i_r i_i,$$

где $\Theta_{11} = A$, $\Theta_{22} = B$, $\Theta_{33} = C$ представляют собой моменты инерции системы относительно осей x_1, x_2, x_3 , равные суммам соответствующих моментов инерции твердого тела и жидкости.

Вектор количества движения системы $Q = Q_1 + Q_2$ можно представить в виде:

$$Q = M(v_0 + \omega \times r_i) + \rho \int_{\tau} u d\tau = Mv_e, \quad (1.15)$$

где v_e – вектор скорости центра масс системы.

Сопоставим теперь выражения (1.14) и (1.15). Взяв частные производные от кинетической энергии системы по проекциям вектора скорости точки O , находим:

$$Q_i = \frac{\partial T}{\partial v_{0i}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, вектор количества движения системы представляет собой градиент скалярной функции T по проекциям вектора скорости v_0 точки O :

$$Q = \text{grad}_{v_0} T. \quad (1.16)$$

Вектор момента количеств движения системы $G = G_1 + G_2$ относительно подвижной точки O можно представить в виде:

$$G = r_e \times Mv_0 + \Theta \cdot \omega + \rho \int_{\tau} r \times u d\tau. \quad (1.17)$$

Сравнивая это выражение с (1.14), находим, что

$$G_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

т.е. вектор момента количеств движения относительно точки O равен градиенту функции T по проекциям мгновенной угловой скорости ω :

$$G = \text{grad}_{\omega} T. \quad (1.18)$$

§4 Вывод уравнений движения свободного твердого тела с жидкостью

Займемся теперь выводом уравнений движения системы, отнесенных к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$. С этой целью мы должны представить подинтегральное выражение в уравнении (1.2) через величины, отнесенные к подвижной системе координат.

Учитывая равенства (1.16) и (1.18), запишем вариацию кинетической энергии (1.14) системы в виде:

$$\delta T = Q \cdot \delta v_0 + G \cdot \delta \omega + \rho \int_{\tau} [v \cdot \delta u + (v \times \omega) \cdot \delta_1 r] d\tau$$

и заменим векторы δv_0 и $\delta \omega$ их выражениями (1.7) и (1.6):

$$\delta T = Q \left(\frac{d\delta l}{dt} + \omega \times \delta l + v_0 \times \delta \Theta \right) + G \cdot \left(\frac{d\delta \Theta}{dt} + \omega + \delta \Theta \right) + \rho \int_{\tau} [v \cdot \delta u + (v \times \omega) \cdot \delta_1 r] d\tau. \quad (1.19)$$

Далее рассмотрим сумму элементарных работ приложенных к системе активных сил F на возможном перемещении $\sum F_v \cdot \delta r'_v$. Среди сил, действующих на жидкость, будем различать силы массовые, действующие на каждый элемент $\rho d\tau$ массы жидкости, и силы поверхностные, действующие на элементы dS поверхности жидкости. Вектор массовой силы, отнесенный к единице массы, обозначим через F . Из поверхностных сил мы будем учитывать главным образом силы нормального давления $-p_0 n$, где n обозначает орт внешней нормали к поверхности S , и в некоторых случаях силы поверхностного натяжения.

Из молекулярной теории известно, что действие частиц жидкости друг на друга определяется не только давлением p вследствие постоянства объема, но и силами связи, действующими между частицами. Для внутренних элементов объема жидкости эти силы взаимно уничтожаются, вследствие, в среднем равномерного распределения их по направлениям, и лишь для элементов объема вблизи поверхности S' они дают равнодействующую, отличную от нуля. В «обычных» условиях, когда размеры полости достаточно велики, а силы поверхностного натяжения малы по сравнению с массовыми силами, ими, как правило, пренебрегают, однако в ряде случаев, особенно в условиях невесомости или когда массовые силы малы, или при движении жидкости в капиллярах, учет этих сил оказывается существенным.

При рассмотрении поверхностных сил мы не будем входить в тонкости молекулярной теории, а последуем концепции Гаусса. А именно, будем считать, что вследствие соприкосновения вдоль

некоторой поверхности двух разнородных сред r и s возникают силы натяжения, имеющие потенциал, равный произведению площади поверхности соприкосновения на коэффициент поверхностного натяжения a_{rs} , зависящий от природы обеих сред, причем, очевидно, $a_{rs} = a_{sr}$. В рассматриваемом случае твердого тела с жидкостью таких разнородных сред, вообще говоря, три: твердое тело, жидкость и воздух, которым будем приписывать индексы 1, 2, 3 соответственно. Для краткости положим $a_{12} = a_1$, $a_{13} = a_1$, $a_{23} = a$.

Учитывая сказанное, а также формулу (1.8), для суммы элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} F_{\nu} \cdot \delta r_{\nu}' &= K \cdot \delta l + L \cdot \delta \theta + \rho \int_{\tau} F \cdot \delta_1 r d\tau - \\ &- P_0 \int_S n \cdot \delta_1 r dS - a \delta S - a_1 \delta \sigma_1 - a_2 \delta \sigma_2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где K и L обозначают главный вектор и главный момент относительно точки O всех приложенных к системе активных сил.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\nu} F_{\nu} = \sum_{(1)} F_{\nu} + \rho \int_{\tau} F d\tau, \\ L &= \sum_{\nu} r_{\nu} \times F_{\nu} = \sum_{(v)(1)} r_{\nu} \times F_{\nu} + \rho \int_{\tau} r \times F d\tau. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Нетрудно видеть, что изменения на возможном перемещении $\delta_1 r$ площадей поверхностей S и σ_1 определяются формулами:

$$\delta S = \int_S \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \right) v_{\nu} dS + \int_S v_{\nu_1} dS, \quad \delta \sigma_1 = -\delta \sigma_2 = \int_S v_{\nu_2} dS, \quad (1.22)$$

здесь R_i обозначают главные радиусы кривизны поверхности S в данной точке, считаемые положительными, если центр кривизны лежит с той же стороны от этой поверхности, что и жидкость, и отрицательными в противном случае;

$$v_{\nu} = n \cdot \delta_1 r, \quad v_{\nu_1} = n_1 \cdot \delta_1 r, \quad v_{\nu_2} = n_2 \cdot \delta_1 r,$$

где n_1 и n_2 – орты внешних нормалей к контуру s поверхностей S и σ_1 , расположенные соответственно в касательных плоскостях к этим поверхностям (рис.4).

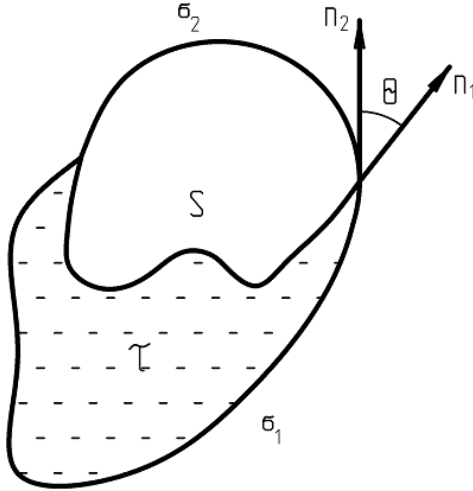


Рис. 4. Области разнофазных сред

Очевидно, что на поверхности σ_1 вследствие непроницаемости твердых стенок $v_v = 0$. Угол между нормальми n_1 и n_2 обозначим через θ . Предполагая, что в окрестности линии s поверхность стенок полости σ является достаточно гладкой и не имеет острых ребер, найдем, что

$$v_{v1} = v_{v2} \cos \theta. \quad (1.23)$$

Обратимся, наконец, к интегралу:

$$\int_{\tau} \rho \operatorname{div} \delta r' d\tau = \int_{\tau} \rho \operatorname{div} \delta_1 r d\tau.$$

Так как

$$\rho \operatorname{div} \delta_1 r = \operatorname{div}(\rho \delta_1 r) - \operatorname{grad} \rho \cdot \delta_1 r,$$

то, используя теорему Гаусса-Остроградского (1.9), получим:

$$\int_{\tau} \rho \operatorname{div} \delta_1 r d\tau = \int_S \rho n \cdot \delta_1 r dS - \int_{\tau} \operatorname{grad} \rho \cdot \delta_1 r d\tau. \quad (1.24)$$

Подставим в уравнение (1.2) равенства (1.19), (1.20), (1.24), учтем формулы (1.22), (1.23) и проинтегрируем по частям члены

$$Q \cdot \frac{d\delta l}{dt}, \quad G \cdot \frac{d\delta \theta}{dt}, \quad v \cdot \delta u;$$

в результате получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_2}^{t_1} \left\{ \left(-\frac{dQ}{dt} + Q \times \omega + K \right) \cdot \delta l + \left(-\frac{dG}{dt} + G \times \omega + Q \times v_0 + L \right) \cdot \delta \theta + \right. \\
& + \rho \int_{\tau} \left(-\frac{dv}{dt} + v \times \omega + F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) \cdot \delta_1 r d\tau + \\
& \left. + \int_s [\rho - \rho_0 - a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)] \delta l_v dS \right\} dt \\
& + \left(Q \cdot \delta l + G \delta \theta + \rho \int_{t_2}^{t_1} \int_v v \cdot \delta_1 r d\tau \right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

В силу равенства (1.8) условия на пределах интегрирования примут вид при $t = t_0, t = t_1, \delta l = \delta \theta = \delta_1, r = 0$, вследствие чего члены, стоящие вне интеграла по времени в уравнении (1.25) уничтожаются.

Для свободного твердого тела векторы δl и $\delta \theta$ независимы и произвольны, от них вектор $\delta_1 r$ также не зависит, причем благодаря введению множителя p он может быть выбран произвольным образом. В силу произвольности этих векторов из равенства (1.25) получаем следующие уравнения движения системы:

$$\frac{dQ}{dt} + \omega \times Q = K, \tag{1.26}$$

$$\frac{dG}{dt} + \omega \times G + r_0 \times Q = L, \tag{1.27}$$

$$\frac{dv}{dt} + \omega \times v = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \tag{1.28}$$

к которым надлежит присоединить уравнение несжимаемости (уравнение связи), которое для действительного движения системы имеет вид:

$$\text{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \tag{1.29}$$

Из уравнения (1.25) получаем также граничные условия гидродинамического давления на свободной поверхности S (формулу Лапласа):

$$p = p_0 + a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.30)$$

и для краевого угла θ на контуре s :

$$\cos\theta = \frac{a_2 - a_1}{a}, \quad (1.31)$$

которые должны выполняться в любой момент времени. Из последней формулы видно, что при движении (и равновесии) свободная поверхность жидкости образует с твердой стенкой σ постоянный краевой угол θ , если, разумеется, считать величины $a_{r,v}$ постоянными (рис. 5).

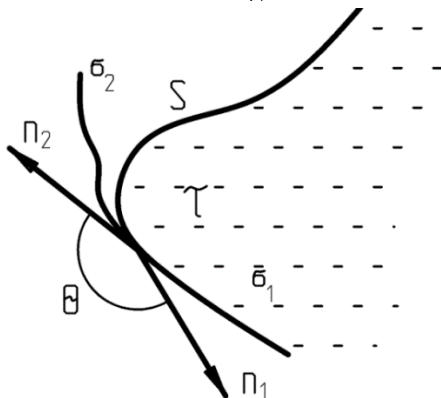


Рис. 5. Границы разнофазных сред

К условиям (1.30) и (1.31) следует добавить кинематические условия:

на σ_1 :

$$u_n = u \cdot n = 0, \quad (1.32)$$

на S :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \text{grad} f = 0, \quad (1.33)$$

где $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ есть уравнение свободной поверхности жидкости.

Условие (1.32) выражает непроницаемость твердых стенок для действительного движения жидкости, а условие (1.33) означает, что скорость перемещения любой точки свободной поверхности и скорость частицы жидкости, находящейся на этой поверхности, имеют одинаковые проекции на нормаль к поверхности.

В случае, когда поверхностным натяжением можно пренебречь, все коэффициенты поверхностного натяжения $a_{r\nu}$ будем полагать равными нулю. При этом условие (1.31) выпадает, а условие (1.30) для гидродинамического давления на свободной поверхности принимает вид:

$$p = p_0 \quad (1.34)$$

Если жидкость целиком заполняет полость, то имеем, очевидно, лишь одно граничное условие (1.32).

Выясним механический смысл уравнений (1.26)-(1.28).

Левая часть уравнения (1.26) представляет абсолютную производную по времени от вектора количества движения системы, а правая – главный вектор всех приложенных к системе активных сил. Таким образом, векторное уравнение (1.26) выражает собой теорему о количестве движения системы; оно эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_{01}} \right) + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial v_{02}} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial v_{03}} = K_1 \quad (1.35)$$

Здесь и далее символы (1.23) рядом с уравнениями указывают, что два других невыписанных уравнения получаются из написанного циклической перестановкой цифр, указанных в скобках.

Точно так же легко видеть, что уравнение (1.27) выражает собой теорему о моменте количеств движения системы для подвижного центра O . Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{01}} \right) + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \\ + v_{02} \frac{\partial T}{\partial v_{03}} - v_{03} \frac{\partial T}{\partial v_{02}} = L_1 \quad (1.36) \end{aligned}$$

Наконец, уравнение (1.28), эквивалентное трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dv_1}{dt} + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = F_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.37)$$

представляет собой гидродинамическое уравнение Эйлера, отнесенное к подвижным осям. Это уравнение, как и уравнение (1.29), можно переписать, учитывая формулу (1.4), в виде уравнений относительного движения жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\omega \times u = F - \frac{1}{p} \text{grad} p - \frac{d\omega}{dt} \times r - \frac{dr_0}{dt} - \\ - \omega \times r_0 - \omega \times (\omega \times r), \quad \text{div} u = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Отметим, что в случае вихревого движения жидкости в полости тела уравнения (1.28) и (1.29) можно преобразовать в уравнения, определяющие изменение вихрей с течением времени. Если массовые силы обладают потенциалом, то уравнения для вихрей имеют форму уравнений Гельмгольца:

$$\frac{dQ}{dt} + \omega \times \Omega = (\Omega \cdot \nabla) v_v, \quad \Omega = \text{rot} v. \quad (1.39)$$

Напомним, что для жидкости, вообще говоря, $v = v(r, t)$, $u = u(r, t)$, $\Omega = \Omega(r, t)$, поэтому в уравнениях (1.28),

(1.38), (1.39) производные $\frac{dv}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$ представляют собой полные

или субстанциальные производные по времени, т.е., например,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} + (u \cdot \nabla) v.$$

Отметим также, что в случае, когда полость целиком заполнена жидкостью и за начало подвижных осей принят центр инерции системы, уравнения движения (1.26) и (1.27) принимают более простой вид:

$$M \left(\frac{dr_0}{dt} + \omega \times r_0 \right) = K, \quad (1.40)$$

$$\frac{dG}{dt} + \omega \cdot G = L.$$

При изучении движения твердого тела с полостями, содержащими жидкость, могут быть поставлены две основные задачи.

Первая задача: дано движение тела и силы, действующие на жидкость, требуется исследовать движение жидкости в полостях и определить силы, которые необходимо приложить к твердому телу, чтобы оно совершало заданное движение.

Эта задача является в основном чисто гидродинамической и сводится к исследованию уравнений Эйлера (1.28), (1.29) или эквивалентных им уравнений (1.38) или (1.39) с соответствующими граничными условиями и последующему определению из уравнений (1.26) и (1.27) главного вектора и главного момента сил, приложенных к твердому телу.

Вторая задача: даны силы, действующие на твердое тело и жидкость, требуется исследовать движение системы под действием заданных сил. Эта задача является значительно более сложной, чем первая задача, и включает в себя также гидродинамическую задачу; она сводится к совместному исследованию системы уравнений (1.26)-(1.29).

Система уравнений (1.26)- (1.29) движения твердого тела с полостью, частично или целиком заполненной жидкостью, представляет собой совместную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Решения этой системы уравнений будут содержать произвольные функции и произвольные постоянные, которые нужно подчинить некоторым граничным и начальным условиям для достижения определенности при решении конкретных задач о движении системы. Граничные условия (1.30)- (1.34) должны выполняться на границах жидкости в любой момент времени. Начальные условия должны быть выполнены в начальный момент времени $t = t_0$ в точках пространства, занятого твердым телом и жидкостью. Начальные условия состоят обычно в том, что задаются положения и скорости v_0, ω твердого тела, форма поверхности S и поле скоростей жидкости $v(r)$ при $t = t_0$.

Активные силы F_v , действующие на систему, в общем случае могут зависеть не только от положений и скоростей точек системы и времени, но и от некоторых параметров. В этом случае к уравнениям движения системы надо присоединить также уравнения для названных параметров, и рассматривать совместно полученную таким образом полную систему уравнений.

Так, во многих интересных для приложений случаях силы, действующие на систему, зависят от косинусов γ_r углов между осями неподвижной и подвижной систем координат. В этих случаях к уравнениям движения системы следует присоединить уравнения Пуассона (1.5), которые в проекциях на подвижные оси имеют вид:

$$\frac{d\gamma_{r1}}{dt} + \omega_2\gamma_{r3} - \omega_3\gamma_{r2} = 0 \quad (123) \quad (r=1, 2, 3). \quad (1.41)$$

В достаточно широком классе случаев активные силы допускают силовую функцию $U = U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где γ_i обозначают проекции орта i'_3 неподвижной оси x'_3 на подвижные оси, $\gamma_i = \gamma_{3i}$ ($i=1, 2, 3$). В дальнейшем функцию $U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ будем предполагать непрерывной и обладающей непрерывными частными производными первого порядка по γ_i . При этом момент активных сил относительно точки O представляется в виде: $L = -i'_3 x \text{grad} U$.

Например, для однородного поля сил тяжести с ускорением g :

$$U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = -Mg(x_{e1}\gamma_1 + x_{e2}\gamma_2 + x_{e3}\gamma_3), \quad (1.42)$$

если ось x'_3 направлена вертикально вверх.

В случае движения снаряда по весьма настильной траектории момент опрокидывающей пары зависит от угла между скоростью центра масс, предполагаемой постоянной, и осью симметрии x_3 снаряда. При этом

$$U(\gamma_3) = -a\gamma_3, \quad (1.43)$$

если ось x'_3 направлена по вектору скорости центра масс, $a = \text{const}$.

Для случая центрального ньютоновского поля сил:

$$U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \int_{\tau} \frac{\mu \rho(x_1, x_1, x_3) dv}{\left[R^2 + 2R(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right]^{1/3}},$$

если ось x'_3 направлена от центра притяжения O' по прямой $O'O$.

Здесь μ – постоянная тяготения, $\rho(x_1, x_1, x_3)$ и v – плотность и объем тела и жидкости, R – расстояние $O'O$.

Если расстояние R велико по сравнению с размерами тела, то можно принять приближенное выражение для силовой функции:

$$U = \mu \frac{M}{R} - \mu \frac{M}{R^2} (x_{e1}\gamma_1 + x_{e2}\gamma_2 + x_{e3}\gamma_3) - \frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} \cdot (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - \frac{A+B+C}{3}). \quad (1.44)$$

Отметим, наконец, что вывод уравнений движения из принципа Гамильтона-Остроградского позволяет утверждать не только необходимость, но и достаточность полученных уравнений для описания движения твердого тела с полостями, частично или полностью заполненными идеальной жидкостью.

§5 Уравнения Лагранжа

Уравнения движения (1.26)- (1.29) можно применять и в ряде случаев движения несвободного твердого тела с жидкостью при условии добавления в правые части уравнений (1.26) и (1.27) сил реакций связей и моментов сил реакций соответственно. Например, если твердое тело имеет неподвижную точку, то ее естественно принять за начало O подвижных осей, тогда $v_0 = 0$. В этом случае уравнение (1.26) будет служить для определения реакции неподвижной точки, а уравнение (1.27) примет вид второго из уравнений (1.40), в правой части которого будет фигурировать лишь момент активных сил L . К этому уравнению надо присоединить уравнения (1.28) и (1.29) с граничными условиями (1.30)- (1.34).

Уравнения движения твердого тела с жидкостью, стесненного голономными связями, можно представить и в форме уравнений Лагранжа. Обозначим через q_j ($j = 1, 2, \dots, n \leq 6$) лагранжевы координаты тела, через \dot{q}_j его обобщенные скорости; за координаты частиц жидкости примем декартовы координаты x_i ($i = 1, 2, 3$). Векторы v_0 и ω можно представить в виде некоторых линейных функций от q_j с коэффициентами, зависящими от q_j . Подставляя эти выражения в формулы (1.13) для кинетической энергии твердого тела и плотности кинетической энергии жидкости, получим их в виде квадратичных функций от q_j :

$$T_1 = T_1(q_j, \dot{q}_j, t), J = J(q_j, \dot{q}_j, x_i, u_i, t).$$

Варьируя выражение кинетической энергии системы, получаем:

$$T = T_1 + p \int_{\tau} J d\tau,$$

будем иметь:

$$\delta T = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \rho \sum_{i=1}^3 \int_{\tau} \left(\frac{\partial J}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial J}{\partial u_i} \delta u_i \right) d\tau.$$

Подсчитаем теперь сумму элементарных работ приложенных к системе активных сил на возможном перемещении системы. Так как для точек твердого тела и для частиц жидкости $r' = r' \cdot (q_j, x_i, t)$, то сумма элементарных работ активных сил равна:

$$\begin{aligned} \sum_v F_v \cdot \delta r'_v &= \sum_{j=1}^n \Phi_j \cdot \delta q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^3 F_i \delta x_i d\tau - p_0 \int_S n \cdot \delta_1 r dS - \\ &- a \delta S - a_1 \delta \sigma_1 - a_2 \delta \sigma_2, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_j = \sum_v F_v \cdot \frac{\partial r'_v}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) - \text{обобщенные силы.}$$

Подставим эти выражения, а также (1.24) в уравнение (1.2), проинтегрируем по частям члены $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j$ и $\frac{\partial J}{\partial u_j} \delta u_j$ и учтем, что условия на пределах интегрирования эквивалентны следующим: при $t = t_0$ и $t = t_1$:

$$\delta I_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \delta x_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

В результате получим уравнения движения твердого тела с жидкостью в его полости в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (1.45)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_i} - \frac{\partial J}{\partial x_i} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1.46)$$

а также граничные условия (1.30) или (1.34), (1.31) для давления на свободной поверхности и краевого угла. К этим уравнениям надлежит присоединить уравнение несжимаемости (1.29), также кинематические граничные условия (1.32) и (1.33).

Так как

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = v_i, \quad \frac{\partial J}{\partial x_i} = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3 \quad (123),$$

то уравнения (1.46) представляют собой гидродинамические уравнения Эйлера (1.37).

В качестве примера приложения уравнений (1.45) выведем уравнения движения твердого тела с жидкостью, имеющего неподвижную точку O . За подвижные оси примем главные оси инерции тела для этой точки. Положение твердого тела можно определить тремя углами Эйлера Θ, φ, ϕ . Имеют место кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \phi \sin \theta \sin \varphi + \theta \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \phi \sin \theta \cos \varphi + \theta \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \phi + \phi \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (A_1 \omega_1^2 + B_1 \omega_2^2 + C_1 \omega_3^2) + \frac{1}{2} p \int_{\tau}^{\square} \{ (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + u_1)^2 + \\ &+ (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 + u_2)^2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 + u_3)^2 \} d\tau. \end{aligned}$$

Составим уравнение вида (1.45) для координаты φ . Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\varphi}} = G_3, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} = G_1 \omega_2 - G_2 \omega_1, \end{aligned}$$

так что уравнение для координаты φ примет вид:

$$\frac{dG_3}{dt} + \omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 = \Phi_3.$$

Легко видеть, что $\Phi_3 \delta \varphi$ представляет собой элементарную работу сил, приложенных к системе, на бесконечно малом перемещении $\delta \varphi$, т.е. $\Phi_3 = L_3$ есть момент активных сил относительно оси x_3 .

Два других уравнения можно получить из найденного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3 в результате получим три скалярных уравнения, эквивалентных второму из уравнений (1.40).

Разумеется, уравнения вида (1.45)-(1.46) пригодны и для описания движения свободного твердого тела с жидкостью.

§6 Силы давления жидкости на твердое тело

Твердое тело и жидкость в его полости рассматриваются нами как одна механическая система, благодаря чему при составлении уравнений движения не приходится вычислять силы взаимодействия между телом и жидкостью.

В ряде случаев, однако, может оказаться нужным вычисление сил воздействия жидкости (и воздуха) в полости на твердое тело. Легко видеть, что главный вектор и главный момент сил давлений представляются теми членами в уравнениях (1.26), (1.27) соответственно, которые относятся к жидкости, так как соответствующие уравнения движения для одного твердого тела должны иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} + \omega \times Q_1 &= K_1 + P, \\ \frac{dG_1}{dt} + \omega \times G_1 + v_0 \times Q_1 &= L_1 + N, \end{aligned} \tag{1.48}$$

где K_1 и P , L_1 и N обозначают главные векторы и главные моменты относительно точки O активных сил, приложенных к точкам твердого тела, и сил давлений жидкости и воздуха. В справедливости этого утверждения можно убедиться и прямым вычислением P и N .

В самом деле, по определению:

$$P = \int_{\tau} p n d\sigma, \quad N = \int_{\tau} r \times p n d\sigma.$$

В случае, когда жидкость полностью заполняет полость, поверхность σ совпадает с поверхностью жидкости S' . Однако и в случае частичного заполнения эти интегралы можно распространить по поверхности жидкости S' .

Учитывая, что давление воздуха в полости постоянно, и применяя теорему Гаусса-Остроградского, выражения для P и N преобразуем к виду:

$$P = \int_{S'} pndS' = \int_{\tau} \text{grad}p d\tau,$$

$$N = \int_{S'} r \times pndS' = \int_{\tau} r \times \text{grad}p d\tau,$$

в этих выражениях заменим $\text{grad}p$ с помощью уравнения (1.28):

$$P = p \int_{\tau} (F - \frac{dv}{dt} - \omega \times v) d\tau,$$

$$N = p \int_{\tau} r \times (F - \frac{dv}{dt} - \omega \times v) d\tau.$$

Но

$$p \int_{\tau} v d\tau = Q_2, \quad p \int_{\tau} r \times v d\tau = G_2,$$

$$u \times v - r \times (\omega \times v) = v \times v_0 - \omega \times (r \times v),$$

так что получаем:

$$P = p \int_{\tau} F d\tau - \frac{dQ_2}{dt} - \omega \times Q_2, \tag{1.49}$$

$$N = p \int_{\tau} r \times F d\tau - \frac{dG_2}{dt} - \omega \times G_2 - v_0 \times Q_2.$$

Таким образом установлено, что главный вектор и главный момент сил давлений жидкости (и воздуха) на тело выражаются формулами (1.49) через количество движения и момент количеств движения жидкости и производные по времени от них, а также через главный вектор и главный момент массовых сил, действующих на жидкость.

Попутно заметим, что уравнения (1.48) можно рассматривать как иную форму уравнений движения твердого тела с жидкостью. При этом за начало O подвижной системы осей координат естественно принять центр масс твердого тела. Тогда будем иметь:

$$Q_1 = M_1 v_0, \quad G_1 = \sum_v^{(1)} r_v \times m_v (\omega \times r_v) = \Theta^{(1)} \cdot \omega$$

и уравнения (1.48) примут вид:

$$M_1 \left(\frac{dr_0}{dt} + \omega \times v_0 \right) = K_1 + P, \quad (1.50)$$

$$\Theta^{(1)} \cdot \frac{du}{dt} + \omega \times \Theta^{(1)} \cdot \omega = L_1 + N.$$

Эти уравнения надо рассматривать совместно с уравнениями (1.28), (1.29) движения жидкости при принятых граничных условиях, имея в виду формулы (1.49) для векторов P и N .

Аналогично из уравнений (1.45) можно получить уравнения движения твердого тела в форме уравнений Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j^{(1)} + P_j, \quad (1.51)$$

где $\Phi_j^{(1)}$ и P_j ($j=1, \dots, n$) – обобщенные силы, происходящие от активных сил, приложенных к точкам твердого тела, и сил давлений жидкости и воздуха на стенки полости, причем

$$P_j = - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} + p \int_{\tau} F \cdot \frac{\partial r'}{\partial q_j} d\tau. \quad (1.52)$$

В самом деле, по определению:

$$P_j = \int_{\tau} \rho n \cdot \frac{\partial r'}{\partial q_j} d\sigma.$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского и учитывая, что

$$\operatorname{div} \left(\rho \frac{\partial r'}{\partial q_j} \right) = \rho \operatorname{div} \frac{\partial r'}{\partial q_j} + \frac{\partial r'}{\partial q_j} \cdot \operatorname{grad} \rho,$$

причем

$$\operatorname{div} \frac{\partial r'}{\partial q_j} = 0,$$

получим:

$$P_j = \int_{\tau} \frac{\partial r'}{\partial q_j} \cdot \operatorname{grad} \rho d\tau,$$

так как для воздуха $\rho = \rho_0$. Заменяя $\operatorname{grad} \rho$ его выражением из уравнения Эйлера, будем иметь:

$$P_j = \int_{\tau} \frac{\partial r'}{\partial q_j} \cdot \left(F - \frac{dv}{dt} \right) d\tau.$$

Рассмотрим выражение:

$$\frac{\partial r'}{\partial q_j} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v \cdot \frac{\partial r'}{\partial q_j} \right) - v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r'}{\partial q_j} \right).$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{dv}{dq_j} = \frac{\partial r'}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r'}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial r}{\partial q_j}.$$

Вследствие чего

$$\frac{\partial r'}{\partial q_j} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v \cdot \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) - v \cdot \frac{dv}{dq_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial J}{\partial q_j}.$$

Подставляя это выражение, получим формулу (1.52), что и доказывает справедливость нашего утверждения.

§7 Уравнения движения системы относительно центра масс

В предыдущих параграфах рассматривалось абсолютное движение системы, т.е. движение по отношению к неподвижной системе осей координат.

В ряде случаев оказывается, существенным изучение движения свободного твердого тела с жидкостью в его полости по отношению к их общему центру масс, т.е. по отношению к прямоугольной системе осей координат $Cx_1''x_2''x_3''$, имеющей начало в центре C масс системы и оси, параллельные осям неподвижной системы координат (рис.6).

Вектор скорости v_0 центра масс C системы определяется интегрированием уравнения (1.26), которое с учетом формулы (1.15) можно переписать в виде:

$$M \left(\frac{dv_e}{dt} + \omega \times v_e \right) = K. \quad (1.53)$$

Вектор-радиус какой-либо точки системы относительно центра масс обозначим через p_v . Известно, что статический момент системы относительно центра масс:

$$\sum_{\nu} m_{\nu} p_{\nu} = 0.$$

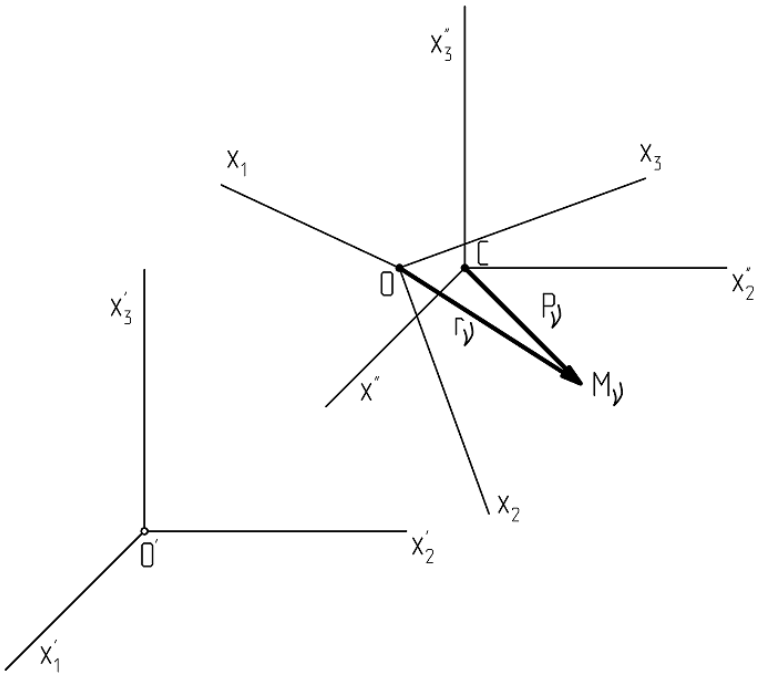


Рис. 6. Абсолютная, кёнигова и подвижная системы координат

Дифференцируя это равенство по времени и обозначая через $v'_{\nu} = \left(\frac{dp_{\nu}}{dt} \right)'$ вектор скорости точки системы в ее движении относительно центра масс, найдем:

$$Q' = \sum_{\nu} m_{\nu} v'_{\nu} = 0,$$

т. е. количество относительного движения системы равно нулю. Вследствие этого момент количества относительного движения будет одним и тем же для всех точек пространства.

Скорость какой-либо точки в ее относительном движении можно представить в виде:

$$v'_v = v'_0 + \omega \times r + u, \quad (1.54)$$

где v'_0 обозначает относительную скорость точки O твердого тела.

В самом деле, используя формулу (1.4) и учитывая, что

$$v_e = v_0 + \omega \times r_e + u_e,$$

$$v_e = v_0 + \omega \times r_e + u_e,$$

где u_e обозначает скорость центра масс системы в движении относительно твердого тела, найдем

$$v' = v - v_e = \omega \times (r - r_e) + u - u_e,$$

но

$$r_e = -p_0, \quad v'_0 = -\left(\frac{dr_e}{dt}\right)' = r_e \times \omega - u_e,$$

вследствие чего получаем формулу (1.54).

Векторы количества относительного движения и момента количеств относительного движения представляются в виде:

$$Q' = M(v'_0 + \omega \times r_e) + p \int_{\tau} u d\tau = 0, \quad (1.55)$$

$$G' = Mr_e \times v'_0 + \Theta * \omega + p \int_{\tau} r \times u d\tau.$$

Следовательно, векторы v'_0 , ω , u не являются независимыми, они связаны первым из этих равенств.

Уравнения относительного движения системы получим из уравнений (1.26)- (1.28). Для вектора G справедлива формула:

$$G = G' + r_e \times Q. \quad (1.56)$$

Подставим это выражение в уравнение (1.27)

$$\frac{dG'}{dt} + \omega \times G' + u_e \times Q + r_e \times \frac{dQ}{dt} + \omega \times (r_e \times Q) + r_0 \times Q = L.$$

Но

$$u_e \times Q + r_e \times \frac{dQ}{dt} + \omega \times (r_e \times Q) + v_0 \times Q = r_e \times \left(\frac{dQ}{dt} + \omega \times Q \right),$$

$$r_v = r_e + p_v, L = r_e \times K + L', L' = \sum_v p_v \times F_v,$$

так что наше уравнение, с учетом уравнения (1.26), принимает вид:

$$\frac{dG'}{dt} + \omega \times G' = L'. \quad (1.57)$$

Уравнение (1.57) выражает теорему о моменте количеств относительного движения системы.

К этому уравнению надлежит присоединить гидродинамические уравнения (1.28), (1.29) с соответствующими граничными условиями. Так как $v = v_e + v'$, то уравнения Эйлера в подвижных осях можно переписать в виде:

$$\frac{dv'}{dt} + \omega \times v' = F - \frac{1}{p} \text{grad} p', \text{div} v' = 0, \quad (1.58)$$

где для сокращения введено обозначение:

$$p' = p + p \left(\frac{dv_e}{dt} + \omega \times v_e \right) \cdot r.$$

Таким образом, изучение относительного движения твердого тела с жидкостью в его полости приводится к исследованию совместной системы уравнений (1.57), (1.58) с граничными условиями (1.30)-(1.34). При этом следует учитывать уравнения (1.55).

§8 Интегралы уравнений движения

Уравнения движения твердого тела с жидкостью в его полости при определенных условиях допускают первые интегралы. Для их вывода можно воспользоваться или уравнениями движения, или общими теоремами динамики, примененными, разумеется, и к рассматриваемой нами механической системе.

1. Интеграл энергии. Известно, что если связи, заложенные на систему, не зависят явно от времени, а заданные активные силы F_v , действующие на точки системы, допускают силовую функцию $U(r'_v)$, т.е., иными словами, $F_v = \text{grad}_r U$, то существует интеграл энергии

$$T - U = const. \quad (1.59)$$

Наряду с силовой функцией $U(r'_v)$ будем рассматривать также потенциальную энергию системы

$$\Pi(r'_v) = -U(r'_v) + const.$$

Тогда интеграл энергии (1.59) можно переписать в виде

$$T + \Pi = const,$$

т.е. полная механическая энергия системы остается постоянной во все время движения.

Интеграл энергии нетрудно вывести непосредственно из уравнений движения, взятых в той или иной форме.

Рассмотрим сначала свободное твердое тело. Умножим скалярно уравнение (1.26) на вектор r_0 , уравнение (1.27) – на вектор ω , уравнение (1.28) – на вектор $\rho \mathbf{u} d\tau$ и проинтегрируем это уравнение по объему, а затем сложим почленно полученные уравнения. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Q \cdot v_0 + G \cdot \omega) - Q \cdot \frac{dr_0}{dt} - G \cdot \frac{d\omega}{dt} + \rho \int_{\tau} u \cdot \left(\frac{dv}{dt} + \omega \times v \right) d\tau = \\ = K \cdot v_0 + L \cdot \omega + \rho \int_{\tau} \left(F - \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho \right) \cdot u d\tau. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Не трудно проверить, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} Q \cdot r_0 + G \cdot \omega = 2T - \rho \int_{\tau} u \cdot v d\tau, \\ Q \cdot \frac{dv_0}{dt} + G \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{dT}{dt} - \rho \int_{\tau} v \cdot \left(\frac{du}{dt} + \omega \times u \right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Далее, используя второе из уравнений (1.38) и применяя формулу Гаусса-Остроградского, найдем с учетом граничных условий (1.30) и (1.32), что

$$\int_{\tau} u \cdot \text{grad} \rho d\tau = \int_s \left[\rho_0 + a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] u_v dS.$$

На основании формул, которые можно получить из равенств (1.22) и (1.23) заменой символа δ на $\frac{d}{dt}$, формулы (1.31) имеем

$$a \int_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_v dS = \frac{d \Pi_v^*}{dt},$$

где

$$\Pi_v^* = aS + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2$$

обозначает потенциальную энергию сил поверхностного натяжения. Кроме того, вследствие сохранения объема жидкости τ очевидно, что

$$\int_s u_v dS = 0.$$

Поэтому

$$\int_\tau u \text{grad} p d\tau = \frac{d \Pi_2^*}{dt}. \quad (1.62)$$

Используя равенства (1.61) и (1.62), уравнение (1.60) запишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = K \cdot r_0 + L \cdot \omega + \rho \int_\tau F \cdot u d\tau - \frac{d \Pi_2^*}{dt}. \quad (1.63)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой мощность $\sum F_v \cdot r_v$ всех приложенных к системе активных сил. Таким образом, уравнение (1.63) выражает теорему о кинетической энергии системы.

Предположим теперь, что, помимо сил поверхностного натяжения, и другие приложенные к системе активные силы являются потенциальными. Иначе говоря, существует скалярная силовая функция $U(r_v')$, такая, что сумма элементарных работ всех активных сил на действительном перемещении системы

$$\sum_v F_v \cdot dr_v' = dU.$$

При этом, как нетрудно проверить и непосредственным вычислением,

$$K \cdot v_0 + L \cdot \omega + \rho \int_\tau F \cdot u d\tau - \frac{d \Pi_2^*}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

и из уравнения (1.63) немедленно получаем интеграл энергии (1.59).

В рассматриваемом нами случае силовую функцию $U(r'_v)$, можно, вообще говоря, представить в виде

$$U = U_1 + \rho \int_{\tau} U_2 d\tau + U_3^*,$$

где U_1 обозначает силовую функцию активных сил, приложенных к твердому телу, U_2 - силовую функцию массовых сил, действующих на жидкость, U_2^* - силовую функцию сил поверхностного натяжения. Аналогично потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3^*$$

с понятными обозначениями.

Теорема о кинетической энергии справедлива, как известно, и для относительного движения системы около центра масс. В самом деле, согласно теореме Кёнига

$$T = \frac{1}{2} M v_g^2 + T' \quad (1.64)$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \sum_v m_v v_v'^2 = \frac{1}{2} \omega \cdot \Theta \cdot \omega + \omega \cdot \rho \int r \times u d\tau - \frac{1}{2} M v_0'^2 + \frac{1}{2} \rho \int u^2 d\tau$$

Обозначает кинетическую энергию системы в ее относительном движении. Подставляя выражение (1.64) для кинетической энергии T в уравнение (1.63) и учитывая уравнения (1.53) и (1.55), получаем

$$\frac{dT'}{dt} = -K \cdot u_i + L' \cdot \omega + \rho \int F \cdot u d\tau - \frac{d\Pi_2^*}{dt}. \quad (1.65)$$

Нетрудно видеть, что правая часть этого равенства представляет собой деленную на dt сумму элементарных работ приложенных к системе активных сил на действительном относительном перемещении системы $\sum F_v \cdot d\rho_v$.

Таким образом, уравнение (1.65) выражает теорему о кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс.

Разумеется, это уравнение можно получить непосредственно из уравнений относительно движения. Действительно, умножим уравнение (1.57) скалярно на вектор ω :

$$\frac{d}{dt}(G' \cdot \omega) - G' \cdot \frac{d\omega}{dt} = L' \cdot \omega$$

Учитывая, что в силу равенств (1.55) уравнения (1.61) принимают вид:

$$G' \cdot \omega + \rho \int_{\tau} u \cdot v' d\tau = 2T',$$

$$\frac{dT'}{dt} = G' \cdot \frac{d\omega}{dt} + \rho \int_{\tau} v' \left(\frac{du}{dt} + \omega \times u \right) d\tau,$$

в чем нетрудно убедиться, и используя уравнение (1.58), снова получаем уравнение (1.65).

Если окажется, что существует скалярная функция $U(\rho_v)$ такая, что

$$\sum_v F_v \cdot d\rho_v = dU',$$

то из уравнения (1.65) получаем интеграл энергии в относительном движении системы

$$T' - U' = const. \quad (1.66)$$

Отметим, что если на точки системы действуют силы, пропорциональные массам точек и приводящиеся к одной равнодействующей, проходящей через центр масс системы (например, силы тяжести), то сумма элементарных работ таких сил на действительном относительном перемещении системы равна нулю, так как $\sum_v m_v d\rho_v = 0$ и они не войдут в силовую функцию U' .

Обратимся теперь к уравнениям движения несвободного твердого тела с жидкостью. Если последние взяты в виде, аналогичном уравнениям (1.26), (1.27), с добавлением в правые части этих уравнений сил реакций идеальных связей, то предыдущий вывод интеграла энергии сохраняет свою силу и в этом случае, так как сумма элементарных работ реакций идеальных стационарных связей на действительном перемещении системы равна нулю. Если же уравнения движения взяты в форме уравнений Лагранжа (1.45), (1.46), то умножим (1.45) на q_j и сложим почленно, (1.46) умножим на $\alpha u_i d\tau$, сложим и проинтегрируем по объему τ , а затем сложим оба полученных уравнения.

Будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j \right\} + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} u_i \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} \dot{u}_i - \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i \right\} d\tau = \\ & = \sum_{j=1}^n \Phi_j q_j + \rho \int_{\tau} F \cdot u d\tau - \frac{d\Pi_2^*}{dt} \end{aligned}$$

с учетом равенства (1.62).

Нетрудно проверить, что в случае стационарных связей

$$\frac{d}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j \right) + \int_{\tau} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i + \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i \right) d\tau,$$

причем

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \rho \int_{\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} u_i d\tau = 2T,$$

Вследствие чего наше уравнение принимает вид

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^n \Phi_j q_j + \rho \int_{\tau} F \cdot u d\tau - \frac{d\Pi_2^*}{dt}. \quad (1.67)$$

Если активные силы допускают силовую функцию U , то

$$\sum_{j=1}^n \Phi_j q_j + \rho \int_{\tau} F \cdot u d\tau - \frac{d\Pi_2^*}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

и из уравнений (1.67) снова следует интеграл энергии (1.59).

Интегралы количества движения и момента количества движения. Из теоремы о количестве движения следует, что если связи, наложенные на систему, допускают поступательное перемещение твердого тела вдоль некоторой неподвижной прямой, а сумма проекций всех приложенных к системе активных сил на эту прямую равна нулю, то проекция количества движения системы на эту прямую остается постоянной.

В самом деле, примем указанную прямую за ось x_1' и умножим скалярно уравнение (1.26) на орт i_1' . Будем иметь

$$\frac{d}{dt} (Q \cdot i_1') - Q \cdot \left(\frac{di_1'}{dt} + \omega \times i_1' \right) = 0.$$

Откуда с учетом уравнения (1.5) получаем первый интеграл

$$Q \cdot i'_1 = const. \quad (1.68)$$

Если главный вектор приложенных к системе активных сил $K = 0$, то для свободного твердого тела с жидкостью интегралы вида (1.68) имеют место для любой неподвижной прямой, т.е., иными словами, существует векторный интеграл количества движения

$$Q = Mv_g = const. \quad (1.69)$$

Из теоремы о моменте количества движения следует, что если связи, наложенные на систему, допускают вращение всей системы как одного твердого тела, вокруг некоторой неподвижной оси, а активные силы не дают момента относительно этой оси, то проекция момента количества движения системы на эту ось остается постоянной.

В самом деле, рассмотрим свободное твердое тело с жидкостью и допустим, что активные силы не дают момента относительно оси x'_1 .

Умножим уравнение (1.26) векторно слева на вектор r'_0 и сложим с уравнением (1.27), получим уравнение, выражающее теорему о моменте количества движения для неподвижной точки

$$\frac{dG_x}{dt} + \omega \times G_x = L + r'_0 \times K,$$

где

$$G_x = G + r'_0 \times Q$$

есть момент количества движения для точки O' . Умножим теперь это уравнение скалярно на вектор i'_3

$$\frac{d}{dt} (G_x \cdot i'_3) - G_x \cdot \left(\frac{di'_3}{dt} + \omega \times i'_3 \right) = 0.$$

Так как вектор i'_3 удовлетворяет уравнению Пуассона (1.5), то отсюда немедленно получаем интеграл площадей

$$G_x \cdot i'_3 = const. \quad (1.70)$$

Если момент активных сил относительно неподвижной точки O' равен нулю, то имеет место векторный интеграл

$$G_x = const, \quad (1.71)$$

или три скалярных интеграла вида (1.70)

Уравнения относительного движения системы при определенных условиях также допускают интеграл площадей. Предположим, что момент активных сил, приложенных к системе, относительно оси Cx_3'' равен нулю. Умножая уравнение (1.57) скалярно на единичный вектор этой оси и учитывая уравнения Пуассона (1.5), получим интеграл площадей в относительном движении

$$G'_{x_3''} = const. \quad (1.72)$$

Если момент активных сил относительно центра масс $L' = 0$, то существует векторный интеграл момента количеств относительного движения

$$G' = const. \quad (1.73)$$

Кроме того, если при этом и главный вектор активных сил $K = 0$, то имеет место первый интеграл

$$Q \cdot G' = const. \quad (1.74)$$

Чтобы убедиться в этом, умножим уравнение (1.57) скалярно на вектор Q . Учитывая уравнение (1.26), при наших условиях получим

$$\frac{d}{dt}(Q \cdot G') = 0,$$

откуда следует существование интеграла (1.74).

Если центральный эллипсоид инерции твердого тела является эллипсоидом вращения вокруг оси x_3 и активные силы, действующие на тело, таковы, что момент их относительно оси динамической симметрии x_3 равен нулю, а полость имеет форму тела вращения вокруг оси x_3 , то проекция мгновенной угловой скорости тела на эту ось постоянна

$$\omega_3 = const. \quad (1.75)$$

В самом деле, умножая скалярно второе из уравнений (1.50) на вектор i_3 , получаем при сделанных предположениях уравнение

$$C_1 \frac{d\omega_3}{dt} = \int_i (r \times \rho n) \cdot i_3 d\sigma.$$

Но $(r \times n) \cdot i_3 = x_1 n_2 - x_2 n_1 = 0$ для любой точки поверхности вращения, вследствие чего из этого уравнения немедленно получаем интеграл (1.75). Интегралы вида (1.68), (1.70), (1.72) и (1.75) можно

получить и для уравнений Лагранжа (1.45) в случае наличия циклических координат q_k , для которых по определению

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \Phi_k = 0 (a = k + 1, \dots, n).$$

При выполнении этих условий из уравнений (1.45) следуют циклические первые интегралы

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \text{const} (a = k + 1, \dots, n), \quad (1.76)$$

аналогичные указанным выше.

Напомним также, что для направляющих косинусов γ_{sr} справедливы равенства

$$i_s'^2 = \sum_{r=1}^3 \gamma_{sr}^2 = 1 (s = 1, 2, 3), \quad (1.77)$$

которые представляют собой первые интегралы уравнений Пуассона (1.5). Действительно, умножая последние скалярно на вектор $i_s'^2$, получаем интегралы (1.77).

2. Интегралы уравнений гидродинамики. Гидродинамические уравнения (1.28), (1.29) при определенных условиях также допускают некоторые интегралы.

Далее до конца этого параграфа будем предполагать, что массовые силы, действующие на несжимаемую идеальную жидкость в полости тела, имеют силовую функцию $U_2(r')$. При этих условиях, как указывалось в §4, из уравнений (1.28) и (1.29) можно получить уравнение Гельмгольца (1.39) для вихря $\Omega = \text{rot } v$. Векторные линии поля $\Omega = \Omega(r)$ называются вихревыми линиями. Взяв в жидкости малый замкнутый контур и проведя через каждую его точку вихревую линию, получим вихревую трубку. Значение циркуляции скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку, называется интенсивностью вихревой трубки.

При сделанных предположениях справедливы следующие теоремы.

Теорема Кельвина. Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру во все время движения жидкости остается неизменной.

Теорема Лагранжа. Если в начальный момент времени в некоторой части жидкости не имелось вихрей, то их не было раньше и не будет позже в этой части жидкости.

Теорема Гельмгольца. Вихревые линии и интенсивности вихревых трубок обладают свойством сохраняемости.

Отметим, что теорему Кельвина можно доказать, используя формулу

$$\frac{d}{dt} \int_i v \cdot dS = \int_i \frac{dv}{dt} \cdot dS,$$

и уравнение (1.28). Основываясь на этой теореме и формуле (1.12) Стокса, можно доказать теоремы Лагранжа и Гельмгольца. Кстати говоря, уравнение (1.39) есть условие, необходимое и достаточное для сохранения вихревых линий и интенсивности вихревых трубок.

Рассмотрим сначала безвихревое движение жидкости. Пусть в каждой точке поля скоростей отсутствует вихрь, т.е.

$$\Omega = \text{rot} v = 0.$$

Как отмечалось в §2, это равенство есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы вектор скорости был равен градиенту некоторой функции

$$v = \text{grad} \Phi, \quad (1.78)$$

Где скалярная функция $\Phi(r, t)$ называется потенциалом скорости. В силу уравнения несжимаемости (1.29) функция Φ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\text{div} v = \Delta \Phi = 0.$$

Уравнение Эйлера (1.28) принимает при этом следующий вид:

$$\text{grad} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - v \cdot (v_0 + \omega \times r) - U_2 + \frac{p}{\rho} \right] = 0,$$

откуда следует интеграл Коши

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - v \cdot (v_0 + \omega \times r) - U_2 + \frac{p}{\rho} = F(t), \quad (1.79)$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени.

Следовательно, задача об определении безвихревого движения несжимаемой жидкости сводится к отысканию одной функции Φ , удовлетворяющей уравнению Лапласа, граничным условиям,

вытекающим из условий (1.30) – (1.34), и начальным условиям. После определения функции Φ гидродинамическое давление ρ найдется из интеграла (1.79) с точностью до произвольной функции $F(t)$, для определения которой задача не представляет никаких данных. Эту функцию можно определить в случае, когда наперед задана зависимость давления от времени в одной точке поля.

Рассмотрим теперь вихревое движение жидкости, т.е. будем считать $\Omega \neq 0$. Уравнение (1.28) можно при этом переписать в виде

$$\text{grad} \left[\frac{1}{2} v^2 - v \cdot (v_0 + \omega \times r) - U_2 + \frac{p}{\rho} \right] = - \frac{\partial v}{\partial t} + u \times \Omega..$$

Интегрируя это уравнение вдоль некоторой поверхности, получим

$$\frac{p}{\rho} - U_2 + \frac{1}{2} v^2 - v \cdot (v_0 + \omega \times r) = F(t) - \int_s \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega \right) \cdot dS. \quad (1.80)$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, представляет полный дифференциал, в чем легко убедиться, так как условие интегрируемости сводится к уравнению Гельмгольца (1.39).

В случае стационарного движения жидкости $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; принимая за

линию s линию тока в относительном движении жидкости, для которой $\frac{\partial s}{\partial t} = \text{const}$, из (1.80) получим интеграл Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 - v \cdot (v_0 + \omega \times r) - U_2 = \Gamma_v, \quad (1.81)$$

где Γ есть величина, сохраняющая постоянное значение на данной линии тока.

Глава II ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, НАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

§1 Постановка задачи. Возможность разложения движения рассматриваемой системы на движение около центра тяжести и поступательное движение

При исследовании движения тела, заключающего внутри себя жидкие массы, под действием каких-нибудь внешних сил мы будем, для сокращения формул, рассматривать только тот случай, когда одна точка твердого тела неподвижна, потому что в случае свободного движения нашей системы нам придется только прибавить к ее движению около центра тяжести, как около неподвижной точки, надлежащее поступательное движение. Возможность такого прибавления видна из того, что силы инерции точек системы в полученном сложном движении будут слагаться из прежних сил инерции и сил инерции в поступательном движении; все же внешние силы могут быть заменены силою, проходящею через центр тяжести системы, и парю. Пара уравнивается силами инерции прежнего движения (когда центр тяжести рассматривался как неподвижная точка), сила же может быть уравновешена силами инерции надлежащим образом выбранного поступательного движения. Действительно, силы инерции поступательного движения частиц жидкости уравниваются на жидких массах в полостях тела, так как скорости поступательного движения имеют однозначную потенциальную функцию.

Эти силы инерции разовьют в жидкостях добавочные давления, действие которых на тело может быть заменено действием сил, приложенных в центрах жидких масс, направленных в сторону, противоположную ускорению поступательного движения, и равных произведению этого ускорения на массы соответствующих жидкостей. Все такие силы, происходящие от добавочных давлений, с силами инерции частиц твердого тела дадут одну равнодействующую, которая пройдет через центр тяжести всей системы, будет направлена в сторону, противоположную ускорению поступательного движения, и

будет равна произведению этого ускорению на массу системы. Для того чтобы эта сила уравновесила равнодействующую внешних сил, нужно только, чтобы ускорение поступательного движения было направлено по этой равнодействующей силе и было равно ее величине, разделенной на массу системы.

§2 Формулы проекций главного момента количеств движения полости и заключенной в ней жидкости

Пусть O будет неподвижная точка твердого тела; примем ее за начало прямоугольных осей координат $Oxyz$, неизменно соединенных с телом, и постараемся определить проекции на эти оси главного момента G количеств движения всех материальных точек нашей системы относительно O . Этот момент будет слагаться геометрически из главного момента g_0 количеств движения твердого тела и главных моментов $g_0, g_1, g_2 \dots$ количеств движения жидких масс в первой, второй и т.д. полостях. Если

$$f_0(x, y, z) = 1$$

будет уравнение эллипсоида инерции твердого тела относительно точки O , то проекции главного момента количеств движения тела на оси Ox, Oy и Oz представятся производными:

$$\left. \begin{aligned} np_x g_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_1}, \\ np_y g_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_2}, \\ np_z g_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ выражают проекции на оси Ox, Oy, Oz мгновенной угловой скорости тела ω .

Переходим к составлению проекций главного момента g . Так как абсолютное движение жидкости слагается из движения, имеющего потенциальную функцию скоростей φ , и из движения, имеющего потенциальную функцию скоростей x , то момент g слагается геометрически из моментов g' и g'' , соответствующих первому и

второму движению. Проекции по осям Ox, Oy, Oz момента g'' не будут изменяться со временем и представляться линейными функциями главных циркуляций k, k_1, \dots . Проекции по осям момента g' могут быть найдены с помощью работы количества движения однородной несжимаемой жидкой массы. Известно, что для получения проекции главного момента системы сил на какую-нибудь ось, проходящую через центр моментов, надо повернуть точки приложения этих сил на бесконечно малый угол около этой оси и разделить сумму элементарных работ, совершенных силами, на угловое перемещение. Предположим, что $\delta x, \delta y, \delta z$ суть проекции по осям координат бесконечно малых перемещений точек жидкой массы при ее вращении около оси Ox на бесконечно малый угол $\delta\theta$; тогда

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -z\delta\theta, \quad \delta z = y\delta\theta,$$

вследствие чего

$$np_x g' = -\frac{\rho}{\delta\theta} \iint \varphi \delta s \cos v d\sigma = -\rho \iint \varphi (y \cos \gamma - z \cos \beta) d\sigma,$$

где α, β, γ – углы внутренней нормали поверхности полости с осями координат. На основании теоремы Грина найденная величина проекции может быть преобразована:

$$np_x g' = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma = \rho \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Условившись в обозначении

$$\rho \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dx dy dz = [\varphi, \Phi],$$

Представим найденную формулу вместе с двумя другими для осей Oy и Oz в следующем виде:

$$np_x g' = [\varphi, \Phi_1], \quad np_y g' = [\varphi, \Phi_2], \quad np_z g' = [\varphi, \Phi_3].$$

Подставляем сюда величину φ :

$$np_x g' = \omega_1 [\Phi_1, \Phi_1] + \omega_2 [\Phi_1, \Phi_2] + \omega_3 [\Phi_1, \Phi_3],$$

$$np_y g' = \omega_1 [\Phi_2, \Phi_1] + \omega_2 [\Phi_2, \Phi_2] + \omega_3 [\Phi_2, \Phi_3],$$

$$np_z g' = \omega_1 [\Phi_3, \Phi_1] + \omega_2 [\Phi_3, \Phi_2] + \omega_3 [\Phi_3, \Phi_3].$$

Составляем двойную живую силу жидкой массы в движении, определяемом функцией скоростей φ . Найдем $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = [\Phi_1, \Phi_1]\omega_1^2 + [\Phi_2, \Phi_2]\omega_2^2 + [\Phi_3, \Phi_3]\omega_3^2 + 2[\Phi_2, \Phi_3]\omega_2\omega_3 + 2[\Phi_3, \Phi_1]\omega_3\omega_1 + 2[\Phi_1, \Phi_2]\omega_1\omega_2. \quad (2.2)$$

Эта формула показывает, что найденные нами величины проекции g' могут быть представлены в виде производных:

$$\left. \begin{aligned} np_x g' &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_1}, \\ np_y g' &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_2}, \\ np_z g' &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Так как функция $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ положительна при все возможных значениях $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то уравнение

$$f(x, y, z) = 1$$

представляет нам некоторый эллипсоид. Докажем, что этот эллипсоид всегда заключает внутри себя эллипсоид инерции рассматриваемой жидкой массы. Пусть уравнение эллипсоида инерции жидкой массы относительно точки O будет $f(x, y, z) = 1$. Пишем равенства:

$$z\omega_2 - y\omega_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (u - \frac{\partial \chi}{\partial x}),$$

$$x\omega_3 - z\omega_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (v - \frac{\partial \chi}{\partial y}),$$

$$y\omega_1 - x\omega_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (w - \frac{\partial \chi}{\partial z}),$$

Возводим их в квадрат, складываем и, умножив результат на массу m частицы жидкости, берем от обеих частей сумму, распространенную на всю полость.

Получим:

$$\begin{aligned}
 F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\
 &+ \sum m \left[\left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 \right] - \\
 &- 2 \sum m \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Преобразуем последнюю сумму. Для этого умножаем и делим ее на некоторое бесконечно малое время δt и полагаем

$$\left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \delta t = \delta x, \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) \delta t = \delta y, \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) \delta t = \delta z.$$

Эти величины $\delta x, \delta y, \delta z$ будут проекции бесконечно малых путей δs , пройденных во время δt в движении жидкости, слагающемся из ее относительного движения и ее начального движения, взятого в обратную сторону:

$$\begin{aligned}
 &\sum m \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\delta t} \sum m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) = - \frac{\rho}{\delta t} \iint \varphi \delta s \cos v d\sigma,
 \end{aligned}$$

Но так как для рассматриваемых перемещений δs имеем $\cos v = 0$, то преобразуемая сумма есть нуль. Вследствие этого находим, что

$$\begin{aligned}
 F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\
 &+ \sum m \left[\left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 \right], \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

откуда

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) < F(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Заменяем в этом неравенстве $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ на $\cos a, \cos b$ и $\cos c$:

$$f(\cos a, \cos b, \cos c) < F(\cos a, \cos b, \cos c).$$

Если предположим, что a, b и c суть углы, образуемые с осями координат центральными радиусами-векторами r и R эллипсоидов

$$f(x, y, z) = 1, F(x, y, z) = 1,$$

то найдем:

$$\frac{1}{r^2} = f(\cos a, \cos b, \cos c), \frac{1}{R^2} = F(\cos a, \cos b, \cos c).$$

Так что наше неравенство дает:

$$r > R,$$

т.е. первый эллипсоид заключает внутри себя второй. Распространяя сказанное о первой полости на все остальные, условимся приписывать в них соответственным величинам индексы $1, 2, \dots$; складываем геометрически главные моменты g, g_1, g_2, \dots и называем через P, Q и R проекции их равнодействующего момента на оси Ox, Oy, Oz ; потом составляем функцию

$$T = \frac{1}{2} [f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \dots] + P\omega_1 + Q\omega_2 + R\omega_3. \quad (2.5)$$

На основании формул (2.1), (2.3) и подобных же формул для других полостей заключаем, что искомые нами проекции на оси Ox, Oy, Oz главного момента количеств движения G выражаются частными производными от функции T по составляющим угловой скорости:

$$np_x G = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, np_y G = \frac{\partial T}{\partial \omega_2}, np_z G = \frac{\partial T}{\partial \omega_3}. \quad (2.6)$$

§3 Дифференциальные уравнения движения тела с полостями, наполненными жидкостью. Эквивалентные тела. Жироскопический эффект жидких масс в случае многосвязных полостей

Пользуясь найденными проекциями главного момента количеств движения нашей системы, легко можем составить дифференциальные уравнения движения твердого тела по способу, предложенному Буром. Вообразим неподвижные оси координат $Ox'y'z'$, совпадающие в рассматриваемый момент времени с нашими подвижными осями $Oxyz$, и назовем через L, M и N проекции главного момента внешних сил относительно точки O на оси $Ox'y'z'$. Эти проекции должны быть равны производным по времени от проекций на оси $Ox'y'z'$ главного момента количеств движения G , т.е. должны быть равны проекциям на эти оси скорости точки, лежащей в конце вектора G . Так как скорость

этой точки складывается из скорости относительно подвижных осей и скорости влечения от движения этих осей, то по формуле (2.6) находим:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \omega_2 - \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \omega_3, \\ M &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \omega_2 - \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \omega_1, \\ N &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3} \right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \omega_2 - \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Это и будет дифференциальные уравнения движения нашего твердого тела. Если в начальный момент, когда твердое тело неподвижно, жидкие массы тоже неподвижны, т.е. все величины k равны нулю, то $P = Q = R = 0$. Уравнения (2.6) представляют в этом случае обыкновенные дифференциальные уравнения движения твердого тела, имеющего относительно неподвижной точки эллипсоид инерции

$$f_0(x, y, z) + f(x, y, z) + f_1(x, y, z) + \dots = 1. \quad (2.8)$$

Такое твердое тело может быть получено присоединением к данному твердому телу вместо жидких масс неизменяемые тела, имеющие относительно точки O эллипсоиды инерции

$$f(x, y, z) = 1, f_1(x, y, z) = 1, \dots$$

мы будем эти тела выбирать таким образом, чтобы их массы равнялись массе заменяемой жидкости и центры тяжести совпадали с ее центром тяжести. Такие твердые тела мы назовем эквивалентными телами. Посмотрим, каковы должны быть центральные эллипсоиды инерции эквивалентных тел? Называя координаты центра тяжести C первой полости через ϵ, η, ζ , возьмем этот центр за начало осей Cx', Cy', Cz' , параллельных осям Ox, Oy, Oz и представим уравнение центрального эллипсоида инерции первого эквивалентного тела в виде

$$f' = (x', y', z') = 1.$$

Так как момент инерции рассматриваемого тела относительно какой-нибудь оси, проходящей через точку O и образующей с осями Ox, Oy, Oz углы a, b, c , равен его моменту относительно параллельной оси, проходящей через точку C , сложенному с

произведением массы жидкости M в первой полости на квадрат расстояния между этими осями, то

$$f(\cos a, \cos b, \cos c) = f'(\cos a, \cos b, \cos c) + M \left[(\epsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2) (\cos^2 a, \cos^2 b, \cos^2 c) - (\epsilon \cos a, \eta \cos b, \zeta \cos c)^2 \right].$$

Заменяем здесь $\cos a, \cos b, \cos c$ на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + M \left[(\zeta \omega_2 - \eta \omega_3)^2 + (\epsilon \omega_3 - \zeta \omega_1)^2 + (\eta \omega_1 - \epsilon \omega_2)^2 \right].$$

Разложим теперь движение нашей системы на поступательное со скоростями

$$\zeta \omega_2 - \eta \omega_3, \epsilon \omega_3 - \zeta \omega_1, \eta \omega_1 - \epsilon \omega_2$$

И вращательное относительно точки C . Вследствие этого вращательного движения жидкая масса первой полости получит скорости, имеющие потенциальную функцию φ' отличную от φ . Так как скорости нашей жидкой массы слагаются из скоростей ее центра тяжести и скоростей ее точек относительно этого центра тяжести, то по известной теореме механики ее живая сила будет равна живой силе в движении относительно центра тяжести, сложенной с половиною произведения массы на квадрат скорости центра тяжести. Отсюда следует, что

$$[\varphi, \varphi] = [\varphi', \varphi'] + M \left[(\zeta \omega_2 - \eta \omega_3)^2 + (\epsilon \omega_3 - \zeta \omega_1)^2 + (\eta \omega_1 - \epsilon \omega_2)^2 \right].$$

Замечая, что $[\varphi, \varphi] = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и сравнивая найденную формулу с предыдущей, находим:

$$f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = [\varphi', \varphi'].$$

Таким образом, уравнение центрального эллипсоида инерции первого эквивалентного тела может быть получено по формуле (2.2) в предположении, что неподвижная точка находится в центре первой полости. Мы видим из этого, что эквивалентные тела не зависят от места неподвижной точки O ; так что, заменив все жидкие массы эквивалентными телами, мы вполне заменяем их механический эффект. Из того обстоятельства, что эллипсоиды инерции эквивалентных тел заключают внутри себя эллипсоиды инерции собственных жидких масс, следует, что эквивалентные тела имеют

относительно всякой оси меньшие моменты инерции, нежели соответствующие им жидкие массы.

Переходим к предположению, что P , Q и R не равны нулю. Направляя оси Ox , Oy и Oz по главным осям эллипсоида, представленного уравнением (2.8), мы приведем это уравнение к виду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

а формулы (2.7) при этом обратятся в следующие:

$$\left. \begin{aligned} L &= A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 + R\omega_2 - Q\omega_3, \\ M &= B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_3\omega_1 + P\omega_3 - R\omega_1, \\ N &= C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 + Q\omega_1 - P\omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Эти уравнения одинаковы с уравнениями движения твердого тела, к которому присоединен вращающийся гироскоп. Ось вращения этого гироскопа образует с осями Ox , Oy , Oz углы, косинусы которых находятся в отношении

$$P : Q : R,$$

А произведение начальной скорости гироскопа (при покоящемся твердом теле) на момент инерции относительно оси вращения равно

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Таким образом, эффект жидких масс, не имеющих начальных скоростей, тождествен с эффектами некоторых эквивалентных твердых тел; жидкие же масс в многосвязных полостях, получившие начальные скорости, производят, кроме того, еще влияние, подобное действию некоторого вращающегося гироскопа, присоединенного к телу.

Глава III ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ (ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА)

В данной главе исследуется движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при условии, что число Рейнольдса мало (вязкость велика). В § 1 выводятся основные уравнения и формулируются сделанные допущения. В § 2 приводится анализ гидродинамической задачи при условии, что число Рейнольдса мало, и показано, что при этом условии задача приближенно сводится к линейной квазистационарной краевой задаче. Эта задача рассматривается в § 3, где получено выражение для кинетического момента системы через тензор \bar{P} , зависящий от формы полости и характеризующий диссипацию энергии за счет вязкости. В § 4 рассмотрены некоторые конкретные формы полостей, для которых проведено вычисление тензора \bar{P} . Движение тела с жидкостью при сделанных предположениях описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения получены в § 5.

§1. Основные уравнения

Рассматривается движение твердого тела G с полостью D , полностью заполненной несжимаемой вязкой жидкостью плотности ρ и кинетической вязкости ν (рис.7). Данная система является гиростатом. Это означает, что ее центр инерции неподвижен относительно твердого тела, а моменты инерции системы относительно любых связанных с телом осей постоянны и не зависят от движения жидкости.

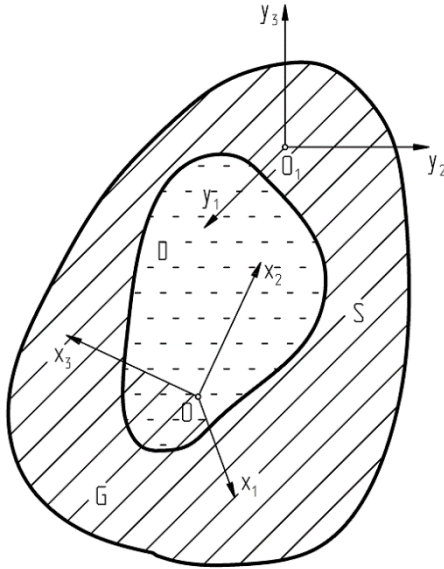


Рис. 7. Схема механической системы, состоящей из твердого тела и полости, целиком заполненной жидкостью

Уравнение движения центра инерции системы имеет вид:

$$m\overline{w}_c = \overline{R}.$$

Здесь m – масса всей системы; \overline{w}_c – ускорение ее центра инерций; \overline{R} – главный вектор всех внешних сил, действующих на систему “тело+жидкость”. Так как центр инерции системы неподвижен относительно твердого тела, то это уравнение имеет тот же вид, что и для случая твердого тела. Поэтому, в дальнейшем это уравнение не рассматривается.

Введем две правые прямоугольные декартовы системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ (см. Рис.1.). Система $Ox_1x_2x_3$ – произвольная система координат, жестко связанных с твердым телом. В качестве ее осей удобно выбирать оси симметрии полости (если они существуют).

Начало O_1 системы $O_1y_1y_2y_3$ также жестко свяжем с твердым телом. В качестве точки O_1 удобно (но не обязательно) брать неподвижную точку системы (если таковая существует) или ее центр масс. Оси системы $O_1y_1y_2y_3$ движутся произвольным заданным образом (обычно будем считать, что они движутся поступательно). Точки O_1 и O могут, в частности, совпадать друг с другом. Считая движение системы $O_1y_1y_2y_3$ известным, рассмотрим движение тела с жидкостью в этой системе координат.

Скорость \bar{v} произвольной точки системы относительно системы координат $O_1y_1y_2y_3$ представим в виде:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}_1 + \bar{u} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{u}. \quad (3.1)$$

Здесь \bar{r}_1 и \bar{r} – радиус-векторы данной точки, отсчитанные от точек O_1 и O , соответственно; \bar{u} – скорость относительно системы координат, связанной с телом; $\bar{\omega}$ – угловая скорость тела в системе $O_1y_1y_2y_3$, а $\bar{v}_0 = \bar{\omega} \times \overline{O_1O}$ – скорость точки O в системе $O_1y_1y_2y_3$ для точек твердого тела G имеем, очевидно, $\bar{u} = O$

Запишем уравнение теоремы об изменении кинетического момента в системе $O_1y_1y_2y_3$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}; \bar{K} = \int_{C+D} \bar{r}_1 \times \bar{v} dm. \quad (3.2)$$

Здесь t – время; \bar{K} – кинетический момент всей системы относительно точки O_1 в ее движении относительно системы $O_1y_1y_2y_3$ – главный момент относительно точки O_1 всех внешних сил, действующих на тело с жидкостью в системе $O_1y_1y_2y_3$; dm – элемент массы. В момент \bar{M} входит, в частности, момент сил инерции, обусловленный движением системы координат $O_1y_1y_2y_3$. Этот

момент сил инерции обращается в нуль, в частности, в следующих случаях:

а) когда система $O_1y_1y_2y_3$ неподвижна (O_1 – неподвижная точка);

б) когда система $O_1y_1y_2y_3$ движется поступательно, прямолинейно и равномерно;

в) когда система $O_1y_1y_2y_3$ движется поступательно, а точка O_1 – есть центр масс всей системы. В этих случаях \bar{M} – просто момент относительно точки O_1 всех внешних сил, действующих на систему.

Подставляя выражение (3.1) в формулу (3.2) для \bar{K} получим

$$\begin{cases} \bar{K} = \int_{C+D} \bar{r}_1 \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1) dm + \bar{L} = \bar{J} \cdot \bar{\omega} + \bar{L}; \\ \bar{L} = \int_D \bar{r}_1 \times \bar{u} dm. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь \bar{J} – тензор инерции всей системы относительно точки O_1 . Точкой обозначается скалярное произведение тензора на вектор. Вектор \bar{L} называется гиростатическим моментом. Имеем, очевидно

$$\bar{L} = \int_D (\bar{r}_1 + \overline{O_1O}) \times \bar{u} dm = \int_D \bar{r}_1 \times \bar{u} dm + \overline{O_1O} \times \int_D \bar{u} dm.$$

Последний из интегралов равен количеству движения жидкости в системе координат, связанной с телом. Так как в этой системе центр инерции жидкости покоится, то это количество движения равно нулю. Поэтому гиростатический момент \bar{L} не зависит от выбора полюса и может быть подсчитан относительно точки O , т.е.

$$\bar{L} = \int_D \bar{r} \times \bar{u} dm = \rho \int_D \bar{r} \times \bar{u} dv. \quad (3.4)$$

Если тело содержит несколько полостей с вязкой жидкостью, то в качестве \bar{L} нужно взять сумму гиростатических моментов для отдельных полостей.

Подставим равенство (3.3) для \bar{K} в уравнение моментов (3.2)

$$\begin{cases} \bar{J} \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) - \bar{M} - \bar{m}; \\ \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}; \bar{m} = -\dot{\bar{L}} - \dot{\bar{\omega}} \times \bar{L}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь точкой сверху обозначены производные векторов в произвольной системе координат, жестко связанной с твердым телом, а $\bar{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

Уравнение Навье-Стокса запишем для относительной скорости $\bar{u}(\bar{r}, t)$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с твердым телом:

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + 2\bar{\omega} \times \bar{u} + \bar{u}_t + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = \\ = -\nabla U + \bar{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \bar{u} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Левая часть уравнения (3.6) есть полное ускорение частицы в системе $O_1y_1y_2y_3$. Здесь \bar{w}_0 – ускорение точки O в системе координат $O_1y_1y_2y_3$, первые три слагаемых в левой части образуют переносное ускорение, четвертое слагаемое есть кориолисово ускорение, а пятое и шестое дают относительное ускорение. Через p обозначено давление жидкости, индекс t обозначает частую производную по t функций от \bar{r}, t . Массовые силы, действующие на жидкость и включающие в себя также и силы инерции, обусловленные движением системы $O_1y_1y_2y_3$, представлены в виде суммы потенциальной силы с потенциалом $U(\bar{r}, t)$ и не потенциальной силы $\bar{F}(\bar{r}, \bar{u}, t)$. Объединяя потенциальные слагаемые, можно переписать уравнение (3.6) в виде

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + 2\bar{\omega} \times \bar{u} + \bar{u}_t + (\bar{u}\nabla)\bar{u} = -\nu \nabla q + \nu \Delta \bar{u} + \bar{F}; \\ q - \frac{1}{\nu} \left[\frac{p}{\rho} + U + \bar{r} \cdot \bar{w}_0 - \frac{1}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 \right]. \end{cases} \quad (3.7)$$

К уравнению (3.7) для функций $\bar{u}(\bar{r}, t), \bar{q}(\bar{r}, t)$ нужно добавить уравнение неразрывности, граничные условия прилипания на стенках S полости D и граничные условия в момент $t = 0$.

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0 \text{ в } D; \bar{u} = 0 \text{ на } S; \bar{u}(\bar{r}, 0) = \bar{u}_0(\bar{r}). \quad (3.8)$$

Для определения движения твердого тела и жидкости в полости нужно сначала решить гидродинамическую задачу (3.7), (3.8) и определить функции $\bar{u}(\bar{r}, t), \bar{q}(\bar{r}, t)$. Это решение будет сложным образом зависеть от неизвестных заранее угловой скорости $\bar{\omega}(t)$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}(t)$, входящих в (3.7). Затем нужно вычислить интеграл (3.4) и составить уравнения (3.5). К системе нужно присоединить кинематические соотношения (например, для углов Эйлера или для направляющих косинусов), а также (в случае незакрепленного твердого тела) уравнения движения центра инерции системы. После этого получится система уравнений, на основании которой можно исследовать движение тела с жидкостью.

Описанный план решения будет в данной главе осуществлен при условии малости числа Рейнольдса

$$R = l^2 T^{-1} \nu^{-1} \sim 1. \quad (3.9)$$

Здесь l – характерный линейный размер полости; T – характерный масштаб времени относительного движения системы вокруг точки O_I ; т.е. $T \sim \omega^{-1}$. Предположим еще, что величины \bar{M}, \bar{m} , входящие в уравнения (3.5), не очень велики и по порядку величины не превосходят $J\omega^2$, где J – характерное значение моментов инерции системы относительно осей, проходящих через точку O_I . Это допущение несправедливо, например, в случае ударных воздействий. Если $|\bar{M}| \sim J\omega^2$, $|\bar{m}| \sim J\omega^2$, то из первого уравнения (3.5) следует, что $|\bar{\varepsilon}| \sim \omega^2 \sim T^{-2}$. Кроме того, предположим, что для высших производных справедливы аналогичные оценки $|\dot{\bar{\varepsilon}}| \sim T^{-3}$, $|\ddot{\bar{\varepsilon}}| \sim T^{-4}$. Для начальных относительных скоростей жидкости и для не

потенциальных массовых сил предполагаем выполненными оценки $|\bar{u}_0| \sim lT^{-1}$, $|F| \sim lT^{-2}$.

Отметим, что число Рейнольдса равно отношению $R = \frac{T'}{T}$, где $T' \sim l^2\nu^{-1}$ – характерное время, за которое вязкость успевает существенно изменить течение в полости. Малость числа Рейнольдса означает, что $T' < T$, т.е. вязкость может перестраивать течение значительно быстрее, чем меняется внешняя ситуация (угловое положение тела существенно изменяется за время T).

Примем, не нарушая общности, $l=1$, $T=1$. Это всегда можно сделать за счет выбора единиц измерения длины и времени или, что то же самое, путем перехода к безразмерным переменным. Тогда, согласно сделанным выше допущениям, величины \bar{F} , \bar{u}_0 , $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, $\ddot{\bar{\varepsilon}}$ будут величинами порядка единицы, $\nu > 1$ – большой числовой параметр, а $T' = R = \nu^{-1} < 1$.

§2. Анализ гидродинамической задачи

Решение краевой задачи (3.7), (3.8) в области D при $\nu > 1$ ищем в виде $\bar{u} = \bar{w} + \bar{W}$, $q = \varphi + \Phi$. Функции \bar{w} , φ представим в виде рядов по параметру ν^{-1} .

$$\begin{cases} \bar{w}(\bar{r}, t) = \bar{w}^0(\bar{r}, t) + \nu^{-1}\bar{w}^1(\bar{r}, t) + \nu^{-2}\bar{w}^2(\bar{r}, t) + \dots; \\ \bar{\varphi}(\bar{r}, t) = \varphi^0(\bar{r}, t) + \nu^{-1}\varphi^1(\bar{r}, t) + \nu^{-2}\varphi^2(\bar{r}, t) + \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Верхние индексы здесь указывают номер приближения. Потребуем, чтобы разложения (3.10) удовлетворяли уравнениям Навье-Стокса (3.7) и неразрывности (3.8), а также граничному условию (3.8), хотя начальному условию (3.8) они могут и не удовлетворять.

Подставим разложения (3.10) в уравнения (3.7), (3.8), вместо \bar{u} , q . Затем разложим все функции в (3.7), (3.8) по обратным степеням ν и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ν . Для k -го приближения получим

$$\begin{cases} \Delta w^k = \nabla \varphi^k - \bar{F}^k; \operatorname{div} w^k = 0 \text{ в } D, \\ w^k = 0 \text{ на } S \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (3.11)$$

Здесь функции \bar{F}^k зависят от \bar{w}^i из предыдущих приближений ($i = 0, 1, \dots, k-1$). В частности,

$$\begin{aligned} \bar{F}^0 &= 0; \\ \bar{F}^1 &= -\bar{\varepsilon} \times \bar{r} - 2\bar{\omega} \times \bar{W}^0 - \bar{W}_t^0 - \left(\bar{W}^0 \nabla \right) \bar{W}^0 + \bar{F}(\bar{r}, \bar{w}^0, t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Определение каждого приближения сводится к решению линейной квазистационарной неоднородной краевой задачи (3.11). Время t входит в задачи (3.11) как периметр.

Для нулевого приближения задача (3.11) с учетом (3.12) имеет вид

$$\Delta \bar{w}^0 = \nabla \varphi^0; \operatorname{div} \bar{w}^0 = 0 \text{ в } D; \bar{w}^0 = 0 \text{ на } S.$$

Эта задача, очевидно, удовлетворяется нулевым решением $\bar{w}^0 = 0; \varphi^0 = 0$. Данное решение, в силу известных теорем, единственно с точностью до произвольного постоянного слагаемого, которое может быть прибавлено к φ^0 . Учитывая это решение и формулу (3.12) для \bar{F}^1 , выпишем краевую задачу (3.11) для первого приближения

$$\begin{cases} \Delta \bar{w}^1 = \nabla \varphi^1 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \bar{F}(\bar{r}, 0, t); \operatorname{div} \bar{w}^1 = 0; \\ \bar{w}^1 = 0 \text{ на } S. \end{cases} \quad (3.13)$$

Подставим теперь $\bar{u} = \bar{w} + \bar{W}$, $q = \varphi + \Phi$ в уравнения (3.7), (3.8) и учтем, что функции \bar{w} , φ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям. Тогда для функций \bar{W} , Φ получим краевую задачу с начальными условиями

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{W}_t + 2\overline{\omega} \times \overline{W} + (\overline{w}\nabla)\overline{W} + (\overline{W}\nabla)\overline{w} + (\overline{W}\nabla)\overline{W} &= -\nu\nabla\phi + \\ + \nu\nabla\overline{W} + \overline{F}(\overline{r}, \overline{w} + \overline{W}t) - \overline{F}(\overline{r}, \overline{w}, t); & \\ \operatorname{div}\overline{W}^k = 0 \text{ в } D; \overline{W} = 0 \text{ на } S; \overline{W}(\overline{r}, 0) = \overline{u}_0(\overline{r}) - \overline{w}(\overline{r}, 0). & \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

Решение задачи (3.14) ищем в вид рядов

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{W}(\overline{r}, \tau) &= \overline{W}^0(\overline{r}, \tau) + \nu^{-1}\overline{W}^1(\overline{r}, \tau) + \nu^{-2}\overline{W}^2(\overline{r}, \tau) + \dots; \\ \phi(\overline{r}, \tau) &= \phi^0(\overline{r}, \tau) + \nu^{-1}\phi^1(\overline{r}, \tau) + \nu^{-2}\phi^2(\overline{r}, \tau) + \dots (\tau = \nu t). \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

Подставим ряды (3.15) в уравнения (3.14), перейдем к новой независимой переменной ϕ – "быстрому" времени $\tau = \nu t$ и разложим все функции в (3.14) в ряды по обратным степеням ν . При этом функцию \overline{w} заменим ее разложением (3.10) и учтем равенство $\overline{w}^0 = 0$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ν , получим k -го приближения

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{W}_\tau^k &= -\nabla\phi^k + \Delta\overline{W}^k + \Delta\overline{G}^k; \operatorname{div}\overline{W}^k = 0 \text{ в } D; \\ \overline{W}^k &= 0 \text{ на } S (k = 0, 1, 2, \dots); \\ \overline{W}^0(\overline{r}, 0) &= \overline{u}_0(\overline{r}); \overline{W}^k(\overline{r}, 0) = -\overline{w}^k(\overline{r}, 0) (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

Функции \overline{G}^k в (3.16) зависят от $\overline{W}^i, \overline{w}^i$ из предыдущих приближений ($i = 0, 1, \dots, k-1$) причем

$$\overline{G}^0 = 0; \overline{G}^1 = -2\overline{\omega} \times \overline{W}^0 - (\overline{W}^0\nabla)\overline{W}^0 + \overline{F}(\overline{r}, \overline{W}^0, 0) - \overline{F}(\overline{r}, 0, 0) \quad (3.17)$$

Определение функций \overline{W}^k, ϕ^k в каждом приближении сводится к решению линейной нестационарной краевой задачи (3.16), для которой имеют место теоремы существования и единственности при весьма общих предположениях о функциях \overline{G}^k и начальных условиях. Кроме

того, норма $\|\bar{W}^k\|$ решения задачи (3.16) убывает, как экспонента $e^{-c\tau}$ с некоторым $c > 0$, если только

$$\int_0^\infty \|\bar{G}^k\| e^{c\tau} d\tau < \infty.$$

Норма здесь понимается как норма в гильбертовом пространстве $L_2(D)$.

Рассматривая краевую задачу (3.16) при $k=0$ и учитывая первое равенство (3.17), заключаем на основании сказанного, что норма $\|\bar{W}^0\|$ экспоненциально убывает. Тогда таким же свойством обладает и норма $\|\bar{G}^1\|$ функции $\|\bar{G}^1\|$ определенной вторым равенством (3.17). Следовательно, норма $\|\bar{W}^1\|$ решения задачи (3.16) при $k=1$ также экспоненциально стремится к нулю. Ограничиваясь в разложениях (3.10), (3.15) первыми двумя членами и обозначая $\bar{W}^0 + \nu^{-1}\bar{W}^1 = \bar{H}$ можно написать

$$\bar{u} = \bar{w} + \bar{W} = \bar{w}^{-0} + \nu^{-1}\bar{w}^{-1} + \bar{H} + O(\nu^{-2}).$$

Выше показано, что $\bar{w}^{-0} = 0$, а $\|\bar{H}\| \sim e^{-c\nu t}$, где $c > 0$ – постоянная. В дальнейшем мы не будем рассматривать решение на малом начальном интервале времени $t < \nu^{-1}$, т.е. будем считать $t \geq O(1)$, а решение \bar{u} и интеграл \bar{L} из (3.4) будем вычислять с погрешностью $\sim \nu^{-2}$. Тогда можно положить приближенно

$$\bar{u} = \nu^{-1}\bar{w}^{-1}. \quad (3.18)$$

Применение \bar{u} с принятой плотностью сводится к решению квазистационарной задачи (3.13).

Примененный здесь метод решения задачи (3.7), (3.8) является, по существу, вариантом метода пограничного слоя. В отличие от обычного пограничного слоя, который имеет место в случае больших чисел Рейнольдса и расположен вблизи твердых стенок, здесь

пограничный слой связан с поведением функций во времени. Функции \bar{W}, ϕ являются функциями типа пограничного слоя и быстро затухают при удалении от начального момента времени.

Проведенное рассмотрение полностью согласуется с физическими представлениями. За счет большой вязкости ($\nu > 1$) влияние начального распределения скоростей быстро (за время $\sim \nu^{-1}$) становится несущественным (слагаемые \bar{W}, ϕ затухают). Течение в полости становится квазистационарным и близким к вращению жидкости как твердого тела вместе со стенками полости. Скорость жидкости \bar{u} относительно твердого тела при этом мала (порядка ν^{-1} , см. формулу (3.18)).

§3. О решении линейной стационарной краевой задачи

Определение течения жидкости в принятом приближении свелось к решению стационарной краевой задачи (3.13). Пусть $\varepsilon_i(t)$ – проекции углового ускорения ε_i на оси Ox_i , а $\bar{\varepsilon}_i$ – орты осей Ox_i ($i = 1, 2, 3$). Решение задачи (3.13) ищем в виде

$$\begin{cases} \bar{w}^1(\bar{r}, t) = \bar{z}_0(\bar{r}, t) + \varepsilon_1(t) \bar{z}_1(\bar{r}) + \varepsilon_2(t) \bar{z}_2(\bar{r}) + \varepsilon_3(t) \bar{z}_3(\bar{r}); \\ \phi^1(\bar{r}, t) = s_0(\bar{r}, t) + \varepsilon_1(t) s_1(\bar{r}) + \varepsilon_2(t) s_2(\bar{r}) + \varepsilon_3(t) s_3(\bar{r}). \end{cases} \quad (3.19)$$

Здесь функции \bar{z}_i, s_i удовлетворяют краевым задачам

$$\begin{cases} \Delta \bar{z}_0 = \nabla s_0 - \bar{F}(\bar{r}, 0, t); \operatorname{div} \bar{z}_0 = 0 \text{ в } D; \bar{z}_0 = 0 \text{ на } S; \\ \Delta \bar{z}_i = \nabla s_i + \bar{e}_i \times \bar{r}; \operatorname{div} \bar{z}_i = 0 \text{ в } D; \bar{z}_i = 0 \text{ на } S (i = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (3.20)$$

Нетрудно видеть, что если функции \bar{z}_i, s_i удовлетворяют задачам (3.20), то функции \bar{w}_i, ϕ_i из (3.19) удовлетворяют задаче (3.13).

Краевая задача (3.20) для \bar{z}_0, s_0 зависит от формы полости и от вида не потенциальных сил \bar{F} . Если массовые силы потенциальны, что предполагается в дальнейшем, то $\bar{F} = 0$ и $\bar{z}_0 = 0, \bar{s}_0 = 0$. Решение гидродинамической задачи тогда сводится к решению трех линейных стационарных краевых задач (3.20) для функций $\bar{z}_i(\bar{r}), \bar{s}_i(\bar{r})$. Поскольку эти задачи являются задачами вида (3.11), то их решение существует и единственно.

Задачи (3.20) для функций \bar{z}_i, s_i зависят только от формы полости, и поэтому для каждой полости их нужно решить один раз. После этого на основе (3.18), (3.19) при $\bar{F} = 0$ получим

$$\bar{u}(\bar{r}, t) = v^{-1} \left[\varepsilon_1(t) \bar{z}_1(\bar{r}) + \varepsilon_2(t) \bar{z}_2(\bar{r}) + \varepsilon_3(t) \bar{z}_3(\bar{r}) \right]. \quad (3.21)$$

Подставляя равенство (3.21) в (3.4), найдем

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{L} &= -\rho v^{-1} \sum_{i,j=1}^3 P_{i,j} \varepsilon_i(t) \bar{e}_j = -\rho v^{-1} \bar{P} \cdot \bar{\varepsilon}; \\ P_{i,j} &= -\int_D \bar{e}_j \cdot (\bar{r} \times \bar{z}_i) dv = -\int_D \bar{e}_j \cdot (\bar{z}_i \times \bar{r}), dv \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

Погрешность формулы (3.22) для \bar{L} составляет v^{-2} или R^{-2} , где R – число Рейнольдса. В случае не потенциальных сил в формулы (3.22) войдут дополнительные слагаемые за счет \bar{z}_0 . Так как величины $P_{i,j}$ согласно (3.22), переводят произвольный вектор $\bar{\varepsilon}$ в вектор \bar{L} , то они определяют аффинный ортогональный тензор второго ранга, который обозначен через $P = \{P_{i,j}\}$. Матрица $P_{i,j}$ определяет компоненты тензора \bar{P} в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Рассмотрим некоторые свойства тензора \bar{P} . Так как функции $\bar{z}_i(\bar{r})$ не зависят от времени, то величины $P_{i,j}$ постоянны, т.е. \bar{P} – постоянный тензор. Из краевых задач (3.20) видно, что функции \bar{z}_i

имеют размерность l^3 , а тогда из формулы (3.22) следует, что величины $P_{i,j}$ имеют размерность l^7 .

Докажем, что матрица коэффициентов $P_{i,j}$ симметрична. Прежде всего, согласно (3.22), имеем

$$P_{ij} - P_{ji} = \int_D \left[(\bar{e}_i \times \bar{r}) \cdot \bar{z}_j - (\bar{e}_j \times \bar{r}) \cdot \bar{z}_i \right] dv.$$

Подставим в это равенство $\bar{e}_i \times \bar{r}$ и $\bar{e}_j \times \bar{r}$ из уравнений (3.20), а затем воспользуемся формулами векторного анализа и уравнением неразрывности для \bar{z}_i, \bar{z}_j .

$$\begin{aligned} P_{ij} - P_{ji} &= \int_D \left[\bar{z}_j \cdot \Delta \bar{z}_i - \bar{z}_i \cdot \Delta \bar{z}_j - \bar{z}_j \cdot \nabla \bar{s}_i + \bar{z}_i \cdot \nabla \bar{s}_j \right] dv = \\ &= \int_D \operatorname{div} \left(\bar{z}_j \times \operatorname{rot} \bar{z}_i - \bar{z}_i \times \operatorname{rot} \bar{z}_j - \bar{s}_i \bar{z}_j + \bar{s}_j \bar{z}_i \right) dv. \end{aligned}$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского и равенства $\bar{z}_i = \bar{z}_j = 0$ на S (см.(3.20)), получим окончательно $P_{ij} - P_{ji} = 0$, т.е $P_{ij} = P_{ji}$, что и требовалось доказать.

Аналогичными преобразованиями получим

$$\begin{aligned} P_{ii} &= - \int_D (\bar{e}_i \times \bar{r}) \cdot \bar{z}_i dv = \int_D (\bar{z}_i \cdot \nabla \bar{s}_i - \bar{z}_i \cdot \Delta \bar{z}_i) dv = \\ &= \int_D \left[\operatorname{div} (\bar{s}_i \bar{z}_i - \bar{z}_i \times \operatorname{rot} \bar{z}_i) + (\operatorname{rot} \bar{z}_i)^2 \right] dv = \\ &= \int_D (\operatorname{rot} \bar{z}_i)^2 dv > 0. \end{aligned}$$

Доказанные свойства, как и равенства (3.22), справедливы в произвольной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Таким образом, тензор \bar{P} симметричен. Поэтому надлежащим выбором системы координат $Ox_1x_2x_3$ его можно привести к

диагональному виду, т.е. получить $P_{ij} = 0$ при $i \neq j$. При этом, так как $P_{ii} > 0$ в любой системе координат, то главные значения тензора \bar{P} вещественны и положительны. Следовательно, тензор \bar{P} соответствует положительно определенной квадратичной форме.

Тензор \bar{P} во многом аналогичен тензору инерции \bar{J} твердого тела или тензору присоединенных масс для полости, наполненной идеальной жидкостью. Как и тензор \bar{J} , тензор \bar{P} обладает свойствами симметрии и положительной определенности, а формула (3.22) для \bar{L} подобна формуле $\bar{K} = \bar{J} \cdot \bar{\omega}$ для кинетического момента твердого тела. Однако в отличие от \bar{J} тензор \bar{P} не зависит от выбора точки O . Это следует из того, что вектора $\bar{\varepsilon}$ и \bar{L} в равенстве (3.22) не зависят от выбора полюса. Поэтому тензор \bar{P} зависит лишь от формы полости, а его компоненты P_{ij} – еще от ориентации осей x_1, x_2, x_3 .

Приведем формулу для кинетической энергии E тела с жидкостью в системе координат $O_1 y_1 y_2 y_3$. Применяя равенство (3.1) и учитывая оценку $u \sim v^{-1}$, получим с погрешностью порядка v^{-2}

$$E = \frac{1}{2} \int_{C+D} v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{C+D} (\bar{\omega} \times \bar{r}_1)^2 dm + \rho \int_D \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{u})^2 dv.$$

Первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию системы при условии затвердения жидкости в полости и равно $E_0 = \frac{1}{2} (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega}$. Второе слагаемое преобразуем при помощи последнего равенства (3.3) и формулы (3.22) для \bar{L} . Тогда получим

$$E = E_0 + \bar{\omega} \cdot \bar{L} = E_0 - \rho v^{-1} (\bar{P} \cdot \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{\omega}. \quad (3.23)$$

Отметим, что векторные уравнения (3.20) можно, по крайней мере, для ряда форм полостей заменить скалярными. Примем для определенности $i = 3$ в (3.20) и положим

$$\begin{aligned} \bar{z}_3 &= \bar{e}_1 f_1(x_1, x_2, x_3) \bar{e}_2 f_2(x_1, x_2, x_3); \\ s_3 &= s_3(\bar{e}_1 f_1(x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

При этом из четырех скалярных дифференциальных уравнений, (3.20), которым удовлетворяют функции \bar{z}_3, s_3 , одно уравнение удовлетворится тождественно, а остальные уравнения и граничные условия дадут

$$\begin{cases} \Delta f_1 = -x_2 + \frac{\partial s_3}{\partial x_1}; \Delta f_2 = x_1 + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \text{ в } D; f_1 = f_2 = 0 \text{ на } S. \end{cases} \quad (3.25)$$

Введем функцию $\Psi_3(x_1, x_2, x_3)$ равенствами

$$f_1 = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2}; f_2 = -\frac{\partial \Psi_3}{\partial x_1}. \quad (3.26)$$

Совместными в силу третьего уравнения (3.25). Исключая s_3 перекрестным дифференцированием первых двух уравнений (3.25) по x_1, x_2 и выражая f_1, f_2 согласно (3.26), получим краевую задачу для функции Ψ_3 :

$$\begin{cases} \Delta \Delta_{12} \Psi_3 = -2 \text{ в } D; \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} = 0 \text{ на } S; \\ \Delta_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Здесь Δ_{12} в отличие Δ – оператор Лапласа по отношению x_1, x_2 . Циклически представляя индексы 1, 2, 3 в уравнениях (3.27), получим три краевые задачи четвертого порядка для трех функций ψ_i . Если эти задачи имеют решение, то оно единственно (с точностью до несущественных постоянных), так как задачи (3.27) получены в результате допущения (3.24) из задач (3.20), решение которых единственно. Из формул (3.24), (3.26) следует равенство $\bar{z}_i = \nabla \Psi_i \times e_i$, а тогда равенства (3.22) для P_{ij} можно переписать в виде

$$P_{ij} = \int_D \bar{e}_j \cdot \left[\bar{r} \times (\bar{e}_i \times \nabla \Psi_i) \right] dv \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.28)$$

Итак, гиростатический момент \bar{L} определяется формулой (3.22) посредством тензора \bar{P} . Для нахождения тензора \bar{P} нужно для каждой формы полости решить три линейные стационарные краевые задачи (3.20) (или (3.27)), а затем вычислить P_{ij} по формуле (3.22) (или (3.19)).

§4. Некоторые частные формы полостей

Рассмотрим краевые задачи (3.20) (или (3.27)) и соответствующие тензоры \bar{P} для некоторых частных форм полостей.

Пусть полость имеет ось симметрии. Не нарушая общности, можно считать, что этой осью является ось Ox_3 . При повороте полости вокруг оси Ox_3 на угол π , т.е. при одновременной замене x_1 на $-x_1$ и x_2 на $-x_2$ полость совместится сама с собой, т.е. ее форма не изменится. Следовательно, тензорный эллипсоид, соответствующий тензору \bar{P} , уравнение которого.

$$\sum_{i,j=1}^3 P_{ij} x_i x_j = 1, \quad (3.29)$$

Также не изменится при одновременной замене x_1 на $-x_1$ и x_2 на $-x_2$. Отсюда следует, что

$$P_{13} = P_{23} = P_{31} = P_{32} = 0. \quad (3.30)$$

Т.е. ось симметрии полости является главной осью тензора \bar{P} . Если полость имеет три оси симметрии, то в этих осях тензор \bar{P} имеет диагональный вид.

Пусть полость имеет плоскость симметрии. Примем, не нарушая общности, что эта плоскость есть плоскость $Ox_1 x_2$. Тогда при зеркальном отображении относительно этой плоскости, т.е. при замене x_3 на $-x_3$, форма полости не изменится. Следовательно, при этом не изменится и тензорный эллипсоид (3.29), т.е. снова выполнены

свойства (3.30). Поэтому ось, перпендикулярная плоскости симметрии, является главной осью тензора \bar{P} .

Поскольку тензор P не зависит от выбора полюса, то свойства 1 и 2 распространяются на любые оси, параллельные осям симметрии или перпендикулярные плоскостям симметрии полости.

Пусть полость имеет форму эллипсоида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \quad (3.31)$$

Решение задачи (3.27) ищем в виде полинома с постоянными коэффициентами b_i

$$\psi_3 = b_1 x_1^4 + 2b_2 x_1^2 x_2^2 + b_3 x_2^4 + b_4 x_1^2 x_3^2 + b_5 x_2^2 x_3^2 + b_6 x_1^2 + b_7 x_2^2. \quad (3.32)$$

Подставляя (3.32) в уравнение (3.27), получим

$$12b_1 + 8b_2 + 12b_3 + 2b_4 + 2b_5 = -1. \quad (3.33)$$

Подставим теперь (3.32) в граничные условия (3.27)

$$\begin{cases} 2x_1 (2b_1 x_1^2 + 2b_2 x_2^2 + b_4 x_3^2 + b_6) = 0; \\ 2x_2 (2b_2 x_1^2 + 2b_3 x_2^2 + b_5 x_3^2 + b_7) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Равенства (3.34) должны быть выполнены на поверхности эллипсоида (3.31). Для этого достаточно потребовать, чтобы квадратичные формы в скобках равенств (3.34) были пропорциональны квадратичной форме (3.31), т.е.

$$\begin{cases} 2b_1 a_1^2 = 2b_2 a_2^2 = b_4 a_3^2 = -b_6; \\ 2b_2 a_1^2 = 2b_3 a_2^2 = b_5 a_3^2 = -b_7. \end{cases} \quad (3.35)$$

Решение системы семи линейных уравнений (3.33), (3.35) с семью неизвестными имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = -\frac{b}{4a_1^4}; \quad b_2 = -\frac{b}{4a_1^2 a_2^2}; \quad b_3 = -\frac{b}{4a_2^4}; \\ b_4 = -\frac{b}{2a_1^2 a_3^2}; \quad b_5 = -\frac{b}{2a_2^2 a_3^2}; \quad b_6 = \frac{b}{2a_1^2}; \\ b_7 = \frac{b}{2a_2^2}; \quad b = \frac{a_1^4 a_2^4 a_3^2}{3a_3^2 (a_1^4 + a_2^4) + a_1^2 a_2^2 (a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2)}. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Формулы (3.32), (3.36) определяют, как легко проверить непосредственно, решение краевой задачи (3.27) для полости (3.31). Интеграл (3.28) при $i=j=3$ в скалярной записи примет вид

$$P_{33} = \int_D \left(x_1 \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} \right) dv.$$

Подставляя в этот интеграл равенства (4.4), (4.8), получим

$$P_{33} = b \iiint_D \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

В полученном интеграле сделаем замену переменных

$$x_1 = a_1 r \sin \theta \cos \varphi; \quad x_2 = a_2 r \sin \theta \sin \varphi; \quad x_3 = a_3 r \cos \theta.$$

Тогда интеграл для P_{33} преобразуется к виду

$$\begin{aligned} P_{33} &= ba_1 a_2 a_3 \iiint r^3 \sin^2 \theta (1 - r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= ba_1 a_2 a_3 \int_0^1 r^4 (1 - r^2) dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$P_{33} = \frac{16\pi a_1 a_2 a_3 b}{105}, \quad (3.37)$$

где b определено формулой (3.36). Оси симметрии полости x_i являются главными осями тензора \bar{P}_i , т.е. $P_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Для получения функций ψ_1, ψ_2 и компонент P_{11}, P_{22} нужно произвести циклическую

перестановку индексов $i^{22}=1,2,3$ при ψ_i, x_i, a_i, P_{ii} в формулах (3.32), (3.36), (3.37).

Для сферической полости радиуса a получим, полагая $a_i=a$ в равенствах (3.32), (3.36), (3.37)

$$\Psi_3 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)(2a^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2)}{40}; P_{ii} = \frac{8\pi a^2}{525} (i = 1, 2, 3). \quad (3.38)$$

Пусть полость представляет собой тело вращения вокруг оси Ox_3 . Тогда тензорный эллипсоид (3.29) будет эллипсоидом вращения вокруг оси Ox_3 , и поэтому $P_{ij}=0$ при $i \neq j$. При любом выборе x_1, x_2 , перпендикулярных оси Ox_3 , будем иметь $P_{11} = P_{22}$. Остановимся на определении функции \bar{z}_3 и компоненты P_{33} . Введем цилиндрические координаты ρ, φ, x формулами

$$x_1 = \rho \cos \varphi; \quad x_2 = \rho \sin \varphi; \quad x_3 = x.$$

и будем искать функцию s_3 и компоненты z_ρ, z_φ, z_x вектор-функции \bar{z}_3 в цилиндрических координатах в виде

$$s_3 = z_\rho = z_x = 0; \quad z_\varphi = z(\rho, x). \quad (3.39)$$

Переходя в уравнении (3.20) при $i=3$ к цилиндрическим координатам и используя равенства (3.39), получим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{z}{\rho^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho \quad \text{в } D_1, \quad z = 0 \quad \text{на } S_1. \quad (3.40)$$

Решение задачи (3.40) для $z(\rho, x)$ ищется в области D_1 плоскости ρx , которая является сечением полости меридиональной полуплоскостью $\varphi = \text{const}$. Контур S_1 есть сечение поверхности стенок S этой же меридиональной полуплоскостью. Формула (3.22) при $i=j=3$ с учетом (3.39) приводится в цилиндрических координатах к виду

$$P_{33} = -2\pi \int_{D_1} \rho^2 z(\rho, x) d\rho dx. \quad (3.41)$$

Итак, определение \bar{z}_3 и P_{33} сводится к решению задачи (3.40) и к вычислению интеграла (3.41).

Найдем частное решение уравнения (3.40) вида

$$z = \rho V(r); \quad r = \sqrt{\rho^2 + x^2}. \quad (3.42)$$

Подставляя (3.42) в (3.40), приходим к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению для $V(r)$, которое легко интегрируется

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 1; \quad V(r) = \frac{r^2}{10} + C_1 + \frac{C_2}{r^3}.$$

Подбирая постоянные C_1, C_2 так, чтобы $V(r)$ обращалось в нуль при $r=r_1$ и $r=r_2$ получим

$$V(r) = \frac{r^5 (r_2^3 - r_1^3) - r^3 (r_2^5 - r_1^5) + r_1^3 r_2^3 (r_2^2 - r_1^2)}{10r^3 (r_2^3 - r_1^3)}. \quad (3.43)$$

Равенства (3.42), (3.43) дают решение задачи (3.40) для полости, ограниченной двумя концентрическими сферами ($r_1 \leq r \leq r_2$). В интеграле (3.41) сделаем замену переменных:

$$\rho = r \sin \theta; \quad x = r \cos \theta.$$

Область D_1 в переменных r, θ в данном случае примет вид $0 \leq \theta \leq \pi, r_1 \leq r \leq r_2$. После замены переменных и подстановки решения (3.42) интеграл (3.41) преобразуется к виду.

$$P_{33} = -2\pi \iint r^2 \sin^2 \theta \cdot r \sin \theta V(r) r dr d\theta = -\frac{8\pi}{3} \int_{r_1}^{r_2} r^4 V(r) dr.$$

Подставляя в последний интеграл функцию $V(r)$ из (3.43), получим после интегрирования, раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$P_{33} = -\frac{4\pi}{15(r_2^3 - r_1^3)} \left[\frac{(r_2^7 - r_1^7)(r_2^3 - r_1^3)}{7} - \frac{(r_2^5 - r_1^5)^2}{5} - \frac{r_1^3 r_2^3 (r_2^2 - r_1^2)^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{2\pi r_1^7}{525(a^3 - 1)} (4a^{10} - 25a^7 + 42a^5 - 25a^3 + 4) \left(a = \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Многочлен 10-й степени, фигурирующий в последнем равенстве, делится, как нетрудно убедиться, на $(a-1)^4$. После вынесения этого множителя получим окончательно

$$\begin{cases} P_{ii} = \frac{2\pi r_1^7 (a-1)^3 g(a)}{525(a^2 + a + 1)}; & a = \frac{r_2}{r_1} (i = 1, 2, 3); \\ g(a) = 4a^6 + 16a^5 + 40a^4 + 55a^3 + 40a^2 + 16a + 4. \end{cases} \quad (3.44)$$

Очевидно, для рассматриваемой полости все P_{ii} равны между собой, а $P_{ij}=0$ при $i \neq j$. Пусть радиусы концентрических сфер близки друг к другу, т.е. $r_1=a$, $r_2=a+\Delta$, причем $\Delta \ll a$. Тогда формула (3.44) упрощается и дает

$$P_{ii} = \frac{2\pi a^7 \Delta^3}{3} \quad (\Delta \sim a; i = 1, 2, 3).$$

В случае сферической полости радиуса a ; т.е. при $r_1=0$, $r_2=a$ из равенств (3.42), (3.43), (3.44) имеем

$$z = \rho \frac{r^2 - a^2}{10}; \quad P_{ii} = \frac{8\pi a^7}{525} \quad (i = 1, 2, 3),$$

что совпадает с ранее полученной формулой (3.38) для P_{ii}

Уравнение (3.40) допускает, очевидно, решение, не зависящее от x :

$$z = \frac{\rho^3}{8} + C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho}.$$

Потребовав, чтобы z обращалось в нуль при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ найдем решение задач (3.40) для полости в виде бесконечного цилиндра $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$.

$$z(\rho) = \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho^2 - \rho_2^2)}{8\rho}. \quad (3.45)$$

Это решение приближенно годится и для цилиндра конечной высоты h , если $h > \rho_2$. Вычисление интеграла (3.41) в этом случае дает

$$P_{33} = \frac{\pi h}{48} (\rho_2^2 - \rho_1^2)^3. \quad (3.46)$$

Для кругового цилиндра радиуса a получим, полагая $\rho_1 = a$, $\rho_2 = a$ в равенствах (3.45), (3.46)

$$z = \frac{\rho(\rho^2 - a^2)}{8}; \quad P_{33} = \frac{\pi h a^6}{48}; \quad (h > a). \quad (3.47)$$

Выше получены решения краевых задач (3.2) (или (3.9)) и вычислены тензоры \bar{P} для некоторых форм полостей (сфера, эллипсоид, область между двумя концентрическими сферами, кольцевой и круговой цилиндры). Для цилиндров определена лишь осевая компонента P_{33} , что дает возможность изучать такие движения тел с цилиндрическими полостями, при которых вектор угловой скорости параллелен оси полости.

Задачи (3.20) или (3.27) могут быть решены для полостей другой формы различными приближенными и численными методами. В частности, для их решения можно применить метод Галеркина.

§5. Уравнения динамики тела с жидкостью

Рассмотрим задачу о влиянии вязкой жидкости в полости на динамику твердого тела. Тензор \bar{P} считаем известным, массовые силы, действующие на жидкость— потенциальными ($\bar{F} = 0$), главный момент \bar{M} внешних сил— не зависящим от внутренних движений

жидкости, т.е. \bar{M} может зависеть лишь от координат и скоростей твердого тела, а также, возможно, от времени.

Пусть y – вектор-функция, вообще говоря, любой размерности n , компонентами которой являются; кинематические параметры, характеризующие ориентацию твердого тела (например, углы Эйлера или направляющие косинусы), время t , а также, в случае незакрепленного твердого тела, координаты и скорости центра инерции системы. Учитывая равенства (3.5) и (3.22), запишем уравнения движения тела с полостью в виде

$$\begin{cases} \bar{J} \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) - \bar{M}(\bar{\omega}, y) = \bar{m}; \\ \bar{m} = \rho v^{-1} [\bar{P} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} + \bar{\omega} \times (\bar{P} \cdot \bar{\varepsilon})]; \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}; \dot{y} = f(y, \bar{\omega}). \end{cases} \quad (3.48)$$

Здесь точки обозначают производные по t в системе координат, связанной с телом, f есть n -мерная вектор-функция. Последнее уравнение (3.48) включает в себя все кинематические соотношения, уравнения движения центра инерции системы, а также, возможно, и другие замыкающие уравнения, не связанные с полостью, заполненной жидкостью (например, уравнения системы управления).

При $v^{-1} = 0$, $\bar{m} = 0$ уравнения (3.48) описывают движение системы при условии, что жидкость в полости затвердевает. Это уравнение представляет собой обычные уравнения динамики для координат и скоростей, т.е. для функций $\bar{\omega}$, y .

При $v^{-1} \neq 0$ система (3.48) содержит малый параметр v^{-1} при произвольных $\dot{\bar{\varepsilon}}$. Повышение порядка системы связано с дополнительными степенями свободы за счет движения жидкости в полости и требует задания начальных условий не только для координат и скоростей $\bar{\omega}$, y , но и ускорений $\bar{\varepsilon}$. Из системы (3.48) следует (переменные, как и выше, можно считать безразмерными), что $\dot{\bar{\varepsilon}} \sim v$, а тогда через время порядка единицы, вообще говоря, получим $\bar{\varepsilon} \sim v > 1$. Это противоречит условию $\bar{\varepsilon} \sim 1$, которое существенно использовалось в §2.

Чтобы удовлетворить всем допущениям §1, 2, следует искать такое решение системы (3.48), для которого выполнены условия $\bar{\varepsilon} \sim \dot{\bar{\varepsilon}} \sim \ddot{\bar{\varepsilon}} \sim 1$ при $v \rightarrow \infty$. При этих условиях, учитывая, что обратный тензор J^{-1} существует, имеем из первого уравнения (3.48)

$$\bar{\varepsilon} = \bar{J}^{-1} \cdot \left[\bar{M}(\bar{\omega}, y) - \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) \right] + \dots, \quad (3.49)$$

причем отброшенные члены и их производные имеют порядок ν^{-1} . Продифференцируем равенство (3.49) в системе координат, связанной с телом (в этой системе \bar{J} -постоянный тензор), а затем подставим $\dot{\bar{\omega}}$ и y из (3.48)

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \bar{J}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \bar{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} \cdot f - \bar{\varepsilon} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) - \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{\varepsilon}) \right] + \dots, \quad (3.50)$$

Здесь $\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{\omega}}$ и $\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}$ — матрицы частных производных

размерностей 3×3 и $3 \times n$ соответственно, которые умножаются на векторы соответствующих размерностей. Не уменьшая порядка точности, можно подставить $\bar{\varepsilon}$ из (3.49) в (3.50).

Подставим теперь равенства (3.49), (3.50) вместо $\bar{\varepsilon}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ в уравнение (3.48) для \bar{m} . При этом в выражение для \bar{m} вносится погрешность порядка ν^{-2} . Но погрешность определения вектора \bar{L} , а следовательно, и \bar{m} , по формуле (3.22) также имеет порядок ν^{-2} . В результате, применяя равенства (3.49), (3.50), можно, не уменьшая порядка точности, заменить систему (3.48) следующей:

$$\begin{cases} \bar{J} \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) - \bar{M}(\bar{\omega}, y) = \bar{m}; \\ \bar{m} = \rho \nu^{-1} \left[\bar{P} \cdot \bar{b} + \bar{\omega} \times (\bar{P} \cdot \bar{a}) \right]; \\ \bar{a} = \bar{J}^{-1} \cdot \left[\bar{M}(\bar{\omega}, y) - \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) \right]; \\ \bar{b} = \bar{J}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \bar{a} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} \cdot f - \bar{a} \times (\bar{J} \cdot \bar{\omega}) - \bar{\omega} \times (\bar{J} \cdot \bar{a}) \right]; \\ \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}; \quad \dot{y} = f(y, \bar{\omega}). \end{cases} \quad (3.51)$$

Эта система имеет такой же порядок, что и уравнения динамики при условии затвердения жидкости, и требует задания начальных

данных только для координат и скоростей $\bar{\omega}, y$. Здесь и \bar{m} представляет собой малый возмущающий момент, зависящий от координат и скоростей $\bar{\omega}, y$. Система (3.51), как и приближенное решение гидродинамической задачи, неприменима на малом (порядка ν^{-1}) начальном интервале времени, когда движение жидкости в полости существенно не стационарно. По истечении этого времени влияние начального распределения скоростей становится несущественно. Движение при этом описывается системой (3.51) с погрешностью порядка ν^{-2} на конечном (порядка единицы) интервале времени. На большом интервале времени (порядка ν) погрешность составит величину порядка ν^{-1} .

Поясним смысл проделанного выше преобразования системы (3.48) в систему (3.51). Анализ гидродинамических уравнений, проведенный в §2-3, и в частности формула (3.22), основаны на предположении, что угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ и его производные $\dot{\bar{\varepsilon}}, \ddot{\bar{\varepsilon}}$ есть величины порядка 1. Поэтому имеет смысл рассматривать лишь те из решений системы (3.48), которые удовлетворяют этому допущению. Проделанный выше вывод показывает, что решения системы (3.48), удовлетворяющие условию $\bar{\varepsilon} \sim \dot{\bar{\varepsilon}} \sim \ddot{\bar{\varepsilon}} \sim 1$, будут удовлетворять также (с определенной степенью точности) и системе (3.51), имеющей меньший порядок, чем (3.48). Что касается остальных решений системы (3.48), не описываемых системой (3.51), то эти решения не представляют интереса, так как они нарушают условие, без которого несправедлив анализ §2-3 в вывод самой системы (3.48).

Система (3.51) может исследоваться и решаться обычными аналитическими или численными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она содержит малый параметр ν^{-1} , поэтому к ней могут быть применены, в частности, асимптотические методы типа осреднения. При этом достаточно ограничиться первым приближением, обеспечивающим точность порядка ν^{-1} на интервале времени порядка ν .

Подсчитаем, исходя из уравнений (3.51), мощность момента \bar{m}

$$\overline{m} \cdot \overline{\omega} = \rho v^{-1} \left[(\overline{P} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{\omega} \right].$$

Из равенств (3.49)-(3.51) следуют равенства

$$\overline{\varepsilon} = \overline{a} + O(v^{-1}); \quad \dot{\overline{\varepsilon}} = \overline{b} + O(v^{-1}),$$

с помощью которых формула для $\overline{m} \cdot \overline{\omega}$ с точностью до членов порядка v^{-2} преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \overline{m} \cdot \overline{\omega} &= \rho v^{-1} \left[\frac{d}{dt} \left([\overline{P} \cdot \overline{\varepsilon}] \cdot \overline{\omega} \right) - [\overline{P} \cdot \overline{\varepsilon}] \cdot \dot{\overline{\varepsilon}} \right] = \\ &= \rho v^{-1} \left[\frac{d}{dt} \left([\overline{P} \cdot \overline{a}] \cdot \overline{\omega} \right) - [\overline{P} \cdot \overline{a}] \cdot \dot{\overline{a}} \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Так как квадратичная форма $[\overline{P} \cdot \overline{a}] \cdot \dot{\overline{a}}$ положительно определена, то второе слагаемое в формуле (3.52) всегда отрицательно и соответствует диссипации энергии за счет вязкости. Первое слагаемое может иметь любой знак и связано с передачей кинетической энергии от тела к жидкости и обратно. Пусть невозмущенное движение, т.е. движение тела с затвердевшей жидкостью, периодически (представляет собой колебания или вращения). Тогда векторы $\overline{\omega}, \overline{M}, \overline{a}$ периодичны в невозмущенном движении, а среднее значение за период первого слагаемого равенства (3.52) равно нулю.

Рассмотрим важный частный случай, когда невозмущенная система (система при условии затвердения жидкости, т.е. при $v = \infty, \overline{m} = 0$) консервативна. Тогда полная энергия невозмущенной системы

$$H = \frac{1}{2} (\overline{J} \cdot \overline{\omega}) \cdot \overline{\omega} + \Pi(y), \quad (3.53)$$

где Π – потенциальная энергия, сохраняется. При $\overline{m} \neq 0$ справедливо уравнение $\frac{dH}{dt} = \overline{m} \cdot \overline{\omega}$, причем в случае возмущенного движения функции H из (3.53) уже не является полной энергией системы (H -

энергия при условии затвердения жидкости). Пусть в невозмущенном движении система совершает периодическое движение (колебания или вращения), и $\bar{\omega}, \bar{M}, \bar{a}$, периодичны. В возмущенном движении H будет медленно меняющейся переменной и, согласно методу, в первом приближении можно определить скорость изменения H по периоду невозмущенного движения. Осреднение равенства (3.52) даст

$$\frac{dH}{dt} = M_t \{ \bar{m} \cdot \bar{\omega} \} = \rho v^{-1} M_t \{ (\bar{P} \cdot \bar{a}) \cdot \bar{a} \} < 0. \quad (3.54)$$

Здесь M_t – операция осреднения за период вдоль движений невозмущенной системы, причем функция H и другие первые интегралы невозмущенной системы считаются при осреднении постоянными. Уравнение (3.54) получено в первом приближении метода осреднения и имеет точность порядка v^{-1} на интервале времени порядка v . Если первая часть (3.54) оказывается после осреднения зависящей лишь от H , то уравнение (3.54) можно проинтегрировать и найти закон убывания H .

Глава IV ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ (ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА)

В данной главе рассматривается движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при условии, что амплитуда движения мала (уравнение Навье-Стокса могут быть линеаризованы), а число Рейнольдса велико. В §1 приводятся основные уравнения и формулируются сделанные допущения. В §2 излагается процедура построения решения гидродинамической задачи методом пограничного слоя. В §3 вычисляется кинетический момент тела с жидкостью, причем показано, что он выражается через некоторый симметричный тензор \bar{E} , зависящий от формы полости. Компоненты этого тензора выражаются через потенциалы Жуковского для данной полости, т.е. через решения задачи о движении идеальной жидкости в полости данной формы. В §3. выведены при сделанных предположениях общие уравнения движения тела с жидкостью.

§1 Основные уравнения

Рассматривается движение твердого тела G с односвязной полостью D , полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ и кинетической вязкости ν (рис.8).

Запишем уравнение движения центра инерции системы:

$$m\bar{w}_c = \bar{R}.$$

Здесь m – масса всей системы; \bar{w}_c – ускорение ее центра масс; \bar{R} – главный вектор всех внешних сил, приложенных к системе. Поскольку система является гироскатом, то ее центр масс неподвижен относительно твердого тела, и поэтому уравнение движения центра масс имеет тот же вид, что и для случая твердого тела. В дальнейшем это уравнение не рассматривается.

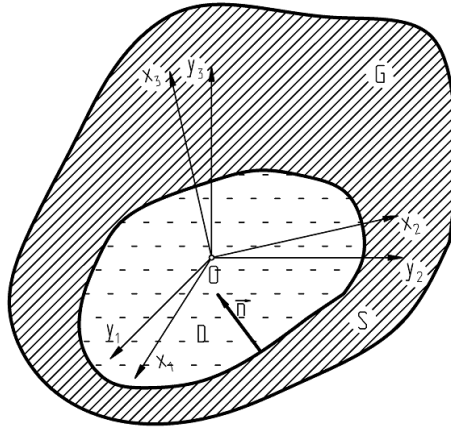


Рис.8. Схема механической системы, состоящей из твердого тела и полости, целиком заполненной жидкостью

Введем правые прямоугольные декартовы системы координат $Oy_1y_2y_3$ и $Ox_1x_2x_3$. Здесь точка O – произвольная точка связанная с твердым телом. Оси системы координат $Oy_1y_2y_3$ движутся в пространстве произвольным, но известным образом (например, поступательно). Система $Ox_1x_2x_3$ – произвольная система координат, жестко связанной с твердым телом. Введенные системы координат отличаются от системы, введенных в первой главе, лишь тем, что точки O_1 и O совпадают, что сделано для упрощения вычислений. Рассмотрим движение тела с жидкостью в системе координат.

В качестве ее осей удобно выбирать оси симметрии полости (если они существуют). Начало O_1 системы $Oy_1y_2y_3$ также жестко свяжем с твердым телом. В качестве точки O_1 удобно (но не обязательно) брать неподвижную точку системы (если таковая существует) или ее центр масс. Оси системы $O_1y_1y_2y_3$ движутся произвольным заданным

образом (обычно будем считать, что они движутся поступательно). Точки O_1 и O могут, в частности, совпадать друг с другом. Считая движение системы $O_1y_1y_2y_3$ известным, рассмотрим движение тела с жидкостью в этой системе координат.

Обозначим через \bar{r} – радиус-вектор произвольной точки системы, отложенный от точки O , через $\bar{u} = \dot{\bar{r}}$ – скорость этой точки относительно системы координат $Oy_1y_2y_3$. Точка уравнение моментов для тела с жидкостью в системе координат $Oy_1y_2y_3$ примет вид:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}, \quad \bar{K} = \int_{C+D} \bar{r}_1 \times \bar{u} dm. \quad (4.1)$$

Здесь \bar{K} – кинетический момент всей системы относительно точки O в ее движении относительно системы $Oy_1y_2y_3$; \bar{M} – главный момент относительно точки O всех внешних сил, действующих на тело с жидкостью в системе $Oy_1y_2y_3$; dm – элемент массы. В момент \bar{M} входит, вообще говоря, момент сил инерции, обусловленный движением системы координат $Oy_1y_2y_3$, который в частных случаях может обращаться в нуль.

Для точек твердого тела имеем, очевидно, $\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, где $\bar{\omega}$ – угловая скорость тела G в системе $Oy_1y_2y_3$. Тогда выражение (4.1) для \bar{K} переписывается в виде:

$$\bar{K} = \int_G \bar{r}_1 \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm + \int_D \bar{r} \times \bar{u} dv = \bar{J}_0 \cdot \bar{\omega} + \rho \int_D \bar{r} \times \bar{u} dv. \quad (4.2)$$

Здесь \bar{J}_0 – тензор инерции твердого тела относительно точки O , компоненты которого в системе координат $Ox_1x_2x_3$ постоянны.

Для вычисления второго слагаемого в формуле (4.2) требуется определить движение жидкости в полости. Запишем уравнения Навье-Стокса в системе координат $Oy_1y_2y_3$:

$$\bar{u}_t + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho' + \bar{F} + \nu \Delta \bar{u}, \quad \text{div} \bar{u} = 0. \quad (4.3)$$

Здесь индекс t обозначает частную производную по времени, ρ' – давление в жидкости, \bar{F} – ускорение внешних массовых сил, действующих на жидкость в системе координат $Oy_1y_2y_3$. Эти силы включают, в частности, и силы инерции, обусловленные движением системы $Oy_1y_2y_3$. Так, если система $Oy_1y_2y_3$ движется поступательно с ускорением $\bar{a}(t)$ то ускорение \bar{F} содержит слагаемое $(-\bar{a})$. В дальнейшем считаем силу \bar{F} потенциальной, т.е. $\bar{F} = -\nabla U$, где $U(\bar{r}, t)$ – потенциал массовых сил в системе координат $Oy_1y_2y_3$. В частности, при поступательном движении системы $Oy_1y_2y_3$ потенциал U содержит слагаемое $(-\bar{a}(t) \cdot \bar{r})$. Перепишем уравнения (4.3), полагая $\bar{F} = -\nabla U$, и вводя новую искомую функцию p :

$$\bar{u}_i + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = -\nabla p + \nu \Delta \bar{u}, \quad \text{div} \bar{u} = 0 \text{ в } D, \quad (4.4)$$

$$p = \frac{\rho'}{\rho} + U.$$

Краевые и начальные условия для системы (4.4) имеют вид

$$\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ на } S, \quad (4.5)$$

$$\bar{u} = \bar{u}_0(\bar{r}) \text{ при } t = t_0 \quad (4.6)$$

Здесь S – граница области D (стенки полости); t_0 – начальный момент времени. Начальная скорость $\bar{u}_0(\bar{r})$ должна быть подчинена условием:

$$\text{div} \bar{u}_0 = 0 \text{ в } D, \quad \bar{u}_0 = \bar{\omega}(t_0) \times r \text{ на } S. \quad (4.7)$$

Пусть l – характерный размер полости, T – характерный масштаб времени, равный, например, периоду колебаний тела. Число Рейнольдса предполагается большим

$$R = l^2 \nu^{-1} T^{-1} \gg 1. \quad (4.8)$$

Примем еще, что $|\bar{u}_0| \sim \omega l$, где ω – характерная величина угловой скорости тела.

Предположим, что уравнения (4.4) могут быть линеаризованы, т.е. амплитуда колебаний тела и жидкости мала. Для линеаризации уравнений (4.4) нужно предположить, что всюду

$$|(\bar{u}\nabla)\bar{u}| \sim |\bar{u}_t|. \quad (4.9)$$

Вне области пограничного слоя, как будет следовать из решения, построенного ниже, имеем по порядку величины $|\bar{u}| \sim \omega l$, $|\nabla| \sim \frac{1}{l}$ и поэтому $|\bar{u}\nabla| \sim \omega$. Здесь $|\nabla|$ – порядок величин производных каких-либо функций, отнесенный к характерной величине самих функций (очевидно, $|\nabla|$ обратно пропорционально характерному масштабу l изменения этих величин). Так как $|\bar{u}| \sim \omega l$ и $|\bar{u}_t| \sim \omega l T^{-1}$, то из приведенных оценок следует, что вне пограничного слоя имеем:

$$|(\bar{u}\nabla)\bar{u}| \sim \omega^2 l, \quad |\bar{u}_t| \sim \omega^2 l T^{-1}. \quad (4.10)$$

Для выполнения неравенства (4.9), с учетом (4.10), необходимо потребовать

$$\omega T \sim 1. \quad (4.11)$$

Внутри пограничного слоя различные компоненты векторов \bar{u} и ∇ имеют разные порядки. Однако и здесь $|\bar{u}\nabla| \sim \omega$ и поэтому оценки (4.10) по-прежнему имеют место (что будет следовать из решения, построенного ниже). Поэтому условие (4.11) является условием линеаризации уравнений (4.4) как вне, так и внутри пограничного слоя. Безразмерная величина ωT из (4.11) имеет порядок характерной угловой амплитуды колебаний тела, и поэтому условие (4.11) означает просто малость этой амплитуды. Условия (4.8), (4.11) во второй главе всюду считаем выполненными. Условие (4.11) позволяет линеаризовать уравнения (4.4):

$$\bar{u}_t = -\nabla p + \nu \Delta \bar{u}, \quad \text{div} \bar{u} = 0 \text{ в } D. \quad (4.12)$$

Для удобства в обозначениях будем считать, не нарушая общности, что единицы измерения длины и времени выбраны так, что $l \sim 1$, $T \sim 1$. Тогда условие (4.8) означает, что $\nu \ll 1$. Исследование движения тела с жидкостью сводится к решению краевой задачи (4.12), (4.5), (4.6) и к

вычислению кинетического момента \bar{K} из (4.2). После этого можно составить уравнения движения тела с жидкостью и решать их для различных случаев движения.

§2 Анализ гидродинамической задачи

Решение краевой задачи (4.12), (4.5), (4.6), содержащей малый параметр ν , ищем методом пограничного слоя.

Полагаем

$$\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}; \bar{v} = \bar{v}^0 + \nu^{\frac{1}{2}} \bar{v}^1 + \nu \bar{v}^2 + \dots; \quad (4.13)$$

$$p = q + s; q = q^0 + \nu^{\frac{1}{2}} q^1 + \nu q^2 + \dots$$

Верхние индексы у функций \bar{v} , q указывают номер приближения. Здесь \bar{w} , s - функции типа пограничного слоя, быстро стремящиеся к нулю при удалении от стенок полости. Эти функции также могут быть разложены в ряды по степеням $\nu^{\frac{1}{2}}$, но здесь учитываются лишь главные члены из разложений.

В качестве \bar{v}^0 , q^0 возьмем функции, удовлетворяющие уравнениям движения идеальной жидкости (т.е. уравнениям (4.12) при $\nu = 0$), условиям не протекания на стенке и начальным условиям (4.6). Краевая задача для \bar{v}^0 , q^0 имеет вид

$$\begin{cases} \bar{v}_t^0 = -\nabla q^0, \operatorname{div} \bar{v}^0 = 0 \text{ в } D; \\ \bar{v}^0 \cdot \bar{n} = (\bar{\omega} \times \bar{r}) q \cdot \bar{n} \text{ на } S; \bar{v}^0 = \bar{u}_0 \text{ нпу } t = t_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Здесь \bar{n} - единичная внутренняя нормаль к S . Для решения задачи (4.14) прежде всего определим в D вектор $\bar{a}(\bar{r})$ по условиям

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{rot} \bar{u}_0; \operatorname{div} \bar{a} = 0 \text{ в } D; \bar{a} \cdot \bar{n} = 0 \text{ на } S. \quad (4.15)$$

Условия (4.15) однозначно определяют вектор \bar{a} . Из (4.14), (4.15) следует, что всюду в D

$$\left[\operatorname{rot}(\bar{v}^0 - \bar{a}) \right]_t = 0; \operatorname{rot}(\bar{v}^0 - \bar{a}) = 0 \text{ нпу } t = t_0.$$

Следовательно, $\bar{v}^0 - \bar{a}$ - потенциальный в D вектор при $t \geq t_0$. Поэтому можно положить $\bar{v}^0 = \bar{a} + \nabla \varphi^0$, причем для функции $\varphi^0(\bar{r}, t)$ из (4.14), (4.15) получим задачу Неймана

$$\nabla \varphi^0 = 0 \text{ в } D; \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{n} \text{ на } S. \quad (4.16)$$

Таким образом, вектор \bar{v}^0 представлен в виде суммы потенциального и постоянного вихревого слагаемого. Гармоническая функция φ^0 определяется условиями (4.16) с точностью до произвольной функции времени. Из первого уравнения (4.14) имеем $q^0 = -\varphi_t^0 + C^0(t)$, где $C^0(t)$ - произвольная функция времени. Таким образом функции $\bar{v}^0 = \bar{a} + \nabla \varphi^0 + C^0(t)$ и $q^0 = -\varphi_t^0 + C^0(t)$, удовлетворяют с учетом (4.15), (4.16) уравнениями и краевому условию (4.14). Для проверки начального условия из (4.14) нужно показать, что вектор

$$\bar{a}_1(\bar{r}) = \bar{v}^0(\bar{r}, t_0) - \bar{u}_0(\bar{r}) - \bar{a}(\bar{r}) + \nabla \varphi^0(\bar{r}, t_0) - \bar{u}_0(\bar{r}).$$

Равен нулю в D . Но в силу (4.15), (4.16), (4.17) имеем

$$\text{rot} \bar{a}_1 = 0, \text{ div} \bar{a}_1 = 0 \text{ в } D; \bar{a}_1 \cdot \bar{n} = 0 \text{ на } S.$$

Отсюда следует $\bar{a}_1 = 0$ в D .

Итак, для определения \bar{v}^0 нужно решить задачи (4.15) и (4.16). Отметим, что в наиболее важном случае, когда движение начинается из покоя, имеем $\bar{u}_0 = 0, \bar{a} = 0$. Решение задачи (4.16) может быть выражено через потенциалы Жуковского:

$$\varphi^0 = \omega_1 \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2 + \omega_3 \Phi_3. \quad (4.17)$$

Здесь $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ - проекции вектора $\bar{\omega}$ на оси координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с телом, функции Φ_i удовлетворяют краевым задачам

$$\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } D; \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = (\bar{r} \times \bar{n}) \cdot \bar{e}_i \text{ на } S, \quad (4.18)$$

где \bar{e}_i - орт оси $Ox_i; i = 1, 2, 3$.

Функции \bar{v}^1, q^1 подчиним уравнениями и начальному условию

$$v_t^1 = -\nabla q^1; \operatorname{div} \bar{v}^1 = 0 \text{ в } D; \bar{v}^1 = 0 \text{ при } t = t_0.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rot} \bar{v}^1 = 0$ в D при $t \geq t_0$ и поэтому можно положить $\bar{v}^1 = \Delta \varphi^1$. Тогда для функций φ^1, q^1 получим

$$\Delta \varphi^1 = 0; q^1 = -\varphi_t^1 + C^1(t) \text{ в } D,$$

где $C^1(t)$ - произвольная функция

$$\bar{v} = \bar{v}^0 + v^{\frac{1}{2}} \bar{v}^1; q = q^0 + v^{\frac{1}{2}} q^1.$$

Удовлетворяют уравнению движения (4.12) с погрешностью v в D и точно удовлетворяют уравнению неразрывности и начальному условию (4.6).

Чтобы удовлетворить также граничному условию, прилипания (4.5), полагаем в соответствии с (4.13)

$$\bar{u} = \bar{v}^0 + v^{\frac{1}{2}} \bar{v}^1 + \bar{w} = \bar{a} + \nabla \varphi^0 + v^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi^1 + \bar{w}; q = q^0 + \sqrt{v} q^1 + s. \quad (4.19)$$

Члены порядка v и выше из разложений (4.13) здесь опущены. Подставляя (4.19) в (4.12), (4.6) и учитывая уравнения и начальные условия, которым удовлетворяют функции $\bar{v}^0, \bar{v}^1, q^0, q^1$ получим уравнения и начальное условие функций \bar{w}, s :

$$\bar{w}_t = -\nabla s + v \Delta \bar{u}, \operatorname{div} \bar{w} = 0 \text{ в } D, \bar{u} = 0 \text{ при } t = t_0. \quad (4.20)$$

Кроме того, как следует из (4.5), (4.19), должно быть выполнено граничное условие

$$\bar{w} + v^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi^1 = \bar{\omega} \times \bar{r} - \bar{v}^0 \text{ на } S. \quad (4.21)$$

В равенствах (4.20), (4.21) отброшены члены порядка v и выше.

Введем криволинейные ортогональные координаты ϵ, η, ζ так, чтобы поверхность стенок S была поверхностью $\zeta = 0$. Через $H_\epsilon, H_\eta, H_\zeta$ обозначим соответствующие коэффициенты Ламе

(примем, не нарушая общности $H_\zeta = 1$ при $\zeta = 0$), а через $w_\epsilon, w_\eta, w_\zeta$ -компоненты вектора \bar{u} в этой системе координат.

Запишем уравнения движения и неразрывности (4.20) в координатах ϵ, η, ζ . Так уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial(H_\epsilon, H_\eta, H_\zeta)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial(H_\epsilon, H_\eta, H_\zeta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(H_\epsilon, H_\eta, H_\zeta)}{\partial \zeta} = 0.$$

Затем сделаем замену одной независимой переменной и искомой функции

$$\zeta = av^{\frac{1}{2}}; \quad w_\zeta = v^{\frac{1}{2}}w_a,$$

и будем искать $w_\epsilon, w_\eta, w_\zeta, s$ как функции ϵ, η, a, t в области, D_s , прилегающей к поверхности S . В области D_s имеем $\zeta \sim v^{\frac{1}{2}}$, $a \sim 1$ и поэтому

$$H_\epsilon = H_\epsilon^0 + O(v^{\frac{1}{2}}), \quad H_\eta = H_\eta^0 + O(v^{\frac{1}{2}}), \quad H_\zeta = 1 + O(v^{\frac{1}{2}}),$$

где H_ϵ^0, H_η^0 суть значения коэффициентов Ламе на поверхности S , т.е. при $a = 0$. Учитывая эти оценки, упростим уравнения движения и неразрывности в области D_s , опуская в них члены порядка $v^{\frac{1}{2}}$, эти уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial w_\epsilon}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial \epsilon} + \frac{\partial^2 w_\epsilon}{\partial a^2}; \quad \frac{\partial w_\eta}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial a^2}; \\ \frac{\partial(H_\eta^0 w_\epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial(H_\eta^0 w_\epsilon)}{\partial \eta} + H_\epsilon^0 H_\eta^0 \frac{\partial w_a}{\partial a} = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Из уравнений (4.22) видно, что S не зависит от a . Но S -функция типа пограничного слоя, и $S \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, т.е. вне пограничного слоя. Следовательно, $S = 0$, и последние три уравнения (4.22) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}_T}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{w}_T}{\partial a^2}, \text{Div} \bar{w}_T + \frac{\partial w_a}{\partial a} = 0; \\ \text{Div} \bar{w}_T = \frac{1}{H_\epsilon^0 H_\eta^0} \left[\frac{\partial (H_\eta^0 w_\epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial (H_\eta^0 w_\epsilon)}{\partial \eta} \right]. \end{cases} \quad (4.23)$$

Здесь \bar{w}_T - двумерный вектор с компонентами w_ϵ, w_η (проекция вектора \bar{w} на плоскость, касательную к S), а через Div обозначена двумерная операция дивергенции, вычисляемая от двумерных векторов на поверхности S (a при вычислении Div рассматривается как параметр). Так как $\bar{w} = \bar{w}_T + O(v^{\frac{1}{2}})$, то из (4.21) получим, с точностью до малых порядка $v^{\frac{1}{2}}$, краевое условие для \bar{w}_T должен удовлетворять нулевому начальному условию см.(4.20) и условию на бесконечности

$$\bar{w}_T = 0 \text{ при } t = t_0, \bar{w}_T \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow \infty.$$

Решение уравнения теплопроводности (4.23) при выписанных граничных и начальных условиях имеет вид

$$\bar{w}_T = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{[\bar{\omega}(\tau) \times \bar{r} - \bar{v}^0(\bar{r}, \tau)]}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{-a^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) во второе уравнение (4.23) и интегрируя по a при условии $w_a \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, получим

$$w_a = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{\text{Div} [\bar{\omega}(\tau) \times \bar{r} - \bar{v}^0(\bar{r}, \tau)]}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{-a^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau. \quad (4.25)$$

Возвращаясь к переменным $\zeta = av^{\frac{1}{2}}$, $w_\zeta = v^{\frac{1}{2}} w_a$, перепишем решения (4.24), (4.25)

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{w}_T(\epsilon, \eta, \zeta, t) &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi v}} \int_{t_0}^t \frac{[\bar{\omega}(\tau) \times \bar{r} - \bar{v}^0(\bar{r}, \tau)]}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{-\zeta^2}{4v(t-\tau)}\right] d\tau; \\ w_\zeta(\epsilon, \eta, \zeta, t) &= \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{Div[\bar{\omega}(\tau) \times \bar{r} - \bar{v}^0(\bar{r}, \tau)]}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{-\zeta^2}{4v(t-\tau)}\right] d\tau. \end{aligned} \right. \quad (4.26)$$

Здесь радиус-вектор \bar{r} и внутренняя нормаль \bar{n} берутся в точке с координатами ϵ, η на поверхности S , т.е. при $\zeta = 0$. Вектор $\bar{\omega} \times \bar{r} - \bar{v}^0$ всюду касается поверхности S . Формулы (4.26) определяют вектор $\bar{\omega}$ в пограничном слое, т.е. при $\zeta \sim v^{\frac{1}{2}}$, с погрешностью порядка $\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}$ для касательной к S компоненты \bar{w}_T и с погрешностью порядка v для нормальной к S компоненты w_ζ . Функция \bar{w} , как и предполагалось выше, быстро (экспоненциально) затухает при удалении от стенок полости. Вне области пограничного слоя D_s , т.е. при $\zeta \sim 1$, можно принять $\bar{w} = 0$ с погрешностью, меньшей любой степени v .

Проектируя условия (4.21) на нормаль \bar{n} к поверхности S , в силу (4.26) получим

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial n} = -\frac{w_\zeta(\epsilon, \eta, 0, t)}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{Div[\bar{v}^0(\bar{r}, \tau) - \bar{\omega}(\tau) \times \bar{r}]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \text{ на } S. \quad (4.27)$$

Таким образом, для гармонической в D функции φ^1 получили задачу Неймана с условием (4.27). Решение этой задачи можно аналогично решению задачи (4.16) выразить через гармонические функции, не зависящие от времени.

Пусть функции ψ_0, ψ_i суть решения следующих краевых задач

$$\Delta\psi_0 = 0 \text{ в } D; \frac{\partial\psi_0}{\partial n} = \text{Liv}\bar{a} \text{ на } S$$

$$\Delta\psi_i = 0 \text{ в } D; \frac{\partial\psi_i}{\partial n} = \text{Div}(\nabla\Phi_i - \bar{e}_i \times \bar{r}) \text{ на } S \quad (i=1, 2, 3).$$
(4.28)

Тогда можно положить

$$\varphi^1(\bar{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{\psi(\bar{r}, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau; \quad \psi = \psi_0 + \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3. \quad (4.29)$$

Функция φ^1 , очевидно, удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию (4.27), если учесть равенства $\bar{v}^0 = \bar{a} + \nabla\varphi^0$ и (4.17). Начальное условие $\bar{v}^1 = \nabla\varphi^1 = 0$ при $t = t_0$ также оказывается выполненным.

Итак, определение асимптотического решения краевой задачи (4.12), (4.5), (4.6) сводится к следующему. Сначала для данной полости D нужно найти потенциалы Жуковского Φ_i , удовлетворяющие краевым задачам (4.18), и функции ψ_i , удовлетворяющие задачам (4.28) при $i = 1, 2, 3$. Отметим, что для любого векторного поля $\bar{c}(\bar{r})$, определенного на замкнутой поверхности S , справедливо равенство

$$\oint_S \text{Div}\bar{c}(\bar{r}) ds = 0. \quad (4.30)$$

Для доказательства этого равенства возьмем на поверхности S произвольный замкнутый контур r , разделяющий поверхность S на две части S_1, S_2 . Интеграл (4.30) по S при этом разбивается на два интеграла: по S_1 и по S_2 . Каждый из них при помощи теоремы Гаусса-Остроградского для векторных полей на поверхности сводится к потоку вектора \bar{c} через контур r , причем эти интегралы будут отличаться знаками. Тем самым тождество (4.30) доказано. С помощью этого тождества, учитывая краевые условия (4.28), получим

$$\oint_S \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (i=0, 1, 2, 3).$$

Для функции Φ_i , удовлетворяющих краевым условиям (4.18), получим при помощи Гаусса-Остроградского

$$\oint_S \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) ds = \oint_S \bar{n} \cdot (\bar{e}_i \times \bar{r}) ds = \int_p \operatorname{div}(\bar{e}_i \times \bar{r}) dv = 0, \quad (i=1,2,3).$$

Полученные равенства доказывают, что задачи Неймана (4.18) и (4.28) имеют решения, единственные с точностью до постоянного слагаемого.

Если в момент $t = t_0$ течение вихревое, то кроме Φ_i, ψ_i , нужно определить еще вектор-функцию \bar{a} по условиям (4.15) и функцию ψ_0 по (4.28). Функции Φ_i, ψ_i , зависят лишь от формы полости D , а \bar{a}, ψ_0 - еще от начального распределения скоростей \bar{u}_0 . Отметим, что все эти функции не зависят от времени и определяются единственным образом (с точностью до несущественных постоянных слагаемых).

Асимптотическое решение задач (4.12), (4.5), (4.6) выражается в соответствии с приведенными выше формулами в виде

$$\bar{u} = \bar{a} + \nabla \varphi^0 + v^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi^1 + \bar{w}; \quad p = -\varphi_t^0 - v^{\frac{1}{2}} \varphi_t^1 + C(t), \quad (4.31)$$

где $C(t)$ -произвольная функция. Здесь функции $\varphi^0, \varphi^1, \bar{w}$ определяются формулами (4.17), (4.29), (4.26), где $\bar{v}^0 = \bar{a} + \nabla \varphi^0$. Решение (4.31) аппроксимирует точное решение задачи (4.12), (4.5), (4.6) вне пограничного слоя с погрешностью порядка v . В пограничном слое D_s функции (4.31) аппроксимирует нормальную к S компоненту вектора \bar{u} с погрешностью порядка v , а функцию p и компоненту вектора \bar{u} , касательную к S - с погрешностью порядка $v^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, с помощью решения (4.31) можно определить кинетический момент жидкости с погрешностью порядка v .

Укажем, в каком интервале времени справедливо найденное решение. В разложениях (4.13) предполагается, что коэффициенты \bar{v}^0, \bar{v}^1 и т.д. суть величины одного порядка. Так как, по предположению, $|\bar{u}_0| \sim \omega l$, $l \sim 1$, $T \sim 1$, то из (4.14), (4.15), (4.17)

следует, что $|\bar{v}^0|, |\bar{a}|, \varphi^0$ имеют порядок ω . Тогда на основании (4.28), (4.29) заключаем, что $\psi \sim \omega$ и, следовательно, $\varphi^1 \sim \omega\sqrt{t-t_0}$. Чтобы \bar{v}^0 и \bar{v}^1 , или φ^0 и φ^1 , были величинами одного порядка, необходимо поэтому принять $t-t_0 \sim 1$. Итак, полученное решение справедливо, вообще говоря, на интервале времени порядка периода T колебаний тела.

Однако имеется важный случай, когда построенные решения справедливы на большом интервале времени. Пусть выполнены два условия: 1) в начальный момент течение потенциально всюду, кроме, быть может, области пограничного слоя; 2) функции

$$\int_{t_0}^t \frac{\omega_i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ограничены величиной порядка ω при всех $t \geq t_0$. Из первого условия следует, что можно принять $\bar{a} = 0$ и $\psi_0 = 0$ (если в пограничном слое течение в начальный момент не потенциально, то это можно учесть, задавая при $\bar{a} = 0$ нулевые значения для $\bar{\omega}$). Во всяком случае, первое условие выполнено, если движение начинается из покоя. Второе условие означает отсутствие вращательного движения: движение тела представляет собой колебания около некоторого среднего положения. При выполнении этих условий функция φ^1 из (4.29) будет иметь порядок ω при $t \rightarrow \infty$, и движение жидкости при этом всюду, кроме области пограничного слоя, останется близким к потенциальному (пограничный слой не будет расти со временем).

В этом важном случае найденное решение справедливо с указанной выше точность для всех $t \geq t_0$. Если же эти условия не выполнены, то движение жидкости будет существенно вихревым.

§3. Уравнения динамики тела с жидкостью

Прежде всего, подсчитаем кинетический момент \bar{K} , определенный формулой (1.2), причем вычисления проведем с погрешностью порядка ν . Для этого достаточно взять \bar{u} в виде (2.19).

Кроме того, в области пограничного слоя D_s имеем $\bar{w} = \bar{w}_T + O(\nu^{\frac{1}{2}})$.

Так как объем области D_s есть $O(\nu^{\frac{1}{2}})$, то можно принять $\bar{w} = \bar{w}_T$ в D_s , что даст при определении \bar{K} из (1.2) погрешность порядка ν . Вне области D_s полагаем $\bar{w} = 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{K} = & \bar{J}_0 \cdot \bar{\omega} + \bar{K}^0 + \rho \int_D \bar{r} \times \nabla \varphi^0 dv + \rho \sqrt{\nu} \int_D \bar{r} \times \nabla \varphi^1 dv + \\ & + \rho \int_{D_s} \bar{r} \times \bar{w}_T dv + O(\nu); \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\bar{K}^0 = \rho \int_D \bar{r} \times \bar{a} dv.$$

Очевидно \bar{K}^0 – постоянный вектор. Третье слагаемое в (4.32) есть кинетический момент относительно точки O потенциального движения идеальной жидкости. С учетом (4.17), (4.18) его можно записать в виде $\bar{J} \cdot \bar{\omega}$, где \bar{J} – тензор присоединенных масс. Компоненты J_{ij} симметричного тензора \bar{J} (присоединенные моменты инерции) в системе координат $Ox_1x_2x_3$ равны:

$$\begin{aligned} J_{ij} = J_{ji} = & \rho \bar{e}_j \int_D (\bar{r} \times \nabla \varphi_i) dv = -\rho \bar{e}_j \int_D \text{rot}(\bar{r} \varphi_i) dv = \\ = & -\rho \int_S (\bar{r} \times \bar{n}) \cdot \bar{e}_j \varphi_i ds = -\rho \int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds, \quad (i, j=1,2,3). \end{aligned} \quad (4.33)$$

При преобразованиях здесь учтены краевые условия (2.6). Используя равенство $\bar{r} \times \nabla \varphi^1 = \text{rot}(\bar{r} \varphi_i)$, сведем четвертое слагаемое из (3.1) к интегралу по поверхности S и подставим в него φ^1 из (2.17).

Тогда четвертое слагаемое из (3.1) примет вид:

$$\frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \int_S \{(\bar{n} \times \bar{r}) \cdot \psi ds\} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В пятое слагаемое формулы (4.32) подставим \bar{w}_T из (4.26) и заменим интегрирование по объему D_s интегрированием по поверхности S и по ζ от 0 до ∞ . Это можно сделать, так как \bar{w}_T быстро стремится к 0 при $\zeta \sim v^{\frac{1}{2}}$. После интегрирования по ζ это слагаемое примет вид:

$$\frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \int_S \left\{ \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r} - \bar{v}^0) \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad \bar{v}^0 = \bar{a} + \nabla\varphi^0.$$

Теперь кинетический момент (4.32) можно записать так

$$\bar{K} = \bar{I} \cdot \bar{\omega} + \bar{K}^0 + \bar{K}^* \quad (\bar{I} = \bar{J}_0 + \bar{J}). \quad (4.34)$$

Здесь \bar{I} – тензор инерции эквивалентного твердого тела для случая потенциального движения идеальной жидкости, а \bar{K}^* – сумма четвертого и пятого слагаемых в формуле (4.32). Согласно приведенным выше равенствам для этих слагаемых, имеем:

$$\bar{K}^* = \frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \int_S \left\{ \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r} - \bar{a} - \nabla\varphi^0) + (\bar{n} \times \bar{r})\psi \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (4.35)$$

Подставим в (4.35) φ^0 и ψ из формул (4.17), (4.29):

$$\begin{aligned} \bar{K}^* = & \frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \int_S \left\{ -\bar{r} \times \bar{a} - (\bar{n} \times \bar{r})\psi_0 \right\} ds + \\ & + \sum_{j=1}^3 \int_S \left\{ \bar{r} \times (\bar{e}_j \times \bar{r} - \nabla\varphi_j) - (\bar{n} \times \bar{r})\psi_j \right\} ds \Bigg] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Введем новые обозначения и перепишем формулу (4.36):

$$\begin{aligned} \bar{b} = & \int_S \left\{ -\bar{r} \times \bar{a} - (\bar{n} \times \bar{r})\psi_0 \right\} ds; \\ E_{ij} = & \int_S \left\{ \bar{r} \times (\bar{e}_j \times \bar{r} - \nabla\varphi_j) - (\bar{n} \times \bar{r})\psi_j \right\} \bar{e}_i ds, \quad (i, j = 1, 2, 3); \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}\bar{K}^* &= \frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t (\bar{b} + \bar{E} \cdot \bar{\omega}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \\ &= \frac{\rho\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \left[2\bar{b}\sqrt{t-t_0} + \bar{E} \int_{t_0}^t \frac{\bar{\omega}(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right],\end{aligned}\quad (4.38)$$

здесь \bar{b} – постоянный вектор, а \bar{E} – постоянный аффинный ортогональный тензор с компонентами E_{ij} в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Преобразуем формулы (4.37). Согласно краевым условиям (4.18) имеем:

$$\bar{n} \times \bar{r} = \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \left[(\bar{n} \times \bar{r}) \cdot \bar{e}_i \right] = \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial n}.$$

Подставим эту формулу в соотношения (4.37), применим теорему Грина и воспользуемся краевыми условиями (4.28)

$$\begin{aligned}\bar{b} &= \int_S \left[-\bar{r} \times \bar{a} - \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \psi_0 \right] ds = \int_S \left[-\bar{r} \times \bar{a} - \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \phi_i \text{Div} \bar{a} \right] ds; \\ E_{ij} &= \int_S \left[\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j r^2 - (\bar{e}_i \cdot \bar{r})(\bar{e}_j \cdot \bar{r}) - \bar{e}_i \cdot (\bar{r} - \nabla \phi_j) - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \psi_j \right] ds = \\ &= \int_S \left[\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j r^2 - (\bar{e}_i \cdot \bar{r})(\bar{e}_j \cdot \bar{r}) - (\bar{r} \times \bar{e}_i) \cdot \nabla \phi_j - \phi_i \text{Div}(\nabla \phi_j - \bar{e}_j \times \bar{r}) \right] ds.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Для любого векторного поля $\bar{q}(\bar{r})$ и скалярной функции $f(\bar{r})$, заданных на поверхности S , справедлива формула

$$\text{Div} \bar{q} = f \text{Div} \bar{q} + \bar{q} \cdot \text{Grad} f,$$

здесь Grad – операция взятия градиента вдоль поверхности S . Если функция f определена и вне S , то операция Grad связана с градиентом ∇ в трехмерном пространстве соотношением

$$\text{Grad} f = \nabla f - \bar{n} \left(\frac{df}{dn} \right).$$

Учитывая эти равенства и тождество (4.30), получим для любой замкнутой поверхности S :

$$\int_S f \text{Div} \bar{q} ds = \int_S \left(\bar{n} \left(\frac{df}{dn} \right) - \nabla f \right) \bar{q} ds. \quad (4.40)$$

Применим тождество (3.9) для преобразования интегралов (4.39). С учетом равенства $\bar{a} \cdot \bar{n} = 0$ на поверхности S получим для вектора \bar{b} :

$$\bar{b} = \oint_S \left[-\bar{r} \times \bar{a} + \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i (\nabla \varphi_i - \bar{a}) \right] ds = \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \oint_S (\bar{r} \times \bar{e}_i + \nabla \varphi_i) \cdot \bar{a} ds . \quad (4.41)$$

Аналогично преобразуем второй интеграл (4.39)

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \oint_S \left\{ r^2 \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j - (\bar{r} \cdot \bar{e}_i)(\bar{r} \cdot \bar{e}_j) + (\bar{r} \times \bar{e}_i) \cdot \nabla \varphi_j - \right. \\ &\quad \left. - \left[\bar{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right] \cdot (\nabla \varphi_j - \bar{e}_j \times \bar{r}) \right\} ds = \\ &= \oint_S \left\{ r^2 \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j - (\bar{r} \cdot \bar{e}_i)(\bar{r} \cdot \bar{e}_j) \right\} + (\bar{r} \times \bar{e}_i) \cdot \nabla \varphi_j - (\bar{r} \times \bar{e}_i) \cdot \nabla \varphi_i + \\ &\quad + \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \left[\bar{n} \nabla \varphi_j - \bar{n} \cdot (\bar{e}_j \times \bar{r}) \right] \Big\} ds. \end{aligned}$$

В последнем интеграле вторая из квадратных скобок равна нулю в силу (4.18), а первая может быть преобразована в силу известного тождества векторной алгебры:

$$r^2 \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j - (\bar{r} \cdot \bar{e}_i)(\bar{r} \cdot \bar{e}_j) = (\bar{r} \times \bar{e}_i)(\bar{r} \times \bar{e}_j) .$$

Окончательно получим:

$$E_{ij} = \oint_S (\bar{r} \times \bar{e}_i + \nabla \varphi_i) \cdot (\bar{r} \times \bar{e}_j + \nabla \varphi_j) ds, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.42)$$

Отсюда видно, что тензор \bar{E} симметричен ($E_{ij} = E_{ji}$). За счет поворота системы координат $Ox_1x_2x_3$ его можно привести к диагональному виду, т.е. получить $E_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Так как $E_{ii} > 0$ в любой декартовой системе координат, то главные значения тензора \bar{E} вещественны и положительны. Значит, тензору \bar{E} соответствует положительно-определенная квадратичная форма. Компоненты E_{ij} , так же как и компоненты J_{ij} , тенора присоединенных масс (4.33), зависят от формы полости через потенциал Жуковского φ_i . Для вычисления тензора \bar{E} поэтому достаточно лишь определить функции

ϕ_i , решив линейные краевые задачи (4.18), и вычислить интегралы (4.42). Компоненты тензора \bar{E} имеют размерность l^4 . Вектор \bar{b} зависит еще от вектор-функции \bar{a} . Отметим, что решать краевые задачи (4.28) для определения величин \bar{b} , \bar{E} не нужно.

Рассмотрим, как меняются вектор \bar{b} и тензор \bar{E} при изменении полюса O . Пусть точка O' , так же как и O , жестко связана с твердым телом. Обозначим через $\bar{d}(t) = OO'$ вектор, соединяющий эти точки. Тогда для относительных радиус-векторов и скоростей точек жидкости будем иметь:

$$\bar{r}' = \bar{r} - \bar{d}(t); \quad \bar{u}' = \bar{u} - \dot{\bar{d}}(t); \quad \bar{u}'_0 = \bar{u}_0 - \dot{\bar{d}}(t_0),$$

здесь \bar{u}_0 - начальная скорость, а штрихом обозначены величины, относящиеся к полюсу O' . Тогда из (4.15) следует, что $\bar{a}' = \bar{a}$. Краевые условия (4.18) для функций ϕ'_i, ϕ_i соответствующих полюсам O', O связаны следующим образом

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n} = (\bar{r}' \times \bar{n}) \cdot \bar{e}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial n} - (\bar{e}_i \times \bar{d}) \cdot \bar{n} \quad \text{на } S \quad (i = 1, 2, 3)$$

Следовательно, для функций ϕ'_i, ϕ_i имеем всюду в D

$$\phi'_i = \phi_i - (\bar{e}_i \times \bar{d}) \cdot \bar{r}; \quad \bar{r}'_i \times \bar{e}_i + \nabla \phi'_i = \bar{r}_i \times \bar{e}_i + \nabla \phi_j.$$

Из полученных равенств и формул (4.41), (4.42) сразу следует, что $\bar{b}' = \bar{b}$, $\bar{E}' = \bar{E}$, т.е. вектор \bar{b} и тензор \bar{E} инвариантны по отношению к выбору полюса O . Следовательно, вектор \bar{K}^* определяемый равенством (4.38), также не зависит от выбора полюса. Тензор \bar{E} во многом аналогичен тензору \bar{P} , рассмотренному в первой главе. Ниже будет видно, что тензор \bar{E} характеризует диссипацию энергии в вязкой жидкости, заключенной в полости.

Итак, кинетический момент \bar{K} выражается формулой (4.34), где \bar{K}^0 определено формулой (4.32), \bar{K}^* – формулой (4.38), а \bar{b} , \bar{E} – соотношениями (4.41), (4.42). При подстановке \bar{K} в уравнение (4.1) получим интегро-дифференциальное уравнение моментов для тела с жидкостью при больших числах Рейнольдса. В общем случае это уравнение будет справедливо с погрешностью порядка ν на интервале $t - t_0 \sim 1$. Если же выполнены два условия, сформулированные в конце §2 второй главы, то это уравнение будет справедливо и при $t - t_0 > 1$. В этом, наиболее важном случае, имеем $\bar{a} = 0$, $\bar{K}^0 = 0$, $\bar{b} = 0$, а \bar{K}^*

есть величина порядка $\nu^{\frac{1}{2}}$ по сравнению с $\bar{I} \cdot \bar{\omega}$ в (4.34) при всех $t \geq t_0$. Последнее обстоятельство позволяет применить методы малого параметра при анализе движения системы.

Отметим, что соотношения (4.34), (4.38) дают возможность составить уравнения движения и для системы более сложной, чем твердое тело с жидкостью (например, для системы тел с полостями, заполненными жидкостью).

Для получения полной системы уравнений движения тела с жидкостью при сделанных предположениях нужно к уравнению моментов (4.1) добавить уравнения движения центра масс системы, а также кинематические соотношения и, возможно, другие замыкающие уравнения (например, уравнения системы управления). Все эти уравнения, кроме уравнения моментов (4.1), будут иметь тот же вид, что и для твердого тела и поэтому не выписываются. При наличии в теле нескольких полостей с жидкостью нужно просто сложить кинетические моменты этих полостей (в частности, векторы \bar{K}^0 , \bar{K}^* , \bar{b} и тензоры \bar{E} при этом просто складываются). Для решения интегро-дифференциальных уравнений движения тела с жидкостью можно применять как аналитические, так и численные методы.

Список литературы

- 1 *Жуковский, Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью [Текст] / Н.Е. Жуковский // *Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика.* – М.: Гостехиздат. – 1949. 766 с.
2. *Моисеев, Н.Н.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость [Текст] / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. – М.: Наука. – 1965. 439 с.
3. *Черноузько, Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость [Текст] / Ф.Л. Черноузько. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР. – 1968. 230 с.

Учебное издание

Алексеев Алексей Владимирович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ**

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова
Компьютерная вёрстка И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 06.12.2018. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 6,75.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 20(Р5У)/2018.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

