МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Математические методы финансового анализа

Электронный курс в системе дистанционного обучения Moodle

САМАРА
2012

ББК 65.9(2)23
М 340

Автор-составитель: **Павлов Олег Валерьевич, Татарникова Мария Сергеевна**

Математические методы финансового анализа [Электронный ресурс]: электрон. курс в системе дистанц. обучения Moodle / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т. им. С.П. Королёва (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. О.В. Павлов, М.С. Татарникова. – Электрон. текстовые и граф. дан. (9,7 Мбайт). – Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав электронного курса входят:
1. Математические методы финансового анализа. Конспект лекций.
2. Математические методы финансового анализа. Контрольные работы.
3. Вопросы к зачету и экзамену по курсу.

Электронный курс предназначен для студентов, изучающих дисциплину «Математические методы финансового анализа», обучающихся по программам подготовки бакалавров по направлению подготовки 080500.62 «Бизнес-информатика» в четвёртом семестре, по направлениям подготовки 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент» в восьмом семестре.

Электронный курс разработан на кафедре финансов и кредита факультета экономики и управления.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)»

О.В. Павлов М.С. Татарникова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Курс лекций

САМАРА 2012

***-отмечены разделы для изучения только студентами специальности «Математические методы в экономике» и направления «Бизнес-информатика».**

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы финансового анализа (ММФА) – раздел экономической науки, занимающийся количественным анализом финансовых операций (сделок, контрактов). Это научное направление сформировалось на стыке финансовой науки и математики.

Финансовая операция (сделка, контракт) – это действие по управлению финансовыми средствами (финансовыми активами), связанная с переходом права собственности на эти финансовые средства. В дальнейшем в курсе в качестве синонима финансовой операции будет употребляться термины сделки и контракты.

К финансовым операциям относятся:

1)банковские операции;

2)сделки с ценными бумагами;

3)инвестирование;

4)лизинг;

5)страхование;

6)любое другое действие, связанное с переходом права собственности на финансовые активы.

В финансовой операции участвуют минимально не меньше двух участников.

Задачи, решаемые ММФА:

1)вычисление конечных результатов финансовой операции для каждой из участвующих сторон;

2)определение зависимости конечных результатов от основных параметров операции, определение допустимых граничных (критических) значений этих параметров;

3)разработку оптимальных планов финансовых операций;

4)нахождение параметров эквивалентного (безубыточного) изменения условий сделки.

ТЕМА 1. ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

1.1.Принцип неравноценности денег во времени

Важнейшим фактором в анализе финансовых операций является принцип неравноценности денег во времени.

Первый принцип теории финансов: рубль, полученный сегодня, стоит больше рубля, который будет получен в будущем без учета инфляции.

Неравноценность двух одинаковых сумм связана с тем, что имеющиеся сегодня деньги могут быть инвестированы и принести доход в будущем. Поэтому деньги в настоящем ценнее денег в будущем.

Следствием принципа временной стоимости денег является **неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени, для принятия финансовых решений**. Фактор времени в долгосрочных операциях играет решающую роль. Влияние фактора времени многократно усиливается инфляцией.

1.2.Проценты

Большая часть финансовых операций связана с предоставлением денег в долг. Заёмщик платит кредитору проценты за пользование ссудой.

Проценты (процентные деньги) – это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме (выдача ссуды, помещение денег на банковский депозит, учёт векселя, покупка облигации и т.д.)

Современная модель рыночной экономики построена на **ссудном проценте.**

Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов называется наращением или ростом.

Наращенная сумма ссуды – это первоначальная сумма вместе с начисленными к концу срока ссуды процентами.

Наращенная сумма вычисляется по формуле:

$$S = P + I,$$

где S – наращенная сумма ссуды,

P – первоначальная сумма ссуды,

I – начисленные к концу срока ссуды проценты.

Единицей измерения процентов является денежная единица (в России - рубль).

Процентная ставка наращения – это отношение дохода (процентов) за фиксированный период времени *t* к сумме долга.

Процентная ставка наращения вычисляется по формуле:

$$i = \frac{I}{P} = \frac{S - P}{P}.$$

Процентная ставка это относительная безразмерная величина. В финансовой документации процентная ставка записывается в виде математических процентов. Размер процентной ставки зависит от следующих факторов: общего состояния экономики, вида сделки, её валюты, срока кредита и т.д.

В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель **степени доходности любой финансовой операции.** В этом случае процентная ставка называется **доходностью**.

Временной период, к которому приурочена процентная ставка, называется периодом начисления.

В качестве периода начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц.

Проценты за временной период вычисляются:

$$I = Pi.$$

Проценты выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (этот процесс называется капитализацией процентов).

Существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий финансовой операции.

Процентные ставки различаются

1. по базе для их начисления: **простые и сложные.**

При постоянной базе используются простые процентные ставки, при переменной – сложные процентные ставки.

2.по принципу расчетов процентов: **ставки наращения и учетные ставки**.

Ставки наращения используются при наращении на сумму долга, учетные ставки применяют при скидке с конечной суммы задолженности.

3.**фиксированные и плавающие.**

4.**дискретные и непрерывные.**

Дискретные проценты начисляются за фиксированные в договоре периоды времени (год, полугодие, квартал, месяц). Непрерывные проценты начисляются для процессов, которые можно рассматривать как непрерывные.

1.3.Простая процентная ставка наращения

Простая процентная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления всегда остаётся постоянной.

Проценты вычисляются

за первый период: $I_1 = Pi$,

за второй период: $I_2 = Pi$,

за n-ый период: $I_n = Pi$,

где n – срок ссуды в годах,

i – простая годовая ставка наращения,

P – первоначальная сумма ссуды, являющаяся базой начисления, не изменяющейся с течением времени.

Проценты за весь срок ссуды n рассчитываются следующим образом:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = Pi + Pi + \ldots + Pi = Pin.$$

Тогда наращенная сумма записывается в виде:

$$S = P + I = P(1 + ni),$$

где $(1+ni)$ – множитель наращения простых процентов.

Множителем наращения называется число, показывающее во сколько раз наращенная сумма долга больше первоначальной величины. Экономический смысл множителя наращения: наращенная к моменту n будущая стоимость одной денежной единицы, вложенной в настоящий момент времени. Множитель наращения больше единицы.

Обычно к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до одного года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору.

Срок ссуды рассчитывается по формуле:

$$n = \frac{t}{K},$$

где t – число дней ссуды,

K – временная база (число дней в году).

Используется два типа временных баз: K=360 дней в году (обыкновенные проценты) и K=365 (366) дней в году (точные проценты).

Используется три варианта расчёта простых процентов:

1. **Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365).**

Количество дней ссуды рассчитывается точно по календарю. Первый и последний день принимаются за один. K=365. Используется центральными банками и крупными коммерческими банками.

2. **Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360).**

Количество дней ссуды рассчитывается точно по календарю. Первый и последний день принимаются за один. K=360. Используется в ссудных операциях коммерческих банков.

3. **Обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды (360/360).**

Количество дней в каждом месяце принимается равное 30. Первый и последний день принимаются за один и K=360. Используется при промежуточных расчётах.

1.4.Сложная годовая процентная ставка наращения

Сложная процентная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления является переменной, то есть проценты начисляются на проценты.

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, называется **капитализацией процентов**.

Вычислим наращенную сумму:

через 1 год $S_1 = P(1+i)$,

через 2 года $S_2 = S_1(1+i) = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$

через 3 года $S_3 = S_2(1+i) = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$.

Продолжая этот процесс, получаем наращенную сумму через n лет:

$$S = P(1+i)^n,$$

где $(1+i)^n$ - множитель наращения по сложным процентам.

Сложные процентные ставки наращения применяются для расчёта долгосрочных финансовых операций (срок более года).

На рис. 1.1 приводятся графики наращенных сумм, рассчитанных по простой и сложной процентным ставкам.

В случае если процентная ставка является переменной, наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_k)^{n_k},$$

где $i_1, i_2, \ldots i_k$ - последовательные во времени значения ставок,

$n_1, n_2, \ldots n_k$ - последовательные периоды времени.

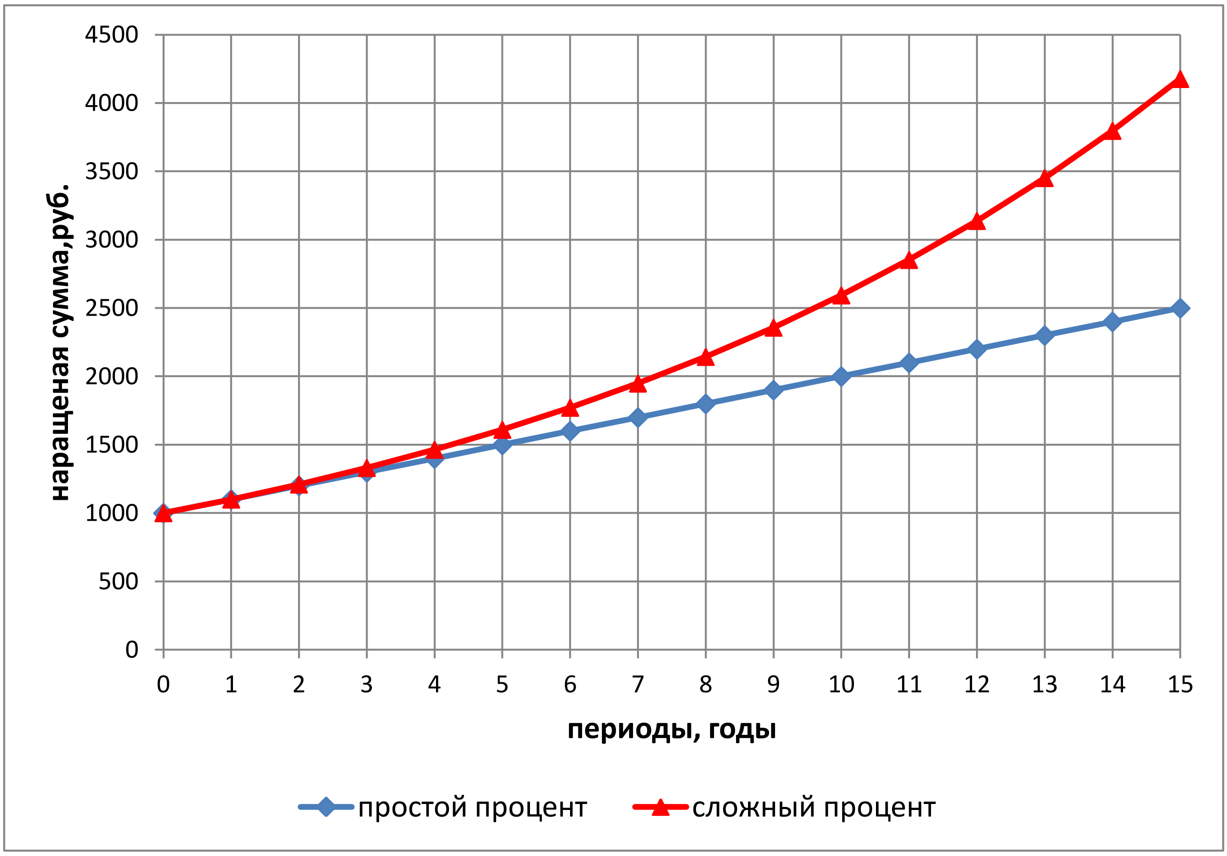

Рис. 1.1. Графики наращенных сумм, рассчитанных по простой и сложной процентным ставкам

1.5.Номинальная процентная ставка наращения

В финансовых операциях часто проценты капитализируются не один, а m раз в году. Если период наращения процентов составляет месяц, то m=12, если квартал, то m=4.

В финансовых контрактах указывается **годовая или номинальная процентная ставка *j*.** Если количество начислений процентов m раз, то проценты начисляются по ставке $\frac{j}{m}$.

Наращенная сумма рассчитывается по формуле:

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn},$$

где $(1+\frac{j}{m})^{mn}$ - множитель наращения, при количестве начислений процентов m раз.

На рис. 1.2 приводятся графики наращенных сумм, рассчитанных при однократном и 12-кратном начислении процентов в году.

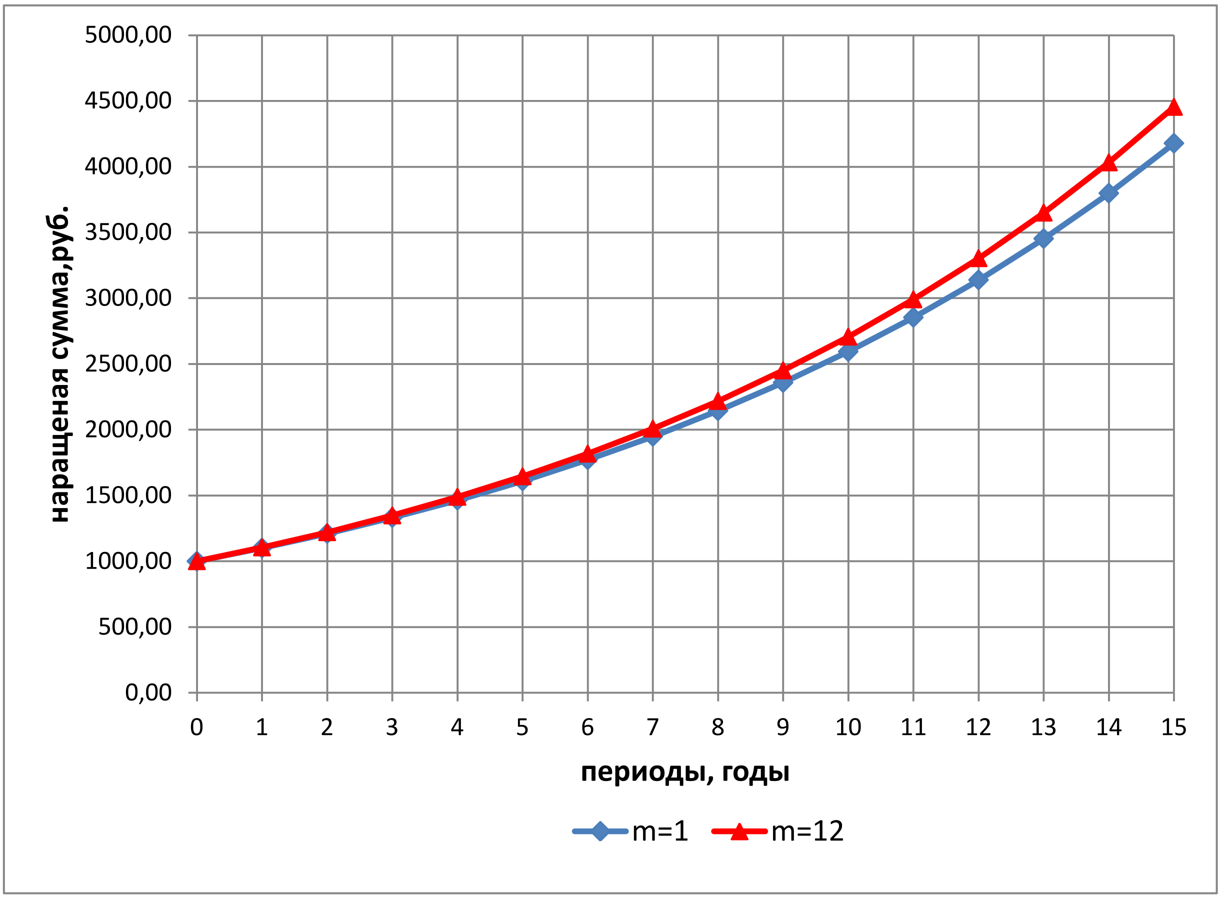

Рис. 1.2. Графики наращенных сумм, рассчитанных при однократном и 12-кратном начислении процентов в году

1.6.Эффективная ставка

Эффективная (действительная) ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же результат, что начисление процентов *m* раз по ставке j/m**.**

Эффективная ставка измеряет реальный относительный доход, который получается в целом за год от начисления процентов.

Обозначим эффективную ставку через i.

Множители наращения по двум видам ставок – эффективной и номинальной при начислении процентов m раз должны быть равны:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Из этого равенства эффективная ставка вычисляется:

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1.$$

Номинальная ставка определяется:

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1).$$

Замена в договоре номинальной ставки j при начислении m раз процентов в год на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств сторон, то есть обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.

1.7. Непрерывное наращение

В общих теоретических разработках и анализе сложных финансовых проблем используют непрерывные проценты.

Непрерывное начисление процентов – это начисление процентов за бесконечно малые отрезки времени ($m \to \infty$).

Сила роста δ **- это процентная ставка** j **при непрерывном начислении процентов** ($j \to \delta$).

Сила роста называется постоянной, если она не изменяется во времени. Сила роста, изменяющаяся во времени, называется переменной.

Наращенная сумма при непрерывном начислении процентов для постоянной силы роста $\delta = const$ вычисляется:

$$S = \lim_{m \to \infty} P(1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Используя второй замечательный предел:

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{j}{m})^m = e^j,$$

заменяя $j \to \delta$, получаем формулу для нахождения наращенной суммы при непрерывном начислении:

$$S = Pe^{\delta n},$$

где $e^{\delta n}$ - множитель наращения при непрерывном начислении процентов.

На рис. 1.3 приводятся графики наращенных сумм, рассчитанных при однократном и непрерывном начислении процентов.

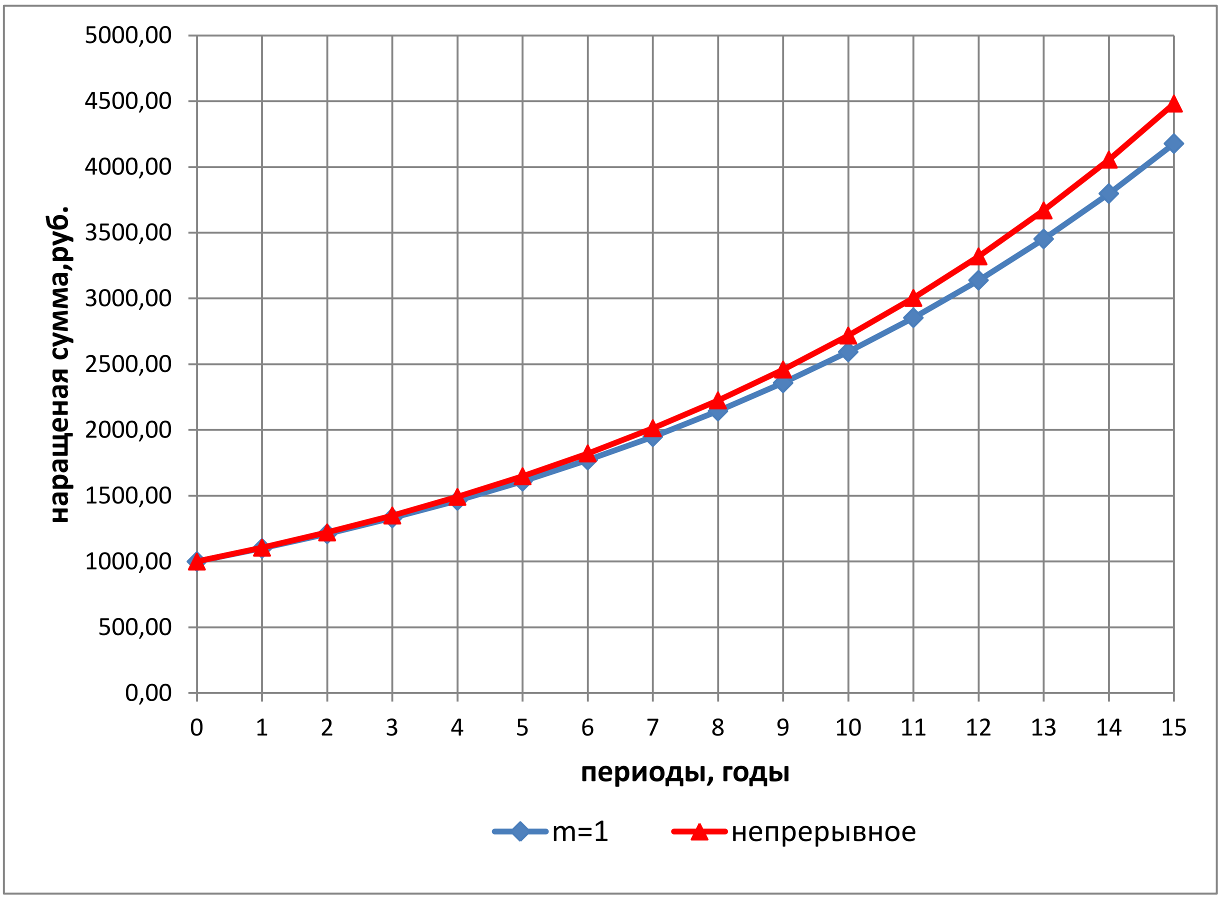

Рис.1.3. Графики наращенных сумм, рассчитанных при однократном и непрерывном начислении процентов

Связь дискретных ставок i и j с силой роста δ находится из равенства множителей наращения дискретных и непрерывных ставок:

$$(1+i)^n = e^{\delta n}$$

Из этого равенства следует:

$$\delta = ln(1+i),\ i = e^{\delta} - 1.$$

Из равенства:

$$(1+\frac{j}{m})^{mn} = e^{\delta n}.$$

следует

$$\delta = m\,ln(1+\frac{j}{m}),\ j = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1).$$

Если переменная сила роста изменяется во времени $\delta_t = f(t)$, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}.$$

Рассмотрим случай, когда сила роста изменяется по линейному закону

$$\delta_t = \delta_0 + at,$$

где δ_0 - начальное значение силы роста,

a – прирост силы роста.

Вычислим интеграл от силы роста:

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta_0 + at)dt = \delta_0 n + \frac{an^2}{2},$$

Окончательно выражение для наращенной суммы примет вид:

$$S = Pe^{\delta_0 n + \frac{an^2}{2}},$$

где $e^{\delta_0 n + \frac{an^2}{2}}$ - множитель наращения.

Все рассмотренные методы наращения по процентным ставкам приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 Методы наращения по процентным ставкам

Метод наращения	**Формула**	**Множитель наращения**
По простой процентной ставке i	$S = P(1+in)$	$1+in$
По сложной процентной ставке i	$S = P(1+i)^n$	$(1+i)^n$
По номинальной процентной ставке j, при m-кратном начислении процентов	$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}$	$(1+\frac{j}{m})^{mn}$
При непрерывном начислении процентов, по постоянной силе роста δ	$S = Pe^{\delta n}$	$e^{\delta n}$

1.8. Математическое дисконтирование

Математическое дисконтирование представляет собой формальное решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы. Логика финансовых операций представлена на рис. 1.4.

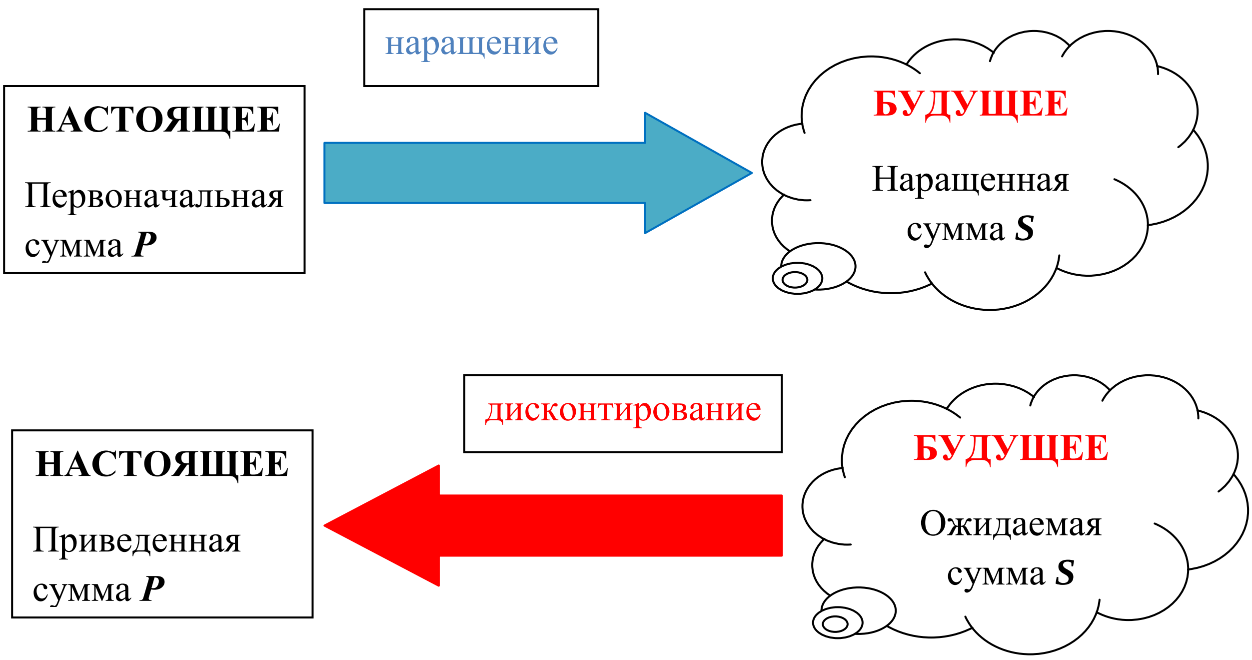

Рис. 1.4 Логика финансовых операций

Задача формулируется в следующем виде: какую первоначальную сумму необходимо инвестировать сегодня, чтобы через заданное количество лет n при заданной процентной ставке i получить заданную наращенную сумму S.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют **современной величиной** (***present value PV***) суммы S, или **современной (приведенной, текущей, капитализированной) стоимостью**.

Дисконтирование - это операция определения любой стоимостной величины, относящейся к будущему на некоторый более ранний момент времени.

Нахождение современной стоимости суммы долга можно найти с помощью следующих формул.

Для простой процентной ставки: $P = \frac{S}{1+ni}$,

для сложной процентной ставки: $P = \frac{S}{(1+i)^n}$,

для номинальной процентной ставки: $P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$,

для непрерывного начисления процентов

по постоянной силе роста: $P = Se^{-\delta n}$.

по переменной силе роста: $P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}$.

Процентная ставка в операции математического дисконтирования называется ставкой дисконтирования и обозначается ***r***.

Дисконтный множитель (коэффициент дисконтирования) *DF* (*discount factor*) показывает какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной сумме.

Дисконтные множители DF для каждого вида математического дисконтирования представлены ниже:

для простой процентной ставки $DF = \frac{1}{1+ni}$, для сложной процентной ставки $DF = \frac{1}{(1+i)^n}$,

для номинальной процентной ставки $DF = \frac{1}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$,

для непрерывного дисконтирования $DF = e^{-\delta n}$.

Экономический смысл дисконтного множителя: современная стоимость одной денежной единицы (рубля), подлежащей выплате через время *n*. Дисконтный множитель – величина, обратная множителю наращения. Дисконтный множитель меньше единицы $DF<1$.

Все методы математического дисконтирования приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2. Методы математического дисконтирования

Метод дисконтирования	Формула	Дисконтный множитель
По простой процентной ставке *i*	$P = \frac{S_n}{1+in}$	$\frac{1}{1+in}$
По сложной процентной ставке *i*	$P = \frac{S_n}{(1+i)^n}$	$\frac{1}{(1+i)^n}$
По номинальной процентной ставке *j*)	$P = \frac{S_n}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$	$\frac{1}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$
По постоянной силе роста δ	$P = S_n e^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$

ТЕМА 2. УЧЁТНЫЕ СТАВКИ

2.1 Банковский учёт (банковское дисконтирование)

Банковский учет или **банковское дисконтирование** применяется при операции учета векселей банком или иным финансовым учреждением.

Вексель – письменное обязательство или указание векселедателя (заемщика) выплатить в установленный срок определенную сумму предъявителю векселя (векселедержателю).

Суть банковского учета состоит в следующем: банк или иное финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, которая указана на векселе, то есть учитывает его с дисконтом. Владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги, хотя и не в полном объеме, но раньше указанного на нем срока.

Сформулируем задачу банковского дисконтирования. По заданной сумме S, которая будет выплачена через время n, требуется определить сумму займа P в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее в момент предоставления долга. Для начисления процентов применяется учетная ставка d.

Номинал — нарицательная стоимость, обозначенная в векселе (сумма, подлежащая уплате в соответствии с обещанием плательщика по тексту векселя).

Разность между номиналом векселя S и стоимостью векселя при учёте P называется дисконтом:

$$D = S - P.$$

Дисконт – это проценты, начисляемые за время от дня учёта (дисконтирования) до дня погашения векселя. Проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока.

Учетная ставка d за период t – это отношение дисконта D за время t к сумме погашаемого долга *S:*

$$d = \frac{S-P}{S} = \frac{D}{S}.$$

Дисконт за временной период вычисляется:

$$D = Sd.$$

2.2. Простая учетная ставка

Простая учётная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления всегда остаётся постоянной.

Постановка задачи. Вексель на сумму S и сроком погашения n периодов (месяцев) продается (учитывается) раньше срока с дисконтом по простой годовой учетной ставке *d.* Необходимо определить стоимость векселя при учёте.

Проценты (дисконты) вычисляются

за первый период: $D_1 = Sd,$

за второй период: $D_2 = Sd,$

за n-ый период: $D_n = Sd.$

Дисконт за весь срок финансовой операции n рассчитывается:

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n = Snd.$$

Стоимость векселя при учете:

$$P = S - D = S - Snd = S(1-nd),$$

где $(1-nd)$ - дисконтный множитель.

Учет осуществляется при временной базе *K*=360 дней, число дней ссуды обычно берется точным.

Наращение по учетной ставке производится по формуле:

$$S = \frac{P}{1-nd},$$

где $\frac{1}{1-nd}$ - множитель наращения.

2.3. Сложная учетная ставка

Сложная учётная ставка – это ставка, при которой база начисления является переменной, то есть проценты начисляются на проценты.

Постановка задачи. Вексель на сумму S и сроком погашения n лет продается (учитывается) раньше срока с дисконтом по сложной годовой учетной ставке d. Необходимо определить стоимость векселя при учёте.

Если осуществить продажу за 1 год до срока погашения, то начисляются проценты $D_1 = Sd$ и продавец получит сумму:

$$P = S - Sd = S(1-d).$$

Если осуществить продажу за 2 года до срока погашения, то за первый год проценты начисляются на S и равны $D_1 = Sd$, а за второй год проценты начисляются уже на сумму $S(1-d)$, дисконтированную на предыдущем шаге и равны $D_2 = S(1-d)d$. Продавец получит сумму:

$$P = S - D_1 - D_2 = S - Sd - S(1-d)d = S(1-d)^2.$$

Рассуждая аналогичным образом, определим стоимость векселя при учёте за n лет до срока погашения:

$$P = S(1-d)^n,$$

где $(1-d)^n$ - дисконтный множитель.

Учётная ставка применяется не к первоначальной сумме как при простой учётной ставке, а к сумме, уже дисконтированной на предыдущем шаге.

Дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для продавца (должника), чем дисконтирование по простой учетной ставке. Операция наращения при этом имеет вид:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n},$$

где $\frac{1}{(1-d)^n}$ - множитель наращения.

2.4. Номинальная и эффективная учетные ставки

Если дисконтирование производится m раз в году по ставке $\frac{f}{m}$, то стоимость векселя при учете рассчитывается:

$$P = S(1-\frac{f}{m})^{mn},$$

где f – номинальная годовая учетная ставка, $(1-\frac{f}{m})^{mn}$ - дисконтный множитель.

Наращение по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$S = \frac{P}{(1-\frac{f}{m})^{mn}},$$

где $\frac{1}{(1-\frac{f}{m})^{mn}}$ - множитель наращения.

Эффективная учетная ставка - это годовая учетная ставка сложных процентов, начисляемых один раз в году, эквивалентная годовой номинальной учетной ставке *f* при начислении процентов *m* раз в году.

Эффективная учетная ставка находится из равенства:

$$S(1-d)^n = S(1-\frac{f}{m})^{mn}.$$

После преобразований выражение для эффективной учетной ставки запишется:

$$d = 1 - (1 - \frac{f}{m})^m.$$

2.5. Непрерывное банковское дисконтирование

Если наращение сложными процентами осуществляется по номинальной годовой учётной ставке *f*, то при $m \to \infty$ с учетом второго замечательного предела:

$$S = \lim_{m \to \infty} \frac{P}{(1 - \frac{f}{m})^{mn}} = Pe^{\delta n},$$

где δ - сила учета, $(1 - \frac{f}{m})^{mn}$ - множитель наращения.

При непрерывном начислении процентов начало и конец периода начисления совпадают, номинальные ставки перестают различаться, поэтому сила учета равна силе роста.

Стоимость векселя при непрерывном дисконтировании вычисляется:

$$P = Se^{-n\delta},$$

где $e^{-n\delta}$ - дисконтный множитель.

Рассмотренные методы наращения по учётным ставкам приведены в таблице 2.1, а методы банковского дисконтирования - в таблице 2.2.

Таблица 2.1 Методы наращения по учетным ставкам

Метод наращения	**Формула**	**Множитель наращения**
По простой учетной ставке d	$S=\dfrac{P}{1-nd}$	$\dfrac{1}{1-nd}$
По сложной учетной ставке d	$S=\dfrac{P}{(1-d)^n}$	$\dfrac{1}{(1-d)^n}$
По номинальной учетной ставке f, при m-кратном дисконтировании	$S=\dfrac{P}{(1-\frac{f}{m})^{mn}}$	$\dfrac{1}{(1-\frac{f}{m})^{mn}}$
При непрерывном дисконтировании, по постоянной силе учета δ	$S=Pe^{\delta n}$	$e^{\delta n}$

Таблица 2.2. Методы банковского дисконтирования

Метод дисконтирования	**Формула**	**Дисконтный множитель**
По простой учетной ставке d	$P=S(1-nd)$	$1-nd$
По сложной учетной ставке d	$P=S(1-d)^n$	$(1-d)^n$
По номинальной учетной ставке f, при m-кратном дисконтировании	$P=S(1-\frac{f}{m})^{mn}$	$(1-\frac{f}{m})^{mn}$
При непрерывном дисконтировании, по постоянной силе учета δ	$P=Se^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$

ТЕМА 3. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

3.1.Классификация потоков платежей

Финансовые операции часто предполагают не отдельные платежи, а их последовательность во времени. Например: платежи по ипотеке, выплата зарплаты и пенсии, получение процентов по облигации.

Потоки платежей — это последовательные во времени платежи.

В зарубежной финансовой литературе применяется аналогичный термин **«*cash flows*» *CF***. Схема потока платежей представлена на рис. 3.1.

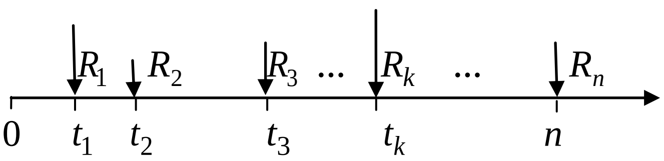

Рис. 3.1. Схема потока платежей

Денежные потоки разделяются на:

- регулярные;
- нерегулярные.

Регулярные потоки платежей (финансовая рента, рента, аннуитет) – это платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону (например, поступления), а интервалы между платежами одинаковы.

Нерегулярные потоки платежей – это платежи, у которых часть выплат являются положительными величинами (поступления), а другая часть – отрицательными величинами (выплаты). Интервалы между платежами в этом случае могут быть не равны друг другу.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

1. R_t - член ренты, размер отдельного платежа $t=1,n$;
2. n - срок ренты, время от начала первого периода до конца последнего;
3. Δt -период ренты, временной интервал между двумя последовательными платежами;

4. i - процентная ставка;
5. p - число платежей в году (дополнительный параметр);
6. m - количество начислений процентов в году (доп. параметр).

Классификация потоков платежей.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года:

- дискретные:

  годовые (одна выплата в году, p=1);

  p-срочные (p – количество выплат в году);
- непрерывные ($p \to \infty$).

По количеству начислений процентов в течение года:

- с ежегодным начислением процентов (m=1);
- с начислением процентов m раз в году;
- с непрерывным начислением процентов ($m \to \infty$).

По величине своих членов ренты:

- постоянные (выплаты, которые не изменяются во времени);
- переменные.

По вероятности выплат:

- верные (подлежат безусловной уплате, число членов ренты известно заранее);
- условные (выплаты условной ренты ставятся в зависимость от наступления некоторого случайного события, число членов ренты заранее неизвестно, к таким рентам относятся страховые аннуитеты, например выплата пенсий).

По количеству членов ренты:

- ограниченные по сроку ренты (срок ренты заранее оговорен);
- бесконечные (вечные) ренты — ***перпетуитет*** (например: выплаты процентов по облигациям с неограниченным сроком).

По началу срока ренты делятся:

- немедленные;
- отсроченные.

По моменту выплат платежей в пределах периода:

- обыкновенные (постнумерандо);
- пренумерандо;
- платежи в середине периода.

Рента постнумерандо – поток платежей, выплаты которого производятся в конце периода.

Схема потока платежей ренты постнумерандо представлена на рис. 3.2.

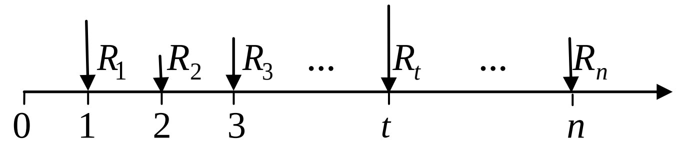

Рис. 3.2. Схема потока платежей ренты постнумерандо

Рента пренумерандо – поток платежей, выплаты которого производятся в начале периода.

Схема потока платежей ренты пренумерандо представлена на рис. 3.3.

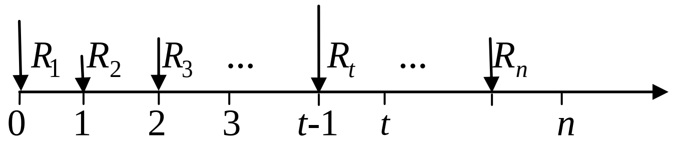

Рис. 3.3. Схема потока платежей ренты пренумерандо

Пример. Ипотечный договор предусматривает ежемесячные платежи в конце каждого месяца в течение 10 лет, с ежемесячным начислением процентов. Данная рента является дискретной, 12-срочной (p=12), с 12-кратным начислением процентов (m=12), постоянной, верной, ограниченной (n=10), немедленной рентой постнумерандо.

3.2. Расчет наращенной суммы и современной стоимости потока платежей

Обобщающими характеристиками потока платежей является **наращенная сумма и современная стоимость.**

Наращенная сумма (будущая стоимость) потока платежей *FV* (*future value*) – это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами.

Современная стоимость потока платежей *PV* (*present value*) – это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока этого потока по сложной процентной ставке.

Сформулируем задачу: имеется ряд платежей R_k, выплачиваемых в моменты времени t_k $k = \overline{1,n}$. Известно количество выплат n и общий срок выплат t_n. Проценты начисляется по сложной процентной ставке i один раз в году, выплаты производятся в конце года. Необходимо определить наращенную FV и современную стоимости PV потока платежей. Схема потока платежей приведена на рис. 3.1.

Наращенная сумма потока платежей запишется:

$$FV = R_1(1+i)^{t_n - t_1} + R_2(1+i)^{t_n - t_2} + \ldots + R_k(1+i)^{t_n - t_k} + \ldots + R_n.$$

В краткой записи:

$$FV = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{t_n - t_k}.$$

Современная стоимость потока платежей вычисляется:

$$PV = \frac{R_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{t_2}} + \ldots + \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^{t_n}}.$$

В краткой записи:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Умножим современную стоимость потока платежей на дисконтный множитель (коэффициент дисконтирования):

$$FV\frac{1}{(1+i)^{t_n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k(1+i)^{t_n-t_k}}{(1+i)^{t_n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Выражение справа является современной стоимостью потока платежей. Таким образом, современная стоимость потока платежей равна дисконтированной наращенной стоимости:

$$PV=\frac{FV}{(1+i)^{t_n}}.$$

3.3.Расчет наращенной суммы постоянной годовой ренты постнумерандо

Годовая рента постнумерандо – денежный поток, который предусматривает выплаты и начисление процентов один раз в конце года.

Задача формулируется следующим образом: в течение n лет в банк (или в финансовое учреждение) в конце каждого года вносится по R рублей, на которые начисляются сложные проценты по ставке i.

Схема потока платежей постоянной годовой ренты постнумерандо представлена на рис. 3.4.

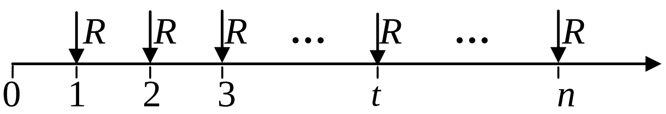

Рис. 3.4. Схема потока платежей постоянной годовой ренты постнумерандо

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо вычисляется:

$$FV=R(1+i)^{n-1}+R(1+i)^{n-2}+\ldots+R(1+i)+R.$$

Вынесем общий множитель R за скобки и переставим местами слагаемые:

$$FV=R\{1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}\}.$$

Выражение в скобках является геометрической прогрессией со знаменателем $q=1+i$.

Сумма геометрической прогрессии S_n определяется по формуле:

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1};$$

где a_1 – первый член прогрессии, n – количество членов прогрессии.

Учитывая формулу для суммы геометрической прогрессии, определим наращенную сумму годовой ренты постнумерандо:

$$FV = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Введем коэффициент наращения ренты:

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Тогда формула для наращенной суммы годовой ренты постнумерандо примет вид:

$$FV = Rs_{n;i}.$$

Экономический смысл коэффициента наращения ренты: наращенная сумма денежного потока в 1 рубль за n лет при сложной процентной ставке i.

3.4.Расчет современной стоимости постоянной годовой ренты постнумерандо

Современная стоимость годовой ренты постнумерандо вычисляется:

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$PV = \frac{R}{1+i} \left\{ 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+i}$.

Учитывая формулу для суммы геометрической прогрессии, определим современную стоимость постоянной годовой ренты:

$$PV = \frac{R}{1+i}\frac{\frac{1}{(1+i)^n}-1}{\frac{1}{1+i}-1}.$$

После преобразований получим окончательную формулу:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Введем коэффициент приведения ренты (коэффициент аннуитета):

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Тогда формула для современной стоимости годовой ренты постнумерандо примет вид:

$$PV = Ra_{n;i}.$$

Экономический смысл коэффициента приведения (коэффициента аннуитета): приведенная (дисконтированная) стоимость денежного потока в 1 рубль за n лет при ставке дисконтирования i.

3.5.Определение параметров постоянных годовых рент постнумерандо

При разработке контрактов часто задаются современная стоимость и наращенная сумма (обобщающие характеристики) и два основных параметра. Необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Определение члена ренты.

Задача 1. Требуется определить периодические взносы R при известной процентной ставки $\boldsymbol{i}$ и сроке $\boldsymbol{n}$ для создания целевого фонда в сумме FV рублей.

Из выражения для наращенной суммы постоянной ренты постнумерандо следует:

$$FV = Rs_{n;i} \Rightarrow R = \frac{FV}{s_{n;i}}.$$

Задача 2. Требуется определить периодические взносы R при известной процентной ставки $\boldsymbol{i}$ и сроке $\boldsymbol{n}$ для погашения в рассрочку задолженности в сумме PV рублей.

Из выражения для современной стоимости постоянной ренты постнумерандо следует:

$$PV = Ra_{n;i} \Rightarrow R = \frac{PV}{a_{n;i}}.$$

Расчет срока ренты.

Задача 1. Необходимо определить срок ренты и соответственно число членов ренты при известных: наращенной сумме FV, члене ренте R и процентной ставке i.

$$FV = \frac{R(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow n = \frac{\ln(\frac{FV}{R}i + 1)}{\ln(1+i)}.$$

Задача 2. Необходимо определить срок ренты и соответственно число членов ренты при известных: наращенной сумме FV, члене ренте R и процентной ставке i.

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow n = \frac{\ln(1 - \frac{PV}{R}i)^{-1}}{\ln(1+i)}.$$

Определение процентной ставки.

Определение процентной ставки необходимо для определения доходности финансовой операции или сделки.

Для определения размера процентной ставки необходимо решить уравнения (3.1) и (3.3) относительно i. Уравнения относительно процентной ставки являются трансцендентными (не являющиеся алгебраическим) и аналитического решения нет. Для решения уравнений используются численные методы и прикладные программы. Например надстройка «Поиск решения» в электронной таблице Excel.

3.6*. Рента, начисление процентов *m* раз в году

Рассмотрим ренту, у которой проценты начисляются *m* раз в году. Схема потока платежей постоянной ренты постнумерандо с начислением процентов *m* раз представлена на рис. 3.5.

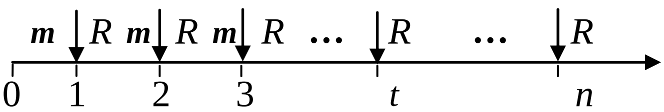

Рис. 3.5. Схема потока платежей постоянной годовой ренты постнумерандо с *m* начислением процентов

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$FV = R(1+\frac{j}{m})^{(n-1)m} + R(1+\frac{j}{m})^{(n-2)m} + \ldots + R(1+\frac{j}{m})^{m} + R.$$

Вынесем общий множитель *R* за скобку и переставим слагаемые наоборот:

$$FV = R\left\{1 + (1+\frac{j}{m})^{m} + \ldots + R(1+\frac{j}{m})^{(n-2)m} + (1+\frac{j}{m})^{(n-1)m}\right\}.$$

Выражение в скобках является геометрической прогрессией со знаменателем: $q = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим наращенную сумму ренты:

$$FV = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m} - 1} = Rs_{mn;\,j/m},$$

где $s_{mn;\,j/m}$ - коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты вычисляется:

$$PV = R(1+\frac{j}{m})^{-m} + R(1+\frac{j}{m})^{-2m} + \ldots + R(1+\frac{j}{m})^{-(n-1)m} + R(1+\frac{j}{m})^{-nm}.$$

Вынесем общий множитель за скобку:

$$PV = R(1+\frac{j}{m})^{-m}\left\{1+(1+\frac{j}{m})^{-m}+\ldots+(1+\frac{j}{m})^{-(n-2)m}+(1+\frac{j}{m})^{-(n-1)m}\right\}.$$

Выражение в скобках является геометрической прогрессией со знаменателем: $q = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим современную стоимость ренты:

$$PV = R\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{m}-1} = Ra_{mn;\, j/m}.$$

где $a_{mn;\, j/m}$ - коэффициент приведения ренты.

3.7*. Рента *p*-срочная, начисление процентов один раз в году

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся p раз в году, а проценты начисляются один раз в году (m=1). Схема потока платежей ренты представлена на рис. 3.6.

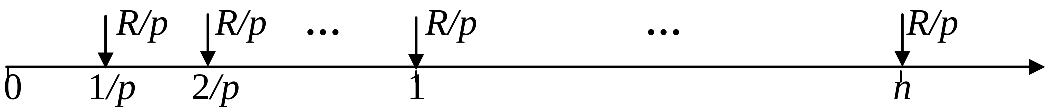

Рис. 3.6. Схема потока платежей постоянной *p*-срочной ренты с однократным начислением процентов

Рента выплачивается p раз в году равными суммами R/p, общее число членов ренты равно np.

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$PV = \frac{R}{p}(1+i)^{(n-1+1/p)}+\frac{R}{p}(1+i)^{(n-1+2/p)}+\ldots+\frac{R}{p}(1+i)^{1/p}+\frac{R}{p}.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем: $q = (1+i)^{1/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим наращенную сумму ренты:

$$PV = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = Rs_{n;i}^{(p)},$$

где $s_{n;i}^{(p)}$ - коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты вычисляется:

$$PV = R(1+i)^{-1/p} + R(1+i)^{-2/p} + \ldots + R(1+i)^{-np-1/p} + R(1+i)^{-np}.$$

Данная последовательность представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем: $q = (1+i)^{1/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим современную стоимость ренты:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = Ra_{n;i}^{(p)},$$

где $a_{n;i}^{(p)}$ - коэффициент приведения ренты.

3.8*. Рента *p*-срочная с начислением процентов *m* раз в году

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся *p* раз в году, а проценты начисляются *m* раз в году. Схема потока платежей ренты представлена на рис. 3.7.

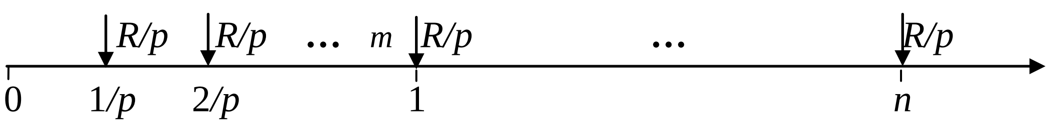

Рис. 3.7. Схема потока платежей постоянной годовой *p*-срочной ренты с начислением процентов *m* раз в году

Рента выплачивается *p* раз в году равными суммами *R/p,* общее число членов ренты равно *np*.

Ряд членов ренты с начисленными процентами представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем: $q=(1+\frac{j}{m})^{m/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим наращенную сумму ренты:

$$FV=R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}=Rs_{mn;\,j/m}^{(p)}.$$

где $s_{mn;\,j/m}^{(p)}$ - коэффициент наращения ренты.

Дисконтированный ряд членов ренты представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем: $q=(1+\frac{j}{m})^{-m/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим современную стоимость ренты:

$$PV=R\frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}=Ra_{mn;\,j/m}^{(p)}.$$

где $a_{mn;\,j/m}^{(p)}$ - коэффициент приведения ренты.

3.9*. Ренты с непрерывным начислением процентов

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся один раз в году, а проценты начисляются непрерывно ($m\to\infty$). Схема потока платежей ренты представлена на рис. 3.8.

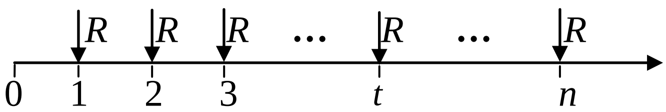

Рис. 3.8. Схема потока платежей постоянной ренты постнумерандо с непрерывным начислением процентов

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$FV = Re^{(n-1)\delta} + Re^{(n-2)\delta} + \ldots + Re^{\delta} + R.$$

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим наращенную сумму ренты:

$$FV = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = Rs_{n;\delta},$$

где $s_{n;\delta}$ - коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты вычисляется:

$$PV = Re^{-\delta} + Re^{-2\delta} + \ldots + Re^{-\delta(n-1)} + Re^{-\delta n}.$$

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим современную стоимость ренты:

$$PV = R\frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1} = Ra_{n;\delta},$$

где $a_{n;\delta}$ - коэффициент приведения ренты.

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся p раз в году, а проценты начисляются непрерывно ($m \to \infty$). Схема потока платежей ренты представлена на рис. 3.9.

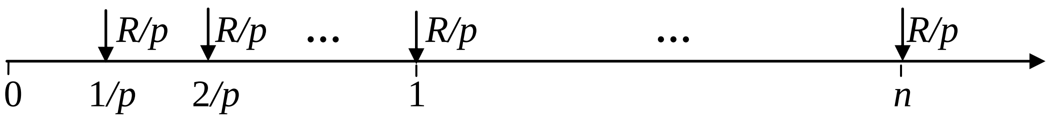

Рис. 3.9. Схема потока платежей постоянной p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$FV = R\frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)} = Rs_{n;\delta}^{(p)},$$

где $s_{n;\delta}^{(p)}$ - коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты определяется:

$$PV = R\frac{1-e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p}-1)} = Ra_{n;\delta}^{(p)},$$

где $a_{n;\delta}^{(p)}$ - коэффициент приведения ренты.

3.10*. Постоянные непрерывные ренты

Рассмотрим ренту, у которой поток платежей рассматривается как непрерывный процесс $p \to \infty$, а проценты начисляются один раз в году. Коэффициент аннуитета непрерывной ренты с однократным начислением процентов определяется:

$$a_{n;i}^{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} a_{n;i}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}.$$

Раскроем неопределенность, применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = \frac{1}{\ln(1+i)}.$$

Окончательно коэффициент аннуитета непрерывной ренты запишется:

$$a_{n;i}^{(\infty)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Современная стоимость непрерывной ренты с однократным начислением процентов определится выражением:

$$PV = Ra_{n;i}^{(\infty)} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Аналогично определим коэффициент наращения непрерывной ренты:

$$s_{n;i}^{(\infty)} = \frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}.$$

Наращенная сумма непрерывной ренты с однократным начислением процентов определится по формуле:

$$FV = Rs_{n;i}^{(\infty)} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}.$$

Рассмотрим ренту, у которой платежи выплачиваются непрерывно $p \to \infty$ и проценты начисляются непрерывно $m \to \infty$.

Коэффициент аннуитета непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов запишется:

$$a_{n;\delta}^{(\infty)} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Современная стоимость непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов определится выражением:

$$PV = Ra_{n;\delta}^{(\infty)} = R\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Коэффициент наращения непрерывной ренты вычисляется:

$$s_{n;\delta}^{(\infty)} = \frac{e^{-\delta n} - 1}{\delta}.$$

Наращенная сумма непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов определится по формуле:

$$FV = Rs_{n;\delta}^{(\infty)} = R\frac{e^{-\delta n} - 1}{\delta}.$$

3.11.Наращенные суммы и современные стоимости других видов постоянных годовых рент

Различие между рентами постнумерандо и пренумерандо заключается в числе периодов начисления процентов. Каждый платеж ренты пренумерандо поступает на один период раньше. Поэтому наращенная сумма ренты пренумерандо FV_1 и современная стоимость PV_1 больше в (1+i) раз аналогичных обобщающих характеристик ренты постнумерандо.

Для годовой ренты (p=1, m=1):

$$FV_1 = FV(1+i), \quad PV_1 = PV(1+i).$$

Для ренты с начислением процентов m раз в году ($p = 1$, $m > 1$):

$$FV_1 = FV(1+\frac{j}{m})^m, \quad PV_1 = PV(1+\frac{j}{m})^m.$$

Для p-срочной ренты с однократным начислением процентов ($p>1, m=1$):

$$FV_1 = FV(1+i)^{1/p}, \quad PV_1 = PV(1+i)^{1/p}.$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году ($p>1, m>1$):

$$FV_1 = FV(1+\frac{j}{m})^{m/p}, \quad PV_1 = PV(1+\frac{j}{m})^{m/p}.$$

Наращенные суммы $FV_{1/2}$ и современные стоимости $PV_{1/2}$ рент с выплатами в середине периода находятся умножением соответствующих обобщающих характеристик рент постнумерандо на множитель наращения за половину периода.

Для годовой ренты (p=1, m=1):

$$FV_{1/2} = FV(1+i)^{1/2}, \quad PV_{1/2} = PV(1+i)^{1/2}.$$

Для ренты с начислением процентов m раз в году ($p=1,\ m>1$):

$$FV_{1/2} = FV(1+\frac{j}{m})^{m/2}, \quad PV_{1/2} = PV(1+\frac{j}{m})^{m/2}.$$

Для p-срочной ренты с однократным начислением процентов ($p>1, m=1$):

$$FV_{1/2} = FV(1+i)^{1/2p}, \quad PV_{1/2} = PV(1+i)^{1/2p}.$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году ($p>1, m>1$):

$$FV_{1/2} = FV(1+\frac{j}{m})^{m/2p}, \quad PV_{1/2} = PV(1+\frac{j}{m})^{m/2p}.$$

3.12.Вечная и отложенная рента

Если срок ренты очень большой или конкретно не оговаривается ($n \to \infty$), то такая рента называется вечной (***перпетуитет)***.

Коэффициент аннуитета годовой вечной ренты:

$$a_{\infty;i} = \lim_{n\to\infty} \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} = \frac{1}{i}.$$

Современная стоимость перпетуитета вычисляется:

$$PV_{\infty} = Ra_{\infty;i} = \frac{R}{i}$$

Современная стоимость вечной ренты зависит только от размера члена ренты и процентной ставки. Отдаленные платежи оказывают малое влияние на величину коэффициента аннуитета ренты.

Отложенными называются ренты, у которых начало выплат сдвинуто вперед.

Сдвиг во времени не отражается на величине наращенной суммы. Пусть рента выплачивается спустя t лет после начального момента времени. Современная стоимость отложенной ренты $PV_{от}$ на начальный момент времени:

$$PV_{от} = \frac{PV}{(1+i)^t} = R\frac{a_{n;i}}{(1+i)^t}.$$

Современная стоимость отложенной ренты на начало периода отсрочки равна дисконтированной величине современной стоимости немедленной ренты.

ТЕМА 4. ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

4.1. Классификация инвестиций

В соответствии с законом РФ **инвестиции определяются как вложение денежных средств (или иных ценностей, имеющих денежную оценку) для получения доходов в будущем.** Инвестиции осуществляются, как правило, для достижения долгосрочных целей, не связанных с текущим потреблением. Различают реальные и финансовые инвестиции.

Реальные инвестиции – это вложение денежных средств в материальные ресурсы: землю, недвижимость, оборудование. Производственные инвестиции – один из видов реальных инвестиций. Это вложения в создание, реконструкцию или перепрофилирование производственного предприятия.

Финансовые инвестиции – это вложение денежных средств в финансовые инструменты.

Финансовый актив (инструмент, ценная бумага) – это документ, закрепляющий за ее держателем право на получение при определенных условиях доходов в будущем.

Различают основные и производные финансовые инструменты. Основные – **акции, облигации, векселя, сберегательные счета и депозиты**. К производным финансовым инструментам относятся **финансовые фьючерсы, опционы, варранты** и др.

Для оценки эффективности инвестиционных проектов в качестве основных используются четыре критерия, основанные на дисконтировании денежных потоков: **чистый приведенный доход** (*Net Present Value)* ***NPV***, **внутренняя норма доходности** *(Internal Rate of Return)* ***IRR***, **индекс доходности** *(Profitability Index)* ***PI***, **дисконтируемый срок окупаемости** *(Discounted Payback Period)* ***DPP.***

Каждый из показателей является результатом сопоставления дисконтированной (приведенной, современной) стоимости денежного потока от операционной (производственной) деятельности и дисконтированной стоимости денежного потока от инвестиционной деятельности.

4.2. Критерий чистый приведенный доход *NPV*

Чистый приведенный доход *NPV* – это сумма денежных потоков за весь срок жизни проекта, дисконтированная к начальному шагу (интервалу) проекта:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{n} \frac{INV_t}{(1+r)^t},$$

где n - срок жизни проекта, r - ставка дисконтирования проекта, CF_t - денежный поток от операционной деятельности (*Cash Flow*) в период t, INV_t - денежный поток от инвестиционной деятельности в период t.

Если инвестиция *INV* является разовой, то формула для чистого приведенного дохода *NPV* имеет вид:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - INV.$$

Если чистый приведенный доход инвестиционного проекта положителен *NPV*>0, проект является эффективным (при данной ставке дисконтирования) и может быть реализован. Если чистый приведенный доход инвестиционного проекта отрицателен *NPV*<0, проект является неэффективным и должен быть отклонен.

Чем больше чистый приведенный доход, тем эффективнее проект. При сравнении альтернативных взаимоисключающих проектов экономически выгодным считается проект с наибольшей величиной чистого приведенного дохода. При этом сравнении ставка дисконтирования r должна быть у всех проектов одинаковой.

Экономическая сущность критерия – сравнение дисконтированной стоимости будущих денежных поступлений, генерируемых проектом с дисконтированной стоимостью инвестиционных расходов, необходимых для его реализации.

Осуществление инвестиционного проекта связано с **неопределенностью будущего**, инвестор может недополучить прибыль в связи с неожиданно произошедшими событиями, недостаточным знанием конъюнктуры рынка, появлением товаров-заменителей и фирм-конкурентов и т.д.

Неопределенность – это неполнота и неточность информации об условиях реализации проекта.

Противоположным понятию неопределенности является понятие ***детерминированности***. Условия реализации проекта, о которых имеется полная и точная информация, называются детерминированными.

Риск – это возможность возникновения таких условий, которые приведут к негативным последствиям (для инвестиционного проекта: сумма дисконтируемых денежных потоков проекта будет меньше, чем прогнозируемая).

Риск можно рассматривать как частный случай неопределенности.

Расчет чистого приведенного дохода *NPV* осуществляется в три этапа:

1.Прогноз денежных потоков инвестиционного проекта.

2.Выбор ставки дисконтирования, учитывающей доходность альтернативных вложений и риск проекта.

3.Определение чистого приведенного дохода.

Экономический смысл ставки дисконтирования (ставка дисконта) – доходность по альтернативным инвестициям или минимальная доходность (норма прибыли), устраивающая инвестора. Её называют **альтернативными издержками**, так как она представляет собой доход, от которого отказывается инвестор, вкладывая деньги в данный проект, а не в альтернативный.

Идея **альтернативных издержек** имеет смысл лишь в том случае, если сравниваются активы, которым присуща одинаковая степень риска. Необходимо выбрать активы, риск которых эквивалентен риску рассматриваемого проекта, определить ожидаемую норму доходности этих активов и использовать эту норму в качестве альтернативных издержек (ставки дисконтирования).

Второй принцип теории финансов: надежный рубль стоит больше, чем рисковый.

Достоинства чистого приведенного дохода.

1.Чистый приведенный доход *NPV* даёт возможность учитывать время поступления денежных средств от операционной деятельности и время вложения инвестиций на протяжении всего срока жизни проекта.

2.Критерий *NPV* обладает свойством аддитивности, которое заключается в том, что чистая приведенная стоимость проектов *A* и *B* равна сумме их чистых приведенных стоимостей:

$$NPV(A+B) = NPV(A) + NPV(B).$$

Свойство аддитивности позволяет суммировать чистые приведенные стоимости разных проектов, что имеет большое практическое значение.

3.Чистый приведенный доход учитывает масштаб инвестиций, зависит только от прогнозируемых денежных потоков, генерируемых проектом и от доходности альтернативных инвестиций (ставки дисконтирования).

4.3. Критерий внутренняя норма доходности *IRR*

Внутренняя норма доходности *IRR* (внутренняя ставка возвращения инвестиций, ставка доходности проекта) – это ставка дисконтирования *r*, при которой чистый приведенный доход проекта равняется нулю:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{n} \frac{INV_t}{(1+r)^t} = 0.$$

Таким образом, внутренняя норма доходности *IRR* представляет собой такое значение ставки дисконтирования, при которой дисконтированный денежный поток от операционной деятельности равняется дисконтированной стоимости денежного потока от инвестиционной деятельности.

Если внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования $IRR>r$, то проект следует рекомендовать к внедрению; если внутренняя норма доходности меньше или равна ставки дисконтирования $IRR \le r$, то проект следует отклонить.

Внутренняя норма доходности связана с чистым приведенным доходом. Если чистый приведенный доход положителен $NPV>0$, то внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования $IRR>r$ и наоборот.

Внутренняя норма доходности характеризует устойчивость проекта к изменению ставки дисконтирования. **Чем больше разница между внутренней нормой доходности и ставкой дисконтирования (требуемой доходностью), тем больше запас прочности проекта.** Такой анализ предоставляет менеджерам возможность сопоставить доходность проекта и риск.

Если весь проект осуществляется только за счет заемных средств, то внутренняя норма доходности *IRR* равна наибольшему проценту, под который можно взять кредит, чтобы расплатиться из доходов от реализации проекта.

Недостатки внутренней нормы доходности:

1.Если происходит более, чем одно изменение знака денежных потоков, то проект может иметь несколько значений внутренней нормы доходности или не иметь вообще.

2.При сравнении двух или более взаимоисключающих проектов, которые различаются по сроку жизни и масштабам инвестиций применение критерия может привести к ошибке.

3.В случае если ставка дисконтирования меняется во времени, то простого способа оценки внутренней нормы доходности не существует.

4.Внутреняя норма доходности не обладает свойством аддитивности.

5.Показатель внутренней нормы доходности может быть рассчитан только численными методами с применением программного обеспечения или с помощью приближенных оценок.

4.4. Критерий индекс рентабельности (доходности) инвестиций *PI*

Индекс рентабельности (доходности) инвестиций *PI* представляет собой отношение дисконтированной стоимости денежного потока от операционной деятельности к дисконтированной стоимости денежного потока от инвестиционной деятельности:

$$PI = \frac{\sum_{t=0}^{n} CF_t \Big/ (1+r)^t}{\sum_{t=0}^{n} INV_t \Big/ (1+r)^t}.$$

где CF_t - денежный поток от операционной деятельности (*Cash Flow*) в период *t*, INV_t - денежный поток от инвестиционной деятельности в период *t*.

Если индекс рентабельности больше единицы *PI*>1, то проект эффективен, если индекс рентабельности меньше единицы *PI*<1 – неэффективен.

Индекс доходности связан с чистым приведенным доходом. Если чистый приведенный доход положителен *NPV>0*, то индекс рентабельности больше единицы *PI* >1 и наоборот.

Индекс доходности – относительный показатель, характеризующий уровень дохода на единицу инвестиционных затрат. Чем выше отдача каждого рубля, вложенного в данный проект, тем больше значение этого показателя. При равных значениях чистого приведенного дохода предпочтительнее будет тот проект, у которого больше индекс доходности.

Недостаток индекса доходности заключается в том, что он не обладает свойством аддитивности.

4.5. Дисконтируемый срок окупаемости *DPP*

Дисконтируемый срок окупаемости *DPP* – это время, за который дисконтированная стоимость денежного потока от операционной деятельности становится равной дисконтированной стоимости денежного потока от инвестиционной деятельности:

$$\sum_{t=0}^{DPP} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{DPP} \frac{INV_t}{(1+r)^t}.$$

Недостатки критерия дисконтируемый срок окупаемости:

1.Не учитывает доходов за пределами срока окупаемости проекта.

2.Не учитывает разницу во времени получения доходов в пределах срока окупаемости.

3.Не обладает свойством аддитивности.

Из всех рассмотренных критериев только чистый приведенный доход облает свойством аддитивности.

Таким образом, чистый приведенный доход *NPV* является наиболее предпочтительным критерием принятия оптимальных инвестиционных решений.

ТЕМА 5. ОЦЕНКА ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ (ИНСТРУМЕНТОВ)

5.1. Базовая модель оценки финансовых активов

Финансовый актив является товаром на рынке капитала и имеет следующие характеристики:

1)текущая рыночная цена P;

2)теоретическая стоимость на основе доступной информации PV;

3)доходность;

4)риск.

Текущая рыночная цена финансового актива реально существует и объективна в том смысле, что она объявлена и финансовый актив по ней равнодоступен любому участнику рынка.

Теоретическая стоимость финансового актива субъективна и зависит от анализа инвестора. Возможны 3 варианта для инвестора.

1) Финансовый актив продается по завышенной цене $P>PV$, поэтому инвестору нет смысла приобретать его на рынке.
2) Цена актива занижена $P<PV$, есть смысл его купить.
3) Текущая рыночная цена полностью отражает теоретическую стоимость актива $P=PV$.

Каждый финансовый актив имеет столько оценок теоретической стоимости, сколько существует инвесторов на рынке, заинтересованных в данном активе.

Любой финансовый актив (ценная бумага) может быть количественно оценен как дисконтированная (приведенная) стоимость будущих денежных потоков, генерируемых этим финансовым активом (рис. 5.1).

Проблема заключается в том, насколько точно удастся сделать прогноз денежных потоков финансового актива. Данный подход к анализу на фондовом рынке известен как **фундаментальный анализ.**

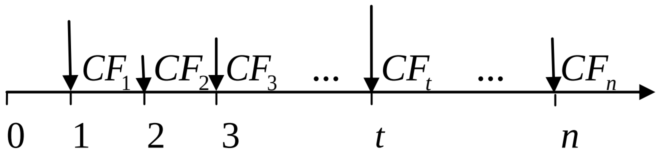

Рис. 5.1. Схема денежных потоков, генерируемых финансовым активом

Стоимость финансового актива может быть оценена по формуле (модель была предложена в 1938 году Дж. Уильямсом):

$$PV = \frac{CF_1}{(1+r_1)^1} + \frac{CF_2}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+r_3)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

CF_t – ожидаемые денежные поступления в период t,

r – ставка дисконтирования в период t,

n – число периодов, в течении которых ожидается поступление денежных потоков.

Если ставка дисконтирования постоянна, то формула упрощается:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}.$$

Оценка теоретической стоимости финансового актива зависит от:

1) ожидаемых денежных поступлений CF_t;

2) горизонта планирования n;

3) ставки дисконтирования r.

Для инвестора наиболее существенным является ставка дисконтирования. **Ставка дисконтирования (приемлемая норма прибыли) отражает доходность альтернативных вариантов вложения капитала, доступных лишь данному инвестору. Поэтому ставки дисконтирования будут отличаться у разных инвесторов.**

Если денежные потоки постоянны $CF_1 = CF_2 = \ldots = CF_t = CF = const$ и горизонт планирования бесконечен (или очень большой) $n \to \infty$, то применяя формулу для бесконечного аннуитета, теоретическая оценка финансового актива имеет следующий вид:

$$PV = \frac{CF}{r}.$$

Первая задача инвестора: определение теоретической стоимости актива.

Инвестору необходимо определить теоретическую стоимость актива *PV,* сделав прогноз денежных потоков, генерируемых финансовым активом, и задав приемлемую норму прибыли (ставку дисконтирования). Полученную теоретическую стоимость актива *PV* инвестор сравнивает с рыночной ценой *P* и принимает решение.

Вторая задача инвестора: определение нормы прибыли актива

Инвестору, зная рыночную цену и сделав прогноз денежных потоков, генерируемых финансовым активом, необходимо рассчитать норму прибыли (доходность) актива. Рассчитанную норму прибыли инвестор сравнивает с приемлемым для себя вариантом и принимает решение.

5.2. Оценка стоимости облигаций

Под облигацией понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги.

Облигация обеспечивает ее владельцу два вида дохода, в большинстве случаев владелец получает проценты (по купонам) и в конце срока номинальную выкупную цену.

Основные параметры облигации:

1) номинальная цена (номинал);
2) выкупная цена или правило ее определения, если она отличается от номинала;
3) дата погашения и дата выплата процентов;
4) купонная процентная ставка (купонная доходность);
5) текущая доходность;
6) полная доходность;

Выплаты процентов производятся ежегодно, по полугодиям или ежеквартально.

Классификация облигаций.

1) **По методу обеспечения:**
   - государственные и муниципальные облигации, выплаты по которым обеспечиваются гарантиями государства или муниципалитета;
   - облигации частных корпораций, которые обеспечиваются залогом имущества, передачей прав на недвижимость, дохода от различных программ;
   - облигации частных организаций без специального обеспечения.
2) **По сроку:**
   - с фиксированной датой погашения;
   - без указания даты погашения (бессрочные).
3) **По способу погашения номинала (выкупа облигации):**
   - разовым платежом;
   - распределенными во времени погашениями оговоренной доли номинала (по частям);
   - последовательным погашением доли общего количества облигации.
4) **По методу выплаты дохода:**
   - выплачиваются только проценты (срок выкупа не отговаривается);
   - выплата процентов не предусматривается (облигация с нулевым купоном);
   - проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока;
   - периодически выплачиваются проценты, в конце срока выплачивается номинал и выкупная цена. Этот вид является преобладающим.

Облигации являются важным объектом долгосрочных инвестиций. С момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются на кредитно-денежном рынке по рыночным ценам.

Под курсом облигации понимают цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала:

$$K = \frac{P}{N} \times 100\%,$$

где K – курс облигации;

P – рыночная цена облигации;

N – номинал облигации.

Оценка стоимости облигации.

Стоимость облигации складывается из периодически получаемых по купонам процентов и получение номинала или выкупной цены облигации в конце срока:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Купонный доход облигации представляет собой постоянную ренту постнумерандо:

$$CF_t = Ng,$$

где g – купонная ставка.

Формула для оценки облигации примет вид:

$$PV = Ng\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Учитывая, что сумма коэффициентов дисконтирования равна коэффициенту аннуитета ренты:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t},$$

получим окончательную формулу для оценки стоимости облигации:

$$PV = N\left[\frac{g}{r} + (1-\frac{g}{r})\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

Доходность облигации.

Различают следующие виды доходности облигации:

1) купонная доходность g;

2) текущая доходность i_t;

3) полная доходность *YTM* (*yield to maturity*).

Купонная доходность g задана и обозначена на облигации.

Текущая доходность i_t характеризует отношение поступлений по купонам к цене приобретения облигации. Этот параметр не учитывает второй источник дохода – получение номинала или выкупной цены в конце срока. Поэтому купонная и текущая доходность непригодна при сравнении доходности разных видов облигаций. Например, у облигаций с нулевым купоном текущая доходность равна нулю.

Текущая доходность определяется по формуле:

$$i_t = \frac{Ng}{P} = \frac{g}{K} \times 100\%.$$

Полная доходность (**ставка помещения**) измеряет реальную эффективность инвестиций в облигацию для инвестора в виде годовой ставки сложных процентов. Учитывает оба источника дохода: периодически получаемые по купонам проценты и получение номинала или выкупной цены облигации в конце срока.

Для определения полной доходности облигации необходимо приведенную стоимость всех поступлений приравнять цене облигации:

$$P = N\left[\frac{g}{r} + (1 - \frac{g}{r})\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

Решая это уравнение относительно ставки дисконтирования r определим полную доходность облигации *YTM*. Уравнение является трансцендентным и аналитически не решается. Полная доходность может быть определена только численными методами с применением программного обеспечения (электронная таблица Excel) или с помощью приближенных оценок.

Для приближенной оценки полной доходности облигации применяют формулу:

$$YTM = \frac{Ng + \frac{N - P}{n}}{\frac{N + P}{2}},$$

где P – рыночная цена облигации;

n – число лет, оставшихся до погашения облигации.

Оценка стоимости облигации с нулевым купоном.

Оценка облигаций с нулевым купоном (выплата процентов не предусмотрена) осуществляется по формуле:

$$PV = \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Оценка стоимости бессрочной облигации.

Оценка бессрочной облигации $(n \to \infty)$ осуществляется по формуле:

$$PV = Ng\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}.$$

Учитывая выражение:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1}{r},$$

окончательно получаем формулу для оценки бессрочной облигации:

$$PV = \frac{Ng}{r}.$$

5.3. Оценка стоимости акций. Модель нулевого роста.

Акция представляет собой долевую ценную бумагу, свидетельствующую об участии ее владельца в собственном капитале компании.

Акции в отличие от облигаций и других долговых ценных бумаг не имеют установленных сроков обращения.

Покупка акций сопровождается для инвестора приобретением ряда имущественных и иных прав, в частности право владельца акций участвовать в управлении обществом (за исключением привилегированных акций), в распределении прибыли общества и в получении доли имущества, пропорциональной его вкладу в уставный капитал, в случае ликвидации данного общества. Выделяют две категории акции: **обыкновенные и привилегированные.**

Обыкновенная акция дает право на получение плавающего дохода, то есть дохода, зависящего от результатов деятельности общества, а также право на участие в управлении (одна акция – один голос). Распределение чистой прибыли среди держателей обыкновенных акций осуществляется после выплаты дивидендов по привилегированным акциям и пополнения резервов, предусмотренных учредительными документами и решением собрания акционеров. Выплата дивидендов по обыкновенным акциям ничем не гарантирована и зависит исключительно от результатов текущей деятельности компании и решения собрания акционеров.

Привилегированная акция дает преимущественное право с обыкновенной акцией на получение дивидендов в форме гарантированного фиксированного процента, а также на долю в остатке активов при ликвидации общества. Дивиденды по таким акциям выплачиваются независимо от результатов деятельности общества и до их распределения между держателями обыкновенных акций.

Для оценки акций используются следующие характеристики:

1) номинальная стоимость акции – стоимость, указанная на бланке акции;
2) курсовая (текущая рыночная) цена – по этой цене акция оценивается на рынке ценных бумаг;
3) балансовая стоимость акции рассчитывается как отношение общей стоимости активов по балансу за минусом задолженности кредитора к общему числу выпущенных акций.

Оценка стоимости обыкновенной акции.

Денежные доходы, получаемые при владении обыкновенной акцией, имеют две формы:

1) дивиденды в денежной форме DIV;

2) доход или убыток от прироста (падения) курсовой стоимости акций.

Определим доходность обыкновенной акции, стоимость которой в момент оценки - P_0, ожидаемая цена в конце первого года - P_1 и ожидаемый дивиденд за первый год в расчете на одну акцию - DIV_1. Доходность, ожидаемая инвестором от этой акции в следующем году, определяется:

$$r = \frac{DIV_1 + P_1 - P_0}{P_0}. \tag{5.1}$$

Если инвестор имеет прогноз о величине дивидендов DIV_1, известна доходность других акций с аналогичной степенью риска r, возможно вычислить цену акции на момент оценки P_0 из формулы (5.1):

$$P_0 = \frac{DIV_1 + P_1}{1 + r}. \tag{5.2}$$

Аналогично запишем выражение для цены акции в конце первого года P_1:

$$P_1 = \frac{DIV_2 + P_2}{1 + r}, \tag{5.3}$$

где DIV_2 – дивиденды за второй год;

P_2 - цена акции в конце второго года

Выразим цену в настоящий момент времени через дивиденды первого года и второго года DIV_1, DIV_2 и стоимость акции к концу второго года P_2 подставив (5.3) в (5.2):

$$P_0 = \frac{1}{1+r}(DIV_1 + P_1) = \frac{1}{1+r}(DIV_1 + \frac{DIV_2 + P_2}{1+r}) = \frac{DIV_1}{1+r} + \frac{DIV_2 + P_2}{(1+r)^2}. \tag{5.4}$$

Формула для оценки акции в конце второго года P_2:

$$P_2 = \frac{DIV_3 + P_3}{1 + r}. \tag{5.5}$$

Подставляя в формулу (5.4) выражение (5.5), получим:

$$P_0 = \frac{DIV_1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}(DIV_2 + \frac{DIV_3 + P_3}{1+r}) = \frac{DIV_1}{1+r} + \frac{DIV_2}{(1+r)^2} + \frac{DIV_3}{(1+r)^3} + \frac{P_3}{(1+r)^3}.$$

Обобщая формулу для *n* периодов:

$$P_0 = PV = \frac{DIV_1}{1+r} + \frac{DIV_2}{(1+r)^2} + \frac{DIV_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{DIV_n}{(1+r)^n} + \frac{P_n}{(1+r)^n}.$$

В краткой записи оценка стоимости акции:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{DIV_t}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}.$$

Так для акции не установлен срок обращения ($n \to \infty$), то формула для оценки стоимости акции запишется в следующем виде:

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t}.$$

Стоимость обыкновенной акции определяется как дисконтированный денежный поток дивидендов по норме доходности, которая может быть получена на рынке капиталов от ценных бумаг с подобной степенью риска.

Если дивиденды постоянны $DIV_t = DIV = const$, то

$$PV = \frac{DIV}{r}.$$

Оценку акций по этой формуле называют **моделью нулевого роста.**

Оценка стоимости привилегированной акции.

Привилегированные акции, как и бессрочные облигации, генерируют доход неопределенно долго. Оценка стоимости привилегированной акции вычисляется как отношение величины дивиденда к рыночной норме прибыли по акциям данного класса риска:

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t} = \frac{DIV}{r}.$$

5.4. Оценка стоимости обыкновенной акции с постоянным темпом прироста дивидендов. Модель постоянного роста

Рассмотрим оценку стоимости акции, выплата дивидендов по которой увеличивается с постоянным темпом прироста g. Схема денежных потоков, генерируемых акцией, представлена на рис. 5.2.

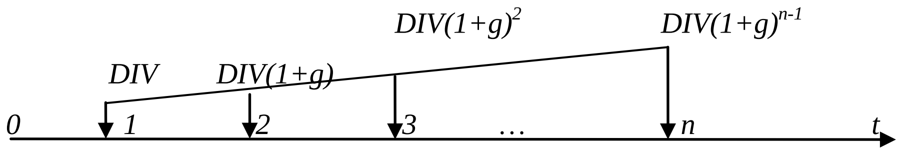

Рис. 5.2. Схема денежных потоков, генерируемых акцией

*Б*азовая величина дивиденда равна *DIV* и ежегодно она увеличивается с темпом прироста g.

Оценка стоимости акции в этом случае определяются по формуле:

$$PV = \frac{DIV}{1+r} + \frac{DIV(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{DIV(1+g)^2}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{DIV(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$PV = \frac{DIV}{1+r}\left\{1 + \frac{1+g}{1+r} + \frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}}\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{1+g}{1+r}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим:

$$PV = \frac{DIV}{1+r}\left[\frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+g}{1+r}\right) - 1}\right] = DIV\,\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g}.$$

При выполнении условия *(1+g)<(1+r)* и $n \to \infty$ формула примет вид:

$$PV = \frac{DIV}{r-g}.$$

Данная формула называется **моделью постоянного роста** или **моделью Гордона.** Формулой можно пользоваться, только если $r>g$.

ТЕМА 6. АНАЛИЗ КРЕДИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ (СДЕЛОК)

6.1. Потребительский кредит.

Существует большое количество видов кредитных сделок: потребительский кредит, ипотека, лизинг, автокредит и другие. Конкретные условия кредитной сделки определяются в финансовом контракте, являющемся юридическим документом.

Кредитные сделки разделяются на краткосрочные (срок меньше года) и долгосрочные (срок более года).

Потребительский кредит представляет собой единовременную выдачу кредита (займа), погашенного одним платежом в конце срока сделки, в которой участвуют как минимум два лица: кредитор – лицо, предоставляющее в долг финансовые средства, и заемщик (дебитор) – лицо, получающее финансовые средства. Схема потребительского кредита представлена на рис. 6.1. Проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита. Такой метод называется разовым начислением процентов. Погашение долга с процентами производится частями (обычно равными суммами) на протяжении всего срока кредита.

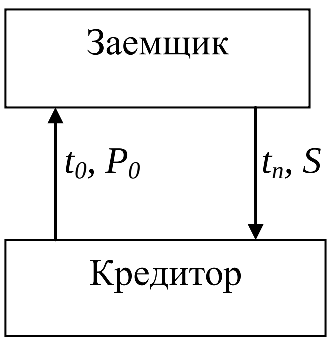

Рис. 6.1 Схема потребительского кредита

t_0 – дата выдачи кредита;

t_n – дата возврата кредита;

P_0 – объём выданного кредита, сумма основного долга;

S – объём возвращаемых средств.

При реализации потребительского кредита проценты начисляются однократно на весь объем кредита и не зависят от условий погашения основного долга:

$$S = P_0(1+ni),$$

где n – срок кредита в годах;

Величина разового погасительного платежа R составит:

$$R = \frac{S}{pn},$$

где p – количество платежей в году.

6.2.Погашение краткосрочной задолженности при начислении по простой процентной ставке

Краткосрочные обязательства иногда погашаются с помощью последовательности частичных платежей. В этом случае применяются два метода:

1)актуарный метод;

2)метод расчета по правилу торговца.

Актуарный метод.

На рисунке 6.2 изображен график платежей и контур кредитной сделки для актуарного метода. При расчётах используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Проценты при актуарном методе начисляются на невыплаченную часть долга. Если частичный платеж (R_1, R_2, R_3,) меньше начисленных процентов (S_1-P_0, S_2-P_1, S_3-P_2) то его не учитывают в момент поступления и приплюсовывают к следующему платежу. Необходимым условием кредитной сделки является сбалансированность вложений и отдачи.

Баланс финансовой операции предусматривает эквивалентность выплат и поступлений.

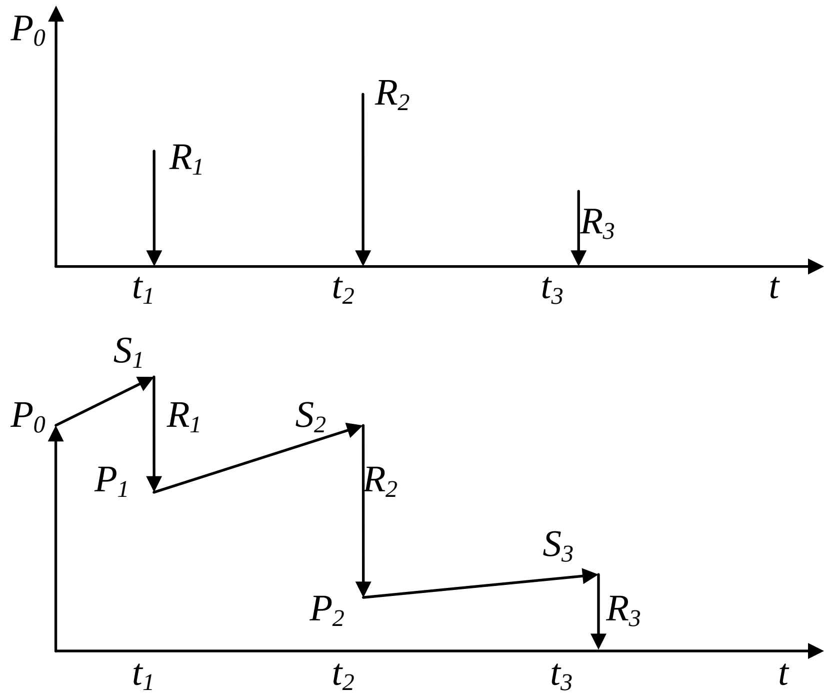

Рис. 6.2. График платежей и контур кредитной операции для актуарного метода

Сбалансированная операция имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности:

$$P_1 = P_0(1 + it_1) - R_1;$$

$$P_2 = P_1(1 + i(t_2 - t_1)) - R_2;$$

$$P_3 = P_2(1 + i(t_3 - t_2)) - R_3 = 0.$$

Правило торговца.

На рисунке 6.3 изображен контур кредитной сделки для метода расчета по правилу торговца. Сумма долга с начисленными процентами остается неизменной до полного погашения:

$$S = P_0(1 + t_3 i).$$

Параллельно идёт накопление частичных платежей, сумма которых после наращения к концу срока должна быть равна наращенной сумме долга:

$$P_0(1 + t_3 i) = R_1[1 + (t_3 - t_1)i] + R_2[1 + (t_3 - t_2)i].$$

Для произвольного числа *n-1* частичных выплат:

$$P_0(1+t_n i)=\sum_{j=1}^{n} R_j[1+(t_n-t_j)i]$$

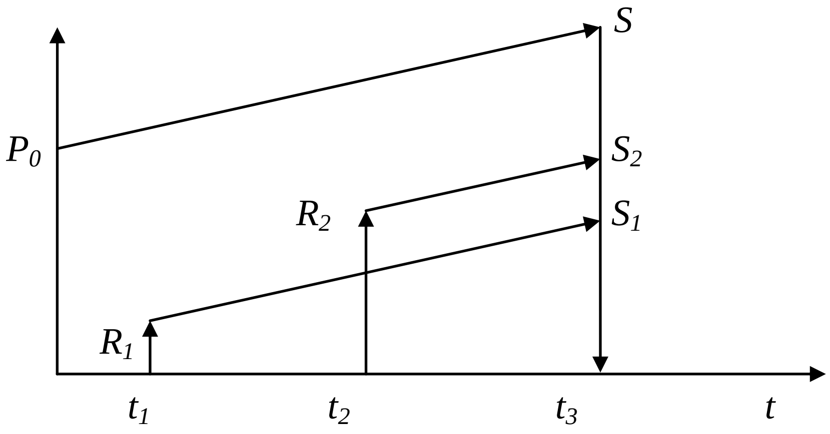

Рис. 6.3 Контур кредитной сделки для метода расчета по правилу торговца.

6.3.Погашение задолженности при начислении по сложной процентной ставке

В качестве параметров долгосрочной кредитной сделки является сумма выданного кредита P_0, срок сделки t_n, процентная ставка по кредиту i, схема погашения кредита частичными платежами: $t_1, R_1;\ t_2, R_2;\ t_3, R_3; \ldots\ t_n, R_n$. На рисунке 6.4 изображен график платежей и контур кредитной сделки.

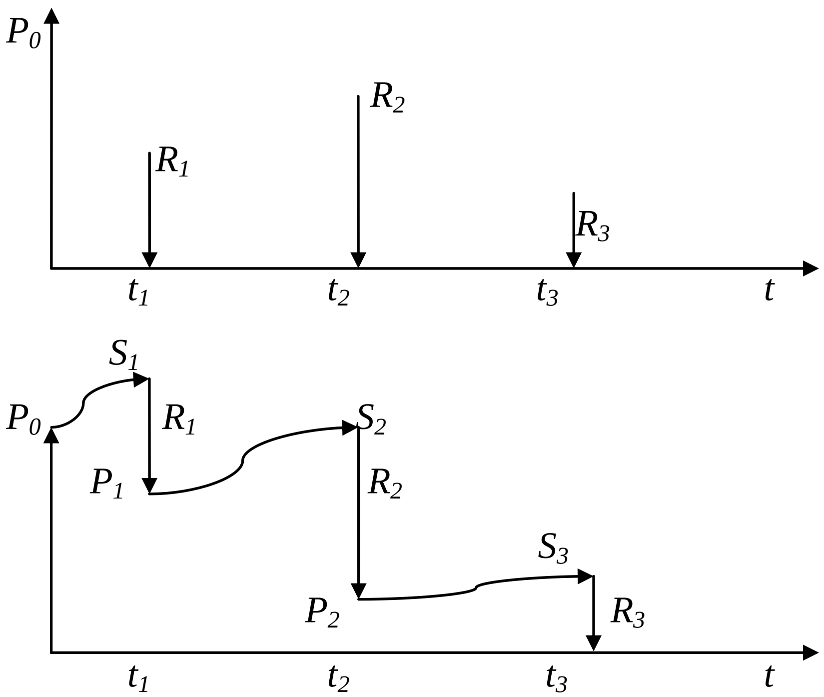

Рис. 6.4. График платежей и контур кредитной операции для долгосрочной кредитной операции

В случае долгосрочной кредитной сделки получение денежных средств заемщиком и их возвращение разделены во времени, а выплата процентов за кредит и его погашение осуществляются в течение продолжительного времени. Проценты при долгосрочном кредитовании начисляются на невыплаченную часть долга.

Сбалансированная операция имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности:

$$P_1 = P_0(1+i)^{t_1} - R_1;$$

$$P_2 = P_1(1+i)^{t_2-t_1} - R_2;$$

$$P_3 = P_2(1+i)^{t_3-t_2} - R_3 = 0.$$

Выполняя преобразования получим:

$$P_0 = \frac{R_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{R_3}{(1+i)^{t_3}}.$$

Для произвольного числа периодов получим балансовое уравнение.

$$P_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Сумма всех современных стоимостей платежей заемщика равна первоначальной величине долга.

В случае постоянных платежей заемщика $R_k = R = const$ балансовое уравнение примет вид:

$$P_0 = R\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^{t_k}} = Ra_{n;i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

В случае постоянных платежей заемщика (распространенный случай) кредитная сделка определяется 3 параметрами: величиной платежа *R*, сроком сделки *n*, процентной ставкой *i*.

Величина постоянного платежа заёмщика определится, как отношение первоначальной суммы долга и коэффициента аннуитета:

$$R = P_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{P_0}{a_{n;i}}.$$

Эффективность кредитной сделки определится процентным доходом, получаемым кредитором за весь срок сделки. Процентный доход определяется как разность между суммой платежей заемщика и первоначальной суммой долга (объемом кредита):

$$I = \sum_{k=1}^{n} R_k - K_0 .$$

Математические методы финансового анализа
Контрольная работа № 1

Задача № 1. На банковский вклад в размере ***P*** руб. начисляются проценты по простой ставке ***i%*** в течении ***0,8*** года. Определить проценты и наращенную сумму.

Задача № 2. Клиент внес на банковский депозит сумму в размере ***P*** руб. на срок ***n*** лет под сложную процентную ставку ***i%*** годовых. Определить наращенную сумму при ежегодном, ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов.

Задача № 3. На банковский вклад в размере ***P*** руб. начисляются проценты по сложной годовой ставке ***i%*** в течение ***n*** лет. Определить силу роста и наращенную сумму при непрерывном начислении процентов.

Задача № 4. На банковском депозите к концу срока договора накопилась сумма ***100000*** руб. Срок договора - ***n*** лет, номинальная ставка процентов ***i%***. Определить современную стоимость суммы при ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов.

Задача № 5. Вексель, имеющий номинальную стоимость ***P*** руб., учтен в банке по учетной ставке ***d*** годовых за **146** дней до его погашения. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учёте.

Задача № 6. Вексель на сумму ***P*** руб., срок платежа по которому наступает через ***1,6*** года, учтен по сложной учётной ставке ***d***. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учёте и дисконт при ежегодном и ежемесячном дисконтировании.

Задача № 7. Имеется следующий график внесения денег на банковский депозит:
1 марта 2010 г. – 40000 руб.
1 сентября 2011 г. – 60000 руб.
1 марта 2011 г. – 50000 руб.
1 марта 2012 г. – 70000 руб.
Определить наращенную сумму денежного потока на 1 марта 2012 г. и современную стоимость на 1 марта 2010 г. при процентной ставке наращения - ***i%.*** Нарисовать график платежей.

Задача № 8. В банк в течении ***n*** лет ежегодно в конце года поступает денежная сумма в размере ***P*** руб., на которую начисляются проценты по сложной ставке ***i%*** годовых. Определить коэффициенты наращения и приведения (аннуитета) ренты, а также современную стоимость и наращенную сумму денежного потока.

Математические методы финансового анализа
Контрольная работа № 2

Задача № 1. Инвестиционный проект осуществляется в течение 5 лет. Ежегодный денежный поток от операционной деятельности проекта равен ***1 000 000*** руб. Однократные инвестиции до начала реализации проекта составляют ***2 000 000*** руб. Определить является ли проект эффективным по критериям: чистой приведенной стоимости ***NPV,*** внутренней нормы доходности ***IRR***, индексу рентабельности ***PI***, если минимальная норма доходности, устраивающего инвестора ***r***. Построить график зависимости чистой приведенной стоимости от ставки дисконтирования.

Задача № 2. Номинал облигации, до погашения которой остается ***n*** лет, равен ***P*** руб., купон ***i%*** выплачивается один раз в год. Определить цену облигации, чтобы она обеспечила покупателю доходность до погашения в размере (***i+7***)% годовых.

Задача № 3. Облигация с нулевым купоном номинальной стоимостью ***P*** руб. и сроком погашения ***n*** лет продается за (***P-5000***) руб. Проанализировать целесообразность приобретения этих облигаций, если имеется возможность инвестировать средства с нормой прибыли ***i%*** годовых.

Задача № 4. Рассчитать полную доходность облигации, которая будет приниматься к погашению через ***n*** лет, номинальной стоимостью ***5000*** руб., с годовой купонной ставкой ***i%***, имеющей текущую рыночную стоимость ***3352*** руб.

Задача № 5. Компания гарантирует выплату дивидендов в размере ***0,01P*** руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Определить, что предпочтительнее для инвестора, приобрести акции компании по цене (***P-460***) руб. или поместить деньги на вклад под ***i%*** годовых.

Вопросы по курсу
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА»
ВЕСЕНИЙ СЕМЕСТР 2012-2013 УЧЕБНОГО ГОДА
для специальностей «Менеджмент организации», «Финансы и кредит»

РАЗДЕЛ 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ТЕМА 1. ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ.

1.1.**Принцип неравноценности денег во времени.** Сформулировать принцип и следствие принципа.

1.2.**Проценты.** Дать определение термину «проценты». Знать формулы для определения наращенной суммы ссуды, процентной ставки наращения. Понятие финансовой операции и доходности финансовой операции. Классификация способов начисления процентов.

1.3.**Простая процентная ставка наращения**. Вывод (запись) формулы для вычисления наращенной суммы ссуды. Множитель наращения (уметь написать). Три метода начисления простой процентной ставки.

1.4.**Сложная процентная ставка наращения.** Вывод (запись) формулы для расчёта наращенной суммы. Множитель наращения (уметь написать).

1.5.**Номинальная процентная ставка наращения.** Знать формулу для вычисления наращенной суммы при начислении процентов m раз за год.

1.6.**Эффективная ставка.** Определение эффективной ставки. Знать формулу для расчёта эффективной ставки.

1.7.**Непрерывное наращение. Определение непрерывного начисления процентов.** Определение силы роста. Вывод (запись) формулы для вычисления наращенной суммы при непрерывном начислении процентов при постоянной силе роста. Связь дискретных ставок наращения с силой роста. Знать формулу для наращенной суммы при переменной силе роста.

1.8.**Математическое дисконтирование.** Нарисовать схему логики финансовых операций. Определение операции дисконтирования. Знать формулы для вычисления современной стоимости при использовании простых, сложных, номинальных процентов и силы роста. Дисконтные множители (коэффициенты дисконтирования) (уметь написать)**.**

ТЕМА 2. УЧЁТНЫЕ СТАВКИ.

2.1.**Банковскимй учет (банковское дисконтирование).** Понятие операции банковского (коммерческого) учета. Определение термина «вексель». Знать формулу для расчёта учетной ставки. Понятие дисконта.

2.2.**Простая учётная ставка.** Знать выражение для расчёта стоимости векселя при его досрочном учёте. Наращение по простой учётной ставке.

2.3.**Сложная учётная ставка.** Знать формулу для расчёта стоимости векселя при его досрочном учёте. Наращение по сложной учётной ставке.

2.4.**Номинальная и эффективная учётные ставки.** Банковское дисконтирование и наращение по номинальной и эффективной учётной ставке. Знать формулу для расчёта стоимости векселя при его досрочном учёте.

2.5.**Непрерывное банковское дисконтирование.** Вывод (запись) формулы для расчёта стоимости векселя при непрерывном дисконтировании.

ТЕМА 3. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ.

3.1.**Классификация потоков платежей.** Определение потока платежей. Регулярные и нерегулярные потоки платежей. Параметры ренты. Классификация потоков платежей. Определение рент постнумерандо и пренумерандо, с выплатами в середине периода.

3.2.**Расчет наращенной суммы и современной стоимости потока платежей.** Вывод (запись) формулы наращенной суммы нерегулярного потока платежей. Вывод (запись) формулы современной стоимости нерегулярного потока платежей.

3.3.**Расчёт наращенной суммы постоянной годовой ренты постнумерандо.** Вывод (запись) формулы наращенной суммы постоянной годовой ренты постнумерандо. Коэффициент наращения ренты.
3.4.**Расчёт современной стоимости постоянной годовой ренты постнумерандо.** Вывод (запись) формулы современной стоимости постоянной годовой ренты постнумерандо. Коэффициент приведения (аннуитета) ренты.
3.5.**Определение параметров постоянной годовой ренты постнумерандо.** Сформулировать задачи и знать формулы для определения члена ренты, срока рента.
3.11. **Наращенные суммы и современные стоимости других видов постоянных годовых рент.** Знать формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости ренты пренумерандо и ренты с выплатами в середине периода.
3.12.**Вечная и отложенная рента**. Определение вечной ренты. Знать формулу для расчета коэффициента приведения (аннуитета) вечной ренты. Определение отложенной ренты. Знать формулу для расчета современной стоимости отложенной ренты.

РАЗДЕЛ 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

ТЕМА 4. ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА.

4.1.Классификация инвестиций. Определение инвестиций. Классификация инвестиций. Критерии оценки инвестиционных проектов.
4.2.**Критерий чистый приведённый доход проекта.** Знать формулу для определения чистого приведённого дохода. Экономический смысл. Определение неопределенности и риска. Формулировка второго принципа финансов. Свойство аддитивности. Нарисовать график зависимости чистого приведённого дохода от периода для типичного проекта.
4.3.**Критерий внутренняя норма доходности проекта.** Определение внутренней нормы доходности. Экономический смысл. Нарисовать график зависимости чистого приведённого дохода от ставки дисконтирования для типичного проекта. Недостатки критерия внутренняя норма доходности проекта.
4.4.**Критерий индекс доходности (рентабельности).** Знать формулу для определения индекса доходности (рентабельности). Экономический смысл. Недостаток критерия индекс доходности.
4.5.**Критерий дисконтированный срок окупаемости проекта.** Определение дисконтированного срока окупаемости. Экономический смысл. Нарисовать на графике дисконтированный срок окупаемости проекта.

ТЕМА 5. ОЦЕНКА ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ (ИНСТРУМЕНТОВ).

5.1.**Базовая модель оценки финансовых активов**. Знать базовую модель оценки финансовых активов. Первая и вторая задача инвестора.
5.2.**Оценка стоимости облигации.** Определение облигации. Классификация облигаций. Параметры облигации. Доходность облигаций. Знать формулу для оценки стоимости облигации. Расчет стоимости полной доходности облигации. Знать формулу для оценки стоимости облигации с нулевым купоном. Знать формулу для оценки стоимости бессрочной облигации. Знать формулу для оценки привилегированных акций.

5.3. **Оценка стоимости акций. Модель нулевого роста.** Определение акции. Классификация акций. Параметры акции. Знать формулу для оценки обыкновенных акций. Знать формулу для оценки обыкновенных акций по модели нулевого роста.
5.4. Оценка стоимости обыкновенной акции с постоянным темпом прироста дивидендов. Модель постоянного роста. Знать формулу для оценки обыкновенных акций с постоянным темпом прироста дивидендов (модель постоянного роста).

ТЕМА 6. АНАЛИЗ КРЕДИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ (СДЕЛОК).

6.1.**Потребительский кредит.** Схема потребительского кредита. Знать формулу для наращенной суммы долга в случае потребительского кредита. Знать выражение для величины разового погасительного платежа.

6.2.**Погашение краткосрочной задолженности при начислении по простой процентной ставке.** Нарисовать график платежей и контур кредитной операции для актуарного метода и метода расчета по правилу торговца. Знать балансовое уравнение.

6.3.**Погашение долгосрочной задолженности при начислении по сложной процентной ставке.** Контур долгосрочной кредитной операции. Вывод балансового уравнения. Знать балансовое уравнение. Знать формулу для определения величины постоянного периодического платежа заемщика.

Вопросы по курсу
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА»
2012-2013 УЧЕБНОГО ГОДА
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ» И НАПРАВЛЕНИЯ «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА»

РАЗДЕЛ 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Тема 1. ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ.

1.Принцип неравноценности денег во времени. Первый принцип теории финансов. Дать определение понятиям: проценты, наращенная сумма ссуды, процентная ставка наращения. Понятие финансовой операции. Доходность финансовой операции.
2.Простая процентная ставка наращения. Вычисление процентов, наращенной суммы. Множитель наращения. Три метода начисления простой процентной ставки.
3.Сложная процентная ставка наращения. Вычисление наращенной суммы. Множитель наращения.
4.Номинальная процентная ставка наращения. Вычисление наращенной суммы при начислении процентов m раз за год.
5.Определение эффективной ставки. Расчёт эффективной ставки.
6.Непрерывное начисление процентов. Сила роста. Вычисление наращенной суммы при непрерывном начислении процентов. Связь дискретных ставок наращения с силой роста.
7.Математическое дисконтирование. Логика финансовых операций. Вычисление современной стоимости при использовании простых, сложных, номинальных процентов и силы роста. Дисконтные множители (коэффициенты дисконтирования). Понятие дисконта.

Тема 2. УЧЁТНЫЕ СТАВКИ.

8.Понятие операции банковского (коммерческого) учета. Простая учётная ставка. Расчёт стоимости векселя при его досрочном учёте. Наращение по простой учётной ставке.
9.Банковский учёт по сложной учётной ставке. Расчёт стоимости векселя при его досрочном учёте. Наращение по сложной учётной ставке.
10.Номинальная и эффективная учётная ставка. Банковское дисконтирование и наращение по номинальной и эффективной учётной ставке. Непрерывное банковское дисконтирование.

Тема 3. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ.

11. Определение потока платежей. Классификация потоков платежей. Параметры ренты.
12.Расчет наращенной суммы и современной стоимости потока платежей.
13.Расчёт наращенной суммы постоянной годовой ренты постнумерандо. Коэффициент наращения ренты.
14.Расчёт современной стоимости постоянной годовой ренты постнумерандо. Коэффициент приведения (аннуитета) ренты.
15.Определение параметров постоянной годовой ренты постнумерандо. Определение члена ренты, срока рента, размера процентной ставки.
16.Рента, начисление процентов m раз в году. Схема потока платежей. Вычисление современной стоимости и наращенной суммы потока платежей.
17.Рента p-срочная, начисление процентов один раз в году. Схема потока платежей. Вычисление современной стоимости и наращенной суммы потока платежей.
18.Рента p-срочная с начислением процентов m раз в году. Схема потока платежей. Вычисление современной стоимости и наращенной суммы потока платежей.
19.Ренты с непрерывным начислением процентов. Схема потока платежей. Вычисление современной стоимости и наращенной суммы потока платежей.

20.Постоянные непрерывные ренты. Схема потока платежей. Вычисление современной стоимости и наращенной суммы потока платежей.
21.Наращенные суммы и современные стоимости других видов постоянных годовых рент.
22.Вечная и отложенная рента. Определение вечной ренты. Коэффициент приведения (аннуитета) вечной ренты. Определение отложенной ренты. Расчет современной стоимости отложенной ренты.

Раздел 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Тема 4. Оценка экономической эффективности инвестиционного проекта.

23.Понятие инвестиции. Классификация инвестиций. Критерии оценки инвестиционных проектов.
24.Критерий чистый приведённый доход проекта. Экономический смысл ставки дисконтирования. Свойство аддитивности. График зависимости чистого приведённого дохода от периода для типичного проекта.
25.Критерий внутренняя норма доходности проекта. Экономический смысл. График зависимости чистого приведённого дохода от ставки дисконтирования для типичного проекта. Недостатки критерия внутренняя норма доходности проекта.
26.Критерий индекс доходности (рентабельности). Экономический смысл. Недостаток критерия индекс доходности.
27.Критерий дисконтированный срок окупаемости проекта. Экономический смысл. Графическое изображение дисконтированного срока окупаемости проекта.

Тема 5. Оценка финансовых активов (инструментов).

28.Базовая модель оценки финансовых активов. Экономический смысл ставки дисконтирования. Первая и вторая задачи инвестора.
29.Определение облигации. Классификация облигаций. Параметры облигации. Курс облигации.
30.Расчет стоимости облигаций. Доходность облигаций.
31.Расчёт стоимости облигации с нулевым купоном. Оценка бессрочной облигации.
32.Определение акции. Классификация акций. Параметры акции. Оценка обыкновенных акций. Модель нулевого роста.
33.Оценка обыкновенных акций с постоянным темпом прироста дивидендов. Модель постоянного роста. Оценка привилегированных акций.

Тема 6. Анализ кредитных операций (сделок).

34.Потребительский кредит. Схема и параметры сделки. Расчёт наращенной суммы.
35.Погашение краткосрочной задолженности при начислении по простой процентной ставке. График платежей и контур кредитной операции для актуарного метода и метода расчета по правилу торговца. Балансовое уравнение.
36.Погашение долгосрочной задолженности при начислении по сложной процентной ставке. Контур долгосрочной кредитной операции. Вывод балансового уравнения. Определение величины постоянного периодического платежа заемщика.