ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики и информатики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума по математике

Самара
Издательство «Самарский университет»
2007

УДК 512.7
ББК 22.147
Л 591

Авторы-составители: Л.А. Сараев, Ю.В. Хохрякова, Е.А. Ильина, В.С. Глушенков

Л 591 **Линейная алгебра и аналитическая геометрия**: практикум по математике / авторы-составители: Л.А. Сараев, Ю.В. Хохрякова, Е.А. Ильина, В.С. Глушенков; Федер. агентство по образованию. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2007. – 48 с.

Практикум содержит варианты контрольных заданий и рекомендации к их решению по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Представлены алгоритмы решения систем линейных уравнений различными методами, рассмотрены основные методики решения задач векторной алгебры, алгебра матриц и задач приведения кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду.

Приведены теоретические и практические вопросы для самостоятельной подготовки студентов по всему курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Предназначен для студентов 1 курса гуманитарных специальностей всех форм обучения.

УДК 512.7
ББК 22.147

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой прикладной математики и информатики СамГТУ В.П. Радченко.

СОДЕРЖАНИЕ

Программа курса
«Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Лекции

Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Понятие о матрице. Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Понятие об определителе любого порядка.

Вычисление определителей. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей. Формулы Камера.

Алгебра матриц. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Ранг матрицы и его вычисление. Формулировка теоремы Кронекера-Капелли.

Трехмерное пространство. Векторы, линейные операции над векторами. Проекция вектора на вектор. Базис. Координаты вектора. Модуль и направляющие косинусы вектора.

Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения. Векторное произведение векторов, его свойства.

Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

Аксиоматическое определение линейного векторного пространства. Примеры. Линейная независимость системы векторов. Базис и размерность линейного пространства.

Аксиоматическое определение скалярного произведения. Евклидово пространство.

Векторное уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями, параллельность и перпендикулярность плоскостей. Понятие гиперплоскости и выпуклого многогранника.

Векторное уравнение прямой, каноническое и параметрическое уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Точка пересечения прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью, параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости.

Линейные операторы. Матрица линейного оператора в заданном базисе. Нулевой, тождественный, проективный и гомотетичный операторы.

Действия с операторами. Сопряженный оператор и сопряженная матрица. Самосопряженный оператор и симметричная матрица.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при преобразовании базиса.

Преобразование ортонормированного базиса в ортонормированный.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Канонические уравнения кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола). Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Практические занятия

Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства. Вычисление определителей.

Решение систем линейных уравнений с помощью определителей. Формулы Камера.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Алгебра матриц. Обратная матрица.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Векторы, линейные операции над векторами. Проекция вектора на вектор.

Базис. Координаты вектора. Модуль и направляющие косинусы вектора.

Скалярное произведение векторов.

Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

Векторное уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости.

Угол между плоскостями, параллельность и перпендикулярность плоскостей.

Векторное, каноническое и параметрическое уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Точка пересечения прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью, параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости.

Кривые второго порядка.

Собственные значения и собственные вектора линейного оператора.

Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Тематика контрольных работ

Задача 1

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера, выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 1x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = 4 \\ 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Задача 2

Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных Гаусса.

Найти общее, частное, базисное решения системы.

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 11x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 6 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 2x_5 = -1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -2 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \end{cases}$$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 10 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 9 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 13 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_5 = -3 \end{cases}$

21. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 - x_4 + 4x_5 = 11 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 - 5x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 \\ -10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -1 \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 = 3 \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

Задача 3

Выполнить действия с матрицами.

1. $$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

2. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

3. $$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{Vmatrix}$$

4. $$\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

5. $$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{Vmatrix}$$

6. $$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \end{Vmatrix}$$

7. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

8. $$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{Vmatrix}$$

9. $$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \end{Vmatrix}$$

10. $$\begin{Vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$$

11. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}$$

12. $$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$$

13. $$\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

14. $$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

15. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

16. $$\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

17. $$\begin{Vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -5 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

18. $$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & -5 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

19. $$\begin{Vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{Vmatrix}$$

20. $$\begin{Vmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \\ 1 & -1 \\ -3 & 8 \end{Vmatrix}$$

21. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$

22. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{Vmatrix}$

23. $\begin{Vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}$

24. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}$

25. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \\ -6 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

26. $\begin{Vmatrix} -4 & 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$

27. $\begin{Vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$

28. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

29. $\begin{Vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -5 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$

30. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -5 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$

Задача 4

Найти ранг матрицы.

1. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 7 \end{Vmatrix}$

2. $\begin{Vmatrix} -4 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 9 & 8 & 1 \\ 5 & 15 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$

3. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

4. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$

5. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{Vmatrix}$

6. $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & 7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$

7. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & 5 & 14 \end{Vmatrix}$

8. $\begin{Vmatrix} 3 & -7 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & -4 \end{Vmatrix}$

9. $\begin{Vmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 7 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$

10. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$

11. $\begin{Vmatrix} 3 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & -7 & 10 \end{Vmatrix}$

12. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{Vmatrix}$

13. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & -8 \\ 5 & 3 & 0 & 16 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$

14. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$

15. $\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & 0 \end{Vmatrix}$

16. $\begin{Vmatrix} 8 & 6 & -1 & 4 & -6 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 & 2 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -5 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$

17. $\begin{Vmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{Vmatrix}$

18. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$

19. $\left\|\begin{array}{rrrrr} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right\|$

20. $\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{array}\right\|$

21. $\left\|\begin{array}{rrrr} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 12 \end{array}\right\|$

22. $\left\|\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{array}\right\|$

23. $\left\|\begin{array}{rrrrr} 3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right\|$

24. $\left\|\begin{array}{rrrrr} 2 & 2 & 9 & -19 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right\|$

25. $\left\|\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 14 \end{array}\right\|$

26. $\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right\|$

27. $\left\|\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{array}\right\|$

28. $\left\|\begin{array}{rrrr} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right\|$

29. $\left\|\begin{array}{rrrrr} 3 & 2 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right\|$

30. $\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 17 & 7 \\ 5 & 10 & 16 & 5 \end{array}\right\|$

Задача 5

Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы выполнить двумя способами: с помощью алгебраических дополнений и путем элементарных преобразований.

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 16 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 24 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 26 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -9 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 3 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -9 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \\ x_1 - 3x_2 = 20 \\ 3x_2 - x_3 = -22 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 9 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 10x_2 - 5x_3 = -2 \\ 4x_1 - 7x_2 - 6x_3 = -8 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 9 \\ 4x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

Задача 6

Средствами векторной алгебры найти:
1) объем пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$;
2) длину ребра $A_2 A_3$;
3) площадь грани $A_1 A_2 A_3$;
4) угол между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$.
Даны координаты вершин пирамиды:

1.	$A_1(1, 1, 1)$,	$A_2(-1, 2, 4)$,	$A_3(2, 0, 6)$,	$A_4(-2, 5, -1)$
2.	$A_1(0, 5, 0)$,	$A_2(2, 3, -4)$,	$A_3(0, 0, -6)$,	$A_4(-3, 1, -1)$
3.	$A_1(0, 0, 6)$,	$A_2(4, 0, -4)$,	$A_3(1, 3, -1)$,	$A_4(4, -1, -3)$
4.	$A_1(-5, 6, -1)$,	$A_2(6, -5, 2)$,	$A_3(6, 5, 1)$,	$A_4(0, 0, 2)$
5.	$A_1(2, -5, 3)$,	$A_2(3, 2, -5)$,	$A_3(5, -3, -2)$,	$A_4(-5, 3, 2)$
6.	$A_1(6, 0, 4)$,	$A_2(0, 6, 4)$,	$A_3(4, 6, 0)$,	$A_4(0, -6, 4)$
7.	$A_1(3, 2, 4)$,	$A_2(2, 4, 3)$,	$A_3(4, 3, -2)$,	$A_4(-2, -4, -3)$
8.	$A_1(6, 3, 5)$,	$A_2(5, -6, 3)$,	$A_3(3, 5, 6)$,	$A_4(-6, -1, 2)$
9.	$A_1(5, -2, -1)$,	$A_2(4, 0, 0)$,	$A_3(2, 5, 1)$,	$A_4(1, 2, 5)$
10.	$A_1(4, 2, 5)$,	$A_2(3, 0, 4)$,	$A_3(0, 0, 3)$,	$A_4(5, -2, -4)$
11.	$A_1(4, 2, -5)$,	$A_2(3, 0, 4)$,	$A_3(0, 2, 3)$,	$A_4(5, 2, -4)$
12.	$A_1(4, 4, 10)$,	$A_2(7, 10, 2)$,	$A_3(2, 8, 4)$,	$A_4(9, 6, 9)$
13.	$A_1(4, 6, 5)$,	$A_2(6, 9, 4)$,	$A_3(2, 10, 10)$,	$A_4(7, 5, 9)$
14.	$A_1(3, 5, 4)$,	$A_2(8, 7, 4)$,	$A_3(5, 10, 4)$,	$A_4(4, 7, 8)$
15.	$A_1(10, 6, 6)$,	$A_2(-2, 8, 4)$,	$A_3(6, 8, 9)$,	$A_4(7, 10, 3)$

16. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$

17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$

18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(5, 7, 7)$, $A_3(5, 3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$

19. $A_1(8, 6, 4)$, $A_2(10, 5, 5)$, $A_3(5, 6, 8)$, $A_4(8, 10, 7)$

20. $A_1(7, 7, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$

21. $A_1(4, 0, 0)$, $A_2(-2, 1, 2)$, $A_3(1, 3, 2)$, $A_4(3, 2, 7)$

22. $A_1(-2, 1, 2)$, $A_2(4, 0, 0)$, $A_3(3, 2, 7)$, $A_4(1, 3, 2)$

23. $A_1(1, 3, 2)$, $A_2(3, 2, 7)$, $A_3(4, 0, 0)$, $A_4(-2, 1, 2)$

24. $A_1(3, 2, 7)$, $A_2(1, 3, 2)$, $A_3(-2, 1, 2)$, $A_4(4, 0, 0)$

25. $A_1(3, 1, -2)$, $A_2(1, -2, 1)$, $A_3(-2, 1, 0)$, $A_4(2, 2, 5)$

26. $A_1(1, -2, 1)$, $A_2(3, 1, -2)$, $A_3(2, 2, 5)$, $A_4(-2, 1, 0)$

27. $A_1(-2, 1, 0)$, $A_2(2, 2, 5)$, $A_3(3, 1, 2)$, $A_4(1, -2, 1)$

28. $A_1(2, 2, 5)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(1, -2, 1)$, $A_4(3, 1, 2)$

29. $A_1(1, -1, 6)$, $A_2(4, 5, -2)$, $A_3(-1, 3, 0)$, $A_4(1, -1, 5)$

30. $A_1(6, 1, 5)$, $A_2(-1, 3, 0)$, $A_3(4, 5, -2)$, $A_4(1, -1, 6)$

Задача 7

Даны две системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ и $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$. Определить, какая из этих систем образует базис; разложить вектор $\overrightarrow{m}$ по этому базису.

1. $\overrightarrow{a_1} = (3, 4, 1)$; $\overrightarrow{a_2} = (2, -1, 0)$; $\overrightarrow{a_3} = (-2, 3, 1)$;
   $\overrightarrow{b_1} = (2, 3, 1)$; $\overrightarrow{b_2} = (-1, 1, 2)$; $\overrightarrow{b_3} = (3, 7, 4)$; $\overrightarrow{m} = (4, 7, 1)$

2. $\overrightarrow{a_1}=(5,-1,4)$; $\overrightarrow{a_2}=(1,2,3)$; $\overrightarrow{a_3}=(4,-2,1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1,-1,2)$; $\overrightarrow{b_2}=(2,1,1)$; $\overrightarrow{b_3}=(4,-1,5)$; $\overrightarrow{m}=(1,4,3)$

3. $\overrightarrow{a_1}=(2,0,-1)$; $\overrightarrow{a_2}=(3,-5,4)$; $\overrightarrow{a_3}=(0,0,2)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1,1,1)$; $\overrightarrow{b_2}=(-2,3,0)$; $\overrightarrow{b_3}=(-3,7,1)$; $\overrightarrow{m}=(3,-5,6)$

4. $\overrightarrow{a_1}=(-1,1,3)$; $\overrightarrow{a_2}=(1,3,1)$; $\overrightarrow{a_3}=(2,-1,-1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(-3,1,-1)$; $\overrightarrow{b_2}=(1,-1,1)$; $\overrightarrow{b_3}=(-1,-1,1)$; $\overrightarrow{m}=(-3,5,8)$

5. $\overrightarrow{a_1}=(-5,7,4)$; $\overrightarrow{a_2}=(1,3,1)$; $\overrightarrow{a_3}=(2,-1,-1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(5,2,3)$; $\overrightarrow{b_2}=(1,0,5)$; $\overrightarrow{b_3}=(2,1,-1)$; $\overrightarrow{m}=(0,8,3)$

6. $\overrightarrow{a_1}=(1,0,1)$; $\overrightarrow{a_2}=(-1,1,2)$; $\overrightarrow{a_3}=(3,5,1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2,-1,3)$; $\overrightarrow{b_2}=(1,1,-4)$; $\overrightarrow{b_3}=(4,1,-5)$; $\overrightarrow{m}=(2,1,-2)$

7. $\overrightarrow{a_1}=(2,1,3)$; $\overrightarrow{a_2}=(-1,0,1)$; $\overrightarrow{a_3}=(0,1,-1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2,-2,1)$; $\overrightarrow{b_2}=(-1,0,1)$; $\overrightarrow{b_3}=(-1,-2,4)$; $\overrightarrow{m}=(5,3,10)$

8. $\overrightarrow{a_1}=(1,-2,1)$; $\overrightarrow{a_2}=(3,4,-1)$; $\overrightarrow{a_3}=(2,6,2)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2,2,3)$; $\overrightarrow{b_2}=(1,2,3)$; $\overrightarrow{b_3}=(1,1,1)$; $\overrightarrow{m}=(3,0,-2)$

9. $\overrightarrow{a_1}=(4,-2,3)$; $\overrightarrow{a_2}=(1,-3,1)$; $\overrightarrow{a_3}=(-3,-1,-2)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1,1,1)$; $\overrightarrow{b_2}=(0,1,1)$; $\overrightarrow{b_3}=(0,0,1)$; $\overrightarrow{m}=(5,6,-3)$

10. $\overrightarrow{a_1}=(4,2,3)$; $\overrightarrow{a_2}=(1,-3,1)$; $\overrightarrow{a_3}=(-2,0,2)$;
$\overrightarrow{b_1}=(4,-1,3)$; $\overrightarrow{b_2}=(1,1,-2)$; $\overrightarrow{b_3}=(7,2,-3)$; $\overrightarrow{m}=(3,2,-1)$

11. $\overrightarrow{a_1}=(3,2,-2)$; $\overrightarrow{a_2}=(3,-2,-1)$; $\overrightarrow{a_3}=(1,1,-1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1,-1,5)$; $\overrightarrow{b_2}=(2,3,-4)$; $\overrightarrow{b_3}=(1,2,1)$; $\overrightarrow{m}=(3,-5,-1)$

12. $\vec{a_1} = (2, 2, 1);$ $\vec{a_2} = (1, -3, 1);$ $\vec{a_3} = (-1, 0, 1);$
$\vec{b_1} = (-2, 1, -3);$ $\vec{b_2} = (2, 4, 8);$ $\vec{b_3} = (-2, 6, 2);$ $\vec{m} = (-3, -5, 1)$

13. $\vec{a_1} = (?, 0, 5);$ $\vec{a_2} = (1, -2, 1);$ $\vec{a_3} = (6, -6, 8);$
$\vec{b_1} = (1, 0, 0);$ $\vec{b_2} = (1, 1, 0);$ $\vec{b_3} = (1, 2, 1);$ $\vec{m} = (3, -5, 1)$

14. $\vec{a_1} = (2, 3, 1);$ $\vec{a_2} = (-1, -3, 4);$ $\vec{a_3} = (0, -3, 9);$
$\vec{b_1} = (1, 2, 0);$ $\vec{b_2} = (0, -3, 0);$ $\vec{b_3} = (2, 1, 1);$ $\vec{m} = (5, -6, 3)$

15. $\vec{a_1} = (3, -3, 3);$ $\vec{a_2} = (1, -3, 2);$ $\vec{a_3} = (5, -9, 7);$
$\vec{b_1} = (4, 1, -2);$ $\vec{b_2} = (2, -3, 0);$ $\vec{b_3} = (3, 1, -2);$ $\vec{m} = (7, -1, -3)$

16. $\vec{a_1} = (2, 1, -1);$ $\vec{a_2} = (2, -3, 0);$ $\vec{a_3} = (1, 1, -1);$
$\vec{b_1} = (3, -2, -1);$ $\vec{b_2} = (1, 1, 5);$ $\vec{b_3} = (1, -4, 9);$ $\vec{m} = (6, -5, 3)$

17. $\vec{a_1} = (3, 3, 1);$ $\vec{a_2} = (2, -2, 1);$ $\vec{a_3} = (2, 1, 1);$
$\vec{b_1} = (-2, 3, 4);$ $\vec{b_2} = (-1, -1, -2);$ $\vec{b_3} = (0, 5, 8);$ $\vec{m} = (1, 0, 5)$

18. $\vec{a_1} = (1, -1, 7);$ $\vec{a_2} = (2, 3, -1);$ $\vec{a_3} = (3, 7, -9);$
$\vec{b_1} = (2, 1, 4);$ $\vec{b_2} = (1, -3, 8);$ $\vec{b_3} = (5, 0, 3);$ $\vec{m} = (0, -3, 1)$

19. $\vec{a_1} = (0, 3, 0);$ $\vec{a_2} = (1, -4, 2);$ $\vec{a_3} = (2, 3, 2);$
$\vec{b_1} = (1, -2, 3);$ $\vec{b_2} = (4, -4, 3);$ $\vec{b_3} = (6, -8, 9);$ $\vec{m} = (-3, 5, 1)$

20. $\vec{a_1} = (-1, 4, 2);$ $\vec{a_2} = (0, -5, 0);$ $\vec{a_3} = (2, 3, 2);$
$\vec{b_1} = (1, -1, 8);$ $\vec{b_2} = (2, -1, 5);$ $\vec{b_3} = (3, -2, -2);$ $\vec{m} = (-2, 3, 4)$

21. $\vec{a_1} = (4, 1, 5);$ $\vec{a_2} = (1, 3, 4);$ $\vec{a_3} = (-2, 2, 1);$
$\vec{b_1} = (-2, 1, -2);$ $\vec{b_2} = (1, -3, 5);$ $\vec{b_3} = (0, -5, 8);$ $\vec{m} = (5, -5, -1)$

22. $\overrightarrow{a_1}=(3, 3, -8)$; $\overrightarrow{a_2}=(1, 2, -5)$; $\overrightarrow{a_3}=(1, -1, 2)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2, 1, 0)$; $\overrightarrow{b_2}=(2, -4, 3)$; $\overrightarrow{b_3}=(-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{m}=(6, 0, 5)$

23. $\overrightarrow{a_1}=(3, 5, 8)$; $\overrightarrow{a_2}=(-2, 2, 1)$; $\overrightarrow{a_3}=(-1, 1, 10)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2, 0, -1)$; $\overrightarrow{b_2}=(3, -5, 4)$; $\overrightarrow{b_3}=(2, 0, 2)$; $\overrightarrow{m}=(3, 1, 0)$

24. $\overrightarrow{a_1}=(3, -1, 0)$; $\overrightarrow{a_2}=(3, -2, 1)$; $\overrightarrow{a_3}=(5, -2, 1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(4, 1, -3)$; $\overrightarrow{b_2}=(-1, 3, -1)$; $\overrightarrow{b_3}=(2, 7, 1)$; $\overrightarrow{m}=(11, -5, 2)$

25. $\overrightarrow{a_1}=(3, 2, -2)$; $\overrightarrow{a_2}=(1, 0, 1)$; $\overrightarrow{a_3}=(4, -1, 3)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1, -3, 4)$; $\overrightarrow{b_2}=(1, -2, -3)$; $\overrightarrow{b_3}=(-1, 4, -1)$; $\overrightarrow{m}=(13, 3, 2)$

26. $\overrightarrow{a_1}=(5, 1, 2)$; $\overrightarrow{a_2}=(0, -3, 1)$; $\overrightarrow{a_3}=(3, 8, 4)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2, 3, -8)$; $\overrightarrow{b_2}=(1, 2, 3)$; $\overrightarrow{b_3}=(4, 7, -2)$; $\overrightarrow{m}=(2, -10, 1)$

27. $\overrightarrow{a_1}=(9, 3, -4)$; $\overrightarrow{a_2}=(2, -1, 3)$; $\overrightarrow{a_3}=(7, 4, 1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1, -2, 7)$; $\overrightarrow{b_2}=(3, 1, -4)$; $\overrightarrow{b_3}=(5, -3, 10)$; $\overrightarrow{m}=(28, 16, 2)$

28. $\overrightarrow{a_1}=(5, -5, 8)$; $\overrightarrow{a_2}=(1, -5, 7)$; $\overrightarrow{a_3}=(4, 0, 1)$;
$\overrightarrow{b_1}=(2, 7, 8)$; $\overrightarrow{b_2}=(1, -3, -5)$; $\overrightarrow{b_3}=(4, 1, -2)$; $\overrightarrow{m}=(-6, 10, 2)$

29. $\overrightarrow{a_1}=(5, 6, 5)$; $\overrightarrow{a_2}=(3, -5, 2)$; $\overrightarrow{a_3}=(2, -1, 3)$;
$\overrightarrow{b_1}=(3, 1, -6)$; $\overrightarrow{b_2}=(1, -3, 2)$; $\overrightarrow{b_3}=(5, -5, 2)$; $\overrightarrow{m}=(6, -3, 9)$

30. $\overrightarrow{a_1}=(7, 3, -1)$; $\overrightarrow{a_2}=(-1, 3, 2)$; $\overrightarrow{a_3}=(6, 0, 3)$;
$\overrightarrow{b_1}=(1, 1, 4)$; $\overrightarrow{b_2}=(-2, 3, 1)$; $\overrightarrow{b_3}=(0, 5, 9)$; $\overrightarrow{m}=(4, -12, 10)$

Задача 8

Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить эту кривую.

1. $5x^2-8xy+5y^2-36x+36y+126=0$

2. $x^2+4xy+y^2+6x+6y-18=0$

3. $3x^2+10xy+3y^2-12x-12y+7=0$

4. $7x^2-2xy+7y^2-48x-48y+144=0$

5. $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y-148=0$

6. $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+55=0$

7. $3x^2+2xy+3y^2+14x-6y+15=0$

8. $5x^2+4xy+2y^2+20x+20y+14=0$

9. $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$

10. $2xy+4x+2y+3=0$

11. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

12. $25x^2-4xy+25y^2+54x-54y-567=0$

13. $5x^2+12xy+22x+12y-19=0$

14. $4x^2-24xy+11y^2+20x+10y-124=0$

15. $7x^2+24xy+38x+24y+175=0$

16. $x^2+6xy+y^2+6x+2y-3=0$

17. $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$

18. $5x^2+4xy+2y^2+10x+10y+6{,}5=0$

19. $6x^2-4xy+3y^2+14x+7y-5{,}25=0$

20. $23x^2+72xy+2y^2+25=0$

21. $29x^2+144xy+71y^2-40x+30y-50=0$

22. $9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0$

23. $3x^2-4xy+16x+12y-36=0$

24. $5x^2+4xy+8y^2-32x-54y+80=0$

25. $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$

26. $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$

27. $2x^2+6xy-6y^2+3x+y-\dfrac{121}{6}=0$

28. $x^2-6xy+y^2-4x-4y+12=0$

29. $3x^2+12xy+3y^2+6x-6y+3=0$

30. $13x^2+6xy+5y^2-x+3y-\dfrac{138}{5}=0$

Задача 9

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка и схематически изобразить эту поверхность.

1. $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz-108=0$

2. $3x^2+2y^2+4z^2-4xy+4xz-48=0$

3. $5x^2+y^2+3z^2+8xz-8yz-9=0$

4. $x^2+5y^2+3z^2-8xz+8yz-81=0$

5. $y^2-z^2+4xy-4xz-3=0$

6. $2x^2+11y^2+5z^2+4xy-20xz+16yz-36=0$

7. $7x^2+5y^2+6z^2+4xz-4yz-54=0$

8. $2x^2+5y^2+2z^2+4xy-8xz+4yz-12=0$

9. $-2x^2+y^2+z^2-4xy-4xz+8yz-24=0$

10. $17x^2+17y^2+11z^2+16xy-8xz-8yz-162=0$

11. $8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-144=0$

12. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-12=0$

13. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-10=0$

14. $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz-24=0$

15. $2x^2+2y^2+5z^2+2xy-15=0$

16. $3x^2+4y^2+3z^2+2xy+4xz+2yz-12=0$

17. $5x^2+4y^2+5z^2+2xy+4xz-2yz-70=0$

18. $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz-6=0$

19. $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz-6=0$

20. $5x^2+11y^2+2z^2+16xy-20xz+4yz-36=0$

21. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-36=0$

22. $3x^2+3y^2+4z^2+2xz+2yz-30=0$

23. $5x^2+5y^2-3z^2+8xy-9=0$

24. $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6=0$

25. $5x^2+3y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-12=0$

26. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz-27=0$

27. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6=0$

28. $6x^2+4y^2+5z^2+4xz-4yz-40=0$

29. $2x^2+y^2-4xy-4yz-8=0$

30. $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-6=0$

Методические указания к выполнению расчетного задания

Задача 1

Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера, выполнить проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 9 \\ 4x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение. Составим из коэффициентов при неизвестных главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычислим его одним из способов (метод треугольников или метод дополнений):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 48 - 4 - 8 = 42$$

Главный определитель системы отличен от нуля, значит, система совместна.

Вычислим вспомогательные определители, которые получаются из главного заменой соответствующих столбцов на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 72 - 6 - 36 = 26$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 54 + 12 - 48 - 36 - 108 + 8 = -118$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 9\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=18+72+8-24=74$$

Решение системы находится по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{118}{42}=-\frac{59}{21}$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{74}{42}=\frac{37}{21}$$

Проверка. Подставим найденное решение в систему уравнений:

$$3\cdot\frac{13}{21}-2\cdot\frac{59}{21}+\frac{37}{21}=-2 \qquad (-2=-2)$$

$$2\cdot\frac{13}{21}-\frac{59}{21}+6\cdot\frac{37}{21}=9 \qquad (9=9)$$

$$4\cdot\frac{13}{21}+2\cdot\frac{37}{21}=6 \qquad (6=6)$$

Задача 2

Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных Гаусса. Найти общее, частное, базисное решения системы:

$$\begin{cases}3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4\\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3\end{cases}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right\| \to$$

За базисную переменную рекомендуется выбирать ту неизвестную, коэффициент при которой равен единице (во избежание дробных коэффициентов). Оставим без изменения третье уравнение (строку), а за базисную переменную примем x_1. Воспользуемся элементарными преобразованиями, а именно: умножим третью строку на (-1) и сложим со второй, затем умножим третью же строку на (-3) и сложим с первой. Тогда x_1 останется только в третьем уравнении (строке):

$$\to\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & (1) & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right\| \to$$

Оставим без изменения первую строку, переменную x_3 примем за базисную и исключим ее из третьей строки (во вторую строку x_3 не входит):

$$\to\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & (1) & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right\| \to$$

Во второй строке переменную x_2 принимает за базисную и исключаем из остальных строк:

$$\to\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\|$$

В результате получаем систему с базисными переменными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 3 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad + x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad + x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$$

Выражая базисные переменные через остальные (их называют свободными переменными), получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_4 + x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 2x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

Давая свободным переменным произвольные значения, получаем множество частных решений, например:

$$\begin{matrix} x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 1 + 2 = 0 \\ x_2 = -1 - 1 + 4 = 2 \\ x_3 = 3 - 3 + 6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 1 + 1 = 1 \\ x_2 = -1 + 1 + 2 = 2 \\ x_3 = 3 + 3 + 3 = 9 \end{cases}$$

Частное решение, в котором все свободные переменные равны нулю, называют базисным решением:

$$\begin{matrix} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 0 + 0 = -1 \\ x_2 = -1 - 0 + 0 = -1 \\ x_3 = 3 - 0 + 0 = 3 \end{cases}$$

Задача 3

Выполнить действия с матрицами:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

Решение. Устанавливаем возможность выполнения указанных действий. Первая матрица имеет порядок 3×5, вторая 5×2. Умножение возможно, поскольку число столбцов первой матрицы равно числу строк второй; в результате умножения получается матрица порядка 3×2.

У второго произведения первая матрица имеет порядок 3×4, вторая 4×2, умножение возможно, итоговая матрица будет иметь порядок 3×2.

Сложение первого произведения со вторым также возможно, ибо оба произведения есть матрица 3×2.

Следовательно:

1) $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} [1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2)] & [1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1] \\ [(-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)] & [(-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1] \\ [0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot (-2)] & [0 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot 1] \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \\ -4 & -11 \end{Vmatrix}$$

2) $$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -1 \\ -5 & 6 \end{Vmatrix}$$

3) $$\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \\ -4 & -11 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -1 \\ -5 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} [-1+8] & [2+2] \\ [-4+0] & [7-1] \\ [-4-5] & [-11+6] \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 6 \\ -9 & -5 \end{Vmatrix}$$

Задача 4

Найти ранг матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Число линейно независимых строк матрицы равно четырем, следовательно, $rang = 4$.

Задача 5

Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы выполнить двумя способами: с помощью алгебраических дополнений и путем элементарных преобразований.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases}$$

Решение. В матричной форме систему линейных уравнений можно записать так: $AX = B$, где A – матрица коэффициентов системы; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов. Умножив слева обе части равенства $AX = B$ на A^{-1} (A^{-1} существует, если $\det A = \Delta \neq 0$), получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B;\; EX = A^{-1}B;\; X = A^{-1}B,$$

здесь E – единичная матрица.

Следовательно, чтобы найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными при помощи обратной матрицы, нужно матрицу, обратную матрице из коэффициентов системы, умножить на матрицу-столбец свободных членов. В результате получаем матрицу-столбец, которая и будет решением данной системы.

Найдем определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -9 & 9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 72$$

$\Delta = 72 \neq 0$, следовательно, матрица A обратима.

Первый способ вытекает из формулы, выражающей обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения для элементов данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 = 9;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(10-1) = 18;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=8+1=9;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-(10+6)=-16;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=5+3=8;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-(-2+2)=0;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-3=1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-(2+12)=-14;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=1+8=9.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{8} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{72}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{36}\\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}\end{Vmatrix}$$

Необходимо сделать проверку: $A\,A^{-1}=E$.

$$\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 5\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{1}{8} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{72}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{36}\\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}\end{Vmatrix}=$$

$$
=\begin{Vmatrix}
\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right) & \left(-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right) & \left(\frac{1}{72}-\frac{7}{18}+\frac{3}{8}\right)\\
\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{8}{9}-\frac{1}{9}\right) & \left(-\frac{1}{18}-\frac{7}{36}+\frac{1}{4}\right)\\
\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right) & \left(\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\right) & \left(-\frac{1}{72}+\frac{7}{18}+\frac{5}{8}\right)
\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}.
$$

Найдем решение системы $X=A^{-1}B$

$$
X=\begin{Vmatrix}
\frac{1}{8} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{72}\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{36}\\
\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}
\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}8\\15\\24\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}
\frac{8}{8}-\frac{30}{9}+\frac{24}{72}\\
\frac{8}{4}+\frac{15}{9}-\frac{168}{36}\\
\frac{8}{8}+0+\frac{24}{8}
\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-2\\-1\\4\end{Vmatrix}
$$

$$x_1=-2;\ x_2=-1;\ x_3=4.$$

Второй способ основан на элементарных преобразованиях вспомогательной матрицы, которая получается путем приписывания к данной матрице единичной матрицы того же порядка. Схематически этот процесс записывается так:

$$\left\|A\right|E\left\|\Rightarrow\right\|E\left|A^{-1}\right\|.$$

Решение:

$$
\left\|\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\
-4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right\|\Rightarrow\left\|\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\
0 & 9 & 14 & 4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right\|\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow\left\|\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\
0 & 9 & 14 & 4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}
\end{array}\right\|\Rightarrow\left\|\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 0 & \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{8}\\
0 & 9 & 0 & \frac{9}{4} & 1 & -\frac{7}{4}\\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}
\end{array}\right\|\Rightarrow
$$

$$\Rightarrow\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{72} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right\|.$$

Задача 6

Средствами векторной алгебры найти:

1) объем пирамиды с вершинами $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$;

2) длину ребра $A_2\ A_3$;

3) площадь грани $A_1\ A_2\ A_3$;

4) угол между ребрами $A_1\ A_2$ и $A_1\ A_4$.

Даны координаты вершины пирамиды $A_1(5, 1, -4)$; $A_2(1, 2, -1)$; $A_3(3, 3, -4)$; $A_4(2, 2, 2)$.

Решение. Построим схематически данную пирамиду (рис.1).

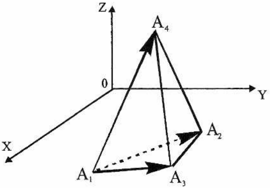

Рис. 1

1. Рассмотрим векторы $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ и $A_1 A_4$. Зная координаты точек, вычислим координаты этих векторов:

$$A_1A_2 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) = (-4, 1, 3)$$

$$A_1A_3 = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1) = (-2, 2, 0)$$

$$A_1A_4 = (x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1) = (-3, 1, 6)$$

Объем пирамиды равен модулю одной шестой доли смешанного произведения векторов $\overline{A_1\,A_2}$, $\overline{A_1\,A_3}$, $\overline{A_1\,A_4}$.

$$V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6}(-24) \right| = 4$$

2. Найдем длину ребра $A_2\,A_3$:

$$\left| \overline{A_2A_3} \right| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

3. Вычислим площадь грани $A_1\,A_2\,A_3$.

Площадь $\Delta\ A_1\,A_2\,A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1\,A_2}$ и $\overline{A_1\,A_3}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1\,A_2}$ и $\overline{A_1\,A_3}$, совпадает с модулем векторного произведения $\overline{A_1\,A_2} \times \overline{A_1\,A_3}$, а поэтому площадь $\Delta\ A_1\,A_2\,A_3$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left| \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| 6\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} \right| = 3\sqrt{3}$$

4. Найдем угол между ребрами $A_1\,A_2$ и $A_1\,A_4$. Угол φ между векторами $\overline{A_1\,A_2}$ и $\overline{A_1\,A_4}$ вычислим по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_4}\right|} = \frac{(-4)\cdot(-2) + 1\cdot 2 + 3\cdot 0}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 22^2 + 0^2}} = \frac{10}{4\sqrt{13}} \approx 0{,}69$$

По таблицам $\varphi \approx 46^\circ 20'$.

Задача 7

Даны две системы векторов:

1) $\overrightarrow{a_1}=(4,-5,1)$, $\overrightarrow{a_2}=(1,-1,3)$, $\overrightarrow{a_3}=(1,-2,-2)$;

2) $\overrightarrow{b_1}=(-2,3,5)$, $\overrightarrow{b_2}=(-1,3,-4)$, $\overrightarrow{b_3}=(-5,9,6)$.

Определить, какая из этих систем образует базис; разложить вектор $m=(3,-2,7)$ по этому базису.

Решение. Используем признак линейной независимости для векторов с числовыми координатами. Найдем определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix}=1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=15-9=6\neq 0.$$

$\Delta\neq 0$, следовательно, система векторов линейно независима и образует базис.

Вычислим определитель для второй системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & 9 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & -6 \\ 13 & 0 & 26 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 13 & 26 \end{vmatrix}=(-1)(-3)(13)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Система линейно зависима.

Проведем разложение вектора $m=(3,-2,7)$ по базису $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$.

Запишем разложение вектора $\overrightarrow{m}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}$ в координатной форме:

$$(3,-2,7)=\lambda_1(4,-5,1)+\lambda_2(1,-1,3)+\lambda_3(1,-2,-2).$$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ -5\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = -2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 7 \end{cases}$$

Систему можно решать любым методом. Решим методом последовательного исключения неизвестных:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -11 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{array}\right\|$$

$$\lambda_1 = \frac{7}{6},\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = -\frac{13}{6}$$

Итак, координаты вектора m в новом базисе будут $\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{13}{6}\right)$, а разложение вектора m по базису имеет вид $\overrightarrow{m} = \frac{7}{6}\overrightarrow{a_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_2} - \frac{13}{6}\overrightarrow{a_3}$.

Задача 8

Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$$

и построить эту кривую.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы $5x^2 + 6xy + 5y^2$

$$A = \left\|\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{array}\right\|.$$

Используем собственные нормированные ортогональные векторы:

$$\vec{e_1}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}-\frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \vec{e_2}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}-\frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

для построения матрицы преобразования S:

$$S=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}.$$

Чтобы сохранить взаимную ориентацию новых координатных осей, на матрицу S налагают дополнительное условие $\Delta_s=1$ (если $\Delta_s=-1$, то достаточно поменять столбцы местами и сменить соответственно нумерацию у характеристических чисел и собственных векторов).

Квадратичная форма в новой системе координат имеет вид:

$$2x^{1^2}+8y^{1^2}.$$

Преобразуем линейную функцию данного уравнения $-16x-16y-16$

$$x=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}};\; y=-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}};$$

$$-16\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)-16\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)-16=-16\sqrt{2}y'-16.$$

В системе координат $X'OY'$ уравнение кривой имеет вид:

$$2x^{1^2}+8y^{1^2}-16\sqrt{2}y^1-16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^{1^2}+8\left(y^1-\sqrt{2}\right)^2-32=0\Rightarrow x^{1^2}+4\left(y^1-\sqrt{2}\right)^2-16=0.$$

Совершаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x''=x' \\ y''=y'-\sqrt{2} \end{cases}$$

В результате уравнение кривой принимает вид: $\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{4}=1$. Это уравнение эллипса. В системе координат строим векторы e_1 и e_2 и определяем направление осей координат $X'OY'$. Центр эллипса в системе $X'OY'$ в точке $O'\ (0, \sqrt{2})$ (рис.2).

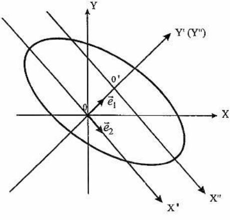

Рис. 2

Задача 9

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка

$$20x^2+17y^2+8z^2+28xy-8xz-20yz-144=0$$

и схематически изобразить эту поверхность.

Решение. В нашем примере матрица квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 20 & 14 & -4 \\ 14 & 17 & -10 \\ -4 & -10 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Характеристические числа матрицы определяются из уравнения:

$$\begin{Vmatrix} 20-\lambda & 14 & -4 \\ 14 & 17-\lambda & -10 \\ -4 & -10 & 8-\lambda \end{Vmatrix}=0$$

которое приводится к виду $\lambda^3-45\lambda^2+324\lambda=0$.
Отсюда $\lambda_1=0,\ \lambda_2=36,\ \lambda_3=9$.

При $\lambda_1 = 0$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 20u_1 + 14u_2 - 4u_3 = 0 \\ 14u_1 + 17u_2 - 10u_3 = 0 \\ -4u_1 - 10u_2 + 8u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10u_1 + 7u_2 - 2u_3 = 0 \\ 14u_1 + 17u_2 - 10u_3 = 0 \\ -2u_1 - 5u_2 + 4u_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем ранг этой системы:

$$\begin{Vmatrix} 10 & 7 & -2 \\ 14 & 17 & -10 \\ -2 & -5 & 4 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 10 & 7 & -2 \\ -36 & -18 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow r = 2.$$

Второе и третье уравнения являются линейно зависимыми; отбросим второе уравнение:

$$\begin{cases} 10u_1 + 7u_2 - 2u_3 = 0 \\ -2u_1 - 5u_2 + 4u_3 = 0 \end{cases} \quad u_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 10u_1 + 7u_2 = 2 \\ -2u_1 - 5u_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 = 1, \quad u_1 = -\frac{1}{2}$$

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 0$, $\overline{r_1} = \left(-\frac{1}{2}\alpha, \alpha, \alpha\right)$. Нормируем вектор $\overline{e_1} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Находим собственный вектор, соответствующий второму характеристическому числу $\lambda_2 = 36$:

$$\begin{cases} -16u_1' + 14u_2' - 4u_3' = 0 \\ 14u_1' - 19u_2' - 10u_3' = 0 \\ -4u_1' + 10u_2' - 28u_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8u_1' + 7u_2' - 2u_3' = 0 \\ 14u_1' - 19u_2' - 10u_3' = 0 \\ 2u_1' + 5u_2' + 14u_3' = 0 \end{cases}$$

Определим ранг системы:

$$\begin{Vmatrix} -8 & 7 & -2 \\ 14 & -19 & -10 \\ 2 & 5 & 14 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} -8 & 7 & -2 \\ 54 & -54 & 0 \\ -54 & 54 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \begin{cases} -8u_1' + 7u_2' - 2u_3' = 0 \\ 2u_1' + 5u_2' + 14u_3' = 0 \end{cases}$$

$$u_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -8u_1' + 7u_2' = 2 \\ 2u_1' + 5u_2' = -14 \end{cases} \Rightarrow u_1' = -2, \; u_2' = -2\,.$$

Собственный вектор $\overrightarrow{r_2}=(-2\beta,-2\beta,\beta)$. Нормируем собственный вектор $\overrightarrow{e_2}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_3=9$:

$$\begin{cases} 11u_1''+14u_2''-4u_3''=0 \\ 14u_1''+8u_2''-10u_3''=0 \\ -4u_1''-10u_2''-u_3''=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11u_1''+14u_2''-4u_3''=0 \\ 7u_1''+4u_2''-5u_3''=0 \\ 4u_1''+10u_2''+u_3''=0 \end{cases}$$

Определим ранг системы:

$$\begin{Vmatrix} 11 & 14 & -4 \\ 7 & 4 & -5 \\ 4 & 10 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 27 & 54 & 0 \\ 27 & 54 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow r=2 \Rightarrow \begin{cases} 7u_1''+4u_2''-5u_3''=0 \\ 4u_1''+10u_2''+u_3''=0 \end{cases}$$

$$u_3=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 7u_1''+4u_2''=5 \\ 4u_1''+10u_2''=-1 \end{cases} \;\Rightarrow\; u_1=1,\; u_2=-\frac{1}{2}$$

Собственный вектор $\overrightarrow{r_3}=\left(\gamma,-\frac{1}{2}\gamma,\gamma\right)$. Нормируем собственный вектор $\overrightarrow{e_3}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Полученные собственные нормированные векторы попарно ортогональны: $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}=0$; $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3}=0$; $\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}=0$

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$S=\begin{Vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}, \qquad \Delta_S=1 .$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}x' + \dfrac{2}{3}y' + \dfrac{2}{3}z' \\ y = \dfrac{2}{3}x' - \dfrac{2}{3}y' - \dfrac{1}{3}z' \\ z = \dfrac{2}{3}x' + \dfrac{1}{3}y' + \dfrac{2}{3}z' \end{cases}$$

Квадратичная форма в новой системе координат $X'OY'$ имеет вид $36y'^2 + 9z'^2$. В результате уравнение поверхности будет $\dfrac{y'^2}{4} + \dfrac{z'^2}{16} = 1$. Это уравнение эллиптического цилиндра с образующими, параллельными оси OX'. В системе координат XOY строим собственные нормированные векторы $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}$. Определяем направление осей системы координат $X'OY'$, выполняем построение поверхности $\dfrac{y'^2}{4} + \dfrac{z'^2}{16} = 1$ (рис. 3).

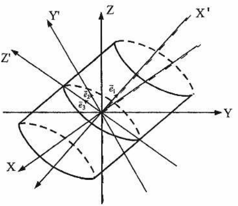

Рис. 3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – М., 1997. – 304.

2. Гусак, А.А. Высшая математика / А.А. Гусак. – Минск, 1998. – Т.1-2.

3. Кремер, П.Ш. Высшая математика для экономистов / П.Ш. Кремер. – М., 1999. – 326.

4. Щипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М., 1998.– 312 с.

5. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей / М.С. Красс. – М., 1999.

6. Бугров, Я.С.. Высшая математика / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. – Т.1-2. – 352.