

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Д.С. ЛЕЖИН, Д.К. НОВИКОВ, Ф.В. ПАРОВАЙ*

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ  
«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ  
И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК»

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве практикума для студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов и специальности 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей

© Самарский университет, 2019

ISBN 978-5-7883-1443-3

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2019

УДК 621.431.75(075)

ББК 39.55я7

Л 404

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. В. Б и р ю к  
д-р техн. наук, проф. М. К. Л е о н т ь е в

*Лежин, Дмитрий Сергеевич*

**Лабораторный практикум «Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок»:** практикум / *Д.С. Лежин, Д.К. Новиков, Ф.В. Паровой.* – Электрон. текст. дан. (5,5 Мб). – Самара: Издательство Самарского университета, 2019. – 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). – Систем. требования: PC, процессор Pentium, 160 МГц; оперативная память 32 Мб; на винчестере 16 Мб; Microsoft Windows XP/Vista/7; разрешение экрана 1024x768 с глубиной цвета 16 бит; DVD-ROM 2-х и выше, мышь; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с титул. экрана.

**ISBN 978-5-7883-1443-3**

Практикум предназначен для выполнения лабораторных работ по курсу динамики и прочности энергетических установок для студентов, изучающих авиационные двигатели и энергетические установки, а также ракетные двигатели.

Практикум содержит работы по динамическому исследованию как отдельных основных элементов газотурбинного двигателя: лопатки, диска, так и узла в целом – работы, посвященные критическим скоростям вращения вала в системе «ротор – корпус» и крутильным колебаниям валов. Одна из работ данного практикума посвящена тензометрированию. Для расширения кругозора студентов в работах при решении схожих динамических исследований используются различные способы возбуждения конструкций и различные средства регистрации. Каждая из работ подкреплена расчетным исследованием. Авторы умышленно вывели за рамки данного практикума расчетные исследования с использованием метода конечных элементов, который широко используется при подготовке профильных специалистов конструкторов и прочнистов. В работах приводятся хорошо зарекомендовавшие себя на практике инженерные методы расчета, дающие достаточно точные результаты, знание которых будет полезно как специалистам непрофильных специальностей, проходящим обучение на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов, так и профильным конструкторам и прочнистам.

Разработано на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов.

УДК 621.431.75(075)

ББК 39.55я7

Редактор А.С. Никитина  
Компьютерная верстка: А.С. Никитина

Подписано для тиражирования 21.11.2019.  
Объем издания 5,5 Мб.  
Количество носителей 1 диск. Тираж 10 экз.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Изд-во Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
Лабораторная работа № 1	
Критические скорости вращения вала в системе «ротор – корпус» .....	6
Лабораторная работа № 2	
Экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний лопатки осевого компрессора .....	18
Лабораторная работа № 3	
Определение первых собственных частоты и формы изгибных колебаний лопатки компрессора .....	27
Лабораторная работа № 4	
Колебания диска.....	45
Лабораторная работа № 5	
Основы тензометрии двигателей летательных аппаратов .....	59
Лабораторная работа № 6	
Крутильные колебания коленчатых валов .....	88

## **ВВЕДЕНИЕ**

Поузловая доводка двигателей летательных аппаратов (ДЛА) является важным этапом создания двигателя, способствующим повышению безопасности полетов и улучшению параметров надежности, экономичности, экологичности изделий, сокращению продолжительности доводки ДЛА.

Одним из частых и опасных видов отказов ДЛА является вибрационное разрушение лопаток компрессоров и турбин. Это определяет актуальность изучения различных подходов к оценке вибрационного состояния лопаток и методов этой оценки.

В настоящем практикуме собраны указания к лабораторному практикуму по динамике элементов и узлов ДЛА.

Постановка лабораторных работ по динамике на кафедре конструкции и проектирования ДЛА выполнялась усилиями многих преподавателей кафедры. Основы указаний к отдельным лабораторным работам создали А.И. Белоусов, В.Н. Бузицкий, В.П. Иванов, В.И. Костин, Д.К. Новиков, Е.А. Панин, В.П. Ржевский, А.И. Ермаков, М.К. Сидоренко, В.П. Филекин, В.А. Фролов, Д.Е. Чегодаев. Лабораторные установки создавались при участии сотрудников кафедры А.И. Онуфриенко, В.Г. Шахтарина и др. Именно их усилиями была заложена основа предлагаемых работ в части идей лабораторных установок, каждая из которых подкреплялась расчетной моделью и методом расчета. В предлагаемом виде лабораторные установки модернизированы с использованием современного оборудования, однако основные идеи, заложенные в каждую работу, полностью сохранены.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### КРИТИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА В СИСТЕМЕ «РОТОР – КОРПУС»

**Цель работы:** исследование динамики одномассового ротора и системы «ротор – корпус» с использованием расчетного метода динамических жесткостей.

Требование снижения массы двигателей летательных аппаратов приводит к тому, что масса и изгибная жесткость корпусов становятся соизмеримыми с массой и жесткостью ротора [1]. Поэтому на режимах работы вблизи критических частот вращения в колебания вовлекаются массы ротора и корпуса. Расчет критических скоростей роторов в предположении абсолютной жесткости опор приводит к существенному расхождению с действительными значениями. Только рассмотрение сложной системы «ротор – корпус» дает достаточно удовлетворительные результаты при расчетном определении резонансных режимов.

#### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Основу экспериментальной установки составляет механическая часть (рис. 1). Она оснащена первичными преобразователями, осуществляющими измерение параметров в ходе эксперимента. Вспомогательное оборудование, обеспечивающее функционирование механической части и первичных преобразователей, закреплено на стеновых панелях методом открытого монтажа для большей наглядности (рис. 2, с. 8). Управление установкой, сбор и обработку параметров осуществляет компьютер промышленного типа.

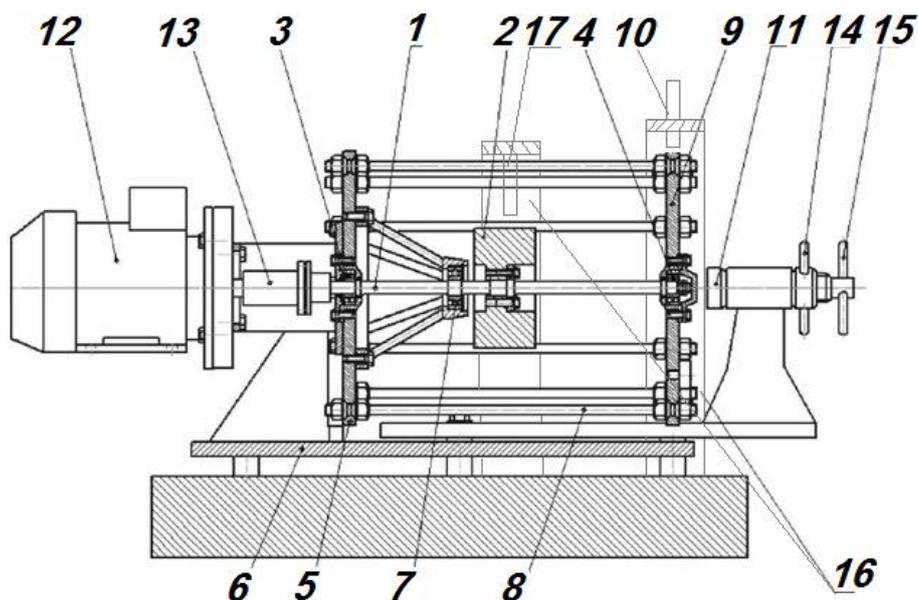


Рис. 1. Механическая часть экспериментальной установки:

1 – вал; 2 – диск ротора; 3 – подшипник жесткой опоры; 4 – подшипник податливой опоры; 5 – корпус жесткой опоры; 6 – станина; 7 – страховочная опора; 8 – шпилька соединения подвижной и неподвижной опор; 9 – корпус податливой опоры; 10 – вихретоковые пробники (в вертикальной и горизонтальной плоскостях) податливой опоры; 11 – стопорное приспособление; 12 – электродвигатель; 13 – муфта соединения электродвигателя с ротором; 14 – контргайка; 15 – подающий винт; 16 – кронштейны крепления вихретоковых датчиков; 17 – вихретоковые пробники (в вертикальной и горизонтальной плоскостях) диска ротора

Техническим объектом эксперимента (рис. 1) является ротор, состоящий из вала 1 и диска 2 массой  $m_1$ . Вал опирается на два подшипника 3 и 4. Подшипник 3 расположен в жесткой опоре 5, подшипник 4 – в податливой 9, которая с помощью стопорного приспособления 11 может быть превращена в жесткую.

Податливая опора 9 представляет собой диск, в центре которого смонтирован самоустанавливающийся подшипник 4. Диск подвешен консольно на шпильках 8, обеспечивающих податливость опоры. Для измерения перемещений опоры в плоскости, перпендикулярной оси вращения вала, в вертикальном и горизонтальном направлениях на кронштейне 16 опоры смонтированы пробники 10. Опора 9, как отмечено выше, может быть закреплена с помощью стопорного приспособления 11. В этом случае сложная система «ротор – корпус» может рассматриваться как одномассовая на двух жестких опорах, так как масса диска 2 существенно превышает массу вала 1.

Перемещения диска 2 в ходе эксперимента контролируются двумя пробниками 17 в вертикальном и горизонтальном направлениях, установленными на кронштейне 16.

Опора 9 имеет в зоне фиксирования специальные посадочные поверхности, которые используются также для установки демпферов различных типов.

Вращение вала осуществляется асинхронным электродвигателем 12, ротор которого связан с валом через упругую муфту 13.

Электродвигатель подключен к электрической сети через частотный преобразователь (инвертор) 1 (рис. 2). Частотный преобразователь позволяет осуществлять плавный запуск, изменение частоты вращения, регулируемые разгон и торможение, поддержание частоты вращения электродвигателя.

Метод регулирования скорости вращения асинхронного двигателя заключается в том, что, изменяя с помощью частотного преобразователя частоту  $f_1$  питающего напряжения электродвигателя при неизменном числе пар полюсов  $p$  в статоре двигателя, можно в соответствии с выражением

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_1}{p}$$

изменять угловую скорость магнитного поля статора, а соответственно, и частоту вращения ротора.

Частотные преобразователи находят очень широкое применение.

Управление электродвигателем через частотный преобразователь может осуществляться со специального дистанционного пульта (см. поз. 3 на рис. 2) либо от компьютера с использованием промышленной сети стандарта RS-485.

Для контроля амплитуд колебаний на податливой опоре и на диске ротора в двух плоскостях используются вихретоковые датчиковые системы.

Вихретоковые датчики предназначены для бесконтактного измерения вибрации, перемещения и частоты вращения электропроводящих объектов. Они применяются для диагностики состояния промышленных турбин, компрессоров, электромоторов. Наиболее часто объектом контроля является осевое смещение и радиальная вибрация вала ротора относительно корпуса. Вихретоковые датчиковые системы состоят из бесконтактных вихревых пробников 10 и 17 (см. рис. 1), драйверов (см. рис. 2: 6 и 7 – для ротора и 8 и 9 – для податливой опоры) и удлинительных кабелей.

Вихревой пробник представляет собой металлический зонд с диэлектрическим наконечником. В торце диэлектрического наконечника вихревого пробника находится катушка индуктивности. С помощью коаксиального удлинительного кабеля пробник подключается к драйверу. Драйвер представляет собой электронный блок, который вырабатывает сигнал возбуждения пробника и осуществляет выделение информативного параметра. Драйвер обеспечивает возбуждение электромагнитных колебаний в катушке, в результате чего возникает электромагнитное поле, которое взаимодействует с материалом контролируемого объекта. Если материал обладает электропроводностью, на его поверхности наводятся вихревые токи, которые, в свою очередь, изменяют параметры катушки – ее активное и индуктивное

сопротивление. Параметры изменяются при изменении зазора между контролируемым объектом и торцом датчика.

Драйвер преобразует эти изменения в электрический сигнал, осуществляет его линейризацию и масштабирование. Выходным сигналом драйвера является электрический сигнал, пропорциональный расстоянию от торца вихревого пробника до контролируемого объекта.

Вихретоковые датчики обладают хорошим частотным откликом, т.е. реакцией на изменение расстояния между торцом пробника и объектом контроля. Частотный диапазон датчиков может достигать 0–10 кГц. При этом неравномерность амплитудно-частотной характеристики не превышает 0,5 дБ. Входным параметром вихретокового датчика является величина зазора между торцом пробника и электропроводящим объектом. Величина измеряемого зазора составляет несколько миллиметров и зависит от диаметра катушки, заключенной в торце диэлектрического наконечника. Выходной сигнал, пропорциональный измеряемому зазору, может быть представлен в виде напряжения, тока или в цифровом формате (определяется типом системы наблюдения).

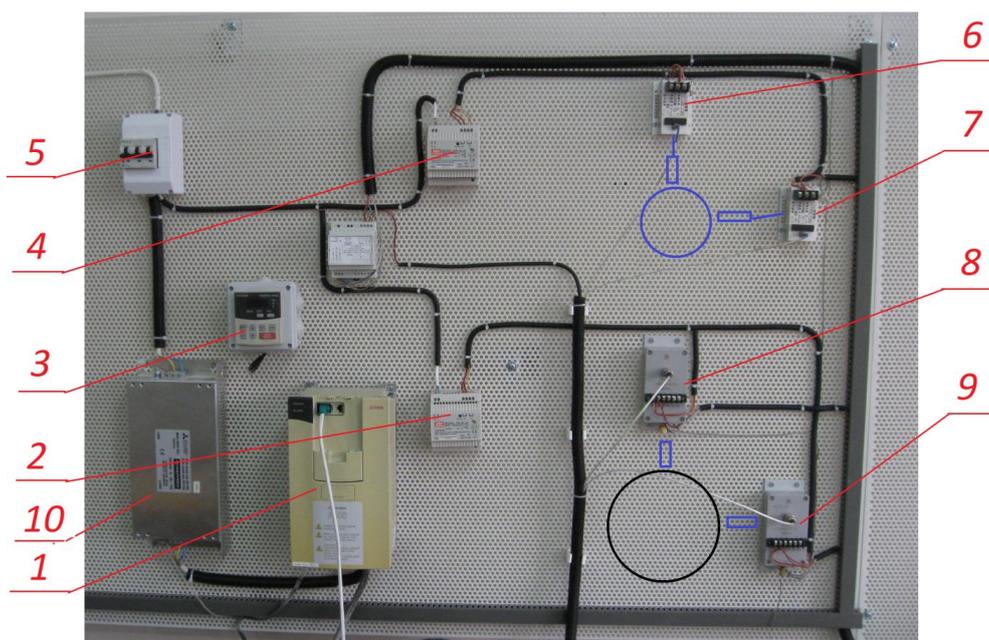


Рис. 2. Монтаж вспомогательного оборудования экспериментальной установки:

1 – частотный преобразователь; 2 – источник питания вихретоковых датчиков податливой опоры; 3 – дистанционный пульт управления инвертором; 4 – источник питания вихретоковых датчиков ротора; 5 – автомат включения экспериментальной установки; 6 и 7 – драйверы вихретоковых датчиков ротора; 8 и 9 – драйверы вихретоковых датчиков податливой опоры; 10 – фильтр защиты от помех инвертора

Управление экспериментальной установкой и сбор параметров с вихретоковых датчиков систем осуществляется с помощью промышленного компьютера. Интерфейс программы представлен на рис. 3.

Экран интерфейса разделен на три части: 1, 2 и 3.

Верхняя часть экрана представляет собой селектор выбора режима работы установки (автоматический, ручной или режим настройки) (часть *a* на рис. 3). В зависимости от выбранного режима изменяется интерфейс этой части. Экспериментальное исследование в данной работе выполняется на ручном режиме, поэтому на рис. 3 отображен именно этот режим. Слева (часть *b*) расположены кнопки запуска и остановки электродвигателя, а также кнопка выбора направления вращения. По умолчанию инвертор запрограммирован на режимы разгона и выбега с заданной скоростью. Максимальная частота вращения ограничена 60 Гц. Раз-

гон от нуля до этой частоты осуществляется за 20 секунд при нажатии кнопки «Пуск». Этого времени достаточно, чтобы провести наблюдение резонансов и измерения. Для более детального исследования предусмотрена возможность произвольной установки частоты вращения с помощью верньера рядом с кнопками. В правой части *в* приведены осциллограммы измерения вихретоковых датчиков, перегруппированные по признаку их расположения (на одной приведены результаты с двух горизонтальных датчиков, на другой – с вертикальных). Сигнал на этих осциллограммах отслеживается по времени. Это дает наглядность при сравнении амплитудных и фазовых характеристик колебаний ротора и подвижной опоры. Под осциллограммами приведена анимированная форма упругой линии валопровода (часть *г*). Она получается пересчетом значений четырех вихретоковых датчиков по направлению отклонения и максимальной амплитуде (проводится пересчет из декартовой в полярную систему координат и сравнение угловых отклонений точек, которые как раз и определяют фазовое смещение).

В части экрана 2 представлена диаграмма АЧХ (*д*), которая получается при проходе ротором всего рабочего диапазона частот 0–60 Гц (шкала абсцисс) с одновременным сбором показаний всех четырех вихретоковых датчиков, пересчитываемых в амплитудные значения (шкала ординат). По этой оси поддерживается автомасштабирование. Текущее значение скорости вращения ротора выделяется красной вертикальной стрелкой.

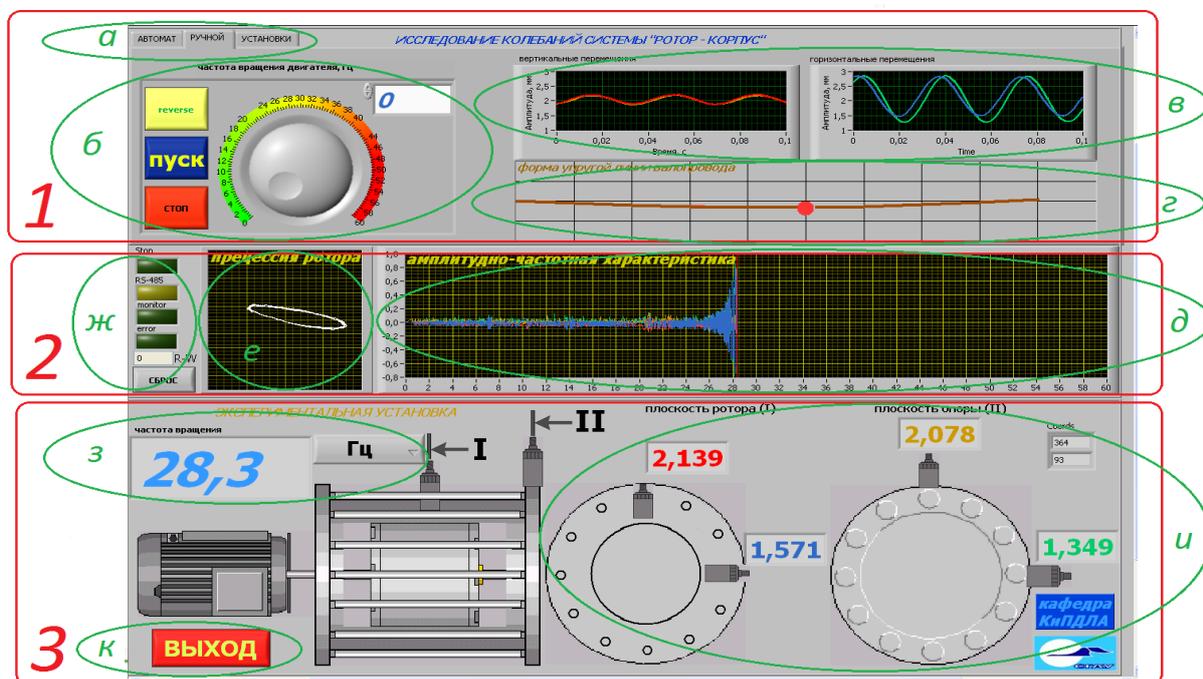


Рис. 3. Экран интерфейса экспериментальной установки

Диаграмма левее АЧХ (*е*) отображает прецессию ротора.

В самой левой области части *ж* экрана 2 представлены индикаторы, необходимые для диагностирования экспериментальной установки.

В нижней части 3 слева (*з*) представлена схема установки с индикатором частоты вращения электродвигателя и кнопкой выбора единиц измерения частоты (Гц или об/мин). Справа приведено мнемоническое изображение плоскостей размещения вихретоковых датчиков *I* и *II* с расположенными рядом с каждым из них индикатором текущих показаний (*и*). Все датчики опрашиваются одновременно с частотой 20 кГц, что дает возможность исследовать фазовые характеристики.

В нижней левой зоне части 3 расположена кнопка *к* выхода из программы.

## **2. МЕТОД ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ**

Экспериментальное определение собственных частот описанной системы в данной работе будет проводиться резонансным методом. Этот метод заключается в поиске резонансов системы. Как известно, резонанс – это резкое возрастание амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты с частотой вынуждающей силы.

Изменяя частоту вынуждающей силы (и контролируя при этом ее значение), требуется измерять амплитуды колебаний характерных элементов системы. В момент резкого возрастания амплитуд (т.е. в момент резонанса), как следует из определения, частота собственных колебаний равна частоте вынуждающей силы (которую мы контролируем). Следует отметить, что это характерно лишь для линейных систем.

В нелинейных системах источником резонанса могут быть как основная вынуждающая частота (ее называют оборотной частотой), так и дополнительные гармоники более высокого порядка. Роторные системы могут вести себя как линейно, так и нелинейно.

Причиной вибрации с оборотной частотой является несовпадение центров тяжести отдельных сечений валопровода с линией, вокруг которой происходит его вращение. Это несовпадение может быть либо из-за отклонения центра тяжести отдельного сечения от линии геометрической оси, либо из-за смещения отдельных, даже уравновешенных сечений, относительно оси вращения (вследствие изгиба вала). Неуравновешенность ротора (небаланс из-за недостаточной балансировки ротора, при его изготовлении, ремонте, замене лопаток, бандажей и пр.) приводит к появлению центробежной силы.

Небаланс ротора является одним из основных источников внешних сил в роторных установках.

Когда частота вращения ротора приблизится к собственной частоте роторной системы, амплитуда колебаний ротора увеличится. На собственной частоте ротора наступит резонанс (который также называют критической скоростью), а амплитуда колебаний достигнет максимального значения, если в рассматриваемой системе пренебречь демпфированием. По мере ухода скорости агрегата за собственную частоту роторной системы амплитуда будет уменьшаться (на диаграмме АЧХ на рис. 3, часть  $\delta$  виден подход к первому резонансу).

Роторные системы ДЛА (турбокомпрессоры ГТД, ТНА ЖРД и др.) могут работать на частотах как до первого резонанса, так и за первым, вторым и третьим резонансами.

Если рабочая частота вращения ротора  $n_{\text{раб}} > n_{\text{кр}}$ , то вал (ротор) называют гибким, а если  $n_{\text{раб}} < n_{\text{кр}}$ , то вал (ротор) называют жестким.

Большие амплитуды колебаний на резонансе порождают опасность больших напряжений в роторе, а также контакта между ротором и статором, приводящего к сложным последствиям (возможным возгоранию, взрывам, ускоренному изнашиванию уплотнений и др.). Поэтому для каждой роторной системы очень важно знать ее собственные частоты, четко регламентировать время работы на резонансных режимах и внедрять мероприятия по уменьшению амплитуд колебаний на резонансных режимах.

Следовательно, обеспечение работоспособности ротора при проходе резонансов при пуске или останове является важной проблемой.

## **3. МЕТОД РАСЧЕТА. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТЕНДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ**

Для расчетного определения критических скоростей сложной системы широко используется метод динамических жесткостей. Этот метод позволяет провести частотный анализ сложной механической системы, если известны динамические жесткости отдельных ее частей.

Динамической жесткостью называется значение внешней гармонической нагрузки, приложенной к системе и вызвавшей единичную гармоническую деформацию какой-либо точки системы.

Под нагрузкой следует понимать как силу, так и момент, а под единичной деформацией – как линейное перемещение, так и угол поворота.

Динамическая жесткость, как и статическая, имеет размерность [кг/см]. Величина, обратная динамической жесткости, называется динамической податливостью. Ее размерность [см/кг]. Основной особенностью динамической жесткости, отличающей ее от статической, является зависимость от частоты колебаний системы. В этом можно убедиться, если рассмотреть динамическую жесткость простейшей системы – массы  $m$ , опертой на пружину с жесткостью  $c$  (рис. 4) [1].

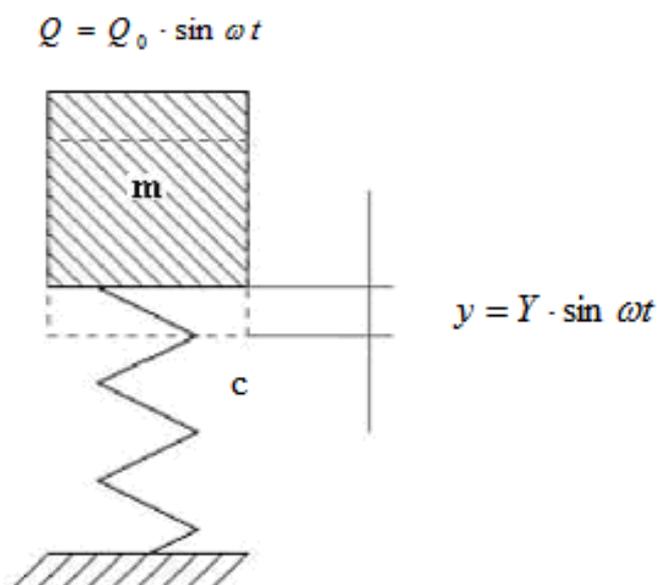


Рис. 4. К определению динамической жесткости массы, опертой на пружину

Пусть под действием гармонической силы  $Q = Q_0 \sin \omega t$  масса  $m$  получает перемещение  $y = Y \sin \omega t$ .

Здесь  $Q_0$  и  $Y$  – амплитуды силы и перемещения,  $\omega$  – угловая частота,  $t$  – время. Тогда согласно принципу Даламбера для равновесия системы сумма сил

$$Q - m y'' - c y = 0 \quad (1)$$

или

$$Q_0 + m Y \omega^2 - c Y = 0, \quad (2)$$

откуда

$$Y = \frac{Q_0}{c - m \omega^2}$$

Тогда динамическая жесткость массы, опертой на пружину,

$$k = \frac{Q}{y} = \frac{Q_0}{Y} = c - m \omega^2. \quad (3)$$

Видно, что с изменением частоты  $\omega$  динамическая жесткость изменяется, и при

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_0 \quad (4)$$

динамическая жесткость системы равна нулю, амплитуда колебаний при этом имеет бесконечно большое значение.

Из равенства (4) следует, что динамическая жесткость равна нулю, когда частота колебаний равна собственной частоте  $\omega_0$ .

Для определения динамической жесткости сложных систем их разбивают на отдельные, не связанные между собой простые части. Вместо отброшенных частей к каждой простой системе прикладывают амплитудные значения заменяющих их усилий.

Суммируя динамические жесткости двух смежных простых систем и приравнявая суммарную жесткость к нулю, находят частоты возбуждения, которые численно равны собственным частотам сложной рассматриваемой системы.

Определим собственную частоту экспериментальной установки, общий вид которой приведен на рис. 1. Расчетная схема ее представлена на рис. 5. Введены обозначения:

$m_1$  – масса вращающегося диска;

$m_2$  – масса упругой опоры.

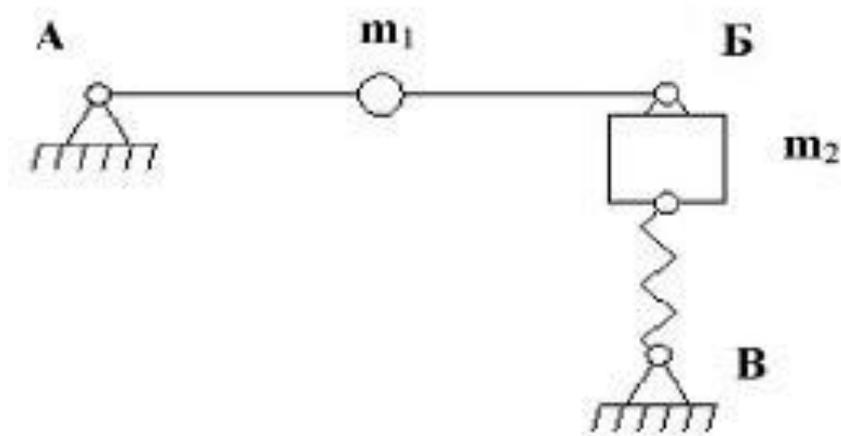


Рис. 5. Расчетная схема установки

Будем определять динамическую жесткость системы в точке Б. Для этого по точке Б разделим систему на две отдельные части (рис. 6).

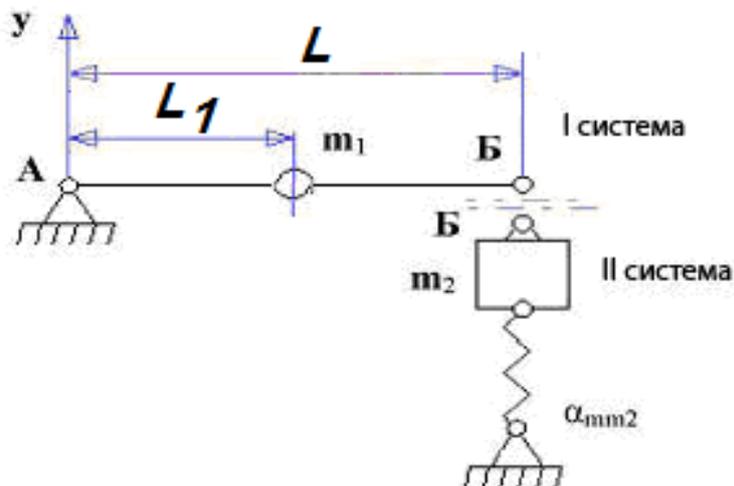


Рис. 6. К определению динамической жесткости системы в точке Б

Определим динамическую жесткость первой системы в точке **Б**. Статическая жесткость этой системы в точке равна нулю, так как вал может свободно поворачиваться в опоре **А**. Для определения динамической жесткости первой системы заставим ее совершать вынужденные колебания, задав вынужденное гармоническое перемещение точке **Б** с амплитудой  $Y_B$  (рис. 7 а). Если бы отсутствовала масса  $m_1$ , то точка крепления массы к валу совершала бы вынужденные перемещения с амплитудой:

$$Y_{m1}^* = \frac{L_1}{L} \cdot Y_B. \quad (5)$$

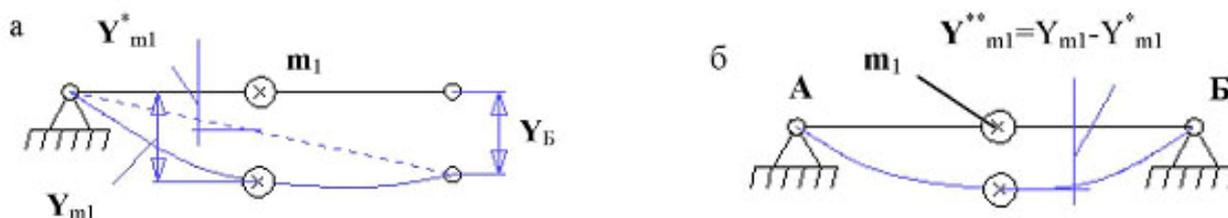


Рис. 7. К определению динамической жесткости I системы

Наличие массы  $m_1$  на валу будет приводить к появлению дополнительных перемещений точки крепления массы в результате прогиба вала под действием приложенной к ней силы инерции. Амплитуда суммарных перемещений точки крепления диска к валу может быть определена из уравнения

$$Y_{m1} = Y_{m1}^* + Y_{m1}^{**}, \quad (6)$$

где  $Y_{m1}$  – амплитуда суммарных перемещений точки крепления массы,  $Y_{m1}^{**}$  – амплитудное значение стрелы прогиба вала в точке крепления под действием силы инерции.

Очевидно, что

$$Y_{m1}^{**} = \alpha_{mm1} P_{m1} = m_1 \omega^2 \alpha_{mm1} Y_{m1}, \quad (7)$$

где  $\alpha_{mm1}$  – коэффициент статической податливости при изгибе точки крепления массы для системы, изображенной на рис. 7 б;  $P_{m1} = m_1 \omega^2 Y_{m1}$  – амплитуда силы инерции, приложенной к массе  $m_1$ .

Тогда

$$Y_{m1} = \frac{L_1}{L} \cdot Y_B + m_1 \omega^2 \alpha_{mm1} Y_{m1}$$

и

$$Y_{m1} = \frac{\frac{L_1}{L}}{1 - m_1 \omega^2 \alpha_{mm1}} \cdot Y_B. \quad (8)$$

Для определения динамической жесткости первой системы в точке **Б** необходимо определить реакцию опоры в этой точке, возникающую в результате вынужденных перемещений ее с амплитудой  $Y_B$ . Составим уравнение равновесия моментов относительно точки **А**:

$$M_A = P_{m1} L_1 + R_B^I L = 0, \quad (9)$$

где  $R_B^I$  – реакция опоры **Б** первой системы, откуда

$$R_B^I = -\frac{L_1}{L} m_1 \omega^2 Y_{m1}. \quad (10)$$

Учитывая (8), получаем

$$R_B^I = -\frac{\left(\frac{L_1}{L}\right)^2 m_1 \omega^2}{1 - m_1 \omega^2 \alpha_{mm1}} Y_B. \quad (11)$$

Динамическая жесткость первой системы в точке **Б**:

$$k_B^I = \frac{R_B^I}{Y_B}.$$

Тогда

$$k_B^I = -\left(\frac{L_1}{L}\right)^2 \cdot \frac{m_1 \omega^2}{1 - m_1 \omega^2 \alpha_{mm1}} \quad (12)$$

или

$$k_B^I = -\frac{1}{\alpha_{mm1}} \cdot \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 \cdot \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{O1}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{O1}^2}}, \quad (13)$$

где  $\omega_{O1} = \sqrt{\frac{1}{m_1 \alpha_{mm1}}}$  – собственная частота первой системы при закрепленной опоре **Б** (рис. 7 б).

Теперь определим динамическую жесткость второй системы в точке **Б**. Для этого вновь зададим вынужденные перемещения в точке **Б** с амплитудой  $Y_B$  и частотой  $\omega$  и определим реакцию в точке **Б**, возникающую в результате ее вынужденных перемещений. Реакция будет возникать как результат преодоления силы инерции массы  $m_2$  и силы упругого сопротивления невесомой пружины:

$$R_B^{II} = -m_2 \omega^2 Y_B + \frac{1}{\alpha_{mm2}} Y_B, \quad (14)$$

где  $m_2 \omega^2 Y_B$  – амплитуда силы инерции массы  $m_2$ ;  $\alpha_{mm2}$  – коэффициент статической податливости второй системы в точке **Б**.

Динамическая жесткость второй системы в точке **Б** будет

$$k_B^{II} = \frac{R_B^{II}}{Y_B} = \frac{1}{\alpha_{mm2}} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{OII}^2}\right), \quad (15)$$

где  $\omega_{OII} = \sqrt{\frac{1}{m_2 \alpha_{mm2}}}$  – собственная частота второй системы.

Если учесть, что податливость – величина, обратная жесткости, то выражение (15) совпадает с ранее полученным уравнением (3).

Динамическая жесткость всей системы в точке **Б** будет равна сумме динамических жесткостей отдельных систем, соединенных в этой точке, т.е.

$$k_B = k_B^I + k_B^{II} \quad (16)$$

или

$$k_B = -\frac{1}{\alpha_{mm1}} \cdot \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{OI}^2}} + \frac{1}{\alpha_{mm2}} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{OII}^2}\right). \quad (17)$$

Уже отмечалось, что резонансными будут те частотные режимы системы, на которых динамическая жесткость равна нулю. Тогда из соотношения (17) получим уравнение, позволяющее определить резонансные режимы:

$$\omega^4 - \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{\alpha_{mm1}} \alpha_{mm2} \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 \right] \cdot \omega_{OII}^2 + \omega_{OI}^2 \right\} \cdot \omega^2 + \omega_{OI}^2 \cdot \omega_{OII}^2 = 0. \quad (18)$$

Решая это уравнение относительно  $\omega$ , получаем для рассматриваемой системы две критические скорости  $\omega_{Iкр}$  и  $\omega_{2кр}$ .

Определение критических скоростей можно производить и графическим путем. Для этого нужно построить зависимости динамических жесткостей  $k_B^I$  и  $k_B^{II}$  от частоты возбуждения  $\omega$ . Абсциссы точек, в которых ординаты построенных зависимостей будут равны по величине и противоположны по знаку, и будут искомыми значениями критических скоростей. Для наглядности удобно построить зависимости  $k_B^{II}(\omega)$  и  $-k_B^I(\omega)$  (на рис. 8 представлена тонкой линией), которая будет представлять собой зеркальное отражение кривой  $k_B^I(\omega)$  относительно оси ординат. Точки пересечения кривых дадут искомым результат. Способ графического нахождения понятен из рис. 8.

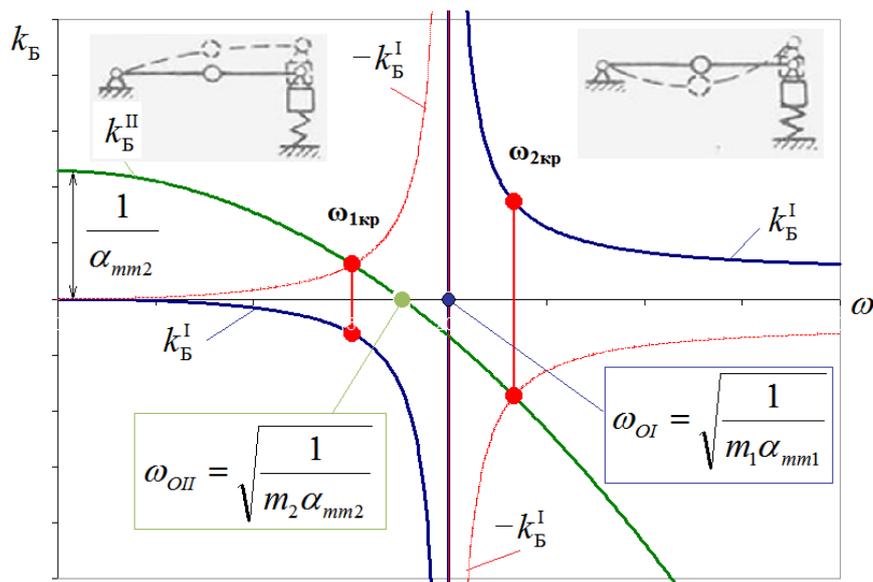


Рис. 8. Графическое определение критических скоростей системы

Определим форму вынужденных колебаний, которая определяет относительный характер движения масс системы в зависимости от частоты возбуждающей силы. Для рассматриваемой системы форма колебаний может быть определена из уравнения (8):

$$\frac{Y_B}{Y_{ml}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0I}^2}}{\frac{L_1}{L}}. \quad (19)$$

Из зависимости (19) следует, что на частотах  $\omega < \omega_{0I}$  массы  $m_1$  и  $m_2$  совершают колебания в одну сторону  $\left(\frac{Y_B}{Y_{ml}} > 0\right)$  с частотой  $\omega$ , а на частотах  $\omega > \omega_{0I}$  массы колеблются в разные стороны  $\left(\frac{Y_B}{Y_{ml}} < 0\right)$  (рис. 8).

#### 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

1. Внимательно ознакомиться с экспериментальной установкой в натуре и по описанию.
2. Получить инструкцию по технике безопасности у преподавателя или инженера кафедры.
3. Включить автомат электропитания стенда 5 (рис. 2).
4. Включить промышленный компьютер, дождаться загрузки операционной системы.
5. Запустить программу «Ротор». Ярлык программы находится на рабочем столе компьютера. На экране появится интерфейс программы (рис. 3).
6. Убедиться в работоспособности всех вихретоковых датчиков. На перемещения податливой опоры и диска ротора в вертикальной и горизонтальной плоскостях с помощью приспособления индикаторы датчиков должны адекватно реагировать.
7. Переключить вкладку режима работы (1а, рис. 3) в положение «Ручной».
8. Нажать кнопку «Пуск» (1б, рис. 3).
9. Инвертор 1 (рис. 2) по умолчанию запрограммирован на плавный равномерный разгон до частоты 60 Гц за 20 с. В процессе разгона показания всех вихретоковых датчиков записываются и отображаются на индикаторе АЧХ (2д, рис. 3). Осциллограммы сигналов отображаются на индикаторах 1в (рис. 3). Цифровые показания вихретоковых датчиков выводятся на индикаторы 3и (рис. 3). Значение текущей частоты вращения приводится на табло 3з (рис. 3). Кроме того, в процессе разгона можно наблюдать за формой упругой линии ротора (1г, рис. 3) и прецессией ротора (2е, рис. 3).
10. При достижении ротором частоты 60 Гц разгон прекратится и ротор будет вращаться с этой частотой.
11. До подачи сигнала на останов по индикатору АЧХ (2д, рис. 3) зафиксировать в своих тетрадах значения частот вращения резонансных режимов.
12. Нажать кнопку «Стоп» (1б, рис. 3) и дождаться полной остановки ротора.
13. По указанию преподавателя зафиксировать податливую опору с помощью стопорного приспособления.
14. Повторить эксперимент (шаги 8–12).
15. Выключить промышленный компьютер (через «Пуск» – «завершение работы» дождаться появления разрешения на выключение компьютера).
16. Выключить автомат питания стенда.

## 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ

1. Выписать в тетрадь основные параметры системы, необходимые для расчета:

а) масса вращающегося диска  $m_1 = 9,36$  кг,

б) масса податливой опоры  $m_2$  :

$$m_2 = m_{on} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot m_{un}, \quad (20)$$

где  $m_{on}$  – масса собственно опоры, включающая в себя массу элементов установки, укрепленных на ней;  $m_{un}$  – масса одной из шпилек, на которой подвешена упругая опора;  $i$  – число шпилек,  $i = 12$ ;  $m_2 = 14,8$  кг.

в) геометрические размеры системы:

$L$  – расстояние между опорами,  $L = 0,40$  м;

$L_1$  – расстояние между жесткой опорой и точкой крепления диска на валу,  
 $L_1 = 0,20$  м;

$d_e$  – диаметр вала (на установке вал имеет постоянный диаметр),  $d_e = 0,015$  м;

$d_{un}$  – диаметр шпилек,  $d_{un} = 0,012$  м;

г) модуль упругости первого рода материала упругих элементов  $E$ ,  $E = 2,00 \cdot 10^{11}$  Па.

2. Определить коэффициенты податливости  $\alpha_{mm_1}$  и  $\alpha_{mm_2}$ .

Коэффициенты податливости могут быть определены методами, известными из курса «Сопротивление материалов».

В частности,

$$\alpha_{mm_1} = \frac{L^3}{3EI_e} \cdot \bar{L}^2 \cdot (1 - \bar{L})^2, \quad (21)$$

$$\alpha_{mm_2} = \frac{L^3}{12EI_{un}i}, \quad (22)$$

где  $\bar{L} = \frac{L_1}{L}$ ,  $I_e = \frac{\pi d_e^4}{64}$  и  $I_{un} = \frac{\pi d_{un}^4}{64}$  – соответственно экваториальные моменты инерции сечения вала и шпильки,  $M^4$ .

3. Вычислить собственные частоты  $\omega_{0I}$  и  $\omega_{0II}$ .

4. Найти критические скорости по зависимости (18) или графическим способом с использованием выражений (13) и (15).

5. Сравнить расчетные и экспериментальные значения критических скоростей, определить расхождение их (в процентах) и указать возможные причины несовпадения теоретических и экспериментальных данных.

6. Определить формы колебания при  $\omega = \omega_{1кр}$  и  $\omega = \omega_{2кр}$  по формуле (19).

7. Оформить расчетную часть работы.

## 6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- расчетную схему с указанием всех величин, необходимых для расчета;
- выполненные расчеты;

- сравнение расчетных и экспериментальных значений критических скоростей для одномассовой и двухмассовой систем;
- анализ полученных результатов.

## **7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что такое жесткость?
2. В чем отличие статической и динамической жесткостей?
3. Что такое податливость?
4. В чем заключается основная идея метода динамических жесткостей?
5. Что такое собственная частота системы?
6. Что представляет собой экспериментальная установка?
7. Какие элементы экспериментальной установки входят в I и II системы?
8. Как определяются динамические жесткости первой и второй систем экспериментальной установки?
9. Как определяется собственная частота экспериментальной установки при жестком закреплении податливой опоры и почему?
10. Сравните значения собственных частот при закрепленной и раскрепленной податливой опоре. Есть ли различия и почему?
11. В чем заключается графический метод определения собственных частот сложных систем методом динамических жесткостей?
12. Как изменятся собственные частоты экспериментальной установки, если:
  - изменить массу  $m_1$ ;
  - изменить массу  $m_2$ ;
  - изменить количество шпилек крепления податливой опоры  $i$ ;
  - изменить расстояние между опорами,  $L$ ;
  - изменить расстояние между жесткой опорой и точкой крепления диска на валу,  $L_1$ ;
  - изменить диаметр вала  $d_в$ ;
  - изменить диаметр шпилек  $d_{шп}$ ?
13. Объясните, как перечисленные параметры влияют на рассчитываемые характеристики, анализируя приведенные аналитические зависимости, и приведите физическое подтверждение.

## **8. ЛИТЕРАТУРА**

1. Скубачевский Г.С. Авиационные газотурбинные двигатели. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1965.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2**

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТКИ ОСЕВОГО КОМПРЕССОРА**

**Цель работы:** знакомство с методикой экспериментального определения собственных частот и рисунков узловых линий, соответствующих им собственным форм, по которым можно делать некоторые заключения о характере колебаний и распределении напряжений.

## **1. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТКИ**

Лопатка, как всякое упругое тело с распределенной массой, обладает бесчисленным множеством частот собственных колебаний. Каждой из собственных частот соответствует своя строго определенная форма колебаний, т.е. определенное распределение прогибов и напряжений по перу лопатки.

Совпадение частоты возбуждающей силы с одной из собственных частот вызовет явление резонанса. При резонансе амплитуда колебаний возрастает, что может привести к быстрой поломке лопатки. Поэтому при проектировании и доводке компрессора или газовой турбины совершенно необходимо знать спектр собственных частот колебаний лопатки для того, чтобы по возможности отстроить их от частот возмущающих сил на рабочих режимах работы двигателя.

С другой стороны, если все же резонансная поломка лопатки произошла, то при анализе ее причин необходимо точно знать, на какой частоте она произошла. Знание спектра собственных форм колебаний лопатки облегчает проведение такого анализа. Так как форма колебаний на резонансе совпадает с соответствующей собственной формой, характеризующей определенным распределением напряжений по перу, то по установленному месту зарождения трещины можно судить о том, на какой форме колебаний (на какой частоте) произошло разрушение.

Таким образом, для борьбы с резонансными поломками лопаток необходимо знать как спектр собственных частот лопаток, так и спектр соответствующих им форм колебаний. Определение собственных частот и форм колебаний может производиться как теоретически, так и экспериментально.

Одной из задач экспериментального определения собственных частот и форм колебаний является возбуждение колебаний заданной частоты в исследуемом объекте. Для этого могут использоваться различные способы:

– Пневматический. Колебания возбуждаются прерывистым потоком газа (воздуха).

– Ударный. Используется специальный ударный молоток, оснащенный датчиками силы и вибрации, удар которого по исследуемому объекту возбуждает в последнем весь спектр собственных частот.

– Инерционный. Объект закрепляется на вибростоле, способном совершать колебания с требуемыми частотой и амплитудой, воздействие на объект передается через инерционные силы объекта исследования.

– Непосредственное кинематическое возбуждение. Воздействие на объект от динамика, способного совершать колебания с требуемыми частотой и амплитудой передается через специальную иглу динамика, прикладываемую к объекту или приклеиваемый жесткий прут. При использовании небольших динамиков или пьезовозбудителей они могут прикрепляться непосредственно к объекту исследования.

– Электромагнитный. Колебания возбуждаются посредством воздействия магнитного поля.

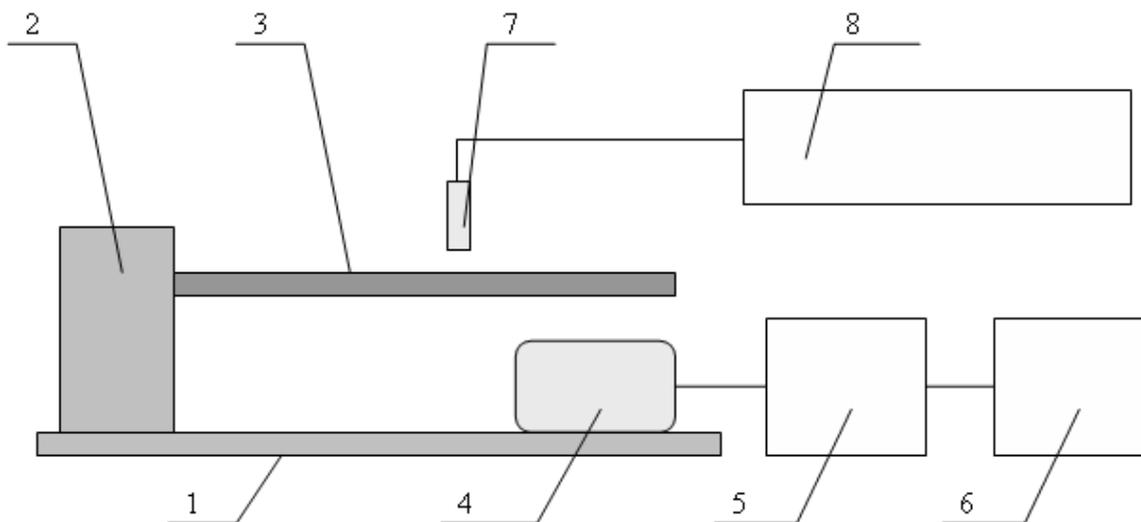
## **2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА**

Блок-схема установки представлена на рис. 1.

Установка состоит из следующих элементов:

1. Каркаса – основания 1 с зажимным приспособлением 2, в котором крепится испытуемая лопатка 3. В качестве зажимного приспособления могут использоваться тиски или модель замковой части диска;

2. Катушки электромагнита 4;
3. Генератора 5, который преобразует постоянный ток от источника питания 6 в переменный ток заданной частоты и запитывает катушку электромагнита.
4. Бесконтактного датчика колебаний 7, подключенного к виброрегистрирующей аппаратуре 8.
5. Корытца с песком.



*Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:*

*1 – основание; 2 – зажимное приспособление (тиски); 3 – лопатка (пластина); 4 – катушка электромагнита; 5 – генератор; 6 – источник питания; 7 – датчик вибраций; 8 – виброрегистрирующий блок*

В данной работе используется электромагнитный способ возбуждения лопатки. К преимуществам данного способа относится относительная простота и отсутствие контакта исследуемого объекта (лопатки, пластины) с возбудителем, а, следовательно, и отсутствие дополнительных присоединенных масс. Однако данный способ вносит известные ограничения на объекты исследования – они должны иметь магнитные свойства.

Зажимные приспособления для пластин и лопаток представлены на рис. 2.

Испытуемая лопатка или пластина 3 (рис. 1) закрепляется в зажимном приспособлении (тисках). При исследовании лопатки она крепится в модели замковой части диска горизонтально корытцем вверх.

Над лопаткой устанавливается бесконтактный датчик колебаний 7, подключаемый к виброрегистрирующей аппаратуре. В зависимости от решаемой задачи может использоваться вихретоковый датчик совместно с регистрирующей аппаратурой NI либо однокоординатный бесконтактный виброрегистрирующий комплекс POLYTEC. Выполнение демонстрационных работ не требует использования виброрегистрирующей аппаратуры.

Катушка электромагнита 4 предназначена для возбуждения колебаний лопатки. К катушке подводится переменный ток от генератора 5, частота которого изменяется в широких пределах. В результате воздействия магнитного поля катушки, создаваемого переменным током, на объект исследования (лопатку или пластину) создает периодическую силу, частота которой определяется частотой переменного тока. Эта сила заставляет объект эксперимента (лопатку или пластину) совершать вынужденные колебания с частотой действия силы. Величина амплитуды колебаний может регулироваться изменением силы тока и напряжения, что обеспечивает источник питания 6, запитывающий катушку электромагнита через генератор.

Внешний вид генератора и источника питания представлен на рис. 3.

Генератор **2** вырабатывает переменный ток, частота которого может изменяться в пределах от 1 до 10 000 Гц. Плавное изменение частоты производится вращением верньера частоты генератора **с**. Шаг изменения частоты может быть задан одной из кнопок **б**. Генератор имеет два выходных канала с регулировкой фазового сдвига (эта опция присутствует не на всех генераторах и в данной лабораторной работе не используется). Кроме того, имеется выход на стробоскоп с возможностью независимой регулировки его частоты. Переключение между указанными функциями и функцией регулировки выходной частоты производится последовательным нажатием верньера **с**. Значение частоты выдаваемого тока отображается на индикаторе **д**. Регулирование амплитуды колебаний в ходе эксперимента производится вращением двух ручек **а**, расположенных на источнике питания **1**. Значение выдаваемых при этом источником питания величин тока и напряжения отображаются на индикаторе **е**.

Выбор системы регистрации колебаний в зависимости от задач, решаемых в ходе выполнения лабораторной работы, осуществляется преподавателем или инженером кафедры. При использовании одноосной бесконтактной системы измерения колебаний POLYTEC перед выполнением эксперимента необходимо ознакомиться с ее техническим описанием и инструкцией по эксплуатации.

Вихретоковые датчики предназначены для бесконтактного измерения вибрации, перемещения и частоты вращения электропроводящих объектов. Выходным сигналом драйвера является электрический сигнал, пропорциональный расстоянию от торца вихревого датчика до контролируемого объекта. Вихретоковые датчики обладают хорошим частотным откликом (реакция на изменение расстояния между торцом пробника и объектом контроля). Частотный диапазон может достигать 0–10 000 Гц.

### 3. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

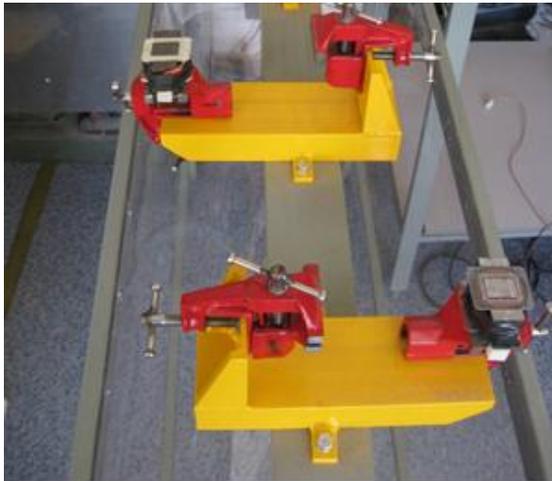
Возбуждение колебаний лопатки производится подачей на катушку электромагнита переменного тока с генератора. Изменяя плавно частоту, можно добиться совпадения частоты возбуждения с одной из собственных частот колебаний лопатки, т.е. получить явление резонанса.

Явление резонанса характеризуется резким увеличением амплитуды колебаний. Момент резонанса фиксируется при помощи системы измерения колебаний. Резонанс будет характеризоваться резким увеличением амплитуды сигнала датчика. Можно определить резонанс и без системы измерения, например, на слух. Резкое возрастание колебаний отчетливо фиксируется ухом по уровню звукового давления, производимому колеблющейся лопаткой или пластиной.

После того, как момент резонанса зафиксирован, соответствующая ему частота возбуждения может быть определена по индикатору **д** генератора **2** (рис. 3). Поскольку при резонансе частота возбуждения совпадает с одной из собственных частот, то, определяя частоту возбуждения, тем самым определяем одну из собственных частот колебания лопатки.

Следует отметить, что гармонический закон колебаний лопатки может быть искажен наличием высших гармоник, несмотря на строго гармонический закон переменного тока, подаваемого на катушку от генератора.

Это может привести к существенной ошибке в определении собственной частоты. Чтобы избежать подобной ошибки, необходимо убедиться в совпадении частоты колебаний лопатки с частотой, задаваемой генератором. Это можно сделать, используя осциллограф, если подать на взаимно перпендикулярные пластины отклонения луча сигналы с датчика вибраций и с генератора.



а



б

Рис. 2. Зажимные приспособления: а – для пластин; б – для лопатки

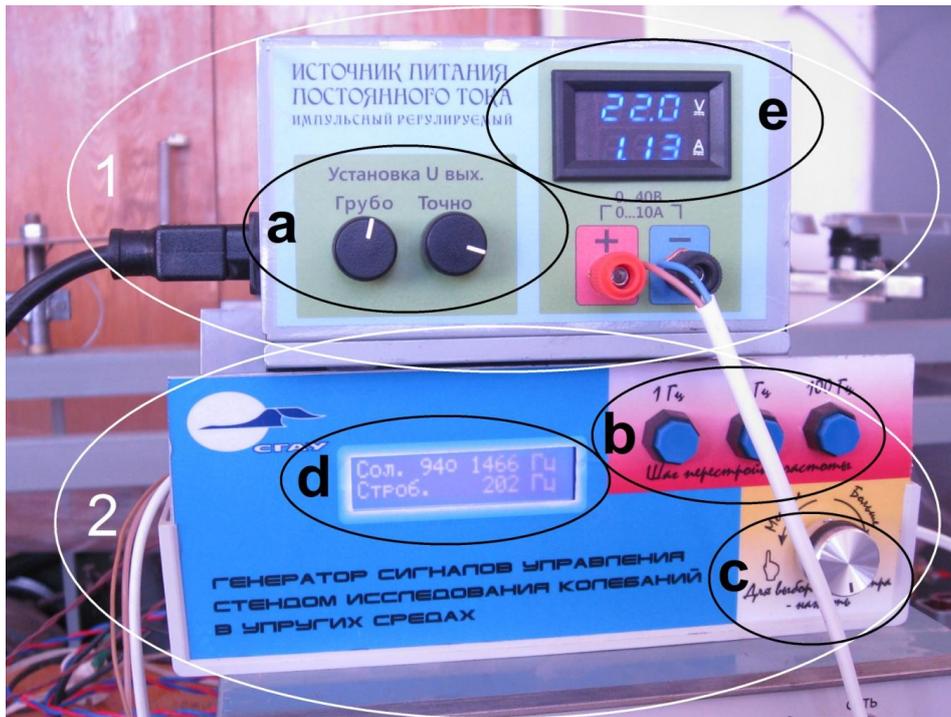


Рис. 3. Внешний вид источника питания и генератора



Рис. 4. Внешний вид бесконтактной системы измерения колебаний POLYTEC

Тогда отклонение луча в горизонтальном направлении будет совершаться с частотой, соответствующей частоте, задаваемой генератором, а вертикальное отклонение – с частотой колебания лопатки. В результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний на экране осциллографа будет получена фигура Лиссажу. При совпадении частот эта фигура будет иметь форму эллипса или наклонной прямой. Если же частота колебаний лопатки вдвое больше, чем частота, задаваемая генератором, что может иметь место при возбуждении второй гармоникой, то на экране будет получена фигура в виде лежащей восьмерки или подковообразной кривой. При возбуждении третьей гармоникой будет получена более сложная фигура и т.д. (рис. 5). Таким образом, нужно получить фигуру Лиссажу в виде эллипса или наклонной прямой.

Как отмечалось, каждой из собственных частот колебаний лопатки соответствует своя определенная форма колебаний.

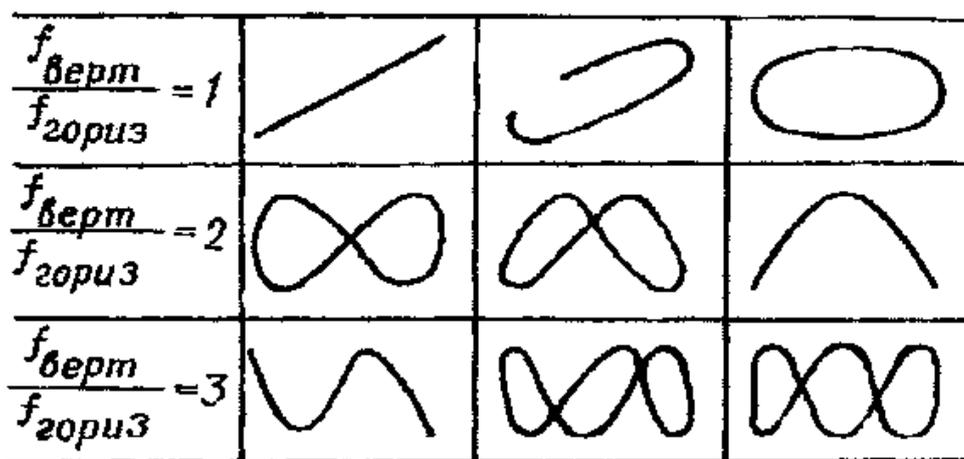


Рис. 5. Сравнение частоты собственных колебаний с частотой вынуждающей силы с помощью осциллографа

Экспериментальное определение форм колебаний возможно проводить разными способами. Для этих целей сегодня существует специальное дорогостоящее оборудование. Например, можно использовать сканирующий 3-D вибрметр POLYTEC, использующий анализ поведения поверхности по падающему на поверхность и отраженному с нее лазерному лучу. Принцип работы основан на анализе сдвига частоты (эффекта Доплера) отраженного лазерного луча. На сравнительно невысоких частотах пригоден для этого комплекс ARAMIS, использующий фотограмметрический метод. Можно наблюдать формы колебаний при помощи системы «Фотостресс» – это метод анализа деформаций с помощью эластичного фотопокрываетия. Широкое распространение получил метод голографической интерферометрии. Результаты экспериментальных исследований, проведенных в Казани, на пластинах и лопатках с использованием последнего метода приведены на рис. 6.

В данной работе используется наиболее простой и визуально-зрелищный способ анализа форм – при помощи песчаных фигур. Для этого горизонтально установленную и обезжиренную лопатку посыпают тонким слоем песка. При подходе к резонансу песок начинает интенсивно перемещаться по лопатке, концентрируясь в узлах данной формы колебаний, т.е. в тех местах, которые в процессе колебаний остаются неподвижными.

После более или менее продолжительного выдерживания лопатки на резонансе на ее поверхности появляется четкая песчаная фигура, показывающая расположение узловых линий.

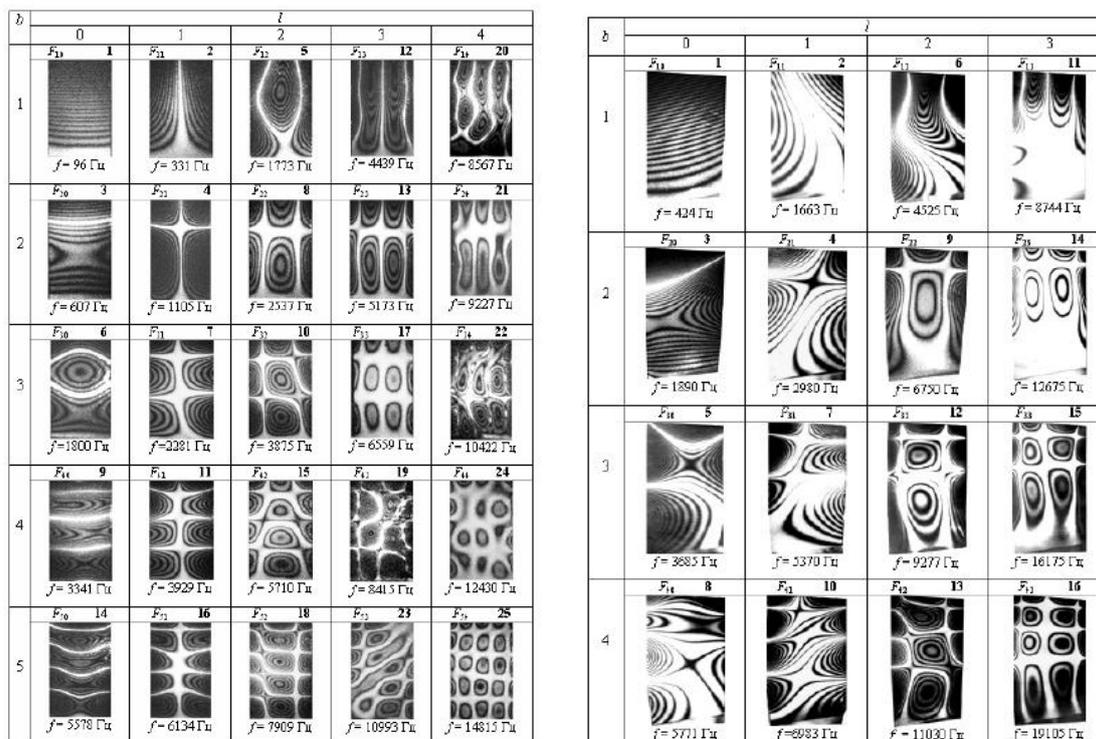


Рис. 6. Экспериментальные формы колебаний пластин и лопаток, полученные методом голографической интерферометрии

По картине расположения узловых линий можно судить о характере распределения вибрационных напряжений в лопатке при данной форме колебаний.

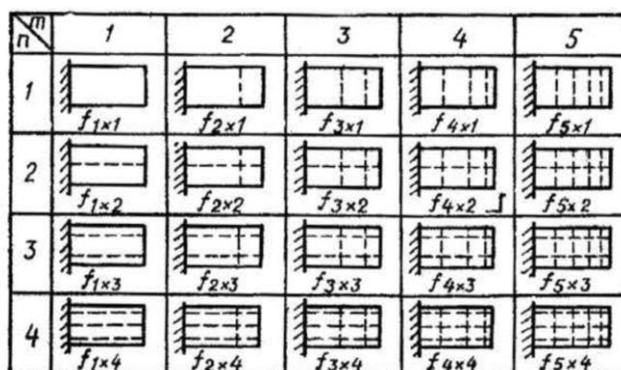


Рис. 7. Рисунки узловых линий форм колебаний

Эта таблица может быть продолжена неограниченно вправо и вниз. С увеличением номера строки и столбца частоты увеличиваются.

#### 4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Образование рисунков узловых линий на различных собственных формах подчиняется определенной закономерности. Эта закономерность представлена на рис. 7.

В этой таблице приведены рисунки линий исходных (условных) собственных форм которые более или менее существенно отличаются от рисунков узловых линий реальной лопатки. Тем не менее, такая таблица наглядно иллюстрирует закономерность в образовании

различных собственных форм, поскольку общность исходных (условных) форм при переходе к реальной лопатке легко улавливается (рис. 8).

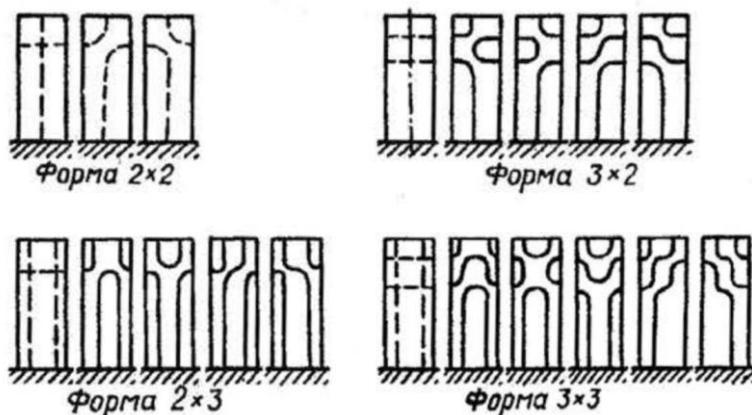


Рис. 8. Характер возможных искажений рисунка узловых линий исходных форм при переходе к реальной лопатке

Таблица собственных форм исчерпывает возможные собственные движения лопатки. Другими словами, каждому собственному движению соответствует одна определенная клетка таблицы собственных форм. Поэтому, проводя эксперимент, каждую обнаруженную собственную форму (рисунок узловых линий) следует внести в соответствующую клетку таблицы, здесь же нужно записать частоту. В соответствии с этим формы колебания и частоты удобно именовать в зависимости от того, в каком столбце и какой строке эта форма располагается. Например, форма  $3 \times 2$  (третий столбец, вторая строка), частота  $f_{3 \times 2}$  и т.д.

Таблица собственных форм обладает определенными частотными свойствами. Частоты форм, располагающихся в данной строке, увеличиваются с увеличением номера столбца и располагаются на плавной кривой. Характерный вид этих частотных кривых представлен на рис. 9. Аналогичным свойством обладают и столбцы: частоты форм увеличиваются с увеличением номера строки и так же располагаются на плавной кривой.

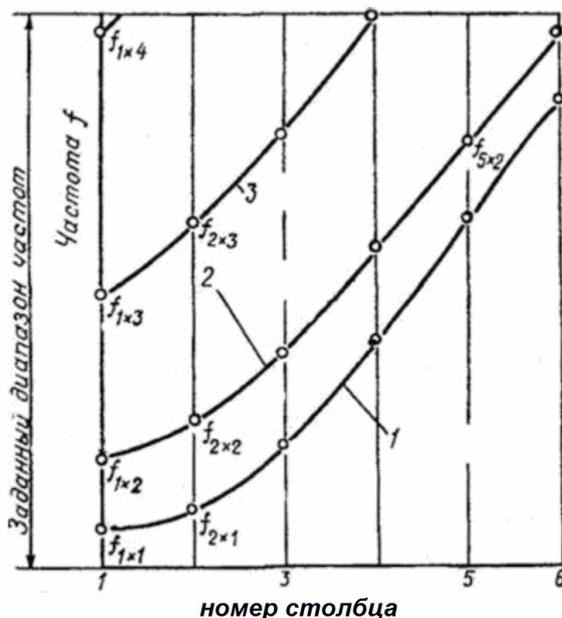


Рис. 9. Характерная зависимость частоты от номера столбца:  
1 – первая; 2 – вторая; 3 – третья строка

Заполняя при эксперименте таблицу собственных форм, можно судить о том, какие из собственных движений пропущены (клетки остались вакантными). Если в данной строке (столбце) уже определено несколько собственных форм, то строя по известным для них значениям частот зависимость частоты от номера столбца (строки), можно приближенно найти частоту пропущенной формы, что облегчает ее поиск. По частотным кривым, экстраполируя их в сторону больших номеров столбцов (строк), можно судить также о числе собственных форм, попадающих в заданный диапазон частот. Эксперимент можно считать законченным тогда, когда все клетки таблицы собственных форм, соответствующие заданному диапазону частот, будут заполнены.

Если таблица заполнена, то это свидетельствует о том, что в заданном диапазоне частот других собственных форм нет. Исключения возможны лишь только в том случае, когда в заданный диапазон частот попадает первая форма изгибных колебаний, соответствующая колебаниям в направлении оси максимальной жесткости. При этом рисунок узловых линий ее, поскольку лопатка имеет закрученную и изогнутую поверхность, может напоминать один из рисунков форм колебаний, ранее определенных и занесенных в таблицу. Появление дополнительного собственного движения возможно потому, что приведенная таблица собственных форм перечисляет собственные движения, относящиеся только к колебаниям в направлении минимальной жесткости.

## **5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ**

Все работы проводятся с инженером кафедры или преподавателем.

1. Получить у преподавателя свой экземпляр лопатки или пластины. Для выполнения лабораторной работы изготовлено 5 экземпляров лопаток разной длины и с различным профилем, но с унифицированной замковой частью и 20 экземпляров пластин с различной длиной, шириной, толщиной. Геометрические параметры промаркированы на пластине.

2. Обезжирить поверхность корытца испытываемой лопатки или пластину.

3. Получить разрешение инженера на включение установки.

4. Включить установку, подав сетевое питание на генератор, источник питания и вибро-регистрирующий блок.

5. Посыпать поверхность испытываемой лопатки тонким слоем песка.

6. Установить на источнике питания небольшой уровень амплитуды сигнала.

7. Плавно изменять частоту генератора от 50 Гц до появления резонанса. В случае касания лопатки или пластины катушки электромагнита (резкий неприятный звук) уменьшить величину амплитуды на источнике питания.

8. Проконтролировать совпадение частот по осциллографу или по индикаторам генератора и виброизмерителя.

9. Записать частоту, на которой возник резонанс, и зарисовать песчаную фигуру, указав расположение входной кромки лопатки.

10. Плавно повысить частоту до наступления следующих резонансов (до 10 000 Гц).

11. Уменьшить частоту. Выключить установку.

## **6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Отчет о проделанной работе должен содержать:

- описание установки;
- методику проведения эксперимента;
- таблицу собственных форм с рисунками узловых линий и собственными частотами;

- частотные кривые;
- анализ полученных результатов.

## **7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Назовите основные цели определения собственных частот и форм колебаний.
2. Что такое форма колебаний?
3. Чем характерен и опасен резонанс?
4. Для какой цели необходим спектр собственных частот и форм колебаний?
5. Назовите состав и назначение оборудования, входящего в состав экспериментального стенда.
6. Для какой цели при эксперименте используются фигуры Лиссажу?
7. Поясните, почему песок собирается в узлах собственных форм?
8. Какой закономерности подчиняются рисунки узловых линий?
9. Почему искажаются узловые линии реальной лопатки?

## **8. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Изучение методов определения динамических характеристик лопаток турбомашин: метод. указания / сост. В.А. Фролов, Л.И. Ермаков. Самара: Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета, 2006. Ч. 1. 43 с.
2. Конструкция и проектирование авиационных газотурбинных двигателей: учеб. для студентов вузов / С.А. Вьюнов, Ю.И. Гусев, А.В. Карпов и др.; под общ. ред. Д.В. Хромина. М: Машиностроение, 1989. 368 с.
3. Иванов В.П. Колебания рабочих колес турбомашин. М.: Машиностроение, 1983. 224 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний: учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
6. Вибрация в технике: справочник: в 6 т. / под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. Т. 3. 544 с.
7. Кузнецов Н.Д., Цейтлин В.И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1976. 212 с.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3**

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТКИ КОМПРЕССОРА**

Возбуждение колебаний лопаток в лабораторных условиях возможно различными способами. Электромагнитное возбуждение применяется для лопаток из магнитных материалов, но интенсивность возбуждения при этом сравнительно невелика. Идея исследования вибрационных характеристик изделий авиационной техники с использованием воздушного способа возбуждения принадлежит В.П. Иванову, работавшему в 1950–1971 гг. доцентом

кафедры конструкции и проектирования авиационных двигателей КуАИ, защитившему в 1970 г. докторскую диссертацию и приглашенному работать в ЦИАМ. Воздушные вибраторы КуАИ-ВВ были спроектированы в дипломном проекте Огородова В.

Основная проблема реализации стендов КуАИ-ВВ – обеспечение стабильности частоты вращения (с точностью до долей герца) была решена и запатентована.

Стенды КуАИ-ВВ внедрены на всех двигателестроительных предприятиях СССР, а также в учебный процесс кафедры КиПДЛА КуАИ-СГАУ [4] и родственных кафедрах УГАТУ, КАИ и Запорожского механического института.

Эти идеи реализованы в данной работе с использованием современных технических средств.

**Цель работы:** теоретическое и экспериментальное определение первой собственной частоты и первой собственной формы изгибных колебаний лопатки компрессора.

Если лопатку сформировать, а затем предоставить самой себе, то она начнет совершать свободные колебания. Частоты и формы этих колебаний называются собственными. Как тело с распределенной массой, лопатка имеет бесчисленное множество собственных форм движения, каждой из которых строго однозначно соответствует своя собственная частота. Возбуждение свободных колебаний той или иной формы зависит от начальных и граничных условий.

Если лопатку нагрузить переменной силой, то она будет совершать вынужденные колебания с частотой приложенной силы. Когда частота этой силы совпадет с какой-либо собственной частотой лопатки, возникнет явление резонанса. Резонанс характеризуется резким увеличением амплитуды колебаний и напряжений, причем форма резонансных колебаний практически совпадает с соответствующей по частоте собственной формой.

На работающем двигателе лопатка подвергается воздействию разнообразных переменных сил. Они, как правило, зависят от оборотов ротора и при некоторых оборотах могут вызывать резонансы. Вследствие больших динамических напряжений резонансы опасны, и их стараются не допускать, особенно в области рабочих режимов. Это достигается с помощью различных конструктивных мероприятий, для правильного выполнения которых необходимо определение собственных форм и частот лопатки, а также частот и интенсивности возмущающих сил. Когда все же резонанс лопатки устранить не удастся, ее прочность обеспечивается снижением величин опасных сил, демпфированием и повышением предела усталостной прочности материала. В этом случае также требуется исследование собственных форм и собственных частот лопатки.

## ***1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТЫ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ФОРМЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТКИ***

Существует много методов теоретического определения собственных частот и собственных форм лопатки. Широкое распространение конечноэлементных пакетов расчета значительно упрощает решение задачи. Модальный анализ способен дать быстрый и точный результат. Однако этот метод не исключает использование в инженерной практике приближенных методов, разработанных до появления компьютерной техники. Приближенные расчеты могут являться хорошим способом проверки, так как они основаны на физических принципах. В настоящей работе используется метод наложений, который позволяет определить только низшую собственную частоту изгибных колебаний консольно-закрепленной лопатки. Достоинство этого метода – сравнительно малая трудоемкость.

### ***Метод наложений***

Схематизируем реальную лопатку с распределенной массой в виде упругой системы с сосредоточенными массами.

Для этого разобьем лопатку по длине на  $n$  равных участков (рис. 1) и будем считать, что масса каждого участка сосредоточена в его середине, а моменты инерции и площади сечений в пределах участка постоянны и равны соответственно моменту инерции и площади среднего сечения участка.

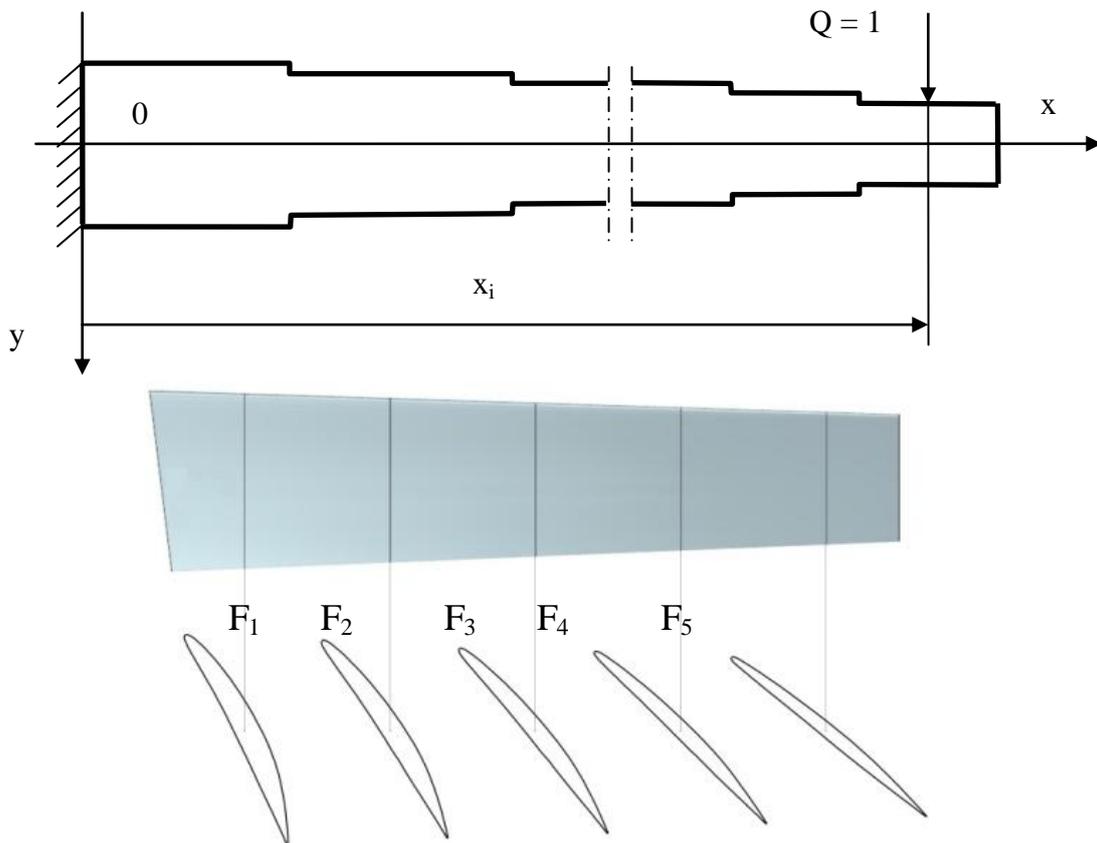


Рис. 1. Расчетная схема определения нижней собственной частоты и распределение площадей сечений по длине лопатки

Введем обозначения:

$i$  – средняя точка произвольного  $i$ -го участка лопатки,  $i = 1, 2, n$ ;

$m_i$  – масса  $i$ -го участка лопатки, приложенная, по условию схематизации, в точке  $i$ ;

$F_i$  – площадь среднего сечения  $i$ -го участка лопатки;

$I_i$  – момент инерции среднего сечения  $i$ -го участка лопатки;

$l$  – длина лопатки;

$\rho$  – плотность материала лопатки;

$E$  – модуль упругости материала лопатки.

Очевидно,

$$m_i = F_i \cdot \frac{l}{n} \cdot \rho. \quad (1)$$

Рассмотрим свободные изгибные колебания лопатки. При свободных колебаниях каждая ее точка будет совершать гармонические колебания, поэтому для построенной расчетной схемы можно записать:

$$y_i = Y_i \cdot \sin \omega_0 t, \quad (2)$$

где  $y_i$  – перемещение  $i$ -й точки;  $Y_i$  – амплитуда колебаний  $i$ -й точки;  $t$  – время;  $\omega_0$  – собственная угловая частота колебаний.

К  $i$ -й точке будет приложена сила инерции



$$A_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}, \quad (11)$$

где  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  – корни уравнения (8).

Приравнивая выражения (10) и (11) и учитывая (9), получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{0i}^2}. \quad (12)$$

В случае консольной лопатки частота первой собственной формы значительно ниже частот высших собственных форм, поэтому в правой части равенства (12) можно пренебречь всеми членами, кроме  $\frac{1}{\omega_{01}^2}$  и, таким образом, приближенно найти низшую собственную угловую частоту:

$$\omega_{01} \approx \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii}}}. \quad (13)$$

Низшая собственная частота консольно закрепленной лопатки переменного сечения будет равна

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii}}}. \quad (14)$$

Коэффициенты влияния  $\alpha_{ii}$  удобно определять с помощью интеграла Мора:

$$\alpha_{ii} = \int_0^{x_i} \frac{[M(x)]^2}{EI(x)} dx, \quad (15)$$

где  $M(x)$  – момент от единичной силы, приложенной в точке  $i$ ;  $I(x)$  – момент инерции сечения, переменный по длине лопатки.

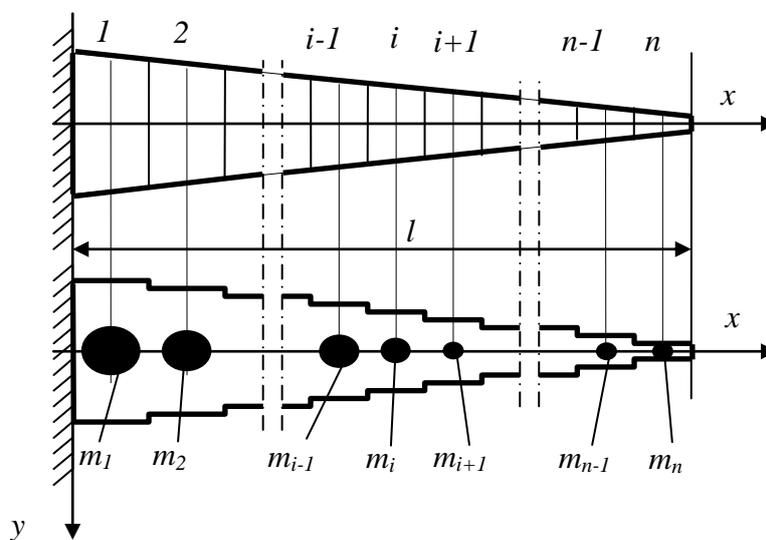


Рис. 2. Расчетная схема для определения коэффициентов влияния

Из рис. 2, с. 31 видно, что

$$M(x) = (x_i - x). \quad (16)$$

Согласно расчетной схеме (рис. 1):

$$x_i = \frac{l}{n} \cdot i. \quad (17)$$

Принимая допущение, что  $I(x)$  изменяется ступенчато вдоль лопатки, и учитывая выражения (16) и (17), интеграл (15) можно свести к следующей сумме:

$$\alpha_{ii} = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^i \frac{(i-k)^2}{EI_k}. \quad (18)$$

Подставляя выражения (18) и (1) в (14), получим форму для частоты первой собственной формы изгибных колебаний консольно закрепленной лопатки переменного сечения, которая известна как формула А. Е. Шнейдмана:

$$f_{01} = \frac{n^2}{2\pi \cdot l^2} \sqrt{\frac{E}{x_n \rho}}, \quad (19)$$

где

$$x_n = \sum_{i=1}^n F_i \sum_{k=1}^i \frac{(i-k)^2}{I_k}. \quad (20)$$

Таблица 1. Исходные данные для расчета низшей собственной частоты лопатки

$i(k)$		1	2	3	4	5
$F_i$	$M^2$	2,29139E-04	2,02765E-04	1,75044E-04	1,56536E-04	1,37356E-04
$I_k$	$M^4$	5,91348E-10	3,89197E-10	2,47061E-10	1,52414E-10	9,25210E-11
$l$	$m$	0,2				
$\rho$	$кг/м^3$	7800				
$E$	$Па$	2E+11				

Таблица 2. Протокол расчета низшей собственной частоты лопатки

$I_k$ $M^4$							
$k \backslash i$	1	2	3	4	$\sum_{k=1}^i \frac{(i-k)^2}{I_k}$	$F_i$ $M^2$	$F_i \cdot \sum_{k=1}^i \frac{(i-k)^2}{I_k}$
5							
4		$\frac{(i-k)^2}{I_k}$					
3							
2							
$x_5, [1/M^2]$							
$f_1, [1/c]$							

Достаточная точность обычно достигается при разбивке лопатки по длине на 5 участков. В этом случае

$$f_{01} = \frac{25}{2\pi \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{x_5 \rho}}, \quad (21)$$

где

$$x_5 = F_5 \sum_{k=1}^5 \frac{(5-k)^2}{I_k} + F_4 \sum_{k=1}^4 \frac{(4-k)^2}{I_k} + F_3 \sum_{k=1}^3 \frac{(3-k)^2}{I_k} + \frac{F_2}{I_1}. \quad (22)$$

Вычисление  $f_{0l}$  удобно вести с помощью табл. 1 и табл. 2.

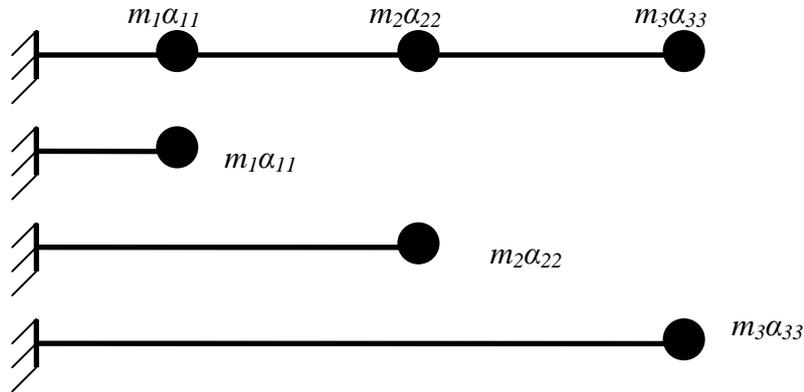


Рис. 3. К выводу формулы Дункерля

Изложенный метод дает всегда заниженное значение собственной частоты по сравнению с действительной, что объясняется пренебрежением в формуле (12) слагаемыми  $\frac{1}{\omega_{02}^2}$ ,  $\frac{1}{\omega_{03}^2}$ , ...,  $\frac{1}{\omega_{0n}^2}$  ввиду их малости по сравнению с  $\frac{1}{p_1^2}$ .

Интересно также заметить, что выражение (13) является по сути известной формулой Дункерля, которая позволяет по собственным частотам парциальных систем (рис. 3) определить собственную частоту многомассовой системы. Действительно, квадраты собственных частот парциальных систем равны соответственно:

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \frac{1}{m_1 \alpha_{11}}; \\ \omega_{02}^2 &= \frac{1}{m_2 \alpha_{22}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_{0n}^2 &= \frac{1}{m_n \alpha_{nn}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив эти равенства в выражение (13), получим формулу Дункерля:

$$\omega_{01}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{0n}^2}}. \quad (24)$$

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Экспериментальное определение первой собственной частоты и первой собственной формы лопатки проводится резонансным методом. На лопатку воздействуют внешней силой изменяемой частоты. Появление резонанса, которое характеризуется резким возрастанием амплитуды колебаний, свидетельствует о том, что частота внешней вынуждающей силы равна собственной частоте лопатки. Частота внешней вынуждающей силы меняется, плавно увеличиваясь от нуля. Первый резонанс, наблюдаемый на пере лопатки, будет соответ-

ствовать самой низкой частоте. При этом измеряются величина этой частоты и напряжения в пере. По распределению напряжений устанавливается форма резонансных колебаний. Очевидно, что найденные таким путем форма и частота являются искомыми первой собственной формой и первой собственной частотой исследуемой лопатки.

Задача создания внешней силы изменяемой частоты, воздействующей на лопатку, не так проста. Известны разнообразные способы создания внешней возбуждающей силы, отличающиеся по решаемым задачам, эффективности и области применения.

Одной из важных задач по обеспечению вибрационной прочности элементов авиационных двигателей являются испытания лопаток на многоцикловую усталость. Для проведения испытаний лопаток на многоцикловую усталость необходимо обеспечить эффективное возбуждение колебаний, высокую точность регулирования и поддержания частоты внешней вынуждающей силы. При таких испытаниях на лопатку воздействуют внешней силой с частотой, совпадающей с одной из собственных частот лопатки вплоть до разрушения лопатки. Подобные испытания, как правило, идут в течение очень продолжительного времени (это может занимать много суток), во время которого лопатка постоянно находится в резонансном режиме. Время испытаний существенно зависит от амплитудных значений внешней нагрузки. Как показывают исследования ЦИАМ [1], наиболее распространены на сегодняшний день следующие способы возбуждения лопаток:

- кинематический способ возбуждения с помощью электродинамических вибростендов;
- возбуждение с использованием неподвижных или вращающихся от независимого привода стационарных воздушных струй (раскрутка ротора при частичном вакуумировании или в атмосферных условиях);
- возбуждение от турбулизаторов потока или генераторов воздушных импульсов (раскрутка ротора при частичном вакуумировании или в атмосферных условиях) – эффективное возбуждение колебаний лопаток по низшим формам при температуре до ~800–900 °С, раскрутка при частичном вакуумировании;
- возбуждение от пьезовибраторов, закрепленных на деталях (недостаточная для испытаний на усталость эффективность возбуждения);
- возбуждение от струй жидкости (масла или масляного тумана) – наиболее высокая эффективность возбуждения при температуре до 220–250 °С (опасность эрозии лопаток, трудности использования для оценки демпфирования);
- возбуждение от вихревых токов (постоянных магнитов) – невысокая эффективность возбуждения колебаний деталей из титановых и никелевых сплавов, опасность перегрева лопаток, помехи в работе измерительной аппаратуры);
- возбуждение колебаний через магнитные подшипники опор ротора.

Сравнительный анализ авторов показывает, что наиболее эффективен (с точки зрения обеспечения достаточного уровня вибрационных напряжений, необходимого для получения усталостного разрушения лопатки) является возбуждение струями масла, за этим способом следует воздушное возбуждение.

Требуемая при этом точность регулирования частоты вращения перфорированного диска составляет  $\pm 0,5$  об/мин. Это может быть обеспечено специальной системой управления частотой вращения либо при использовании в качестве привода воздушной турбины.

Подобные испытания предъявляют и особые требования к системе измерения. Желательно использование бесконтактных систем измерения колебаний лопаток. Традиционные системы с тензорезисторами непригодны – тензодатчики не выдерживают таких нагрузок.

В данной работе для определения первой собственной частоты и формы колебаний лопатки возбуждение колебаний в лопатке производится прерывистым воздушным потоком. Система измерения деформаций – контактная, с использованием тензорезисторов.

Установка состоит из следующих основных узлов (рис. 4): исследуемой компрессорной лопатки, закрепленной консольно в зажиме станины; пневматического вибратора с элект-

троприводом; блока подачи сжатого воздуха; блока питания электропривода; блока измерения деформаций (напряжений), компьютера.

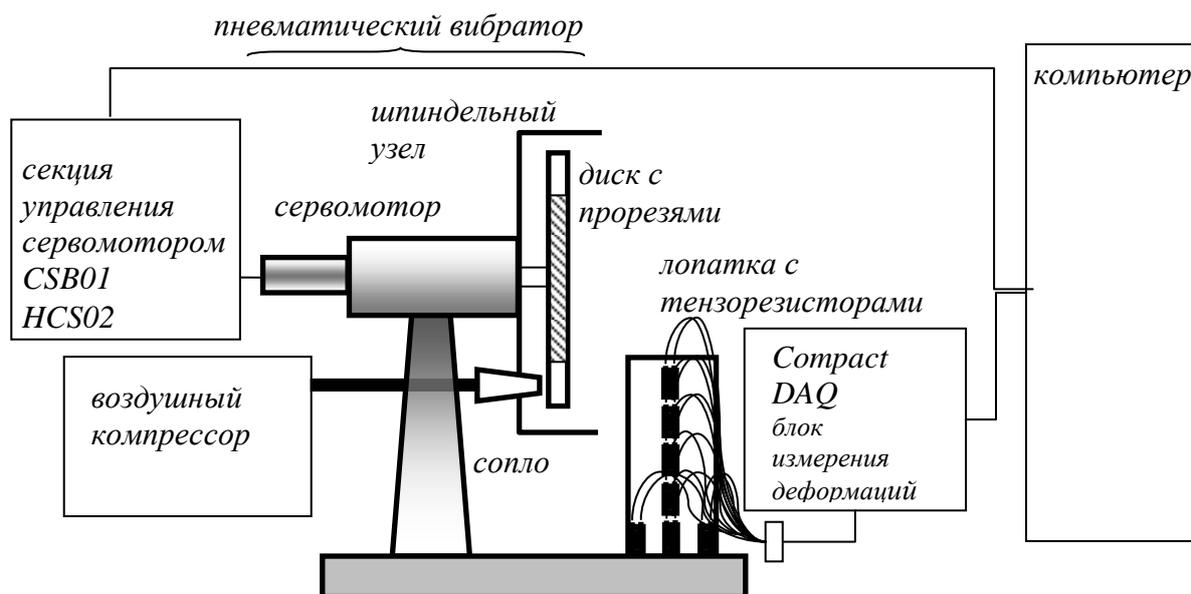


Рис. 4. Схема установки

**Объектом исследования** является процесс колебаний (вибрация) компрессорной лопатки первой ступени турбовинтового двигателя НК-12, консольно закрепленной в зажиме, имитирующем замок типа «ласточкин хвост». Для измерения деформаций на лопатку наклеено 7 тензометрических датчиков. Схема расположения датчиков представлена на рис. 5. Геометрические и механические характеристики лопатки представлены в виде рабочего чертежа лопатки на бумажном носителе и электронной 3-D модели для проведения расчета в конечноэлементном пакете ANSYS. Для упрощения проведения приближенного расчета по приведенной выше методике необходимые исходные данные сведены в таблицу (табл. 1, с. 32).

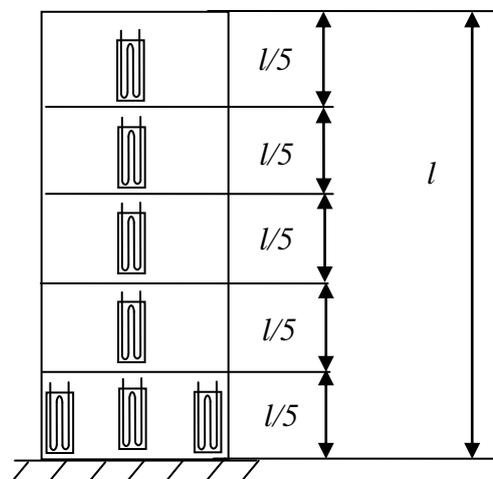


Рис. 5. Схема наклейки тензодатчиков

Возбуждение колебаний лопатки производится с помощью **пневматического вибратора** (рис. 4). Он представляет собой диск, имеющий **Z** радиальных вырезов на периферии, который установлен на специальном шпинделе. Привод шпинделя осуществляется от сервомотора. Использование шпинделя позволяет разгрузить вал мотора от возникающих

в процессе работы осевых сил. Конструктивно шпиндель выполнен заодно с соплом, к которому через гибкий армированный рукав подводится сжатый воздух от компрессора и через которое организуется выпуск сжатого воздуха непосредственно через диск на лопатку. Шпиндель имеет узлы крепления, позволяющие менять его высоту относительно основания, и, соответственно, точку приложения усилия. Шпиндель с соплом и узлами крепления образует шпиндельный узел. Крепление шпиндельного узла и лопатки для увеличения жесткости (что, в свою очередь, обеспечивает стабильность точки приложения усилия) произведено на едином массивном основании.

Вырезы на перфорированном диске расположены равномерно по окружности и занимают одинаковые центральные углы (величина углов зависит от количества прорезей). Через вырезы в диске пропускается струя сжатого воздуха, которая попадает на верхнюю часть пера лопатки. При вращении диска струя прерывается и на лопатку действует сила  $Q$ , изменяющаяся во времени примерно так, как показано на рис. 6.

Частота возбуждающей силы

$$f = nz,$$

где  $n$  – обороты электропривода в секунду;  $z$  – число вырезов диска.

Период возбуждающей силы:

$$T = \frac{1}{f}.$$

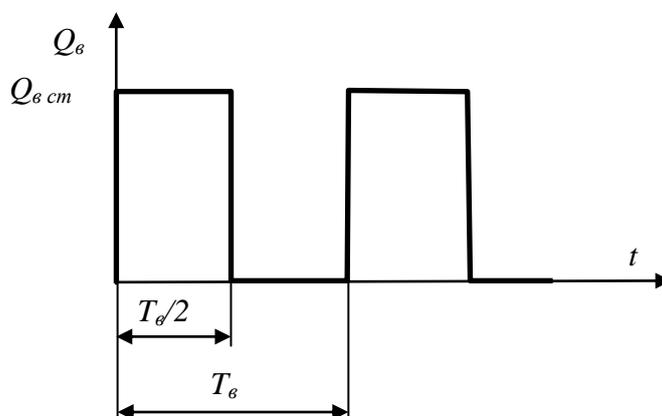


Рис. 6. Зависимость возбуждающей силы от времени

Зависимость  $Q = Q(t)$ , изображенную на рис. 6, можно представить аналитически, разложив ее в ряд Фурье:

$$Q(t) = \frac{Q_{ст}}{2} + \frac{2}{\pi} Q_{ст} \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{2}{3\pi} Q_{ст} \sin 3 \frac{2\pi}{T} t + \dots$$

Учитывая выражение для угловой частоты

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

можем записать:

$$Q(t) = \frac{Q_{ст}}{2} + \frac{2}{\pi} Q_{ст} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} Q_{ст} \sin 3\omega t + \dots$$

Таким образом, видим, что пульсирующую силу, действующую на лопатку, можно представить как сумму элементарных сил, изменяющихся во времени по гармоническому закону. Эти элементарные составляющие силы называются гармониками возбуждающей силы. Для данного случая:

$\frac{Q_{ст}}{2}$  – нулевая гармоника (статическая составляющая);  $\frac{2}{\pi} Q_{см} \sin \omega \cdot t$  – первая гармоника;  $\frac{2}{3\pi} Q_{см} \sin 3\omega \cdot t$  – третья гармоника и т.д.

При совпадении частоты какой-либо из гармоник возбуждающей силы с любой из собственных частот лопатки возникает резонанс.

При совпадении частоты первой гармоники возбуждающей силы с низшей собственной частотой лопатки возникает резонанс первой собственной формы. В этом случае частота колебаний лопатки:

$$f_0 = f = nz.$$

**Пневмоблок** представляет собой воздушный поршневой компрессор высокой производительности, который направляет сжатый воздух по армированному шлангу в выходную магистраль, оканчивающуюся соплом.

Схема пневмоблока показана на рис. 7.

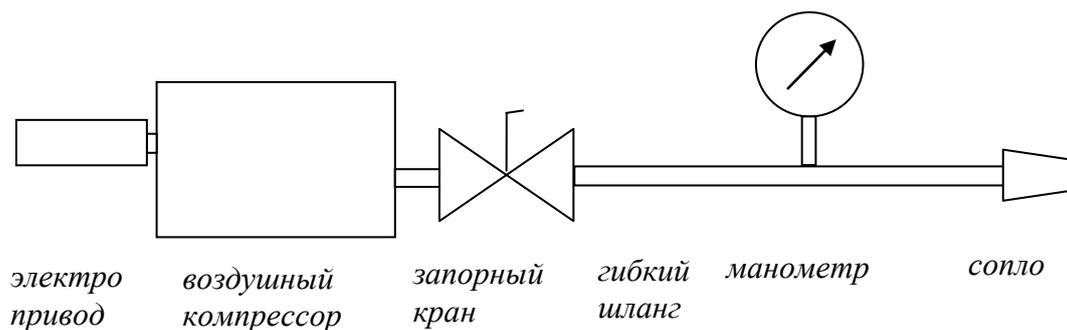


Рис. 7. Схема пневмоблока

Контроль давления проводится по манометру. Для регулирования подачи сжатого воздуха используется запорный кран.

**В качестве электропривода вибратора** (рис. 4) используется синхронный сервомотор с инкрементальным энкодером MSK030C фирмы BOSCH REXROTH. Инкрементальный энкодер (датчик оборотов) позволяет обеспечивать стабильность частоты вращения.

Сервомотор запитывается от силового блока HCS02 и управляется от секции управления CSB01, которая, в свою очередь, имеет двустороннюю связь (на прием и передачу информации) по протоколу RS232 с компьютером. Секция управления закреплена на силовом блоке, который привернут к настенной монтажной панели.

Блок-схема электропривода установки представлена на рис. 8.

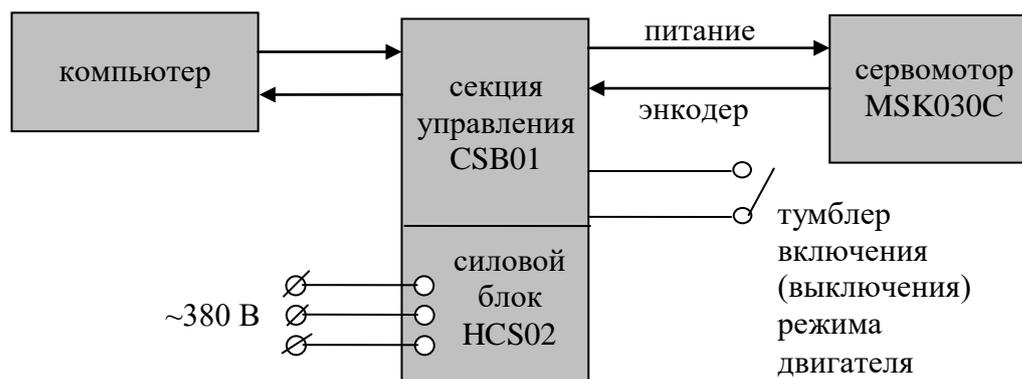


Рис. 8. Блок-схема электропривода установки

Запуск и останов сервомотора можно осуществлять как с компьютера – через программный интерфейс, так и с помощью тумблера включения – выключения режима двигателя.

**Измерение деформаций и напряжений** в лопатке производится с помощью семи тензорезисторов, наклеенных на исследуемую лопатку так, как показано на рис 5. Такая схема наклейки была выбрана исходя из задачи определения формы колебаний в условиях ограничения по количеству тензорезисторов. Она не дает полного представления о распределении напряжений по перу лопатки. Для этого необходима информация о напряжениях на кромках и корытце лопатки. Подробно все аспекты тензометрических измерений рассмотрены в лабораторной работе [2]. Задачи тензометрирования элементов (лопаток, дисков, и т.д.), аналогичные настоящей, решаются реализацией четвертьмостовой схемы измерения. При этом тензорезистор, наклеиваемый на исследуемый объект (лопатку), является одним из плеч моста.

Система измерения реализована на платформе CompactDAQ фирмы NI. Для проведения тензометрических измерений платформа укомплектована модулями NI 9237. Каждый модуль имеет 4 независимых канала и позволяет реализовывать мостовую и полумостовую схемы измерения с проведением одновременных выборок по каналам с частотой выборок 50 kS/s.

Такая частота выборок позволяет оценить динамические параметры регистрируемого сигнала с учетом фазовых характеристик.

Реализация четвертьмостовой схемы на данном модуле возможна либо использованием компенсационного тензорезистора, либо использованием внешнего прецизионного резистора во втором плече моста, что и реализовано в данной работе. В результате получается полумостовая схема.

Оцифрованный в модуле NI 9237 сигнал через платформу CompactDAQ, соединенную с компьютером USB шлейфом, передается в компьютер, где он в основной программе обрабатывается, визуализируется и записывается на диск в виде ASCII кода.

Схема системы измерения деформаций на примере одного канала приведена на рис. 9.

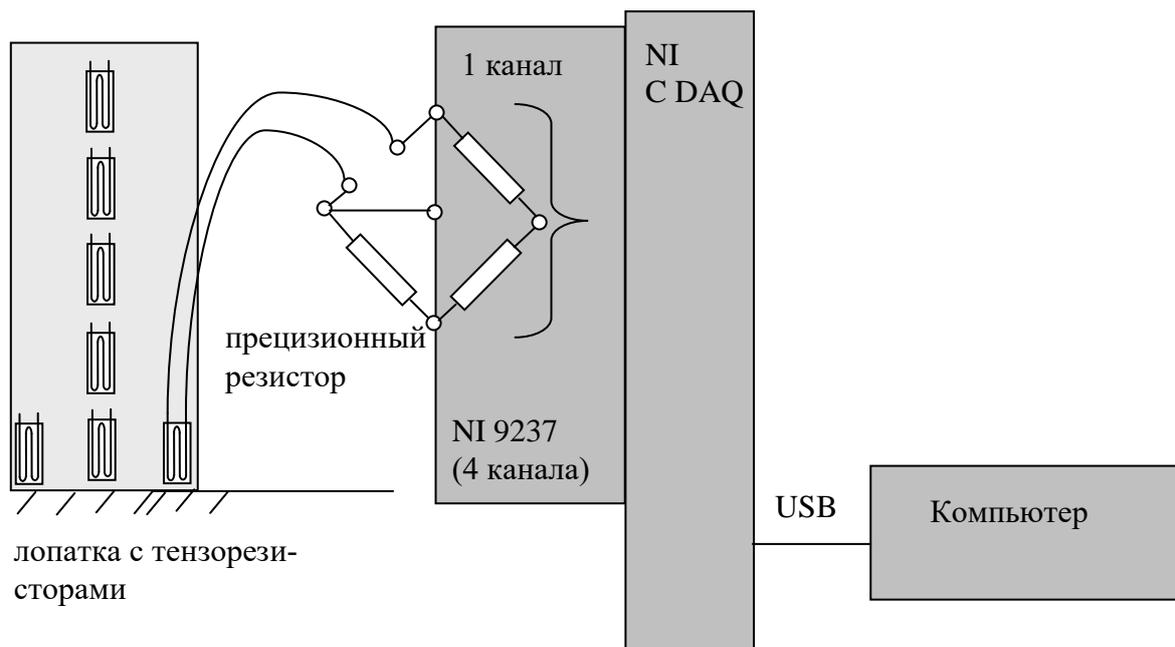


Рис. 9. Схема системы измерения деформаций

Кроме сигналов с датчиков деформаций, в этот же компьютер поступает информация от секции управления CSB01 электропривода о частоте вращения сервомотора.

### 3. ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ УСТАНОВКОЙ И СНЯТИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Запуск программы осуществляется двойным нажатием на иконку программы «Стенд ВВ», размещенной на рабочем столе компьютера. Здесь и дальше для описания содержимого сканы окон поделены на области. Области синего цвета содержат лишь элементы индикации, области красного цвета помимо элементов индикации содержат элементы управления стендом. Ссылка на область по тексту указывается в круглых скобках ( ).

После запуска программы «Стенд ВВ» на экране появляется окно (рис. 10). Это окно содержит установочные параметры для формирования мостовой схемы подключения тензорезисторов и сбора информации. Необходимые параметры уже введены в соответствующие индикаторы, поэтому менять ничего не требуется. Для перехода в следующее окно необходимо нажать кнопку (1) «Калибровать каналы». В этот момент происходит калибровка всех каналов тензорезисторов, поэтому на лопатку не должны действовать внешние силы. Основное окно программы представлено на рис. 11.

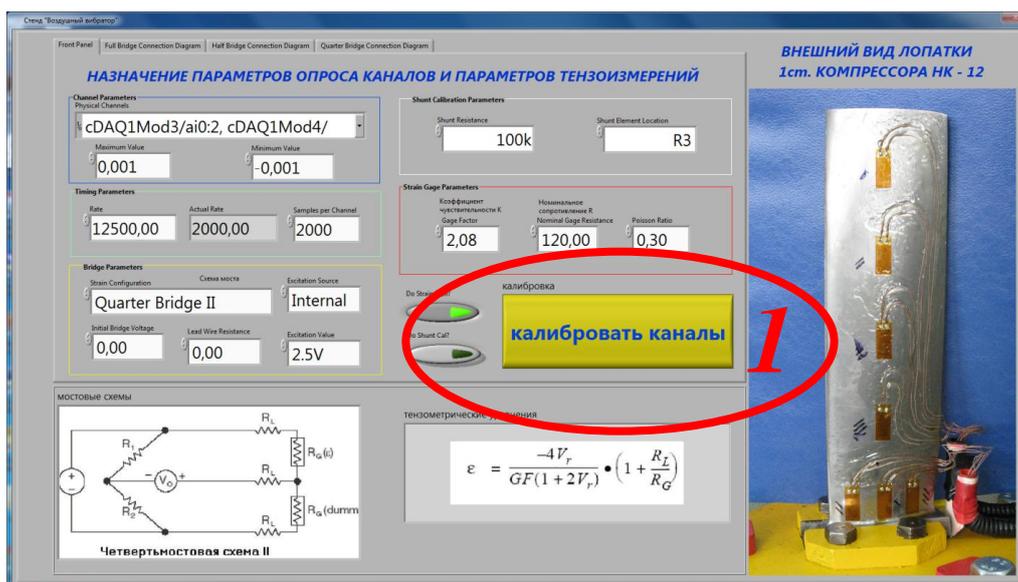


Рис. 10. Окно задания начальных параметров сбора

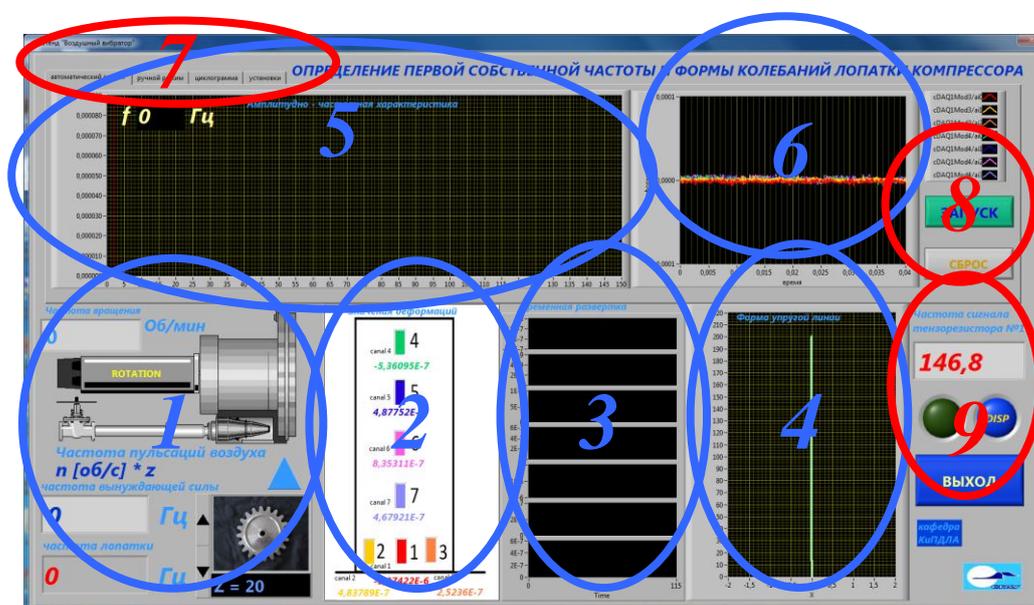


Рис. 11. Основное окно программы

В левом нижнем углу расположена мнемоническая схема пневматического возбудителя и дисплей частоты вращения перфорированного диска (1). Под ними приведен селектор выбора перфорированного диска (с фотографией) с указанием числа прорезей ( $Z = 20$ ). Этот диск установлен на установке по умолчанию. Число прорезей диска определяет частоту пульсаций воздушного потока, подаваемого на лопатку, и именно она является частотой вынуждающей силы. Индикатор этой частоты (с синими цифрами) расположен рядом. Под ним имеется еще один индикатор – «Частота лопатки». Цифры на нем отображаются красным цветом. Этот индикатор представляет собой отфильтрованный и обработанный сигнал частоты, выделяемый из регистрируемых показаний тензорезистора № 1 (в цифровом виде исходный сигнал представлен на индикаторе с красными цифрами в области 9). Оба описанных индикатора сгруппированы вместе для удобства наблюдения. Они позволяют судить о характере возбуждения колебаний: возбуждение основным тоном – при совпадении частоты колебаний лопатки и частоты вынуждающей силы, либо возбуждение гармоникой – когда указанные частоты отличаются кратно.

Правее области 1, в продолжение мнемонической схемы, расположена область 2 со схемой объекта исследования – лопатки с приклеенными к ней тензорезисторами. На схеме все тензорезисторы пронумерованы поканально, и каждому каналу присвоен свой цвет. Для удобства восприятия данное цветовое распределение используется на всех графических индикаторах экрана. Рядом со значками тензорезисторов расположены цифровые индикаторы значений деформации, которые ими регистрируются.

В области 3 представляется поканальная временная развертка значений деформаций. Каждый тензорезистор (при настройках по умолчанию) опрашивается 12 500 раз в секунду. Сигнал, получаемый с такой высокой частотой опроса, несет в себе информацию о динамическом характере, что наиболее наглядно воспринимается в виде представленных осциллограмм.

В области 4 отображается форма упругой линии лопатки в схематизированном виде. Несмотря на несколько упрощенный вид отображения, форма строится по регистрируемым показаниям тензорезисторов. В основе построения лежит математическая модель, описанная ниже.

В области 6 поканальные временные развертки сведены на одну осциллограмму, что обеспечивает удобство мониторинга фазовых характеристик сигналов и знаков в отношениях амплитуд сигналов. Эти параметры определяют форму колебаний лопатки. Кроме того, осциллограмма дает представление о распределении деформаций (а следовательно, и напряжений) по высоте лопатки.

Область 5 предназначена для построения амплитудно-частотной характеристики лопатки в процессе эксперимента.

После запуска электропривода кнопкой «Запуск» (область 8) он начнет плавно разгоняться. Значение частоты вынуждающей силы дублируется на индикаторе в верхнем левом углу диаграммы АЧХ и визуализируется в виде подвижного вертикального красного бегунка. При этом автоматически начинается запись амплитудно-частотной характеристики. Следует отметить, что на каждой частоте вынуждающей силы измеряются и выводятся на диаграмму АЧХ амплитуды **всех** каналов тензорезисторов, т.е. цветовое представление АЧХ несет в себе информацию о наиболее нагруженных каналах. При необходимости очистки диаграммы АЧХ от имеющейся информации можно нажать кнопку «Сброс» в области 8.

Индикатор процесса записи АЧХ (зеленый) расположен в области 9. Другой индикатор (синий) свидетельствует о характере значений тензорезисторов, используемых для построения формы упругой линии: если сигнал имеет моногармонический характер, в модели упругой линии выделяется значение его амплитуды, при сложном полигармоническом, зашумленном или случайном характере сигнала используются его усредненные значения.

Программа может работать в нескольких режимах: ручном, автоматическом, режиме выполнения циклограммы. Переключение режимов осуществляется селектором выбора режима (на вкладках), представленном в области 7. Кроме указанных имеется вкладка «Уста-

новки», которая носит служебный характер и предназначена для отладки и диагностики стенда.

Для выполнения данной лабораторной работы можно использовать автоматический и ручной режимы. В ручном режиме есть возможность задания частоты вращения и поддержания ее. В лабораторной работе этот режим не рекомендуется для использования. Он предназначен для проведения исследовательских работ с другими объектами. В автоматическом режиме разгон перфорированного диска происходит автоматически, с заданным ускорением. Для экспериментального определения первой собственной частоты вполне достаточно автоматического режима. Данная вкладка открывается по умолчанию.

Выход из программы осуществляется нажатием кнопки «Выход» в области 9.

#### 4. КОНЦЕПЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФОРМЫ УПРУГОЙ ЛИНИИ ЛОПАТКИ

Модель построена на базовых постулатах изгиба и деформаций и более подробно описана в [2].

Лопатка представляется в виде бруса со ступенчато изменяемыми площадями сечений, предполагается, что воздействующий на лопатку пульсирующий воздушный поток вызывает в ней исключительно изгибные деформации.

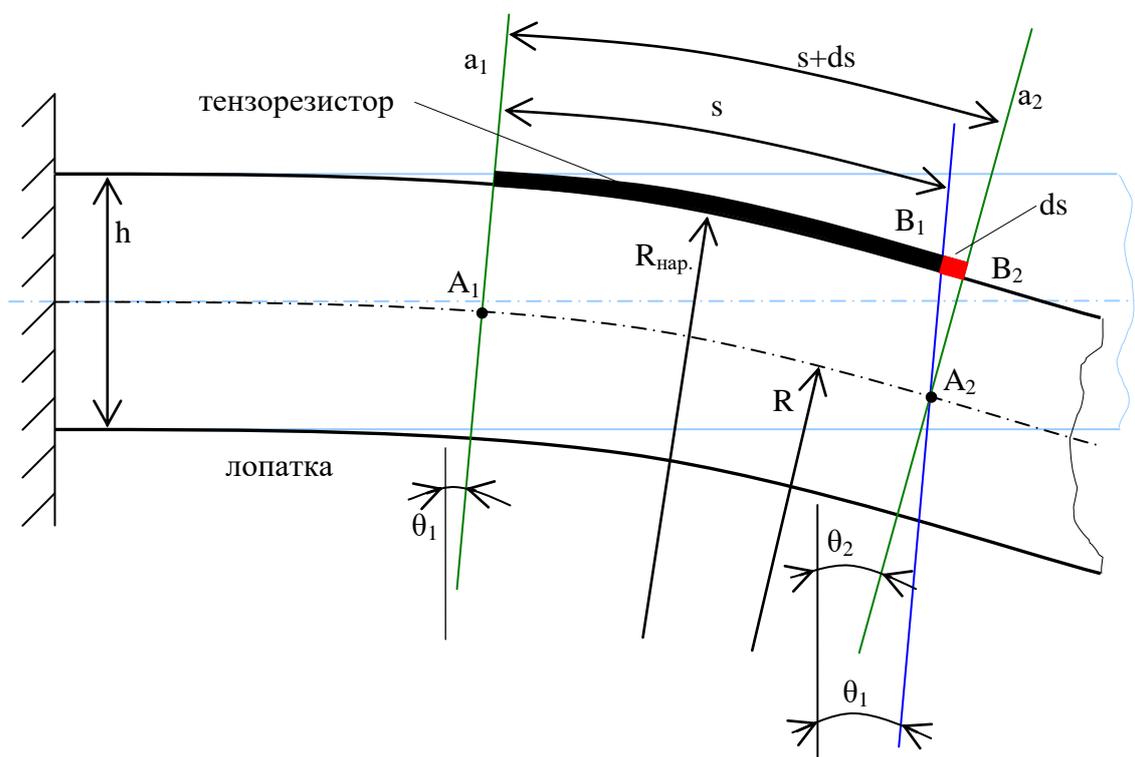


Рис. 12. Схема деформированного участка лопатки с тензорезистором

Наклеенный на лопатку тензорезистор (в пределах его базы  $s$ ) в процессе изгибной деформации лопатки удлиняется или укорачивается (в зависимости от направления изгиба). На рис. 12 база тензорезистора  $s$  получает приращение  $ds$ .

В соответствии с постулатами изгиба средняя линия балки изгибается без изменения линейного размера, а сечения, определяющие границы базы тензорезистора  $a_1$  и  $a_2$  (показаны зеленым цветом), поворачиваются на углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , оставаясь перпендикулярными к касательной к средней линии в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Проведя через точку  $A_2$  прямую, параллельную сечению  $a_1$ , нетрудно заметить, что в пределах этой прямой и прямой сечения  $a_1$  размер базы тензорезистора  $ds$  сохраняется неизменным (т.к. этот размер равен длине дуги  $A_1A_2$  средней

линии). Приращение  $ds$  (считая его прямым отрезком, из треугольника  $A_2B_1B_2$ ) происходит в пределах угла  $(\theta_2 - \theta_1)$ .

Таким образом, измерив с помощью тензорезистора величину деформации  $\varepsilon$  и зная величину базы тензорезистора  $s$ , из определения деформации

$$\varepsilon = \frac{ds}{s}$$

можно рассчитать величину приращения  $ds$ .

Учитывая, что в треугольнике  $A_2B_1B_2$  приращение  $ds$  является катетом, другим же катетом является  $h/2$ , из базового соотношения для треугольника

$$\frac{2ds}{h} = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1)$$

можно определить величину угла  $(\theta_2 - \theta_1)$ .

Учитывая, что угол  $(\theta_2 - \theta_1)$  является центральным углом дуги  $A_1A_2$  средней линии, а также дуги  $s + ds$ , по полученному значению угла  $(\theta_2 - \theta_1)$  и величине  $s + ds$  можно определить радиус этой дуги  $R_{\text{нар.}}$ :

$$R_{\text{нар.}} = \frac{s + ds}{\theta_2 - \theta_1},$$

а по полученной величине вычислить радиус средней линии:

$$R = R_{\text{нар.}} - \frac{h}{2}.$$

По высоте лопатки расположено пять тензорезисторов. Условно разделив длину лопатки на пять участков и, сделав допущение, что в пределах каждого из участков величина деформаций остается постоянной и равной величине измеренной на базе соответствующего каждому из участков тензорезистору (чистый плоский изгиб), форма упругой линии лопатки может быть представлена как кусочно-непрерывная функция, содержащая пять значений радиусов. Однозначность взаимного расположения полученных пяти дуг определяется граничными условиями: при переходе одной дуги в другую радиусы соседних дуг должны лежать на одной прямой (прямые, проходящие через центры соседних дуг проходят через точки примыкания этих дуг – для обеспечения плавных переходов и исключения изломов).

Отдельное условие для первой (считая от основания) дуги – ее центр располагается на перпендикуляре к упругой линии лопатки в точке заделки. Сформулированные граничные условия позволяют по полученному массиву из пяти радиусов кривизны однозначно построить упругую линию лопатки.

Данная модель не дает возможности идентификации крутильных форм колебаний. Для этого на лопатке кроме пяти указанных тензорезисторов по длине дополнительно имеется еще два тензорезистора в зоне замковой части лопатки, с их помощью реализована более сложная модель. В данной работе для поиска и визуализации первой собственной частоты эта задача неактуальна.

Представленные основные принципы построения модели реализованы с использованием зависимостей аналитической геометрии в законченный программный модуль, который позволяет производить визуализацию упругой линии лопатки «на лету» – по мере поступления измеренных значений деформаций с тензорезисторов.

## 5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

### Расчет

1. Получить исходные данные и провести расчет.

Расчет в конечноэлементном пакете ANSYS подразумевает проведение модального анализа по методике [3]. Модель лопатки предоставляется преподавателем.

Расчет по приближенной методике подразумевает определение исходных данных для расчета по предоставляемым преподавателем рабочим чертежам с заполнением таблиц (табл. 1, 2).

2. Рассчитать низшую собственную частоту компрессорной лопатки по формуле А.Е. Шнейдмана.

3. Результаты расчета по обоим методикам сравнить с представленным ниже.

4. Попытайтесь объяснить расхождение результатов расчета, полученных в конечно-элементном пакете и приближенного.

### Эксперимент

Эксперимент проводится инженером кафедры в присутствии преподавателя.

Последовательность эксперимента следующая:

Включить компьютер.

Включить электропитание стенда.

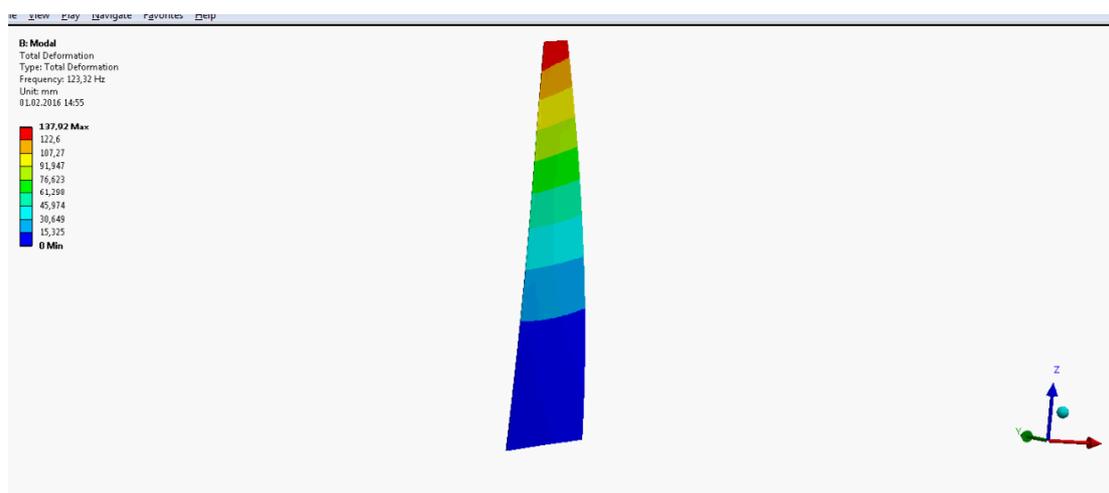


Рис. 13. Результаты по первой собственной частоте из модального анализа лопатки

Подать питание 24 В на секцию управления CSB01. Проконтролировать появление на дисплее секции управления надписи «bb». В случае появления сообщения об ошибке провести сброс ее кнопкой «Esc» на секции управления.

Подать силовое питание 380 В на силовой блок HCS02.

Проконтролировать появление на дисплее секции управления надписи «ab».

Включить питание системы измерения CompactDAQ.

Запустить на компьютере программу «Стенд ВВ». Иконка этой программы имеется на рабочем столе.

В начальный момент запуска происходит установление связи компьютера с приводом и системой измерения. Компьютер приводит привод в состояние готовности к приему команд. В случае готовности на дисплее секции управления появляется надпись «AF». В момент запуска программы происходит калибровка тензорезисторов. Работоспособность тензорезисторов после запуска программы можно проверить по показаниям на диаграмме (область 4, рис. 11) в свободном состоянии. Немного нажав на лопатку пальцем, убедиться в правдоподобности регистрируемых показаний.

Установить на экране программы автоматический режим.

Включить компрессор и открыть магистраль подачи воздуха к соплу шпиндельного узла.

Проконтролировать давление воздуха в магистрали.

Включить вращение перфорированного диска тумблером «ВВ» (или кнопкой «Запуск» (8, рис. 11).

В ходе испытаний в целях безопасности не стоять в плоскости вращения диска.

Диск разгонится до 460 об/мин и будет поддерживать эти обороты. Такой частоты достаточно для прохождения первого резонанса. Резонансный режим будет наглядно видно по амплитудно-частотной характеристике, отрисовываемой программой в ходе эксперимента. Уточнить частоту можно по АЧХ с помощью курсора.

Тумблером «ВВ» (или кнопкой «Останов» (8, рис. 11) выключить сервопривод.

Вывести записанные в ходе эксперимента показания тензорезисторов. Найти показания, соответствующие резонансному режиму и записать их в тетрадь.

Пересчитать записанные показания деформаций в напряжения.

Построить в некотором масштабе кривые распределения напряжений в лопатке, колеблющейся на низшей собственной частоте в предположении постоянства напряжений по сечению пера. Такое предположение можно сделать из анализа приведенного результата расчета распределения напряжений по рис. 13, с. 43. Определить форму этих колебаний.

## **6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Отчет о выполненной работе должен содержать:

- изложение цели работы;
- исходные данные (табл. 1, с. 32) и расчетную схему;
- основные расчетные формулы;
- протокол расчета (табл. 2, с. 32);
- схему установки для испытаний лопатки (рис. 4);
- результаты испытаний – экспериментально определенную низшую собственную частоту лопатки, распределение напряжений, схему найденной формы колебаний;
- анализ полученных результатов.

## **7. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Ножницкий Ю.А., Федина Ю.А., Милатовик Б. Применение динамических разгонных стендов для исследований вибрационной прочности деталей роторов // Тезисы доклада на международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития двигателестроения», Самара, Россия, 24–26 июня 2009 г. Т. 2, С. 70–71.

2. Лежин Д.С. Основы тензометрии двигателей летательных аппаратов: электронное учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета, 2016.

3. Создание параметрических расчетных моделей лопаток и дисков ГТД в конечно-элементном пакете ANSYS: метод. указания / сост. П.В. Бондарчук, А.М. Уланов. Самара: Изд-во Самарского национального исследовательского университета, 2016.

4. Динамика элементов и узлов роторов двигателей летательных аппаратов. Лабораторные работы / А.И. Белоусов [и др.] // КуАИ, 1977.

## **8. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ**

1. Что такое собственная частота и собственная форма колебаний?
2. Сколько собственных частот имеет лопатка и почему?
3. Каким методом можно определить собственные частоты лопатки и в чем его суть?
4. Какими способами можно возбуждать колебания в лопатке? Назовите их особенности.

5. Назовите критерии, по которым идентифицируется собственная частота колебаний.
6. Какой расчетный метод используется для вычисления первой собственной частоты? В чем его основная идея?
7. По значениям, получаемым с тензорезисторов в ходе эксперимента, сделайте сравнение амплитуд, частот и фаз колебаний в различных точках лопатки на собственной частоте.
8. Проанализируйте полученную АЧХ. Выделите полученные пики и дайте им характеристику.
9. Чем можно объяснить несовпадение значений первой собственной частоты на АЧХ при нахождении ее сканированием снизу вверх и сверху вниз по частоте?
10. Какая полезная информация может быть извлечена из полученной АЧХ?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### КОЛЕБАНИЯ ДИСКА

**Цель работы:** знакомство с теоретическими и экспериментальными методами исследования колебаний дисков.

Диски роторов являются одними из наиболее напряженных элементов конструкций. Разрушение дисков часто ведет к катастрофическим последствиям.

Одной из причин, вызывающей разрушение дисков, могут быть их колебания.

#### **1. РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ДИСКА**

В большинстве случаев полотно дисков допустимо рассматривать как круглую пластину. С теорией колебаний круглых пластин можно познакомиться в работах [1–4] и др.

Дифференциальное уравнение статического изгиба пластины постоянной толщины  $\delta$  при малых перемещениях:

$$\nabla^2 \nabla^2 \cdot \zeta = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (1)$$

где ( $\nabla$  – nabla)  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$  – дифференциальный оператор Лапласа;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;

координатные оси  $x$  и  $y$  располагаются в плоскости пластины, ось  $z$  нормальна к этой плоскости;

$\zeta$  – перемещения по оси  $z$  (прогиб);

$q(x, y)$  – интенсивность нормальной нагрузки;

$D = \frac{E \cdot \delta^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость. По физическому смыслу она представляет жесткость на изгиб полоски, ширина которой единица, а высота  $\delta$ ;

$\mu$  – коэффициент Пуассона;

$E$  – модуль упругости первого рода.

В динамике к статическим нагрузкам добавляются силы инерции. Добавив к выражению (1) интенсивность (приходящуюся на единицу площади) сил инерции

$$q_1 = -\rho \cdot \delta \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \cdot \left( \frac{F_{\text{диска}}}{F_{\text{диска}}} \right), \quad (2)$$

где  $F_{\text{диска}}$  – площадь диска;

$\rho$  – массовая плотность материала диска,

можно получить уравнения движения:

$$\nabla^2 \nabla^2 \cdot \zeta = \frac{q(x, y, t)}{D} + \frac{q_1(x, y, t)}{D}. \quad (3)$$

С учетом вышеизложенного:

$$\nabla^2 \nabla^2 \cdot \zeta + \frac{12 \cdot \rho \cdot (1 - \mu^2)}{E \cdot \delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{D} \cdot q(x, y, t). \quad (4)$$

При свободных колебаниях нагрузка  $q(x, y, t) = 0$ . Таким образом, уравнение (4) превращается в однородное (п.ч. = 0), и решение уравнения (4) ищется в форме

$$\zeta = w(x, y) \cos \omega_0 t, \quad (5)$$

где  $w(x, y)$  – амплитуды смещений точек диска (зависящие от координаты);  $\omega_0$  – собственная угловая частота.

Подставив (5) в однородное уравнение (4)

$$\nabla^2 \nabla^2 \cdot w - \alpha^4 w = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha^4 = \omega_0^2 \cdot \frac{12 \cdot \rho \cdot (1 - \mu^2)}{E \cdot \delta^2}, \quad (7)$$

уравнение (6) можно представить в виде

$$(\nabla^2 - \alpha^2)(\nabla^2 + \alpha^2)w = 0,$$

откуда видно, что решениями уравнения являются решения более простых уравнений:

$$(\nabla^2 - \alpha^2)w = 0; \quad (8)$$

$$(\nabla^2 + \alpha^2)w = 0; \quad (9)$$

или в развернутой записи:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha^2 w = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha^2 w = 0. \quad (11)$$

Уравнение (6) имеет бесчисленное множество решений. Ограничение количества решений можно получить введением граничных условий, которые конкретизируют условия закрепления диска.

Для круглого диска в формулах (8), (9) целесообразно от амплитудной функции  $w$  перейти к полярным координатам  $r, \varphi$ .

При переходе от декартовых координат к полярным оператор Лапласа принимает следующий вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

Таким образом, уравнения (8) и (9) в полярных координатах можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \alpha^2 w = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \alpha^2 w = 0. \quad (13)$$

Общее решение этих уравнений, соответствующее колебаниям круглой пластины постоянной толщины с  $m$  узловыми диаметрами, представляется в форме:

$$w(r, \varphi) = w_m(r) \cos m\varphi, \quad (14)$$

где  $w_m(r) = AI_m(kr) + BY_m(kr) + CI_m(ikr) + DY_m(ikr)$ ,

$I_m(kr), I_m(ikr)$  – функции Бесселя первого рода действительного и мнимого аргументов ( $i = \sqrt{-1}$ );

$Y_m(kr), Y_m(ikr)$  – функции Бесселя второго рода действительного и мнимого аргументов;

$m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ;

$A, B, C, D$  – константы, которые определяются из конкретных граничных условий;

$k = \alpha R$ ;

$R$  – наружный радиус диска,

$\alpha$  – собственное число, было определено в формуле (7).

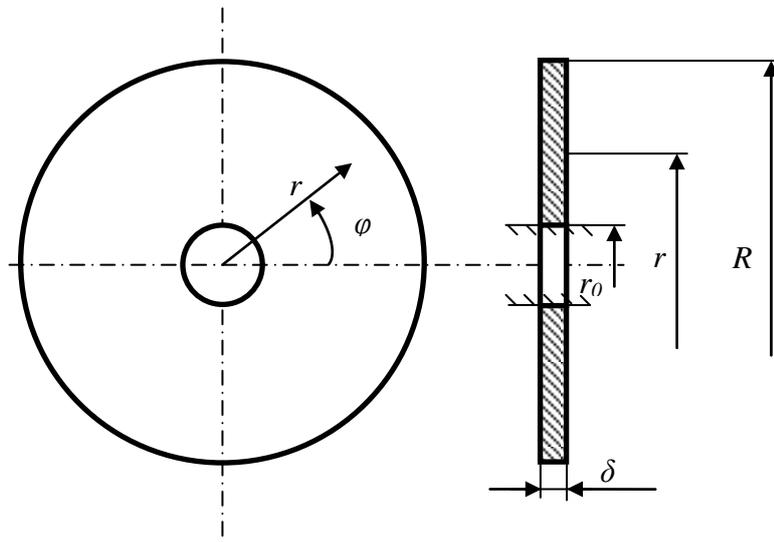


Рис. 1. Расчетная схема диска

С введенными в рассмотрение функциями Бесселя можно познакомиться в работе [5]. Для этих функций, подобно тому, как это сделано для тригонометрических функций, составлены специальные таблицы [5]. В данной работе рассматривается задача для диска, который на внутреннем радиусе  $r_0$  зашпелен, а на наружном радиусе  $R$  свободен. Для этого случая граничные условия будут следующими:

при $r = r_0$	$w(r_0) = 0$ – прогиб	$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ – угол поворота,
при $r = R$	$M(R) = 0$ – погонный момент	$Q(R) = 0$ – обобщенная погонная перерезывающая сила

Используя эти граничные условия с помощью уравнения (6) для каждого из значений  $m$ , можно получить систему четырех однородных уравнений первого порядка относительно констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Эта система позволяет исключить три из четырех констант и тем самым определить формы колебаний. Приравняв к нулю определитель этой системы, можно получить уравнение для определения  $k$ , что дает возможность из выражения (7) с учетом соотношения  $k = \alpha R$  найти собственные угловые частоты:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{R}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{D}{\delta \cdot \rho}}. \quad (15)$$

Как отмечалось выше, величина  $m$  может принимать целые значения от 0 до  $+\infty$ . Нетрудно видеть из (14), что значение  $m$  соответствует числу волн деформаций, укладываемых по окружности диска.

Таким образом, степень собственных движений круглых пластин включает в себя бесчисленное множество собственных форм, имеющих различное число волн деформаций, укладываемых по окружности диска. Кроме того, каждому из значений  $m$  соответствует бесчисленное множество собственных форм, имеющих различное число узловых окружностей. Спектр собственных форм (узловых линий) круглой пластины представлен на рис. 2; таблица, изображенная на ней, может быть продолжена вправо и вниз до сколь угодно больших целых значений  $m$  и  $n$ .

$n \setminus m$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					

Рис. 2. Таблица спектра собственных форм

Как видно,  $n$  соответствует числу узловых окружностей, а  $m$  – числу узловых диаметров. Таким образом, любая из форм собственных колебаний диска может быть выделена двумя целыми числами  $m$  и  $n$ . Каждой из этих собственных форм соответствует определенная собственная частота.

Тогда вместо выражения (15) запишем:

$$\omega_{0mn} = \left(\frac{k_{mn}}{R}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{D}{\delta \cdot \rho}}. \quad (16)$$

Значения  $k_{mn}$  для различных  $\alpha = \frac{r_0}{R}$  вычислены и приведены на рис. 3 [1].

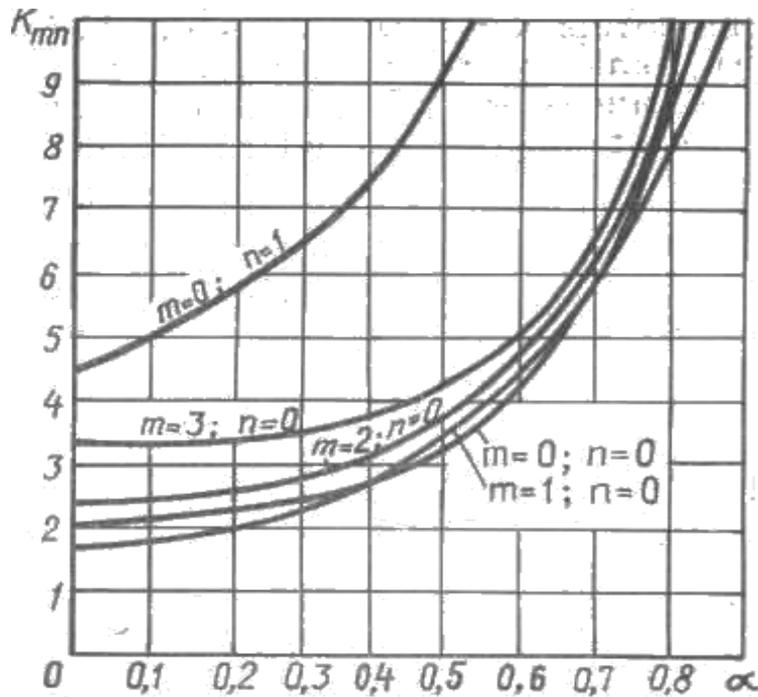


Рис. 3. Зависимость  $k_{mn}$  от  $\alpha$

Для других условий закрепления круглой пластины спектр собственных форм будет выглядеть аналогично представленному на рис. 2. Собственная частота может быть вычислена по формуле (16), в которую значение  $k_{mn}$  должно подставляться в соответствии с заданными граничными условиями. Коэффициенты  $k_{mn}$  вычислены для различных вариантов закрепления пластины постоянной толщины (см., например, [1]). Способы расчета на колебания дисков переменной толщины изложены в [2–4] и др.

### ЗАМЕЧАНИЯ О СПЕКТРАХ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИСКОВ

Спектр собственных движений любых дисков качественно всегда описывается таблицей, представленной на рис. 2.

Отличительной особенностью любых собственных движений, для которых  $m \neq 0$  (эта часть таблицы на рис. 2 заштрихована), является то, что положение узловых диаметров в окружном направлении относительно диска неопределенно и зависит лишь от начальных условий, т.е. от того, как эти колебания были вызваны.

В то же время в теории колебаний линейно-упругих тел показывается, что любой из собственных частот соответствует строго определенной, фиксированной относительно тела форма колебаний (распределение амплитуд отклонений). Появление этого кажущегося противоречия связано с тем, что любой из собственных частот при  $m \neq 0$  соответствует не одна, а две аналогичные формы колебаний.

В самом деле, если решением уравнения (6) является

$$w_m^*(r\varphi) = w_m(r) \cos m\varphi, \quad (17)$$

то его решением будет и

$$w_m^{**}(r\varphi) = w_m(r) \sin m\varphi. \quad (18)$$

Эти две формы колебаний линейно независимы, но они аналогичны и имеют равные собственные частоты.

Поэтому, вызывая свободные колебания с собственной частотой  $\omega_{0n}$ , можно всегда вызвать одновременно колебания по этим двум формам.

Учитывая уравнения (17), (18) и общую теорию колебаний линейно-упругих тел, согласно которой свободные колебания в общем виде на любой из собственных форм совершаются во времени по гармоническому закону:

$$v(\bar{a}, t) = W(\bar{a}) \cos(\omega_0 t + \gamma),$$

где  $v(\bar{a}, t)$  – смещение точек тела;  $W(\bar{a})$  – амплитуда смещений точек тела;  $\bar{a}$  – вектор, определяющий координаты точек тела;  $\gamma$  – начальная фаза, можно получить

$$\begin{aligned} v_m(r\varphi t) &= v_m^*(r\varphi t) + v_m^{**}(r\varphi t) = \\ &= w_m(r) \cdot \left[ A^* \cos m\varphi \cos(\omega_{0m} t + \gamma_m^*) + A^{**} \sin m\varphi \cos(\omega_{0m} t + \gamma_m^{**}) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом выражении  $A^*$  и  $A^{**}$  являются константами, определяющими величину абсолютных амплитуд колебаний одной и другой формы. Зависят они от начальных условий. Начальные фазы  $\gamma_m^*$  и  $\gamma_m^{**}$  определяют сдвиг во времени одного собственного колебания относительно другого, имеющего ту же собственную частоту. Они также зависят от начальных условий. В частности, если  $\gamma_m^* = \gamma_m^{**} = \gamma_m$ , то колебания синфазны и

$$v_m(r\varphi t) = w_m(r) \left[ A^* \cos m\varphi + A^{**} \sin m\varphi \right] \cos(\omega_{0m} t + \gamma_m). \quad (20)$$

В данном случае положение узловых диаметров будет фиксированным относительно диска, а их расположение относительно него будет зависеть от конкретного соотношения  $A^*$  и  $A^{**}$ .

Если же, например,  $A^* = A^{**} = B$ , но  $\gamma_m^* = 0$ , а  $\gamma_m^{**} = \frac{\pi}{2}$ , то

$$v_m(r\varphi t) = A w_m(r) \cos(m\varphi + \omega t). \quad (21)$$

Это означает, что при начальных условиях, реализующих равенство амплитуд двух форм и их относительный сдвиг во времени на четверть периода колебаний, узловые диаметры будут вращаться относительно диска с угловой скоростью

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\omega_{0m}}{m}. \quad (22)$$

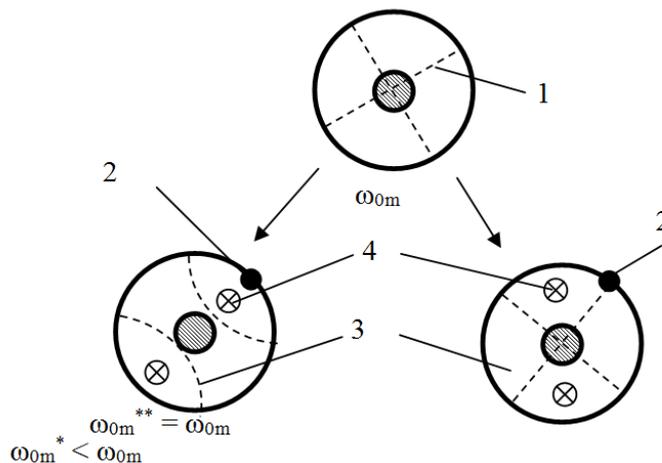
В общем случае начальных условий поведение диска при колебаниях с частотой может содержать в себе признаки, выраженные соотношениями (20) и (21).

Особенность спектра собственных движений круглого диска при  $m \neq 0$ , выраженная в соответствии данной собственной частоте  $\omega_{0m}$  двух идентичных, но независимых собственных движений, присуща, вообще говоря, любым линейно-упругим телам, обладающим осевой симметрией, т.е. не только дискам, но и кольцам, оболочкам и т.д.

Эта особенность проявляется лишь тогда, когда тело обладает математической строгой симметрией. Реальные тела, даже обладая конструктивной осевой симметрией, не являются строго симметричными. Введение асимметрии приводит к тому, что формы колебаний, описываемые в случае строгой симметрии выражением (14), в большей или меньшей степени искажаются, а попарно равные ранее собственные частоты становятся различными.

Иными словами, спектр собственных движений расслаивается. Это выражается в том, что вместо каждой собственной формы колебаний с неопределенным расположением узловых диаметров в окружном направлении появляются две с различными частотами узловые линии, которые фиксированы относительно диска. Расслаивающиеся формы колебаний расположены в заштрихованной части таблицы на рис. 2.

На рис. 4 приведен пример расслоившейся формы.



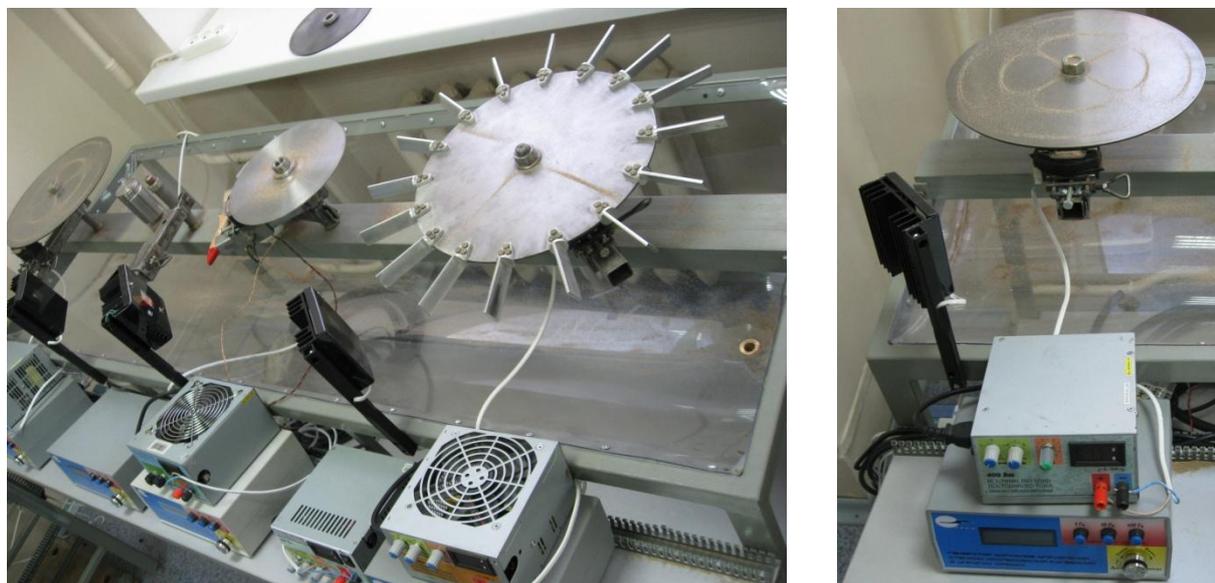
*Рис. 4. Расслоившаяся форма колебаний:*

*1 – положение узлов неопределенно; 2 – точечная масса; 3 – положение узлов фиксировано; 4 – наивыгоднейшее положение возбудителя*

Производя экспериментальное определение спектров собственных форм и частот любых других тел, конструктивно обладающих осевой симметрией, всегда необходимо иметь в виду возможность расслоения спектра. В противном случае может сложиться представление о качественном несоответствии теоретических и экспериментальных результатов. Не следует забывать, что таблицы собственных форм, обычно приводимые в литературе [6–7] и др., справедливы лишь для дисков и других осесимметричных тел, обладающих строгой симметрией.

## **2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА**

Внешний вид установки в целом и одного рабочего места представлен на рис. 5.



*Рис. 5. Внешний вид стенда и отдельное рабочее место*

Схема установки показана на рис. 6.

Испытуемый диск 2 устанавливается на жесткую подставку 5 и закрепляется по внутреннему радиусу гайкой 1. Свободный наружный радиус возбуждается электромагнитом 4. Питание электромагнита переменным током производится от генератора с усилителем 6, конструктивно реализованного в отдельном корпусе, который запитывается от блока питания 7. Относительная деформация и частота колебаний диска измеряются с помощью пьезоэлектрического датчика 3. Вместо контактного датчика (он имеется не на всех дисках) над диском может быть установлен бесконтактный датчик колебаний 8 с виброрегистрирующим блоком 9. В зависимости от решаемой задачи может использоваться вихретоковый датчик или микрофон совместно с регистрирующей аппаратурой NI, либо однокоординатный бесконтактный виброрегистрирующий комплекс POLYTEC. Выполнение демонстрационных работ не требует использования виброрегистрирующей аппаратуры.

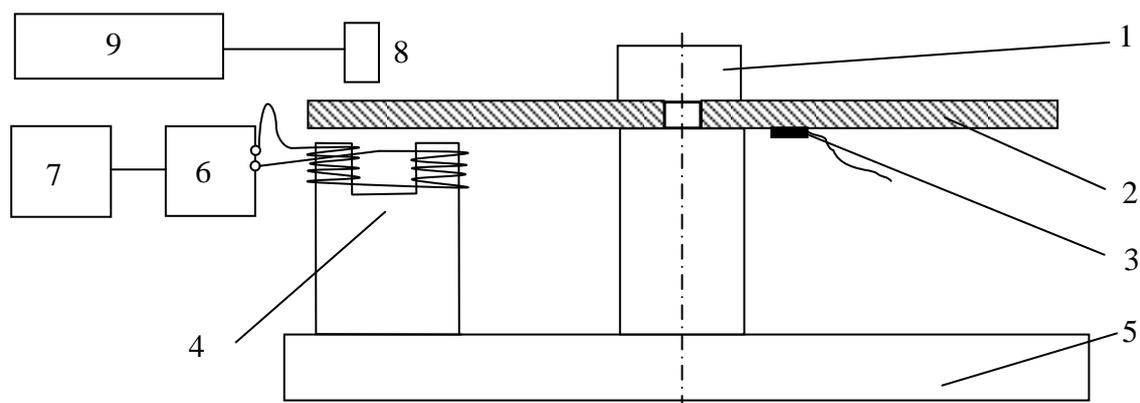


Рис. 6. Схема экспериментальной установки:

- 1 – гайка; 2 – диск; 3 – контактный датчик; 4 – электромагнит; 5 – подставка;  
6 – генератор; 7 – блок питания; 8 – бесконтактный датчик;  
9 – виброрегистрирующий блок

Вихретоковые датчики предназначены для бесконтактного измерения вибрации, перемещения и частоты вращения электропроводящих объектов. Выходным сигналом драйвера является электрический сигнал, пропорциональный расстоянию от торца вихревого датчика до контролируемого объекта. Вихретоковые датчики обладают хорошим частотным откликом (реакция на изменение расстояния между торцом пробника и объектом контроля). Частотный диапазон может достигать 0–10 000 Гц.

В данной работе используется электромагнитный способ возбуждения диска. К преимуществам данного способа относится относительная простота и отсутствие контакта исследуемого объекта (лопатки, пластины) с возбудителем, а следовательно, и отсутствие дополнительных присоединенных масс. Однако данный способ вносит известные ограничения на объекты исследования – они должны иметь магнитные свойства.

Порядок работы с системой возбуждения диска полностью аналогичен порядку работы по возбуждению лопатки ввиду ее унификации, поэтому при выполнении данной работы после исследования лопатки дальнейшее описание данного раздела можно пропустить.

Катушка электромагнита 4 предназначена для возбуждения колебаний лопатки. К катушке подводится переменный ток от генератора 6, частота которого изменяется в широких пределах. В результате воздействие магнитного поля катушки, создаваемого переменным током, на объект исследования (лопатку или пластину) создает периодическую силу, частота которой определяется частотой переменного тока. Эта сила заставляет объект эксперимента (лопатку или пластину) совершать вынужденные колебания с частотой действия силы. Величина амплитуды колебаний может регулироваться изменением силы тока и напря-

жения, что обеспечивает источник питания 7, запитывающий катушку электромагнита через генератор.

Внешний вид генератора и источника питания представлен на рис. 7.

Генератор 2 вырабатывает переменный ток, частота которого может изменяться в пределах от 1 до 10 000 Гц. Плавное изменение частоты производится вращением верньера частоты генератора *c*. Шаг изменения частоты может быть задан одной из кнопок *b*. Генератор имеет два выходных канала с регулировкой фазового сдвига (эта опция реализована только на одном рабочем месте – с системой возбуждения из двух катушек и в данной работе не используется). Кроме того, имеется выход на стробоскоп с возможностью независимой регулировки его частоты. Переключение между указанными функциями и функцией регулировки выходной частоты производится последовательным нажатием верньера *c*. Значение частоты выдаваемого тока отображается на индикаторе *d*. Регулирование амплитуды колебаний в ходе эксперимента производится вращением двух ручек *a*, расположенных на источнике питания 1. Значение выдаваемых при этом источником питания величин тока и напряжения отображаются на индикаторе *e*.

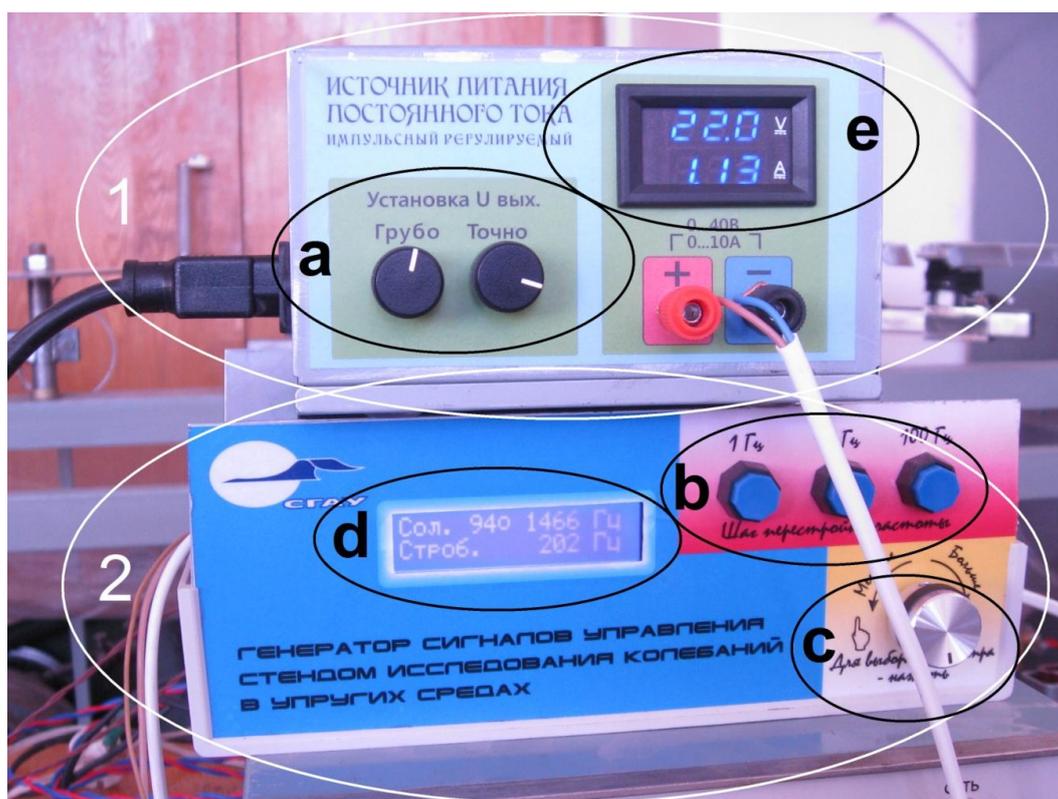


Рис. 7. Внешний вид источника питания и генератора

Выбор системы регистрации колебаний в зависимости от задач, решаемых в ходе выполнения лабораторной работы, осуществляется преподавателем или инженером кафедры. При использовании одноосной бесконтактной системы измерения колебаний POLYTEC перед выполнением эксперимента необходимо ознакомиться с ее техническим описанием и инструкцией по эксплуатации.

### 3. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Возбуждение колебаний диска производится подачей на катушку электромагнита переменного тока с генератора. Изменяя плавно частоту тока, питающего электромагнит, можно добиться такого момента, когда одна из собственных частот диска совпадет с частотой

возбуждения, т.е. наступит явление резонанса. Явление резонанса характеризуется резким увеличением амплитуды колебания диска и фиксируется с помощью пьезодатчика (или бесконтактной системы измерения) по величине наибольшей регистрируемой амплитуды. В принципе, наступление резонанса можно почувствовать органами слуха по максимальному уровню звука. Резкое возрастание колебаний отчетливо фиксируется ухом по уровню звукового давления, производимому колеблющимся диском. Колебания диска инициируют колебания в окружающей воздушной среде, т.е. диск работает как динамик.

Средства измерения параметров вибрации диска нужны для того, чтобы убедиться в равенстве частоты колебаний диска и частоты возбуждающей силы. Ведь собственную частоту в диске может вызвать не целая, а кратная гармоника. Например, собственная частота диска 900 Гц может быть возбуждена в нем как основной гармоникой внешней возбуждающей силы 900 Гц, так и целыми гармониками, кратными 900 Гц – 1 800 Гц, 2 700 Гц, а также дробными гармониками – половиной – 450 Гц, 1/3–300 Гц и т.д.

Соответствие частот двух сигналов определяется фигурами Лиссажу, что изучается в курсах электротехники и электроники. Подробнее данная методика описана применительно к исследованию колебаний лопатки [8]. В данной работе это можно оценить по сравнению значений на индикаторах задающего генератора и виброрегистрирующей аппаратуры. Для определения собственных частот диска важна частота его колебаний, а не частота возбуждающего сигнала. После того, как момент резонанса зафиксирован, соответствующая ему частота возбуждения может быть определена по индикатору  $d$  генератора 2 (рис. 7). Поскольку при резонансе частота возбуждения совпадает с одной из собственных частот, то, определяя частоту возбуждения, тем самым определяем одну из собственных частот колебания диска.

Определение формы колебаний (рисунка узловых линий) производится при помощи песчаных фигур. Для этого диск посыпают тонким слоем песка. При подходе к резонансу песок начинает интенсивно перемещаться по диску, концентрируясь в узлах данной формы колебаний, т.е. в тех местах, которые в процессе колебаний остаются неподвижными.

После более или менее продолжительного выдерживания диска на резонансе на его поверхности появляется четкая песчаная фигура, показывающая расположение узловых линий.

По картине расположения узловых линий можно судить о характере распределения вибрационных напряжений в диске при данной форме колебаний.

Для исследования предлагаются три диска различной геометрии. Их геометрические данные сведены в табл. 1.

Таблица 1. Исходные данные вариантов дисков

№	Наружный диаметр $D = 2R$ , мм	Внутренний диаметр $d_0 = 2r_0$ , мм	Толщина диска $\delta$ , мм	Массовая плотность материала диска $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
1	300	20	2,9	7 810 (материал: сталь 65 Г)
2	200	20	2,9	
3	206,6	22	1,6	

Под диски устанавливаются планшайбы, имеющие диаметр 40 мм, и сверху диск прижимается фигурной круглой гайкой такого же диаметра.

#### 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1. Познакомиться с теорией вопроса.
2. Произвести расчет собственных частот предложенного преподавателем экспериментального диска для  $n = 0$  при  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  и построить график зависимости  $\omega_0 = \omega_0(m)$ , (рис. 8).
3. Изучить установку и методику проведения эксперимента.

4. Провести эксперимент по определению форм и частот собственных колебаний диска.

**Все работы проводятся с инженером кафедры или преподавателем!**

5. Получить у преподавателя свой экземпляр диска. Обезжирить поверхность диска.

6. Получить разрешение инженера на включение установки.

7. Включить установку, подав сетевое питание на генератор, источник питания и виброрегистрирующий блок.

8. Посыпать поверхность диска тонким слоем песка.

9. Установить на источнике питания небольшой уровень амплитуды сигнала.

10. Плавно изменять частоту генератора от 50 Гц до появления резонанса. В случае касания диском катушки электромагнита (резкий неприятный звук) уменьшить величину амплитуды на источнике питания.

11. Проконтролировать совпадение частот по осциллографу или по индикаторам генератора и виброизмерителя.

12. Записать частоту, на которой возник резонанс, и зарисовать песчаную фигуру, наблюдаемую на диске.

13. Плавно повысить частоту до наступления следующих резонансов (до 10 000 Гц).

14. Уменьшить частоту.

15. Выключить установку.

16. Экспериментально полученные частоты колебаний с  $n = 0$  отметить на графике (рис. 8).

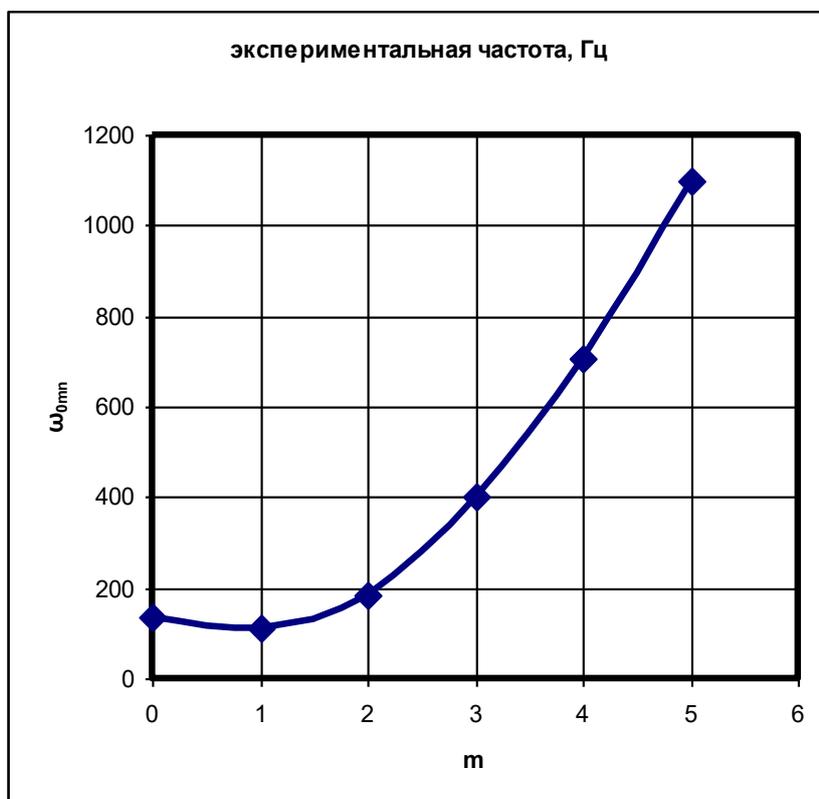
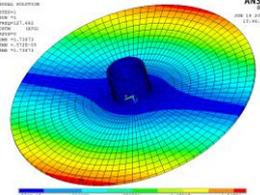
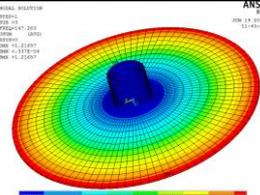
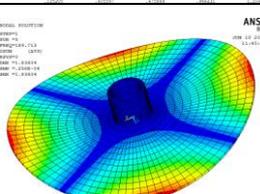
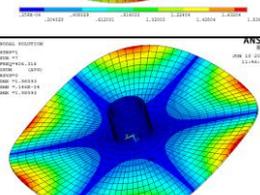
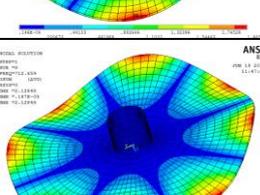
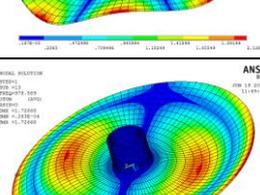
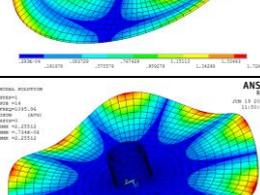


Рис. 8. Зависимость собственной частоты  $\omega_{0mn}$  от числа узловых диаметров  $m$

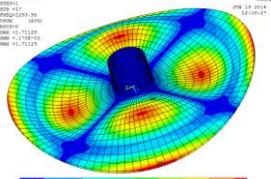
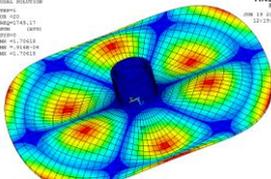
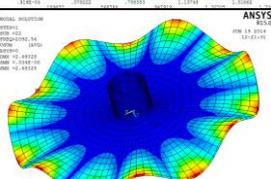
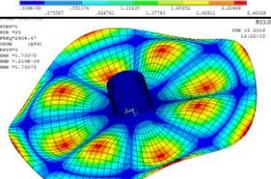
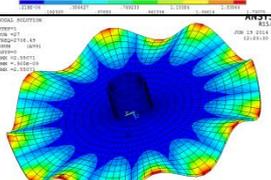
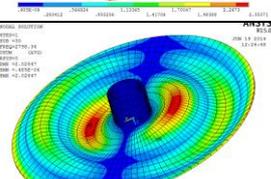
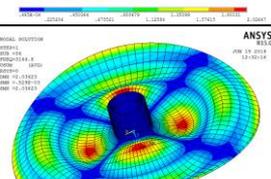
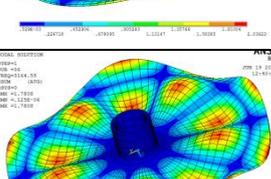
17. Результаты эксперимента свести в таблицу, приведя в соответствие частоты и формы колебаний, полученные экспериментально и расчетным путем. Формы узловых линий зарисовать.

Для примера таблица сопоставления экспериментальных данных с результатами модального анализа в КЭМ ANSYS для одного из дисков приведены в табл. 2. Сравнить полученные экспериментальные результаты с расчетными результатами.

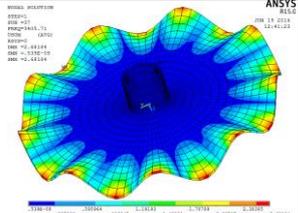
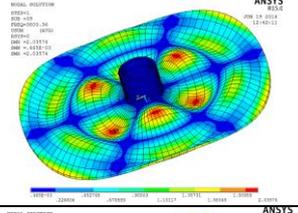
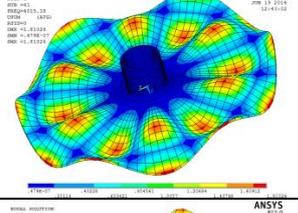
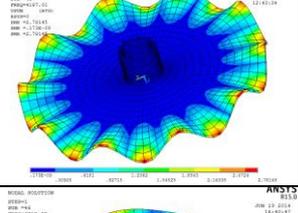
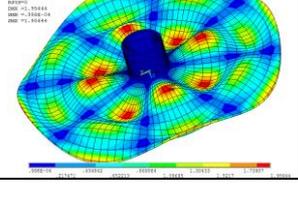
Таблица 2. Результаты экспериментальных и расчетных исследований собственных частот диска

Расчетная частота, Гц ANSYS	Экспериментальная частота, Гц	Расчетная форма колебаний ANSYS	Экспериментальная форма колебаний	Описание формы
127,7	113		—	1 x 0
147,3	137		—	0 x 0
189,7	183			2 x 0
406,3	404			3 x 0
712,7	707			4 x 0
978,6	980			1 x 1
1 095,9	1 100			5 x 0

Продолжение табл. 2

Расчетная частота, Гц ANSYS	Экспериментальная частота, Гц	Расчетная форма колебаний ANSYS	Экспериментальная форма колебаний	Описание формы
1 250,9	1 200			2 x 1
1 749,2	1 724			3 x 1
2 092,5	2 000			7 x 0
2 404,7	2 377			4 x 1
2 708,5	2 500			8 x 0
2 798,3	2 532			1 x 2
3 144,8	2 929			2 x 2
3 164,6	3 000			5 x 1

Окончание табл. 2

Расчетная частота, Гц ANSYS	Экспериментальная частота, Гц	Расчетная форма колебаний ANSYS	Экспериментальная форма колебаний	Описание формы
3 405,7	3 150			9 x 0
3 800,4	3 600			3 x 2
4 015,2	3 800			6 x 1
4 187	4 000			10 x 0
4 718,9	4 500			4 x 2

В таблицу сведены результаты, полученные расчетным и экспериментальным методами исследования форм колебаний диска, а также расчетные и экспериментальные значения частот, соответствующие полученным формам.

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отчет о выполненной работе должен содержать:

- краткое описание работы;
- схему экспериментальной установки;
- таблицу расчетного и экспериментального определения собственных частот диска;
- график теоретической зависимости  $\omega_0(m)$  ( $n = 0$ ) с нанесенными экспериментальными точками;
- рисунки форм узловых линий;
- анализ полученных результатов.

## Протокол к работе «Колебания диска»

№ п/п	n = 0					
1	m	0	1	2	3	4
2	$K_{mm}$					
3	Вычисляемая частота $f_0$ , Гц					
4	Замеряемая частота $f_0$ , Гц					

### 6. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек: справочное пособие, Киев, 1964.
2. Левин А.В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М., Госэнергоиздат, 1953.
3. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев [и др.]. М.: Машгиз, 1959, Т. 3.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М., 1949.
6. Скубачевский Г.С. Авиационные газотурбинные двигатели. М.: Машиностроение, 1965.
7. Конструкция авиационных двигателей / А.В. Штода [и др.]. Изд-во Академии им. Жуковского, 1958. Ч. 1.
8. Лежин Д.С. Экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний лопатки осевого компрессора: электронное учеб. пособие. Самара, 2016.

### 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные цели определения собственных частот и форм колебаний.
2. Что такое форма колебаний?
3. Чем характерен и опасен резонанс?
4. Для какой цели необходим спектр собственных частот и форм колебаний?
5. Назовите состав и назначение оборудования, входящего в состав экспериментального стенда.
6. Для какой цели при эксперименте используются фигуры Лиссажу?
7. Поясните, почему песок собирается в узлах собственных форм?
8. Какой закономерности подчиняются рисунки узловых линий?
9. Чем объясняется неопределенность положения узловых диаметров на диске?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### ОСНОВЫ ТЕНЗОМЕТРИИ ДВИГАТЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

#### ПРЕДИСЛОВИЕ

При создании двигателей летательных аппаратов (ДЛА) возникает необходимость в определении реальных деформаций и напряжений в деталях и элементах конструкций.

Эта потребность связана с обеспечением основополагающего требования, предъявляемого к конструкции ДЛА – *прочностной надежности*. Проблема прочностной надежности занимает особое место при создании ДЛА. Она означает отсутствие отказов по причине разрушения или недопустимой деформации силовых деталей и элементов, входящих в конструкцию ДЛА.

К наиболее ответственным силовым деталям и элементам можно отнести рабочие лопатки, диски, валы, корпуса, трубопроводы, оболочки и др. Деформации и напряжения в них вызываются нагрузками различной физической природы: газовыми, инерционными, тепловыми, механическими.

В зависимости от характера изменения во времени они могут быть *статическими и динамическими*. Статистика показывает, что наиболее опасными являются динамические нагрузки.

Оценка напряженно-деформированного состояния деталей и элементов конструкции ДЛА может производиться теоретическими и экспериментальными методами.

Теоретические методы могут оказаться неэффективными из-за сложности напряженно-деформированного состояния реальных конструкций, достоверности действующих нагрузок, специфических условий работы и необоснованных упрощений расчетных схем. Например, трудно учесть такие факторы, как концентраторы напряжений, остаточные напряжения, нестабильный характер и многокомпонентность нагружения и др.

Поэтому для нахождения действительных деформаций и напряжений в реальных условиях эксплуатации широко используется экспериментальный метод *тензометрии* [1].

Детали и элементы конструкции ДЛА, которые исследуются методом тензометрии, в дальнейшем изложении будем называть *объектами исследования*.

Метод основан на применении специального преобразователя – *тензорезистора*, который закрепляется на поверхности объекта исследования, воспринимает его относительные деформации (входной сигнал) и преобразует их в приращение электрического сопротивления. Тензорезистор относится к классу *первичных преобразователей*, так как он первым преобразовывает измеряемую величину – относительную деформацию.

Тензорезистор включается в электрическую схему *тензометрической измерительной аппаратуры*, где приращение электрического сопротивления вызывает возникновение усиленного электрического сигнала (выходной сигнал), величина которого пропорциональна относительной деформации поверхности объекта исследования.

Процедура определения относительной деформации в заданных точках или сечениях объекта исследования называется *тензометрическим экспериментом*.

С помощью специальной метрологической операции – градуировки тензометрической измерительной аппаратуры – находится зависимость между относительной деформацией (входным сигналом) и выходным усиленным электрическим сигналом. Эта зависимость называется градуировочной характеристикой тензометрической измерительной аппаратуры.

Современный тензометрический эксперимент требует синхронной регистрации и обработки не только относительных деформаций, но также других величин, например, сил, давлений, температуры, частот вращения, необходимых для сравнительного анализа динамических процессов. Поэтому в настоящее время находят применение *автоматизированные тензометрические измерительные системы*. В состав этих систем кроме тензометрической измерительной аппаратуры могут входить компьютеры с различными внешними устройствами и программными аналоговыми и цифровыми средствами, регистраторы, спектроанализаторы, обеспечивающие сбор, регистрацию, сохранение, обработку и анализ измеряемой информации.

**Цель работы** – ознакомление с физическими основами тензометрии, овладение навыками самостоятельного проведения тензометрического эксперимента, проведение градуировки тензометрической измерительной аппаратуры при статических и динамических процессах и сравнение полученных результатов.

## 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕНЗОМЕТРИИ

*Тензометрия* – это способ экспериментальной оценки напряженно-деформированного состояния объектов исследования при статических и динамических процессах.

*Тензорезисторы* являются первичными преобразователями тензометрических измерительных систем и представляют собой измерительное средство, позволяющее регистрировать весьма малые деформации. Главной функцией тензорезисторов является преобразование входного сигнала – деформации в выходной сигнал – приращение электрического сопротивления. Эта особенность тензорезисторов основана на свойстве проводников менять свое электрическое сопротивление при упругих деформациях растяжения и сжатия. Изменение сопротивления является следствием изменения геометрических размеров и удельного сопротивления материала проводника, используемого в качестве чувствительного элемента тензорезисторов.

Для выполнения своих функций чувствительные элементы тензорезисторов должны, по возможности, иметь:

- высокую *тензочувствительность*, т.е. высокое отношение приращения электрического сопротивления к изменению геометрических размеров при деформациях растяжения и сжатия;
- повышенное удельное электрическое сопротивление;
- низкий температурный коэффициент сопротивления;
- широкий диапазон линейной зависимости между относительной деформацией и приращением электрического сопротивления;
- химическую и физическую стойкость при внешних воздействиях;
- статическую и динамическую прочность.

В связи с разнообразием решаемых задач и условий измерений существует несколько видов тензорезисторов, различных по форме, характеристикам и назначению. Например, тензорезисторы классифицируют по виду чувствительного элемента на *проволочные, фольговые и полупроводниковые*.

Проволочные тензорезисторы (рис. 1) содержат *чувствительный элемент 2*, выполненный из тонкой калиброванной проволоки в виде плоской зигзагообразной *решетки*, к концам *3* которой припаиваются или привариваются выводные проводники *4*. Решетка помещается внутри *основы 1*, состоящей из слоев специальной бумаги или полимерной пленки.

Основа удерживает на себе чувствительный элемент и электрически изолирует его от поверхности исследуемой детали.

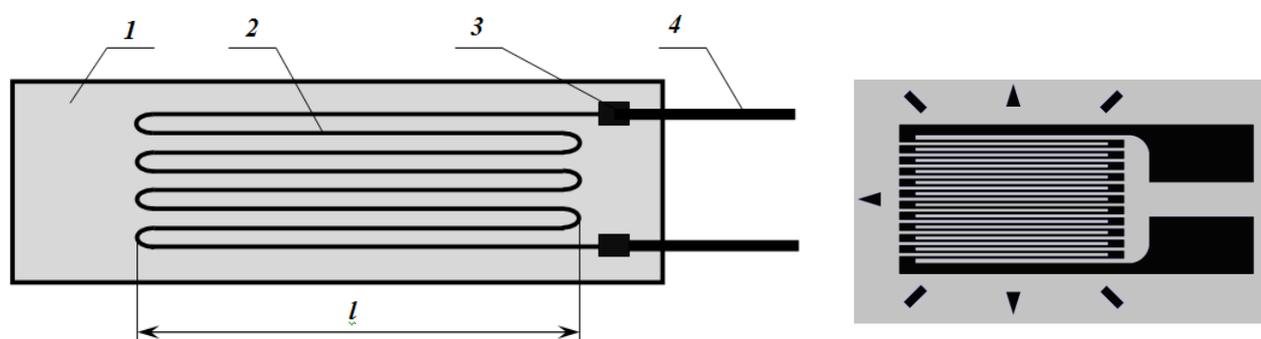


Рис. 1. Схема и вариант исполнения проволочного тензорезистора

Фольговые тензорезисторы имеют *чувствительный элемент* в виде тонких полосок фольги различной формы (выполненный методом фотолитографии), прикрепленных на основу – полимерную пленку или специальную бумагу.

Фольговые тензорезисторы имеют увеличенное сцепление с поверхностью детали, что повышает их теплопередачу в деталь. Это дает возможность увеличить ток и напряжение пи-

тания тензорезистора без существенного перегрева, вследствие чего растет его тензочувствительность.

Для увеличения точности измерений сложных напряженно-деформированных состояний объектов исследования чувствительные элементы фольговых и проволочных тензорезисторов изготавливают *многоэлементными* в виде *розеток*.

Розетки могут иметь разнообразную форму. Примеры многоэлементной фольговой розетки приведены на рис. 2. На общей основе размещаются несколько чувствительных элементов, ориентированных под определенными углами друг к другу. По трем замеренным деформациям могут быть без труда определены как величины, так и направления главных осей и главных напряжений.

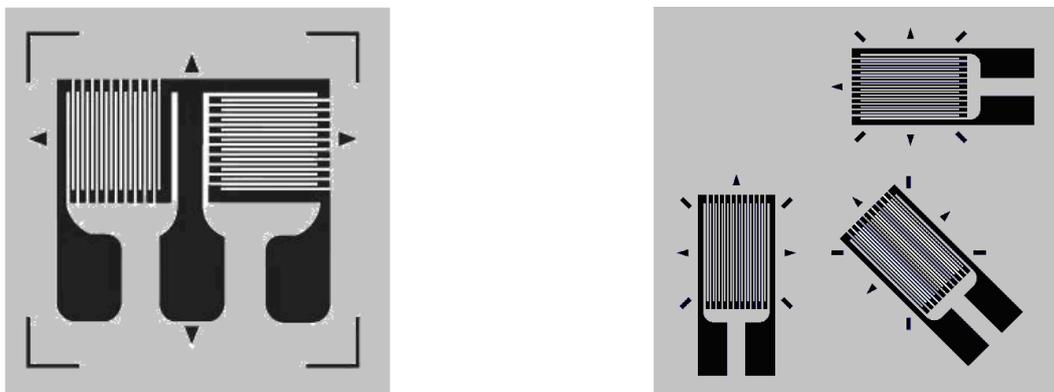


Рис. 2. Тензорезистор фольговый: многоэлементная розетка

Полупроводниковые тензорезисторы (рис. 3) изготавливают в основном из монокристаллов германия и кремния, толщина которых колеблется от 20 до 50 мкм.

Особенностью этих тензорезисторов является их высокая тензочувствительность, превышающая на порядки тензочувствительность проволочных и фольговых тензорезисторов. Они имеют широкий диапазон электрических и механических параметров, выдерживают температуру до (400...500) °С.



Рис. 3. Полупроводниковый тензорезистор

К существенным недостаткам полупроводниковых тензорезисторов можно отнести их пониженную механическую прочность, хрупкость, чувствительность к внешним воздействиям и значительный разброс *метрологических характеристик*.

Метрологическими характеристиками тензорезисторов являются:

*База  $l$*  – длина активной части чувствительного элемента (рис. 1). Проволочные и фольговые тензорезисторы имеют базы от 1 до 10 мм. Поскольку тензорезисторы фиксируют среднюю деформацию на поверхности, занятой чувствительным элементом, то для уменьшения погрешности измерения при больших градиентах деформаций желательно использовать тензорезисторы с малой базой.

*Электрическое сопротивление  $R$*  – значение активного номинального сопротивления тензорезистора до деформации. Оно должно быть высоким, не менее 50...200 Ом.

*Коэффициент тензочувствительности ( $KT$  или  $S$  - gauge factor)* – отношение относительного приращения электрического сопротивления  $\Delta R/R$  к относительной деформации тензорезистора в направлении его продольной оси (базы):

$$KT = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{L}{\Delta L},$$

где  $\Delta R$  – абсолютное приращение электрического сопротивления, обусловленное относительной деформацией тензорезистора;  $\Delta L$  – абсолютное приращение базы.

Значения коэффициентов тензочувствительности могут меняться от температуры. Это изменение зависит от материала чувствительного элемента. Производители тензодатчиков прилагают все усилия, чтобы минимизировать чувствительность к температуре, специально обрабатывая материал датчика для компенсации температурного расширения материала образца, для которого предполагается использовать датчик. Но хотя компенсированные датчики уменьшают температурную чувствительность, совсем убрать ее не могут.

*Поперечная тензочувствительность* измеряется в направлении поперечной оси тензорезистора. Обычно она мала, достигает 2% от продольной тензочувствительности и вносит незначительную погрешность в измерениях.

*Предельно допустимая деформация* – наибольшее значение относительной деформации, при которой сохраняется линейная зависимость между измеренной и действительной деформациями или происходит обрыв электрической цепи. Величина предельно допустимой относительной деформации зависит от многих факторов, например, от материала чувствительного элемента, материала основы, типа крепления, влажности и температуры среды, конструктивных особенностей тензорезистора и составляет примерно величину 0,004.

Наряду с основными метрологическими характеристиками тензорезисторов не менее важными являются и такие характеристики, которые определяют области возможного их использования в реальных условиях эксплуатации.

К этим характеристикам можно отнести:

– *Ползучесть*, характеризуемую уменьшением воспринимаемой тензорезистором относительной деформации в зависимости от времени и температуры. Как правило, явление ползучести связано с несовершенством способа крепления тензорезистора к объекту исследования.

– *Усталостную прочность*, измеряемую количеством циклов знакопеременной деформации заданной амплитуды.

– *Влагостойкость*, определяемую временем, в течение которого коэффициент тензочувствительности или электрическое сопротивление изоляции находящегося в среде с высокой влажностью (95%) тензорезистора не превышает допустимых пределов.

– *Гистерезис*, характеризуемый разностью относительного приращения электрического сопротивления тензорезистора за цикл нагружения (нагрузка – разгрузка).

На основные метрологические характеристики тензорезисторов установлен ГОСТ.

Выбор тензорезисторов осуществляется с учетом целей теплометрического эксперимента, условий работы, диапазона температур, предполагаемого напряженно-деформированного состояния, уровня измеряемых деформаций, частоты и длительности испытаний.

Ориентация тензорезисторов на поверхности объекта исследования должна быть такой, чтобы *их продольная ось совпадала с направлением измеряемой деформации*. В зависимости от вида напряженно-деформированного состояния объекта исследования на его поверхности может закрепляться определенное число тензорезисторов или розеток с заданной ориентацией. Это дает возможность по совокупности показаний относительных деформаций тензорезисторов или розеток расчетным путем найти *главные оси и главные напряжения*. Основные соотношения, по которым они вычисляются, приводятся в справочной литературе, например, их можно найти в книге А.Н. Серьезнова [1] или справочнике [2].

Монтаж и закрепление тензорезисторов на объекте исследования определяется условиями работы и диапазоном рабочей температуры и может осуществляться приклеиванием, цементированием или привариванием. Это очень ответственный процесс, результаты которого определяют успех эксперимента. Поэтому вопросы монтажа тензорезисторов выделились в целую отдельную область техники, на которую работают специалисты – химики, соз-

давая специализированные клеевые составы, электронщики – создавая специальную тензометрическую аппаратуру, узкоспециализированные мастера по монтажу и подготовке тензометрического эксперимента.

## 2. ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Тензометрический эксперимент является одним из практических методов опытного определения действительных деформаций и напряжений объекта исследования. Процедура определения полей действительных деформаций и напряжений в заданных точках или сечениях объекта исследования называется *тензометрическим экспериментом*.

С помощью этого метода исследуется напряженно-деформированное состояние как сложных, так и простых объектов, имеющее целью определить, подтвердить, уточнить величину и характер распределения деформаций и напряжений в различных условиях и заданных режимах.

Алгоритм проведения тензометрического эксперимента заключается в следующем:

- формулируется цель, определяется объект исследования;
- выясняются условия работы, оценивается напряженно-деформируемое состояние и влияние на метрологические характеристики тензорезисторов;
- создается необходимая структурная схема тензометрической измерительной системы;
- выбираются и монтируются тензорезисторы, тензометрическая измерительная аппаратура, коммуникационные линии и системы;
- проводится градуировка и контроль тензометрической измерительной аппаратуры;
- обеспечивается сбор, регистрация, сохранение, обработка и анализ информации.

Настоящие методические указания предназначены для учебных целей и не охватывают детально все этапы проведения тензометрического эксперимента.

Остановимся на основных процедурах, обеспечивающих протекание главных физических процессов при его проведении.

Включение тензорезисторов в электрическую схему тензометрической измерительной аппаратуры осуществляется с помощью различных электрических *мостовых схем*. Они позволяют достаточно точно преобразовать весьма малую величину абсолютного приращения электрического сопротивления тензорезистора в электрический сигнал и усилить его.

Кроме деформации, на изменение сопротивления тензорезисторов могут влиять внешние условия, например температура. Для устранения *температурной* погрешности измерений в мостовую цепь включают так называемые *компенсационные* тензорезисторы. Они находятся в одинаковых температурных условиях с рабочими тензорезисторами. На компенсационные тензорезисторы воздействует только температура, а на рабочие – измеряемая деформация и температура, поэтому изменение температуры не приводит к изменению баланса мостовой схемы.

На погрешность измерений могут оказывать влияние соединительные провода, кабели, клеммные устройства к рабочим и компенсационным тензорезисторам, которые также необходимо учитывать при создании тензометрических измерительных систем.

## 3. ИЗМЕРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЗОДАТЧИКОВ

Измерения деформаций редко приводят к величинам, превышающим несколько тысячных. Поэтому этот процесс требует аккуратного измерения очень небольших изменений сопротивления. Например, предположим, что испытуемый образец подвергается сильной деформации в 500 мк. Относительное изменение электрического сопротивления тензодатчика с коэффициентом тензочувствительности 2 будет равно всего лишь  $2 \times (500 \times 10^{-6}) = 0,1\%$ . Для датчика с сопротивлением 120 Ом это изменение составит только 0,12 Ом.

Для измерения таких маленьких изменений сопротивления и для компенсации температурной чувствительности совместно с тензодатчиками практически всегда используются мостовая схема с источником возбуждения током или напряжением. Широко распространенный мост Уитстона (Wheatstone bridge), показанный на рис. 4, состоит из четырех резистивных плеч, к которым приложено напряжение возбуждения  $V_{ex}$ .

Выходное напряжение моста  $V_o$  определяется формулой

$$V_o = \left[ \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] \times V_{EX}.$$

Из этого уравнения следует, что при  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ , выходное напряжение  $V_o$  равно нулю.

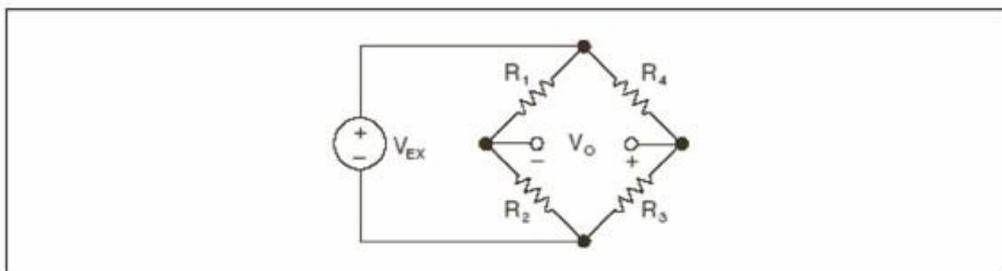


Рис. 4. Схема моста Уитстона

В этом случае о мосте говорят, что он сбалансирован. Любое изменение сопротивления одного из плеч моста приведет к ненулевому выходному напряжению. Поэтому, если заменить сопротивление  $R_4$  на активный тензодатчик, как показано на рис. 5, то любое изменение сопротивления тензодатчика приведет к разбалансировке моста и генерации ненулевого выходного напряжения. Если номинальное сопротивление тензодатчика обозначить за  $R_G$ , то изменение сопротивления  $\Delta R$  из-за деформации можно записать в виде  $\Delta R = R_G \cdot KT \cdot \varepsilon$ . Предполагая, что  $R_1 = R_2$  и  $R_3 = R_G$ , уравнение моста можно переписать таким образом, чтобы выразить отношение  $V_o/V_{ex}$  в виде функции от деформации:

$$\frac{V_o}{V_{EX}} = -\frac{KT \times \varepsilon}{4} \left( \frac{1}{1 + KT \times \frac{\varepsilon}{2}} \right)$$

Присутствие множителя  $1/(1 + KT \cdot \varepsilon/2)$  в выражении свидетельствует о нелинейной зависимости выходного напряжения схемы от деформации. Данная структура называется системой 1/4 моста, т.к. только один измерительный прибор подключен к мосту.

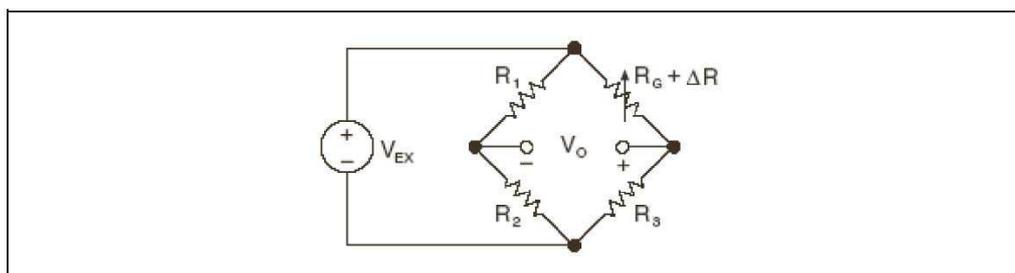


Рис. 5. Схема включения тензодатчика в мост Уитстона

Используя два тензодатчика в мосте, можно исключить влияние температуры. Например, на рис. 6 демонстрируется конфигурация тензодатчиков, когда один из них активен ( $R_G + \Delta R$ ), а второй располагается поперечно приложенной деформации. Поэтому деформация оказывает небольшое влияние на второй тензодатчик, который называется в этом случае компенсационным тензодатчиком (dummy gauge). Однако любое изменение температуры будет влиять на оба датчика одинаковым образом. Вследствие этого отношение их сопротивлений не изменится, тогда и напряжение  $V_o$  не изменится, то есть влияние температуры будет минимальным. Такая структура называется системой  $\frac{1}{2}$  моста.

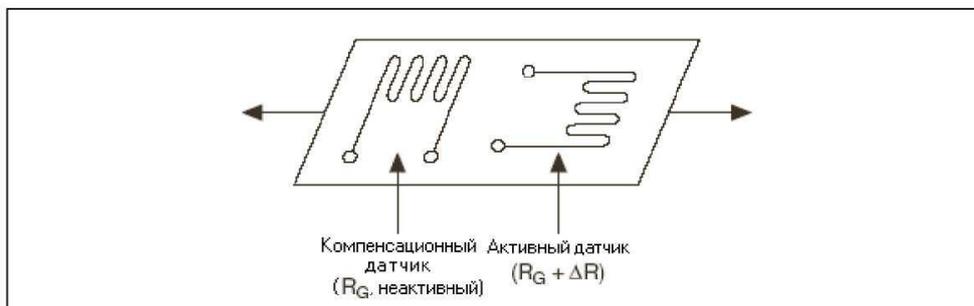


Рис. 6. Схема расположения активного и компенсационного тензодатчиков при испытаниях на растяжение

В качестве альтернативы можно удвоить чувствительность моста к деформации, делая оба датчика активными, но включенными в противоположных направлениях. Например, на рис. 7 показана схема тензометрирования изгибаемой балки, когда один датчик установлен на растяжение ( $R_G + \Delta R$ ), а второй – на сжатие ( $R_G - \Delta R$ ). Такая полумостовая конфигурация, чья принципиальная схема также показана на рис. 7, приводит к тому, что выходное напряжение линейно и примерно равно удвоенному напряжению четвертьмостовой схемы.

$$\frac{V_o}{V_{EX}} = -\frac{KT \times \varepsilon}{2}$$

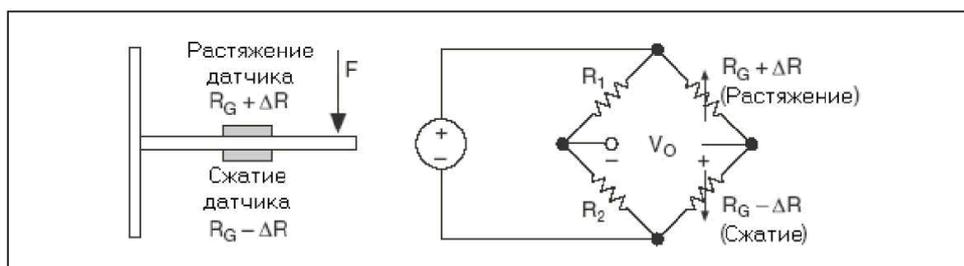


Рис. 7. Схема размещения и подключения двух активных тензодатчиков при изгибе

Можно еще более увеличить чувствительность схемы, заменяя сопротивления всех плеч моста активными тензодатчиками и устанавливая два из них на растяжение и два на сжатие. На рис. 8 показана полномостовая схема.

Уравнения, приведенные здесь для схем моста Уитстона, предполагают, что вначале мост сбалансирован, то есть без деформации выходное напряжение равно нулю. На практике, однако, допустимые отклонения величин сопротивлений и деформация при установке датчика приводят к тому, что существует некоторое начальное напряжение смещения. Обычно с начальным напряжением смещения поступают двояким образом. Во-первых, можно использовать специальную схему зануления начального смещения (балансировки)

для подстройки сопротивлений в мосте, чтобы выходное напряжение моста было равно нулю.

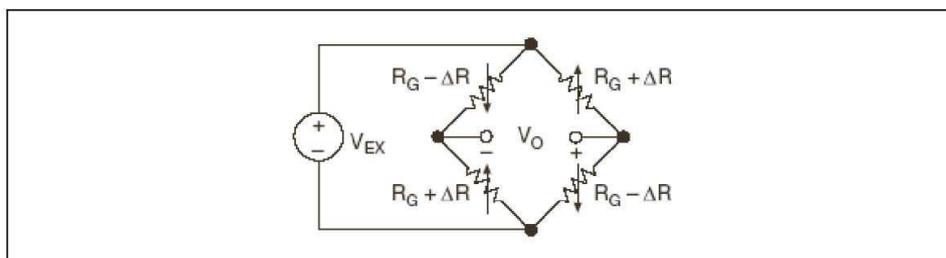


Рис. 8. Полномостовая схема подключения тензодатчиков

Или же можно измерить начальное напряжение без деформации и скомпенсировать его программно. Уравнения деформации для четверть-, полу- и полномостовых схем, учитывающие начальные выходные напряжения, приводятся ниже. Данные уравнения также учитывают влияние сопротивления подводящих проводов, присоединенных к датчикам.

### Сопротивление подводящих проводов

Во всех вышерассмотренных случаях не учитывалось сопротивление в подводящих проводах (lead wires) тензодатчика. Это облегчает понимание принципов на этапе изучения основ измерений с использованием тензодатчиков, однако на практике игнорирование этим параметром может внести существенную погрешность в измерения. Например, рассмотрим двухпроводное присоединение тензодатчика, показанное в верхней половине рис. 9. Предположим, что каждый проводник, соединяющий тензодатчик, имеет длину 15 метров и имеет сопротивление 1 Ом. Тогда оба проводника добавляют 2 Ома к сопротивлению каждого плеча моста. Кроме дополнительной ошибки смещения, сопротивление проводников приводит к уменьшению выходного напряжения. Из тензометрических уравнений нетрудно увидеть, что данное уменьшение количественно характеризуется множителем  $(1 + R_L/R_G)$ . Можно компенсировать эту ошибку, измеряя сопротивление подводящих проводов  $R_L$  и используя это значение в тензометрических уравнениях.

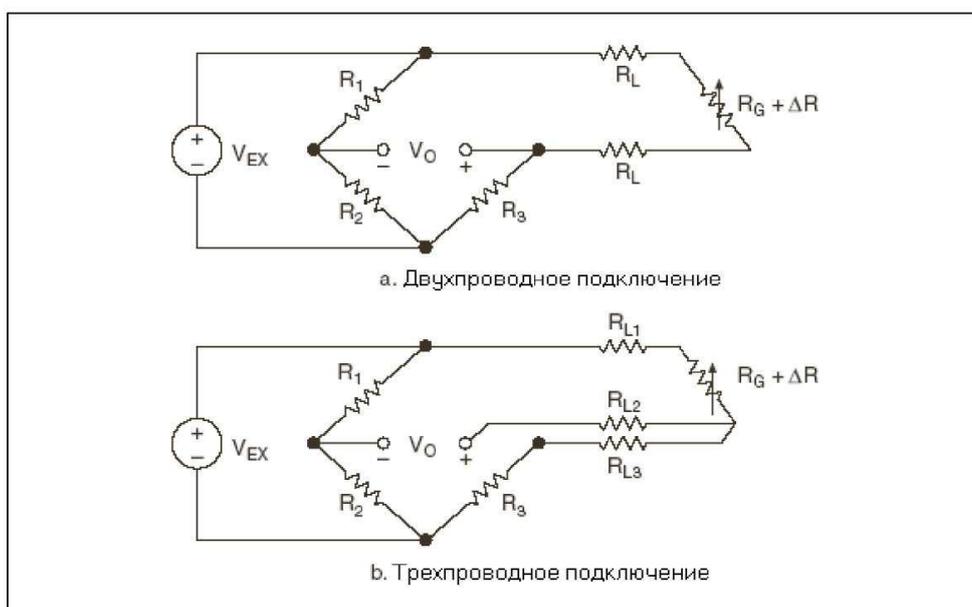


Рис. 9. Двухпроводная и трехпроводная схемы подключения мостов

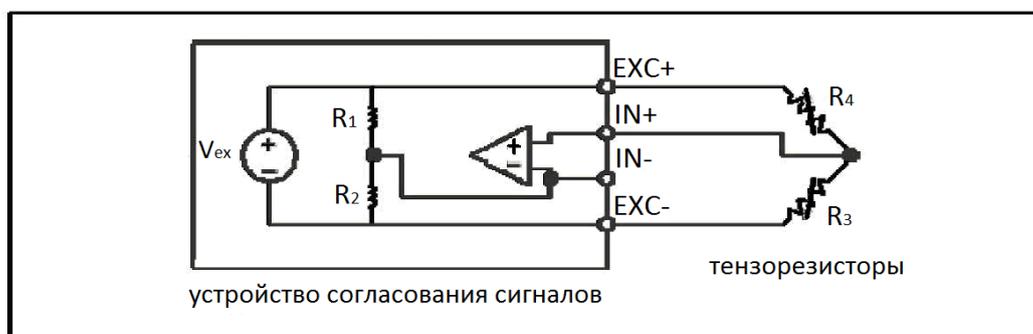
Однако есть более серьезная проблема, состоящая в изменении сопротивлений проводов под действием температуры. Зная типичные температурные коэффициенты медной проволоки, можно подсчитать, что небольшое изменение температуры может привести к ошибке измерения порядка нескольких  $\mu\epsilon$ . Поэтому предпочтительной схемой включения тензодатчиков в четвертьмостовую схему является схема с использованием трех проводов, которая показана в нижней половине рис. 9. В этой конфигурации  $R_{L1}$  и  $R_{L3}$  расположены в соседних плечах моста. Любые изменения сопротивления из-за температуры компенсируют друг друга. Третий проводник с сопротивлением  $R_{L2}$  присоединен к входу измерительной системы. Ток, текущий по проводнику, очень мал, поэтому влиянием этого сопротивления можно пренебречь.

### **Согласование сигналов с тензодатчиков**

Измерение с использованием тензодатчиков включает в себя обнаружение чрезвычайно малых изменений сопротивления. Следовательно, для достоверных измерений необходимы правильный выбор и использование моста, согласования сигналов, схемы соединений и компонентов для сбора данных.

### **Выбор моста**

При реализации полумостовой или четвертьмостовой схем для организации моста в части плеч моста необходимо использовать опорные резисторы. Поэтому, обычно, согласующие устройства сигналов с тензодатчиков представляют собой полумостовую схему, состоящую из двух высокоточных опорных резисторов. На рис. 10 показано присоединение полумостовой схемы тензодатчиков к устройству согласования сигналов с добавочными резисторами  $R_1$  и  $R_2$ .



*Рис. 10. Схема формирования моста при подключении к устройству согласования полумоста*

Само значение номинального сопротивления добавочных резисторов менее важно, чем то, насколько они совпадают по величине. В идеальном случае резисторы равны и создают стабильное опорное напряжение  $V_{ex}/2$  на отрицательном входе канала измерения.

### **Возбуждение моста**

Устройства согласования сигналов тензодатчиков обычно обеспечивают источник постоянного напряжения для питания моста. Поскольку до сих пор не существует стандарта для уровня напряжения возбуждения, оно может меняться от 3 до 10 вольт. Хотя большее напряжение возбуждения приводит к пропорционально большему выходному напряжению, оно может создать большую ошибку из-за явления саморазогрева. Важно, чтобы напряжение возбуждения было точным и стабильным. Однако можно использовать и менее точное или стабильное напряжение и проводить, тем не менее, точные измерения, используя управление/слежение напряжением возбуждения.

### ***Управление напряжением возбуждения***

Если схема с тензодатчиком располагается на некотором расстоянии от устройства согласования сигналов и источника возбуждения, то возникает возможный источник ошибок – падение напряжения, обусловленное сопротивлением проводов, подводящих напряжение возбуждения к мосту. По этой причине некоторые устройства согласования сигналов обеспечивают дополнительную возможность – дистанционное управление/слежение (*remote sensing*) для компенсации этой ошибки.

Существует два главных метода дистанционного управления/слежения. Первый из них – дистанционное управление с обратной связью, когда к точке, в которой провода напряжения возбуждения соединяются со схемой моста, присоединяются дополнительные провода управления. Дополнительные провода служат для регулировки источника напряжения возбуждения с целью компенсации потерь в проводниках и обеспечения моста необходимым напряжением.

В другом методе используется отдельный измерительный канал для непосредственного измерения напряжения возбуждения, приложенного параллельно мосту. Поскольку провода измерительного канала проводят очень слабый ток, то их сопротивление окажет пренебрежимо малое влияние на измерение. Затем значение измеренного напряжения возбуждения будет использоваться в преобразовании напряжения в деформацию для компенсации потерь в проводниках.

### ***Усиление сигнала***

Выходное напряжение тензодатчиков и мостов относительно мало. На практике большинство тензомостов и преобразователей деформаций выдают напряжение меньшее 10 мкВ/В (10 мкВ выходного напряжения на 1 вольт напряжения возбуждения). Поэтому устройства согласования сигнала обычно содержат усилители для увеличения уровня сигнала, что приведет к большей разрешающей способности измерения и лучшему соотношению сигнал/шум. Например, специализированные модули согласования сигнала SCXI содержат усилители с перестраиваемым КУ, который может меняться вплоть до 2 000.

### ***Балансировка моста, зануление напряжения смещения***

После установки моста маловероятно, что его выходное напряжение будет точно равно нулю в отсутствии деформации. Скорее всего, небольшое различие сопротивлений в плечах моста и сопротивление подводящих проводов вызовут генерацию некоторого начального напряжения смещения. Существует несколько способов, позволяющих системе управляться с этим напряжением.

### ***Программная компенсация***

В первом методе начальное напряжение компенсируется программно. В этом случае перед деформацией производится замер начального напряжения, которое затем будет использоваться в тензометрических уравнениях. Этот метод прост, быстр в использовании и не требует ручных настроек. Единственный его недостаток – это невозможность удаления напряжения смещения моста. Если это напряжение достаточно велико, оно будет ограничивать КУ усилителя в выходной цепи моста, ограничивая таким образом динамический диапазон измерения.

### ***Схема зануления напряжения смещения***

Во втором методе балансировки используется перестраиваемый резистор или потенциометр для физической подстройки выходного напряжения к нулю.

Например, на рис. 11 показана схема зануления, реализованная в терминальном узле специализированного модуля SCXI. Вращением ручки потенциометра ( $R_{pot}$ ) можно управлять уровнем выходного напряжения моста и установить начальное напряжение в ноль. Значение  $R_{null}$  устанавливает диапазон, который схема может сбалансировать.

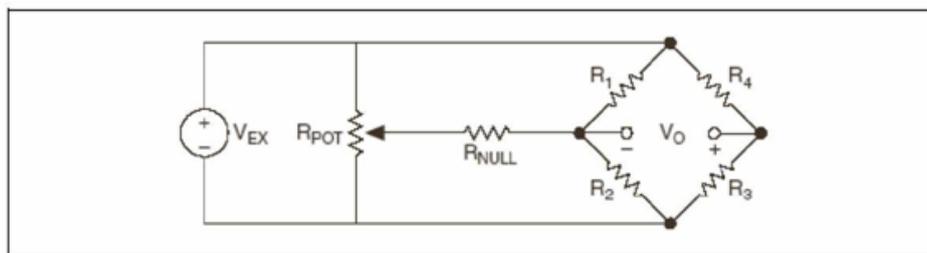


Рис. 11. Схема зануления напряжения смещения терминального узла SCXI-1321

### **Буферизированное зануление напряжения смещения**

Третий метод, как и первый, не оказывает непосредственного влияния на мост. В этом методе схема зануления добавляет перестраиваемое постоянное напряжение к выходному напряжению инструментального усилителя. Например, в некоторых модулях для тензодатчиков такой метод реализуется следующим образом: имеется перестраиваемый потенциометр, с помощью которого можно добавлять  $\pm 50$  мкВ к выходному напряжению инструментального усилителя, имеющего постоянный КУ, равный 10. Поэтому диапазон зануления, пересчитанный к входному напряжению, равен  $\pm 5$  мкВ.

### **Калибровка с использованием шунта**

Калибровка с использованием шунта – обычная процедура проверки выходного напряжения измерительной системы на основе тензодатчиков относительно некоторой predetermined деформации. При калибровке симулируется деформация путем изменения сопротивления одного из плеч моста на некоторую известную величину. Это происходит за счет шунтирования высокоомным резистором с заданным значением одного из плеч моста, что создает известное  $\Delta R$ . Можно измерить выходное напряжение моста и сравнить его с ожидаемым значением, а результат использовать для коррекции систематической ошибки измерения или просто, чтобы убедиться, что установка собрана правильно.

## **4. ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

В этом параграфе приведены полные тензометрические уравнения для некоторых типов конфигураций мостов [3]. Эти уравнения запрограммированы в виде функций (с источником кода) в драйвер NI-DAQ (рис. 12). При проведении измерений необходимо проинформировать выбор реализованной мостовой схемы, и выходной сигнал будет пересчитан по одной из приведенных формул. Такой подход дает возможность получать на выходе не сигнал рассогласования моста в электрических единицах, а уже пересчитанную величину деформаций.

Для упрощения записи уравнений и учета разбалансированных мостов в недеформированном состоянии введено отношение  $V_r$ , которое равно

$$V_r = \frac{V_{o(\text{деф.})} - V_{o(\text{без деф.})}}{V_{EX}},$$

где  $V_{o(\text{деф.})}$  – измеренное выходное напряжение при деформации, а  $V_{o(\text{без деф.})}$  – начальное напряжение, то есть выходное напряжение без деформации;  $V_{EX}$  – это напряжение возбуждения.

Обозначения:

( $+\varepsilon$ ) и ( $-\varepsilon$ ) активные тензодатчики, работающие на растяжение и на сжатие, соответственно;

$(-\nu\varepsilon)$  тензодатчик включен в поперечном направлении, так что его сопротивление меняется в основном из-за пуассоновской деформации, чья амплитуда обозначается как  $-\nu\varepsilon$ ;

$R_g$  – номинальное значение сопротивления тензодатчика;

$GF$  – коэффициент тензочувствительности тензодатчика;

$R_L$  – сопротивление подводящих проводов.

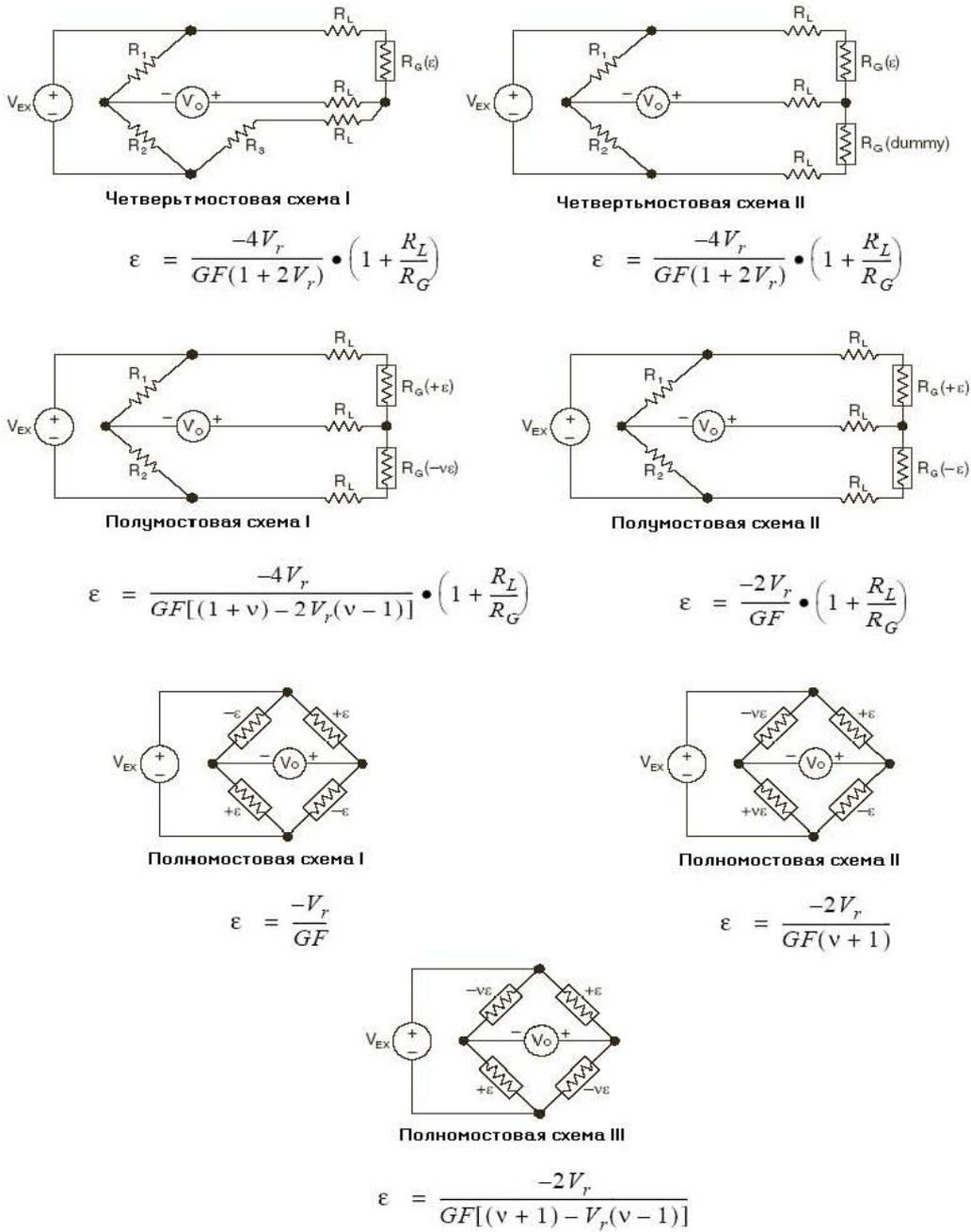
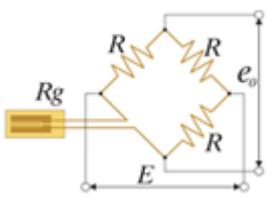
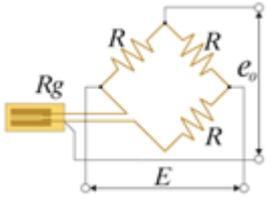
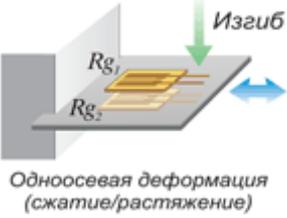
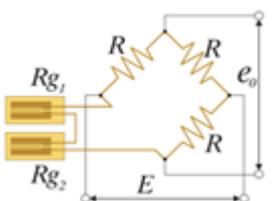
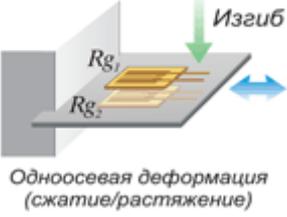
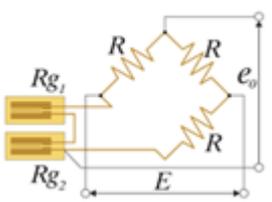
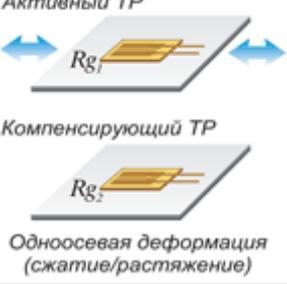
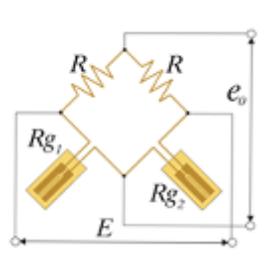


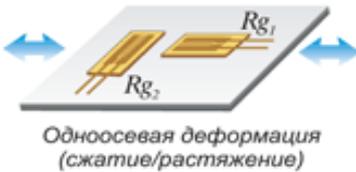
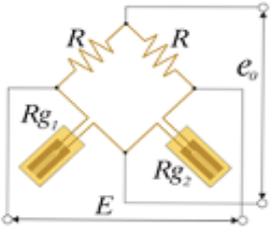
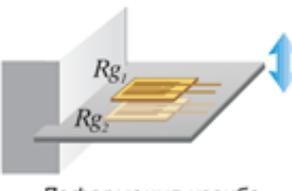
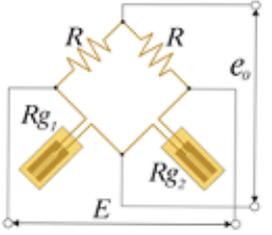
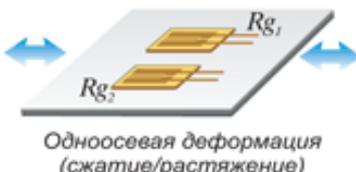
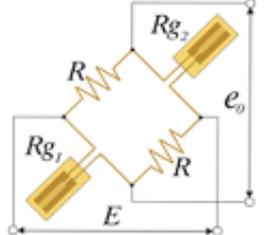
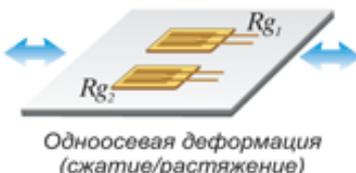
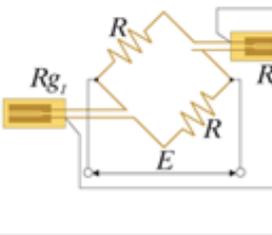
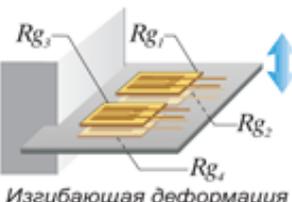
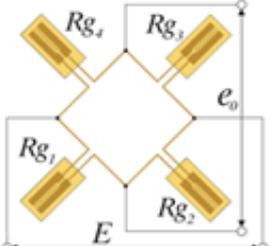
Рис. 12. Типы конфигураций мостов и соответствующие им тензометрические уравнения, запрограммированные в виде функций в драйвере NI-DAQ

Различные схемы подключения тензорезисторов применительно к конкретным условиям испытаний сведены в табл. 1 [4]. Имеется возможность исключения различных влияющих факторов на измерения, например, влияние температуры.

Таблица 1. Возможные схемы подключения тензорезисторов при различных испытаниях

Наименование	Пример	Схема	Выход
Один активный тензорезистор, двухпроводная схема подключения. Применима при малых изменениях температуры. Без термокомпенсации. $x1$ выход. Изгиб также влияет на измерения			
Четвертьмостовая схема 1 активный тензорезистор 2-проводная схема включения Количество тензорезисторов: 1	 Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)		$e_0 = (E/4) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ $K_s$ – К-фактор $\varepsilon_0$ – деформация $E$ – питание моста $e_0$ – выходное напряжение $Rg$ – сопротивление тензорезистора $R$ – постоянное сопротивление
Один активный тензорезистор, трехпроводная схема подключения. Без термокомпенсации. Температурная погрешность кабеля исключена. $x1$ выход. Изгиб влияет на измерения			
Четвертьмостовая схема 1 активный тензорезистор 3-проводная схема включения Количество тензорезисторов: 1	 Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)		$e_0 = (E/4) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$
Два активных тензорезистора, двухпроводная схема включения. Без термокомпенсации. Деформация изгиба исключена. $x1$ выход			
Четвертьмостовая схема с последовательным соединением ТР 1 активный тензорезистор 2-проводная схема включения (для исключения деформации изгиба) Количество тензорезисторов: 2	 Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)		$e_0 = (E/4) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ $Rg_1$ ...деформация – $\varepsilon_1$ $Rg_2$ ...деформация – $\varepsilon_2$ $\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2$ $R$ – постоянное сопротивление $R = Rg_1 + Rg_2$
Два активных тензорезистора, трехпроводная схема включения. Без термокомпенсации. Деформация изгиба исключена. Температурная погрешность кабеля исключена. $x1$ выход			
Четвертьмостовая схема с последовательным соединением ТР 1 активный тензорезистор 3-проводная схема включения (для исключения деформации изгиба) Количество тензорезисторов: 2	 Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)		$e_0 = (E/4) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ $Rg_1$ ...деформация – $\varepsilon_1$ $Rg_2$ ...деформация – $\varepsilon_2$ $\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2$ $R$ – постоянное сопротивление $R = Rg_1 + Rg_2$
Два тензорезистора: активный и компенсационный. Термокомпенсирована. Температурная погрешность кабеля исключена. $x1$ выход			
Полумостовая схема с компенсирующим ТР 2 активных тензорезистора (активный + компенсационный) Количество тензорезисторов: 2	 Активный ТР Компенсирующий ТР Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)		$e_0 = (E/4) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ $K_s$ – К-фактор $\varepsilon_0$ – деформация $E$ – питание моста $e_0$ – выходное напряжение $Rg_1$ ...деформация – $\varepsilon_1$ $R$ – постоянное сопротивление $Rg_2$ ...деформация – 0
Два активных тензорезистора (ортогональное расположение). Термокомпенсирована. Температурная погрешность кабеля исключена. $x(1 + \nu)$ выход			

Продолжение табл. 1

Наименование	Пример	Схема	Выход
<p>Полумостовая ортогональная схема 2 активных тензорезистора</p> <p>Количество тензорезисторов: 2</p>	 <p>Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)</p>		$e_0 = ((1 + \nu)E/4) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ <p><math>\nu</math> – коэффициент Пуассона  <math>Rg_1</math> <math>Rg_2</math> – сопротивление тензорезисторов  <math>Rg_1</math>...деформация – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2</math>...деформация – <math>-\varepsilon_0</math>  <math>R</math> – постоянное сопротивление</p>
<p>Два активных тензорезистора. Термокомпенсирована. Температурная погрешность кабеля исключена. Деформация сжатия/растяжение исключена. x2 выход</p>			
<p>Полумостовая схема 2 активных тензорезистора (для деформации изгиба)</p> <p>Количество тензорезисторов: 2</p>	 <p>Деформация изгиба</p>		$e_0 = (E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ <p><math>Rg_1</math>...деформация – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2</math>...деформация – <math>-\varepsilon_0</math>  <math>R</math> – постоянное сопротивление</p>
<p>Два активных тензорезистора. Опозитная схема. Без термокомпенсации. Деформация изгиба исключена подключением в противоположных направлениях. x2 выход</p>			
<p>Полумостовая опозитная схема 2 активных тензорезистора 2-проводная схема включения</p> <p>Количество тензорезисторов: 2</p>	 <p>Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)</p>		$e_0 = (E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ <p><math>Rg_1</math>...деформация – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2</math>...деформация – <math>\varepsilon_0</math>  <math>R</math> – постоянное сопротивление</p>
<p>Два активных тензорезистора. Опозитная схема. Без термокомпенсации. Температурная погрешность кабеля исключена. Деформация изгиба исключена. x2 выход</p>			
<p>Полумостовая опозитная схема 2 активных тензорезистора 3-проводная схема включения</p> <p>Количество тензорезисторов: 2</p>	 <p>Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)</p>		$e_0 = (E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ <p><math>Rg_1</math>...деформация – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2</math>...деформация – <math>\varepsilon_0</math>  <math>R</math> – постоянное сопротивление</p>
<p>Четыре активных тензорезистора. Применима для измерений деформации изгиба. Термокомпенсирована. Температурная погрешность кабеля исключена. Деформация сжатия/растяжения исключена. x4 выход</p>			
<p>Полномостовая схема 4 активных тензорезистора (для измерений деформации изгиба)</p> <p>Количество тензорезисторов: 4</p>	 <p>Изгибающая деформация</p>		$e_0 = E \cdot K_s \cdot \varepsilon_0$ <p><math>Rg_1, Rg_3</math> – деформация изгиба – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2, Rg_4</math> – деформация изгиба – <math>-\varepsilon_0</math></p>
<p>Четыре активных тензорезистора. Термокомпенсирована. Температурная погрешность кабеля исключена. x2(1 + ν) выход</p>			

Окончание табл. 1

Наименование	Пример	Схема	Выход
<p>Полномостовая ортогональная схема 4 активных тензорезистора Количество тензорезисторов: 4</p>			<p><math>e_0 = ((1 + \nu)E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0</math>  <math>\nu</math> – коэффициент Пуассона  <math>Rg_1, Rg_3</math> – деформация изгиба – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2, Rg_4</math> – деформация изгиба – <math>-\varepsilon_0</math></p>
<p>Четыре активных тензорезистора. Термокомпенсация. Температурная погрешность кабеля исключена. Деформация изгиба исключена. x2 выход</p>			
<p>Полномостовая схема с двумя компенсационными ТР 4 активных тензорезистора Количество тензорезисторов: 4</p>	<p>Активные ТР</p> <p>Компенсационные ТР</p> <p>Одноосевая деформация (сжатие/растяжение)</p>		<p><math>e_0 = (E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0</math>  <math>Rg_1, Rg_3</math> – деформация изгиба – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2, Rg_4</math> – деформация изгиба – 0</p>
<p>Два активных тензорезистора. Применима для измерения деформации изгиба. Термокомпенсация. Температурная погрешность кабеля исключена. x2 выход</p>			
<p>Полумостовая схема 2 активных тензорезистора (для измерений изгибающих деформаций) Количество тензорезисторов: 2</p>			<p><math>e_0 = (E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0</math>  <math>Rg_1, Rg_3</math> – деформация изгиба – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2, Rg_4</math> – деформация изгиба – <math>-\varepsilon_0</math>  <math>R</math> – постоянное сопротивление</p>
<p>Четыре активных тензорезистора. Применима для измерения деформации изгиба. Термокомпенсация. Температурная погрешность кабеля исключена. x4 выход</p>			
<p>Полномостовая схема 4 активных тензорезистора (для измерений изгибающих деформаций) Схема 4/4 Количество тензорезисторов: 4</p>			<p><math>e_0 = E \cdot K_s \cdot \varepsilon_0</math>  <math>Rg_1, Rg_3</math> – деформация изгиба – <math>\varepsilon_0</math>  <math>Rg_2, Rg_4</math> – деформация изгиба – <math>-\varepsilon_0</math></p>
<p>Четыре активных тензорезистора. Применима для измерения общей деформации. Без термокомпенсации. x1 выход</p>			
<p>Четвертьмостовая схема с последовательно - параллельным подключением ТР 4 активных тензорезистора (для измерения суммарной деформации) Количество тензорезисторов: 4</p>			<p><math>e_0 = (E/2) \cdot K_s \cdot \varepsilon_0</math>  <math>\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) / 2</math>  <math>R</math> – постоянное сопротивление  <math>R = Rg_1 = Rg_2 = Rg_3 = Rg_4</math></p>

Тензометрический эксперимент проводится после всех подготовительных процедур и сводится к замеру амплитуд выходных сигналов, их обработке и анализу. Используя градуировочную характеристику тензометрической измерительной аппаратуры, можно определить не только действительные деформации, но и напряжения в месте закрепления тензорезисторов.

## 5. ОСОБЕННОСТИ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ

Рассмотрим особенности тензометрического эксперимента на примере газотурбинных двигателей (ГТД). Эти двигатели относятся к *сложным техническим объектам*, содержат ротор (или роторы) и статор со связывающими их опорами. Силовые детали и элементы конструкции ротора (или роторов) и статора, входящие в состав структурных элементов (компрессора, турбины, камеры сгорания, входного и выходного устройств) двигателя, выполняют определенные функции и обеспечивают ему необходимую *прочностную надежность* и жесткостные характеристики, воспринимая потоки нагрузок, возникающие при его работе.

По характеру изменения по времени нагрузки могут быть *статическими* и *динамическими*. Наибольшее количество отказов происходит по причине воздействия динамических нагрузок и достигает 70% от всех прочностных отказов. Поэтому проблема повышения динамической прочности ГТД является наиболее важной и актуальной.

Динамические нагрузки вызываются множеством разнообразных процессов, происходящих при работе двигателя, что позволяет их классифицировать по физической природе на газовые, инерционные, тепловые, механические.

Эти нагрузки являются источниками силового и кинематического возбуждения объектов исследования ротора и статора, вызывая в них опасные резонансные колебания. У ротора чаще всего подвержены опасному воздействию динамических нагрузок рабочие лопатки компрессоров и турбин, вентиляторные лопатки, диски, валы, а у статора – оболочки, трубопроводы, направляющие аппараты компрессоров, системы подвески агрегатов и др.

Удовлетворение требованиям прочностной надежности этих объектов исследования является важнейшей составной частью общей проблемы повышения надежности ГТД. Известно, что *надежность обеспечивается на всех стадиях жизненного цикла* ДЛА. Согласно высказыванию академика Н.Д. Кузнецова: «Надежность машин закладывается на стадии проектирования, обеспечивается в процессе производства, достигается при экспериментальной отработке (доводке), совершенствуется и реализуется при эксплуатации».

Наибольший объем исследований приходится на стадию экспериментальной отработки. На этой стадии проверяется заложенная при проектировании прочностная надежность и выявляются неудачные конструктивные и технологические решения.

Процесс экспериментальной отработки осуществляется путем специальных исследовательских, сравнительных, натурных, контрольных, стендовых и летных испытаний опытных и серийных образцов двигателей. Одним из современных методов экспериментальной отработки, позволяющим сократить ее сроки и стоимость, является *поузловая доводка*. Она заключается в отдельной экспериментальной отработке структурных элементов и деталей ГТД, выполненной на специальных стендах.

Необходимый уровень прочностной надежности определяется *конструкционной прочностью* силовых деталей и элементов ДЛА, под которой понимается прочность в реальных условиях эксплуатации с учетом геометрических, технологических, металлургических и конструктивных факторов. Основным критерием прочностной надежности служит *запас прочности*.

При динамических процессах обычно имеют дело с запасом прочности *по переменным напряжениям (запасом усталостной прочности)*. Определяется он по-разному, в зависимости от характера нагружения и асимметрии цикла. Для простого симметричного нагружения, например, он находится из соотношения

$$k = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\max}}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле, под которым понимается наибольшее переменное напряжение, которое может выдержать материал объекта исследования без разрушения от усталости при определенном числе циклов и заданной температуре;  $\sigma_{\text{шax}}$  – амплитуда наибольших действующих напряжений объекта исследования.

Определение запасов прочности по переменным напряжениям осуществляется путем специальных вибрационных испытаний и является трудоемкой и сложной задачей. Это связано с тем, что необходимо с требуемой точностью иметь данные о числителе и знаменателе данного выражения, которые окончательно оцениваются только при проведении тензометрического эксперимента. Причем эти напряжения существенно меняются в зависимости от режимов работы и условий эксплуатации двигателя. Учет этих факторов увеличивает трудоемкость и значительно усложняет тензометрический эксперимент.

Выбор запасов по переменным напряжениям обеспечивает прочностную надежность объектов исследования и строго оговаривается *нормами прочности*.

Оценка запасов прочности по переменным напряжениям относится к главной особенности тензометрического эксперимента.

В тех случаях, когда замеренные запасы прочности по переменным напряжениям не удовлетворяют нормам, проводят исследования по повышению предела выносливости и снижению амплитуд наибольших действующих напряжений объекта исследования. Совокупность методов и средств уменьшения вибрационных напряжений и деформаций, воспринимаемых защищаемыми объектами исследования, называют *вибрационной защитой*. Для этого разработано достаточное количество конструктивных и технологических методов и средств. Эти методы и средства применяются комплексно и представляют собой сложные технические разработки и исследования, требующие большого объема проведения тензометрических экспериментов.

Например, одним из детерминированных средств вибрационной защиты является *конструкционное демпфирование*. В настоящее время оно успешно развивается и применяется для снижения максимальных резонансных напряжений объектов исследования ротора (роторов) и статора – лопаток, трубопроводов, роторов, оболочек и систем подвески агрегатов.

Вибрационная защита средствами конструкционного демпфирования – это важная особенность, которая может быть решена только с использованием тензометрического эксперимента.

Наибольший объем проводимых на двигателе тензометрических экспериментов приходится на рабочие лопатки компрессоров и турбин. Это связано с их конструкцией, интенсивностью внешних переменных нагрузок и многочисленностью.

Лопатка представляет собой упруго-массовую колебательную систему с распределенными по длине параметрами и под воздействием различных источников возбуждения имеет в рабочем диапазоне частот вращения ротора плотный спектр резонансов.

Ввиду отсутствия достоверных методов расчетного определения напряженно-деформированного состояния рабочих лопаток тензометрический эксперимент является определяющим в оценке их прочностной надежности.

Для нахождения запасов прочности (3) необходимо с помощью тензометрического эксперимента определить величины  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_{\text{шax}}$  для различных собственных форм в опасных сечениях лопатки в диапазоне генерируемых двигателем частот возбуждения. Например, для построения только одной *кривой усталости* лопатки требуется от 10 до 50 и более образцов этих лопаток, при базе испытаний до  $10^8$  циклов. Число лопаток для определения предела выносливости может быть увеличено в зависимости от методов испытаний, которые позволяют применить статистическую обработку результатов и получить вероятностные уточненные данные. При необходимости установления количественной зависимости характеристик выносливости от различных технологических, конструктивных или эксплуатационных факторов объем испытаний значительно вырастает.

Исследования *вибрационных характеристик* лопаток проводятся на специальных экспериментальных стендах. В зависимости от целей исследования и возможности возбуждения с необходимой амплитудой напряжений источниками возбуждения лопаток на стенде

могут быть *электродинамический или воздушный* вибраторы, *пьезоэлектрический* преобразователь. Собственные формы и частоты исследуются методом *голографической интерферометрии* или *с помощью песчаных фигур*.

Построением *частотных и резонансных* диаграмм лопаток определяются опасные гармоники возбуждения и резонансы в рабочем диапазоне частот вращения ротора.

Распределение напряжений по перу лопатки для различных форм колебаний осуществляется с помощью тензометрического эксперимента. Тензорезисторы монтируются и закрепляются в опасных точках: вдоль входной и выходной кромок со стороны корытца, а также в местах максимальной толщины профиля и на торце пера со стороны спинки.

Кроме того, если учитывать асимметрию цикла нагружения за счет статической составляющей от действия центробежных и газовых сил, повышенную температуру, особенности конструкции и технологии изготовления, то тензометрический эксперимент превращается в сложную научно-техническую проблему. Число тензорезисторов на этих объектах исчисляется тысячами.

Вибрационные характеристики лопаток обычно находятся в диапазоне частот от 100 до 15 000 Гц. В настоящее время чаще всего используются фольговые тензорезисторы с базой 3 или 5 мм, благодаря их удовлетворительным метрологическим характеристикам и малой стоимости.

К важной особенности тензометрического эксперимента относятся температурные условия работы тензорезисторов. Объекты исследования могут находиться в «холодных», «умеренных» и «горячих» зонах. В зависимости от диапазона рабочей температуры условно можно разделить тензорезисторы на три группы: тензорезисторы, способные работать при температуре до 200 °С, от 200 до 600 °С и от 600 до 950 °С.

Для нормальных температур при изготовлении чувствительных элементов наиболее часто применяют медно-никелевые сплавы (КОНСТАНТАН – 60% меди и 40% никеля), а при повышенных температурах – хромоникелевые сплавы (НИХРОМ – 80% никеля и 20% хрома) или никель-молибденовые сплавы (НМ23ХЮ-ВИ).

От температуры зависит и способ крепления тензорезистора к объекту исследования. Например, при температуре от –50 до +70 °С применяют клеи на основе циакрина. При температуре до 200 °С – клеи на основе фенолформальдегидной смолы. Для высокотемпературных тензорезисторов специальные клеи и цементы (до 600 °С) или точечную контактную сварку (до 950 °С).

Привариваемые тензорезисторы имеют металлическую основу и термостойкие провода, которые свариваются лазерной микросваркой. Точность измерений этих тензорезисторов ниже фольговых и проволочных.

От воздействия окружающей среды (агрессивный газ, топливо, масло и т.д.) тензорезисторы защищают с помощью специальных устройств.

Коммуникационные провода и кабели подбираются в зависимости от условий тензометрического эксперимента, сложности трассы и ее длины.

Существенным дополнением ко всем особенностям тензометрического эксперимента ГТД является то, что он должен проводиться во *всем диапазоне частот вращения ротора (роторов)* от малого газа до максимального режима, а регистрация деформаций и напряжений должна вестись *непрерывно*.

Другой особенностью обычно считают сложность передачи электрического сигнала от тензорезисторов, закрепленных на роторных объектах исследования, к тензометрической измерительной аппаратуре. Проблема заключается в том, что сигналы очень малы и должны передаваться без существенных помех. Для этой цели используют специальные *токоъемники или радиоканал*. Задача значительно усложняется в многовальных двигателях с многокаскадными компрессорами и турбинами.

В настоящее время известны *контактные* (торцевые ртутные и щеточные) и *бесконтактные* токоъемники. Контактные токоъемники чувствительны к помехам, имеют ограниченную частоту вращения ротора и обладают небольшим ресурсом, однако раньше они широко применялись. Бесконтактные токоъемники сложные и имеют высокую себестоимость. Например, на двигателе НК-93 применена бесконтактная передача сигнала с помощью инфракрасного излучения от лопаток двухкаскадного винтовентилятора, вращающегося

в противоположные стороны. В настоящее время в подобных задачах используются в основном бесконтактные методы передачи сигнала от первичных преобразователей по радиоканалу или с использованием беспроводных сетей Wi-Fi.

Рассмотренные особенности тензометрического эксперимента обуславливают, в зависимости от целей и задач исследований, разработку и применение специальных структурных схем многоканальных автоматизированных тензометрических измерительных систем. Эти системы должны функционировать на базе производительных компьютеров и иметь соответствующее программное обеспечение.

В состав аппаратной части автоматизированных тензометрических измерительных систем, например, должно входить электронное оборудование для ввода и вывода аналоговых и цифровых сигналов, поступающих от многоканального нормирующего преобразователя измерительной тензометрической аппаратуры.

Система должна обеспечивать сбор и регистрацию измерений в реальном масштабе времени непрерывно с одновременной архивацией и визуализацией экспериментальных данных для просмотра, хранения и анализа результатов. Вся первичная информация должна быть оцифрована, проходить математическую обработку измеряемых деформаций и сохраняться в формате базы данных, быть доступной для последующей обработки и анализа. Использование современных компьютерных технологий и программного обеспечения гарантирует качественное проведение тензометрического эксперимента в кратчайшие сроки.

Градуировка измерительных каналов является одной из важных процедур, которая обеспечивает достоверность и точность проводимых измерений.

## **6. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ**

Перед началом измерений проводится *градуировка* тензометрической измерительной аппаратуры.

Градуировкой *тензометрической измерительной аппаратуры* называется процедура нахождения градуировочной характеристики – зависимости измеряемой величины от относительной деформации от величины выходного электрического сигнала. В случае градуировки при динамическом процессе в качестве указанных величин берут амплитудные значения при различных частотах динамических процессов.

Частотная зависимость выходного сигнала является особенностью градуировки. Она характеризуется *динамическим диапазоном измерений* – диапазоном частот динамических процессов, при которых динамическая градуировка представляется линейной зависимостью.

Тензометрическая аппаратура до недавнего времени разделялась на аппаратуру для статических и для динамических исследований. Схемные отличия заключались в наличии в динамической аппаратуре емкости  $C$ , не пропускающей постоянную составляющую сигнала на блок регистрации. Это не давало возможности на динамическую аппаратуру регистрировать результаты статического эксперимента. Статическая аппаратура не отличалась быстродействием, что не позволяло корректно регистрировать динамический сигнал. В этой связи была потребность в проведении градуировки как в статическом режиме, так и в динамическом, в зависимости от используемой аппаратуры. Статическую градуировку удобно проводить на балке равного сопротивления. Для динамической градуировки тензометрической цепи и получения высокой точности измерений используются градуировочные устройства камертонного типа.

В настоящей лабораторной работе для проведения градуировки многоканальной тензометрической измерительной системы в качестве объекта исследования используется *камертонное градуировочное устройство* [5]. Название «камертонное» оно получило от прибора, служащего эталоном высоты звука при настройке музыкальных инструментов и в пении.

Схема *камертонного градуировочного устройства* приведена на рис. 13.

Оно состоит из упругого колебательного элемента в виде камертона  $1$  и электромагнита  $4$ , с помощью которого происходит возбуждение изгибных автоколебаний двух ножек камертона по первой собственной форме с фиксированной частотой. Разброс камертонной

градуировки меньше разброса тензочувствительности. Это связано с особыми свойствами камертона: полностью уравновешенной первой формой колебаний. Моменты и сила в заделке камертона равны нулю и моделируют абсолютно жесткую заделку. При этом такое моделирование жесткой заделки намного точнее чем, например, зажатие в тисках.

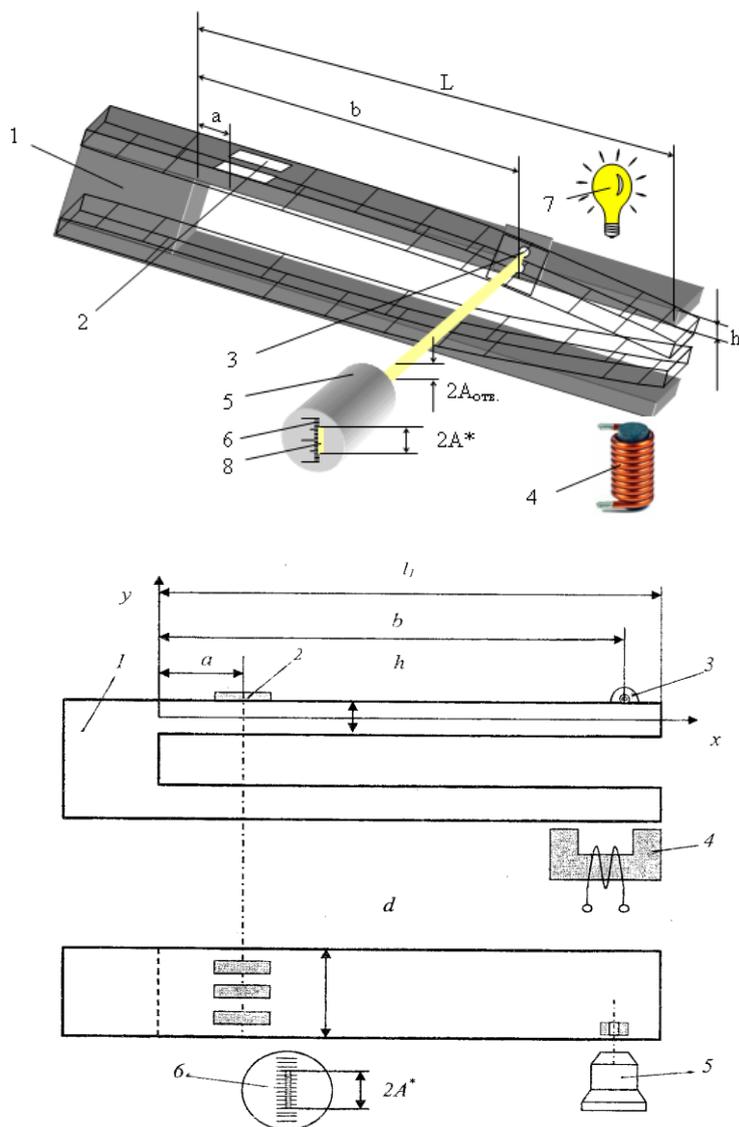


Рис. 13. Схема камертонного градуировочного устройства

В случае камертона не требуется частотная подстройка, так как камертон сам встает на резонансную частоту. Все остальные формы практически мгновенно затухают.

Камертон иногда изготавливают из того же материала и по той же технологии, что и деталь, исследования которой проводятся. Применение одинакового материала позволяет воспроизвести условия, тождественные условиям работы детали, однако это значительно удорожает саму деталь.

На расстоянии  $a$  от заделки на поверхность ножки камертона закрепляются исследуемые тензорезисторы 2. Они включаются в электрическую схему тензометрической измерительной аппаратуры. Их относительная деформация определяется расчетным путем по величине амплитуды колебаний ножки камертона.

Амплитуда колебаний измеряется визуально с помощью микроскопа по риску 3, расположенной на расстоянии  $b$  от заделки. Риска представляет собой отверстие небольшого диаметра в тонкой пластине, закрепленной на ножке камертона, освещаемое встречным пучком света от электрической лампочки 7.

Луч света от источника света 7 подсвечивает риску 3, колеблющуюся на балке камертона с размахом  $2A_{\text{отв}}$ , проходит через микроскоп 5 и создает световую полосу 8 на экране со шкалой 6. Размер полосы на экране микроскопа  $2A^*$ . Коэффициент увеличения

$$m = A^* / A_{\text{отв}}.$$

Одновременно сигнал с тензорезистора передается на регистрирующее устройство. Сигнал регистрируется в виде некоторой величины  $2A_{\text{рег}}$ , между  $A_{\text{рег}}$  и  $A^*$  можно установить связь:

$$A_{\text{рег}} = K_a A^*.$$

Коэффициент  $K_a$  зависит от степени усиления, аппаратуры, силы тока, питающего тензорезистор, и его чувствительности.

Если уравнение упругой линии камертона  $y = y(x)$ , то размах полосы на экране микроскопа  $2A^*$  можно связать с реальным перемещением камертона:

$$A^* = mA_{\text{отв}} = my(b).$$

Теоретическое определение относительной деформации в месте закрепления тензорезисторов осуществляется по величине амплитуды перемещений (прогиба) упругой линии ножки камертона. Это можно сделать несколькими способами. Учитывая, что прогибы и форма упругой линии балки для статики и динамики идентичны [5], можно воспользоваться выкладками для балки, испытывающей плоский изгиб.

## 7. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Взаимосвязь деформаций с нагрузками и прогибами может быть установлена из дифференциальных уравнений упругой линии балки.

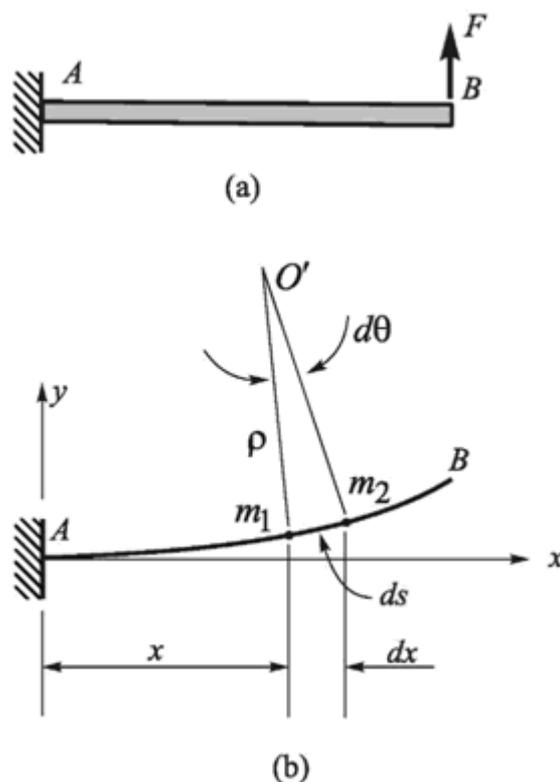


Рис. 14. Расчетная схема балки

На рис. 14 показана деформация балки при поперечном изгибе. Начало системы координат  $(x, y)$  выбрано на левой опоре. Примем за положительное направление оси  $x$  вправо, а положительную ось  $y$  направим вверх. Ось балки под действием нагрузки, расположенной в одной из главных плоскостей инерции, искривляется в той же плоскости, а поперечные сечения поворачиваются. Их центры тяжести получают поступательные перемещения  $y(x)$ . Искривленная ось балки называется изогнутой осью (упругой линией, линией прогибов, упругой кривой). Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, т.е. в направлении оси  $y$ , называется прогибом балки в данном сечении и обозначается  $v$ . Угол, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

### 1. Кривизна упругой линии балки

Напряжения и деформации в балке связаны с кривизной упругой линии балки. На рис. 14, линией  $AB$  представлена изогнутая ось (упругая линия). Рассмотрим на ней две точки  $m_1$  и  $m_2$ , причем  $m_1$  выберем на некотором произвольном расстоянии  $x$  от начала координат, а  $m_2$  – на некотором расстоянии  $dS$ , измеренном вдоль длины упругой линии балки. Пересечение перпендикуляров к ней в двух выбранных точках показывает положение центра кривизны  $O$ . Поскольку упругий изгиб балок сопровождается очень малыми прогибами, центр кривизны расположен на расстоянии, многократно превышающем длину балки.

Расстояние  $m_1O$  называется радиусом кривизны  $\rho$ , а сама кривизна  $k$  определяется как величина, обратная радиусу кривизны, т.е.

$$k = \frac{1}{\rho}. \quad (1)$$

И кривизна, и радиус кривизны являются функциями координаты  $x$ , как, впрочем, и положение центра кривизны.

Как известно, кривизна в произвольной точке по длине балки зависит от изгибающего момента в этом сечении, а также изгибной жесткости балки:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (2)$$

Очевидно, что для призматического бруса кривизна будет исключительно функцией изгибающего момента. При чистом плоском изгибе кривизна балки будет неизменной по всей длине участка чистого изгиба.

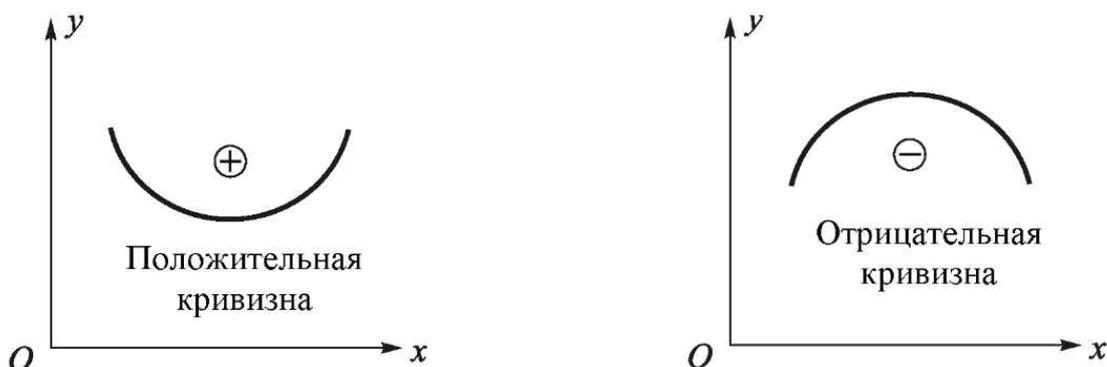


Рис. 15. Правило знаков

Правило знаков для кривизны зависит от соответствия направления координатных осей и направления изгиба. Если ось  $x$  направлена вправо, а ось  $y$  – вверх, то кривизна будет

положительной, если балка изогнута выпуклостью вниз, а центр кривизны, следовательно, находится сверху. В противном случае кривизна отрицательна (рис. 15).

## 2. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Определение прогибов и углов поворота изогнутых балок основывается на понятии дифференциального уравнения изогнутой линии балки.

При определении функции  $v(x)$  задача будет решена. Прогиб  $v$  в произвольной точке  $m_1$  показан на рис. 16 а. Поскольку вторая точка  $m_2$  расположена на расстоянии  $x + dx$  от начала координат, ее прогиб отличается на бесконечно малую величину  $dv$  (рис. 16 а)

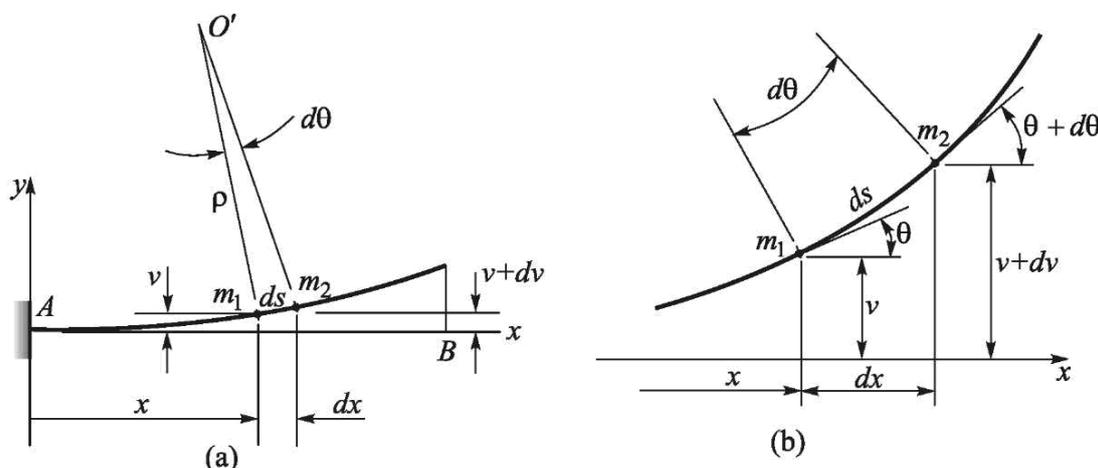


Рис. 16. К выводу зависимостей при изгибе

Угол поворота сечения  $\theta$  – это угол между осью  $x$  и углом наклона касательной к изогнутой линии балки, как показано для точки  $m_1$  на рис. 16 б. Для выбранных осей положительным является угол поворота против часовой стрелки.

Угол поворота в точке  $m_2$  отличается от точки  $m_1$  на величину  $d\theta$ . Этот же угол определяет взаимный наклон сечений балки в точках  $m_1$  и  $m_2$ . Из рис. 16 а следует, что

$$\rho d\Theta = ds. \quad (3)$$

Следовательно, кривизна в точке  $m_1$  определяется выражением

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\Theta}{ds}. \quad (4)$$

Кривизна положительна, когда угол поворота увеличивается с увеличением координаты  $x$ .

В практике проектирования инженерных конструкций в подавляющем большинстве случаев имеют место только малые прогибы. Поэтому линия прогибов будет весьма полой, а угол  $\Theta$  и наклон линии прогибов будут очень малыми величинами. Следовательно, можно принять

$$ds \approx dx, \quad 0 \approx \text{tg}\Theta \approx \frac{dv}{dx}. \quad (5)$$

Подставляя эти выражения в (4), имеем

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\Theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (6)$$

Приравняв правые части (2) и (6), получим дифференциальное уравнение изогнутой линии балки:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (7)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано, чтобы определить функции углов поворота  $\theta(x)$  (первое интегрирование) и прогибов  $v(x)$  (второе интегрирование).

Для консольной балки с сосредоточенной силой  $P$  на свободном конце можно найти аналитические выражения для прогибов и углов поворота (рис. 17).

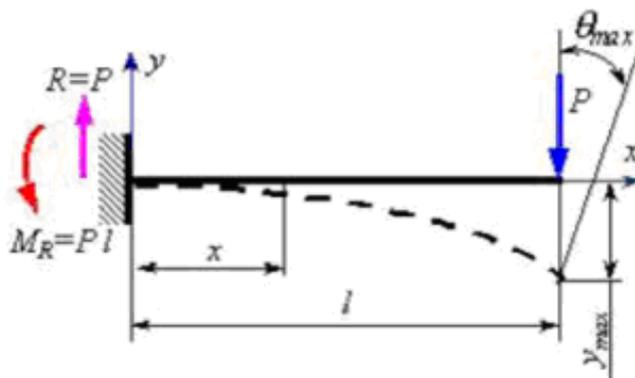


Рис. 17. Схема балки при нагружении сосредоточенной силой

Реактивная сила и момент в заделке равны  $R = P$ ,  $M = Pl$ . В произвольном сечении на расстоянии  $x$  от заделки имеем

$$v''(x) = \frac{P \cdot x - P \cdot L}{EI}; \quad \Theta(x) = \frac{P}{2EI} \cdot x^2 - \frac{PLx}{EI} + C_1; \quad v(x) = \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{PLx^2}{2EI} + C_1 \cdot x + C_2.$$

В заделке прогиб  $v(0)$  и угол поворота сечения  $\theta(0)$  равны нулю. Эти граничные условия будут удовлетворены, если  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ . Окончательно имеем

$$\Theta(x) = \frac{P}{2EI} \cdot x^2 - \frac{PLx}{EI}; \quad v(x) = \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{PLx^2}{2EI}.$$

Для балки АВ, нагруженной распределенной нагрузкой с интенсивностью  $q$  (рис. 18) и изгибной жесткостью балки, равной  $EI$  уравнения для угла поворота  $\theta(x)$  и прогиба  $v(x)$ , балки имеют следующий вид.

#### **Уравнение изгибающих моментов**

На расстоянии  $x$  от жесткого защемления уравнение изгибающих моментов должно учитывать вертикальную реакцию  $R = qL$ , а также реактивный момент  $M_R = qL^2/2$ :

$$M(x) = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2}.$$

Подставляя это уравнение в (3), получим *дифференциальное уравнение упругой линии*.

$$EIv''(x) = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2}.$$

Проинтегрировав это выражение первый раз, получим следующее уравнение углов поворота:

$$EIv'(x) = \frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1.$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  можно найти, используя одно из граничных условий, а именно равенство нулю угла поворота в жестком защемлении:  $v'(0) = 0$ .

Применяя это условие, получаем  $C_1 = 0$ , а само уравнение приобретает вид:

$$EIv'(x) = \frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6}.$$

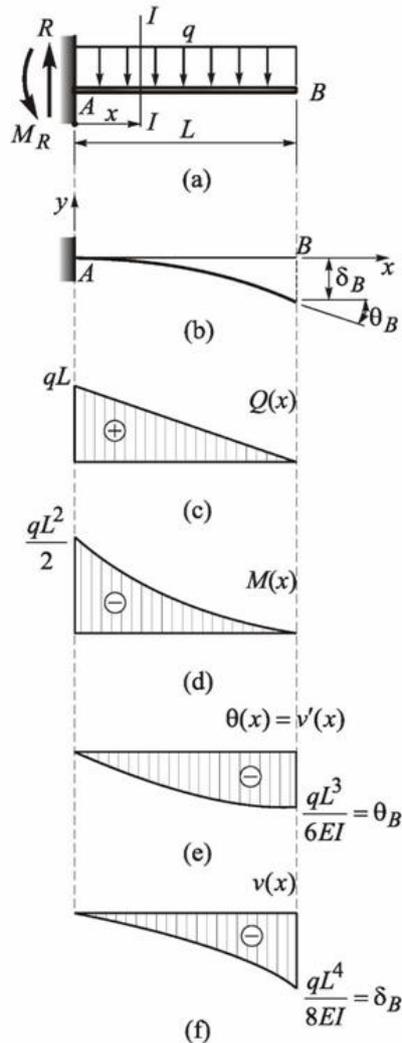


Рис. 18. Расчетная схема нагружения балки распределенной нагрузкой и эпюры

Уравнение углов поворота имеет вид:

$$v'(x) = \Theta(x) = -\frac{qx}{6EI} \cdot (3L^2 - 3Lx + x^2).$$

В жестком защемлении ( $x = 0$ ) угол поворота равен нулю, а во всех остальных точках он отрицательный, т.е. все сечения поворачиваются по часовой стрелке. Это полностью соответствует физической картине изгиба балки.

Интегрируя уравнение углов поворота, получаем уравнение прогибов

$$EIv(x) = -\frac{qL^2x^2}{4} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_2.$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  можно найти из другого граничного условия, отражающего равенство нулю прогиба в жестком защемлении, т.е.

$v(0) = 0$ . Применяя его, получаем  $C_2 = 0$ . Таким образом, уравнение прогибов приобретает вид:

$$v(x) = -\frac{qx^2}{24EI} \cdot (6L^2 - 4Lx + x^2).$$

Прогиб равен нулю на опоре ( $x = 0$ ). Во всех остальных точках прогиб отрицательный.

## 8. РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ

Деформации, регистрируемые тензорезистором, приклеенным на балку, можно рассчитать, используя приведенные соотношения, прямым методом – основываясь на базовых постулатах изгиба.

Предположим, на балку (рис. 19), на расстоянии  $a$  от заделки наклеен тензорезистор с базой  $s$ . При этом координаты крайних точек тензорезистора на балке будут иметь координаты

$$a_1 = a - s/2 \text{ и } a_2 = a + s/2.$$

После деформации балки (рис. 20), согласно постулату изгиба, средняя линия балки изгибается без изменения линейных размеров, сечения  $a_1$  и  $a_2$  повернутся на углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , перпендикулярно к средней линии в этих точках. Соответственно, база тензорезистора увеличится на величину  $ds$ , представляющую собой дугу на радиусе  $h/2$  при центральном угле  $(\theta_2 - \theta_1)$ . Приращение  $ds$  можно представить как катет прямоугольного треугольника  $AB_1B_2$ . Другой катет этого треугольника равен  $h/2$ , а противолежащий угол –  $(\theta_2 - \theta_1)$ :

$$\frac{2ds}{h} = \text{tg}(\Theta_2 - \Theta_1).$$

Определив из приведенных выше соотношений углы поворота  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , можно вычислить величину  $ds$ , а отношение  $ds/s$  даст искомую величину деформации тензорезистора:

$$\varepsilon = \frac{ds}{s}$$

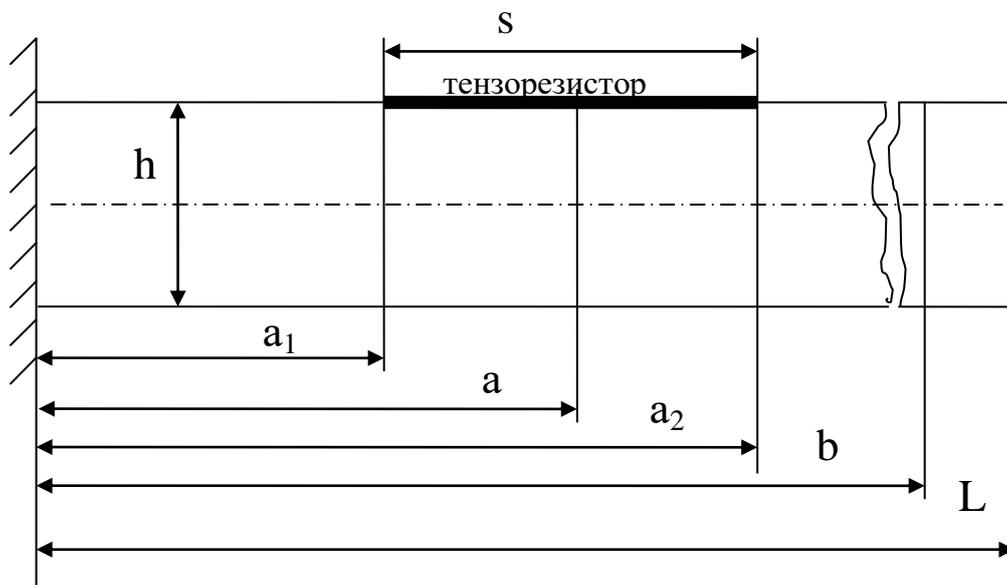


Рис. 19. Обозначения линейных размеров

Углы поворота в сечениях  $a_1$  и  $a_2$  при нагружении силой  $P$ :

$$EIy'_1 = EI\Theta_1 = P \cdot \frac{a_1^2}{2} - PLa_1;$$

$$EIy'_2 = EI\Theta_2 = P \cdot \frac{a_2^2}{2} - PLa_2.$$

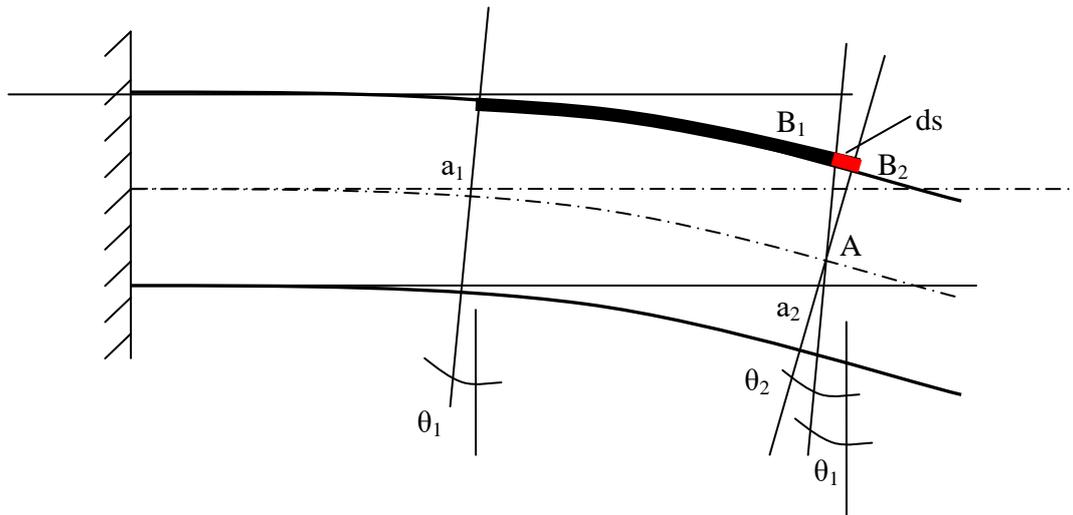


Рис. 20. К определению деформаций при плоском изгибе

Так как эти углы образуются при воздействии одной и той же силы  $P$ , вычтя первое уравнение из второго, можно получить разность углов ( $\theta_2 - \theta_1$ ) при нагружении сосредоточенной силой:

$$P\left(\frac{a_2^2}{2} - La_2 - \frac{a_1^2}{2} + La_1\right) = EI(\Theta_2 - \Theta_1);$$

$$(\Theta_2 - \Theta_1) = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{a_2^2}{2} - La_2 - \frac{a_1^2}{2} + La_1\right).$$

Таким образом, зная величину деформации базового отрезка тензорезистора (а это через изменение сопротивления может быть зафиксировано регистрирующей аппаратурой), можно определить величину силы, воздействующей на балку.

Связав между собой уравнение прогиба в каком-либо сечении (например, в сечении  $b$ ) и уравнение прогиба в сечении  $x$  можно построить уравнение упругой линии по известной величине прогиба в точке  $b$ :

$$y(x) = y(b) \cdot \frac{x^3 - 3Lx^2}{b^3 - 3Lb^2}.$$

Связав уравнение прогиба и уравнение угла поворота при одной и той же нагрузке, можно получить зависимости между величинами прогиба в сечении  $b$ , деформации в сечении  $a$  и нагрузки. Зная величину прогиба, можно определить деформацию и нагрузку:

$$\Theta(a) = 3y_b \cdot \frac{a^2 - 2La}{b^3 - 3Lb^2}.$$

В динамическом режиме балка совершает колебания под действием упругих и инерционных сил, последние обусловлены наличием массы балки. Так как масса распределена по балке, корректнее в расчетной схеме использовать распределенную нагрузку на балку [5].

При этой схеме уравнение упругой линии по известному значению прогиба в точке  $b$ :

$$y(x) = y_b \cdot \frac{4Lx^3 - 6L^2x^2 - x^4}{4Lb^3 - 6L^2b^2 - b^4}.$$

Угол поворота в сечении  $x$  в зависимости от прогиба в точке  $b$  выглядит так:

$$\Theta(x) = y_b \cdot \frac{4 \cdot (3Lx^2 - 3L^2x - x^3)}{4Lb^3 - 6L^2b^2 - b^4}.$$

Из чего можно вывести зависимость деформации в зоне размещения тензорезистора на балке от величины прогиба в сечении  $b$ .

## **9. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

Лабораторная работа проводится на специальном экспериментальном стенде, на котором установлена необходимая аппаратура тензометрической измерительной системы.

После ознакомления с физическими основами тензометрии для овладения навыками самостоятельного проведения тензометрического эксперимента необходимо провести градуировку тензометрической измерительной аппаратуры при статических и динамических процессах.

Максимальная амплитуда деформаций или напряжений должна быть ограничена и не превышать величин пределов выносливости объекта исследования и исследуемого тензорезистора.

Результаты обеих градуировок сопоставить между собой и объяснить причины, если они не совпадают.

### **Подготовка экспериментального стенда**

1. Подключить стенд к электрической сети напряжением 220 В.
2. Включить приборы: тензометрическую измерительную аппаратуру и компьютер. Камертонное градуировочное устройство не включать.
3. Произвести прогрев аппаратуры, не менее 10 мин перед началом эксперимента.
4. Запустить программу и перейти на вкладку статического отображения деформаций.
5. Установить приспособление для статического нагружения камертонного устройства.
6. Устанавливая разные грузы, фиксировать в таблице их величины и соответствующие им значения деформаций. При этом фиксировать через микроскоп значения соответствующих прогибов.
7. Построить график зависимости деформаций от масс грузов.
8. Перейти на вкладку статического задания прогибов.
9. Задаваясь полученными значениями прогибов, зафиксировать в таблицу соответствующие им расчетные значения относительных деформаций.
10. Снять приспособление для статического нагружения.
11. Включить камертонное устройство и дать ему прогреться в течение 10 мин.
12. Перейти на вкладку динамического отображения деформаций.
12. Поворотом ручек грубой и точной настроек камертонного градуировочного устройства возбудить колебания ножек и, убедившись в стабильности процесса, замерить по шкале микроскопа величины размаха  $2A^*$  и по индикатору деформацию.
13. Первичные результаты измерений занести в таблицу.
14. Аналогично п. 8, 9 изменяя амплитуды прогибов, занести в соответствующие графы таблицы расчетные значения деформаций и соответствующие им амплитуды прогибов.
15. Сравнить результаты, полученные в ходе статического и динамического экспериментов.

## **10. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Отчет о выполненной работе должен содержать:

– цели лабораторной работы;

- назначение и основные понятия тензометрического эксперимента;
- структурную схему экспериментальной установки, изображенную на рис. 13 с необходимыми пояснениями;
- схему подключения тензорезисторов на экспериментальной установке (выбрать из табл. 1);
- первичные измерения статических и динамических прогибов и соответствующие им значения деформаций тензорезисторов;
- графики зависимостей деформаций от прогиба и массы груза (статика) и прогиба (динамика).

## **11. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Назовите основные цели тензометрии.
2. Что такое тензометрический эксперимент?
3. По каким признакам классифицируются тензорезисторы?
4. Каковы основные метрологические характеристики тензорезисторов?
5. Что такое градуировка?
6. В чем заключаются особенности разных мостовых схем?
7. Назовите состав и назначение тензометрической измерительной аппаратуры, входящей в учебный стенд.
8. Чем характерны особенности тензометрического эксперимента ГТД?

## **12. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Серьезнов А.Н. Измерения при испытаниях авиационных конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1976. 224 с.
2. Методы и средства натурной тензометрии: справочник / М.Л. Дайчик, Н.И. Пригоровский, Г.Х. Хуршудов. Машиностроение, 1989. 240 с.
3. National Instruments Системы сбора данных [Текст]: Материалы учебного курса. Издание NI , 383 с.
4. Формирование тензометрических мостовых схем [электронный ресурс] URL: <http://kyowa.ru/upload/files/201105191133320931140001305790412.pdf>.
5. Леонтьев М.К. Тензометрирование в авиационных газотурбинных двигателях [Текст]: учебное пособие – М.: Изд-во МАИ, 2001 – 36 с.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6**

### **КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ**

#### ***Цель занятия***

**Целью лабораторной работы** является изучение вопросов, связанных с крутильными колебаниями коленчатых валов (КВ) двигателей внутреннего сгорания (ДВС).

Крутильные колебания возникают в связи с действием на коленчатый вал переменных крутящих моментов, которые (в особенности на резонансных режимах) приводят к появлению усталостных трещин и в отдельных случаях к разрушению элементов конструкции. Поэтому коленчатые валы ДВС подлежат обязательному расчету на крутильные колебания.

Целью настоящей работы является изучение способа приведения реальной системы коленчатого вала к эквивалентной (теоретической или расчетной) системе и овладение

методиками расчетного и экспериментального определения собственных частот и форм крутильных колебаний системы эквивалентного вала.

При выполнении лабораторной работы используются:

- настоящее пособие;
- установка для исследования крутильных колебаний валов;
- таблица заданий с данными для расчетов.

Рекомендуется следующая последовательность проведения занятия:

1. По настоящему пособию изучить общие сведения о колебаниях;
2. Познакомиться с методом приведения реальной системы коленчатого вала к эквивалентной (расчетной);
3. Изучить методы определения собственных частот и форм колебаний упругих систем с сосредоточенными массами;
4. Рассчитать собственные частоты и частоты динамического гашения крутильных колебаний для двухмассовой системы (реализованной на установке);
5. Познакомиться с конструкцией установки и методикой проведения эксперимента;
6. Выполнить экспериментальные исследования;
7. Сравнить результаты теоретических расчетов и экспериментальных данных;
8. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

В процессе работы выполнять необходимые записи в тетради для лабораторных работ. Лабораторная работа рассчитана на 4 часа и проводится в лаборатории динамики и прочности. За 15 минут до окончания занятия нужно быть готовым к опросу.

## **1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КОЛЕБАНИЯХ**

Коленчатый вал, как всякая упругая система, под действием внешней переменной нагрузки приходит в колебательное движение. Колебания упругой системы, продолжающиеся и после того, как вызвавшая их нагрузка перестала действовать, называются *свободными*. Колебания, вызываемые и поддерживаемые периодически изменяющейся нагрузкой, называются *вынужденными*.

Частота  $p$  свободных колебаний системы зависит от геометрической формы, размеров и упругости отдельных ее элементов.

Под влиянием сопротивлений внутренних (изменения структуры материала, гистерезиса) и внешних (трения относительно наружной среды) свободные колебания постепенно затухают, т.е. уменьшаются отклонения отдельных точек системы (углы  $\varphi$ ) относительно положения равновесия. Чем эти сопротивления больше, тем быстрее происходит полное затухание колебаний системы.

Частота вынужденных колебаний  $\omega_0$  зависит от характера изменения действующей нагрузки.

В некоторых случаях, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний и вызываемые ею напряжения в элементах системы резко возрастают. Подобное состояние системы называется *резонансом*.

При колебаниях упругой системы ее потенциальная энергия в крайнем положении, наиболее удаленном от положения равновесия, достигает максимума. При приближении к положению равновесия потенциальная энергия превращается в кинетическую, и в положении равновесия наибольшее значение имеет уже кинетическая энергия, т.к. скорость колебаний ( $d\varphi/dt$ ) становится максимальной. При дальнейшем переходе системы из положения равновесия в другое крайнее положение кинетическая энергия колебания снова превращается в потенциальную.

При отсутствии внешних нагрузок, а также внутренних и внешних сопротивлений, т.е. при незатухающих свободных колебаниях, сумма обеих энергий не изменяется. При наличии этих сопротивлений на преодоление их затрачивается часть энергии колебаний

системы, и колебания постепенно затухают. При исследовании упругих крутильных колебаний системы учитывают следующие действующие на нее нагрузки (рис. 1):

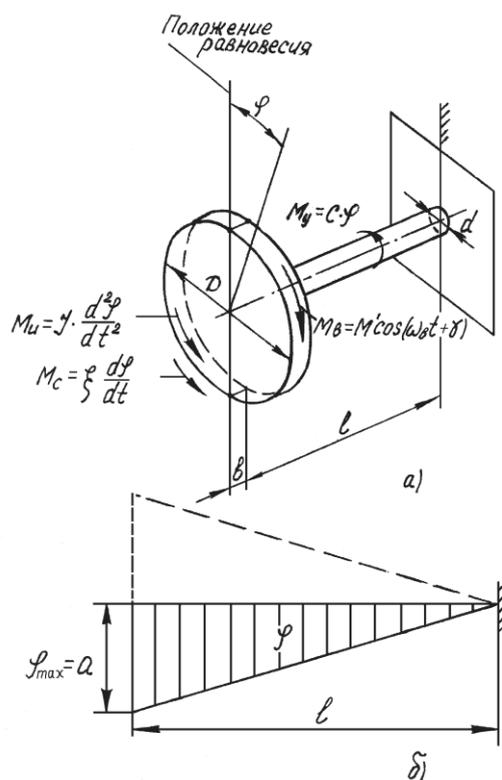


Рис. 1. Крутильные колебания одномассовой системы:  
а) моменты, действующие на систему; б) эпюра углов поворота системы

а) Моменты сил инерции отдельных масс

$$M_u = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

где  $J$  – массовый момент инерции.

При большой частоте колебаний мгновенные ускорения  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  достигают очень больших значений, что и обуславливает весьма значительные величины моментов сил инерции колеблющихся масс.

б) Моменты сил упругости ( $M_y = C\varphi$ , где  $C$  – крутильная жесткость вала), стремящиеся вернуть систему в положение равновесия и препятствующие ее удалению из этого положения. Эти силы для наиболее часто встречающихся в инженерной практике случаев колебаний, в частности, при расчете коленчатых валов, принимаются пропорциональными отклонениям системы из положения равновесия.

в) Внешние переменные моменты сил  $M_e = M' \cos(\omega t + \gamma)$ , вызывающие вынужденные колебания системы. При этом вынужденные колебания обуславливаются не абсолютными значениями моментов, а их изменениями относительно среднего значения  $M'$ .

г) Моменты сил сопротивления колебаниям системы

$$M_c = \xi d\varphi/dt,$$

где  $\xi$  – коэффициент пропорциональности или так называемый коэффициент заглушения. В условиях работы коленчатых валов, близких к резонансным, эти силы значительно

уменьшают амплитуду колебаний, а следовательно, и напряжения в элементах КВ. Однако явление резонанса остается, хотя и в смягченной форме.

Для более эффективного снижения амплитуды колебаний при резонансе необходимы специальные устройства, повышающие сопротивление среды колебаниям системы.

Колебания упругих систем, в частности, крутильные колебания коленчатых валов, удобно вначале рассматривать как незатухающие и лишь в дальнейшем учитывать влияние затухания на характер и интенсивность колебаний.

Исследование крутильных колебаний КВ, как правило, производится для упрощенной, так называемой *эквивалентной* системы, состоящей из длинного прямого вала постоянного сечения с жестко закрепленными на нем массами (грузами), число которых равно числу масс исследуемой системы, включая сюда массы, связанные с отдельными коленами кривошипного механизма.

Расчет коленчатых валов на крутильные колебания может быть разбит на следующие этапы:

- 1) приведение действительной (реальной) системы коленчатого вала и связанных с ним масс к эквивалентной (теоретической) системе;
- 2) определение частоты собственных колебаний для эквивалентной системы;
- 3) определение действующих на систему внешних нагрузок (моментов) и представление их в виде суммы отдельных тригонометрических функций (гармоник);
- 4) расчет вынужденных колебаний вала (без затухания и с затуханием);
- 5) определение резонансных условий работы вала;
- 6) создание безрезонансных условий работы вала или подбор специальных устройств (демпферов) для гашения крутильных колебаний.

## **2. ПРИВЕДЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ**

В систему коленчатого вала ДВС входят не только собственно узел коленчатого вала с присоединенными к нему движущимися массами кривошипных механизмов, но и кинематически с ним связанные редукторы, мультипликаторы, винты, крыльчатки и т.д., существенно влияющие на колебания всей системы.

Действительная колебательная система вала, как было сказано выше, заменяется теоретической системой, состоящей из прямолинейного «не имеющего массы» приведенного вала с размещенными на нем отдельными грузами (массами) и эквивалентной действительной системе в смысле равенства кинетической и потенциальной энергии при колебаниях.

Задача приведения действительной системы к теоретической сводится к определению приведенной длины отдельных участков вала (между каждыми двумя соседними массами) и моментов инерции отдельных приведенных масс.

Длины отдельных участков приведенного вала определяются из условия равенства их жесткостей жесткостям заменяемых участков действительного вала. В этом случае и углы закрутки приведенного и действительного участков вала при одинаковых приложенных нагрузках будут равными. При этом размеры сечения приведенного вала обычно берут равными размерам коренных шеек коленчатого вала.

### ***Определение приведенных длин участков коленчатого вала***

1. Приведенная длина носка или задней части вала (участки 2 и 4 на рис. 2 а) с размерами кольцевого сечения  $D_1$  и  $d_1$  длиной  $l_1$  определяются из условия

$$C_1 = C_{np},$$

где  $C_1$  – жесткость рассматриваемого участка действительного вала;  $C_{np}$  – жесткость соответствующего участка приведенного вала, размеры сечения которого равны размерам сечения коренной шейки (рис. 2 в).

Поскольку при кручении вала

$$C = \frac{J_{пол} G}{l},$$

где  $J_{пол}$  – полярный момент инерции сечения вала, а  $G$  – модуль упругости второго рода (принимается одинаковым для реального и приведенного участков вала), то

$$\frac{J_{пол} G}{l_1} = \frac{J_{полпр} G}{l_{пр}},$$

где индекс  $пр$  относится к длине участка и моменту инерции приведенного вала, а индекс 1 – к заменяемому участку действительного вала.

Так как для кольцевого сечения полярный момент инерции

$$J_{пол} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

то окончательно получим

$$l_{пр} = l_1 \frac{D_{кш}^4 - d_{кш}^4}{D_1^4 - d_1^4},$$

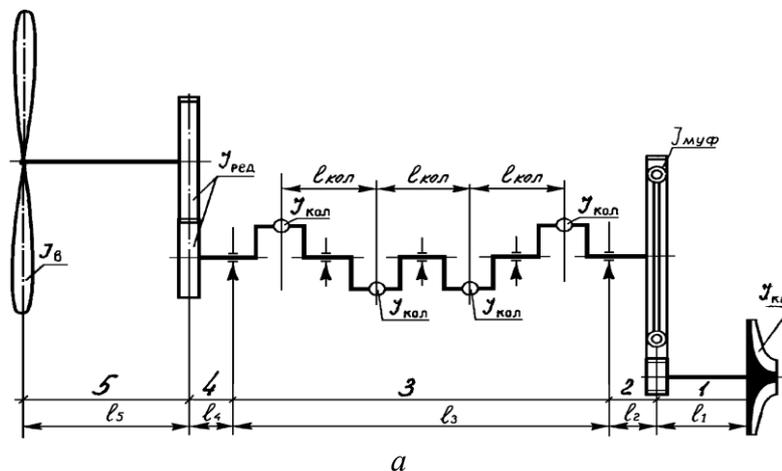
где  $D_{кш}$  и  $d_{кш}$  – наружный и внутренний диаметры коренной шейки.

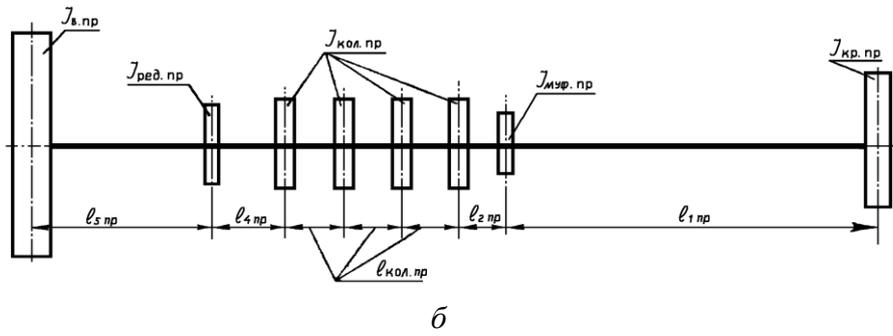
2. Приведенная длина участка с коленами (участка 3 на рис. 2 а) аналитически не может быть определена с достаточной точностью вследствие сложной геометрической формы этого участка. Поэтому она подсчитывается по эмпирическим формулам, полученным в результате обработки статистических данных по закрутке колен некоторых конструкций валов.

Хорошие результаты дает эмпирическая формула, предложенная С.С. Зиманенко:

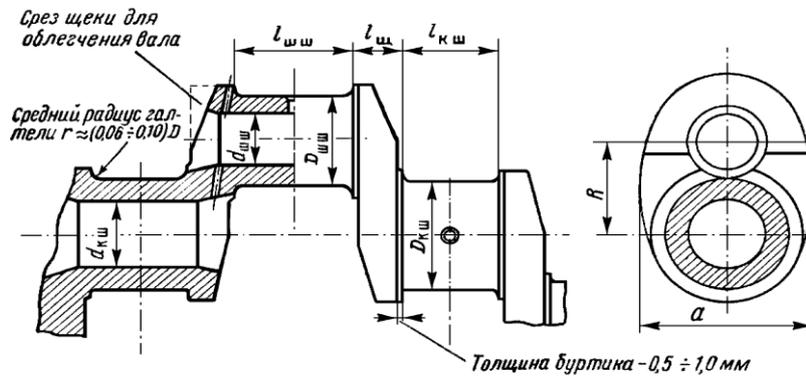
$$l_{колпр} = \left( l_{кш} + 0,6 l_{ц} \frac{D_{кш}}{l_{кш}} \right) + \left( 0,8 l_{ши} + 0,2 \frac{a}{R} D_{кш} \right) \frac{D_{кш}^4 - d_{кш}^4}{D_{ши}^4 - d_{ши}^4} + R \sqrt{\frac{R}{D_{ши}}} \frac{D_{кш}^4 - d_{кш}^4}{l_{ц} a^3},$$

где обозначения показаны на рис. 2 в.





б



в

Рис. 2. Приведение реальной системы коленчатого вала к эквивалентной: реальная система (а), эквивалентная система (б) и конструктивная схема колена вала (в)

В последней формуле первый член правой части представляет собой длину коренной шейки с учетом влияния на жесткость колена ее сопряжения со щекой. Второй член – приведенную длину шатунной шейки с тем же условием. Третий член – приведенную длину двух щек, учитывающую изгибную деформацию щеки в плоскости, перпендикулярной колену при приложении к концам колена одинаковых крутящих моментов разного направления.

3. Приведенную длину участков валов, вращающихся с отличными от коленчатого вала частотами (участки 1 и 5 на рис. 2 а), определяют, исходя из следующих соображений.

Крутящие моменты на участках действительного и приведенного валов связаны с угловыми деформациями и жесткостями этих участков следующими простыми соотношениями:

$$M_{крд} = C_{ид} \varphi_{д};$$

$$M_{крпр} = C_{инр} \varphi_{пр},$$

откуда

$$\frac{C_{инр}}{C_{ид}} = \frac{M_{крпр} \varphi_{д}}{M_{крд} \varphi_{пр}}.$$

В кинематически связанных валах крутящие моменты обратно пропорциональны, а угловые деформации прямо пропорциональны их частотам вращения. Обозначив  $n_{д}/n_{пр} = i$ , получим

$$C_{инр} / C_{ид} = i^2$$

или

$$C_{inp} = C_{id} i^2.$$

Подставляя значения жесткостей, получим

$$\left( \frac{J_{нол} G}{l_i} \right)_{np} = \left( \frac{J_{нол} G}{l_i} \right)_o i^2,$$

откуда приведенная длина соответствующих участков вала (при  $G_{np} = G_o$ ) равна

$$l_{inp} = l_{id} \frac{J_{нол np}}{J_{нол o}} \frac{1}{i^2}.$$

### **Определение моментов инерции приведенных масс**

Основными массами, образующими колебательную систему, являются:

- 1) массы отдельных колен вала и связанных с ними поступательно и вращательно движущихся частей кривошипно-шатунного механизма;
- 2) массы крыльчатки нагнетателя и винта (если они есть);
- 3) массы шестерен и деталей редуктора и мультипликатора.

Остальные связанные с валом массы (шестерни приводов агрегатов, кулачковые шайбы и т.д.) обладают относительно небольшими моментами инерции и при расчете крутильных колебаний вала могут не учитываться.

При составлении эквивалентной системы моменты инерции отдельных масс должны подбираться, как сказано выше, таким образом, чтобы их кинетическая энергия при колебаниях соответствовала кинетической энергии колеблющихся масс действительной системы.

1. Момент инерции приведенной массы колена:

$$J_{к np} = J_{кол} + M_{ш вр} R^2 + M_{n np} R^2,$$

где  $J_{кол}$  – момент инерции собственно колена (включая противовесы);  $M_{ш вр}$  – масса части шатунного механизма, отнесенной к вращающимся массам;  $M_{n np}$  – условная масса связанных с одним коленом поступательно движущихся частей, отнесенная к оси шатунной шейки;  $R$  – радиус колена.

Момент инерции собственно колена обычно подсчитывается по чертежу путем деления колена на отдельные элементы приблизительно геометрически правильной формы и суммирования их моментов инерции:

$$J_{кол} = \sum m_x r_x^2,$$

где  $m_x$  – масса  $x$ -го элемента;  $r_x$  – расстояние от центра тяжести этого элемента до оси коренной шейки.

Условная масса связанных с одним коленом поступательно движущихся частей может быть определена из равенства кинетической энергии этих масс в теоретической схеме среднему значению кинетической энергии действительных поступательно движущихся масс за один оборот вала:

$$\frac{1}{2} M_{n np} R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W^2 d\alpha,$$

где  $M_n$  – масса поступательно движущихся частей кривошипно-шатунного механизма одного колена;  $W$  – скорость поршня;  $\alpha$  – угол поворота вала относительно оси цилиндра.

Это равенство после подстановки в него выражения для скорости поршня и ряда преобразований дает следующее соотношение:

$$M_{nnp} = \frac{M_n}{2} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{4} \right).$$

2. Момент инерции приведенных масс винта и крыльчатки также определяется из условия равенства кинетических энергий:

$$\frac{J_i \dot{\phi}_i^2}{2} = \frac{J_{inp} \dot{\phi}_i^2}{2} \frac{1}{i^2},$$

где  $J_i$  – действительный момент инерции соответственно винта или крыльчатки;  $\dot{\phi}_i = \frac{d\phi_i}{dt}$  – угловая скорость деформации вала винта или крыльчатки;  $i$  – передаточное число от коленчатого вала к рассматриваемому валу.

Таким образом,

$$J_{inp} = J_i i^2.$$

3. Моменты инерции таких деталей, как шестерни и валики привода винта и крыльчатки нагнетателя, определяются тем же методом, что и момент инерции собственно колена, т.е. путем разбивки их на отдельные элементы:

$$J_{dem} = \sum m_x r_x^2.$$

Вид эквивалентной (расчетной) системы коленчатого вала показан на рис. 2 б.

### **3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ**

Определение собственных частот и форм колебаний упругой системы с сосредоточенными массами является классической задачей в теории линейных колебаний. К ней сводятся значительное число инженерных задач – крутильные колебания валопроводов, поперечные колебания роторов, общие колебания двигателя на узлах подвески и т.д.

Задача определения собственных частот и форм колебаний распадается на следующие этапы:

1. Составление дифференциальных уравнений свободных колебаний;
2. Решение дифференциальных уравнений и определение собственных частот колебаний;
3. Определение форм колебаний для каждой из собственных частот.

#### **Способы составления дифференциальных уравнений**

Существуют три способа составления дифференциальных уравнений для системы с конечным числом степеней свободы.

Первый, наиболее общий способ, основан на применении уравнения Лагранжа.

Вторым способом является составление так называемой прямой формы уравнений колебаний. В этом случае из системы выделяются сосредоточенные массы  $m_i$  (или массовые моменты инерции  $J_i$ ), на которые действуют восстанавливающие силы упругости (или моменты сил упругости). Затем, применяя принцип Даламбера, записывают дифференциальные уравнения движения в форме равенства сил инерции (моментов сил инерции) и восстанавливающих сил упругости (моментов сил упругости).

Третий способ составления дифференциальных уравнений свободных колебаний связан с использованием обобщенного уравнения метода сил.

Выбор способа составления дифференциальных уравнений свободных колебаний зависит от типа упругой системы.

Для решения задачи свободных крутильных колебаний системы эквивалентного вала наиболее удобным является второй способ.

Составим систему дифференциальных уравнений свободных крутильных колебаний для одно-, двух-, трех- и  $n$ -массовых систем эквивалентного вала, пользуясь вторым способом.

Из рис. 1 видно, что общее уравнение движения для одномассовой системы будет иметь вид:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi + \xi \frac{d\varphi}{dt} = M' \cos(\omega_0 t + \gamma).$$

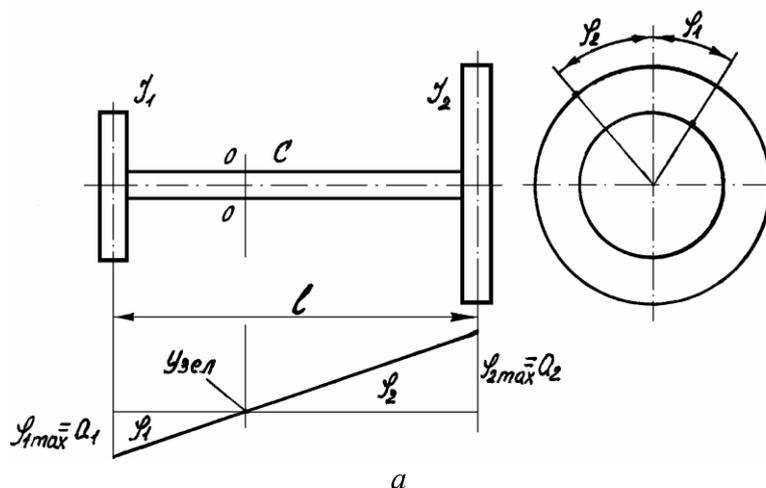
Пренебрегая моментами сил сопротивления ( $\xi \frac{d\varphi}{dt} = 0$ ) и считая, что внешний (возмущающий) момент прекратил свое действие, а на диск действует только момент сил упругости, получим уравнение свободных колебаний одномассовой системы:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi = 0$$

или

$$J\ddot{\varphi} + C\varphi = 0.$$

Для двухмассовой системы эквивалентного вала (к такой системе приводится, например, однорядный звездообразный двигатель с винтом без редуктора и нагнетателя) свободные колебания будут происходить следующим образом (рис. 3 а). При прекращении действия равных и противоположно направленных внешних моментов обе массы начнут совершать свободные колебания с одинаковой частотой и противоположными направлениями так, что некоторое промежуточное сечение  $O-O$  будет оставаться неподвижным, образуя так называемый узел колебаний (рис. 3).



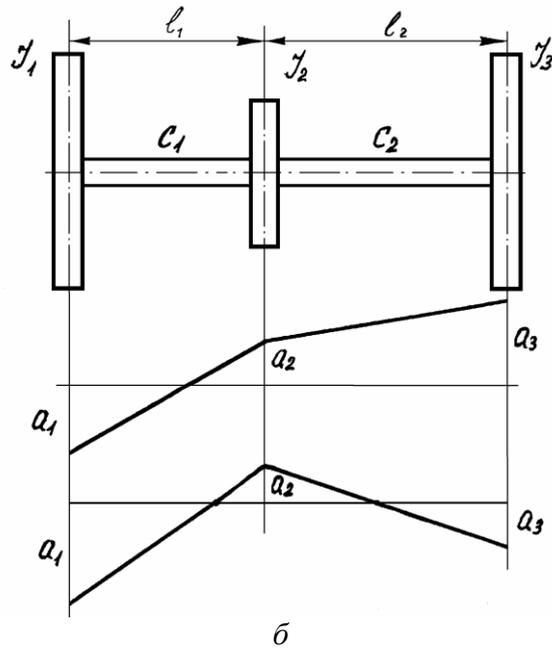


Рис. 3. Двухмассовая (а) и трехмассовая (б) системы эквивалентного вала и формы их крутильных колебаний

Записав уравнение движения для каждой из масс (для каждого диска), получим систему двух дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания двухмассовой системы:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отсчитываются от нейтрального положения.

Разные знаки в моментах сил упругости объясняются тем, что эти моменты действуют в противоположные стороны.

На рис. 4 изображена схема экспериментальной установки и ее двухмассовая эквивалентная система с заделкой вала с одной стороны. Система дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания такой системы, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 \varphi_1 - C_2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{cases}$$

Для трехмассовой системы (рис. 3 б) эквивалентного вала (к такой системе можно привести однорядный звездообразный двигатель с винтом и редуктором или нагнетателем) система уравнений, описывающих свободные колебания, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \end{cases}$$

Различный вид уравнений для крайних и средней масс (дисков) объясняется тем, что восстанавливающий момент сил упругости для крайних масс действует с одной стороны, а для средней массы с обеих сторон от нее: слева – отрицательный, справа – положительный.

Используя это правило, можно записать систему дифференциальных уравнений для определения собственных частот крутильных колебаний  $n$ -массовой эквивалентной системы:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \\ \dots, \\ J_i \ddot{\varphi}_i - C_{i-1}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, \\ \dots, \\ J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} - C_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + C_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0, \\ J_n \ddot{\varphi}_n - C_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0. \end{cases}$$

### Решение дифференциальных уравнений

Решением дифференциальных уравнений свободных колебаний являются гармонические функции  $\varphi_i = a_i \cos(pt + \gamma)$ , что обусловлено повторяемостью процессов, описываемых решаемыми уравнениями.

Для определения собственных частот колебаний  $p$  подставим значения углов и их вторых производных  $\ddot{\varphi}_i = -a_i p^2 \cos(pt + \gamma)$  в любую из систем дифференциальных уравнений. В результате подстановки получим:

– для одномассовой системы  $Jp^2 - C = 0$ ,

откуда

$$p = \sqrt{\frac{C}{J}};$$

– для двухмассовой системы (рис. 3 а):

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 + C(a_1 - a_2) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 - C(a_1 - a_2) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$p = \sqrt{C \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}}.$$

Для двухмассовой системы эквивалентного вала экспериментальной установки, изображенной на рис. 4:

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 - C_1 a_1 + C_2(a_2 - a_1) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 - C_2(a_2 - a_1) = 0. \end{cases}$$

Найдя отношение амплитуд  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_2}{C_2 - J_2 p^2}$  из второго уравнения системы

и подставив это значение в первое уравнение, получим уравнение для определения собственных частот крутильных колебаний эквивалентного вала экспериментальной установки:

$$p^4 - \left( \frac{C_1}{J_1} + \frac{C_2}{J_2} + \frac{C_2}{J_1} \right) p^2 + \frac{C_1 C_2}{J_1 J_2} = 0.$$

Решение этого уравнения дает два действительных значения  $p_1$  и  $p_2$  собственных частот.

Для трехмассовой системы, изображенной на рис. 3 б:

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 - C_1(a_1 - a_2) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 + C_1(a_1 - a_2) - C_2(a_2 - a_3) = 0, \\ J_3 p^2 a_3 + C_2(a_2 - a_3) = 0. \end{cases}$$

Найдя отношение амплитуд  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_1}{C_1 - J_1 p^2}$  и  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{C_2}{C_2 - J_3 p^2}$  из первого

и третьего уравнений системы и подставив их значения во второе уравнение, получим уравнение четвертой степени для определения собственных частот:

$$p^4 - \left( \frac{C_1}{J_1} + \frac{C_2}{J_2} + \frac{C_1}{J_2} + \frac{C_2}{J_3} \right) p^2 + C_1 C_2 \left( \frac{1}{J_2 J_3} + \frac{1}{J_1 J_2} \right) = 0.$$

Это уравнение переходит в уравнение для определения собственной частоты крутильных колебаний для эквивалентного вала экспериментальной установки, если принять, например, что  $J_3$  (в заделке) бесконечно велик.

Для  $n$ -массовой системы получим:

$$\begin{cases} J_1 p^2 a_1 + C_1(a_1 - a_2) = 0, \\ J_2 p^2 a_2 - C_1(a_1 - a_2) + C_2(a_2 - a_3) = 0, \\ \dots, \\ J_i p^2 a_i - C_{i-1}(a_{i-1} - a_i) + C_i(a_i - a_{i+1}) = 0, \\ \dots, \\ J_{n-1} p^2 a_{n-1} - C_{n-2}(a_{n-2} - a_{n-1}) + C_{n-1}(a_{n-1} - a_n) = 0, \\ J_n p^2 a_n + C_{n-1}(a_{n-1} - a_n) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы проводится аналогично решению для трехмассовой системы.

Выражая отношения амплитуд  $\frac{a_1}{a_2}$ ,  $\frac{a_3}{a_2}$  и т.д. из первого, второго и т.д. уравнений, получим

уравнение степени  $2(n-1)$  для определения собственных частот, где  $n$  – число масс системы.

Таким образом, для системы из четырех масс значение частоты необходимо определять из уравнения шестой степени, для пяти масс из уравнения восьмой степени и т.д. Решение этих уравнений даст  $n-1$  действительных значений собственных частот.

Обычно для практических целей достаточно ограничиться определением только двух-трех наиболее низких частот (соответствующих одноузловой, двухузловой и трехузловой формам колебаний), так как более высокие частоты не вызывают опасных напряжений в коленчатых валах.

Для многомассовых эквивалентных систем часто прибегают к приближенному решению задачи, заменяя несколько рядом расположенных масс одной (момент инерции которой равен сумме моментов инерции заменяемых масс), расположенной в центре тяжести заменяемых масс. Правильность полученных значений частот по упрощенной схеме подтверждается подстановкой их в исходное уравнение.

### **Определение форм колебаний для каждой из собственных частот**

Форма крутильных колебаний эквивалентной системы определяется по знакам в отношении амплитуд между соседними массами (дисками).

Из рис. 1 видно, что для одномассовой системы возможна единственная форма колебаний с узлом в заделке.

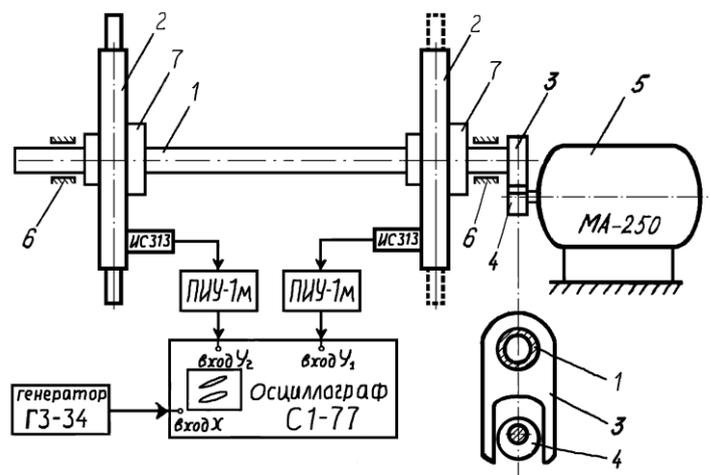
Для двухмассовой системы, изображенной на рис. 3 а, возможна также единственная форма колебаний с узлом между массами. При этом отношение амплитуд колебаний

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{J_2}{J_1}.$$

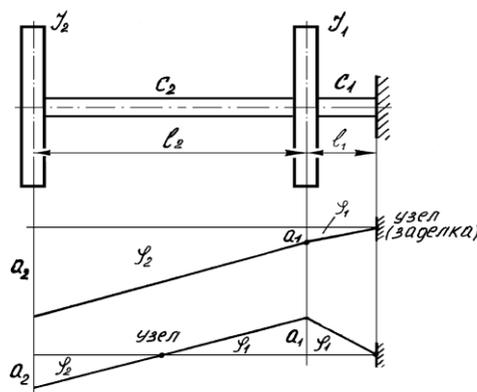
Для двухмассовой системы эквивалентного вала, к которой приводится экспериментальная установка (рис. 4 б), возможны две формы крутильных колебаний, которые соответствуют собственным частотам  $p_1$  и  $p_2$ .

Если при подстановке в формулу  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_2}{C_2 - J_2 p^2}$  какой-то из частот получим

положительное отношение амплитуд  $\left(\frac{a_2}{a_1} > 0\right)$ , то это означает, что при этой частоте диски колеблются в фазе, т.е. реализуется одноузловая (узел в заделке) форма колебаний.



а



б

Рис. 4. Схема экспериментальной установки (а) и ее эквивалентная система (б)

Если же окажется, что  $\frac{a_2}{a_1} < 0$ , то колебания дисков происходят в противофазе,

т.е. реализуется двухузловая форма колебаний (узлы в заделке и между дисками).

Выражение  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{C_2}{C_2 - J_2 p^2}$  можно записать следующим образом:

$a_2(C_2 - J_2 p^2) = a_1 C_2$ . Отсюда видно, что при  $(C_2 - J_2 p^2) = 0$  амплитуда  $a_1$  также должна быть равна нулю. Физически это означает, что при частоте  $p_{д.г.} = \sqrt{\frac{C_2}{J_2}}$  второй диск

полностью гасит колебания первого. Такая частота называется *частотой динамического гашения*. Это явление используется при создании гасителей крутильных колебаний.

Для трехмассовой системы эквивалентного вала из уравнений движения можно получить  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_1}{C_1 - J_1 p^2}$ , а  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{C_2}{C_2 - J_3 p^2}$ .

Из рис. 3 б видно, что если при подстановке одной из собственных частот окажется, что  $a_1/a_2 < 0$ , а  $a_3/a_2 > 0$ , то эта частота соответствует одноузловой форме колебаний. Если же окажется, что  $a_1/a_2 < 0$  и  $a_3/a_2 < 0$ , то эта частота соответствует двухузловой форме колебаний.

Аналогично проводится анализ форм крутильных колебаний для  $n$ -массовых систем эквивалентного вала.

#### 4. УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 4 а представлена схема экспериментальной установки, на рис. 4 б – ее эквивалентная система.

В опорах б установлен вал 1 с насаженными дисками 2.

С помощью цанговых зажимов 7 положения дисков могут меняться по длине вала 1, изменяя тем самым крутильные жесткости соответствующих участков вала. Может быть реализована схема с одной, двумя и тремя массами. Кроме того, имеются дополнительные диски, которые можно прикрепить к основным массам, таким образом изменять моменты инерции отдельных масс и число вариантов эквивалентной системы. На одном конце вала жестко установлена качалка 3, присоединенная через кривошипное звено к ротору электродвигателя 5 через подшипник 4. При вращении вала электродвигателя качалка 3 совершает угловые перемещения, передающиеся на вал 1 установки. Величина угловых перемещений перед запуском установки может регулироваться изменением эксцентриситета подшипника 4 кривошипа.

Так кинематически возбуждаются вынужденные крутильные колебания дисков 2 на упругом вале 1. Для регулирования частоты вращения электродвигателя 5 (трехфазный асинхронный двигатель) питание на него подается от частотного инвертора MITSUBISHI FR-S 500.

Определение собственных частот производится резонансным методом. Резонанс характеризуется резким возрастанием амплитуды колебаний. Методика проведения эксперимента заключается в регистрации резонансных крутильных колебаний каждого из дисков 2 на упругом вале 1 путем измерения амплитуд, частот и фаз. По найденным параметрам можно сделать выводы о наличии резонанса, его частоте и форме колебаний.

Измерительная часть стенда реализована следующим образом. На каждом из дисков установлены пьезоэлектрические датчики для замера вибраций типа ИС-313. Это датчики генераторного типа. При движении с ускорением они вырабатывают напряжение, пропорциональное ускорению. Ввиду того, что вырабатываемый датчиками сигнал по величине мал, он сильно подвержен воздействию внешних помех, которые, в свою очередь, способны значительно исказить измеряемые значения сигнала. Чтобы свести влияние помех к минимуму, сигнал с датчиков через фильтр низкой частоты (отсекает низкочастотную

составляющую порядка 1–2 Гц) подается на усилитель заряда LE-41. Усилитель усиливает полезный сигнал, кроме того, осуществляет высокочастотную фильтрацию сигнала. Усиленный и отфильтрованный сигнал подается на аналого-цифровой преобразователь NI PXI 4204. Там сигнал оцифровывается и передается в интерфейс программы.

Окно программы (рис. 5) имеет три области.

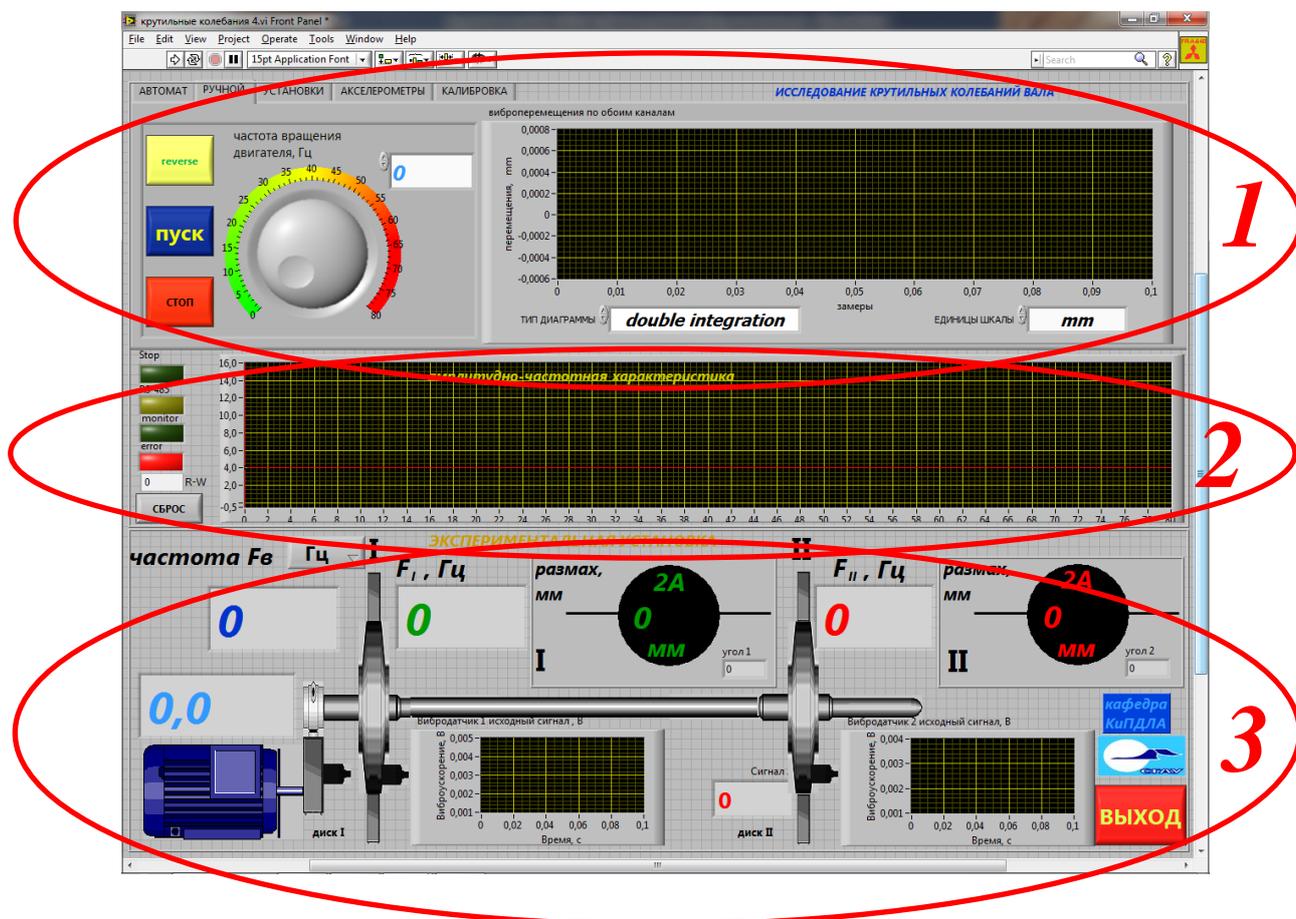


Рис. 5. Интерфейс программы

В нижней части окна 3 приведена мнемоническая схема установки. Рядом с изображением электродвигателя находится индикатор частоты вращения его вала, показания на который поступают с частотного инвертора. Рядом с изображениями датчиков вибраций на дисках расположены цифровые индикаторы и экраны осциллографов регистрируемых сигналов. Они дают представление о качестве сигналов, что в свою очередь характеризует наличие и уровень помех, а также состояние «железа» – наличие люфтов в опорах, качество закрепления цанговых зажимов дисков и т.д. Над ними выведены индикаторы частоты регистрируемых сигналов на дисках и качалке, а также индикаторы размаха колебаний дисков (размах – это двойная амплитуда) в линейных и угловых величинах. Величины частоты и амплитуды извлекаются из регистрируемых сигналов.

Область окна 1 предоставляет возможность выбора режима работы стенда. Вкладки «Установки», «Акселерометры», «Калибровка» предназначены для обслуживания и служебного использования установки. Эксперимент можно проводить, управляя стендом из вкладок «Автомат» или «Ручной». Автоматический режим после нажатия кнопки «Пуск» обеспечивает автоматический плавный разгон двигателя с регистрацией сигналов с датчиков вибрации. Нажатием кнопки «Стоп» осуществляется останов электродвигателя. Ручной режим, кроме автоматического разгона, дает возможность управлять частотой вращения электродвигателя или зафиксировать какую-либо частоту. Кроме того, указанные вкладки содержат осциллографы всех регистрируемых сигналов на одном экране, что дает

возможность судить о соотношениях амплитуд и фазовых характеристиках сигналов. Сигналы, поступающие на эти осциллографы, проходят дополнительную цифровую фильтрацию.

Область окна 2 содержит амплитудно-частотную характеристику, которая прописывается автоматически при разгоне и торможении электродвигателя в ручном или автоматическом режимах. Полученная АЧХ позволяет выявить резонансные режимы и определить частоты, на которых они происходят.

## **5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

1. Получить инструкцию по технике безопасности у преподавателя или лаборанта.
2. Получить у преподавателя данные варианта эквивалентного вала.
3. Провести расчет собственных частот колебаний по уравнению для определения собственных частот, определить соответствующие им формы.
4. Определить частоту динамического гашения.
5. Внимательно ознакомиться с экспериментальной установкой и ее описанием.
6. Включить питание элементов установки и дать им прогреться.
7. Включить контроллер РХИ и дождаться окончания его загрузки.
8. Запустить программу «Крутильные колебания». Ярлык программы находится на рабочем столе.
9. Выбрать режим работы установки – «Ручной» или «Автомат» и открыть соответствующую вкладку.
10. Убедиться в работоспособности датчиков вибрации легкими постукиваниями по диску.
11. Нажать кнопку «Пуск». Электродвигатель начнет плавный разгон. В процессе разгона следить за изменениями амплитуд регистрируемых сигналов, а также их фазовыми характеристиками.
12. По достижении двигателем частоты 80 Гц нажать кнопку «Стоп».
13. Проследить, как меняется АЧХ при разгоне и торможении.
14. После полной остановки двигателя закрыть окно программы. Выключить контроллер РХИ и элементы установки.
15. Оформить отчет по лабораторной работе.

## **6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА**

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- название и цель работы;
- расчетную схему эквивалентного вала и его параметры;
- расчет собственных частот крутильных колебаний системы и частоты динамического гашения;
- масштабное изображение формы колебаний для каждой из частот;
- сравнение расчетных и экспериментальных значений собственных частот колебаний и анализ причин их расхождения;
- изображение наблюдаемой амплитудно-частотной характеристики;
- выводы по работе.

## **7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Последовательность расчета коленчатых валов на крутильные колебания.

2. Что такое эквивалентная (теоретическая) или расчетная система коленчатого вала?
3. Как осуществляется приведение длин отдельных участков коленчатого вала?
4. Как определяются моменты инерции приведенных масс?
5. Какой вид имеет эквивалентный вал?
6. Способы составления дифференциальных уравнений свободных колебаний.
7. Как решается система дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания эквивалентного вала?
8. Как составить и решить уравнение для свободных колебаний одномассовой системы, изображенной на рис. 1?
9. Что такое форма колебания?
10. Как определить, какая частота, какой форме соответствует?
11. От каких параметров системы эквивалентного вала зависит собственная частота колебаний?
12. Что такое крутильная жесткость и как она определяется?
13. По каким формулам определяются моменты инерции вращающихся дисков?
14. Что такое частота динамического гашения и как она определяется?
15. В каких устройствах используется явление динамического гашения?
16. Каким образом можно упрощенным способом определить собственную частоту крутильных колебаний по одноузловой форме для эквивалентного вала экспериментальной установки?
17. К какому изменению (увеличению или уменьшению) частоты собственных колебаний приведет:
  - увеличение диаметра вала;
  - увеличение диаметра диска;
  - увеличение толщины диска;
  - увеличение длины вала?

## 8. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Массовый момент инерции диска с отверстием

$$J = \rho \frac{\pi b}{32} (D^4 - d^4), [\text{кг} \cdot \text{м}^2].$$

2. Крутильная жесткость  $i$ -го участка вала с отверстием

$$C_i = \frac{J_{\text{пол}} G}{l_i}, [\text{Н} \cdot \text{м}],$$

где  $J_{\text{пол}} = \frac{\pi}{32} (d_n^4 - d_e^4), [\text{м}^4].$

Для вычисления массовых моментов инерции дисков и крутильных жесткостей участков вала приведем основные параметры установки, имитирующей эквивалентный вал:

- диаметры вала:
  - наружный  $d_n = 6 \cdot 10^{-3}$  м;
  - внутренний  $d_e = 4 \cdot 10^{-3}$  м;
- длина участков вала (если не оговорено иначе):
  - $l_l = 7,9 \cdot 10^{-2}$  м;

$$l_2 = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

– плотность материала дисков  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;

– модуль упругости материала вала  $G = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

Каждый диск состоит из деталей, поэтому суммарный массовый момент инерции

$$J_1 = J_{N1} + J_{N2} + J_{N3},$$

$$J_2 = J_{N1} + J_{N2} + J_{N3} + 2J_{N4},$$

где  $J_{N4} = m_{N4} R_{ц.м.}^2$  – массовый момент инерции плоской лопатки (пластины), установленной на диске. Масса пластины определяется произведением ее объема на плотность материала, радиус центра тяжести измеряется на установке.

Если все значения при вычислениях подставлять в системе СИ, частота получается в радианах в секунду. Частоту в герцах при необходимости можно получить, разделив полученные значения на  $2\pi$ .

Размеры (мм) и форма отдельных деталей дисков представлены на рис. 6.

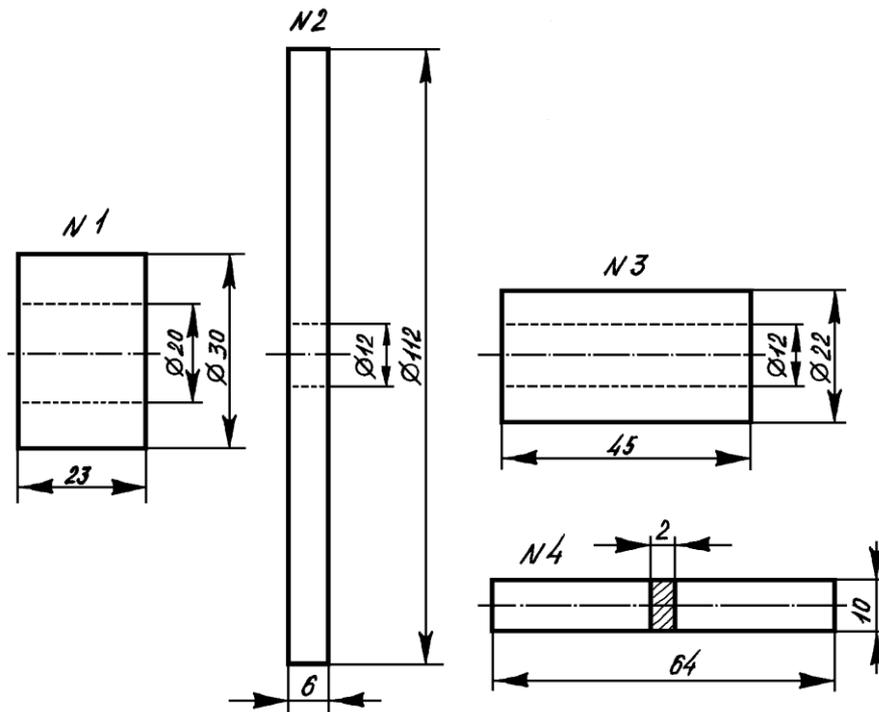


Рис. 6. Размеры (мм) и форма отдельных деталей дисков