

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

*А.М. ДМИТРИЕВ, Ф.В. ГРЕЧНИКОВ, Н.В. КОРОБОВА*

## КУЗНЕЧНО-ШТАМПОВОЧНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

### Часть 2

## ВЫБОР ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом  
федерального государственного автономного образовательного учреждения  
высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)»  
в качестве учебника для студентов, обучающихся по программам высшего  
профессионального образования укрупненной группы специальностей и направлений  
150000 Металлургия, машиностроение и материалобработка

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2015

УДК 621.987(075)

ББК 34.623

Д534

Рецензенты: чл.-кор. РАН, д-р техн. наук, проф. В.А. Барвинок;  
д-р техн. наук, проф. Е.Н. Сосенушкин

*Дмитриев А.М.*

Д534 **Кузнечно-штамповочное оборудование. Ч. 2. Выбор технологических параметров для специализированного оборудования: учеб. для вузов / А.М. Дмитриев, Ф.В. Гречников, Н.В. Коробова.** – Самара: Изд-во СГАУ, 2015. – 168 с.

**ISBN 978-5-7883-1009-1**

Приведены сведения по разработке инновационных технологических процессов, в которых используются штамповка холодным выдавливанием деталей из углеродистых сталей, а также изготовление высокоплотных деталей как непосредственно формованием из порошков на железной основе, так и холодным выдавливанием из спеченных порошковых заготовок.

При разработке процессов использованы методы планирования и обработки результатов многофакторных экспериментов. Указанные методы впервые применены к вычислительным экспериментам, выполняемым компьютерным моделированием реальных технологических операций. Обсуждены различия при проведении вычислительных и физических экспериментов.

Предложено проведение комплексных экспериментов, в матрицу плана которых включены как компьютерные, так и физические опыты. При статистическом анализе результатов построенных математических моделей используются сведения о воспроизводимости результатов комплексного эксперимента в целом.

УДК 621.987(075)

ББК 34.623

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                       |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие.....                                                                                                                                      | 6         |
| Введение.....                                                                                                                                         | 7         |
| <b>1. Многофакторные эксперименты.....</b>                                                                                                            | <b>12</b> |
| 1.1. Факторы, интервалы их варьирования и форма математической модели .....                                                                           | 13        |
| 1.2. Эффекты совместного влияния факторов.....                                                                                                        | 14        |
| 1.3. Модель полного факторного эксперимента.....                                                                                                      | 16        |
| 1.4. Сокращение числа опытов при дробном факторном эксперименте .....                                                                                 | 17        |
| 1.5. Натуральный и кодированные масштабы факторов.....                                                                                                | 19        |
| 1.6. Расчет коэффициентов математической модели на примере исследования операции вырубki листовых образцов .....                                      | 25        |
| 1.7. Расчет коэффициентов математической модели при исследовании разностенности изготовленных выдавливанием стаканов .....                            | 28        |
| 1.8. Построение математической модели при исследовании влияния различных материалов заготовок на качество деталей из порошков на железной основе..... | 30        |
| 1.9. Построение несимметричных планов дробного факторного эксперимента.....                                                                           | 38        |
| 1.10. Построение несимметричного плана эксперимента и расчет коэффициентов математической модели .....                                                | 41        |
| 1.11. Сокращение количества измерений и расчетов в методе исследования течения материала заготовок по искажениям координатных сеток .....             | 46        |
| 1.12. Планирование экстремальных экспериментов.....                                                                                                   | 50        |
| 1.13. Оптимизация по нескольким выходным переменным .....                                                                                             | 55        |
| 1.14. Моделирование сложных аналитических зависимостей при теоретическом определении удельной силы выдавливания стакана .....                         | 60        |
| 1.15. Расчет коэффициентов модели при неравномерном дублировании опытов (в частности, при комбинации физического и компьютерного экспериментов) ..... | 67        |
| <b>2. Ошибки измерений. Статистический анализ в эксперименте.....</b>                                                                                 | <b>71</b> |
| 2.1. Виды ошибок, их влияние на результат исследования.....                                                                                           | 71        |
| 2.2. Показатели случайной ошибки при многократных измерениях .....                                                                                    | 74        |
| 2.3. Показатели случайной ошибки при малом количестве измерений .....                                                                                 | 79        |
| 2.4. Точность сложной функции при ошибках в определении её аргументов .....                                                                           | 82        |
| 2.5. Статистическая проверка гипотез.....                                                                                                             | 85        |
| 2.6. Точность опыта и многофакторного эксперимента в целом.....                                                                                       | 88        |
| 2.7. Оценка значимости коэффициентов и адекватности построенной математической модели .....                                                           | 90        |

|                                                                                                                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3. Проведенные исследования с применением факторных планов.....</b>                                                                                            | <b>96</b>  |
| 3.1. Построение уравнения регрессии при моделировании холодного выдавливания стаканов .....                                                                       | 96         |
| 3.2. Моделирование влияния магнитно-импульсного воздействия на плотность формованных порошковых заготовок .....                                                   | 97         |
| 3.3. Построение уравнений регрессии при моделировании выдавливания стаканов из спеченных порошковых заготовок.....                                                | 102        |
| 3.4. Моделирование формования порошковых колец со скручиванием заготовки.....                                                                                     | 105        |
| 3.5. Построение уравнений регрессии при исследовании холодного выдавливания сдвоенных втулок .....                                                                | 108        |
| 3.6. Моделирование выдавливания, совмещенного с раздачей трубной части заготовки .....                                                                            | 114        |
| 3.7. Моделирование формования заготовок из порошков на железной основе, совмещенного со спеканием импульсами электрического тока .....                            | 120        |
| 3.8. Нахождение наилучших условий поверхностного легирования порошковых заготовок .....                                                                           | 128        |
| 3.9. Регрессионный анализ при компьютерном моделировании комбинированного выдавливания.....                                                                       | 131        |
| 3.10. Моделирование удельной силы холодного выдавливания стаканов из спеченных заготовок, легированных углеродом .....                                            | 136        |
| 3.11. Статистический анализ математической модели при исследовании влияния различных порошков на железной основе на плотность, твердость и прочность деталей..... | 138        |
| 3.12. Моделирование неполной горячей штамповки бронзовых заготовок с применением корреляционного и регрессионного анализов....                                    | 145        |
| 3.13. Определение качества формованных тонкостенных втулок из железных порошков .....                                                                             | 150        |
| 3.14. Моделирование корреляционных связей между показателями качества заготовок, формованных из железных порошков.....                                            | 157        |
| 3.15. Описание качества порошковых деталей моделями второго порядка, полученными с применением насыщенного факторного плана .....                                 | 162        |
| <b>Список литературы .....</b>                                                                                                                                    | <b>167</b> |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты, обучающиеся по машинам и технологии обработки давлением, получают углубленную подготовку как по механике деформируемого твердого тела и теории обработки давлением, так и по компьютерному моделированию технологических операций. Полученные знания выпускники используют при разработке инновационных технологических процессов, для реализации которых с их участием создается специализированное кузнечно-прессовое оборудование.

В последние годы компьютерное моделирование технологических операций применяется шире, чем аналитические методы решений, основанные на механике деформируемого твердого тела.

Владение программными комплексами, созданными для компьютерного моделирования технологических операций, должно сопровождаться пониманием логики их применения для решения конкретных инженерных задач. Указанная логика близка к логике организации и проведения физического эксперимента. Без овладения логикой моделирование с использованием программного комплекса будет напоминать беспорядочное экспериментирование, которое часто наблюдалось ранее в период легкой доступности физических экспериментов. В тот период в вузах был в обязательном порядке введен курс «Основы научных исследований», включавший в себя планирование экспериментов.

В настоящем учебнике для исследований технологических операций с использованием программных комплексов используется название «компьютерные эксперименты».

Традиционно планирование экспериментов излагается с использованием анализа ошибок измерений. Этот анализ основан на методах математической статистики, которые являются разделом математики.

Использование технологами методов планирования эксперимента началось в 1971-76 гг., когда вышла двумя изданиями книга [1, 2]. Эта книга была направлена на планирование экстремальных экспериментов, что отражено в ее названии. В экстремальных экспериментах целью является нахождение точки с наилучшей комбинацией влияющих на объект факторов. В отличие от экстремальных, технологов чаще интересуют эксперименты, описывающие с помощью нелинейных математических моделей изменение выходного параметра в некоторой его области.

Более полно методы планирования эксперимента в среде технологов получили развитие после выхода в свет книги [9]. Подчеркнем, что указанные работы написаны профессиональными математиками, но именно для технологов.

При компьютерных экспериментах повторные расчеты при одной и той же комбинации параметров технологического процесса всегда дают один и тот

же результат. Этот результат может содержать большую систематическую ошибку, связанную с принятыми допущениями, несовершенным использованием численного метода решения задачи, заложенным в используемый программный комплекс, и т.п., но случайных ошибок он не содержит.

Основываясь на отсутствии разброса результатов повторных опытов при компьютерном экспериментировании, авторами предлагаемого издания изменено изложение материала по сравнению с его изложением в работах [1, 2, 9]. Изучение курса начато не с анализа ошибок измерений и методов математической статистики. Математическая статистика занимается анализом случайных ошибок, поэтому при проведении компьютерных экспериментов она не требуется. Вместо этого вначале рассмотрены приемы работы, к которым приходят в решении практических задач инженеры, изучившие традиционный курс планирования экспериментов, после преодоления разделов математической статистики.

Такой подход к построению курса целесообразен не только в практическом, но и в методическом плане преподавания дисциплины. Математическая статистика является нелегкой наукой. Если начинать преподавание с ее разделов, то не каждый обучающийся заинтересуется преподаваемым курсом и поверит в свои возможности его изучения. При нашем подходе инженер с обычной математической подготовкой (возможно, даже бакалавр) сможет решать практические задачи.

Во второй части предлагаемого курса рассматриваются уже знакомые читателю приемы планирования эксперимента, но с учетом того, что эксперимент реальный (физический), его результаты – случайные величины, и имеют место ошибки измерений.

В работах технологов, использующих книги [1, 2, 9], неоднократно имели место попытки подсчета несуществующих дисперсий результатов компьютерных экспериментов, что является следствием неправильного (автоматического) использования традиционного изложения методов планирования эксперимента. Программисты, чтобы увеличить интерес к компьютерному моделированию, ввели помехи, приводящие к искусственному разбросу результатов повторов одного и того же компьютерного опыта.

Наша последовательность изложения материала выделяет главную решаемую задачу на первом этапе и сопровождает ее решение математической статистикой, не связанной с компьютерными играми, на втором этапе.

В учебнике широко рассмотрено проведение исследований с планированием экспериментов, изучаемым по новой методике, при разработке инновационных технологических процессов обработки давлением. В итоге проведенных исследований выявлены технологические параметры специализированного кузнечно-прессового оборудования, создаваемого для реализации инновационных технологических процессов.

## ВВЕДЕНИЕ

Обучение студентов в области машин и технологии обработки давлением выделяется тем, что в нем широко применяются программные комплексы. К ним относятся комплексы DEFORM-3D, Q-Form, Avtoform, Тефлекс и ряд других, которыми выпускники овладевают в достаточно высокой степени.

На вопрос: «Является ли моделирование в программном комплексе теорией или экспериментом?» – почти всегда отвечают, что это теория.

Такой ответ заставляет напомнить студентам, что им преподавался курс теории обработки давлением. В этом курсе они изучали описание напряженно-го и деформированного состояний в некотором элементе обрабатываемого давлением тела. Эти состояния в общем виде, при наиболее распространенных статических видах обработки деформируемой заготовки, описываются системой из 15 уравнений. В эту систему входят следующие уравнения.

Три уравнения для описания равновесия рассматриваемого элемента под действием возникающих в нем напряжений. Это дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие 6 неизвестных компонентов напряжений. Поскольку уравнений меньше, чем неизвестных, система является неразрешимой.

Чтобы сократить разницу между количеством неизвестных и количеством уравнений для их определения, привлекают кинематические уравнения для вычисления скоростей 3 линейных деформаций и 3 угловых деформаций через 3 скорости перемещений в элементе. Таких уравнений шесть, все они, как и уравнения для определения напряжений, являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Следовательно, у описывающего напряженное и кинематическое состояния элемента исследователя на основании сказанного выше имеются 9 уравнений с 15 неизвестными. Уравнений, по-прежнему, недостаточно для определения неизвестных.

Шесть уравнений, называемых физическими уравнениями, связывают между собой 6 указанных выше напряжений с 6 скоростями деформаций. При этом новых неизвестных в решение не добавляется.

Таким образом, получается система из 15 уравнений с 15 неизвестными. Эта система является разрешимой.

Помимо названных уравнений при решении задач динамического деформирования заготовки надо учитывать инерционные силы, определяемые как произведение массы элемента на ускорения по направлениям трех осей. Если рассматриваются задачи магнитно-импульсного деформирования заготовки, то добавляются уравнения, в которые входят физические величины, описывающие магнитные явления. При решении задач горячей штамповки добавляются уравнения, описывающие температурные поля.

Все названные уравнения связаны с общей постановкой задачи. На практике решают так называемые краевые задачи. Отличие последних заключается в том, что у исследователя появляются граничные условия, используемые, например, для определения функций и постоянных интегрирования дифференциальных уравнений. Граничные условия исследователь формулирует, задавая вид деформируемого тела: жесткопластическое, упругопластическое и др., а также тот или иной закон контактного трения, закон распределения температур в деформирующей заготовке инструменте и т. д.

При аналитических методах решений описанной выше системы уравнений в результате получают («выводят») формулы для определения напряжений и деформаций в обрабатываемой заготовке.

В отличие от аналитических решений, при использовании вычислительных машин проводится расчет напряжений и деформаций только в конкретных точках исследуемой деформируемой заготовки. Машина не может «вывести» формулу для последующих расчетов по ней скоростей деформаций и напряжений в заготовке.

Сказанное позволяет заключить, что применение пользователем в своей практической работе программного комплекса относится больше к экспериментальным исследованиям, чем к теоретическим.

Сказанное не означает, что для выполнения компьютерных экспериментов можно не изучать теорию аналитических решений задач.

Не вызывает сомнения, что для правильной организации реального (физического) эксперимента исследователю важно рационально использовать экспериментальное оборудование. Аналогично из базы данных программного комплекса требуется выбрать рациональные граничные условия проведения расчета параметров краевой задачи. Для этого исследователь должен достаточно хорошо владеть теорией.

Целью спланированного эксперимента является построение математической модели технологического процесса или отдельной его операции.

Наши коллеги и мы вместе с ними в более ранних исследованиях использовали различные виды математических моделей. В частности, степенные модели. Также использовали, наряду с принятым в настоящее время за основу методом регрессионного анализа, методы дисперсионного и корреляционного анализов.

Постепенно, путем «естественного отбора», наибольшее применение нашли модели в виде следующего полинома:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2, \quad (1)$$

где  $x_1$  – контролируемые входные факторы;

$y$  – выходной параметр;

$b_1, b_2$  – коэффициенты, характеризующие влияние факторов  $x_1$  и  $x_2$  на выходной параметр;

$b_{12}$  – коэффициент, характеризующий совместное влияние факторов  $x_1$  и  $x_2$ ;

$b_0$  – свободный член.

Количество членов, входящих в полином, в частности наличие нелинейных членов, членов, характеризующих совместное влияние факторов, степень, и которой факторы входят в полином, задаются на основе априорной информации. Входящие в модель факторы проиллюстрированы рис. 1.

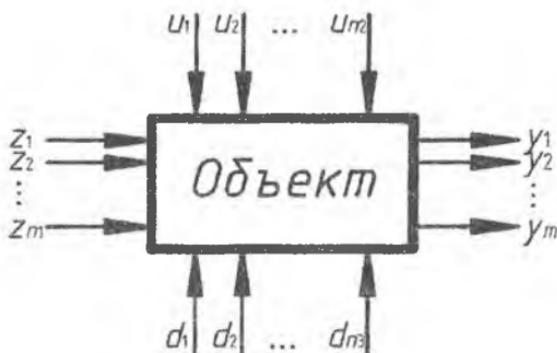


Рис. 1. Система факторов, действующих на исследуемый объект

В группу  $z_1, z_2, \dots, z_{n1}$  входят переменные, характеризующие качество сырья и не допускающие целенаправленного изменения в ходе исследования. В группу  $u_1, u_2, \dots, u_{n2}$  входят управляемые переменные технологического процесса. Переменные групп  $z$  и  $u$  объединяют в группу, которую обозначают символами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и называют контролируруемыми входными факторами.

Переменные группы  $y_1, y_2, \dots, y_m$  называют выходными. Обычно задача состоит в том, чтобы найти зависимость между контролируруемыми входными факторами и выходными переменными процесса или найти значения входных факторов, обеспечивающие достижение экстремума некоторой выходной переменной.

Группу  $d_1, d_2, \dots, d_{n3}$  образуют неконтролируемые факторы. Они характеризуют воздействие на объект возмущений, которые не могут быть измерены количественно. Воздействие неконтролируемых факторов приводит к возникновению случайных ошибок.

Выражение (1) является наиболее простым примером линейной полиномиальной математической модели. Тем не менее, в нем содержится член  $b_{12}x_1x_2$ . Характеризуемое этим членом совместное влияние факторов заключается в том, что влияние одного из этих двух факторов меняется в зависимости от того, какое значение имеет другой. Совместное влияние факторов может быть оценено только в результате многофакторных экспериментов, на которых основана излагаемая учебная дисциплина.

Помимо возможной оценки совместного влияния факторов излагаемый учебный курс позволяет определить минимально необходимое для решения конкретной задачи количество экспериментов (компьютерных или физических,

или тех и других в совокупности) при достижении результата с требуемой для технолога аргументированной им достоверностью.

Возможно появление у пользователя, реализующего компьютерные или вычислительные эксперименты, желания в принципе (вообще) отказаться от учета того, что результаты истинного эксперимента – случайные величины и существуют ошибки измерений. Это означает, что пользователь обратится только к первой части нашего курса, сочтя вторую часть излишней. Такой подход имеет следующий недостаток.

При сравнительно легком достижении результата опыта при компьютерном эксперименте возникает желание включить в модель, имеющую вид полинома, простейшим примером которой является выражение (1), большое количество членов. Например, членов, описывающих не только линейное влияние факторов, но и нелинейное, в том числе членов в кубе, в четвертой степени и т.д. Также возможно задание модели, содержащей члены, описывающие совместное влияние различных комбинаций факторов.

Каждому члену модели, описывающему влияние входящего в модель фактора в той или другой степени, и каждому члену модели, описывающему комбинацию совместно влияющих факторов, соответствует свое слагаемое математической модели. Следовательно, модель будет иметь большое количество слагаемых.

При задании неоправданно громоздкой формы математической модели после вычисления значений ее коэффициентов все члены (слагаемые) будут присутствовать при дальнейшем пользовании этой моделью, поскольку нет способа оценки значимости каждого из членов. Эта значимость может быть оценена только статистическими методами.

Заметим, что при решении немало количества практических задач с помощью физических экспериментов, проведенных авторами за период их исследовательской деятельности, дисперсия опыта, необходимая для статистического анализа в эксперименте, оценивалась при дублировании только одного из всех опытов матрицы плана эксперимента. Этого дублирования только одного опыта было достаточно, чтобы реализовать статистический анализ результатов эксперимента в целом.

Исходя из этого, полагаем возможным все (кроме одного) заданные планом эксперимента опыты провести в компьютерном виде и только один из заданных планом эксперимента опытов провести в реальном (физическом) виде, продублировав его несколько раз с целью оценки дисперсии опыта на той установке, которая имеется у исследователя. Это позволит реализовать статистический анализ всего «композиционного» эксперимента. Помимо этого исследователь подтвердит, что экспериментальная установка у него имеется не только на бумаге.

В результате статистического анализа будет оценена значимость каждого из членов математической модели, имеющей вид полинома, простейшим примером которой является выражение (1). Те члены, значимость которых не подтвердится, из модели можно исключить без пересчета коэффициентов перед

остаточными членами модели. Это можно сделать, только если составленный план эксперимента отвечает определенным требованиям с позиций математической статистики.

При данном построении предлагаемого издания, когда математическая статистика изучается не в первой, а во второй его части, предъявляемые к плану эксперимента требования в первой части принимаются без строгой аргументации. При прочтении второй части они становятся понятны пользователю.

На основании изложенного включение во вторую часть предлагаемого издания разделов по изучению методов статистического анализа в эксперименте является целесообразным.

Третья часть содержит описания проведенных авторами исследований операций обработки давлением с применением изложенных выше методов многофакторных экспериментов.

## 1. МНОГОФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Область знаний, называемая планированием эксперимента, имеет свои принципиальные особенности.

Влияние факторов, значительное количество которых, как показано на рис. 1, действует на объект исследования, может исследоваться путем однофакторных или многофакторных экспериментов.

При однофакторном экспериментировании все факторы, кроме одного, фиксируют при каких-то конкретных их значениях и меняют значения только одного фактора. Принят термин, что этот фактор варьируют. Изучив влияние этого фактора, его фиксируют при каком-то конкретном значении и осуществляют варьирование другого фактора, который ранее был зафиксирован. Таким образом изучают влияние другого фактора. По результатам однофакторного эксперимента, как правило, строят графики, описывающие влияние каждого фактора.

Значения факторов, при которых их фиксируют, в планировании эксперимента называют уровнями факторов.

При многофакторном экспериментировании эффект влияния каждого фактора оценивается по результатам всех опытов в эксперименте. При этом от опыта к опыту изменяются не один, а сразу несколько факторов. Изменение этих факторов производится по плану, описываемому матрицей плана эксперимента. Каждому опыту в матрице плана соответствует строка, а каждому фактору – столбец. Помимо столбцов, в которых зафиксированы значения факторов в каждом из опытов, матрица плана содержит столбец (или столбцы) с результатами опытов  $y$  (см. рис. 1). Рассмотрение столбца с результатами опытов не позволяет охарактеризовать влияние отдельных факторов на объект исследования. Причина этого заключается в том, что от опыта к опыту изменялись значения сразу нескольких факторов и невозможно определить, как и насколько изменение каждого из факторов повлияло на значение  $y$ .

Поэтому результатом многофакторного эксперимента является не графическое описание влияния каждого фактора, как при однофакторном экспериментировании, а математическая модель, описывающая влияние всех факторов.

Структура математической модели, простейшим примером которой является выражение (1), взаимосвязана с матрицей плана эксперимента. Исследователь одновременно задает форму математической модели, которую он собирается построить, и матрицу плана эксперимента.

Большим преимуществом многофакторного эксперимента по сравнению с однофакторным является значительное сокращение количества опытов. Количество опытов при многофакторном экспериментировании определяется

формой математической модели, для определения значений коэффициентов которой проводятся опыты. При однофакторном экспериментировании опыты проводятся для построения графиков, характеризующих влияние каждого фактора при различных зафиксированных значениях остальных факторов. Выбор комбинаций значений всех факторов, которые требуется зафиксировать, и количество опытов, необходимых для построения графиков, может быть очень большим.

Другим преимуществом многофакторного эксперимента является возможность описания совместного влияния факторов (см. выражение (1) и п. 1.2). Однофакторные эксперименты такой возможности не дают.

Форма математической модели, задаваемой исследователем, связана с выбором уровней каждого из факторов, интервалов их варьирования и учетом эффектов взаимного влияния факторов, а также желанием исследователя сократить количество опытов, которые необходимо провести для определения коэффициентов математической модели.

### 1.1. Факторы, интервалы их варьирования и форма математической модели

Факторы могут быть количественными и качественными. К первым относятся те, которые можно измерить в мм, %, градусах, МН, МПа и т.п., ко вторым – те, которые невозможно охарактеризовать в системе единиц измерения. Например, это материал заготовки: сталь, медь, алюминий и т.д., тип печи для нагрева заготовки с использованием в качестве защитной атмосферы азота, водорода и т.д., тип кузнечно-штамповочного оборудования: молот или пресс.

В большинстве технологических процессов факторы оказывают нелинейное влияние на выходные переменные объекта исследований, однако эта нелинейность существенно зависит от выбора интервалов варьирования фактора (рис. 2).

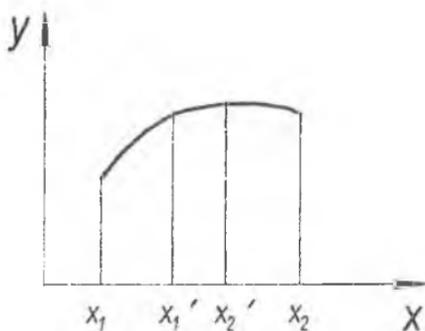


Рис. 2. Связь оценки нелинейности функции  $y = f(x)$  с выбранным интервалом варьирования  $x$

На рис. 2 видно, что при интервале варьирования фактора, ограниченно значениями  $x'_1$  и  $x'_2$ , можно считать, что функция  $y$  зависит от  $x$  линейно. При интервале варьирования фактора от  $x_1$  до  $x_2$  функция  $y$  зависит от  $x$  нелинейно. Выбор интервалов варьирования факторов связан с целью эксперимента.

По цели эксперимента решаемые задачи делят на задачи описания, которые направлены на изучение зависимости переменных на выходе объекта от действующих факторов, и на экстремальные задачи, которые направлены на нахождение оптимальных с заданных позиций сочетаний значений факторов. В задачах описания выбирают большие интервалы варьирования факторов и, соответственно, нелинейные математические модели. В задачах нахождения оптимума выбирают малые интервалы варьирования факторов, что позволяет использовать линейные модели, сократить количество опытов и упростить процедуру обработки их результатов.

Отметим, что решение задач описания, несмотря на большую трудоемкость, позволяет проследить закономерности технологических процессов, а не только найти оптимальную точку в факторном пространстве.

## 1.2. Эффекты совместного влияния факторов

Возможность оценить совместное влияние (взаимодействие) факторов является большим преимуществом многофакторного эксперимента по сравнению с однофакторным.

Рассмотрим такое влияние на примере величины скоростного коэффициента  $\varphi_c$ , используемого при корректировке напряжения текучести в зависимости от скорости деформации и температуры штамповки [12].

При холодной штамповке увеличение скорости деформации от  $1 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$  до  $1 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$  изменяет напряжение текучести деформируемой заготовки всего лишь на 25%, в то время как при горячей штамповке такое же изменение скорости деформации изменяет напряжение текучести материала заготовки в 2,5 раза (рис. 3, 4).

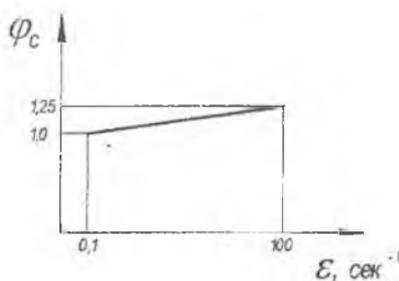


Рис. 3. Зависимость скоростного коэффициента от скорости деформации при холодной штамповке

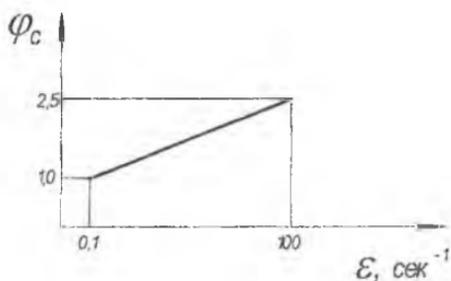


Рис. 4. Зависимость скоростного коэффициента от скорости деформации при горячей штамповке

Таким образом, скорость деформации и температура штамповки оказывают совместное влияние на величину скоростного коэффициента, поскольку влияние одного из факторов изменяется в зависимости от того, на каком уровне находится другой фактор.

Другим примером совместного влияния факторов является исследование разностенности деталей типа стаканов при штамповке выдавливанием. Пуансон, выдавливающий полость стакана (рис. 4), отклоняется в сторону от оси полости матрицы. В результате в штампованной поковке образуется разностенность. Величина отклонения пуансона (и связанная с этим разностенность) зависит от центрирования исходной заготовки. Осуществлению точного центрирования заготовки в матрице препятствуют следующие обстоятельства.

Наиболее экономичный материал для изготовления заготовок – горячекатаные прутки, которые имеют значительные колебания диаметра по длине. Чтобы не обтачивать эти прутки при разделении и обеспечить беспрепятственную укладку заготовки в матрицу, приходится выбирать исходный пруток, имеющий диаметр, несколько меньший, чем диаметр полости матрицы. Наиболее экономичный способ разделения прутков на заготовки для штамповки – резка в штампах. В этом случае торец заготовки бывает значительно скошен (рис. 5).

Отклонение пуансона от оси полости матрицы будет зависеть от величины возникающих в теле пуансона изгибающих его напряжений. Величина указанных напряжений будет зависеть от того, насколько заготовка будет перекошена в матрице на начальной стадии внедрения в нее пуансона.

При отсутствии или небольшой величине зазора между заготовкой и матрицей, даже при скошенном ее торце, заготовка несильно наклонится при ее укладке в матрицу. Также при отсутствии скоса торца заготовки она даже при наличии зазора между ее цилиндрической поверхностью и полостью матрицы несильно наклонится при укладке в матрицу. Однако если будут иметь место значительный скос торца заготовки и значительный зазор между цилиндрической поверхностью заготовки и полостью матрицы, заготовка сильно наклонится при ее укладке в матрицу.

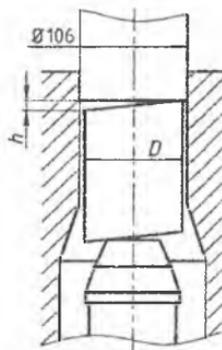


Рис. 5. Совместное влияние факторов  $D$  и  $h$  на разностенность выдавленного из заготовки стакана

В пуансоне с самого начала его внедрения в заготовку возникнут изгибающие напряжения, которые приведут к большой разностенности выдавленного из такой заготовки стакана. Таким образом, речь идет о совместном влиянии двух факторов: первый – зазор между цилиндрической поверхностью заготовки и полостью матрицы; второй – скос торца заготовки. При этом влияние одного из этих факторов изменяется в зависимости от того, на каком уровне находится другой фактор.

### 1.3. Модель полного факторного эксперимента

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным. Число опытов полного факторного эксперимента  $N = S^k$ , где  $S$  – число уровней, на котором варьируется каждый из факторов,  $k$  – число факторов в эксперименте.

Факторы могут быть количественными и качественными, уровни, на которых их варьируют, могут быть равноотстоящими между собой и неравноотстоящими, поэтому  $S$  уровней фактора при планировании эксперимента удобно представить в кодовом масштабе  $F_i$  значениями  $0, 1, 2, \dots, S-1$ . В планы также входит фиктивная переменная  $F_0$ , необходимая для расчета свободного члена математической модели и имеющая во всех опытах уровень, равный 0. На основании этого переменную  $F_0$  в математических моделях иногда не записывают.

Пример полного факторного эксперимента  $3^2$  приведен в табл. 1.

Значения уровней для эффектов взаимодействия факторов определены сложением уровней взаимодействующих факторов и делением суммы на число уровней варьирования факторов в эксперименте. Остаток от деления дает значение уровня. Например, уровни для пятого столбца матрицы определены из соотношения:  $F_1 F_2 = (F_1 + F_2) / 3$ . Для опыта № 9 сумма в скобках равна 4. Остаток от деления её на 3 равен 1. Следовательно, в опыте № 9 уровнем эффекта

взаимодействия  $F_1F_2$  является 1. Приведенный здесь метод расчета уровней факторов является альтернативой выбора плана по каталогу В.З. Бродского, поскольку каталог может быть не всегда доступен. Ниже мы приведем некоторые сведения из каталога, которых, судя по нашему опыту, достаточно для решения основных задач из области технологии конструкционных материалов.

Таблица 1. Матрица плана полного факторного эксперимента  $3^2$

| Номер опыта | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_1F_2$ | $F_1^2$ | $F_2^2$ | $F_1^2F_2^2$ | $F_1F_2^2$ | $F_1^2F_2$ |
|-------------|-------|-------|-------|----------|---------|---------|--------------|------------|------------|
| 1           | 2     | 3     | 4     | 5        | 6       | 7       | 8            | 9          | 10         |
| 1           | 0     | 0     | 0     | 0        | 0       | 0       | 0            | 0          | 0          |
| 2           | 0     | 1     | 0     | 1        | 2       | 0       | 2            | 1          | 2          |
| 3           | 0     | 2     | 0     | 2        | 1       | 0       | 1            | 2          | 1          |
| 4           | 0     | 0     | 1     | 1        | 0       | 2       | 2            | 2          | 1          |
| 5           | 0     | 1     | 1     | 2        | 2       | 2       | 1            | 0          | 0          |
| 6           | 0     | 2     | 1     | 0        | 1       | 2       | 0            | 1          | 2          |
| 7           | 0     | 0     | 2     | 2        | 0       | 1       | 1            | 1          | 2          |
| 8           | 0     | 1     | 2     | 0        | 2       | 1       | 0            | 2          | 1          |
| 9           | 0     | 2     | 2     | 1        | 1       | 1       | 2            | 0          | 0          |

Приведенный выше кодированный масштаб применяется при составлении планов, в частности, при выборе стандартных планов по каталогу В.З.Бродского, а также при их преобразованиях для применяемых в конкретном эксперименте чисел уровней варьирования факторов.

Приведенная в табл. 1 матрица плана позволяет определить коэффициенты следующей соответствующей ей математической модели:

$$y = b_0 + b_1F_1 + b_2F_2 + b_{12}F_1F_2 + b_{11}F_1^2 + b_{22}F_2^2 + b_{1122}F_1^2F_2^2 + b_{122}F_1F_2^2 + b_{112}F_1^2F_2. \quad (2)$$

В этой модели записаны не только член  $b_{12}F_1F_2$ , характеризующий эффект совместного влияния факторов, но и эффекты взаимодействий факторов более высокого порядка. Объяснить физический смысл таких взаимодействий в исследуемых технологических процессах затруднительно.

#### 1.4. Сокращение числа опытов при дробном факторном эксперименте

В тех случаях, когда получаемая из полного факторного эксперимента информация, по мнению исследователя, является избыточной, можно пользоваться планами дробного факторного эксперимента.

Предположим, что изучается влияние трех факторов:  $F_1, F_2$  и  $F_3$ , каждый из которых варьируется на трех уровнях 0, 1 и 2. Полный факторный эксперимент  $3^3$  включает 27 опытов, но экспериментатор предполагает вначале поставить только 9 опытов.

Девять опытов являются полным факторным экспериментом для двух факторов, варьируемых на трех уровнях  $3^2$ . Этот план записан в табл. 1, столбцы 3 и 4. Уровни для квадратичных эффектов факторов и всех возможных взаимодействий факторов записаны в последующих столбцах табл. 1.

Уровни одного из эффектов взаимодействия факторов, влияние которого мы предполагаем незначимым, следует взять для третьего фактора  $F_3$ . Предположим, для фактора  $F_3$  выбран столбец 8 табл. 1. Получим план, записанный в табл. 2.

С практической точки зрения отказ от учета влияния взаимодействий факторов означает, что влияние каждого фактора на исследуемую величину не зависит от того, на каких уровнях находятся остальные факторы. Такое допущение не всегда справедливо. Однако, как показано ниже, можно при планировании эксперимента отказаться от учета взаимодействий отдельных факторов, а оценки взаимодействий других факторов сохранить. Представленные в табл. 2 девять опытов, проводимые для оценки влияния трех факторов, представляют собой дробный факторный эксперимент. Его условно обозначают  $S^{k-p}$ , где  $p$  взаимодействий полного факторного эксперимента  $S^k$  предполагаются незначимыми и их уровни присваиваются новым факторам.

Приведенный в табл. 2 план обозначается  $3^{3-1} // 9$  и называется  $1/2$ -репликой плана полного факторного эксперимента  $3^2$ . Дробность приведенного в табл. 2 плана может быть увеличена, если для фактора  $F_4$  выбрать столбец 10 плана, приведенного в табл. 1. При этом получится план, приведенный в табл. 3. Приведенный в табл. 3 план обозначается  $3^{4-2} // 9$  и называется  $1/4$ -репликой плана полного факторного эксперимента  $3^2$ .

Дробление плана на реплики ограничивается соотношением количества опытов в матрице плана и количества членов математической модели, которую предполагается построить в результате эксперимента.

Плану  $3^{4-2}$  соответствует математическая модель вида

$$y = b_0 + b_1 F_1 + b_2 F_2 + b_3 F_3 + b_4 F_4 + b_{11} F_1^2 + b_{22} F_2^2 + b_{33} F_3^2 + b_{44} F_4^2. \quad (3)$$

Модель (3) содержит 9 членов. В матрице в табл. 3 содержится план, включающий в себя 9 опытов. Результаты этих 9 опытов позволят рассчитать коэффициенты перед 9 членами математической модели (3).

Таблица 2. Дробная реплика  $3^{3-1}$  плана, приведенного в табл. 1

| Номер опыта | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3 = F_1^2 F_2^2$ |
|-------------|-------|-------|-------|---------------------|
| 1           | 2     | 3     | 4     | 5                   |
| 1           | 0     | 0     | 0     | 0                   |
| 2           | 0     | 1     | 0     | 2                   |
| 3           | 0     | 2     | 0     | 1                   |
| 4           | 0     | 0     | 1     | 2                   |
| 5           | 0     | 1     | 1     | 1                   |
| 6           | 0     | 2     | 1     | 0                   |
| 7           | 0     | 0     | 2     | 1                   |
| 8           | 0     | 1     | 2     | 0                   |
| 9           | 0     | 2     | 2     | 2                   |

Таблица 3. Дробная реплика  $3^{4-2}$  плана, приведенного в табл. 1

| Номер опыта | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3 = F_1^2 F_2^2$ | $F_4 = F_1^2 F_2$ |
|-------------|-------|-------|-------|---------------------|-------------------|
| 1           | 2     | 3     | 4     | 5                   | 6                 |
| 1           | 0     | 0     | 0     | 0                   | 0                 |
| 2           | 0     | 1     | 0     | 2                   | 2                 |
| 3           | 0     | 2     | 0     | 1                   | 1                 |
| 4           | 0     | 0     | 1     | 2                   | 1                 |
| 5           | 0     | 1     | 1     | 1                   | 0                 |
| 6           | 0     | 2     | 1     | 0                   | 2                 |
| 7           | 0     | 0     | 2     | 1                   | 2                 |
| 8           | 0     | 1     | 2     | 0                   | 1                 |
| 9           | 0     | 2     | 2     | 2                   | 0                 |

Если еще больше увеличить дробность плана эксперимента, приведенного в табл. 1, количества результатов опытов станет недостаточно для расчета коэффициентов перед членами математической модели такого эксперимента.

### 1.5. Натуральный и кодированные масштабы факторов

При проведении экспериментов сочетания уровней факторов в каждом из опытов выбирают в соответствии со столбцами главных эффектов: в табл. 1 это столбцы 3 и 4, в табл. 2 – столбцы 3, 4 и 5. Для удобства работы эти столбцы матрицы плана эксперимента переписывают в натуральном масштабе, т.е. вместо 0, 1, 2, ...,  $S - 1$ , записанных в клетках табл. 1 и 2, вписывают поставленные им в соответствие значения уровней количественных факторов в мм, %, градусах, МН, МПа и т.п. Для качественных факторов оставляют значения их уровней в кодах  $F_j$ .

После записи матрицы плана в натуральном масштабе проводится эксперимент: вычислительный или физический. Результаты каждого из опытов, в

котором факторы находились на заданных строкой матрицы плане уровнях, записываются в этой же строке в столбец результатов  $y$ , который обычно располагают последним (правым) в матрице плане эксперимента.

После проведения эксперимента производится расчет коэффициентов математической модели.

Формула для расчета коэффициентов выводится с использованием метода наименьших квадратов:

$$\Phi = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2 = \min, \quad (4)$$

где  $y_u$  и  $\hat{y}_u$  соответственно экспериментальные и рассчитанные по модели значения  $y$  в  $u$ -том опыте;  $N$  – общее число опытов.

При задании математической модели в виде:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

выражение (4) принимает следующий вид:

$$\Phi = \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 x_{0u} - b_1 x_{1u} - b_2 x_{2u})^2 = \min. \quad (5)$$

Для определения минимума функции (5) приравнивают нулю частные производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = 0.$$

После дифференцирования получают систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов:

$$\left. \begin{aligned} b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u}^2 + b_1 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{1u} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{2u} &= \sum_{u=1}^N x_{0u} y_u, \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{1u} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{1u}^2 + b_2 \sum_{u=1}^N x_{1u} x_{2u} &= \sum_{u=1}^N x_{1u} y_u, \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{2u} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{1u} x_{2u} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{2u}^2 &= \sum_{u=1}^N x_{2u} y_u. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Система уравнений (6) решается достаточно легко, когда выполняются следующие условия:

$$\sum_{u=1}^N x_{0u}x_{1u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{0u}x_{2u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{1u}x_{2u} = 0.$$

Последние уравнения представляют собой суммы почленных произведений двух разных столбцов матрицы плана эксперимента.

В общем виде такое условие записывается как

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}x_{ju} = 0, \quad i \neq j \quad (7)$$

и носит название ортогональности матрицы плана.

В результате использования условия ортогональности система уравнений (6) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} b_0 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 &= \sum_{u=1}^N x_{0u}y_u, \\ b_1 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 &= \sum_{u=1}^N x_{1u}y_u, \\ b_2 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 &= \sum_{u=1}^N x_{2u}y_u. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для расчета коэффициентов  $b_i$  даже не нужно решать эту систему уравнений. Каждый коэффициент определяется независимо от другого из своего уравнения системы:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{0u}y_u}{\sum_{u=1}^N x_{0u}^2}; \quad b_1 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{1u}y_u}{\sum_{u=1}^N x_{1u}^2}; \quad b_2 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{2u}y_u}{\sum_{u=1}^N x_{2u}^2}$$

или в общем виде:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}, \quad i = 0, 1, 2 \dots k, \quad (9)$$

где  $i$  - номер фактора.

Таким образом, для ортогональных планов формула для расчета коэффициентов несложная.

Проблема состоит в том, что матрицы плана эксперимента в кодах  $F_i$  и в натуральном масштабе не отвечают условию ортогональности. Не отвечают они и условию симметричности

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (10)$$

являющемуся составляющей условия ортогональности матрицы плана.

Поэтому матрицу плана переводят из натурального в кодированный масштаб, в котором она симметрична и ортогональна.

В частности, строится математическая модель, имеющая в натуральном масштабе следующий вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i X_i + \sum_{i=1}^m b_{ii} X_i^2.$$

В кодированном масштабе эта математическая модель запишется в виде:

$$y = b'_0 + \sum_{i=1}^m b'_i x_i + \sum_{i=1}^m b'_{ii} z_i. \quad (11)$$

В модели (11)  $x_i$  – линейная функция от  $X_i$ :

$$x_i = k_i(X_i - A_i), \quad (12)$$

где  $k_i$  и  $A_i$  – константы.

Из условия симметричности матрицы плана

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = k_i \sum_{u=1}^N (X_{iu} + A_i) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{u=1}^N X_{iu} + NA_i = 0,$$

отсюда

$$A_i = -\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu}. \quad (13)$$

После подсчета  $A_i$  коэффициенты  $k_i$  подбирают таким образом, чтобы уровни  $x_i$  представляли собой небольшие числа, лучше целые.

Входящая в модель (11) функция  $z_i$  – квадратичная функция от  $x_i$ :

$$z_i = k'_i(x_i^2 + a_i x_i + c_i), \quad (14)$$

где  $k'_i, a_i, c_i$  – константы.

Из условия симметричности матрицы плана

$$\sum_{u=1}^N z_{iu} = k'_i \left( \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 + a_i \sum_{u=1}^N x_{iu} + Nc_i \right) = 0$$

и, поскольку  $\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0$ , то и  $\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 + Nc_i = 0$ .

Отсюда 
$$c_i = -\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu}^2. \quad (15)$$

Из условия ортогональности матрицы плана

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} z_{iu} = 0. \quad (16)$$

После подстановки (14) в (16)

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} z_{iu} = \sum_{u=1}^N x_{iu}^3 + a_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 + c_i \sum_{u=1}^N x_{iu} = 0.$$

Из последнего выражения, с учетом условия симметричности матрицы плана:

$$a_i = -\frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}^3}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}. \quad (17)$$

Коэффициенты  $k'_i$  выбираются из условия, чтобы уровни  $z_i$  представляли собой небольшие числа, лучше целые.

Если строится математическая модель, содержащая функцию  $q_i$  как кубическую от  $x_i$ :

$$q_i = k''_i(x_i^3 + d_i x_i^2 + e_i x_i + n_i), \quad (18)$$

где  $k''_i, d_i, e_i, n_i$  – константы.

Из условий симметричности и ортогональности матрицы плана:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{u=1}^N q_{iu} &= 0, \\ \sum_{u=1}^N q_{iu} x_{iu} &= 0, \\ \sum_{u=1}^N q_{iu} z_{iu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Из совместного рассмотрения (18) и (19) следует:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{u=1}^N q_{iu} &= \sum_{u=1}^N x_{iu}^3 + d_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 + e_i \sum_{u=1}^N x_{iu} + Nn_i = 0; \\ \sum_{u=1}^N q_{iu} x_{iu} &= \sum_{u=1}^N x_{iu}^4 + d_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^3 + e_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 + n_i \sum_{u=1}^N x_{iu} = 0; \\ \sum_{u=1}^N q_{iu} z_{iu} &= \sum_{u=1}^N x_{iu}^3 z_{iu} + d_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 z_{iu} + e_i \sum_{u=1}^N x_{iu} z_{iu} + n_i \sum_{u=1}^N z_{iu} = 0. \end{aligned} \right.$$

Поскольку  $\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0$ ;  $\sum_{u=1}^N x_{iu} z_{iu} = 0$ ;  $\sum_{u=1}^N x_{iu}^3 = 0$ ;  $\sum_{u=1}^N z_{iu} = 0$ , то

$$\left\{ \begin{aligned} d_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 + Nn_i &= 0; \\ \sum_{u=1}^N x_{iu}^4 + e_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 &= 0; \\ \sum_{u=1}^N x_{iu}^3 z_{iu} + d_i \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 z_{iu} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Решение этой системы уравнений дает следующие результаты:

$$d_i = -\frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}^3 z_{iu}}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 z_{iu}}; \quad e_i = -\frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}^4}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}; \quad n_i = -d_i \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}{N}. \quad (20)$$

Опыт нашей работы по исследованию технологических процессов обработки материалов давлением показал, что варьирования факторов на трех уровнях и, соответственно, использования математических моделей, в которые факторы входят в первой и второй степенях, бывает достаточно.

В соответствии с принятым нами стилем данного издания, при котором мы не стремимся привлечь читателя большим количеством математических формул, рассмотрим простой практический пример. Из этого примера станет ясно, что те математические зависимости, которые приведены выше, легко используются на практике.

### 1.6. Расчет коэффициентов математической модели на примере исследования операции вырубki листовых образцов

Исследуется влияние величины зазора  $z$  между пуансоном и матрицей на качество среза и силу  $P$ , необходимую для вырубki листовых заготовок по схеме, представленной на рис. 6.

В исследовании величина зазора при вырубке варьируется на трех уровнях, материал заготовки – на двух. План полного факторного эксперимента в кодах  $F$ , представлен в табл. 4.

Вырубаются кружки из стали 45 и меди в матрице диаметром 25 мм. Толщина заготовок 7 мм. Уровни варьирования зазора по отношению к толщине заготовки выбраны с учетом литературных данных и составляют 0,03; 0,05; 0,1.

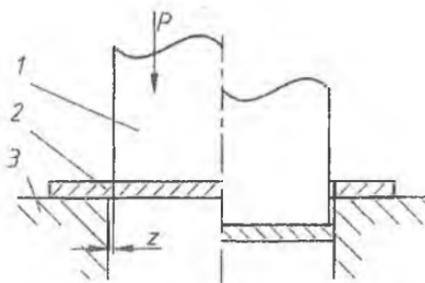


Рис. 6. Схема операции вырубki заготовки из листа: 1 – пуансон, 2 – заготовка, 3 – матрица

Вырубленная заготовка приведена на рис. 7.

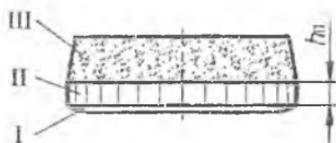


Рис. 7. Форма вырубленной заготовки: I – зона скругления, II – блестящий пояс, III – зона скалывания

План в натуральном масштабе записан в табл. 5. Уровням качественного фактора  $X_2$  оставлены обозначения  $F_2$ . При этом значение  $F_2 = 0$  присвоено заготовкам, вырубаемым из стали, а значение  $F_2 = 1$  присвоено заготовкам, вырубаемым из меди.

Таблица 4. Матрица плана  $3 \times 2 // 6$  в кодах  $F_i$

| Номер опыта | $F_1$ | $F_2$ |
|-------------|-------|-------|
| 1           | 0     | 0     |
| 2           | 1     | 0     |
| 3           | 2     | 0     |
| 4           | 0     | 1     |
| 5           | 1     | 1     |
| 6           | 2     | 1     |

Заготовки после вырубки осматривают и оценивают качество среза по 3-балльной шкале. Наилучшим срезом, оцениваемым в 3 балла, считается состоящий из трех зон (рис. 7). При этом зона I должна иметь незначительный размер. Если эта зона возрастает по сравнению с наименьшей, полученной при вырубке заготовки из данного материала, или вырубленный образец имеет заметный прогиб, то качеству среза присваивают оценку 2 балла. Если же поверхность среза рваная, с дополнительными поясками, то качеству среза присваивают оценку 1 балл.

Таблица 5. Матрица плана  $3 \times 2 // 6$  в натуральном масштабе

| Номер опыта | $X_1$ | $X_2$ | Качество среза, $y_1$ | Сила вырубки, $y_2$ , кН |
|-------------|-------|-------|-----------------------|--------------------------|
| 1           | 0,03  | 0     | 2                     | 197                      |
| 2           | 0,05  | 0     | 1                     | 195                      |
| 3           | 0,1   | 0     | 1                     | 192                      |
| 4           | 0,03  | 1     | 3                     | 100                      |
| 5           | 0,05  | 1     | 2                     | 98                       |
| 6           | 0,1   | 1     | 1                     | 96                       |

Матрица плана в натуральном масштабе (см. табл. 5) позволяет приступить к физическому или компьютерному эксперименту и определить в результате его проведения качество среза при вырубке и силу, с которой происходила вырубка. Эти результаты опытов приведены в табл. 4 в двух правых крайних столбцах.

Для обработки данных эксперимента совершен переход к новому кодированному масштабу, в котором матрица плана отвечает условиям симметрии и ортогональности. По изложенной выше методике формулы перехода от  $X_i$  к  $x_i$  и  $z$ , получены следующими:

$$\begin{aligned}x_1 &= 100 (X_1 - 0,06), \\z_1 &= (x_1^2 - 1,4 x_1 - 8,7), \\x_2 &= 2 (X_2 - 0,5).\end{aligned}\quad (21)$$

План эксперимента в кодированном масштабе представлен в табл. 6. Столбец  $x_0$ , служащий для определения коэффициента  $b_0$  модели, состоит только из +1. Уровни эффектов совместного влияния факторов получены перемножением уровней соответствующих главных эффектов.

В результате обработки экспериментальных данных, проведенных с применением формулы (9), получены два уравнения (математические модели), одно из которых описывает зависимость качества среза, а другое – силу при вырубке от величины зазора, материала заготовки и совместного влияния этих двух факторов:

$$\begin{aligned}y_1 &= 1,67 - 0,19 x_1 + 0,054 z_1 + 0,33 x_2 - 0,077 x_1 x_2 - 0,11 z_1 x_2, \\y_2 &= 146,3 - 0,65 x_1 - 0,26 z_1 - 48,4 x_2 + 0,077 x_1 x_2 + 0,0144 z_1 x_2.\end{aligned}\quad (22)$$

Таблица 6. Матрица плана 3х2//6 в кодированном масштабе

| Номер опыта | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $x_1 x_2$ | $z_1 x_2$ | Качество среза, $y_1$ | Сила вырубки, $y_2$ , кН |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------------------|--------------------------|
| 1           | 1     | -3    | -1    | 4,5   | 3         | -4,5      | 2                     | 197                      |
| 2           | 1     | -1    | -1    | -6,3  | 1         | 6,3       | 1                     | 195                      |
| 3           | 1     | 4     | -1    | 1,8   | -4        | -1,8      | 1                     | 192                      |
| 4           | 1     | -3    | 1     | 4,5   | -3        | 4,5       | 3                     | 100                      |
| 5           | 1     | -1    | 1     | -6,3  | -1        | -6,3      | 2                     | 98                       |
| 6           | 1     | 4     | 1     | 1,8   | 4         | 1,8       | 1                     | 96                       |

Полученные уравнения проанализированы для установления наилучшей величины зазора. Анализ проведен отдельно для заготовок из стали 45 и меди. Для этого в уравнения (20) подставлены значения фактора  $x_2 = -1$  для стали и  $x_2 = +1$  для меди.

После указанной подстановки модели (22) для стали 45 приняли следующий вид:

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,065 x_1^2 - 0,204 x_1 + 1,574, \\y_2 &= 197,1 - 0,27 x_1^2 - 0,3343 x_1.\end{aligned}$$

Для меди модели (22) приняли вид:

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,043 x_1^2 - 0,327 x_1 + 1,63, \\y_2 &= 97,9 - 0,24 x_1^2 - 0,229 x_1.\end{aligned}$$

В преобразованных моделях слагаемые с  $x_1^2$  появились вследствие подстановки вместо  $z_1$  его выражения через  $x_1$  по формуле (21).

Для определения наилучших зазоров выражения для  $y_1$  продифференцированы по  $x_1$ , производные приравнены нулю и из равенств подсчитаны величины зазоров. Одновременно по выражениям для  $y_2$  для наилучших зазоров рассчитаны величины деформирующих сил.

Получено для стали: наилучший относительный зазор равен 0,076, сила вырубки равна 197 кН.

Для меди: наилучший относительный зазор равен 0,098; сила вырубки равна 97,9 кН.

### 1.7. Расчет коэффициентов математической модели при исследовании разностенности изготовленных выдавливанием стаканов

В п. 1.6 был реализован полный факторный эксперимент, в котором были учтены все совместные влияния факторов, в том числе и совместные влияния, в которые факторы входили в степени выше первой. Однако, как уже было указано в конце текста в п. 1.3, объяснить физический смысл таких взаимодействий в исследуемых технологических процессах затруднительно.

Ниже приводится описание полного факторного эксперимента при исследовании разностенности стаканов, выдавленных по схеме, приведенной на рис. 5. В эксперименте 2 фактора: диаметр стакана и высота скоса  $h$ . Каждый из этих факторов варьируется на 3 уровнях. Выходным параметром является разностенность выдавленного стакана.

При составлении матрицы плана эксперимента, в отличие от матрицы плана, заданного в табл. 1, ограничились только семью столбцами, отказавшись от учета совместных влияний факторов, в которые факторы входят в степени выше первой. План такого эксперимента в кодовом масштабе  $F_i$  приведен в табл. 7.

В соответствии с этим планом строится следующая модель:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^2 b_i X_i + \sum_{i=1}^2 b_{ii} X_i^2 + b_{12} X_1 X_2. \quad (23)$$

В соответствии с табл. 7 составлена матрица плана в натуральном масштабе, приведенная в табл. 8.

По изложенной выше методике получены формулы перехода от  $X_i$  к  $x_i$  и  $z_i$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= (X_1 - 104,6); \\ x_2 &= (X_2 - 2,67); \\ z_1 &= x_1^2 + 0,54 x_1 - 1,04; \\ z_2 &= x_2^2 + 1,47 x_2 - 38. \end{aligned} \quad (24)$$

Таблица 7. Матрица плана полного факторного эксперимента  $3^2$  в кодовом масштабе  $F_i$

| Номер опыта | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_1 F_2$ | $F_1^2$ | $F_2^2$ |
|-------------|-------|-------|-------|-----------|---------|---------|
| 1           | 2     | 3     | 4     | 5         | 6       | 7       |
| 1           | 0     | 0     | 0     | 0         | 0       | 0       |
| 2           | 0     | 1     | 0     | 1         | 2       | 0       |
| 3           | 0     | 2     | 0     | 2         | 1       | 0       |
| 4           | 0     | 0     | 1     | 1         | 0       | 2       |
| 5           | 0     | 1     | 1     | 2         | 2       | 2       |
| 6           | 0     | 2     | 1     | 0         | 1       | 2       |
| 7           | 0     | 0     | 2     | 2         | 0       | 1       |
| 8           | 0     | 1     | 2     | 0         | 2       | 1       |
| 9           | 0     | 2     | 2     | 1         | 1       | 1       |

Таблица 8. Матрица плана полного факторного эксперимента  $3^2$  в натуральном масштабе и результаты опытов

| Номер опыта | Диаметр заготовки $D$ , мм | Величина скоса торца $h$ , мм | Разностенность стакана $\Delta$ ( $y$ ), мм |
|-------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------|
| 1           | 2                          | 3                             | 4                                           |
| 1           | 103,3                      | 0                             | 1,3                                         |
| 2           | 105                        | 0                             | 0,8                                         |
| 3           | 105,6                      | 0                             | 0,6                                         |
| 4           | 103,3                      | 3                             | 1,3                                         |
| 5           | 105                        | 3                             | 1,2                                         |
| 6           | 105,6                      | 3                             | 1,2                                         |
| 7           | 103,3                      | 5                             | 1,5                                         |
| 8           | 105                        | 5                             | 1,4                                         |
| 9           | 105,6                      | 5                             | 1,3                                         |

После расчета коэффициентов математической модели (23) по формуле (9) модель в кодированном масштабе приняла следующий вид:

$$y = 1,18 - 0,14 x_1 + 0,1 x_2 + 0,015 x_1 x_2 - 0,004 z_1 - 0,0006 z_2. \quad (25)$$

После перехода к натуральному масштабу модель (25) имеет следующий вид:

$$\Delta = -16,16 + 0,577 D - 0,004 D^2 - 4,417 h + 0,0019 h^2 + 0,045 D h. \quad (26)$$

Модель (26) позволяет определить разностенность выдавленного стакана, например, при размерах заготовки  $D = 104,075$  мм и  $h = 3,777$  мм. Разностенность составляет 1,54 мм. Также можно определить диаметр заготовки  $D$ , обеспечивающий наименьший эксцентриситет при заданном  $h = 4$  мм. Для этого

модель продифференцирована по  $D$  и производная приравнена к нулю. Получено  $0,008 D = 0,757$ , откуда  $D = 94,625$  мм.

### 1.8. Построение математической модели при исследовании влияния различных материалов заготовок на качество деталей из порошков на железной основе

Выше было приведено замечание, что варьирования факторов на трех уровнях бывает достаточно. Исключение составляют эксперименты, в которых исследуется влияние разных материалов, из которых изготовлены штампуемые заготовки. Если в одном эксперименте применяются заготовки из пяти материалов и более, процедура перевод матрицы плана в кодированный масштаб становится более объемной, чем было показано ранее. Однако сложность этого перевода при практическом использовании выведенных переводных формул по-прежнему остается достаточно простой.

Перевод факторов в кодированный масштаб при варьировании уплотняемого порошкового материала на 6 уровнях продемонстрирован при решении рассмотренной ниже задачи.

Порошковая заготовка уплотняется по схеме, приведенной на рис. 8 [13].

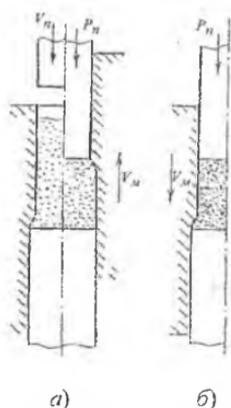


Рис. 8. Схема формирования с созданием в заготовке сдвига слоев материала:

- а) — осевое сжатие с одновременной раздачей на первом этапе;
- б) — осевое сжатие с одновременным обжимом на втором этапе

Исследуется влияние марки порошка, удельной силы, действующей на торец заготовки, механической схемы деформирования, количества стеарата цинка в шихте на плотность и твердость формованного цилиндра. Отметим, что порошок стеарата цинка используется в качестве смазочного материала при формовании заготовок из порошков на железной основе.

В эксперименте применены порошки ПЖВ2.160.28 (ГОСТ 9849-86), ПЖРВ2.200.26, ПЖРВ3.200.26, ПЖВ4.160.28, WPL-200 (Mannesmann Demag),

III. TRAPAC-LE (Mannesmann Demag) [17]. Удельная сила, приложенная к торцу засыпанной порции порошка, в конце формования составила 300, 340, 380, 420 МПа. Исследуются две механические схемы деформирования: первая – формование втулки при одновременной ее раздаче путем перемещения из цилиндрической полости матрицы Ø32 мм в цилиндрическую полость Ø36; вторая – те же операции, что и в первой, а затем обжатие втулки по боковой поверхности с Ø36 на Ø32. Стеарат цинка в шихту добавляется в количестве 0,5 и 1 %.

Строится модель следующего вида:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i X_i + \sum_{i=1}^2 b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^2 b_{iii} X_i^3 + b_{iiii} X_i^4 + b_{iiiii} X_i^5, \quad (27)$$

где  $x_i$  – линейная функция от  $X_i$ ;  $z_i$  – квадратичная функция от  $X_i$ ;  $p_i$  – кубическая функция от  $X_i$ ;  $q_i$  – функция четвертой степени от  $X_i$ ;  $f_i$  – функция пятой степени от  $X_i$ .

План эксперимента для определения коэффициентов математической модели (27) выбран из каталога В.З. Бродского [4, 9]. Это план  $2^3 \times 4 \times 6 // 24$ . При выборе один из столбцов стандартного плана для фактора, варьируемого на 2 уровнях, вычеркнут, поскольку в рассматриваемом эксперименте таких факторов только два. План в кодах  $F_i$  приведен в табл. 9.

Таблица 9. Матрица плана эксперимента  $2^2 \times 4 \times 6 // 24$  в кодах  $F_i$

| № опыта | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | № опыта | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 2     | 3     | 4     | 5     | 1       | 2     | 3     | 4     | 5     |
| 1       | 0     | 0     | 0     | 0     | 13      | 3     | 3     | 1     | 0     |
| 2       | 1     | 1     | 0     | 1     | 14      | 2     | 2     | 1     | 1     |
| 3       | 1     | 2     | 0     | 0     | 15      | 2     | 1     | 1     | 0     |
| 4       | 0     | 3     | 0     | 1     | 16      | 3     | 0     | 1     | 1     |
| 5       | 1     | 3     | 1     | 0     | 17      | 4     | 0     | 0     | 0     |
| 6       | 0     | 2     | 1     | 1     | 18      | 5     | 1     | 0     | 1     |
| 7       | 0     | 1     | 1     | 0     | 19      | 5     | 2     | 0     | 0     |
| 8       | 1     | 0     | 1     | 1     | 20      | 4     | 3     | 0     | 1     |
| 9       | 2     | 0     | 0     | 0     | 21      | 5     | 3     | 1     | 0     |
| 10      | 3     | 1     | 0     | 1     | 22      | 4     | 2     | 1     | 1     |
| 11      | 3     | 2     | 0     | 0     | 23      | 4     | 1     | 1     | 0     |
| 12      | 2     | 3     | 0     | 1     | 24      | 5     | 0     | 1     | 1     |

В проведенном исследовании рассмотренным порошкам присвоены условные значения уровней: 0, 1, 2, 3, 4, 5 в соответствии с порядком, в котором они были записаны выше. Механическим схемам деформирования были присвоены условные значения уровней 0 и 1.

С применением схем, показанных на рис. 8, были проведены 24 опыта по формированию заготовок в соответствии с матрицей плана, приведенной в табл. 10. У формованных заготовок были определены плотности  $\gamma$ .

Таблица 10. План эксперимента в натуральном масштабе

| Номер опыта | Марка порошка | Удельная сила формования, МПа | Схема формования | Содержание стеарата цинка, % |
|-------------|---------------|-------------------------------|------------------|------------------------------|
| 1           | 2             | 3                             | 4                | 5                            |
| 1           | ПЖВ2.160.28   | 300                           | 0                | 0,5                          |
| 2           | ПЖРВ2.200.26  | 340                           | 0                | 1                            |
| 3           | ПЖРВ2.200.26  | 380                           | 0                | 0,5                          |
| 4           | ПЖВ2.160.28   | 420                           | 0                | 1                            |
| 5           | ПЖРВ2.200.26  | 420                           | 1                | 0,5                          |
| 6           | ПЖВ2.160.28   | 380                           | 1                | 1                            |
| 7           | ПЖВ2.160.28   | 340                           | 1                | 0,5                          |
| 8           | ПЖРВ2.200.26  | 300                           | 1                | 1                            |
| 9           | ПЖРВ3.200.26  | 300                           | 0                | 0,5                          |
| 10          | ПЖВ4.160.28   | 340                           | 0                | 1                            |
| 11          | ПЖВ4.160.28   | 380                           | 0                | 0,5                          |
| 12          | ПЖРВ3.200.26  | 420                           | 0                | 1                            |
| 13          | ПЖВ4.160.28   | 420                           | 1                | 0,5                          |
| 14          | ПЖРВ3.200.26  | 380                           | 1                | 1                            |
| 15          | ПЖРВ3.200.26  | 340                           | 1                | 0,5                          |
| 16          | ПЖВ4.160.28   | 300                           | 1                | 1                            |
| 17          | WPL-200       | 300                           | 0                | 0,5                          |
| 18          | ULTRAPAC-LE   | 340                           | 0                | 1                            |
| 19          | ULTRAPAC-LE   | 380                           | 0                | 0,5                          |
| 20          | WPL-200       | 420                           | 0                | 1                            |
| 21          | ULTRAPAC-LE   | 420                           | 1                | 0,5                          |
| 22          | WPL-200       | 380                           | 1                | 1                            |
| 23          | WPL-200       | 340                           | 1                | 0,5                          |
| 24          | ULTRAPAC-LE   | 300                           | 1                | 1                            |

Для обработки результатов эксперимента и расчета коэффициентов математической модели (27) совершен переход к кодированному масштабу, в котором матрица плана эксперимента симметрична и ортогональна.

Коэффициенты  $A_i$ , рассчитанные по формуле (13), следующие:

$$A_1 = -2,5; A_2 = -36; A_3 = -0,5; A_4 = -0,75$$

По формулам (15) и (17) определено:

$$a_1 = a_2 = 0, c_1 = -0,467; c_2 = -0,555.$$

По формулам (18) определено, что

$$d_1 = 0; d_2 = 0; e_1 = -0,808; e_2 = -0,911; n_1 = 0; n_2 = 0.$$

Выбор уровней  $x_i$ ,  $z_i$  и  $p_i$  приведен соответственно в табл. 11, 12 и 13.

Таблица 11. Выбор уровней для описания линейного влияния факторов

| $i$ | $X_i$ | $X_i + A_i$ | $k_i$ | $x_i$ |
|-----|-------|-------------|-------|-------|
| 1   | 0     | -2,5        | 2/5   | -1,0  |
|     | 1     | -1,5        |       | -0,6  |
|     | 2     | -0,5        |       | -0,2  |
|     | 3     | 0,5         |       | 0,2   |
|     | 4     | 1,5         |       | 0,6   |
| 2   | 5     | 2,5         | 1/6   | 1,0   |
|     | 30    | -6          |       | -1    |
|     | 34    | -2          |       | -1/3  |
|     | 38    | 2           |       | 1/3   |
| 3   | 42    | 6           | 2     | 1     |
|     | 0     | -0,5        |       | -1,0  |
| 4   | 1     | 0,5         | 4     | 1,0   |
|     | 0,5   | -1/4        |       | -1,0  |
|     | 1     | 1/4         |       | 1,0   |

Таким образом, формулы перехода от натуральных значений  $X_i$  к кодированным  $x_i$  и обратно следующие:

$$x_1 = \frac{2}{5}(X_1 - 2,5); x_2 = \frac{1}{6}(X_2 - 36); x_3 = 2(X_3 - 0,5); x_4 = 4(X_4 - 0,75).$$

Формулы перехода от  $x_i$  к  $z_i$  и обратно следующие:

$$z_1 = x_1^2 - 0,467; z_2 = 2,5(x_2^2 - 0,555).$$

Формулы перехода от  $x_i$  к  $p_i$  следующие:

$$p_1 = x_1^3 - 0,808x_1; \quad p_2 = x_2^2 - 0,911x_2.$$

Таблица 12. Выбор уровней  $z_i$

| $i$ | $x_i$ | $x_i + a_i x_i + c_i$ | $k_i''$ | $z_i$  |
|-----|-------|-----------------------|---------|--------|
| 1   | -1,0  | 0,533                 | 1       | 0,533  |
|     | -0,6  | -0,107                |         | -0,107 |
|     | -0,2  | -0,427                |         | -0,427 |
|     | 0,2   | -0,427                |         | -0,427 |
|     | 0,6   | -0,107                |         | -0,107 |
|     | 1,0   | 0,533                 |         | 0,533  |
| 2   | -1    | 0,44                  | 2,5     | 1      |
|     | -1/3  | -0,44                 |         | -1     |
|     | 1/3   | -0,44                 |         | -1     |
|     | 1     | 0,44                  |         | 1      |

Таблица 13. Выбор уровней  $p_i$

| $i$ | $x_i$ | $x_i^3 + d_i x_i^2 + e_i x_i + n_i$ | $k_i''$ | $p_i$  |
|-----|-------|-------------------------------------|---------|--------|
| 1   | -1,0  | -0,192                              | 1       | -0,192 |
|     | -0,6  | 0,269                               |         | 0,269  |
|     | -0,2  | 0,154                               |         | 0,154  |
|     | 0,2   | -0,154                              |         | -0,154 |
|     | 0,6   | -0,269                              |         | -0,269 |
|     | 1,0   | 0,192                               |         | 0,192  |
| 2   | -1    | -0,089                              | 1       | -0,089 |
|     | -1/3  | 0,267                               |         | 0,267  |
|     | 1/3   | -0,267                              |         | -0,267 |
|     | 1     | 0,089                               |         | 0,089  |

Функция  $q_i$  -четвертой степени от  $x_i$  :

$$q_i = k_i'' (x_i^4 + g_i x_i^3 + h_i x_i^2 + l_i x_i + m_i), \text{ где } k_i'', g_i, h_i, l_i, m_i = \text{const.}$$

Необходимо выполнение условий

$$\sum_{u=1}^N q_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N q_{i_u} x_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N q_{i_u} z_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N q_{i_u} p_{i_u} = 0,$$

$$\begin{cases} \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + q_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 + h_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 + l_i \sum_{u=1}^N x_{i_u} + Nm_i = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 + q_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + h_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 + l_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 + Nm_i \sum_{u=1}^N x_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 z_{i_u} + q_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 z_{i_u} + h_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 z_{i_u} + l_i \sum_{u=1}^N x_{i_u} z_{i_u} + Nm_i \sum_{u=1}^N z_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 p_{i_u} + q_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 p_{i_u} + h_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 p_{i_u} + l_i \sum_{u=1}^N x_{i_u} p_{i_u} + Nm_i \sum_{u=1}^N p_{i_u} = 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^N x_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N z_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N p_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{i_u} z_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{i_u} p_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 p_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 z_{i_u} = 0; \quad \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 p_{i_u} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + h_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 + Nm_i = 0, \\ g_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + l_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 z_{i_u} + h_i \sum_{u=1}^N x_{i_u} z_{i_u} = 0, \\ g_i \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 p_{i_u} = 0. \end{cases}$$

Определено, что  $g_i = 0$ ;  $l_i = 0$ ;  $h_i = -1.086$ ;  $m_i = 0.13$ .

Выбор уровней  $q_i$  приведен в табл. 14.

Таблица 14. Выбор уровней  $q_i$

| $i$ | $x_i$ | $x_i^4 + g_i x_i^3 + h_i x_i^2 + l_i x_i + m_i$ | $k_i^m$ | $q_i$  |
|-----|-------|-------------------------------------------------|---------|--------|
| 1   | -1,0  | 0,044                                           | 1       | 0,044  |
|     | -0,6  | -0,132                                          |         | -0,132 |
|     | -0,2  | 0,088                                           |         | 0,088  |
|     | 0,2   | 0,088                                           |         | 0,088  |
|     | -0,6  | -0,132                                          |         | -0,132 |
|     | 1,0   | 0,044                                           |         | 0,044  |

Формула перехода от  $x_i$  к  $q_i$  следующая:

$$q_i = x_i^4 - 1,086x_i^2 + 0,13.$$

Функция  $f_i$ -пятой степени от  $x_i$ :

$$f_i = k_i^{*n}(x_i^5 + a'x_i^4 + b'x_i^3 + c'x_i^2 + d'x_i + e'),$$

где  $k_i^{*n}, a', b', c', d', e' = \text{const}$ .

Требуется выполнение следующих условий:

$$\sum_{u=1}^N f_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N f_{i_u} x_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N f_{i_u} z_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N f_{i_u} p_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N f_{i_u} q_{i_u} = 0,$$

тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 + a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 + d' \sum_{u=1}^N x_{i_u} + Ne' = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^6 + a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 + d' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 + Ne' \sum_{u=1}^N x_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 z_{i_u} + a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 z_{i_u} + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 z_{i_u} + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 z_{i_u} + d' \sum_{u=1}^N x_{i_u} z_{i_u} + Ne' \sum_{u=1}^N z_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 p_{i_u} + a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 p_{i_u} + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 p_{i_u} + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 p_{i_u} + d' \sum_{u=1}^N x_{i_u} p_{i_u} + Ne' \sum_{u=1}^N p_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 q_{i_u} + a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 q_{i_u} + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 q_{i_u} + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 q_{i_u} + d' \sum_{u=1}^N x_{i_u} q_{i_u} + Ne' \sum_{u=1}^N q_{i_u} = 0. \end{array} \right.$$

Поскольку

$$\sum_{u=1}^N x_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N z_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N p_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N q_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u} p_{i_u} = 0;$$

$$\sum_{u=1}^N x_{i_u} z_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u} q_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 p_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 = 0;$$

$$\sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 z_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 q_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 p_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 = 0;$$

$$\sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 z_{i_u} = 0; \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 q_{i_u} = 0,$$

то

$$\begin{cases} a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 + Ne' = 0, \\ a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^6 + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 + d' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 = 0, \\ a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 z_{i_u} + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 z_{i_u} = 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{i_u}^5 p_{i_u} + b' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^3 p_{i_u} = 0, \\ a' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^4 q_{i_u} + c' \sum_{u=1}^N x_{i_u}^2 q_{i_u} = 0. \end{cases}$$

Определено, что  $d' = 0,294$ ;  $c' = 0$ ;  $a' = 0$ ;  $e' = 0$ ;  $b' = -1,289$ .

Формула перехода от  $x_1$  к  $f_1$ :

$$f_1 = x_1^5 - 1,289x_1^3 + 0,294x_1.$$

Матрица плана после перевода факторов в кодированный масштаб приведена в табл. 15.

Таблица 15. Матрица плана  $6 \times 4 \times 2^2 // 24$  в кодированном масштабе

| № оп. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z_1$  | $z_2$ | $p_1$  | $p_2$  | $q_1$  | $k_1$   |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6      | 7     | 8      | 9      | 10     | 11      |
| 1     | -1    | -1    | -1    | -1    | 0,533  | 1     | -0,192 | -0,089 | 0,044  | -0,0049 |
| 2     | -0,6  | -0,33 | -1    | 1     | -0,107 | -1    | 0,269  | 0,267  | -0,132 | 0,0244  |
| 3     | -0,6  | 0,33  | -1    | 1     | -0,107 | -1    | 0,269  | -0,267 | -0,132 | 0,0244  |
| 4     | -1    | 1     | -1    | 1     | 0,533  | 1     | -0,192 | 0,089  | 0,044  | -0,0049 |
| 5     | -0,6  | 1     | 1     | -1    | -0,107 | 1     | 0,269  | 0,089  | -0,132 | 0,0244  |
| 6     | -1    | 0,33  | 1     | 1     | 0,533  | -1    | -0,192 | -0,267 | 0,044  | -0,0049 |
| 7     | -1    | -0,33 | 1     | -1    | 0,533  | -1    | -0,192 | 0,267  | 0,044  | -0,0049 |
| 8     | -0,6  | -1    | 1     | 1     | -0,107 | 1     | 0,269  | -0,089 | -0,132 | 0,0244  |
| 9     | -0,2  | -1    | -1    | -1    | -0,427 | 1     | 0,154  | -0,089 | 0,088  | 0,0488  |
| 10    | 0,2   | -0,33 | -1    | 1     | -0,427 | -1    | -0,154 | 0,267  | 0,088  | 0,0488  |
| 11    | 0,2   | 0,33  | -1    | -1    | -0,427 | -1    | -0,154 | -0,267 | 0,088  | 0,0488  |
| 12    | -0,2  | 1     | -1    | 1     | -0,427 | 1     | 0,154  | 0,089  | 0,088  | 0,0488  |
| 13    | 0,2   | 1     | 1     | -1    | -0,427 | 1     | -0,154 | 0,089  | 0,088  | 0,0488  |
| 14    | -0,2  | 0,33  | 1     | 1     | -0,427 | -1    | 0,154  | -0,267 | 0,088  | -0,0488 |
| 15    | -0,2  | -0,33 | 1     | -1    | -0,427 | -1    | 0,154  | 0,267  | 0,088  | -0,0488 |
| 16    | 0,2   | -1    | 1     | 1     | -0,427 | 1     | -0,154 | -0,089 | 0,088  | 0,0488  |
| 17    | 0,6   | -1    | -1    | -1    | -0,107 | 1     | -0,269 | -0,089 | -0,132 | -0,0244 |
| 18    | 1     | -0,33 | -1    | 1     | 0,533  | -1    | 0,192  | 0,267  | 0,044  | 0,0049  |
| 19    | 1     | 0,33  | -1    | -1    | 0,533  | -1    | 0,192  | -0,267 | 0,044  | 0,0049  |
| 20    | 0,6   | 1     | -1    | 1     | -0,107 | 1     | -0,269 | 0,089  | -0,132 | -0,0244 |
| 21    | 1     | 1     | 1     | -1    | 0,533  | 1     | 0,192  | 0,089  | 0,044  | 0,0049  |
| 22    | 0,6   | 0,33  | 1     | 1     | -0,107 | -1    | -0,269 | -0,267 | -0,132 | -0,0244 |
| 23    | 0,6   | -0,33 | 1     | -1    | -0,107 | -1    | -0,269 | 0,267  | -0,132 | -0,0244 |
| 24    | 1     | -1    | 1     | 1     | 0,533  | 1     | 0,192  | -0,089 | 0,044  | 0,0049  |

Измеренные плотности заготовок в соответствии с номерами опытов, соответствующих номерам в табл. 14, 15, приведены в табл. 16.

Путем расчета коэффициентов математической модели (27) по формуле (9), используя значения факторов в кодированном масштабе, приведенные в табл. 15, и результаты опытов, приведенные в табл. 16, получена следующая математическая модель в кодированном масштабе:

$$\gamma \text{ [г/см}^3\text{]} = 6,45 - 0,0062 x_1 + 0,184 x_2 + 0,533 x_3 + 0,092 x_4 + 0,306 z_1 - 0,00542 z_2 + 0,11 p_1 - 0,061 p_2 - 0,479 q_1 - 4,351 k_1. \quad (28)$$

Таблица 16. Результаты измерений плотности деталей в соответствии с номерами опытов

|                                  |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Номер опыта                      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
| $\gamma \text{ [г/см}^3\text{]}$ | 5,7  | 5,77 | 5,8  | 6,4  | 7,15 | 7,25 | 7,05 | 6,9  |
| Номер опыта                      | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
| $\gamma \text{ [г/см}^3\text{]}$ | 5,8  | 5,65 | 5,65 | 6,34 | 6,5  | 7,15 | 6,75 | 6,4  |
| Номер опыта                      | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   |
| $\gamma \text{ [г/см}^3\text{]}$ | 5,65 | 6,0  | 6,05 | 6,2  | 7,15 | 7,3  | 7,05 | 7,15 |

Анализ построенной математической модели (28) будет проведен ниже, в п. 3.11, после изучения в части 2 данного издания сведений из математической статистики.

### 1.9. Построение несимметричных планов дробного факторного эксперимента

В п.п. 1.6 и 1.7 были рассмотрены планы полных факторных экспериментов (ПФЭ), в которых используются все возможные сочетания уровней варьирования факторов. При этом, несмотря на то что факторы варьировались на неодинаковом количестве уровней, составить планы было достаточно просто, а количество опытов равнялось произведению числа уровней, на котором варьировался один из факторов, на число уровней варьирования второго фактора.

При рассмотрении в п. 1.8 плана эксперимента  $6 \times 4 \times 2^2 // 24$  была использована  $1/4$ -реплика ПФЭ, который включал бы в себя 96 опытов. Чтобы выбрать из 96 строк именно те 24 строки, которые позволяют перестроить матрицу плана в кодированный масштаб для обеспечения ее ортогональности и симметрии и расчета коэффициентов математической модели по формуле (9), в п. 1.8 была заимствована матрица плана, которая приведена в каталоге В.З. Бродского [4, 9].

Однако указанный каталог имеет небольшой объем, и не для всех задач он позволяет подобрать подходящий план дробного факторного эксперимента (ДФЭ). В то же время в этом каталоге содержатся стандартные преобразования факторных планов, с использованием которых исследователь может составить требующийся ему рациональный план ДФЭ.

Преобразованиям подвергаются симметричные факторные планы, в которых факторы варьируются на одинаковом числе уровней. Их преобразовывают в несимметричные планы, в которых факторы варьируются на разном числе уровней.

В рассмотренном ниже исследовании варьируются пять факторов. Влияние первых трех ( $X_1, X_2, X_3$ ) ожидается линейным, влияние двух остальных – нелинейным. Поэтому первые три фактора варьируются на двух уровнях, два оставшиеся – на трех. Строится следующая модель:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i X_i + \sum_{i=4}^5 b_{ii} X_i^2. \quad (29)$$

Эта модель содержит восемь членов, коэффициенты перед которыми необходимо определить. Следовательно, число опытов должно быть не менее восьми, например, девять.

Тот план, который соответствует записанной модели и содержит девять опытов, обозначается  $2^3 \times 3^2 // 9$ .

Симметричный план ДФЭ приведен в табл. 17.

Из каталога [4, 9] взято следующее преобразование:

Преобразование 1

|   |       |
|---|-------|
| 0 | 0 0   |
| 1 | → 0 1 |
| 2 | 1 0   |

$\Psi_r$

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| 1а) | $3 \rightarrow 2^2 * * 0,67$ |
| 1б) | $3 \rightarrow 2 * 0,89$     |

С помощью преобразования 1а фактор  $F_1$  заменен на два двухуровневых фактора, а с помощью преобразования 1б фактор  $F_2$  заменен на  $F_3'$ :

|       |             |       |        |
|-------|-------------|-------|--------|
| $F_1$ | $F_1' F_2'$ | $F_2$ | $F_3'$ |
| 0     | 0 0         | 0     | 0      |
| 1     | → 0 1       | 1     | → 0    |
| 2     | 1 0         | 2     | 1      |

Факторы  $F_3$  и  $F_4$  оставлены без изменений:  $F_3 \rightarrow F_4'$  и  $F_4 \rightarrow F_5'$ . В результате получен план  $2^3 \times 3^2 // 9$  (табл. 18).

Таблица 17. Матрица плана  $3^4 // 9$ 

| № опыта | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2       | 0     | 1     | 0     | 2     | 2     |
| 3       | 0     | 2     | 0     | 1     | 1     |
| 4       | 0     | 0     | 1     | 2     | 1     |
| 5       | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |
| 6       | 0     | 2     | 1     | 0     | 2     |
| 7       | 0     | 0     | 2     | 1     | 2     |
| 8       | 0     | 1     | 2     | 0     | 1     |
| 9       | 0     | 2     | 2     | 2     | 0     |

Таблица 18. Преобразование плана  $3^4 // 9$  в план  $2^3 \times 3^2 // 9$ 

| Номер опыта | План $3^4 // 9$ |       |       |       | План $2^3 \times 3^2 // 9$ |        |        |        |        |
|-------------|-----------------|-------|-------|-------|----------------------------|--------|--------|--------|--------|
|             | $F_1$           | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_1'$                     | $F_2'$ | $F_3'$ | $F_4'$ | $F_5'$ |
| 1           | 0               | 0     | 0     | 0     | 0                          | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 2           | 1               | 0     | 2     | 2     | 0                          | 1      | 0      | 2      | 2      |
| 3           | 2               | 0     | 1     | 1     | 1                          | 0      | 0      | 1      | 1      |
| 4           | 0               | 1     | 2     | 1     | 0                          | 0      | 0      | 2      | 1      |
| 5           | 1               | 1     | 1     | 0     | 0                          | 1      | 0      | 1      | 0      |
| 6           | 2               | 1     | 0     | 2     | 1                          | 0      | 0      | 0      | 2      |
| 7           | 0               | 2     | 1     | 2     | 0                          | 0      | 1      | 1      | 2      |
| 8           | 1               | 2     | 0     | 1     | 0                          | 1      | 1      | 1      | 1      |
| 9           | 2               | 2     | 2     | 0     | 1                          | 0      | 1      | 1      | 0      |

После построения плана оценивают его близость к  $Q$ -оптимальному с помощью коэффициента эффективности преобразования  $\Psi$  [9]:

$$\Psi = \frac{k}{1 - n + \sum_{r=1}^n \frac{1 + S_r}{\Psi_r}}, \quad (30)$$

где  $k$  – число коэффициентов в модели, которую предполагается построить;

$n$  – число преобразований (включая тождественные преобразования), например,  $F_3 \rightarrow F_4$ ;  $F_4 \rightarrow F_5$ ;

$r$  – номер преобразования;

$S_r = (S_1 - 1) + (S_2 - 1) + \dots$ , где  $S_r$  – число уровней нового фактора, вводимого с помощью  $r$ -го преобразования;

$\Psi_r$  – коэффициент эффективности  $r$ -го преобразования (указан в каталоге в конце строки каждого преобразования) при тождественном преобразовании  $\Psi_r = 1$ .

План  $Q$ -оптимален в том случае, когда  $\Psi = 1$ .

В рассматриваемом примере  $k = 8$ ;  $n = 4$ ;  $S_1 = (2 - 1) + (2 - 1) = 2$ ;  
 $S_2 = 2 - 1 = 1$ ;  $S_3 = 1$ ;  $S_4 = 3 - 1 = 2$ ;  $\Psi_1 = 0,67$ ;  $\Psi_2 = 0,89$ ;  $\Psi_3 = 1$ ;  $\Psi_4 = 1$ ,

поэтому

$$\Psi = 8 / (1 - 4 + 3/0,67 + 2/0,89 + 3/1 + 3/1) = 0,83.$$

Упоминание о  $Q$ -оптимальности планов опережает изложение материала в данном издании.  $Q$ -оптимальные планы обеспечивают получение минимальной средней дисперсии предсказания значений выходного параметра в указанной области факторного пространства [9]. Рассмотрение дисперсий будет во второй части данного издания. На данном этапе изучения материала предлагается использовать формулу (30), приняв, что  $Q$ -оптимальные планы позволяют определять коэффициенты математических моделей с высокой достоверностью.

### 1.10. Построение несимметричного плана эксперимента и расчет коэффициентов математической модели

В рассматриваемом эксперименте, инженерное содержание которого будет приведено ниже, применен несимметричный план ДФЭ  $4 \times 3^2 \times 2^3 // 16$ .

Полный факторный эксперимент для такого плана включал бы в себя  $4 \times 3^2 \times 2^3 = 288$  опытов. Матрица указанного плана ДФЭ включает в себя всего лишь 16 строк, каждая из которых содержит указание: какие значения уровней факторов должны быть использованы в каждом из 16 опытов. Выбор из 288 опытов всего лишь 16 опытов должен быть наиболее рациональным.

Математическая модель плана  $4 \times 3^2 \times 2^3 // 16$  имеет следующий вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^6 b_i X_i + \sum_{i=1}^3 b_{ii} X_i^2 + b_{iii} X_i^3. \quad (31)$$

Поскольку в модели 11 членов, число опытов плана не может быть меньше 11. При плане в 16 опытов остаются степени свободы для введения членов, описывающих совместное влияние некоторых факторов.

План  $4 \times 3^2 \times 2^3 // 16$  строится путем преобразования симметричного плана  $4^5 // 16$ . Можно взять готовую матрицу плана  $4^5 // 16$  из каталога [4, 9]. Можно построить эту матрицу плана используя прием, описанный в п. 1.3. Матрица плана  $4^5 // 16$  представлена в табл. 19.

Преобразование плана  $4^5 // 16$  в план  $4 \times 3^2 \times 2^3 // 16$  может быть проведено различными путями. Рассмотрев несколько вариантов преобразований, выбирают тот, у которого значение коэффициента эффективности преобразования  $\Psi$  наибольшее.

Таблица 19. Матрица плана  $4^5 // 16$  в кодах  $F_i$

| № опыта | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | № опыта | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 9       | 0     | 3     | 3     | 2     | 3     |
| 2       | 2     | 0     | 2     | 1     | 3     | 10      | 2     | 3     | 1     | 3     | 0     |
| 3       | 3     | 0     | 3     | 3     | 1     | 11      | 3     | 3     | 0     | 1     | 2     |
| 4       | 1     | 0     | 1     | 2     | 2     | 12      | 1     | 3     | 2     | 0     | 1     |
| 5       | 0     | 2     | 2     | 3     | 2     | 13      | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 6       | 2     | 2     | 0     | 2     | 1     | 14      | 2     | 1     | 3     | 0     | 2     |
| 7       | 3     | 2     | 1     | 0     | 3     | 15      | 3     | 1     | 2     | 2     | 0     |
| 8       | 1     | 2     | 3     | 1     | 0     | 16      | 1     | 1     | 0     | 3     | 3     |

Из каталога [4, 9] взяты приведенные ниже преобразования.

Преобразование 2

|   |         |
|---|---------|
| 0 | 0 1 1   |
| 1 | → 1 0 1 |
| 2 | 1 1 0   |
| 3 | 0 0 0   |

|                         |     |          |
|-------------------------|-----|----------|
|                         |     | $\Psi_r$ |
| 2а) $3 \rightarrow 2^3$ | *** | 1        |
| 2б) $3 \rightarrow 2^2$ | **  | 1        |
| 2в) $3 \rightarrow 2$   | *   | 1        |

Преобразование 3

|   |       |
|---|-------|
| 0 | 0 0   |
| 1 | → 0 1 |
| 2 | 1 0   |
| 3 | 2 1   |

|                                |    |          |
|--------------------------------|----|----------|
|                                |    | $\Psi_r$ |
| 3а) $4 \rightarrow 3 \times 2$ | ** | 0,6      |
| 3б) $4 \rightarrow 3$          | *  | 0,9      |

Все три преобразования нарушают  $Q$ -оптимальности плана, поскольку указанное для каждого преобразования значение коэффициента  $\Psi_r$  равно 1.

Вариант преобразования А.

Первый четырехуровневый фактор плана  $4^5 // 16$  оставлен без изменения ( $S_r = 3, \Psi_r = 1$ ); второй и третий заменены на трехуровневые с помощью преобразования 3б ( $S_r = 2, \Psi_r = 0,9$ ); четвертый – на три двухуровневых с помощью преобразования 2а ( $S_r = 3, \Psi_r = 1$ ), столбец пятого фактора из матрицы плана

4<sup>5</sup> // 16 вычеркнут. Расчет коэффициента эффективности такого преобразования по формуле (29) с учетом того, что  $k=11$ ,  $n=4$  дает значение  $\Psi = 0,94$ .

#### Вариант преобразования Б.

Первый четырехуровневый фактор плана 4<sup>5</sup> // 16 оставлен без изменения ( $S_r=3$ ,  $\Psi_r=1$ ); второй заменен на один трехуровневый и один двухуровневый (4→3x2) с помощью преобразования 3а ( $S_r=3$ ,  $\Psi_r=0,6$ ), третий заменен на один трехуровневый с помощью преобразования 3б ( $S_r=2$ ,  $\Psi_r=0,9$ ), четвертый и пятый заменены на двухуровневые с помощью преобразования 2в ( $S_r=1$ ,  $\Psi_r=1$ ). Расчет коэффициента эффективности такого преобразования дает значение  $\Psi = 0,79$ .

Таким образом, вариант преобразования А эффективнее по сравнению с вариантом Б.

Преобразованная в соответствии с вариантом А матрица плана 4 x 3<sup>2</sup> x 2<sup>3</sup> // 16 в кодах  $F_i'$  представлена в табл. 20.

Таблица 20. Матрица плана 4 x 3<sup>2</sup> x 2<sup>3</sup> // 16 в кодах  $F_i'$

| № оп. | $F_1'$ | $F_2'$ | $F_3'$ | $F_4'$ | $F_5'$ | $F_6'$ | № оп. | $F_1'$ | $F_2'$ | $F_3'$ | $F_4'$ | $F_5'$ | $F_6'$ |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1     | 0      | 0      | 0      | 0      | 1      | 1      | 9     | 0      | 2      | 2      | 1      | 1      | 0      |
| 2     | 2      | 0      | 1      | 1      | 0      | 1      | 10    | 2      | 2      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 3     | 3      | 0      | 2      | 0      | 0      | 0      | 11    | 3      | 2      | 0      | 1      | 0      | 1      |
| 4     | 1      | 0      | 0      | 1      | 1      | 0      | 12    | 1      | 2      | 1      | 0      | 1      | 1      |
| 5     | 0      | 1      | 1      | 0      | 0      | 0      | 13    | 0      | 0      | 0      | 1      | 0      | 1      |
| 6     | 2      | 1      | 0      | 1      | 1      | 0      | 14    | 2      | 0      | 2      | 0      | 1      | 1      |
| 7     | 3      | 1      | 0      | 0      | 1      | 1      | 15    | 3      | 0      | 1      | 1      | 1      | 0      |
| 8     | 1      | 1      | 2      | 1      | 0      | 1      | 16    | 1      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |

Проведенные выше преобразования использованы для построения плана исследования, направленного на установление рационального сочетания значений факторов в исследуемом процессе горячей штамповки [9].

Требовалось получить возможно более мелкое зерно ( $y$ ) в штампованных заготовках из никелевого жаропрочного сплава ХН75ВМЮ в зависимости от типа штампа ( $X_1$ ), температуры штамповки ( $X_2$ ), температуры промежуточного рекристаллизационного отжига ( $X_3$ ), способа охлаждения после рекристаллизации ( $X_4$ ), температуры закалки ( $X_5$ ) и температуры старения ( $X_6$ ). Уровни варьирования факторов, а также поставленные им в соответствие уровни  $F_i'$ , приведены в табл. 21.

Таблица 21. Факторы и уровни их варьирования

| $i$ | Фактор                       | $X_i$   | $F_i$ | $i$ | Фактор                                   | $X_i$      | $F_i$ |
|-----|------------------------------|---------|-------|-----|------------------------------------------|------------|-------|
| 1   | Тип штампа                   | I       | 0     | 4   | Способ охлаждения после рекристаллизации | с печью    | 0     |
|     |                              | II      | 1     |     |                                          | на воздухе | 1     |
|     |                              | III     | 2     |     |                                          |            |       |
|     |                              | IV      | 3     |     |                                          |            |       |
| 2   | Температура штамповки        | 1100 °C | 0     | 5   | Температура закалки                      | 1200 °C    | 0     |
|     |                              | 1150 °C | 1     |     |                                          | 1250 °C    | 1     |
|     |                              | 1200 °C | 2     |     |                                          |            |       |
| 3   | Температура рекристаллизации | 1100 °C | 0     | 6   | Температура старения                     | 750 °C     | 0     |
|     |                              | 1140 °C | 1     |     |                                          | 950 °C     | 1     |
|     |                              | 1170 °C | 2     |     |                                          |            |       |

В соответствии с табл. 20 и 21 составлена матрица плана в натуральном масштабе (табл. 22). Наличие матрицы плана в натуральном масштабе позволило провести эксперимент. После проведения эксперимента для обработки данных совершен переход к кодированному масштабу, в котором матрица плана симметрична и ортогональна.

С использованием формул (12), (13), (14), (15), (17), (18) и (20) получены формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным и обратно:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2 (X_1 - 3/2); \\
 x_2 &= (1/50) (X_2 - 2275/2); \\
 x_3 &= (1/35) (X_3 - 2255/2); \\
 x_4 &= 2 (X_4 - 1/2); \\
 x_5 &= (1/25) (X_5 - 1225); \\
 x_6 &= (1/100) (X_6 - 850); \\
 z_1 &= (1/4) (x_1^2 - 5); \\
 z_2 &= x_2^2 - 0,4941 x_2 - 0,6875; \\
 z_3 &= x_3^2 - 0,928 x_3 - 0,7105; \\
 q_1 &= (1/8) (x_1^3 - 8,2 x_1).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Матрица плана в кодированном масштабе записана в табл. 23.

В последней колонке табл. 23 записаны величины, полученные в результате выполненных в соответствии с матрицей плана физических или компьютерных экспериментов.

Таблица 22. Матрица плана  $4 \times 3^2 \times 2^3 // 16$  в натуральном масштабе

| № опыта | $X_1$ | $X_2,$<br>°C | $X_3,$<br>°C | $X_4$ | $X_5,$<br>°C | $X_6,$<br>°C |
|---------|-------|--------------|--------------|-------|--------------|--------------|
| 1       | 0     | 1100         | 1100         | 0     | 1250         | 950          |
| 2       | 2     | 1100         | 1140         | 1     | 1200         | 950          |
| 3       | 3     | 1100         | 1170         | 0     | 1200         | 750          |
| 4       | 1     | 1100         | 1100         | 1     | 1250         | 750          |
| 5       | 0     | 1150         | 1140         | 0     | 1200         | 750          |
| 6       | 2     | 1150         | 1100         | 1     | 1250         | 750          |
| 7       | 3     | 1150         | 1100         | 0     | 1250         | 950          |
| 8       | 1     | 1150         | 1170         | 1     | 1200         | 950          |
| 9       | 0     | 1200         | 1170         | 1     | 1250         | 750          |
| 10      | 2     | 1200         | 1100         | 0     | 1200         | 750          |
| 11      | 3     | 1200         | 1100         | 1     | 1200         | 950          |
| 12      | 1     | 1200         | 1140         | 0     | 1250         | 950          |
| 13      | 0     | 1100         | 1100         | 1     | 1200         | 950          |
| 14      | 2     | 1100         | 1170         | 0     | 1250         | 950          |
| 15      | 3     | 1100         | 1140         | 1     | 1250         | 750          |
| 16      | 1     | 1100         | 1100         | 0     | 1200         | 750          |

Поскольку матрица плана в табл. 23 ортогональна, коэффициенты модели рассчитаны по формуле (9).

После расчета коэффициентов математическая модель (30) приняла следующий вид:

$$y = 0,79 - 0,009 x_1 + 0,042 x_2 - 0,005 x_3 - 0,078 x_4 + 0,035 x_5 - 0,003 x_6 + 0,01 z_1 + 0,119 z_2 - 0,006 z_3 - 0,002 q_1. \quad (33)$$

Для удобства пользователя модель (33) переведена в натуральный масштаб. Для этого в нее подставлены формулы (32) перехода от кодированных значений факторов к их натуральным значениям, раскрыты скобки и приведены подобные члены. После выполнения этих операций проведен контрольный расчет по моделям в кодированном и натуральном масштабах для значений факторов, соответствующих некоторым из опытов. Правильность перевода модели из кодированного масштаба в натуральный подтверждена совпадением между собой результатов указанного контрольного расчета.

Математическая модель в натуральном масштабе следующая:

$$y = 0,019 X_1^2 - 0,002 X_1^3 - 0,0574 X_1 + 0,0000796 X_2^2 - 0,18187 X_2 - 0,0000048979 X_3^2 + 0,010952 X_3 - 0,156 X_4 + 0,0014 X_5 - 0,00003 X_6 + 96,853. \quad (34)$$

Таблица 23. Матрица плана  $4 \times 3^2 \times 2^3 // 16$  в кодированном масштабе

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $q_1$ | $y$<br>[мм] |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| 1     | 1     | -3    | -0,75 | -0,79 | -1    | 1     | 1     | 1     | 0,18  | 0,14  | -0,3  | 0,94        |
| 2     | 1     | 1     | -0,75 | 0,36  | +1    | -1    | 1     | -1    | 0,18  | -0,69 | -0,9  | 0,66        |
| 3     | 1     | 3     | -0,75 | 1,21  | 1     | -1    | -1    | 1     | 0,18  | 0,4   | 0,3   | 0,80        |
| 4     | 1     | -1    | -0,75 | -0,79 | +1    | 1     | -1    | -1    | 0,18  | 0,14  | 0,9   | 0,76        |
| 5     | 1     | -3    | 0,25  | 0,36  | -1    | -1    | -1    | 1     | -0,72 | -0,69 | -0,3  | 0,80        |
| 6     | 1     | 1     | 0,25  | -0,79 | +1    | 1     | -1    | -1    | -0,72 | 0,14  | -0,9  | 0,64        |
| 7     | 1     | 3     | 0,25  | -0,79 | -1    | 1     | 1     | 1     | -0,72 | 0,140 | 0,3   | 0,82        |
| 8     | 1     | -1    | 0,25  | 1,21  | +1    | -1    | 1     | -1    | -0,72 | 0,4   | 0,9   | 0,60        |
| 9     | 1     | -3    | 1,25  | 1,21  | +1    | 1     | -1    | 1     | 0,36  | 0,4   | -0,3  | 0,89        |
| 10    | 1     | 1     | 1,25  | -0,79 | -1    | -1    | -1    | -1    | 0,36  | 0,14  | -0,9  | 0,92        |
| 11    | 1     | 3     | 1,25  | -0,79 | +1    | -1    | 1     | 1     | 0,36  | 0,14  | 0,3   | 0,76        |
| 12    | 1     | -1    | 1,25  | 0,36  | -1    | 1     | 1     | -1    | 0,36  | -0,69 | 0,9   | 0,97        |
| 13    | 1     | -3    | -0,75 | -0,79 | +1    | -1    | 1     | 1     | 0,18  | 0,14  | -0,3  | 0,68        |
| 14    | 1     | 1     | -0,75 | 1,21  | -1    | 1     | 1     | -1    | 0,18  | 0,4   | -0,9  | 0,87        |
| 15    | 1     | 3     | -0,75 | 0,36  | +1    | 1     | -1    | 1     | 0,18  | -0,69 | 0,3   | 0,71        |
| 16    | 1     | -1    | -0,75 | -0,79 | -1    | -1    | -1    | -1    | 0,18  | 0,14  | 0,9   | 0,82        |

На основании модели (34) сформулированы следующие выводы по результатам проведенного исследования.

Влияние типа штампа на достижение наиболее мелкого зерна в штампованных заготовках из сплава ХН75ВМЮ было оценено по аналогии с приведенным в табл. 17 исследованием влияния типа порошка на плотность детали. Наилучшим оказался IV тип штампа, немного хуже – III тип, заметно хуже – II тип и самый худший – I тип штампа. Температура штамповки и температура рекристаллизации в исследованных интервалах практически не влияют на размер зерна. Охлаждение после рекристаллизации следует проводить на воздухе, закалку проводить при температуре 1200 °С, старение – при температуре 950 °С.

### 1.11. Сокращение количества измерений и расчетов в методе исследования течения материала заготовок по искажениям координатных сеток

Анализ кинематического и напряженного состояний порошковой заготовки отличаются от анализа сплошной учетом сжимаемости материала.

С целью оценки погрешности, имеющей место при применении результатов исследования кинематического состояния при штамповке сплошных заготовок, для описания кинематического состояния при штамповке порошковых заготовок с пористостью 13...15% проведен следующий эксперимент.

Исследовано распределение в заготовке интенсивности скоростей деформаций в зависимости от следующих факторов: материал заготовки  $X_1$ , глубина внедрения пуансона  $X_2$  (отнесенная к его диаметру), исходная координата

по горизонтали точки на меридиональном сечении заготовки  $X_3$  (отнесенная к диаметру заготовки), исходная координата точки по вертикали  $X_4$  (отнесенная к диаметру заготовки) (табл. 24). Центр координат располагался на оси заготовки на верхнем ее торце (рис. 9).

Таблица 24. Матрица плана эксперимента  $2^2 \times 4^2 // 16$   
в натуральном масштабе

| № | $X_1$       | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | №  | $X_1$       | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|-------------|-------|-------|-------|----|-------------|-------|-------|-------|
| 1 | АВ          | 0,25  | 0,1   | 0,15  | 9  | АВ          | 0,25  | 0,4   | 0,45  |
| 2 | ПЖВ4.160.28 | 0,25  | 0,3   | 0,3   | 10 | ПЖВ4.160.28 | 0,25  | 0,2   | 0,6   |
| 3 | АВ          | 0,25  | 0,4   | 0,6   | 11 | АВ          | 0,25  | 0,1   | 0,3   |
| 4 | ПЖВ4.160.28 | 0,25  | 0,2   | 0,45  | 12 | ПЖВ4.160.28 | 0,25  | 0,3   | 0,15  |
| 5 | АВ          | 0,5   | 0,3   | 0,6   | 13 | АВ          | 0,5   | 0,2   | 0,3   |
| 6 | ПЖВ4.160.28 | 0,5   | 0,1   | 0,45  | 14 | ПЖВ4.160.28 | 0,5   | 0,4   | 0,15  |
| 7 | АВ          | 0,5   | 0,2   | 0,15  | 15 | АВ          | 0,5   | 0,3   | 0,45  |
| 8 | ПЖВ4.160.28 | 0,5   | 0,4   | 0,3   | 16 | ПЖВ4.160.28 | 0,5   | 0,1   | 0,6   |

Выдавливали разрезные цилиндрические образцы с начальными высотой и диаметром, равными 30 мм, из алюминиевого сплава АВ и изготовленные формованием и спеканием из железного порошка ПЖВ4.160.28. Диаметр полости матрицы составлял 30 мм, диаметр пуансона – 20 мм. На поверхность меридионального сечения образцов была нанесена квадратная делительная сетка с шагом 1,5 мм. Проведено выдавливание при поэтапном внедрении пуансона. Компоненты тензора скоростей деформаций определялись по искаженной сетке на основании методики, изложенной в работе [11]. На основании определенных компонентов тензора скоростей рассчитывались значения интенсивности скоростей деформаций.

Отметим, что методика обработки экспериментальных данных, изложенная в работе [11], предполагает измерение и расчет искажений каждой ячейки делительной сетки. В описываемом в данной работе исследовании измерялись искажения только в выбранных по плану эксперимента ячейках, которые отмечены на рис. 9 цифрами, соответствующими номерам опытов в матрице плана в табл. 24. Распределение ячеек делительной сетки, в которых рассчитывали интенсивности скоростей деформаций, показано на рис. 9.

Принята следующая математическая модель, коэффициенты которой определяли в результате эксперимента:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i X_i + \sum_{i=3}^4 b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=3}^4 b_{iii} X_i^3. \quad (35)$$

Для обработки данных эксперимента сделан переход к кодированному масштабу. Модель в кодированных обозначениях факторов имеет следующий вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i x_i + \sum_{i=3}^4 b_{ii} z_i + \sum_{i=3}^4 b_{iii} q_i, \quad (36)$$

где  $x_i$  – линейная функция от  $X_i$ ;  $z_i$  – квадратичная функция от  $X_i$ ;  $q_i$  – кубическая функция от  $X_i$ .

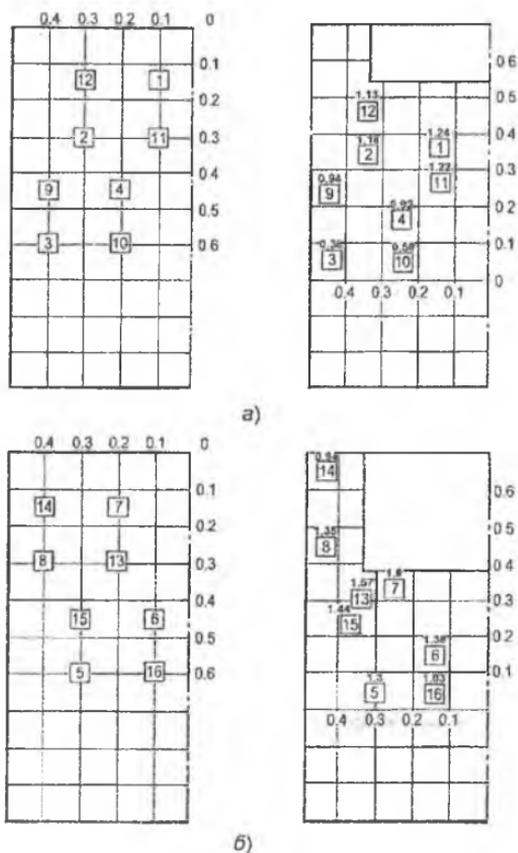


Рис. 9. Расположение контрольных ячеек делительной сетки и их перемещения:  
 а – глубина внедрения пуансона равна 1/4 его диаметра;  
 б – глубина внедрения пуансона равна 1/2 его диаметра

Переход от натуральных значений факторов к кодированным и обратно осуществляется по следующим формулам:

$$x_1 = 2(X_1 - 0,5); x_2 = 8(X_2 - 3,75); x_3 = 6,66(X_3 - 0,25); x_4 = 4(X_4 - 0,375);$$

$$z_1 = x_1^2 - 0,555; z_4 = 1,11(x_4^2 - 0,45); q_3 = x_3^3 - 0,911; q_4 = 1,11(x_4^3 - 0,738).$$

Эти формулы определены из условия получения ортогональной матрицы плана эксперимента в кодированном масштабе (табл. 25).

Таблица 25. Матрица плана в кодированном масштабе и результаты эксперимента

| №  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$  | $x_4$ | $z_3$  | $z_4$ | $q_3$  | $q_4$  | Коор точек<br>после вы-<br>давливания |      | $\xi_i$ |
|----|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|---------------------------------------|------|---------|
|    |       |       |        |       |        |       |        |        | $r$                                   | $z$  |         |
|    |       |       |        |       |        |       |        |        |                                       |      |         |
| 2  | 1     | -1    | 0,333  | 0,3   | -0,445 | -0,4  | -0,266 | 0,216  | 0,32                                  | 0,32 | 1,18    |
| 3  | -1    | -1    | 1      | 0,9   | 0,445  | 0,4   | 0,089  | 0,072  | 0,06                                  | 0,06 | 0,38    |
| 4  | 1     | -1    | -0,333 | -0,3  | -0,445 | -0,4  | 0,266  | -0,216 | 0,16                                  | 0,16 | 0,92    |
| 5  | -1    | 1     | 0,333  | 0,9   | -0,445 | 0,4   | -0,266 | 0,072  | 0,07                                  | 0,07 | 1,30    |
| 6  | 1     | 1     | -1     | -0,3  | 0,445  | -0,4  | -0,089 | -0,216 | 0,11                                  | 0,11 | 1,36    |
| 7  | -1    | 1     | -0,333 | -0,9  | -0,445 | 0,4   | 0,266  | -0,072 | 0,31                                  | 0,31 | 1,80    |
| 8  | 1     | 1     | 1      | 0,3   | 0,445  | -0,4  | 0,089  | 0,216  | 0,44                                  | 0,44 | 1,35    |
| 9  | -1    | -1    | 1      | 0,3   | 0,445  | -0,4  | 0,089  | -0,216 | 0,21                                  | 0,21 | 0,94    |
| 10 | 1     | -1    | -0,333 | 0,9   | -0,445 | 0,4   | 0,266  | 0,072  | 0,05                                  | 0,05 | 0,59    |
| 11 | -1    | -1    | -1     | -0,3  | 0,445  | -0,4  | -0,089 | 0,216  | 0,29                                  | 0,29 | 1,22    |
| 12 | 1     | -1    | 0,333  | -0,9  | -0,445 | 0,4   | -0,266 | -0,072 | 0,46                                  | 0,46 | 1,13    |
| 13 | -1    | 1     | -0,333 | -0,3  | -0,445 | -0,4  | 0,266  | 0,216  | 0,30                                  | 0,30 | 1,58    |
| 14 | 1     | 1     | 1      | -0,9  | 0,445  | 0,4   | 0,089  | -0,072 | 0,62                                  | 0,62 | 0,94    |
| 15 | -1    | 1     | 0,333  | 0,3   | -0,445 | -0,4  | -0,266 | -0,216 | 0,23                                  | 0,23 | 1,44    |
| 16 | 1     | 1     | -1     | 0,9   | 0,445  | 0,4   | -0,089 | 0,072  | 0,03                                  | 0,03 | 1,03    |

Поскольку матрица плана эксперимента в кодированном масштабе ортогональна, коэффициенты модели (36) рассчитаны по формуле (9).

Получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 1,15 - 0,07x_1 + 0,2x_2 - 0,134x_3 + 0,233x_4 - 0,2z_3 - 0,246z_4 - 0,24q_3 + 0,236q_4. \quad (37)$$

После перехода к натуральным значениям факторов уравнение (37) приняло следующий вид:

$$\xi_i = 0,414 - 0,14X_1 + 1,6X_2 - 8,31X_3 + 8,66X_4 + 44,4X_3^2 - 23,3X_4^2 - 71,1X_3^3 + 16,8X_4^3. \quad (38)$$

Более удобной, чем формула (38), при расчете технологических процессов выдавливания является формула, позволяющая рассчитать интенсивность деформации в зависимости от координат точки детали после выдавливания, которые для примененного в исследовании плана записаны в табл. 25. Для этих координат уравнения (37) и (38) преобразуются соответственно в следующие уравнения:

$$y = 1,15 - 0,07x_1 + 0,2x_2 - 0,047x_3 + 0,196x_4 - 0,036z_3 - 0,165z_4 - 0,029q_3 + 0,133q_4; \quad (39)$$

$$\xi_i = 0,475 - 0,14X_1 + 16h + 1,44r + 3,96z + 14,1r^2 + 3,79z^2 - 38,9r^3 - 17,5z^3. \quad (40)$$

В уравнениях (38) и (40)  $X_1 = 0$  при выдавливании несжимаемой заготовки,  $X_1 = 1$ , если заготовка имеет пористость 13...15%.

Анализ моделей (38) и (40) показывает, что сжимаемость заготовки (член, содержащий  $X_1$ ) оказывает наименьшее влияние, по сравнению с другими членами, на величину интенсивности скоростей деформаций в различных точках детали. Сопоставление значения коэффициента перед  $X_1$  со средним арифметическим значением интенсивности скоростей деформаций в исследованных контрольных ячейках делительной сетки деталей показывает, что ошибка при неучете сжимаемости заготовки в расчетах интенсивности скоростей деформаций при выдавливании не превышает 12%.

Заметим, что выше описано исследование начальной стадии выдавливания стакана, когда глубина полости составляла 0,25-0,5 её диаметра. При выдавливании более глубоких полостей резко снижается точность замеров искаженной координатной сетки на меридиональном сечении заготовок.

В то же время, по мере увеличения глубины полости, плотность выдавливаемой заготовки возрастает. При холодном выдавливании стаканов из спеченных заготовок с исходной пористостью 13...15% средняя плотность выдавленных стаканов 97...98%, а плотность в донной части, т.е. в очаге пластической деформации на заключительной стадии выдавливания, близка к 100%.

Результаты представленного исследования и приведенные комментарии к нему позволили рекомендовать результаты исследования кинематического состояния при штамповке сплошных заготовок в инженерных расчетах процессов штамповки деталей с небольшой пористостью. Это позволило также допустить использование условия несжимаемости при выборе кинематических функций для описания скоростей течения материала заготовки.

## 1.12. Планирование экстремальных экспериментов

В технологических исследованиях, когда ставится цель отыскания экстремальных условий проведения процесса, число опытов может быть сокращено по сравнению с числом опытов в рассмотренных выше исследованиях описательного характера.

В данном разделе рассмотрена задача отыскания максимального коэффициента вытяжки стаканчика из листовой заготовки, решаемая с использованием метода Бокса-Уилсона. Схема операции вытяжки приведена на рис. 10.

Коэффициент вытяжки  $k = D/d$ , где  $D$  – диаметр исходной заготовки,  $d$  – диаметр вытянутого из этой заготовки стаканчика. Величина коэффициента вытяжки ограничена разрушением заготовки в тех случаях, когда пытаются произвести слишком большое формоизменение за один переход.

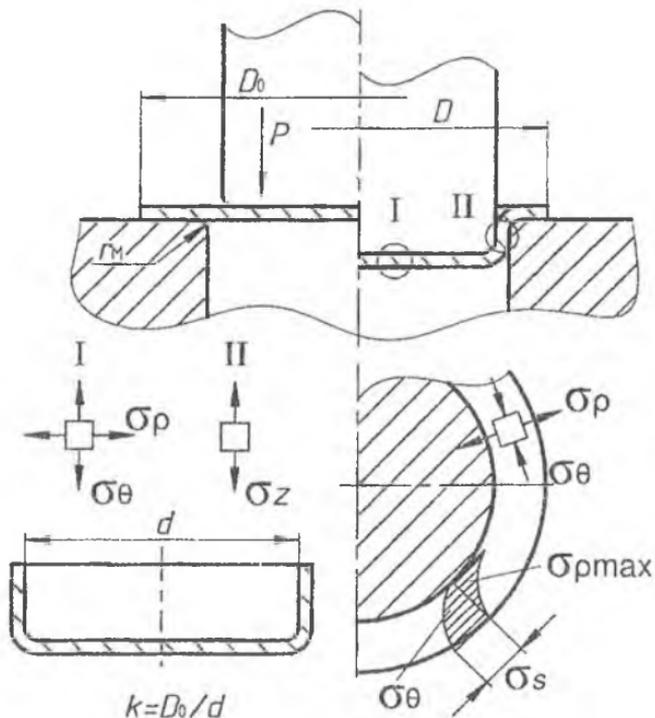


Рис. 10. Схема операции вытяжки листовой заготовки:  
 1 – матрица; 2 – заготовка; 3 – прижим; 4 – пуансон

Метод планирования эксперимента Бокса-Уилсона включает в себя построение линейной математической модели исследуемой операции в виде простейшего уравнения (1), приведенного во ВВЕДЕНИИ к данному учебнику. Далее – определение по величинам коэффициентов модели направления на предполагаемый экстремум и проведение в направлении к предполагаемому экстремуму «мысленных опытов», результаты которых рассчитываются с использованием построенной линейной модели. Чтобы линейная модель адекватно отражала влияние факторов, интервалы варьирования факторов задают небольшими (см. рис. 2).

В планировании экстремальных экспериментов распространен термин «поверхность отклика». Эта поверхность представляет собой множество точек, образуемых выходным параметром  $y$  (см. рис. 1), в зависимости от сочетаний уровней варьируемых факторов.

Поверхность отклика в эксперименте с двумя факторами в виде изолиний представлена на рис. 11.

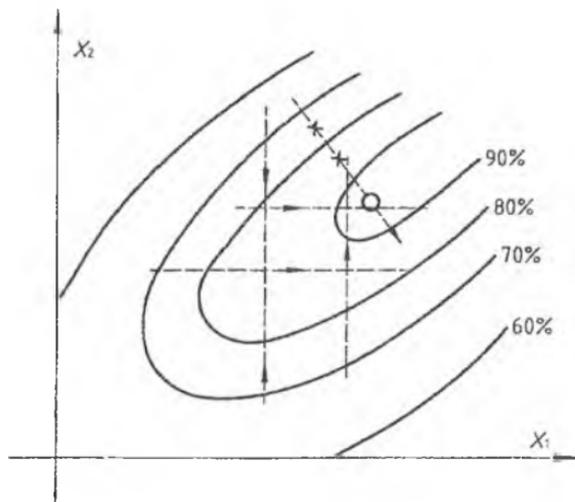


Рис. 11. Поверхность отклика в виде изолиний в эксперименте с двумя факторами

При реальном экспериментировании поверхность отклика в виде изолиний отсутствует и экспериментатор имеет перед собой только свободное пространство в координатах факторов.

В этом эксперименте в результате начальной серии опытов получена модель вида  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ . Оценками составляющих градиента движения к экстремуму являются коэффициенты полинома. Для движения по градиенту изменяют факторы пропорционально величинам коэффициентов. Такая процедура называется крутым восхождением по поверхности отклика.

При недостаточности одного крутого восхождения вблизи предполагаемого экстремума выходного параметра ставят новую небольшую серию опытов и находят новое направление для продолжения движения по поверхности отклика. Такой пошаговый принцип продолжается до тех пор, пока исследователь не попадет в почти стационарную область величин выходного параметра.

Для сравнения на рис. 11 пунктиром показано движение по поверхности отклика при однофакторном эксперименте. При этом сначала фиксируют один фактор и изменяют другой, а затем изменяют первый фактор при зафиксированном втором. Этот цикл переменного движения повторяется много раз – получается своеобразное блуждание в пространстве, заданном координатами факторов, которое усложняется с ростом числа факторов.

При движении по градиенту факторы изменяют с определенным шагом. Шаги в изменении значений факторов рассчитывают в натуральном масштабе. Для этого вначале определяют произведения коэффициентов на соответствующие интервалы варьирования факторов, т.е.  $b_i\Delta X_i$ , а затем уже назначают шаги пропорционально этим произведениям.

В качестве практической задачи устанавливается предельная величина коэффициента вытяжки ( $k$ ), радиуса скругления кромки матрицы ( $r_M$ ) и скоро-

сти деформирования ( $V$ ) на величину напряжения  $\sigma_{p \max}$  во фланце заготовки. При этом величина  $\sigma_{p \max}$ , действующая на кромке матрицы, равна величине  $\sigma_z$  в стенке вытягиваемого стакана (см. рис. 10).

Напряжение  $\sigma_z$  рассчитывается как результат деления деформирующей силы на площадь поперечного сечения стенки вытягиваемого стаканчика. Деформирующая сила определяется с помощью силоизмерителя испытательной машины, на которой производится вытяжка.

Поскольку целью исследования является нахождение экстремума и будет применен метод Бокса-Уилсона для крутого восхождения по поверхности отклика, интервалы варьирования факторов в эксперименте для построения исходной модели выбраны небольшими. Это позволило влияние  $k$ ,  $r_m$  и  $V$  на  $\sigma_{p \max}$  принять линейным на некотором участке области результатов эксперимента.

Строится модель следующего вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (41)$$

Для определения коэффициентов этой модели использован план дробного факторного эксперимента  $2^{3-1}$ , включающий в себя 4 опыта. Матрица плана эксперимента приведена в табл. 26.

Единицы перед значениями факторов, равными +1 или -1, опущены и оставлены только знаки.

Таблица 26. Матрица плана исходного эксперимента

| № опыта | $x_1$<br>( $k$ ) | $x_2$<br>( $r_m$ ) | $x_3$<br>( $V$ ) | $y$ ( $\sigma_{p \max}$ )<br>[МПа] |
|---------|------------------|--------------------|------------------|------------------------------------|
| 1       | -                | -                  | -                | 189                                |
| 2       | +                | -                  | +                | 236                                |
| 3       | -                | +                  | +                | 167                                |
| 4       | +                | +                  | -                | 223                                |

В этой матрице плана за каждым знаком минус или плюс в столбцах факторов стоит единица. Однако для упрощения записи единицы опущены.

Значения  $\sigma_{p \max}$ , определенные описанным выше способом, записаны в правом крайнем столбце табл. 26.

Принятые в эксперименте основные уровни факторов ( $X_{i0}$ ), интервалы варьирования факторов ( $\Delta X_i$ ) и значения факторов в натуральном масштабе, соответствующие приведенным в табл. 26 кодам, записаны в табл. 27.

Таблица 27. Уровни варьирования факторов

| Факторы      | $x_1$ ( $k$ ) | $x_2$ ( $r_m$ ) [мм] | $x_3$ ( $V$ ) [мм/с] |
|--------------|---------------|----------------------|----------------------|
| $X_{i0}$     | 1,3           | 3                    | 0,5                  |
| $\Delta X_i$ | 0,1           | 1                    | 0,2                  |
| $x_i = 1$    | 1,4           | 4                    | 0,7                  |
| $x_i = -1$   | 1,2           | 2                    | 0,3                  |

Кодированные значения факторов связаны с натуральными соотношениями, определяемыми из формулы:

$$x_i = (X_i - X_{i0}) / \Delta X_i. \quad (42)$$

Формула (42) дает те же результаты, что и формула (12).

В данном примере  $x_1 = (X_1 - 1,3) / 0,1$ ;  $x_2 = (X_2 - 3) / 1$ ;  $x_3 = (X_3 - 0,5) / 0,2$ .

После реализации опытов по плану, заданному табл. 26, рассчитаны коэффициенты модели (41). При двухуровневом планировании для подсчета  $b_i$  значениям в столбце  $y$  приписаны знаки столбца  $x_i$ , соответствующего подсчитываемому коэффициенту, просуммированы значения  $y$  с этими знаками и сумма разделена на число опытов матрицы плана. В результате получено:  $b_0 = 203,75$ ;  $b_1 = 25,75$ ;  $b_2 = -8,75$ ;  $b_3 = -2,25$ .

Математическая модель (42) приняла вид:

$$y = 203,75 + 25,75 x_1 - 8,75 x_2 - 2,25 x_3. \quad (43)$$

Модель (43) использована при проведении «мысленных опытов». При проведении таких опытов движение в направлении градиента начато из центра плана (от  $X_{i0}$ ). Исходной является точка с координатами в натуральном масштабе:  $X_1 = 1,3$ ;  $X_2 = 3$ ;  $X_3 = 0,5$ .

Соотношения, определяющие градиент крутого восхождения по поверхности отклика в направлении экстремума выходного параметра, рассчитаны умножением коэффициента уравнения (43) на величину интервала варьирования соответствующего этому коэффициенту фактора (см. табл. 27):  $b_1 \Delta X_1 = 2,6$ ;  $b_2 \Delta X_2 = -8,75$ ;  $b_3 \Delta X_3 = -0,45$ .

«Мысленные опыты» проведены, основываясь на следующем логическом анализе операции (см. рис. 12) и модели (43). С возрастанием коэффициента вытяжки  $k$  величина  $\sigma_{p \max}$  возрастает. Разрушение заготовки произойдет тогда, когда  $\sigma_{p \max}$  достигнет предела прочности материала  $\sigma_B$ . Для стали, из которой изготовлены примененные в эксперименте заготовки,  $\sigma_B = 310$  МПа.

Значение  $X_1(k)$ , при котором величина  $\sigma_{p \max}$  достигнет величины  $\sigma_B$ , является искомым максимальным. Каковы при этом будут значения факторов  $X_2$  и  $X_3$ ?

Поскольку целесообразно, чтобы  $\sigma_{p \max}$  достигло  $\sigma_B$  при как можно большем значении  $k$ , надо изменять слагаемые  $b_2 X_2$  и  $b_3 X_3$  в направлении уменьшения  $\sigma_{p \max}$ , а потом, когда  $\sigma_{p \max}$  станет равным  $\sigma_B$ , зафиксировать достигнутые при этом значения  $X_2$  и  $X_3$ . Поскольку  $b_2$  и  $b_3$  имеют отрицательные значения, факторы  $X_2$  и  $X_3$  целесообразно увеличивать. Таким образом, увеличению подлежат все три фактора:  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Увеличивают их одновременно на величины, пропорциональные произведениям  $b_1 \Delta X_1$ ,  $b_2 \Delta X_2$ ,  $b_3 \Delta X_3$ .

При прибавлении этих произведений к основным уровням факторов получено:  $X_1 = 1,3 + 2,6 = 3,9$ ;  $X_2 = 3 + 8,75 = 11,75$ ;  $X_3 = 0,5 + 0,45 = 0,95$ .

По формулам (43) полученные значения факторов переведены в кодированный масштаб:  $x_1 = 26$ ;  $x_2 = 8,75$ ;  $x_3 = 2,25$ . По модели (43) посчитана соот-

являющаяся этим значениям факторов величина  $y$ . Получено 785,19 МПа, что значительно превышает предел прочности заготовки, равный 310 МПа. Следовательно, прибавление к основным уровням факторов полных значений  $b$ ,  $\Delta X_i$  является слишком крупным шагом движения по поверхности отклика.

При уменьшении первоначального шага в 20 раз для  $X_1$  уменьшенный шаг составил 0,13, для  $X_2$  – 0,44, для  $X_3$  – 0,022. При движении с указанным шагом получены результаты, приведенные в табл. 28.

Таблица 28. Значения факторов и функции отклика  
в «мысленных опытах»

| № опыта | $X_1$ | $X_2$ , мм | $X_3$ , мм/с | $y$ , МПа |
|---------|-------|------------|--------------|-----------|
| 1       | 1,43  | 3,44       | 0,522        | 233       |
| 2       | 1,56  | 3,88       | 0,544        | 262       |
| 3       | 1,69  | 4,32       | 0,566        | 292       |
| 4       | 1,82  | 4,76       | 0,588        | 322       |

Поскольку  $y$  не может превышать 310 МПа, экстремум находится между 3-м и 4-м опытами. В данной задаче за экстремум приняты средние значения факторов между 3-м и 4-м опытами:  $X_1 = 1,75$ ;  $X_2 = 4,5$ ;  $X_3 = 0,58$ .

Таким образом, в результате движения к оптимуму по поверхности отклика установлено, что может быть достигнут коэффициент вытяжки, равный 1,75 при использовании матрицы, имеющей радиус скругления кромки, равный 4,5 мм, и проведении вытяжки со скоростью деформирования, равной 0,58 мм/с.

### 1.13. Оптимизация по нескольким выходным переменным

Экспериментально изучалось как управление параметрами процесса штамповки выдавливанием позволяет обеспечить заданный комплекс механических характеристик изделия, включающий в себя одновременно высокие прочность и пластичность. При этом удельная сила на пуансоне, выдавливающим полость изделия в виде стакана, не должна превышать 2500 МПа, поскольку это наибольшее допустимое значение, при котором процесс холодной штамповки выдавливанием бывает экономически целесообразным.

Исследована зависимость удельной силы холодного выдавливания стаканов от твердости исходной заготовки из углеродистой стали и степени ее обжатия при выдавливании, рассчитываемой по формуле:

$$[F_{\text{заг}} - (F_{\text{заг}} - F_{\text{пол}})] / F_{\text{заг}} = d^2 / D^2, \quad (44)$$

где  $F_{\text{заг}}$  – площадь поперечного сечения заготовки;  
 $F_{\text{пол}}$  – площадь поперечного сечения выдавленной полости стакана;  
 $D$  – внешний диаметр стакана, равный диаметру заготовки;  
 $d$  – внутренний диаметр стакана.

Фотографии исходной заготовки и выдавленного из нее стакана приведены на рис. 12. Стакан на фотографии имеет наружный диаметр 53,3 мм.

В исследовании в результате многофакторного эксперимента строили математическую модель вида:

$$y_1 = b_0 + b_1 HB + b_2 CO + b_{11} HB^2 + b_{12} HB \cdot CO. \quad (45)$$

Матрица плана полного факторного эксперимента приведена в табл. 29.

Таблица 29. Матрица плана эксперимента

| Номер опыта | <i>HB</i> | <i>CO</i> , % | <i>q</i> , МПа |
|-------------|-----------|---------------|----------------|
| 1           | 105       | 44,5          | 1900           |
| 2           | 135       | 44,5          | 2000           |
| 3           | 165       | 44,5          | 2400           |
| 4           | 105       | 56,5          | 2000           |
| 5           | 135       | 56,5          | 2200           |
| 6           | 165       | 56,5          | 2500           |

В табл. 29 видно, что твердость исходной заготовки варьировали на трех уровнях, а степень обжата (*CO*) – на двух уровнях. Также видно, какие значения принимали факторы при их варьировании.

В правом столбце табл. 29 приведены измеренные в каждом опыте значения удельной силы выдавливания стакана, которая определяется делением силы выдавливания на площадь поперечного сечения пуансона, которая равна площади поперечного сечения выдавленной полости.

Отметим большую величину удельной силы холодного выдавливания. Величина 2500 МПа считается предельно допустимой для пуансонов, изготовленных из быстрорежущих сталей: P9, P18, P6M5. Для пуансонов из сталей X12Ф1, X12М предельно допустимой удельной силой холодного выдавливания считается величина 2200 МПа.

После расчета коэффициентов, оценки их значимости и исключения члена с коэффициентом, значимость которого не подтвердилась, математическая модель (45) приняла следующий вид:

$$q \text{ [МПа]} = 0,11 HB^2 - 24 HB + 11,4 CO + 2782. \quad (46)$$

Расчитанные по модели (46) значения удельной силы холодного выдавливания стаканов из различных сталей расходятся с результатами, измеренными в экспериментах, не более чем на 5 %.

Осуществлен выбор параметров технологического процесса холодного выдавливания: марки углеродистой стали для исходной заготовки, наличия отжига заготовки, степени обжата заготовки при выдавливании из нее стакана. Выбираемые параметры технологического процесса должны обеспечить получение детали с заданным комплексом механических характеристик:  $\sigma_T \geq 700$  МПа;  $\sigma_B \geq 750$  МПа;  $\delta \geq 5$  %;  $\psi \geq 40$  %;  $KC \geq 500$  кДж/м<sup>2</sup>;  $HB \geq 220$ . Как видно,

комплекс механических характеристик сочетает в себе высокие характеристики прочности и пластичности. Помимо этого, поставлено условие, что величина удельной силы выдавливания  $q \leq 2500$  МПа.

Для оценки соответствия механических характеристик и удельной силы выдавливания деталей заданным значениям была использована функция желательности [2, 9]. Эта функция  $d$  записывается в виде:

$$d = \exp[-\exp(-y)], \quad (47)$$

где  $y$  – значение условного аргумента.

Исследователь на основании заданных требований и своего практического опыта ставит значения исследуемых параметров в соответствие со значениями аргумента  $y$ . При этом значению  $y = 0$  соответствует минимально допустимое значение каждого исследуемого параметра.

В результате такой расстановки для исследуемых механических характеристик и удельной силы выдавливания была составлена табл. 30.

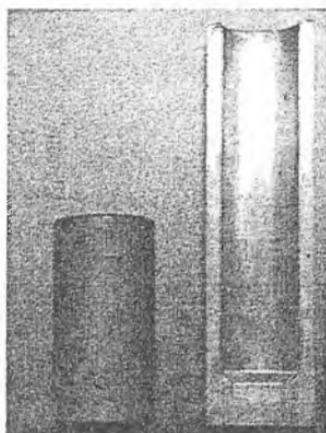


Рис. 12. Фотографии заготовки и выдавленного из нее стакана

Таблица 30. Соответствие значений исследуемых параметров и аргумента  $y$

| $y$ | $\sigma_T$ , МПа | $\sigma_B$ , МПа | $\delta$ , % | $\psi$ , % | КС, кДж/м <sup>2</sup> | НВ  | $q$ , МПа |
|-----|------------------|------------------|--------------|------------|------------------------|-----|-----------|
| 0   | 700              | 750              | 5            | 40         | 500                    | 220 | 2500      |
| 1   | 800              | 850              | 6,5          | 50         | 600                    | 235 | 2000      |
| 2   | 900              | 950              | 8            | 60         | 700                    | 250 | 1500      |
| 3   | 1000             | 1050             | 9,5          | 70         | 800                    | 265 | 1000      |
| 4   | 1100             | 1150             | 11           | 80         | 900                    | 280 | 500       |

Наличие табл. 30 и формулы (47) позволяет для каждого полученного при проведении эксперимента значения исследуемого параметра (предела

прочности, ударной вязкости, удельной силы выдавливания и т.п.) посчитать желательность получения такого значения параметра ( $d\sigma_T$ ,  $d_{КС}$ ,  $d_q$  и т.п.).

После подсчета желательностей для значений каждого из исследуемых параметров в данном опыте подсчитывается обобщенная желательность  $D$  значений всех параметров опыта. Расчет обобщенной желательности осуществляется как произведение частных желательностей значений каждого параметра в данном опыте. Это произведение возводится в степень  $1/g$ , где  $g$  – количество исследуемых параметров. В данном исследовании их 7.

Для обобщенной желательности построена математическая модель вида:

$$y_2 = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \quad (48)$$

где  $X_1$  – процентное содержание углерода в стали;  $X_2$  – наличие отжига заготовки;  $X_2 = -1$  соответствует выдавливанию отожженной заготовки;  $X_2 = +1$  соответствует выдавливанию не отожженной заготовки;  $X_3$  – степень обжатия заготовки при выдавливании.

Коэффициенты модели (48) определены по результатам дробного факторного эксперимента  $2^{3-1}$ , матрица плана которого приведена в табл. 31. В этой таблице видно, какие значения принимали исследуемые 3 фактора при их варьировании.

Углерод в количестве 0,14% содержали заготовки из стали Ст3пс (ГОСТ380-2005), а углерод в количестве 0,44 % – заготовки из стали 45 (ГОСТ 1050-88).

Заготовки из стали Ст3пс выдавливали как без предварительного отжига, так и с отжигом по режиму: нагрев до 870...890 °С, выдержка 1 ч, охлаждение на воздухе, последующий нагрев до 680...700 °С, выдержка 4 ч, охлаждение с печью. Заготовки из стали 45 (приведенные на рис. 12) выдавливали как без предварительного отжига, так и с маятниковым отжигом: нагрев до 760...780 °С, выдержка 1 ч, охлаждение с печью до 650...670 °С, выдержка 1 ч – 4 цикла, охлаждение с печью.

Справа от матрицы плана эксперимента в табл. 31 в каждом опыте приведены полученные значения частных желательностей для исследуемых параметров, а также – обобщенной желательности  $D$ , рассчитанной указанным выше способом. Помимо оцененных желательностей в правом крайнем столбце табл. 31 зафиксированы удельные силы выдавливания стаканов в каждом из опытов.

Величина удельной силы входит в обобщенную желательность как одна из характеристик энергоемкости технологического процесса. В условиях холодного выдавливания величина удельной силы на пуансоне ограничивает стойкость пуансона и таким образом является величиной, определяющей возможность применения технологии. Поэтому сочли целесообразным строить две модели вида (48): для обобщенной желательности, включая удельную силу выдавливания, и отдельно для удельной силы.

После обработки результатов (табл. 31), приводящей к вычислению коэффициентов модели (48), получены следующие уравнения:

$$D = 0,552 + 1,153X_1 + 0,059X_2 - 0,011X_3; \quad (49)$$

$$q \text{ [МПа]} = 1009 + 1333X_1 + 150X_2 + 16,95X_3. \quad (50)$$

Анализ модели (49) показывает, что обобщенная желательность комплекса механических характеристик увеличивается при увеличении процентного содержания углерода в стали, выдавливании неотожженной заготовки по сравнению с выдавливанием отожженной и увеличении степени деформации за переход. Удельная сила выдавливания, как и следовало ожидать, увеличивается с увеличением содержания углерода в стали, при выдавливании заготовки без отжига по сравнению с выдавливанием отожженной и увеличении степени деформации за переход.

Таблица 31. Матрица плана и результаты эксперимента

| № опыта | Факторы            |                |                    | Желательности   |                 |                |                |                 |                 |                |                     | q, МПа |
|---------|--------------------|----------------|--------------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------------|--------|
|         | X <sub>1</sub> , % | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> , % | dσ <sub>T</sub> | dσ <sub>B</sub> | d <sub>δ</sub> | d <sub>ψ</sub> | d <sub>KC</sub> | d <sub>НВ</sub> | d <sub>q</sub> | D (y <sub>2</sub> ) |        |
| 1       | 0,14               | -1             | 44,5               | 0,12            | 0,03            | 0,74           | 0,56           | 0,47            | 0,01            | 0,83           | 0,18                | 1800   |
| 2       | 0,44               | -1             | 56,3               | 0,64            | 0,75            | 0,48           | 0,10           | 0,26            | 0,60            | 0,45           | 0,40                | 2400   |
| 3       | 0,14               | 1              | 56,3               | 0,37            | 0,29            | 0,08           | 0,01           | 0,20            | 0,55            | 0,52           | 0,17                | 2300   |
| 4       | 0,44               | 1              | 44,5               | 0,74            | 0,72            | 0,90           | 0,70           | 0,57            | 0,64            | 0,37           | 0,64                | 2500   |

Методом кругого восхождения по поверхности отклика для обобщенной желательности  $D$ , используя уравнение (49), исследована возможность повышения комплекса механических характеристик деталей. Одновременно для каждого сочетания параметров технологического процесса, соответствующего шагам по поверхности отклика для  $D$ , по уравнению (50) рассчитывали значения удельных сил. Последовательность реализации этого этапа исследования показана в табл. 32.

Фактор  $X_2$ , характеризующий наличие отжига заготовки, в табл. 32 при одинаковых уровнях факторов  $X_1$  и  $X_3$  рассмотрен на его верхнем и нижнем уровнях: с отжигом и без отжига.

Результаты исследования, проведенного методом кругого восхождения по поверхности отклика для  $D$ , показали следующее. Варьируя рассмотренные три фактора (параметры технологического процесса), можно повысить комплекс механических характеристик детали при удельной силе выдавливания, находящейся в пределах 2500 МПа, на 9 % по сравнению с наилучшим комплексом, достигнутым при сочетании факторов в опыте 4 табл. 31.

Таким повышенным комплексом может быть следующий:  $\sigma_T = 850$  МПа;  $\sigma_B = 900$  МПа;  $\delta = 7$  %;  $\psi = 55$  %;  $KC = \text{кДж} / \text{м}^2$ ;  $HB = 250$ .

Для повышения механических характеристик целесообразно выдавливать предварительно отожженные заготовки из стали с содержанием углерода 0,061 % со степенью обжаривания 46 % (в табл. 32 результаты этого опыта выделены жирным шрифтом и подчеркиванием).

С помощью формулы (44) было определено, что выдавленный стакан при диаметре полости 40 мм и степени обжатия 46 % должен иметь внешний диаметр 59 мм. Если у изделия внешний диаметр меньше указанного, а во главу решаемой проблемы ставится достижение наилучшего комплекса механических характеристик, то или надо обтачивать выдавленный стакан по наружной поверхности, или осуществлять его вытяжку с утонением стенки. Однако вытяжка с утонением стенки может несколько изменить комплекс его механических характеристик, полученный при выдавливании стакана.

Таблица 32. Крутое восхождение по поверхности отклика для  $D$  при контроле  $q$

| Номер опыта | Содержание углерода | Наличие отжига | Степень обжатия, % | $D$          | $q$ , МПа   |
|-------------|---------------------|----------------|--------------------|--------------|-------------|
| 1           | 0,37                | с отжигом      | 49,3               | 0,393        | 2187        |
|             |                     | без отжига     |                    | 0,511        | 2487        |
| 2           | 0,45                | с отжигом      | 48,2               | 0,497        | 2277        |
|             |                     | без отжига     |                    | 0,615        | 2577        |
| 3           | 0,53                | с отжигом      | 47,1               | 0,601        | 2364        |
|             |                     | без отжига     |                    | 0,719        | 2664        |
| 4           | 0,61                | с отжигом      | 46                 | <u>0,704</u> | <u>2451</u> |
|             |                     | без отжига     |                    | 0,822        | 2751        |
| 5           | 0,69                | с отжигом      | 44,9               | 0,815        | 2547        |

#### 1.14. Моделирование сложных аналитических зависимостей при теоретическом определении удельной силы выдавливания стакана

Применение уравнений регрессии может быть целесообразным не только при решении экспериментальных задач с использованием компьютерного или физического экспериментов.

При аналитических методах решения задач, когда требуется дифференцирование или интегрирование сложных формул, включающих в себя разные переменные, входящие в формулу в разных степенях, под знаками логарифма и т.п., компьютер не может помочь провести интегрирование или дифференцирование и описать результаты этих действий аналитическими зависимостями.

В то же время компьютерные программы позволяют получать результаты дифференцирования или интегрирования аналитических зависимостей в численном виде при введении в программу численных значений входящих в эти зависимости переменных. Численные результаты дифференцирования или интегрирования можно рассматривать как результаты эксперимента, получать их по наперед заданному плану и использовать для расчета коэффициентов математической модели в виде уравнения регрессии.

При этом в модели могут присутствовать члены типа  $b_{ij} x_i x_j$ , описывающие совместное влияние факторов, если такое влияние просматривается из структуры аналитической зависимости, к которой предполагается применить приемы планирования и обработки результатов вычислительного многофакторного эксперимента.

После вычисления коэффициентов перед членами уравнения регрессии это уравнение становится моделью сложной формулы, включающей в себя разные переменные. Эта математическая модель может быть легко продифференцирована или проинтегрирована и вообще в дальнейшем аналитическом решении задачи заменять собой сложную формулу.

Такой метод решения использован при исследовании выдавливания деталей типа стаканов из сплошных цилиндрических заготовок. Схема операции выдавливания приведена на рис. 13. Там показано выдавливание с активными силами контактного трения, когда матрица перемещается в направлении истечения металла со скоростью  $v_m$ , превышающей скорость истечения  $v_{ист}$ .

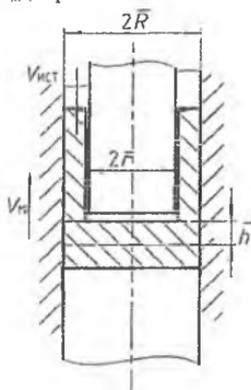


Рис. 13. Расчетная схема выдавливания детали типа стакана

В исследовании приняты относительные размеры: все натуральные размеры отнесены к радиусу торца пуансона. Все скорости течения отнесены к скорости перемещения пуансона. Относительные размеры соответствуют приведенным на рис. 13, но в их обозначениях отсутствует черта над буквой.

Деформируемая заготовка считается жесткопластической. Очаг пластической деформации представлен состоящим из областей 1 и 2, отделенных друг от друга поверхностью  $\rho = 1$ . В силу осевой симметрии схемы  $v_\theta = 0$ . С учетом граничных условий и характера распределения скоростей течения, эксперимен-

тально проверенного в работе [10], скорости течения частиц заготовки описаны функциями (в которые входит варьируемый параметр  $A$ ):

$$g_{z1} = \frac{z}{h}(Ah - Az - 1), \quad g_{z2} = -\frac{z}{h(R^2 - 1)}(Ah - Az - 1). \quad (51)$$

Из условия постоянства объема определены

$$g_{\rho 1} = -\frac{\rho}{2h}(Ah - 2Az - 1), \quad g_{\rho 2} = -\frac{R^2 - \rho^2}{2\rho h(R^2 - 1)}(Ah - 2Az - 1). \quad (52)$$

Скорости деформаций рассчитаны по уравнениям Коши. Интенсивность скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i1} &= \frac{1}{h} \sqrt{(Ah - 2Az - 1)^2 + \frac{1}{3} A^2 \rho^2}, \\ \varepsilon_{i2} &= \frac{1}{3h(R^2 - 1)} \sqrt{\left(9 + \frac{R^4}{\rho^4} - \frac{R^4}{\rho^2} \ln^2 \rho + R^4 \ln^2 \rho - 3 \frac{R^2}{\rho^2} - 3R^2 \ln \rho\right) \times \dots \rightarrow} \\ &\quad \sqrt{\rightarrow \times (Ah - 2Az - 1)^2 + 3A^2 \left(\frac{R^4}{\rho^2} - 2R^2 + \rho^2\right)}. \end{aligned}$$

Согласно методу баланса мощностей отношение деформирующей силы к напряжению текучести материала заготовки с учетом того, что скорость перемещения пуансона принята равной 1, описано следующим выражением:

$$\frac{P_D}{\sigma_S} = \sum_{h=1}^H \iiint_V \varepsilon_i dV + \sum_{m=1}^M \iint_F \frac{\tau_k}{\sigma_S} \sqrt{g_k^2 + g_l^2} dF + \sum_{h=1}^N h \iint_{\sigma_S} \left| g_k + g_l \right| dG, \quad (53)$$

где  $k, l$  – обобщенные координаты, последовательно принимающие значения  $\rho, \theta, z$ ;  $v_k$  и  $v_l$  – скорости течения в направлении обобщенных координат;  $H$  – число областей, на которые разбит очаг пластической деформации;  $M$  – количество поверхностей трения;  $N$  – количество поверхностей разрывов скоростей течения.

Для определения варьируемого параметра  $A$ , входящего в выражения для скоростей, проведено решение уравнения

$$(\partial/\partial A)(P_n / \sigma_s) = 0. \quad (54)$$

После вычисления и суммирования выражений, входящих в уравнение (53), и решения его относительно  $A$  получено

$$A = \frac{h(R^2 - 1)^2[(\mu + 0,5)(R^2 - 1) + 2R^2 - 3R^2 + 1 + Rh^2(\mu + 0,5)]}{R^4[h^2(R^2 - 1)(R^4 - 2R^2 + 2) - \frac{R^2 h^2}{9} + \frac{R^4 h^2}{9} - \frac{R^4 h^2}{9} \ln R + \dots] \rightarrow} \rightarrow (55)$$

$$+ \frac{R^6 h^2 \ln R}{9} \times (\ln R - 1) + R^4 h^2 \frac{R^2 - 1}{18} - \frac{2}{3} h^2 R^2 \ln R - \frac{1}{3} R^4 h^2 \ln R + \dots$$

$$\left. \frac{1}{R^2 h^2 \frac{R^2 - 1}{6} + 2R^4 \ln R - 2R^2(R^2 - 1) + \frac{R^6 - 2R^4 + 3R^2 - 2}{2}} \right]$$

При дальнейшем классическом решении задачи выражение (55) следует подставить вместо  $A$  в формулы (51) и (52) и уже с этими формулами, содержащими  $A$  в развернутом виде, произвести расчет по уравнениям Коши скоростей деформаций, а затем – интенсивности скоростей деформаций. Поскольку при применении уравнений Коши требуется дифференцирование формул для скоростей течения с параметром  $A$  в развернутом виде, реализовать это не представляется возможным.

С учетом характера кривых, построенных по зависимости (55), была принята следующая модель этой зависимости:

$$A_m = b_0 + b_{11}R^2 + b_{1R} + b_{22}h^2 + b_{2h} + b_{3\mu} + b_{12}Rh + b_{13}R\mu. \quad (56)$$

Для определения коэффициентов модели (56) проведен расчет величины  $A$  по формуле (55). Принятые в расчете уровни варьирования факторов и результаты расчета приведены в табл.33.

Таблица 33. Уровни варьирования факторов и результаты расчета параметра  $A$  по формуле (55)

| $R$ | $h$   | 0,5    |       | 0,75  |        | 1,0    |       |
|-----|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|
|     | $\mu$ | 0      | 0,2   | 0     | 0,2    | 0      | 0,2   |
| 1,2 |       | -0,145 | -0,19 | -0,17 | -0,22  | -0,19  | -0,26 |
| 1,5 |       | -0,13  | -0,16 | -0,17 | -0,2   | -0,19  | -0,23 |
| 2,0 |       | -0,07  | -0,08 | -0,08 | -0,095 | -0,086 | -0,1  |

Для расчета коэффициентов модели (56) уровни варьирования факторов, приведенные в табл. 33, переведены в кодированный масштаб, в котором коэффициенты рассчитываются по формуле (9).

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным и обратно следующие:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10(R - 1,57); z_1 = x_1^2 - x_1 - 11,2; \\ x_2 &= 4(h - 0,75); z_2 = 3(x_2^2 - 0,67), \\ x_3 &= 10(\mu - 0,1). \end{aligned} \quad (57)$$

Использованные в расчете сочетания уровней факторов в кодированном масштабе приведены в табл. 34. Там же дано сравнение результатов расчета параметра  $A$  по формуле (55) –  $A$  и по математической модели (58) –  $A_m$ .

После расчета коэффициентов модель (56) в кодированном масштабе имеет вид:

$$A_m = -0,154 + 0,0019 z_1 + 0,0144 x_1 + 0,0011 z_2 - 0,023 x_2 - 0,017 x_3 + 0,0027 x_1 x_2 + 0,0026 x_1 x_3. \quad (58)$$

После перехода к натуральным значениям факторов модель (58) имеет вид:

$$A_m = 0,19 R^2 - 0,579 R + 0,0528 h^2 - 0,341 h - 0,578 \mu + 0,108 R h + 0,26 R \mu + 0,377. \quad (59)$$

Таблица 34. Сочетания уровней факторов в кодированном масштабе и соответствующие им результаты расчета параметра  $A$

| № сочет. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $z_1$ | $z_2$ | $A$    | $A_m$  |
|----------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|-------|--------|--------|
| 1        | 1     | -3,7  | -1    | -1    | 3,7       | 3,7       | 6     | 1     | -0,145 | -0,135 |
| 2        | 1     | -0,7  | -1    | -1    | 0,7       | 0,7       | -10   | 1     | -0,13  | -0,138 |
| 3        | 1     | 4,4   | -1    | -1    | -4,4      | -4,4      | 4     | 1     | -0,07  | -0,065 |
| 4        | 1     | -3,7  | 0     | -1    | 0         | 3,7       | 6     | -2    | -0,17  | -0,171 |
| 5        | 1     | -0,7  | 0     | -1    | 0         | 0,7       | -10   | -2    | -0,17  | -0,166 |
| 6        | 1     | 4,4   | 0     | -1    | 0         | -4,4      | 4     | -2    | -0,08  | -0,08  |
| 7        | 1     | -3,7  | 1     | -1    | -3,7      | 3,7       | 6     | 1     | -0,19  | -0,2   |
| 8        | 1     | -0,7  | 1     | -1    | -0,7      | 0,7       | -10   | 1     | -0,19  | -0,188 |
| 9        | 1     | 4,4   | 1     | -1    | 4,4       | -4,4      | 4     | 1     | -0,086 | -0,088 |
| 10       | 1     | -3,7  | -1    | 1     | 3,7       | -3,7      | 6     | 1     | -0,19  | -0,188 |
| 11       | 1     | -0,7  | -1    | 1     | 0,7       | -0,7      | -10   | 1     | -0,16  | -0,176 |
| 12       | 1     | 4,4   | -1    | 1     | -4,4      | 4,4       | 4     | 1     | -0,08  | -0,076 |
| 13       | 1     | -3,7  | 0     | 1     | 0         | -3,7      | 6     | -2    | -0,22  | -0,225 |
| 14       | 1     | -0,7  | 0     | 1     | 0         | -0,7      | -10   | -2    | -0,2   | -0,204 |
| 15       | 1     | 4,4   | 0     | 1     | 0         | 4,4       | 4     | -2    | -0,095 | -0,091 |
| 16       | 1     | -3,7  | 1     | 1     | -3,7      | -3,7      | 6     | 1     | -0,26  | -0,254 |
| 17       | 1     | -0,7  | 1     | 1     | -0,7      | -0,7      | -10   | 1     | -0,23  | -0,226 |
| 18       | 1     | 4,4   | 1     | 1     | 4,4       | 4,4       | 4     | 1     | -0,1   | -0,099 |

В дальнейшем решении величина  $A$  оставлена временно как параметр.

После суммирования выражений, входящих почленно в уравнение (53), и деления обеих частей уравнения на площадь пуансона получено следующее выражение:

$$q/\sigma_s = f(R, h, \mu, A). \quad (60)$$

Одно из слагаемых выражений (53) и (60), учитывающих силу трения по наружной поверхности очага пластической деформации, имеет вид:

$$\frac{\mu R h}{R^2 - 1} - \frac{A \mu R h^2}{3(R^2 - 1)}$$

В выражении (60) оно присутствует со знаком «плюс», поскольку считается, что матрица неподвижна и силы трения реактивные.

Высота очага пластической деформации  $h$  определяется из условия минимума энергии формоизменения (минимума мощности внешних сил) по следующему уравнению:

$$\partial q / \partial h = 0.$$

При этом требуется дифференцирование громоздкой зависимости (60), произвести которое не представляется возможным.

Для определения высоты очага пластической деформации  $h$  уравнение (53) заменено полиномом вида:

$$q_m / \sigma_s = b_0' + b_{11}' z_1 + b_1' x_1 + b_{22}' z_2 + b_2' x_2 + b_3' x_3 + b_{12}' x_1 x_2 + b_{13}' x_1 x_3. \quad (61)$$

Параметр  $A$  в модель (61) не входит, поскольку он однозначно связан с  $R$ ,  $h$  и  $\mu$  формулой (60) и не может варьироваться независимо от них.

Для определения коэффициентов модели (61) проведен расчет величины  $q/\sigma_s$  по формуле (60). Приняты уровни варьирования факторов  $R$ ,  $h$ ,  $\mu$ , приведенные выше в табл. 33. Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным имеют вид (57).

В табл. 35 приведены принятые в расчете сочетания уровней факторов в кодированном масштабе и результаты расчета относительной удельной силы по формуле (60) —  $q/\sigma_s$  и по модели (62) —  $q_m/\sigma_s$ . При расчете по формуле (60) параметр  $A$  рассчитывали по формуле (55).

Таблица 35. Сочетания уровней факторов в кодированном масштабе и результаты расчета относительной удельной силы

| № соч. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $z_1$ | $z_2$ | $q/\sigma_s$ | $q_m/\sigma_s$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|-------|--------------|----------------|
| 1      | 1     | -3,7  | -1    | -1    | 3,7       | 3,7       | 6     | 1     | 3,62         | 3,628          |
| 2      | 1     | -0,7  | -1    | -1    | 0,7       | 0,7       | -10   | 1     | 3,46         | 3,347          |
| 3      | 1     | 4,4   | -1    | -1    | -4,4      | -4,4      | 4     | 1     | 3,77         | 3,79           |
| 4      | 1     | -3,7  | 0     | -1    | 0         | 3,7       | 6     | -2    | 3,84         | 3,82           |
| 5      | 1     | -0,7  | 0     | -1    | 0         | 0,7       | -10   | -2    | 3,38         | 3,34           |
| 6      | 1     | 4,4   | 0     | -1    | 0         | -4,4      | 4     | -2    | 3,4          | 3,452          |
| 7      | 1     | -3,7  | 1     | -1    | -3,7      | 3,7       | 6     | 1     | 5,14         | 4,21           |
| 8      | 1     | -0,7  | 1     | -1    | -0,7      | 0,7       | -10   | 1     | 3,49         | 3,53           |
| 9      | 1     | 4,4   | 1     | -1    | 4,4       | -4,4      | 4     | 1     | 3,33         | 3,317          |

| №<br>сочет. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $z_1$ | $z_2$ | $q/\sigma_s$ | $q_m/\sigma_s$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|-------|--------------|----------------|
| 10          | 1     | -3,7  | -1    | 1     | 3,7       | -3,7      | 6     | 1     | 4,06         | 4,14           |
| 11          | 1     | -0,7  | -1    | 1     | 0,7       | -0,7      | -10   | 1     | 3,72         | 3,73           |
| 12          | 1     | 4,4   | -1    | 1     | -4,4      | 4,4       | 4     | 1     | 3,97         | 3,96           |
| 13          | 1     | -3,7  | 0     | 1     | 0         | -3,7      | 6     | -2    | 4,4          | 4,33           |
| 14          | 1     | -0,7  | 0     | 1     | 0         | -0,7      | -10   | -2    | 3,67         | 3,72           |
| 15          | 1     | 4,4   | 0     | 1     | 0         | 4,4       | 4     | -2    | 3,6          | 3,61           |
| 16          | 1     | -3,7  | 1     | 1     | -3,7      | -3,7      | 6     | 1     | 4,85         | 4,72           |
| 17          | 1     | -0,7  | 1     | 1     | -0,7      | -0,7      | -10   | 1     | 3,82         | 3,92           |
| 18          | 1     | 4,4   | 1     | 1     | 4,4       | 4,4       | 4     | 1     | 3,53         | 3,47           |

После расчета коэффициентов по формуле (9) модель (61) в кодированном масштабе имеет вид:

$$q_m/\sigma_s = 3,78 + 0,0224z_1 - 0,0615x_1 + 0,0328z_2 + 0,0467x_2 + 0,177x_3 - 0,0657x_1x_2 - 0,0217x_1x_3. \quad (62)$$

После перехода к натуральным значениям факторов модель (62) имеет вид:

$$q_m/\sigma_s = 7,435 + 2,24 R^2 + 1,574 h^2 - 5,685 R + 1,95 h + 5,18 \mu - 2,63 R h - 2,17 R \mu. \quad (63)$$

Зависимость высоты очага пластической деформации от размеров инструмента, определенная из условия минимума мощности внешних сил, следующая:

$$h = 0,835R - 0,619. \quad (64)$$

Путем подстановки (64) в (63) при условии, что зависимость (53) записана для выдавливания в неподвижной матрице, получено:

$$q_m/\sigma_s = 6,831 + 1,141 R^2 - 4,056 R - 2,17 R \mu + 5,18 \mu. \quad (65)$$

Графики, построенные с использованием выражения (65), приведены на рис. 14 сплошными линиями. Их достоинством является отражение роста удельной силы выдавливания при увеличении относительного радиуса матрицы свыше 1,5...2. Это имеет место на практике, что подтверждают эксперименты, но отражается далеко не всеми теоретически полученными зависимостями.

При выдавливании с активными силами трения, когда  $v_m > v_{\text{ист}}$  (см. рис. 13), из удельной силы, рассчитанной по модели (65), вычитается удвоенное слагаемое, характеризующее силу трения по наружной поверхности очага пластической деформации.

В результате получается

$$\left(\frac{q}{\sigma_s}\right)_a = 6,83 + 1,14R^2 - 4,06R - 2,17R\mu + 5,18\mu - \frac{2\mu R h}{R^2 - 1} + \frac{2\mu R h^2 A}{3(R^2 - 1)}. \quad (66)$$

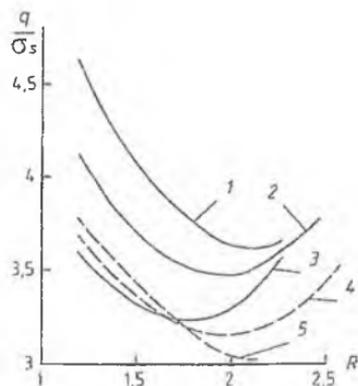


Рис. 14. Удельные силы выдавливания: 1;  $5-\mu = 0,4$ ; 2;  $4-\mu = 0,2$ ; 3- $\mu = 0$

С учетом (60) и (65) выражение имеет следующий вид:

$$\left(\frac{q}{\sigma_s}\right) = 6,83 + 1,14R^2 - 4,06R - 2,17R\mu + 5,18\mu - \frac{2\mu R(0,835R - 0,619)}{R^2 - 1} + \frac{2\mu R(0,835R - 0,619)^2(0,317R^2 - 0,986R + 0,608 - 0,578\mu + 0,26R\mu)}{3(R^2 - 1)} \quad (67)$$

Рассчитанные с использованием выражения (67) удельные силы выдавливания с активными силами трения показаны на рис. 14 штриховыми линиями. Видно, что при  $\mu = 0,2$  удельная сила выдавливания с активными силами трения меньше удельной силы выдавливания в неподвижной матрице на 7...10,5%, а при  $\mu = 0,4$  эта разница составляет 16...18,5%.

### 1.15. Расчет коэффициентов модели при неравномерном дублировании опытов (в частности, при комбинации физического и компьютерного экспериментов)

Проведено исследование влияния материала спеченного образца из железного порошка, его плотности, диаметра пуансона, направления сил контактного трения и типа смазки на удельную силу выдавливания деталей типа стаканов (см. рис. 13). Факторы и уровни их варьирования приведены в табл. 36.

Кодированные значения факторов  $x$ , связаны с натуральными  $X$ , следующими соотношениями:  $x_1 = (X_1 - 20) / 2$ ;  $x_4 = (X_4 - 6,7) / 0,4$ .

При планировании эксперимента из каталога В.З. Бродского выбран план, обеспечивающий получение оценок линейных эффектов влияния факторов и позволяющий оценить эффект одного парного взаимодействия. В качестве наиболее важного принято взаимодействие  $x_1x_2$ . План эксперимента приведен в табл. 37.

Таблица 36. Факторы и уровни их варьирования

| Факторы                                 | Диаметр пуансона, мм<br>$x_1$ | Направл. сил трения<br>$x_2$ | Материал образца<br>$x_3$ | Плотность заготовки, г/см <sup>3</sup><br>$x_4$ | Смазка<br>$x_5$                         |
|-----------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Основной уровень ( $X_{i0}$ )           | 20                            | —                            | —                         | 6,7                                             | —                                       |
| Интервалы варьирования ( $\Delta X_i$ ) | 2                             | —                            | —                         | 0,4                                             | —                                       |
| Верхний уровень ( $x_i = +1$ )          | 18                            | реактивн.                    | ПЖВ2.160.28               | 6,3                                             | С лоб. алмазн. порошка MoS <sub>2</sub> |
| Нижний уровень ( $x_i = -1$ )           | 22                            | активные                     | ПЖВ4.160.28               | 7,1                                             |                                         |

Таблица 37. Матрица плана и результаты эксперимента

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1 x_2$ | $q$ , МПа | $\bar{y}_m$ , МПа | $ y_{изг} - \bar{y}_m $ , МПа | $f_u$ | $S_{y_m}^2$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------------------|-------------------------------|-------|-------------|
| 1     | +     | +     | +     | +     | +     | +     | +         | 1640      | 1595              | 45                            | 1     | 2025        |
|       |       |       |       |       |       |       |           | 1550      |                   |                               |       |             |
| 2     | +     | -     | +     | +     | -     | +     | -         | 1699      | 1699              | 15                            | 1     | 225         |
| 3     | +     | +     | -     | +     | -     | -     | -         | 1325      | 1325              |                               |       |             |
| 4     | +     | -     | -     | +     | +     | -     | +         | 1278      | 1293              | 15                            | 1     | 225         |
|       |       |       |       |       |       |       |           | 1308      |                   |                               |       |             |
| 5     | +     | +     | +     | -     | -     | -     | +         | 1752      | 1752              | 45                            | 1     | 2025        |
| 6     | +     | -     | +     | -     | +     | -     | -         | 1714      | 1714              |                               |       |             |
| 7     | +     | +     | -     | -     | +     | +     | -         | 1370      | 1415              | 45                            | 1     | 2025        |
|       |       |       |       |       |       |       |           | 1346      |                   |                               |       |             |
| 8     | +     | -     | -     | -     | -     | +     | +         | 1278      | 1308              | 30                            | 1     | 900         |
|       |       |       |       |       |       |       |           | 1338      |                   |                               |       |             |

В соответствии с планом было выполнено 8 опытов, причем 1-й, 4-й, 7-й и 8-й опыты дублировали дважды.

После реализации выбранного плана строится следующая линейная модель:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k=5} b_i x_i + b_{12} x_1 x_2.$$

В соответствии с табл. 37

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

где  $X$  – матрица условий эксперимента.

Для расчета коэффициентов регрессии введена матрица весов  $P$ , на диагонали которой стоят числа опытов:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Система уравнений для вычисления коэффициентов по методу наименьших квадратов в матричной форме имеет следующий вид:

$$B = (X^T P X)^{-1} \cdot (X^T P Y),$$

где  $X^T$  – транспонированная матрица  $X$ ,  $(X^T X)^{-1}$  – обратная матрица произведения  $X^T X$ .

При умножении матриц элементы матрицы-произведения определяются как сумма скалярных произведений элементов строки матрицы, стоящей слева, на соответствующие элементы столбца матрицы, стоящей справа. У транспонированной матрицы столбцы исходной матрицы являются строками при сохранении их последовательности.

Матрица  $X^T X$  названа матрицей системы нормальных уравнений. При вычислении обратной матрицы  $(X^T X)^{-1}$  использовано свойство диагональности матрицы  $X^T X$ , характерное для ортогональных планов. У диагональной матрицы все элементы вне главной диагонали равны нулю. На главной диагонали матрицы, обратной к диагональной, стоят числа, обратные соответствующим числам, стоящим на диагонали прямой матрицы.

В соответствии с приведенными правилами матричного анализа

$$X^T P X = 2 \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(X^T P X)^{-1} = 1/2 \begin{vmatrix} 0,1875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & -0,03125 \\ 0,03125 & -0,03125 & 0,18229 \\ 0 & 0 & -0,03125 \\ -0,03125 & -0,03125 & 0,00521 \\ -0,03125 & -0,03125 & -0,00521 \\ -0,03125 & 0,03125 & -0,00521 \end{vmatrix}$$

Матрица  $(X^T P Y)$  имеет следующий вид:

$$(X^T P Y) = \begin{vmatrix} 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + 2\bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6 + 2\bar{y}_7 + 2\bar{y}_8 \\ 2\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - 2\bar{y}_4 + \bar{y}_5 - \bar{y}_6 + 2\bar{y}_7 - 2\bar{y}_8 \\ 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 2\bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6 - 2\bar{y}_7 - 2\bar{y}_8 \\ 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + 2\bar{y}_4 - \bar{y}_5 - \bar{y}_6 - 2\bar{y}_7 - 2\bar{y}_8 \\ 2\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + 2\bar{y}_4 - \bar{y}_5 + \bar{y}_6 + 2\bar{y}_7 - 2\bar{y}_8 \\ 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - 2\bar{y}_4 - \bar{y}_5 - \bar{y}_6 + 2\bar{y}_7 + 2\bar{y}_8 \\ 2\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + 2\bar{y}_4 + \bar{y}_5 - \bar{y}_6 - 2\bar{y}_7 + 2\bar{y}_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17712 \\ 482 \\ -1002 \\ -112 \\ 2928 \\ 2958 \\ 2576 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты регрессии следующие:

$$B = \begin{vmatrix} b_0 = 1513 \\ b_1 = 9,0 \\ b_2 = 173 \\ b_3 = -35 \\ b_4 = -7,7 \\ b_5 = -13 \\ b_6 = -30 \end{vmatrix}$$

Таким образом, получено следующее уравнение регрессии:

$$y \text{ [МПа]} = 1513 + 9 x_1 + 173 x_2 - 35 x_3 - 8 x_4 - 13 x_5 - 30 x_6$$

Анализ полученной математической модели показал, что наибольшее влияние на удельную силу выдавливания оказывает контактное трение. При выдавливании с активными силами контактного трения удельная сила на пуансоне уменьшается на 12...15%. Существенное влияние оказывают также материал образца и взаимодействие диаметра пуансона и направления сил контактного трения.

## 2. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

### 2.1. Виды ошибок, их влияние на результат исследования

Зависимость между действующими на объект исследования контролируемые входными факторами и выходными переменными находят путем измерений их значений и последующей обработки результатов измерений.

Реальный результат измерения является случайной величиной и имеет отклонение от истинного значения измеряемой величины. Сама ошибка – величина случайная, ее значение может быть определено лишь приблизительно.

Случайная величина – это функция, определенная на пространстве элементарных исходов [3]. Пространство элементарных исходов представляет собой множество всех возможных результатов эксперимента, в котором каждый результат представлен одним и только одним элементарным исходом.

Ошибки измерения, в зависимости от источника их образования, разделяют на следующие типы.

А. Ошибка метода измерения – не учитывается ряд факторов. Пример – определение удельного сопротивления сплава, из которого изготовлена проволока. Сопротивление  $R$  проволоки определяют по измерениям зависимости тока  $I$  от напряжения  $U$ . Удельное сопротивление  $\rho$  определяется через  $R$  после измерения диаметра проволоки  $d$  и длины  $l$ .

Ошибки метода измерения:

- не учтено сопротивление подводящих проводов, приборов, контактов;
- зависимость сопротивления, длины и диаметра проволоки от температуры;
- неоднородность материала проволоки по длине и т.п.

Б. Инструментальные ошибки:

а) чувствительный элемент (термопара, тензодатчик) измеряет лишь с определенной точностью;

б) прибор недостаточно точно отражает реакцию чувствительного элемента.

В. Ошибки отсчитывания – субъективность наблюдателя.

Г. Ошибки наводки – несоблюдение требуемых условий при измерении (температура, влажность, давление, при которых гарантируются правильные показания прибора) или неидеальное выполнение процедуры измерения: перекос микрометра и т.п.

Д. Промахи – например, ошибка на оборот барабана микрометра (0,5 мм) и т.п.

Вместе с результатом следует указывать и приближенную ошибку измерения.

Например,  $t = 70 \pm 5 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Как показано ниже, последняя запись еще не является полной.

Оценка ошибки необходима, чтобы сделать правильный вывод по результатам эксперимента.

Спрашивается: зависит ли сопротивление катушки от температуры?

Результаты измерений:

200, 025 Ом при  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,

200, 034 Ом при  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

При ошибке измерения 0,001 Ом разница значима, а при 0,01 Ом – незначима.

При планировании эксперимента необходимо знать допускаемую ошибку измерения, поскольку точность результата должна соответствовать цели его получения. Если рассмотренную катушку предполагается использовать в качестве эталона в интервале температур от 10 до  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$  и требуемая точность эталона 1:10000, достаточно измерить сопротивление с точностью 0,01 Ом, а измерение с точностью 0,001 Ом будет ненужной тратой средств и времени. В то же время измерение с ошибкой 0,05 Ом не позволит оценить допустимость применения катушки в качестве эталона.

По характеру проявления в эксперименте ошибки подразделяют на систематические и случайные.

Систематическая ошибка остается постоянной на протяжении всей серии измерений или закономерно изменяется в процессе измерений.

Случайные ошибки вызываются неконтролируемыми, изменяющимися от опыта к опыту причинами.

В рассмотренном выше примере по определению удельного сопротивления сплава, из которого изготовлена проволока, постоянными систематическими являются ошибки, возникающие из-за отсутствия учета сопротивления проводов, неоднородности сопротивления проволоки из исследуемого сплава, неправильной градуировки приборов. Закономерно изменяющаяся систематическая ошибка связана с зависимостью сопротивления от температуры и изменяется как функция силы тока.

Систематические ошибки в принципе опаснее случайных, которые можно обнаружить путем повторных измерений. Если в ходе эксперимента допущены большие случайные ошибки, то они проявят себя в большом разбросе результатов. Если же результат приведен с малой ошибкой (а разброс от случайных факторов мог оказаться малым) и в то же время содержит систематическую ошибку – значительно хуже.

Основной путь для выявления систематических ошибок – тщательный анализ условий эксперимента, методики измерений и т.п. Если найдены при-

нии и величина систематической ошибки, ее можно устранить путем введения поправок. Так, в рассмотренном выше примере по определению удельного сопротивления в каждом опыте следует измерять температуру проволоки и в результате вводить поправку, учитывающую зависимость  $R$ ,  $l$  и  $d$  от температуры.

Систематическая ошибка часто вносится в эксперимент измерительными системами. При регистрации сил в процессах обработки давлением применяют или записывающие устройства испытательных машин, или мездозы с тензодатчиками, от которых сигнал через усилитель поступает на записывающее устройство. На вопрос, какой из этих двух методов точнее, часто отвечают: «Конечно второй, поскольку в нем применяется сложная дорогостоящая аппаратура». С таким утверждением нельзя согласиться.

При проектировании измерительных систем в тех случаях, когда объем информации, получаемой при проведении эксперимента, должен существенно менять свой энергетический характер или форму, возникает «проблема границы раздела» [15]. Например, в пружинном манометре имеется граница раздела между жидкостью, производящей давление, и механическим устройством, показывающим величину давления. В манометре в виде  $U$ -образной трубки с открытым концом граница раздела отсутствует. При применении мембранного манометра с тензометрическим измерителем деформации существуют границы раздела: между жидкостью и мембраной, между мембраной и электрической цепью считывания. Сама электрическая часть имеет несколько границ раздела: между тензодатчиком и мостовой схемой, между мостовой схемой и усилителем, между усилителем и регистрирующим устройством.

Практическое правило, общее для всех приборов, можно сформулировать так: чем меньше границ раздела, тем выше точность измерения.

Необходимо также помнить, что пружинный и мембранный манометры гарируются по манометру в виде  $U$ -образной трубки. Поэтому они не могут быть точнее его.

Вообще все эталонные приборы имеют минимальное возможное число границ раздела. Экспериментатору следует пытаться избавиться от границ раздела и упростить схему измерений. Исключением являются системы для измерения быстро меняющихся величин. Для анализа случайных ошибок применяют методы математической статистики, рассматриваемые ниже.

В принципе, деление ошибок на систематические и случайные условно: если ошибка учитывается, она систематическая, если никаких поправок на нее в результат не вносится, то она – случайная.

При планировании эксперимента исследователь может ничего не знать о характере ошибок, кроме того, что следует ожидать некоторого отклонения от точного значения. В этом случае речь идет не об ошибке, а о неопределенности. Неопределенность рассматривают как случайную ошибку и применяют к ней аппарат математической статистики.

## 2.2. Показатели случайной ошибки при многократных измерениях

Величину случайной ошибки никогда нельзя установить, произведя единственное измерение. Если мы ничего не знаем о природе ошибок, то нет оснований считать появление ошибки  $+\Delta x$  более вероятным, чем появление ошибки  $-\Delta x$ : ошибки  $+\Delta x$  и  $-\Delta x$  равновероятны.

Исходя из сказанного, наиболее вероятным значением измеряемой величины является среднее арифметическое результатов ее измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Однако эта гипотеза не выполняется автоматически. О ее выполнении нужно специально заботиться в ходе опыта. Например, при измерении диаметра проволоки. Если разброс результатов измерений вызван изгибами проволоки, то ее истинный диаметр будет наименьшим из измеренных значений, (рис. 15).

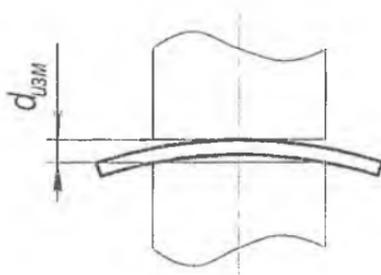


Рис. 15. Схема измерения диаметра проволоки микрометром

Распределение случайных ошибок изучают с помощью гистограмм.

В качестве примера исследована разностенность изготовленных холодным выдавливанием стальных стаканов, имеющих внешний диаметр 60 мм, внутренний диаметр 40 мм и глубину полости 180 мм. Партия штампованных стаканов уложена в 32 ящика. Из каждого ящика для контроля взято по одному стакану – представителю. Последние по посадке без зазора надевали на оправку, закатку без биения в патроне токарного станка. Поворачивая патрон, с помощью индикатора, установленного на суппорте станка, определяли биение внешней поверхности стаканов. Зафиксированное максимальное биение принималось равным разностенности стакана.

Таким образом, были получены 32 замера с рассеиванием результатов от 0,03 до 0,1 мм. Поле рассеивания составляет 0,07 мм. Его разделили на 7 интервалов шириной 0,01 мм.

Количество замеров, попавших в каждый интервал, приведено в табл. 38.

Таблица 38. Количество замеров, попавших в указанные интервалы

| Интервалы                        | от<br>до | 0,03<br>0,04 | 0,04<br>0,05 | 0,05<br>0,06 | 0,06<br>0,07 | 0,07<br>0,08 | 0,08<br>0,09 | 0,09<br>0,1 |
|----------------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| Количество замеров, $\Delta N_i$ |          | 2            | 2            | 4            | 7            | 9            | 6            | 2           |

В интервал включены результаты замеров от наименьшего размера интервала включительно до наибольшего размера интервала, исключая его.

Графически данные табл. 38 изображены на рис. 16.

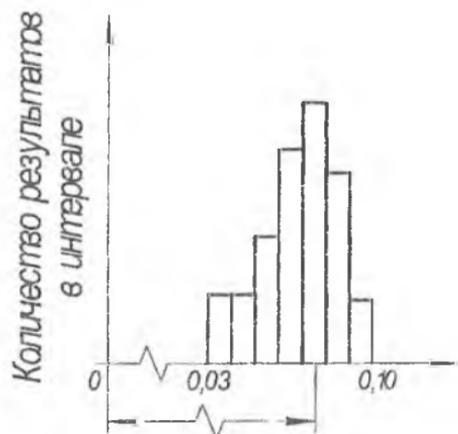


Рис. 16. Гистограмма разностей выдавленных стаканов

Для построения графиков удобно откладывать по оси ординат не  $\Delta N_i$ , а отношение  $\frac{\Delta N_i}{N}$ , где  $N$  – общее количество результатов измерений. Величины  $\frac{\Delta N_i}{N}$  при увеличении  $N$  стремятся к определенному пределу, который является вероятностью того, что новый результат измерения попадет в соответствующий интервал.

Если одновременно с увеличением числа измерений уменьшать ширину интервала, а по оси ординат откладывать  $\frac{\Delta N_i}{N\Delta x}$ , то вершины ординат сольются при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$  в плавную кривую, которая называется кривой распределения (рис. 17).

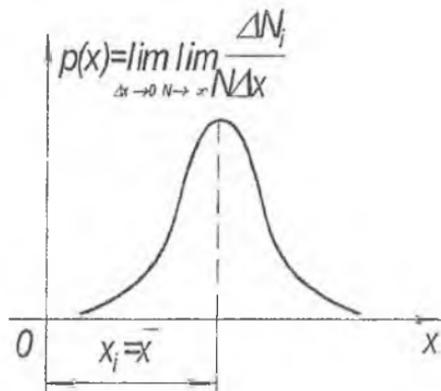


Рис. 17. Кривая значения плотности вероятности получения результатов  $x = x_u$  ( $x_u$  – истинное значение измеряемой величины)

Кривая распределения результатов характеризует не данную конкретную серию наблюдений, а гипотетическую совокупность бесконечного числа измерений данной величины данным методом. Говорят о вероятности получения того или иного результата в единичном эксперименте, но для раскрытия статистического смысла этого понятия рассматривают  $N$ -кратное повторение эксперимента и полагают  $N \rightarrow \infty$ .

В аналитической форме плотность вероятности получения результата  $x = x_u$  имеет вид

$$p = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_u)^2}{2\sigma^2}}, \quad (68)$$

где  $x$  – случайная величина;

$\sigma$  – среднее квадратичное отклонение случайной величины  $x$  от  $x_u$ ;

$e$  – основание натуральных логарифмов.

Функция (68) двухпараметрическая, она задается параметрами  $x$  и  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_u)^2}{N}}. \quad (69)$$

Площадь под кривой распределения, приходящаяся на интервал от  $-\Delta x$  до  $+\Delta x$ , равна вероятности  $P(x)$  того, что отдельное случайно выбранное значение измеряемой величины попадет в этот интервал (рис. 18).

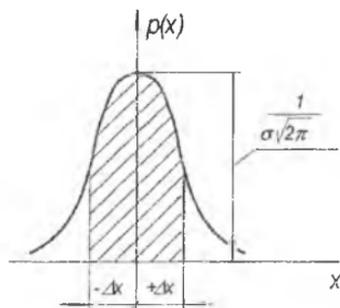


Рис. 18. Вероятность (заштрихованная площадь) попадания результата измерения в интервал  $[-\Delta x; +\Delta x]$

Функция  $P(x)$  называется функцией распределения. Она описывается формулой:

$$P(x) = \int_{-\Delta x}^{+\Delta x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (70)$$

Чтобы рассчитать функцию (70), ее приводят к однопараметрическому виду. Вводят новую переменную

$$t = \frac{|x - x_0|}{\sigma}. \quad (71)$$

Интеграл  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  носит название нормированной функции

Лапласа (табл. 39).

Из табл. 39 видно, что в пределах  $\pm\sigma$  заключено примерно 2/3 результатов. Это позволяет приблизительно оценить правильность вычисления  $\sigma$ .

Вероятность  $P$  попадания отдельного результата в интервал  $\pm 3\sigma$  составляет 0,9973. Не вошедшие в этот интервал результаты составляют всего 0,27% и обозначаются буквой  $\alpha$ . Таким образом,  $P = 1 - \alpha$ .

Таблица 39. Значения нормированной функции Лапласа для некоторых значений  $t$

| $t$ | $2\Phi(t)$ | $t$ | $2\Phi(t)$ | $t$ | $2\Phi(t)$ | $t$ | $2\Phi(t)$ |
|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|
| 0,0 | 0,0000     | 1,0 | 0,6827     | 2,0 | 0,9545     | 3,0 | 0,9973     |
| 0,2 | 0,1585     | 1,2 | 0,7699     | 2,2 | 0,9722     | 3,2 | 0,9986     |
| 0,4 | 0,3108     | 1,4 | 0,8385     | 2,4 | 0,9836     | 3,4 | 0,9993     |
| 0,6 | 0,4515     | 1,6 | 0,8904     | 2,6 | 0,9907     | 3,6 | 0,9997     |
| 0,8 | 0,5763     | 1,8 | 0,9281     | 2,8 | 0,9949     | 3,8 | 0,9999     |

Вообще, доверительной вероятностью оценки называют вероятность  $P$  выполнения неравенства  $|x - x_n| < \varepsilon$  [3]. Интервал  $x_n \pm \varepsilon$  называют доверительным интервалом.

Выше уже было отмечено, что вместе с результатом необходимо указывать ошибку измерения. Правильно указывать ширину доверительного интервала и доверительную вероятность. При этом запись имеет следующий вид:

$$70 \pm 5_{0,68}^{\circ} \text{C};$$

$$70 \pm 10_{0,95}^{\circ} \text{C};$$

$$70 \pm 15_{0,997}^{\circ} \text{C}.$$

Если выражение (69) записать без знака радикала, а в левой его части поставить  $\sigma^2$ , то получится формула для определения дисперсии величины  $x$ .

Если бы при измерении исследователь получал генеральную совокупность результатов, среднеквадратичное отклонение могло бы служить показателем точности измерительной системы. Однако на практике  $x_n$  неизвестно, поскольку проводится конечное число измерений. Это заставляет оперировать с отклонениями измеренного значения от среднего серии замеров. Среднеквадратичное значение отклонений отдельных результатов от среднего арифметического серии из  $n$  замеров обозначают через  $S$ :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (72)$$

Величина  $S$  называется выборочным среднеквадратичным отклонением, а  $S^2$  так же, как и  $\sigma^2$ , – дисперсией величины  $x$ .

Величины  $\sigma$  и  $S$  связаны следующим соотношением:

$$S = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

которое вытекает из понятия о числе степеней свободы.

Число степеней свободы – понятие, учитывающее в статистических ситуациях связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин. Это число определяется как разность между числом выполненных опытов и числом констант (средних, коэффициентов и пр.), подсчитанных по результатам тех же опытов [3].

Поскольку среднее

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

оно имеет с измеренными значениями  $n$  одну линейную связь. Следовательно, число степеней свободы равно  $n - 1$ . Это необходимо для получения несмещенных оценок. Несмещенной называется такая оценка, математическое ожидание которой равно истинному значению (нет систематической ошибки).

Математическое ожидание случайной величины определяется выражением [3]:

$$E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot p(x) dx.$$

Понятие математического ожидания очень близко к интуитивному представлению о среднем значении, поэтому в качестве точечной оценки математического ожидания применяют среднее значение измеряемой величины.

### 2.3. Показатели случайной ошибки при малом количестве измерений

При проведении экспериментов исследователь с целью экономии средств пытается ограничить число повторных измерений, поскольку для каждого из них надо изготовить новую заготовку. При работе с небольшим количеством повторных измерений (небольшом объеме выборки) можно пойти двумя путями.

Первый – использовать программу для ЭВМ, называемую датчиком случайных чисел. В этом случае на основании результатов 3-4 повторных измерений находят  $\bar{x}$  и  $S^2$  и эти результаты вводят в ЭВМ.

Последняя, исходя из условия нормального распределения, выдает столько результатов, сколько запросят. После этого, воспользовавшись табл. 4(0), можно оценить истинное значение результата измерения.

Второй – использование  $t$ -распределения Стьюдента. Практически – это использование результатов, заранее полученных при прохождении первого пути в обратном направлении и представленных в виде таблиц для непосредственного использования при работе с выборками небольшого объема.

При небольшом объеме выборки среднее оценивают по распределению величины  $t$  :

$$t = \frac{\bar{x} - x_n}{\sigma} \quad (73)$$

Свойства плотности  $t$ -распределения видны на графике (рис. 19).

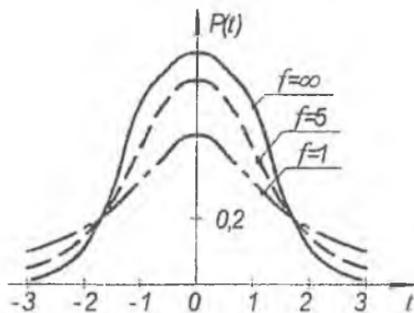


Рис. 19. Кривые  $t$ -распределения Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы  $f = n - 1$

Кривые напоминают по форме приведенную на рис. 17 кривую плотности нормального распределения, но при  $t \rightarrow \pm\infty$  значительно медленнее сближаются с осью абсцисс. При  $f \rightarrow \infty$  выборочное среднее квадратическое отклонение  $S^2 \rightarrow \sigma^2$ , поэтому распределение Стьюдента сближается с нормальным; случай  $f = \infty$  вообще соответствует нормальному распределению.

Замена в (73)  $\sigma$  на  $S$  дает следующее:

$$\varepsilon = t_{\alpha, n-1} S, \quad (74)$$

где  $t_{\alpha, n-1}$  — квантиль распределения Стьюдента, выбираемый по табл. 40 в зависимости от вероятности  $1 - \alpha$  и числа степеней свободы  $f$ .

Значения квантилей найдены из решения уравнения

$$P(|t| > t_{\alpha, n-1}) = 2 \int_{t_{\alpha, n-1}}^{\infty} p(t) dt = \alpha.$$

Таблица 40. Значения  $t_{\alpha, n-1}$ , для которых вероятность

$$P(-t_{\alpha, n-1} < t < t_{\alpha, n-1}) = 1 - \alpha$$

| $f$      | Вероятность $P$ |      |      |      |       |
|----------|-----------------|------|------|------|-------|
|          | 0,9             | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,999 |
| 2        | 2,92            | 4,30 | 6,97 | 9,93 | 31,60 |
| 3        | 2,35            | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 12,94 |
| 4        | 2,13            | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 8,61  |
| 6        | 1,94            | 2,45 | 3,14 | 3,70 | 5,96  |
| 8        | 1,86            | 2,30 | 2,90 | 3,36 | 5,04  |
| 10       | 1,81            | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,59  |
| $\infty$ | 1,65            | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,29  |

С геометрической точки зрения нахождение квантилей заключается в таком выборе значения  $t = t_{\alpha, n-1}$ , при котором суммарная площадь заштрихованных трапеций равна  $\alpha$  (рис. 20).

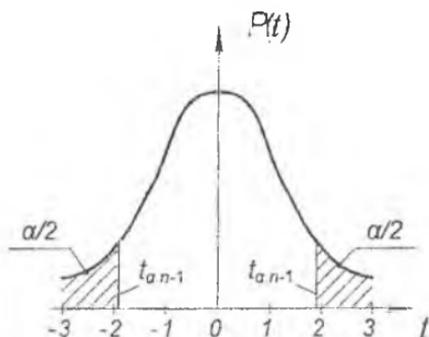


Рис. 20. Положение квантилей, обозначенных  $t_{\alpha, n-1}$

Изложенный выше материал о законах распределения случайных величин позволяет решить следующую практическую задачу.

При измерении температуры получено 4 результата: 69, 70, 71, 74 °С. Один из этих результатов заметно отличается от трех остальных. Что следует принять за истинное значение температуры: среднее из трех или среднее из четырех результатов измерений?

Вначале предположим, что отстоящий результат является промахом и рассмотрим три остальных результата:

$$\bar{x}_3 = \frac{69 + 70 + 71}{3} = 70 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$s_3^2 = \frac{(69 - 70)^2 + (70 - 70)^2 + (71 - 70)^2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$s_3 = \sqrt{1} = 1.$$

По формуле (74) определена ширина доверительного интервала  $\varepsilon$ , при этом значение квантиля  $t_{\alpha, n-1}$  взято из табл. 40 при доверительной вероятности  $P = 1 - \alpha = 0,95$ . При числе степеней свободы  $f = 2$   $t_{0,95;2} = 4,3$ ;  $\varepsilon = 4,3 \cdot 1 = 4,3$ .

Следовательно, обработка трех компактно расположенных между собой результатов измерений дает следующую величину температуры:

$$t = 70 \pm 4,3_{0,95} \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Поскольку четвертый результат измерений ( $74^{\circ}\text{C}$ ) укладывается в ширину доверительного интервала, нет оснований считать его промахом, и будет правильно за истинное принять среднее из четырех результатов.

Тогда:

$$\bar{x}_4 = \frac{69 + 70 + 71 + 74}{4} = 71^{\circ}\text{C},$$

$$S_4^2 = \frac{(69 - 71)^2 + (70 - 71)^2 + (71 - 71)^2 + (74 - 71)^2}{4 - 1} = \frac{14}{3} = 4,67,$$

$$S_4 = \sqrt{4,67} = 2,16; t_{0,95;3} = 3,18.$$

Измеренная величина температуры

$$t = 71 \pm 3,18_{0,95}^{\circ}\text{C}.$$

При решении рассмотренной выше задачи при определении по формуле (74) ширины доверительного интервала  $\varepsilon$  значение квантиля  $t_{n, p-1}$  могло быть взято из табл. 40 при доверительной вероятности  $P = 0,9$ . При числе степеней свободы  $f = 2$   $t_{0,9;2} = 2,92$ . Тогда  $\varepsilon = 2,92 \cdot 1 = 2,92$ .

Следовательно, обработка трех компактно расположенных между собой результатов измерений дает следующую величину температуры:

$$t = 70 \pm 2,92_{0,9}^{\circ}\text{C}.$$

Поскольку четвертый результат измерений ( $74^{\circ}\text{C}$ ) не укладывается в ширину доверительного интервала, есть основание считать его промахом, и будет правильно за истинное принять среднее из трех результатов.

Таким образом, вывод на основании одних и тех же результатов измерений радикально меняется в зависимости от того, с какой доверительной вероятностью проводится исследование. К сожалению, нет организации, которая взяла бы на себя ответственность и выдала рекомендации относительно величин доверительной вероятности, с которой следует проводить исследования в конкретных областях техники.

Также это подтверждает правомерность подхода к изложению материала в данном издании, когда математическая статистика излагается в главе 2, а не в начале учебника.

#### 2.4. Точность сложной функции при ошибках в определении её аргументов

Рассмотрим, как при объединении измеряемых величин в формулу точность результата связана с точностью измеряемых величин.

Дана функция:

$$z = f(x, y); \quad z_u + z_1 = f(x_u + x_1, y_u + y_1),$$

где  $x_u, y_u, z_u$  – точные значения величин;  $x_1, y_1, z_1$  – отклонения от соответствующих точных значений.

Если заданная функция непрерывна и имеет производные, ее можно разложить в ряд Тейлора. Рассмотрим только два первых члена ряда.

$$z_u + z_1 = f(x_u, y_u) + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{x_u + x_1 - x_u}{1!} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{y_u + y_1 - y_u}{1!} \right),$$

поскольку  $z_u = f(x_u, y_u)$ , то

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} x_1 + \frac{\partial z}{\partial y} y_1.$$

Аналогично можно получить  $z_2, z_3, \dots, z_n$  для пар значений  $x_i$  и  $y_i$  выборки.

$$\sum_{i=1}^n z_i^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \sum_{i=1}^n x_i y_i + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (75)$$

Поскольку отклонения  $x_i$  и  $y_i$  могут иметь как положительный, так и отрицательный знак, то при достаточно большом объеме выборки  $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ . В

математической статистике суммы произведений отклонений принимают равными нулю даже при небольших объемах выборки. Деление обеих частей равенства (75) на  $n-1$  дает следующее:

$$\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{n-1} = S_z^2, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n-1} = S_x^2, \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{n-1} = S_y^2.$$

В итоге равенство примет следующий вид:

$$S_z^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 S_x^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 S_y^2. \quad (76)$$

Выборочные среднеквадратичные отклонения  $S_x, S_y, S_z$  являются показателями ошибки.

Из выражения (76) вытекает, что вследствие возведения в квадрат некоторые ошибки могут оказывать значительно меньшее влияние на результат по сравнению с другими.

Например,  $z = x + y$ ;  $S_x = 2$ ;  $S_y = 1$ ;  $S_z = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,24$ .

Если пренебречь ошибкой  $S_x = 1$ , получим  $S_z = 2$ , что всего на 12% отличается от действительной ошибки.

Хорошо спланированный эксперимент не позволяет ни одной из величин вносить в ошибку результата долю, значительно превышающую долю остальных вносящих ошибку величин.

Пример плохо спланированного эксперимента при определении величины  $z = \frac{x}{y}$ .

Серия измерений привела к следующим значениям первичных величин:

$$x = 1000 \pm 20; \quad y = 10 \pm 1.$$

Следовательно,  $\frac{S_x}{x} = 2\%$ ,  $\frac{S_y}{y} = 10\%$ , и  $\frac{S_z}{z} = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10,2\%$ .

Если необходимо повысить точность результата, то за счет каждой из двух первичных величин следует это осуществить?

Надо уточнить  $y$ , например, до значения  $\frac{S_y}{y} = 5\%$ , тогда

$$\frac{S_z}{z} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,4\%.$$

Описанное выше правило оценки точности при суммировании ошибок для обработчиков давлением, изучающим теорию пластичности, имеет особое значение.

В результате аналитических решений задач получают выражения для определения удельных сил (равномерно распределенных контактных напряжений) на границе заготовки с деформирующим инструментом, одним из простейших примеров которых является формула Э.Зибеля для расчета операции осадки цилиндрической заготовки:

$$q = \sigma_s [1 + \mu D / (3H)],$$

где  $\mu$  — коэффициент контактного трения;  $D$  и  $H$  соответственно текущие диаметр и высота деформируемой заготовки.

Другие ученые осуществили вывод более точных формул в той их части, которая соответствует выражению в квадратных скобках в формуле Э. Зибеля. К множителю  $\sigma_s$  было проявлено несравнимо меньшее внимание.

Это же можно сказать о формулах, полученных для расчета деформирующих заготовки сил в других операцияхковки и штамповки.

Если полученные более точные формулы умножать на приближенные значения  $\sigma_s$ , увеличения точности определения  $q$  достигнуто не будет.

## 2.5. Статистическая проверка гипотез

Цель – оценка значимости результата. Так, если 20 образцов стали из партии *A* разрушались при удельной силе  $420 \pm 35_{0,95}$  МПа, а 20 образцов стали из партии *B* – при удельной силе  $443 \pm 35_{0,95}$  МПа, то чтобы утверждать, что сталь *B* прочнее стали *A*, надо провести сравнение данных с помощью статистического критерия. Ибо может оказаться, что расхождение незначимо, и сталь из обеих партий обладает одинаковой прочностью.

В задачах такого типа имеют место две конкурирующие гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ . Нулевой гипотезой  $H_0$  называют основную (выдвинутую) гипотезу. Обычно нулевые гипотезы утверждают, что различие между сравниваемыми величинами отсутствуют, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными колебаниями выборки. Альтернативной ( $H_1$ ) называется гипотеза, конкурирующая с нулевой в том смысле, что если нулевая отвергается, то принимается альтернативная. Применительно к рассматриваемому выше примеру нулевую гипотезу словесно можно сформулировать следующим образом: две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности; альтернативную гипотезу: две выборки извлечены из разных генеральных совокупностей. Решение о принятии или отвержении выдвинутой нулевой гипотезы принимается с помощью статистических критериев. Применение одного из них будет рассмотрено ниже. При проверке гипотез по выборочным данным всегда существует риск принятия ложного решения, поскольку объем выборки конечен. Ошибкой первого рода называется ошибка отклонения верной нулевой гипотезы  $H_0$ .

Уровнем значимости статистического критерия называется вероятность  $\alpha$  совершения ошибки первого рода.  $\alpha$  – площадь за пределами квантиля под кривой плотности  $p(k/H_0)$  распределения вероятностей получения выборочных значений критерия  $k$ , равных  $k_0$  при условии справедливости гипотезы  $H_0$  (рис. 21).

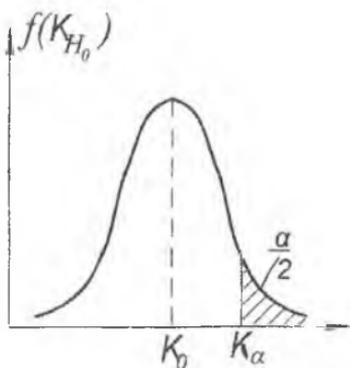


Рис. 21 Вероятность совершения ошибки первого рода  $\alpha$

Отклонение нулевой гипотезы  $H_0$  на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  означает, что, отклоняя эту гипотезу, мы или не ошибаемся (т.е. гипотеза  $H_0$  действительно ложная), или все-таки совершаем ошибку первого рода, считая правильную гипотезу  $H_0$  ложной. В последнем случае частота принятия ошибочного решения равна в среднем 5 на 100 случаев применения данного статистического критерия.

Ошибкой второго рода называется ошибка принятия ложной альтернативной гипотезы. Вероятность совершения ошибки второго рода принято обозначать  $\beta$  (рис. 22).

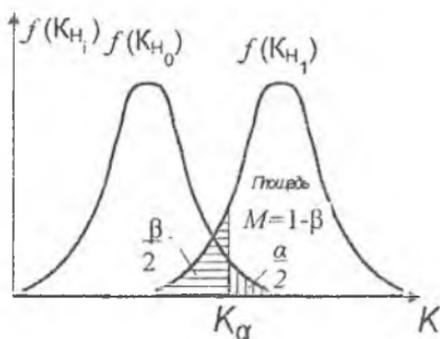


Рис. 22. Вероятность совершения ошибки второго рода

$$\beta = f(n, \alpha, H_1, \kappa); \lim_{n \rightarrow \infty} \beta = 1$$

Уменьшая вероятность ошибки первого рода до нуля, мы при фиксированном объеме выборки допускаем неограниченный риск совершить ошибку второго рода. На практике в большинстве случаев достаточно применение одного вида статистических критериев – критериев значимости, для которых фиксируется только вероятность совершения ошибки первого рода.

Экспериментатору, как правило, важно установить, насколько обоснованным является принятие нулевой гипотезы. Если критерий показывает, что для этого нет оснований, то экспериментатор нулевую гипотезу не принимает. При этом он не задумывается о принятии альтернативной гипотезы.

В то же время сказанное о вероятности совершения ошибки второго рода следует учитывать в формулировках результатов проведенного статистического анализа. Например, высказыванию о том, что выборки относятся к разным генеральным совокупностям, следует предпочесть фразу, что принадлежность выборок к одной генеральной совокупности не подтвердилась.

Как пример рассмотрено сравнение материала, из которого изготовлены две штанги. Маркировка материала обеих штанг – это сталь 18ХНВА. Из штанг изготовили образцы для определения предела прочности  $\sigma_B$ . Из первой штанги взято 9 образцов, из второй – 18. Методика испытаний образцов одинаковая. Получены следующие данные:

для первой штанги (1 выборка): 1215; 1003; 1075; 874; 876; 900; 814; 919; 900 МПа;

для второй штанги (2 выборка): 1194; 932; 1090; 1090; 1510; 1250; 1200; 976; 355; 1114; 305; 956; 1265; 1401; 1098; 1081; 1372; 1202 МПа.

Для 1 выборки  $\bar{x}_1 = 953$  МПа; для 2 выборки  $\bar{x}_2 = 1133$  МПа.

С целью проверки гипотезы о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности применен критерий Фишера ( $F$ -критерий). Этот критерий основан на сравнении «размаха» выборок, который оценивается по величине дисперсий.

Для приведенных выше двух выборок дисперсии следующие:

$$\text{для первой штанги } S_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^9 (x_k - \bar{x}_k)^2}{8} = 124293 / 8 = 15537;$$

$$\text{для второй штанги } S_2^2 = \frac{\sum_{m=1}^{18} (x_m - \bar{x}_m)^2}{17} = 498940 / 17 = 29349.$$

Значение критерия Фишера рассчитывается как отношение сравниваемых дисперсий. При вычислении отношения в числитель дроби ставится большее из значений дисперсий, поскольку критерий Фишера всегда больше единицы.

Отношение дисперсии для второй штанги к дисперсии для первой штанги  $S_2^2 / S_1^2 = 29349 / 15537 = 1,89$ .

Для выборки из первой штанги число степеней свободы равно 8. Для выборки из второй штанги число степеней свободы равно 17.

Фрагмент таблицы значений  $F$ -критерия при доверительной вероятности 95% приведен в табл. 41.

Из табл. 41 определено, что предельное значение  $F_p$ , ограничивающее интервал под кривой распределения  $F$ -критерия, попадание внутрь которого означает принадлежность выборок одной генеральной совокупности, равно 3,2. Поскольку рассчитанное значение  $F_p = 1,89$  меньше, чем 3,2, можно заключить, что обе штанги изготовлены из одной партии стали.

Таблица 41. Значения критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

| Число степеней свободы в знаменателе, $f_1$ | Число степеней свободы в числителе, $f_2$ |       |       |       |       |       |       |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                             | 1                                         | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 12    |
| 1                                           | 164,4                                     | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 244,9 |
| 2                                           | 18,5                                      | 19,2  | 19,2  | 19,3  | 19,3  | 19,3  | 19,4  |
| 3                                           | 10,1                                      | 9,6   | 9,3   | 9,1   | 9,0   | 8,9   | 8,7   |
| 4                                           | 7,7                                       | 6,9   | 6,6   | 6,4   | 6,3   | 6,2   | 5,9   |
| 5                                           | 6,6                                       | 5,8   | 5,4   | 5,2   | 5,1   | 5,0   | 4,7   |
| 6                                           | 6,0                                       | 5,1   | 4,8   | 4,5   | 4,4   | 4,3   | 4,0   |
| 8                                           | 5,3                                       | 4,5   | 4,1   | 3,8   | 3,7   | 3,6   | 3,3   |
| 10                                          | 5,0                                       | 4,1   | 3,7   | 3,5   | 3,3   | 3,2   | 2,9   |
| 12                                          | 4,8                                       | 3,9   | 3,5   | 3,3   | 3,1   | 3,0   | 2,7   |

## 2.6. Точность опыта и многофакторного эксперимента в целом

Точность опыта характеризуется величиной дисперсии, называемой дисперсией воспроизводимости эксперимента.

При реализации планов экспериментов при соответствующих каждому из опытов матриц планов значениях факторов желательно опыты повторять. Количество повторов каждого опыта обозначено буквой  $n$ . Значение  $\bar{y}$  и дисперсию при результатах повторных опытов, индексируемых значением  $g$ , определяют по следующим формулам:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{g=1}^n y_g}{n}; \quad (77)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{g=1}^n (y_g - \bar{y})^2}{f_1}, \quad (78)$$

где  $y_g$  – результат  $g$ -го повтора опыта;  $\bar{y}$  – среднее арифметическое значений  $n$  повторов опыта;  $f_1$  – число степеней свободы ( $f_1 = n - 1$ ).

Дисперсии отдельных опытов сравнивают между собой для установления их однородности. Сравнение может быть проведено с помощью, например, критерия Фишера.  $F$ - критерий можно применять и в тех случаях, когда число дисперсий больше двух. Из всех дисперсий выбирают наибольшую и наименьшую. Если различие между ними незначимо, всю группу дисперсий можно считать принадлежащей к одной совокупности.

При подсчете дисперсии воспроизводимости эксперимента в целом дисперсии при каждом сочетании значений факторов нужно просуммировать по числу  $N$  опытов и разделить на  $N$ :

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N S_{y_u}^2}{N}. \quad (79)$$

В случае недостатка материальных средств можно ограничиться проведением повторных наблюдений только при сочетании значений факторов, соответствующих одному из опытов матрицы плана, и значение  $\bar{y}$  принять за дисперсию воспроизводимости эксперимента в целом.

Точность многофакторного эксперимента в целом с ростом числа задействованных в эксперименте факторов возрастает. Этому явлению можно дать геометрическое истолкование. Ясно, что в линейных задачах коэффициенты

регрессии определяются тем точнее, чем больше радиус обследуемой сферы. В однофакторной задаче это иллюстрируется графиком на рис. 23.

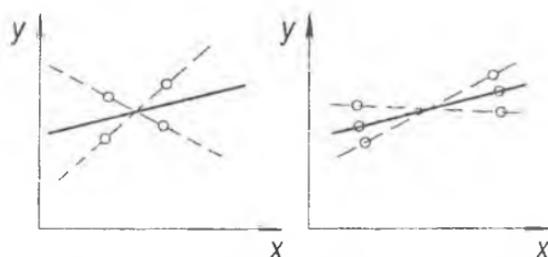


Рис. 23. Точность соответствия экспериментальных прямых (пунктир) истинной (сплошная линия) в зависимости от расстояния

На иллюстрации показано, что если две точки, в которых производится измерения, располагаются близко друг к другу, то даже небольшая ошибка в эксперименте вызывает большую ошибку в оценке коэффициента регрессии (наклона прямой). Чем дальше разнесены точки, тем точнее оценивается коэффициент регрессии при тех же ошибках в эксперименте. Однако в реальной исследовательской работе нельзя сколь угодно увеличивать радиус обследуемого пространства. Здесь надо учитывать, по крайней мере, два обстоятельства: 1) границы интервалов варьирования часто бывают жестко заданы, исходя из соображений, связанных с техникой эксперимента; 2) с увеличением интервалов варьирования нередко затрудняется возможность линейной аппроксимации: появляется необходимость описания результатов полиномом более высокого порядка.

Применяя многофакторные планы, увеличивают радиус обследуемой сферы за счет свойств многомерного пространства, не увеличивая при этом интервалов варьирования по каждой переменной в отдельности. Сказанное проиллюстрировано задачей с тремя независимыми переменными. Если каждая из переменных варьируется на двух уровнях, а именно  $-1$  и  $+1$ , то объем обследуемого пространства ограничен кубом, координаты которого задаются перестановкой чисел  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  (рис. 24).

План объединяет вершины куба таким образом, что получается правильный тетраэдр, или, как говорят в математике, правильный симплекс.

При описании мысленно вокруг симплекса сферы ее радиус равен  $r = \sqrt{3}$ . Для задачи с семью переменными план задается координатами вершин правильного симплекса в семимерном пространстве и радиус обследуемой сферы равен  $r = \sqrt{7}$ . Таким образом, с ростом числа независимых переменных растет радиус обследуемой сферы, хотя интервалы варьирования по каждой независимой переменной остаются по-прежнему теми же. Увеличение радиуса происходит за счет свойств многомерного пространства, в результате существенно повышается эффективность эксперимента.

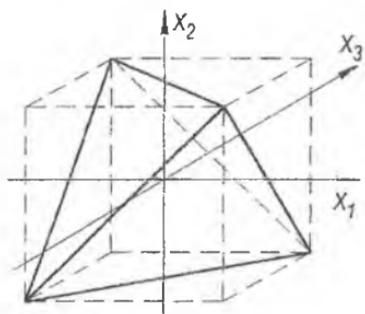


Рис. 24. Объем обследуемого пространства

Помимо графического объяснения повышения точности многофакторного эксперимента, проиллюстрированного рис. 23 и 24, можно дать и другое объяснение.

Как следует из формулы (9), коэффициенты математической модели рассчитываются по результатам всех опытов, приведенных в соответствующем столбце матрицы плана эксперимента. Поэтому, даже если один из результатов опытов будет содержать существенную ошибку, эта ошибка разделится на количество всех опытов и поэтому станет значительно менее существенной.

## 2. 7. Оценка значимости коэффициентов и адекватности построенной математической модели

Знание дисперсии воспроизводимости эксперимента позволяет оценить статистическую значимость рассчитанных коэффициентов математических моделей.

Для проверки гипотезы о статистической значимости коэффициентов регрессии прежде всего рассчитывают дисперсию оценок коэффициентов. При ортогональной матрице плана эксперимента применяют формулу:

$$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{N \sum_{u=1}^N x_{iu}^2}, \quad (80)$$

где  $i$  – индекс коэффициента;  $u$  – номер опыта в матрице плана.

С помощью формулы (80) и критерия Фишера проверена гипотеза о статистической значимости коэффициентов моделей (22) и (34).

Для удобства чтения материала запись этих моделей повторена в этом разделе.

Модели (22) следующие:

$$y_1 = 1,67 - 0,19 x_1 + 0,054 z_1 + 0,33 x_2 - 0,077 x_1 x_2 - 0,11 z_1 x_2,$$

$$y_2 = 146,3 - 0,65 x_1 - 0,26 z_1 - 48,4 x_2 + 0,077 x_1 x_2 + 0,0144 z_1 x_2.$$

Первая из этих моделей описывает качество среза, а вторая – силу при вырубке в зависимости от величины зазора, материала заготовки и совместного влияния этих двух факторов.

Дисперсии воспроизводимости эксперимента определены путем четырех повторений 5-го опыта матрицы плана эксперимента, приведенной в табл. 5. При этих повторения были получены следующие результаты:

Для  $y_1$  – 1, 2, 2, 2; для  $y_2$  – 96, 98, 99, 99.

Тогда:

$$S_{y_1}^2 = [(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2] / 3 = 1 / 3 = 0,33;$$

$$S_{y_2}^2 = [(96-98)^2 + (98-98)^2 + (99-98)^2 + (99-98)^2] / 3 = 6 / 3 = 2.$$

По формуле (78) рассчитаны дисперсии оценок коэффициентов. Получены следующие их значения.

$$\text{Для } y_1: S_{b_1}^2 = S_{b_{12}}^2 = 0,00645; S_{b_2}^2 = 0,056; S_{b_{11}}^2 = S_{b_{112}}^2 = 0,00265.$$

$$\text{Для } y_2: S_{b_1}^2 = S_{b_{12}}^2 = 0,0385; S_{b_2}^2 = 0,332; S_{b_{11}}^2 = S_{b_{112}}^2 = 0,0158.$$

Проведено сравнение абсолютных величин каждого коэффициента с его доверительным интервалом, рассчитанным по формуле (73), переписанной в следующем виде:

$$\Delta_{bi} = t_{\alpha, f_1} \cdot S_{bi}. \quad (81)$$

Предварительно на основании значений  $S_{bi}^2$  были посчитаны значения  $S_{bi}$ . Получены следующие результаты.

$$\text{Для } y_1: S_{b_1} = S_{b_{12}} = 0,08; S_{b_2} = 0,237; S_{b_{11}} = S_{b_{112}} = 0,0515.$$

$$\text{Для } y_2: S_{b_1} = S_{b_{12}} = 0,196; S_{b_2} = 0,579; S_{b_{11}} = S_{b_{112}} = 0,126.$$

Коэффициент считается значимым, когда его абсолютная величина больше доверительного интервала или равна ему, т.е.

$$|b_i| \geq t_{\alpha, f_1} \cdot S_{bi}. \quad (82)$$

Смысл последнего неравенства заключается в том, что абсолютная величина коэффициента должна быть в  $t$  раз больше, чем ошибка его определения.

Для моделей (22) с учетом дисперсий результатов воспроизводимости экспериментов ( $S_{y_1}^2$ ,  $S_{y_2}^2$ ) проверка значимости коэффициентов показала следующее.

Значение  $t_{\alpha, f_1}$  при доверительной вероятности 90% (уровне значимости критерия  $\alpha = 0,1$ ) и числе степеней свободы, которое имело место при вычислении  $S_{y_1}^2$  ( $f_1 = 3$ ), определенное по табл. 41, равно 2,35.

Доверительные интервалы коэффициентов, рассчитанные по формуле (74), следующие.

$$\text{Для } y_1: \Delta_{b_1} = \Delta_{b_{12}} = 2,35 \cdot 0,08 = 0,188; \Delta_{b_2} = 0,557; \Delta_{b_{11}} = \Delta_{b_{112}} = 0,121.$$

$$\text{Для } y_2: \Delta_{b_1} = \Delta_{b_{12}} = 2,35 \cdot 0,196 = 0,46; \Delta_{b_2} = 1,36; \Delta_{b_{11}} = \Delta_{b_{112}} = 0,296.$$

Сравнение абсолютных значений коэффициентов моделей с определенными для них величинами доверительных интервалов показало, что больше или равны (по абсолютной величине значений своих доверительных интервалов) следующие коэффициенты.

Для  $y_1$ :  $b_1$ , для  $y_2$ :  $b_1$ ,  $b_2$ . Эти коэффициенты признаны статистически значимыми.

Статистическое отсутствие значимости коэффициента интерпретируется как отсутствие соответствующего влияния. Можно считать, что данный фактор (или взаимодействие факторов) в изученных интервалах его изменения на функцию не влияет. При ортогональном планировании эксперимента коэффициенты, статистическая значимость которых не подтвердилась, могут быть из модели исключены, при этом пересчет остальных коэффициентов не требуется.

После сохранения членов только со статистически значимыми коэффициентами модели (22) приняли следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,67 - 0,19x_1, \\ y_2 &= 146,3 - 0,65x_1 - 48,4 x_2. \end{aligned} \quad (83)$$

Таким образом, на качество среза при вырубке влияет только ширина зазора, а на величину деформирующей силы влияют величина зазора и материал заготовки.

Этот вывод целесообразно сравнить с выводом, сделанным в п. 1.6, когда анализ модели проводился без оценки статистической значимости коэффициентов.

Модель (34), полученная при решении задачи в п. 1.10, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y &= 0,79 - 0,009 x_1 + 0,042 x_2 - 0,005 x_3 - 0,078 x_4 + 0,035 x_5 - \\ &- 0,003 x_6 + 0,01 z_1 + 0,119 z_2 - 0,006 z_3 - 0,002 q_1. \end{aligned}$$

При статистической обработке результатов эксперимента в качестве оценки дисперсии воспроизводимости была использована известная по предыдущим экспериментам на этой же установке величина  $S_p^2 = 0,0016$  при числе степеней свободы  $f_1 = 10$  [9].

Дисперсии оценок, рассчитанные по формуле (79), и соответствующие им выборочные среднеквадратичные отклонения следующие:

$$\begin{aligned} S_{b_0}^2 &= S_{b_4}^2 = S_{b_5}^2 = S_{b_6}^2 = S_{b_{11}}^2 = 1 \cdot 10^{-4}; \\ S_{b_0} &= S_{b_4} = S_{b_5} = S_{b_6} = S_{b_{11}} = 0,01; S_{b_1}^2 = 0,2 \cdot 10^{-4}; S_{b_1} = 0,014; \\ S_{b_2}^2 &= 1,45 \cdot 10^{-4}; S_{b_2} = 0,012; S_{b_3}^2 = 1,41 \cdot 10^{-4}; S_{b_3} = 0,012; \\ S_{b_{22}}^2 &= 5,61 \cdot 10^{-4}; S_{b_{22}} = 0,024; S_{b_{33}}^2 = 0,92 \cdot 10^{-4}; S_{b_{33}} = 0,024; \\ S_{b_{11}}^2 &= 2,22 \cdot 10^{-4}; S_{b_{11}} = 0,015. \end{aligned}$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов рассчитаны по формуле (80). В данном случае при  $\alpha = 0,05$  и  $f_1 = 10$  табличное значение  $t_{0,05,10} = 2,23$ , поэтому  $\Delta_{b_0} = \Delta_{b_4} = \Delta_{b_5} = \Delta_{b_6} = \Delta_{b_{11}} = 0,022$ ;  $\Delta_{b_1} = 0,031$ ;  $\Delta_{b_{22}} = \Delta_{b_{33}} = 0,022$ ;  $\Delta_{b_2} = \Delta_{b_3} = 0,027$ ;  $\Delta_{b_{111}} = 0,015$ .

Поскольку коэффициенты  $b_0$ ,  $b_2$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  и  $b_{22}$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, их следует признать статистически значимыми при 5%-ном уровне значимости. Остальные коэффициенты в модель можно не включать.

Таким образом, получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 0,79 + 0,042x_2 - 0,078x_4 + 0,035x_5 + 0,119z_2. \quad (84)$$

Из анализа полученной модели следует, что величина зерна в штампованных заготовках из сплава ХН75ВМЮ (ЭИ827) не зависит от использованных четырех типов штампов (коэффициенты  $b_1$ ,  $b_{11}$  и  $b_{111}$  значимыми не оказались). Кроме того, на величину зерна не влияют температура рекристаллизации в интервале 1100...1170 °С и температура старения в интервале 850...950 °С (не подтвердилась значимость коэффициентов  $b_3$ ,  $b_{33}$  и  $b_6$ ), поэтому эти температуры можно выбрать любыми в исследованном интервале.

Величина зерна в исследованных интервалах значений факторов зависит от температуры штамповки, скорости охлаждения поковки после рекристаллизации и температуры закалки. Для измельчения зерна штампованные заготовки после их рекристаллизации целесообразно охлаждать на воздухе ( $x_4 = +1$ , так как  $b_4 = -0,078$  – отрицательный), а закалывать с температуры 1200 °С ( $x_5 = -1$ , так как  $b_5 = 0,035$  – положительный).

Для определения наилучшей температуры штамповки  $x_4 = +1$  и  $x_5 = -1$  подставлены в уравнение (83). Получено:

$$y = 0,677 + 0,042x_2 + 0,119z_2.$$

По соответствующей формуле из (33)  $z_2$  переведено в  $x_2$  и получено:

$$y = 0,595 - 0,007x_2 + 0,119x_2^2. \quad (85)$$

Определен экстремум функции (84) (это минимум, поскольку коэффициент при  $x_2^2$  – положительная величина). Для этого выполнено следующее действие:

$$\partial y / \partial x_2 = -0,007 + 2 \cdot 0,119x_2 = 0.$$

Отсюда  $x_2 = 0,029 \approx 0,03$  или, с учетом соответствующей формулы из (33), наилучшая температура штамповки  $X_2 = 1139 \approx 1140$  °С.

Таким образом, наилучшим технологическим процессом для получения возможно более мелкого зерна в штампованных заготовках из сплава ХН75ВМЮ является штамповка в штампе любой конструкции из I–IV типов при температуре 1140 °С. После этого проводится рекристаллизация при любой

температуре в интервале 1100...1170 °С, охлаждение после рекристаллизации на воздухе, закалка с температуры 1200 °С и старение при любой температуре в интервале 850...950 °С. Если выбрать температуру рекристаллизации 1140 °С, то процесс штамповки и последующей рекристаллизации удастся совместить, что повысит производительность процесса.

Этот вывод целесообразно сравнить с выводом, сделанным в п. 1.10, когда анализ модели проводился без оценки статистической значимости коэффициентов.

Проверка гипотезы об адекватности модели – это поиск ответа на вопрос: можно ли использовать полученное уравнение или необходима более точная модель.

Для проверки гипотезы об адекватности модели применяется  $F$ -критерий (Фишера). Для определения его расчетного значения служит следующая формула:

$$F_{f_2, f_1} = S^2_{\text{неад}} / S_y^2. \quad (86)$$

В знаменателе этого выражения стоит дисперсия воспроизводимости эксперимента  $S_y^2$ , определенная с числом степеней свободы  $f_1$ , в числителе – дисперсия неадекватности модели  $S^2_{\text{неад}}$ :

$$S^2_{\text{неад}} = SS_{\text{неад}} / f_2. \quad (87)$$

Числитель формулы (86) рассчитывают по-разному, в зависимости от способа дублирования опытов.

При неравномерном дублировании

$$SS_{\text{неад}} = \sum_{i=1}^N n_i (y_{i \text{ расч}} - y_{i \text{ эксп}})^2, \quad (88)$$

где  $y_{i \text{ расч}}$  – значение выходного параметра в  $i$ -ом опыте, рассчитанное по уравнению регрессии;  $y_{i \text{ эксп}}$  – среднее из  $n_i$  дублей  $i$ -го опыта.

При равномерном дублировании

$$SS_{\text{неад}} = \sum_{i=1}^N n_i (y_{i \text{ расч}} - y_{i \text{ эксп}})^2, \quad (89)$$

где  $y_{i \text{ расч}}$  и  $y_{i \text{ эксп}}$  – значения выходного параметра в  $i$ -ом опыте, соответственно рассчитанные по уравнению регрессии и определенные экспериментально.

Если же дублируется только один опыт, например первый, то:

$$SS_{\text{неад}} = n_1 (y_1 \text{ расч} - y_1 \text{ эксп})^2 + \sum_{i=2}^N (y_{i \text{ расч}} - y_{i \text{ эксп}})^2. \quad (90)$$

В знаменателе формулы (86) – число степеней свободы, определяемое как  $f_2 = N - k$ , где  $k$  – количество оставленных, т.е. признанных значимыми, коэффициентов модели (включая  $b_0$ );  $N$  – число опытов матрицы плана эксперимента.

Таким образом,  $F$ -критерий, представляющий собой отношение дисперсии неадекватности модели к дисперсии опыта, отвечает на вопрос, насколько модель в целом предсказывает результат менее точно по сравнению с опытом.

Гипотезу об адекватности модели принимают в том случае, когда рассчитанное значение  $F$ -критерия не превышает табличного (табл. 41) для выбранного уровня значимости, т.е. когда  $F_{\text{расч}} \leq F_{\text{табл}}$ .

Проверка гипотез об адекватности модели проведена при решении практических задач, описанных ниже в п.п. 3.4; 3.6, 3.10, 3.11, 3.12 и 3.13.

### 3. ПРОВЕДЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФАКТОРНЫХ ПЛАНОВ

#### 3.1. Построение уравнения регрессии при моделировании холодного выдавливания стаканов

Исследована зависимость удельной силы холодного выдавливания показанных на рис. 12 деталей от твердости заготовки из углеродистой стали и степени обжатия  $\varepsilon$ , определяемой как отношение площади поперечного сечения выдавливаемой полости к площади поперечного сечения заготовки. Удельная сила выдавливания определялась как отношение деформирующей заготовку силы к площади поперечного сечения выдавливающей полость пуансона (равной площади поперечного сечения полости).

Твердость варьировали на трех уровнях: HB105; 135; 165; степень обжатия – на двух уровнях:  $\varepsilon = 44,5\%$ ;  $56,3\%$ .

Указанное количество уровней варьирования двух факторов позволяет построить математическую модель вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}z_1 + b_{12}x_1x_2. \quad (91)$$

План эксперимента приведен в табл. 42.

Таблица 42. Матрица плана в натуральном и кодированном масштабах

| № опыта | HB  | $\varepsilon$ , % | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $x_1x_2$ | $y$ , (q МПа) |
|---------|-----|-------------------|-------|-------|-------|-------|----------|---------------|
| 1       | 105 | 44,5              | 1     | -1    | -1    | 1     | 1        | 1900          |
| 2       | 135 | 44,5              | 1     | 0     | -1    | -2    | 0        | 2000          |
| 3       | 165 | 44,5              | 1     | 1     | -1    | 1     | -1       | 2400          |
| 4       | 105 | 56,3              | 1     | -1    | 1     | 1     | -1       | 2000          |
| 5       | 135 | 56,3              | 1     | 0     | 1     | -2    | 0        | 2200          |
| 6       | 165 | 56,3              | 1     | 1     | 1     | 1     | 1        | 2500          |

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным и обратно, посчитанные по зависимостям (35), следующие:

$$x_1 = (HB - 135) / 30; x_2 = 10(\varepsilon - 50,4) / 59; z_1 = 3(x_1^2 - 2/3). \quad (92)$$

Поскольку матрица плана в кодированном масштабе отвечает условиям симметрии и ортогональности, коэффициенты модели (91) рассчитаны по формуле (9).

Получены следующие оценки коэффициентов:

$$b_0 = 2167; b_1 = 167; b_2 = 67; b_{11} = 33; b_{12} = 0.$$

Дисперсии оценок коэффициентов рассчитаны по формуле (80).

Дисперсия воспроизводимости эксперимента, определенная как результат двадцатикратного дублирования опыта №4, равна 6,5. Дисперсии оценок коэффициентов:

$$S_{b_0}^2 = 108,3; S_{b_1}^2 = 162,5; S_{b_2}^2 = 108,3; S_{b_{11}}^2 = 54,2; S_{b_0} = 10,41; \\ S_{b_1} = 12,75; S_{b_2} = 10,41; S_{b_{11}} = 7,36.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определены по формуле (81). В данном примере при  $\alpha = 0,05$  и  $f_1 = 19$  табличное значение  $t$ -критерия  $t_{0,05,19} = 2,09$ .

Поэтому  $\Delta_{b_0} = 21,76$ ;  $\Delta_{b_1} = 26,65$ ;  $\Delta_{b_2} = 21,76$ ;  $\Delta_{b_{11}} = 15,38$ .

Поскольку все коэффициенты по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, они признаны статистически значимыми при 5%-ном уровне значимости.

После подстановки численных значений коэффициентов и перехода к натуральным значениям факторов по формулам (92) модель (91) приняла следующий вид:

$$q [\text{МПа}] = 0,11 HB^2 - 24 HB + 11,4 \varepsilon + 2782.$$

Рассчитанные по этой модели значения удельной силы холодного выдавливания стаканов из углеродистых сталей расходятся с результатами замеров не более, чем на 5%.

### 3.2. Моделирование влияния магнитно-импульсного воздействия на плотность формованных порошковых заготовок

В заготовках машиностроительных деталей, изготовленных холодным формованием железных порошков на прессах, всегда имеет место остаточная пористость. Уменьшить эту пористость путем увеличения силы, сжимающей порошковую заготовку, можно только до определенных значений (различных для конкретных марок железных порошков). Объясняется это тем, что после достижения определенного значения остаточной пористости увеличение сжимающей силы практически не влияет на эту пористость, а приводит к образованию так называемых перепрессовочных трещин.

Авторами исследован способ холодного формования железных порошков, позволяющий повысить плотность изготавливаемых заготовок.

После помещения порошковой шихты, содержащей в качестве смазочного материала 0,5...1% порошка стеарата цинка, в зарытую матрицу к пуансону приложено давление  $p$  (рис. 25). Давление варьировалось в пределах 600...800 МПа. В исследуемом способе формования матрица была помещена в индуктор, в процессе формования заготовки осуществлялось 3 разряда индуктора.

Применена также аналогичная магнитно-импульсная обработка порошковой шихты до ее засыпки в матрицу. Для этого исходная шихта в пластиковом контейнере была помещена внутрь индуктора магнитно-импульсной установки и подвергнута воздействию разрядов.

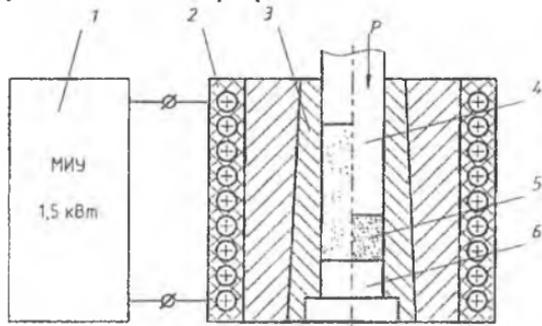


Рис. 25. Схема формирования порошковой заготовки:

1 – магнитно-импульсная установка; 2 – индуктор; 3 – матрица; 4 – пуансон;  
5 – порошковая заготовка; 6 – конгрпуансон

В проведенном исследовании применен железный порошок марки ПЖВ4.160.26. Как показано в п.1.8, этот порошок уплотняется хуже, чем другие железные порошки (отечественные и зарубежные), этим объясняются невысокие значения плотности формованных в эксперименте заготовок.

Одним из факторов в эксперименте являлся масштабный (фактор  $X_5$ ): формовали заготовки диаметром 25 и 78 мм, высота формованных заготовок составляла 2/3 от их диаметров. Заготовки диаметром 25 мм формовали на испытательной машине «Инстрон» номинальной силой 60 кН, а заготовки диаметром 78 мм – на прессе мод. К03.032 номинальной силой 5 МН. Скорость деформирования составляла 0,2 мм/с.

Кроме масштабного варьировали следующие факторы: давление на заготовку со стороны формирующего пуансона (фактор  $X_4$ ); содержание в шихте стеарата цинка (фактор  $X_3$ ); воздействие импульсным магнитным полем на порошковую шихту до начала формования (фактор  $X_2$ ); воздействие импульсным магнитным полем на порошковую шихту в процессе формования (фактор  $X_1$ ).

На первом этапе исследования был проведен лабораторный эксперимент с целью оценки допустимости применения линейной математической модели, описывающей зависимость относительной плотности  $\gamma$  (%) формуемой заготовки от всех названных выше факторов, кроме масштабного.

Была принята следующая математическая модель:

$$\gamma [\%] = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{14}X_1X_4, \quad (93)$$

где  $X_1 \dots X_4$  – значения факторов в натуральном масштабе;  $X_1X_2$ ,  $X_1X_3$ ,  $X_1X_4$  – оцениваемые совместные влияния факторов;  $b_0 \dots b_{14}$  – коэффициенты модели, определяемые в результате эксперимента.

Были приняты следующие уровни значений факторов в натуральном масштабе. Для фактора  $X_1$  – нижний уровень 0 (без воздействия), верхний – 10 кА/м (напряженность магнитного поля); для фактора  $X_2$  – нижний уровень 0 (без воздействия), верхний – 10 кА/м; для фактора  $X_3$  – нижний уровень 0,5%, верхний – 1%; для фактора  $X_4$  – нижний уровень 600 МПа, верхний – 800 МПа.

Матрица плана эксперимента приведена в табл. 43 и 44.

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным (и обратно) следующие:

$$x_1 = (X_1 - 5)/5; \quad x_2 = (X_2 - 5)/5; \quad x_3 = (X_3 - 0,75)/0,25; \quad x_4 = (X_4 - 700)/100.$$

Таблица 43. Матрица плана эксперимента в натуральном  $X_i$  масштабе и результаты опытов

| № оп. | $X_1$ ,<br>кА/м | $X_2$ ,<br>кА/м | $X_3$ ,<br>% | $X_4$ ,<br>МПа | $\gamma_{\text{эксп}}$ | $\gamma_{\text{расч}}$ |
|-------|-----------------|-----------------|--------------|----------------|------------------------|------------------------|
|       |                 |                 |              |                | %                      |                        |
| 1     | 0               | 0               | 0,5          | 600            | 81,78                  | 81,778                 |
| 2     | 10              | 10              | 0,5          | 600            | 83,31                  | 83,308                 |
| 3     | 10              | 0               | 1            | 600            | 83,44                  | 83,436                 |
| 4     | 0               | 10              | 1            | 600            | 81,12                  | 81,118                 |
| 5     | 10              | 0               | 0,5          | 800            | 83,90                  | 83,875                 |
| 6     | 0               | 10              | 0,5          | 800            | 82,28                  | 82,276                 |
| 7     | 0               | 0               | 1            | 800            | 82,87                  | 82,868                 |
| 8     | 10              | 10              | 1            | 800            | 84,52                  | 84,518                 |

Для простоты записи значения факторов в кодированном масштабе, приведенные в табл. 44 и равные 1, опущены, оставлены только знаки «+» и «-», стоящие перед единицей.

Полученные опытным путем и записанные в табл. 43 справа значения относительных плотностей заготовок  $\gamma_{\text{эксп}}$  использованы для расчета по формуле (9) коэффициентов математической модели (93).

После расчета коэффициентов математическая модель (93) приняла следующий вид:

$$\gamma [\%] = 82,9 + 0,89x_1 - 0,095x_2 + 0,085x_3 + 0,49x_4 + 0,218x_1x_2 + 0,102x_1x_3 - 0,072x_1x_4. \quad (94)$$

Рассчитанные по модели (94) значения относительных плотностей заготовок  $\gamma_{\text{расч}}$  для сочетаний факторов в опытах матрицы плана эксперимента приведены в правом крайнем столбце табл. 43.

Сопоставление результатов, полученных экспериментально и расчетом по модели (94), показывает их хорошую сходимость. Нет необходимости проводить статистическую проверку, чтобы сделать заключение об адекватности математической модели (94) выполняемой операции формования, совмещенной с магнитно-импульсным воздействием на заготовку.

Таблица 44. Матрица плана в кодированном  $x$ ; масштабе

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $x_1 x_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1     | +     | -     | -     | -     | -     | +         | +         | +         |
| 2     | +     | +     | +     | -     | -     | +         | -         | -         |
| 3     | +     | +     | -     | +     | -     | -         | +         | -         |
| 4     | +     | -     | +     | +     | -     | -         | -         | +         |
| 5     | +     | +     | -     | -     | +     | -         | -         | +         |
| 6     | +     | -     | +     | -     | +     | -         | +         | -         |
| 7     | +     | -     | -     | +     | +     | +         | -         | -         |
| 8     | +     | +     | +     | +     | +     | +         | +         | +         |

Анализ математической модели (94) показывает, что влияние фактора  $x_1$ , характеризующего воздействие импульсного магнитного поля на порошковую шихту в процессе ее формования, приводит к повышению относительной плотности заготовок. Причем этот фактор оказывает как непосредственное влияние на плотность, так и во взаимодействии с фактором  $x_2$  (предварительная обработка порошковой шихты импульсным магнитным полем), а также во взаимодействии с фактором  $x_3$  (процентное содержание в шихте стеарата цинка).

Влияние фактора  $x_1$  больше, чем влияние фактора  $x_4$  (давление на заготовку со стороны формирующего пуансона) в диапазоне значений  $x_4 = 600 \dots 800$  МПа. Взаимодействие  $x_1$  с  $x_3$  объясняется тем, что оба эти фактора уменьшают контактное трение между частицами порошка. Отрицательное влияние взаимодействия факторов  $x_1$  и  $x_4$  на относительную плотность объясняется тем, что при воздействии импульсным магнитным полем в процессе формования заготовок уменьшается различие в значениях плотности в зависимости от давления сжатия порошковой шихты в диапазоне 600...800 МПа.

Для более полного исследования предложенного метода повышения плотности порошковых заготовок был проведен опытно-промышленный эксперимент, отличающийся от лабораторного эксперимента учетом масштаба заготовок и, соответственно, штампов. Был введен масштабный фактор  $X_5$ , конкретные значения которого указаны выше.

С учетом того, что значения коэффициентов перед отдельными членами математической модели (94), построенной в результате первого описанного эксперимента, малы, эти значения в новую математическую модель не были включены. В опытно-промышленном эксперименте был принят следующий вид математической модели:

$$\gamma [\%] = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 + b_{12} X_1 X_2 + b_{15} X_1 X_5, \quad (95)$$

Матрица плана эксперимента приведена в табл. 45 и 46.

Таблица 45. Матрица плана эксперимента в натуральном  $X_i$  масштабе и результаты опытов

| № оп. | $X_1$ ,<br>кА/м | $X_2$ ,<br>кА/м | $X_3$ ,<br>% | $X_4$ ,<br>МПа | $X_5$ ,<br>мм | У <sub>эксп</sub> | У <sub>расч</sub> |
|-------|-----------------|-----------------|--------------|----------------|---------------|-------------------|-------------------|
|       |                 |                 |              |                |               | %                 |                   |
| 1     | 0               | 0               | 0,5          | 600            | 25            | 81,78             | 82,12             |
| 2     | 10              | 0               | 0,5          | 600            | 78            | 83,95             | 83,55             |
| 3     | 0               | 10              | 0,5          | 600            | 78            | 83,69             | 83,04             |
| 4     | 10              | 10              | 0,5          | 600            | 25            | 83,31             | 83,84             |
| 5     | 0               | 0               | 1            | 600            | 78            | 82,20             | 83,39             |
| 6     | 10              | 0               | 1            | 600            | 25            | 83,44             | 82,82             |
| 7     | 0               | 10              | 1            | 600            | 25            | 81,12             | 80,98             |
| 8     | 10              | 10              | 1            | 600            | 78            | 82,70             | 83,10             |
| 9     | 0               | 0               | 0,5          | 800            | 78            | 84,70             | 84,38             |
| 10    | 10              | 0               | 0,5          | 800            | 25            | 83,90             | 84,47             |
| 11    | 0               | 10              | 0,5          | 800            | 25            | 82,28             | 82,63             |
| 12    | 10              | 10              | 0,5          | 800            | 78            | 85,20             | 84,82             |
| 13    | 0               | 0               | 1            | 800            | 25            | 82,87             | 82,32             |
| 14    | 10              | 0               | 1            | 800            | 78            | 83,30             | 83,74             |
| 15    | 0               | 10              | 1            | 800            | 78            | 82,80             | 82,56             |
| 16    | 10              | 10              | 1            | 800            | 25            | 84,52             | 84,03             |

Для масштабного фактора формула перехода от натуральных значений к кодированным (и обратно) следующая:  $x_5 = (X_5 - 51,5)/26,5$ .

Таблица 46. Матрица плана в кодированном  $x_i$  масштабе

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1 x_2$ | $x_1 x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|
| 1     | +     | -     | -     | -     | -     | -     | +         | +         |
| 2     | +     | +     | -     | -     | -     | +     | -         | +         |
| 3     | +     | -     | +     | -     | -     | +     | -         | -         |
| 4     | +     | +     | +     | -     | -     | -     | +         | -         |
| 5     | +     | -     | -     | +     | -     | +     | +         | -         |
| 6     | +     | +     | -     | +     | -     | -     | -         | -         |
| 7     | +     | -     | +     | +     | -     | -     | -         | +         |
| 8     | +     | +     | +     | +     | -     | +     | +         | +         |
| 9     | +     | -     | -     | -     | +     | +     | +         | -         |
| 10    | +     | +     | -     | -     | +     | -     | -         | -         |
| 11    | +     | -     | +     | -     | +     | -     | -         | +         |
| 12    | +     | +     | +     | -     | +     | +     | +         | +         |
| 13    | +     | -     | -     | +     | +     | -     | +         | +         |
| 14    | +     | +     | -     | +     | +     | +     | -         | +         |
| 15    | +     | -     | +     | +     | +     | +     | -         | -         |
| 16    | +     | +     | +     | +     | +     | -     | +         | -         |

После расчета коэффициентов математическая модель (95) приняла следующий вид:

$$\gamma [\%] = 83,235 + 0,555x_1 - 0,0325x_2 - 0,366x_3 + 0,461x_4 + 0,3325x_5 + 0,175x_1x_2 - 0,335x_1x_5 \quad (96)$$

Из этой математической модели, как и из модели (94), следует, что фактор  $x_1$  более существенно влияет на увеличение плотности заготовки, чем фактор  $x_4$  (в интервале давлений 600...800 МПа). Влияние фактора  $x_2$  еще более усиливает влияние фактора  $x_1$ , что определяется членом модели, включающим в себя произведение  $x_1x_2$ . При увеличении размеров заготовки эффект влияния фактора  $x_1$  несколько снижается. Это определяется членом модели, включающим в себя произведение  $x_1x_5$ , и объясняется недостаточной мощностью магнитно-импульсной установки при формировании крупной заготовки внутри матрицы массой более 100 кг.

Отрицательное влияние фактора  $x_3$  (увеличения содержания стеарата цинка от 0,5 до 1% по массе) можно объяснить следующим. Стеарат цинка даже при небольшой его массе занимает много места между частицами железного порошка, т.е. имеет большой относительный объем. Как следствие общая относительная плотность заготовки, рассчитанная делением ее массы на объем и на теоретическую плотность железа, уменьшается.

После перехода к натуральным значениям факторов путем подстановки в математическую модель (96) приведенных выше формул, связывающих между собой значения факторов в натуральном и кодированном масштабах, и приведения подобных членов модель (96) приняла следующий вид:

$$\gamma [\%] = 79,462 + 0,206X_1 - 0,0415X_2 - 1,464X_3 + 0,00461X_4 + 0,0251X_5 + 0,007X_1X_2 - 0,00253X_1X_5 \quad (97)$$

В модель (97) значения факторов следует подставлять в единицах, указанных в табл. 43 и 45.

В результате проведенного исследования выявлено, что при магнитно-импульсном воздействии плотность порошковой заготовки повышается более существенно, чем при увеличении давления сжатия шихты от 600 до 800 МПа. Предварительная магнитно-импульсная обработка порошковой шихты перед засыпкой в матрицу усиливает эффект магнитно-импульсного воздействия при формировании заготовок.

### 3.3. Построение уравнений регрессий при моделировании выдавливания стаканов из спеченных порошковых заготовок

Исследована и описана математическими моделями операция холодного выдавливания детали типа стакана (рис. 26) из формованной и спеченной заготовки из железного порошка. Построены модели зависимости удельной силы

выдавливания (см. п. 3.1), средней плотности выдавленного стакана и неравномерности остаточной пористости в выдавленном стакане.

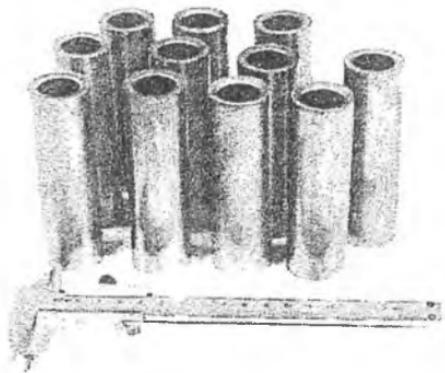


Рис. 26. Детали, изготовленные холодным выдавливанием из формованных и спеченных заготовок из железного порошка

Факторами являлись перечисленные ниже:

- наличие на начальном этапе выдавливания, способствующего уплотнению заготовки, перемещения матрицы в сторону, противоположную течению материала в стенку стакана (фактор  $X_1$ );
- наличие перемещения матрицы на последующем этапе выдавливания в направлении течения материала в стенку стакана (фактор  $X_2$ );
- отношение диаметра полости матрицы к диаметру пуансона  $R$  (см. рис. 13), а также пористости  $\delta$  формованной и спеченной заготовки для выдавливания.

Матрица плана эксперимента приведена в табл. 47. Фактор  $X_1$  учитывает наличие трения заготовки о матрицу, способствующего уплотнению заготовки, а фактор  $X_2$  – наличие трения, способствующего истечению уплотненного материала в стенку детали:  $X_1 = 0$ , если трение препятствовало уплотнению заготовки, и  $X_1 = 1$ , если способствовало уплотнению. Аналогично фактор  $X_2 = 0$ , если трение препятствовало истечению уплотненного материала в стенку детали на стадии выдавливания, и  $X_2 = 1$ , если трение способствовало истечению материала.

Выходными параметрами являются: удельная сила выдавливания  $q$  в МПа ( $y_1$ ), средняя плотность изделия в % по отношению к теоретической плотности железа ( $y_2$ ), неравномерность распределения остаточной пористости в изделии в % ( $y_3$ ).

По результатам опытов строятся модели вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{33}z_3 + b_{44}z_4. \quad (98)$$

Таблица 47. Матрица плана в натуральном и кодированном масштабах

| № оп. | $X_1$ | $X_2$ | $R$  | $\delta$<br>% | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z_3$ | $z_4$ | $y_1$<br>( $q$ ),<br>МПа | $y_2$<br>( $\gamma$ ),<br>% | $y_3$<br>( $\delta_{\max} - \delta_{\min}$ ), % |
|-------|-------|-------|------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------|
| 1     | 0     | 0     | 1,75 | 17,5          | 1     | -1    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1830                     | 93,05                       | 7,11                                            |
| 2     | 0     | 0     | 1,5  | 16,65         | 1     | -1    | 0     | 0     | -2    | -2    | 1860                     | 96,3                        | 6,8                                             |
| 3     | 1     | 0     | 1,25 | 15,8          | 1     | -1    | -1    | -1    | 1     | 1     | 1980                     | 99,3                        | 2,11                                            |
| 4     | 0     | 0     | 1,5  | 15,8          | 1     | -1    | 0     | -1    | 1     | 1     | 1950                     | 97,1                        | 5,2                                             |
| 5     | 0     | 0     | 1,25 | 17,5          | 1     | -1    | -1    | 1     | 1     | 1     | 1980                     | 97,85                       | 4,35                                            |
| 6     | 1     | 0     | 1,75 | 16,65         | 1     | -1    | 1     | 0     | -2    | -2    | 1700                     | 94,2                        | 4,99                                            |
| 7     | 0     | 1     | 1,25 | 16,65         | 1     | 2     | -1    | 0     | -2    | -2    | 1760                     | 97,38                       | 4,43                                            |
| 8     | 0     | 1     | 1,75 | 15,8          | 1     | 2     | 1     | -1    | 1     | 1     | 1880                     | 94,75                       | 7,58                                            |
| 9     | 1     | 1     | 1,5  | 17,5          | 1     | 2     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1730                     | 98,0                        | 2,38                                            |

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным и обратно, посчитанные по зависимостям (13), (15) и (17), следующие:

$$x_1 = 3(X_1 - 1/3); \quad x_2 = 3(X_2 - 1/3); \quad x_3 = 4(R - 1,5); \\ x_4 = (20/17)(\delta - 16,65); \quad z_3 = 3(x_3^2 - 2/3); \quad z_4 = 3(x_4^2 - 2/3).$$

Поскольку матрица плана в кодированном масштабе отвечает условиям симметрии и ортогональности, коэффициенты модели (98) рассчитаны по формуле (9).

Оценки коэффициентов модели для определения удельной силы выдавливания следующие:

$$b_0 = 1852,22; \quad b_1 = -24,44; \quad b_2 = -31,11; \quad b_3 = -51,67; \\ b_4 = -45; \quad b_{33} = 2,78; \quad b_{44} = 39,44.$$

Дисперсия воспроизводимости в данном эксперименте равна  $S_{y_1}^2 = 2700$ .

Дисперсии оценок коэффициентов, рассчитанные по формуле (80), следующие:

$$S_{b_0}^2 = 239,2; \quad S_{b_1}^2 = S_{b_2}^2 = 119,6; \quad S_{b_3}^2 = 108,3; \\ S_{b_4}^2 = S_{b_{33}}^2 = 358,8; \quad S_{b_{44}}^2 = 119,6.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определены по формуле (81), поскольку при  $\alpha = 0,05$  и  $f_1 = 8$  табличное значение  $t$ -критерия  $t_{0,05,8} = 2,31$ ,  $\Delta_{b_0} = 35,74$ ;  $\Delta_{b_1} = \Delta_{b_2} = \Delta_{b_{33}} = \Delta_{b_{44}} = 28,3$ ;  $\Delta_{b_3} = \Delta_{b_4} = 49$ .

Таким образом, при 5%-ном уровне значимости критерия следует признать статистически значимыми коэффициенты  $b_0$ ;  $b_2$ ;  $b_3$ ;  $b_{44}$ .

После перехода к натуральным значениям факторов модель для удельной силы выдавливания имеет вид:

$$q[\text{МПа}] = 47532,78 - 93,33 X_2 - 206,68 R + 163,83 \delta^2 - 5455,66 \delta.$$

Аналогично получены модели:

для плотности изделия

$$\gamma [\%] = 79,05 + 1,09 X_1 - 16,7 R^2 + 41,76 R - 0,441 \delta,$$

нравномерности распределения остаточной пористости

$$\delta_{\max} - \delta_{\min} [\%] = -2,71 - 2,92 X_1 + 5,86 R.$$

Полученные модели подтверждают правильность сделанного в предшествовавшем эксперименту анализе предположения о рациональности создания дополнительных сил трения на контакте заготовки с матрицей, препятствующих истечению материала в стенку изделия на этапе уплотнения заготовки. Также – правильность предположения о рациональности создания после окончания уплотнения и стабилизации выдавливания дополнительных сил трения, способствующих истечению материала в стенку изделия.

Модели позволяют численно оценить влияние направления сил трения на рассмотренные выходные параметры при различных размерах детали и плотности предварительно формованной и спеченной заготовки для выдавливания.

### 3.4. Моделирование формования порошковых колец со скручиванием заготовки

Проведено формование колец (рис. 27) в штампе, показанном на рис. 28.

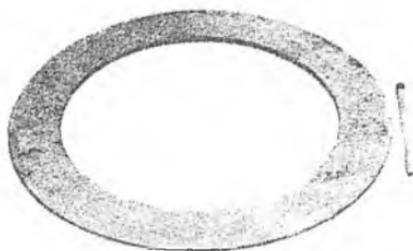


Рис. 27. Кольцо из порошковой стали, сформованное в штампе, до его спекания

Изучалось влияние жесткости упругого элемента б штампа, влияющего на соотношение поступательного и вращательного перемещений пуансона 3, шероховатости торца пуансона, марки легированного порошка и количества порошка стеарата цинка в порошковой смеси, выполняющего роль смазки.

Выходными параметрами являлись плотность формованных колец, а также твердость по Бринеллю колец после их спекания.

Исследовались порошковая сталь марки ULTRAPAC-LE (фирмы Mannesmann Demag) [17] и гомогеннолегированная порошковая сталь (ГЛП) фирмы «Тулачермет». Им присвоили условные численные значения: 0 – ULTRAPAC-1 E, 1 – ГЛП.

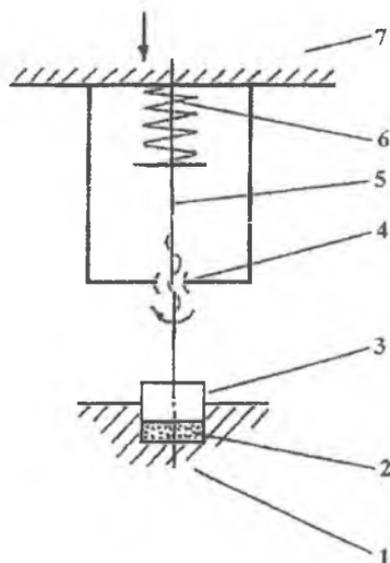


Рис. 28. Штмп для формования порошковых деталей со скручиванием заготовки:  
 1 – нижняя плита с матрицей; 2 – порошковая заготовка; 3 – пуансон;  
 4 – гайка с несамотормозящей резьбой; 5 – винт; 6 – упругий элемент;  
 7 – верхняя плита

Целью экспериментальных исследований являлось построение моделей вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 \quad (99)$$

для плотности и твердости деталей.

Матрица плана эксперимента в натуральном масштабе приведена в табл.48.

Таблица 48. Матрица плана эксперимента в натуральном масштабе

| № опыта | Жесткость упругого элемента, кН/мм | Шероховат. торца пуансона | Порошок         | Содерж. стеарата цинка, % | Кол-во повторов опыта |
|---------|------------------------------------|---------------------------|-----------------|---------------------------|-----------------------|
| 1       | 80                                 | 1,25                      | 0 (ULTRAPAC-LE) | 1                         | 1                     |
| 2       | 160                                | 1,25                      | 0 (ULTRAPAC-LE) | 1                         | 1                     |
| 3       | 80                                 | 2,5                       | 0 (ULTRAPAC-LE) | 0,5                       | 1                     |
| 4       | 160                                | 2,5                       | 0 (ULTRAPAC-LE) | 0,5                       | 1                     |
| 5       | 80                                 | 1,25                      | 1 (ГЛП)         | 0,5                       | 1                     |
| 6       | 160                                | 1,25                      | 1 (ГЛП)         | 0,5                       | 4                     |
| 7       | 80                                 | 2,5                       | 1 (ГЛП)         | 1                         | 1                     |
| 8       | 160                                | 2,5                       | 1 (ГЛП)         | 1                         | 1                     |

При проведении эксперимента образцы формовали из предварительно подготовленной шихты, состав которой определяли в соответствии с матрицей плана эксперимента. Для каждого опыта, кроме шестого, формовали по одному образцу. Шестой опыт дублировали четыре раза.

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным и обратно, рассчитанные по зависимостям (13), (15) и (17), следующие:

$$x_1 = -(X_1 - 120) / 40; \quad x_2 = -(X_2 - 1,875) / 0,625; \quad x_3 = -(X_3 - 0,5) / 0,5; \\ x_4 = (X_4 - 0,75) / 0,25.$$

Матрица плана в кодированном масштабе приведена в табл. 49. Единицы перед значениями фактора, равными +1 или -1, опущены и оставлены только знаки.

Поскольку матрица плана в кодированном масштабе отвечает условиям симметрии и ортогональности, коэффициенты модели (99) рассчитаны по формуле (9).

Соответственно для плотности и твердости получены следующие результаты:

$$b_0 = 6,8; \quad b_1 = 0,06; \quad b_2 = -0,095; \quad b_3 = 0,165; \quad b_4 = 0,04; \\ b_{12} = -0,04; \quad b_{13} = -0,023; \quad b_{14} = 0,0075; \\ b_0' = 158,5; \quad b_1' = 5,25; \quad b_2' = -11; \quad b_3' = 30,4; \quad b_4' = 1; \\ b_{12}' = -4; \quad b_{13}' = -3; \quad b_{14}' = -1,8.$$

Таблица 49. Матрица плана эксперимента в кодированном масштабе

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $\gamma, \text{ г/см}^3$ | $HV$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|--------------------------|------|
| 1     | +     | +     | +     | +     | +     | +        | +        | +        | 6,90                     | 176  |
| 2     | +     | -     | +     | +     | +     | -        | -        | -        | 6,92                     | 182  |
| 3     | +     | +     | -     | +     | -     | -        | +        | -        | 7,10                     | 207  |
| 4     | +     | -     | -     | +     | -     | +        | -        | +        | 6,93                     | 191  |
| 5     | +     | +     | +     | -     | -     | +        | -        | -        | 6,55                     | 122  |
| 6     | +     | -     | +     | -     | -     | -        | +        | +        | 6,45                     | 110  |
| 7     | +     | +     | -     | -     | +     | -        | -        | +        | 6,88                     | 150  |
| 8     | +     | -     | -     | -     | +     | +        | +        | -        | 6,65                     | 130  |

Дисперсия воспроизводимости эксперимента определена по результатам четырехкратного повторения 4-го опыта и рассчитана по формуле (78). Дисперсия воспроизводимости составила 0,0002 для плотности детали и 0,5 – для твердости.

Дисперсии оценок коэффициентов, вычисленные по формуле (80), соответственно для плотности и для твердости следующие:

$$S_{bi}^2 = 0,000025; \quad S_{bi'}^2 = 0,0625.$$

Табличное значение критерия Стьюдента  $t_{0,05,3} = 3,18$ .

Доверительные интервалы оценок коэффициентов (81) соответственно:

$$\Delta_{b_i} = 0,016; \Delta_{b_r} = 0,795.$$

Коэффициенты, которые по абсолютной величине меньше своих доверительных интервалов, не были включены в модели.

Математическая модель для плотности после перевода ее в натуральный масштаб имеет следующий вид:

$$\gamma [\text{г/см}^3] = 6,32 + 0,00208 X_1 + 0,34 X_2 - 0,192 X_3 + 0,16 X_4 - 0,0016 X_1 X_2 - 0,00115 X_1 X_3. \quad (100)$$

Математическая модель для твердости – после перевода ее в натуральный масштаб – следующая:

$$HB = 142,47 + 0,0878 X_1 + 35,6 X_2 - 44,44 X_3 - 17 X_4 - 0,15 X_1 X_2 - 0,138 X_1 X_3 + 0,175 X_1 X_4. \quad (101)$$

Гипотеза об адекватности моделей была проверена с применением критерия Фишера, рассчитанного по формуле (86). Входящая в эту формулу дисперсия неадекватности моделей рассчитывалась по формулам (87) и (90).

Рассчитанные значения критерия Фишера, соответственно  $F_p^+ = 3,25$ ;  $F_p^- = 1,44$ , меньше табличных, равных  $F_T = 10,13$ ;  $F_T^- = 9,28$ . Следовательно, гипотеза об адекватности полученных моделей не отвергается.

Анализ моделей (100) и (101) показывает, что уменьшение жесткости упругого элемента штампа (см. рис. 28) приводит к повышению плотности и твердости деталей так же, как и использование пуансона с большей шероховатостью торца. Из сравниваемых порошков лучшим является ULTRAPAC-LE, поскольку при нем достигаются большая плотность и большая твердость деталей. При использовании пуансона с большой шероховатостью торца целесообразно жесткость упругого элемента уменьшить. Повышение содержания стеарата цинка с 0,5 до 1% улучшает уплотняемость порошковой смеси.

### 3.5. Построение уравнений регрессии при исследовании холодного выдавливания сдвоенных втулок

При разработке процессов выдавливания деталей, тип которых приведен на рис. 29, наряду с расчетом удельной деформирующей силы требуется рассчитывать формоизменение. В зависимости от соотношений наружного и внутреннего радиусов стенок детали и отрезка длина выдавленного отрезка может быть больше или меньше глубины полости детали.

Требуемая длина отрезка может быть достигнута путем принудительно перемещения матрицы в процессе выдавливания в направлении истечения металла в стенку или в противоположном направлении (рис. 30). В первом случае силы контактного трения способствуют увеличению длины стенки, во втором – увеличению длины отрезка.

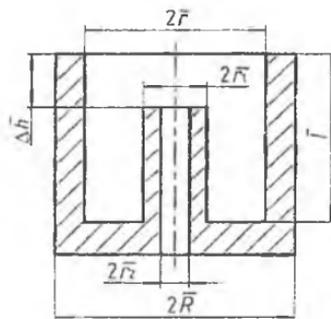


Рис. 29. Обозначения размеров сдвоенных втулок

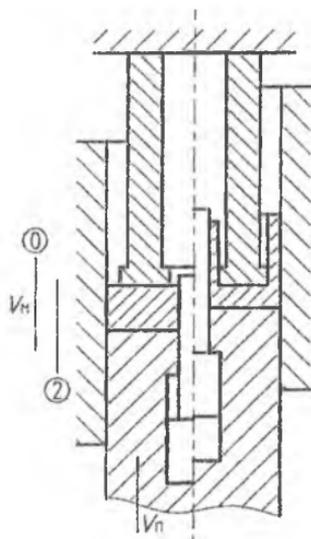


Рис. 30. Схема выдавливания сдвоенной втулки

Ниже описано исследование влияния соотношения наружного и внутреннего радиусов стенок детали и оторстка и направления сил контактного трения на величину удельной силы выдавливания и соотношение длин стенки детали и оторстка.

Приняты следующие обозначения:

$$R = \bar{R}/\bar{r}; \quad r = \bar{r}/\bar{r} = 1; \quad r_1 = \bar{r}_1/\bar{r}; \quad r_2 = \bar{r}_2/\bar{r}; \quad \Delta h = \bar{\Delta h}/\bar{l},$$

где  $\bar{R}$ ;  $\bar{r}$ ;  $\bar{r}_1$ ;  $\bar{r}_2$ ;  $\bar{\Delta h}$ ;  $\bar{l}$  — размеры, показанные на рис. 29.

Размер  $\Delta h$  имеет положительный знак, если длина оторстка меньше длины стенки, и отрицательный, если оторсток длиннее стенки. Фактор  $v_n$  характеризует направление сил контактного трения. При перемещении матрицы в на-

правлении истечения металла в стенку  $v_m = 2$ , при неподвижной матрице  $v_m = 1$ , при перемещении матрицы в направлении, противоположном течению металла в стенку,  $v_m = 0$  (см. рис. 30).

Удельная сила выдавливания  $q = P / F$ , где  $P$  – требующаяся для выдавливания сила,  $F$  – площадь торца пуансона.

Для обобщения результатов исследования для выдавливания различными материалами вычисляли  $q = q / \sigma_s$ , где  $\sigma_s$  – напряжение текучести материала заготовки, зависящее от степени деформации  $e = (1 - r_1^2 + r_2^2) / (R^2 - r_2^2)$  и определяемое по кривой истинных напряжений из работы [8].

Выдавливали заготовки из стали 10. Для создания слоя, удерживающего смазку, заготовки фосфатировали и в качестве смазки омыливали.

Уровни варьирования факторов в эксперименте в кодах  $F_i$  и поставленные им в соответствие уровни варьирования факторов в натуральном масштабе приведены в табл. 50.

Таблица 50. Уровни варьирования факторов в эксперименте и формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным

| Фактор | $F_i$ | $X_i$ | $x_i$ | $z_i$ | Формулы перехода от $X_i$<br>к $x_i$ и $z_i$                |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------------------------------|
| $R$    | 0     | 1,1   | -0,88 | 0,37  | $x_1 = 6,7 (X_1 - 1,23)$<br>$z_1 = x_1^2 - 0,32 x_1 - 0,68$ |
|        | 1     | 1,2   | -0,22 | -0,56 |                                                             |
|        | 2     | 1,3   | 1,1   | 0,19  |                                                             |
| $r_1$  | 0     | 0,3   | -1    | 1     | $x_2 = 20 (X_2 - 0,35)$<br>$z_2 = 3 (x_2^2 - 0,67)$         |
|        | 1     | 0,35  | 0     | -2    |                                                             |
|        | 2     | 0,4   | 1     | 1     |                                                             |
| $r_2$  | 0     | 0     | -1    | 1     | $x_3 = 8,33 (X_3 - 0,12)$<br>$z_3 = 3 (x_3^2 - 0,67)$       |
|        | 1     | 0,12  | 0     | -2    |                                                             |
|        | 2     | 0,24  | 1     | 1     |                                                             |
| $v_m$  | 0     | 0     | -1    | 1     | $x_4 = X_4 - 1$<br>$z_4 = 3 (x_4^2 - 0,67)$                 |
|        | 1     | 1     | 0     | -2    |                                                             |
|        | 2     | 2     | 1     | 1     |                                                             |

Ожидается значимым влияние только главных эффектов факторов, поэтому строили следующую модель главных эффектов, включающую в себя 9 членов:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i X_i + \sum_{i=1}^4 b_{ii} X_i^2. \quad (102)$$

Для построения такой модели достаточно провести 9 опытов, поэтому в каталоге В.З. Бродского выбран план  $3^4 // 9$ . Матрица этого плана представлена в табл. 52. В кодах  $F_i$  (числа в числителе) и в натуральном масштабе (числа в знаменателе).

Для последующей обработки данных эксперимента совершен переход к кодированному масштабу. Установленные уровни  $x_i$  и формулы, связывающие  $x_i$  с  $X_i$ , приведены в табл. 51. Там же приведены уровни  $z_i$  и формулы, связывающие их с уровнями  $x_i$ . Уровни  $x_i$  и  $z_i$  указаны также в табл. 51.

Результаты опытов приведены в табл. 52.

Таблица 51. Матрица плана эксперимента в натуральном и кодированном масштабах

| Номер опыта | В масштабе $X_i$ |       |       |       | В кодированном масштабе |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------|------------------|-------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|             | $X_1$            | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $x_0$                   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ |
| 1           | 1,1              | 0,3   | 0,24  | 0     | 1                       | -0,88 | -1    | 1     | -1    | 0,37  | 1     | 1     | 1     |
| 2           | 1,2              | 0,3   | 0,12  | 1     | 1                       | -0,22 | -1    | 0     | 0     | -0,56 | 1     | -2    | -2    |
| 3           | 1,4              | 0,3   | 0     | 2     | 1                       | 1,1   | -1    | -1    | 1     | 0,19  | 1     | 1     | 1     |
| 4           | 1,1              | 0,35  | 0,12  | 2     | 1                       | -0,88 | 0     | 0     | 1     | 0,37  | -2    | -2    | 1     |
| 5           | 1,2              | 0,35  | 0     | 0     | 1                       | -0,22 | 0     | -1    | -1    | -0,56 | -2    | 1     | 1     |
| 6           | 1,4              | 0,35  | 0,24  | 1     | 1                       | 1,1   | 0     | 1     | 0     | 0,19  | -2    | 1     | -2    |
| 7           | 1,1              | 0,4   | 0     | 1     | 1                       | -0,88 | 1     | -1    | 0     | 0,37  | 1     | 1     | -2    |
| 8           | 1,2              | 0,4   | 0,24  | 2     | 1                       | -0,22 | 1     | 1     | 1     | -0,56 | 1     | 1     | 1     |
| 9           | 1,4              | 0,4   | 0,12  | 0     | 1                       | 1,1   | 1     | 0     | -1    | 0,19  | 1     | -2    | 1     |

Таблица 52. Результаты опытов

| Номер опыта | $q$ , МПа | $e$  | $\sigma_{ys}$ , МПа | $y_1 (q/\sigma_s)$ |       | $y_2 (\Delta h)$ |        |
|-------------|-----------|------|---------------------|--------------------|-------|------------------|--------|
|             |           |      |                     | эксп.              | расч. | эксп.            | расч.  |
| 1           | 2470      | 0,74 | 650                 | 3,8                | 3,798 | 0,12             | 0,122  |
| 2           | 2260      | 0,63 | 610                 | 3,7                | 3,698 | 0                | -0,002 |
| 3           | 2050      | 0,46 | 520                 | 3,9                | 3,898 | 0,25             | 0,25   |
| 4           | 2260      | 0,72 | 650                 | 3,5                | 3,498 | -0,17            | -0,166 |
| 5           | 2020      | 0,61 | 610                 | 3,3                | 3,296 | -0,13            | -0,131 |
| 6           | 2150      | 0,43 | 510                 | 4,2                | 4,198 | 0,17             | 0,169  |
| 7           | 2330      | 0,69 | 640                 | 3,6                | 3,6   | -0,43            | -0,427 |
| 8           | 1980      | 0,57 | 600                 | 3,3                | 3,296 | 0,35             | 0,349  |
| 9           | 2160      | 0,42 | 510                 | 4,2                | 4,198 | 0,1              | 0,1    |

Записанная в кодированном масштабе в табл. 51 матрица плана отвечает условиям симметрии и ортогональности. Поэтому коэффициенты модели рассчитаны по формуле (9). Дисперсии оценок коэффициентов определены по формуле (80). Дисперсия воспроизводимости эксперимента определена по результатам измерения  $q$  и  $\Delta h$  при семикратном повторе опыта 6. Расчет дисперсии проведен по формуле (78). Получены следующие значения дисперсий воспроизводимости эксперимента:  $S_{y_1}^2 = 0,003$ ;  $S_{y_2}^2 = 0,004$  при числе степеней свободы  $f_i = 6$ .

Оценки коэффициентов следующие (соответственно для  $q/\sigma_s$  и  $\Delta h$ ):

$$b_0' = 3,72; \quad b_1' = 0,274; \quad b_2' = -0,05; \quad b_3' = 0,083; \quad b_4' = -0,1; \quad b_{11}' = 0,41;$$

$$b_{22}' = 0,028; \quad b_{33}' = -0,039; \quad b_{44}' = -0,056;$$

$$b_0'' = 0,029; b_1'' = 0,155; b_2'' = -0,058; b_3'' = 0,158; b_4'' = 0,057; b_{11}'' = -0,138;$$

$$b_{22}'' = 0,036; b_{33}'' = 0,026; b_{44}'' = 0,058.$$

Их дисперсии:

$$S^2_{b_0'} = 0,00033; S^2_{b_1'} = 0,0005; S^2_{b_2'} = S^2_{b_3'} = S^2_{b_4'} = 0,0005;$$

$$S^2_{b_{11}'} = 0,002; S^2_{b_{22}'} = S^2_{b_{33}'} = S^2_{b_{44}'} = 0,00016;$$

$$S^2_{b_0''} = 0,00033; S^2_{b_1''} = 0,0005; S^2_{b_2''} = S^2_{b_3''} = S^2_{b_4''} = 0,0005;$$

$$S^2_{b_{11}''} = 0,002; S^2_{b_{22}''} = S^2_{b_{33}''} = S^2_{b_{44}''} = 0,00016.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определены по формуле (80). В данном случае (при  $\alpha = 0,05$  и  $f_1 = 6$ )  $t_{0,05,6} = 2,45$ , поэтому:

$$\Delta_{b_0'} = 0,0008; \Delta_{b_1'} = 0,0012; \Delta_{b_2'} = \Delta_{b_3'} = \Delta_{b_4'} = 0,0012; \Delta_{b_{11}'} = 0,0049;$$

$$\Delta_{b_{22}'} = \Delta_{b_{33}'} = \Delta_{b_{44}'} = 0,0004;$$

$$\Delta_{b_0''} = 0,0011; \Delta_{b_1''} = 0,0016; \Delta_{b_2''} = \Delta_{b_3''} = \Delta_{b_4''} = 0,0016; \Delta_{b_{11}''} = 0,0066;$$

$$\Delta_{b_{22}''} = \Delta_{b_{33}''} = \Delta_{b_{44}''} = 0,0005.$$

Поскольку все коэффициенты по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, их следует признать статистически значимыми при 5%-ном уровне значимости критерия.

Таким образом, получены следующие уравнения регрессии:

$$y_1 = 3,72 + 0,274 x_1 - 0,05 x_2 + 0,083 x_3 - 0,1 x_4 + 0,41 z_1 + \quad (103)$$

$$+ 0,028 z_2 - 0,039 z_3 - 0,056 z_4;$$

$$y_2 = 0,029 + 0,155 x_1 - 0,058 x_2 + 0,158 x_3 + 0,057 x_4 - \quad (104)$$

$$- 0,138 z_1 + 0,036 z_2 + 0,026 z_3 + 0,058 z_4.$$

В данном исследовании, поскольку число членов каждой модели равно числу экспериментов, не остается степеней свободы для статистической проверки адекватности моделей. Однако расчет значений  $q / \sigma_s$  и  $\Delta h$  для заданных планом соотношений факторов в каждом из опытов показал, что они очень близки к экспериментальным данным (см. табл. 52).

Были рассчитаны числители формулы (89), по которой производится расчет дисперсии неадекватности модели, при  $n = 1$ :

$$SS_{\text{неад}}|y_1 = 0,000056; \quad SS_{\text{неад}}|y_2 = 0,000036.$$

Для проверки применимости полученных моделей для решения практических задач, а также для определения дисперсии воспроизводимости эксперимента была рассчитана операция холодного выдавливания деталей из стали 15X с размерами:  $2r = 26$  мм;  $2R = 30$  мм;  $2r_1 = 9$  мм;  $r_2 = 0$ ;  $l = 60$  мм;  $\Delta h = 0$ .

При указанных выше абсолютных размерах детали  $R = 1,2$ ;  $r_1 = 0,35$ ;  $\Delta h = 0$ . На основании модели (104) для заданных радиусов детали и отрезка

подбирается величина  $x_4$ , при которой может быть обеспечена требуемая  $\Delta h$ . Расчет для каждого из трех уровней  $x_4$  показал, что только при  $x_4 = 1$  может быть получена  $\Delta h = -0,017$ , т.е. отросток практически не будет выходить за пределы полости. При других уровнях  $x_4$  отросток длиннее.

На предприятиях пока нет прессов для выдавливания с активными силами контактного трения (см. рис. 30). Поэтому рассмотрена возможность изготовления детали при уровне  $x_4 = 1$  на стандартном оборудовании. Матрице в конструкции штампа была обеспечена возможность осевого перемещения под действием сил трения на контакте с заготовкой. При выдавливании она двигалась в направлении истечения металла в стенку изделия. В результате измерения 7 выдавленных деталей (см. рис. 31, деталь справа) получены следующие значения  $\Delta h$ : -0,02; -0,01; 0,01; 0,01; 0,02; 0,02; 0,04. Указанные результаты достаточно хорошо сходятся с расчетными.

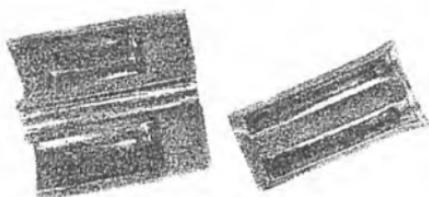


Рис. 31. Стальные втулки, изготовленные холодным выдавливанием

Рассчитанное по модели (103) значение  $q / \sigma_s$  равно 2,59. Для определения удельной силы выдавливания  $q$  рассчитана степень деформации  $e = 0,62$  и по диаграмме истинных напряжений для стали 15Х найдено  $\sigma_s = 910$  МПа. Отсюда  $q = 2360$  МПа. Измеренные при выдавливании 7 деталей значения  $q$  следующие: 2320, 2370, 2370, 2410, 2410, 2460, 2460 МПа. Расхождение расчетного и экспериментального результатов в пределах 4%.

После перехода к натуральным значениям факторов по формулам из табл. 51 модели (103) и (104) для удельной силы выдавливания и относительной высоты отростка приняли следующий вид:

$$q / \sigma_s = 18,22 R^2 - 43,98 R + 33,6 r_1^2 - 24,62 r_1 - 8,06 r_2^2 + 2,62 r_2 - 0,17 v_m^2 + 0,24 v_m + 34,51;$$

$$\Delta h = -6,13 R^2 + 16,4 R + 43,2 r_1^2 - 31,4 r_1 + 5,37 r_2^2 - 0,02 r_2 + 0,17 v_m^2 - 0,29 v_m - 5,36.$$

С применением полученных математических моделей проведен расчет  $q / \sigma_s$  и  $\Delta h$  для выдавливания шпульного колпачка швейной машины. Размеры шпульного колпачка (см. рис. 29):  $2\bar{r} = 21$  мм;  $2\bar{R} = 22,7$  мм;  $2\bar{r}_1 = 6$  мм;  $2\bar{r}_2 = 4,5$  мм. При выдавливании детали на стандартном оборудовании и уровне  $x_4 = 1$  в матрице, перемещающейся под действием сил трения,

$\Delta h = 0,033$ ;  $q / \sigma_s = 3,39$ . Осевой отросток не выступает за пределы полости, как и требуется по чертежу детали. При выдавливании из стали 10 для степени деформации  $e = 0,86$ ,  $\sigma_s = 720$  МПа. Отсюда удельная силы выдавливания  $q = 2440$  МПа. При такой удельной силе на практике достигается удовлетворительная стойкость пуансонов. Следовательно, шпильный колпачок швейной машины целесообразно изготавливать холодной штамповкой выдавливанием.

### 3.6. Моделирование выдавливания, совмещенного с раздачей трубной части заготовки

Схема операции выдавливания и принятые обозначения размеров приведены на рис. 32.

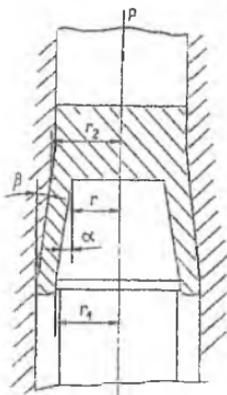


Рис. 32. Схема выдавливания, совмещенного с раздачей трубной части заготовки

Исследовано изменение относительной (отнесенной к напряжению текучести  $\sigma_s$ ) удельной силы выдавливания с раздачей  $q/\sigma_s r_1 - (y_1)$  и относительной удельной силы на торце пуансона  $q/\sigma_s r - (y_2)$  в зависимости от следующих факторов. Относительного (по отношению к радиусу торца пуансона) радиуса матрицы  $r_2$  (фактор  $x_1$ ) на выходе металла из-под торца пуансона в коническую часть стакана, угла конусности матрицы  $\alpha$  (фактор  $x_2$ ), относительного радиуса пуансона  $r_1$  (фактор  $x_3$ ), соотношения углов конусности матрицы и пуансона  $tq\alpha / tq\beta$  (фактор  $x_4$ ).

Уровни варьирования факторов в эксперименте в кодах  $F_i$  и поставленные им в соответствие уровни варьирования факторов в натуральном масштабе приведены в табл. 54.

Полный факторный эксперимент при заданном количестве уровней факторов должен включать в себя  $3^3 \times 2 = 54$  опыта. Однако на основании результатов теоретических исследований ожидается значимым влияние только главных эффектов факторов, причем влияние первых трех нелинейное, а

четвертого – линейное. Имеет смысл строить следующую модель главных эффектов, содержащую 8 членов:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i X_i + \sum_{i=1}^3 b_{ii} X_i^2.$$

Для построения такой модели достаточно провести 9 опытов, поэтому в каталоге В.З. Бродского [3, 9] выбран план  $3^4 // 9$ . Из этого плана заменой одного столбца для трехуровневого фактора столбцом для двухуровневого составлен план эксперимента  $3^3 \times 2 // 9$ . Матрица полученного таким образом плана представлена в табл. 54 в натуральном и кодированном масштабах. Переводные между указанными масштабами формулы приведены в табл. 53.

Таблица 53. Уровни варьирования факторов в эксперименте и формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным

| Фактор                                                                              | $F_i$ | $X_i$ | $x_i$ | $z_i$  | Формулы перехода от $X_i$ к $x_i$ и $z_i$          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|--------|----------------------------------------------------|
| Относительный радиус матрицы на выходе из-под пуансона                              | 0     | 1,2   | -3    | 1      | $x_1 = 20(X_1 - 1,35)$<br>$z_1 = (1/3)(x_1^2 - 6)$ |
|                                                                                     | 1     | 1,35  | 0     | -2     |                                                    |
|                                                                                     | 2     | 1,5   | 3     | 1      |                                                    |
| Угол конусности матрицы                                                             | 0     | 6     | -4    | 7,72   | $x_2 = X_2 - 10$<br>$z_2 = x_2^2 - 1,43x_2 - 14$   |
|                                                                                     | 1     | 9     | -1    | -11,57 |                                                    |
|                                                                                     | 2     | 15    | 5     | 3,85   |                                                    |
| Относительный радиус большего основания конической части пуансона                   | 0     | 0     | -1    | 1      | $x_3 = 10(X_3 - 1,2)$<br>$z_3 = 3(x_3^2 - 0,67)$   |
|                                                                                     | 1     | 0,12  | 0     | -2     |                                                    |
|                                                                                     | 2     | 0,24  | 1     | 1      |                                                    |
| Соотношение углов конусности матрицы и пуансона, $\text{tg}\alpha / \text{tg}\beta$ | 0     | 1,15  | -1    | -      | $x_4 = 30(X_4 - 1,18)$                             |
|                                                                                     | 1     | 1,25  | 2     | -      |                                                    |

Была оценена близость приведенного в табл. 54 плана к  $Q$ -оптимальному путем расчета коэффициента  $\Psi$  по формуле (30). Получено  $\Psi = 0,97$ . Следовательно, план почти  $Q$ -оптимален.

Заданные планом опыты были выполнены. Образец выдавленной воронки приведен на рис. 33. Выдавливали заготовки диаметром 15 мм из сплава АД1. За удельную силу выдавливания принято отношение силы выдавливания к площади сечения пуансона на уровне наибольшего диаметра полости стакана. Напряжение текучести  $\sigma_s$  для определения относительных удельных сил определяли по диаграмме истинных напряжений, построенной по результатам испытания образцов на сжатие.

Удельную силу на торце пуансона измеряли с помощью листовых датчиков – профилированных медных пластин, которые прикрепляли к торцу пуансона пластилином, профилированной стороной к пуансону. После выдавливания искажение профиля датчика измеряли на инструментальном микроскопе и по построенным тарировочным кривым определяли удельную силу.

Результаты опытов приведены в табл. 54. Дисперсия воспроизводимости эксперимента  $S_{y_1}^2 = 0,107$ ,  $S_{y_2}^2 = 0,11$  (при числе степеней свободы  $f_1 = 12$ ).

Таблица 54. Матрица плана эксперимента в натуральном и кодированном масштабах

| Номер опыта | В масштабе $X_i$ |                 |       |       | В кодированном масштабе |       |       |       |       |       |        | $y_1$<br>$q/\sigma_{y_1} r_1$ | $y_2$<br>$q/\sigma_{y_2} r_2$ |       |
|-------------|------------------|-----------------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------------------------------|-------------------------------|-------|
|             | $X_1$            | $X_2$           | $X_3$ | $X_4$ | $x_0$                   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z_1$ | $z_2$  |                               |                               | $z_3$ |
| 1           | 1,2              | 6 <sup>0</sup>  | 1,1   | 1,15  | 1                       | -3    | -4    | -1    | -1    | 1     | 7,72   | 1                             | 3,9                           | 3,8   |
| 2           | 1,35             | 9 <sup>0</sup>  | 1,2   | 1,15  | 1                       | 0     | -1    | 0     | -1    | -2    | -11,57 | -2                            | 1,7                           | 2,3   |
| 3           | 1,5              | 15 <sup>0</sup> | 1,3   | 1,15  | 1                       | 3     | +5    | 1     | -1    | 1     | 3,85   | 1                             | 1                             | 1,9   |
| 4           | 1,5              | 9 <sup>0</sup>  | 1,1   | 1,15  | 1                       | 3     | -1    | -1    | -1    | 1     | -11,57 | 1                             | 1,5                           | 1,5   |
| 5           | 1,2              | 15 <sup>0</sup> | 1,2   | 1,15  | 1                       | -3    | +5    | 0     | -1    | 1     | 3,85   | -2                            | 2,5                           | 3,1   |
| 6           | 1,35             | 6 <sup>0</sup>  | 1,3   | 1,15  | 1                       | 0     | -4    | 1     | -1    | -2    | 7,72   | 1                             | 2,1                           | 3,5   |
| 7           | 1,35             | 15 <sup>0</sup> | 1,1   | 1,25  | 1                       | 0     | +5    | -1    | 2     | -2    | 3,85   | 1                             | 1,8                           | 1,9   |
| 8           | 1,5              | 6 <sup>0</sup>  | 1,2   | 1,25  | 1                       | 3     | -4    | 0     | 2     | 1     | 7,72   | -2                            | 1,8                           | 2,7   |
| 9           | 1,2              | 9 <sup>0</sup>  | 1,3   | 1,25  | 1                       | -3    | -1    | +1    | 2     | 1     | -11,57 | 1                             | 3,3                           | 4,7   |

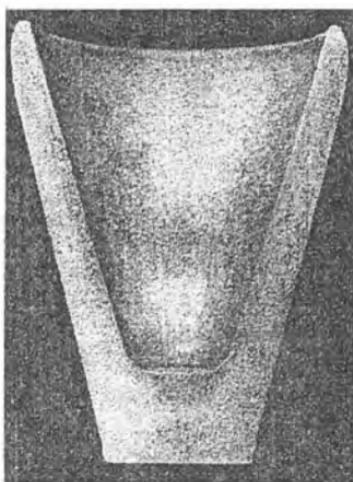


Рис. 33. Образец выдавленной воронки

Коэффициенты моделей определены по формуле (9). Дисперсии оценок коэффициентов определены по формуле (80).

Получены следующие оценки коэффициентов (соответственно для  $y_1$  и  $y_2$ ):

$$\begin{aligned}
 b_0' &= 2,18; & b_1' &= -0,3; & b_2' &= 20,089; & b_3' &= -0,13; & b_4' &= 0,06; & b_{11}' &= 0,156; \\
 & & & & b_{22}' &= 0,0087; & b_{33}' &= 0,089; \\
 b_0'' &= 2,82; & b_1'' &= -0,25; & b_2'' &= -0,112; & b_3'' &= 0,48; & b_4'' &= 0,14; & b_{11}'' &= 0,128; \\
 & & & & b_{22}'' &= 0,0087; & b_{33}'' &= 0,061.
 \end{aligned}$$

Их дисперсии:

$$\begin{aligned}
 S_{b_0'}^2 &= 0,012; & S_{b_1'}^2 &= 0,002; & S_{b_2'}^2 &= 0,00085; & S_{b_3'}^2 &= 0,018; \\
 S_{b_4'}^2 &= S_{b_{11}'}^2 = S_{b_{33}'}^2 &= 0,006; & S_{b_{22}'}^2 &= 0,00017; \\
 S_{b_0''}^2 &= 0,012; & S_{b_1''}^2 &= 0,002; & S_{b_2''}^2 &= 0,00087; & S_{b_3''}^2 &= 0,018; \\
 S_{b_4''}^2 &= S_{b_{11}''}^2 = S_{b_{33}''}^2 &= 0,006; & S_{b_{22}''}^2 &= 0,00018.
 \end{aligned}$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определены по формуле (81):

$$\begin{aligned}
 \Delta_{b_0'} &= 0,20; & \Delta_{b_1'} &= 0,08; & \Delta_{b_2'} &= 0,052; & \Delta_{b_3'} &= 0,24; \\
 \Delta_{b_4'} &= \Delta_{b_{11}'} = \Delta_{b_{33}'} &= 0,137; & \Delta_{b_{22}'} &= 0,023; \\
 \Delta_{b_0''} &= 0,2; & \Delta_{b_1''} &= 0,08; & \Delta_{b_2''} &= 0,052; & \Delta_{b_3''} &= 0,24; \\
 \Delta_{b_4''} &= \Delta_{b_{11}''} = \Delta_{b_{33}''} &= 0,137; & \Delta_{b_{22}''} &= 0,023.
 \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты  $b_0', b_1', b_2', b_{11}', b_0'', b_1'', b_2'', b_3''$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, их следует признать статистически значимыми при 10%-ном уровне значимости критерия. Остальные коэффициенты не являются статистически значимыми и в модель их можно не включать.

Таким образом, получены следующие уравнения регрессии:

$$y_1 = 2,18 - 0,089 x_2 - 0,3 x_1 + 1,156 z_1, \quad (105)$$

$$y_2 = 2,28 + 0,48 x_3 - 0,112 x_2 - 0,25 x_1. \quad (106)$$

Дисперсии неадекватности для моделей (105) и (106) определены по формуле (87). Получено:

$$S_{\text{неад}}^2 | y_1 = 0,0815; \quad S_{\text{неад}}^2 | y_2 = 0,184.$$

Расчетное значение критерия Фишера определено по формуле (86). В результате  $F_{y_1}^p = 0,762$ ;  $F_{y_2}^p = 1,673$ . Табличное значение  $F$ -критерия для принятого 10%-ного уровня значимости равно 2,45. Поскольку рассчитанное значение  $F$ -критерия не превышает табличного, гипотеза об адекватности моделей не отвергается.

После перехода к натуральным значениям факторов модели (105) и (106) приняли следующий вид:

$$q/\sigma_s | r_1 = 20,8 r_2^2 - 62,16 r_2 - 0,089 \alpha + 48,76; \quad (107)$$

$$q/\sigma_s | r = 4,93 - 5 r_2 - 0,112 \alpha + 4,8 r_1. \quad (108)$$

При теоретическом анализе рассматриваемой операции выдавливания с раздачей формируемой трубной части детали применена та же методика, что и в анализе операции, описанном в парагр. 1.14. Полученная сложная аналитическая зависимость величин деформирующей силы на торце пуансона  $q/\sigma_s | r$  и в

наибольшем сечении рабочей части пуансона  $q/\sigma_s|r_1$  условно записана в следующем виде:

$$y = f(r_1, r_2, \alpha), \quad (109)$$

где обозначения  $r_1, r_2, \alpha$  становятся понятны из рассмотрения рис. 32 и приведенных там же пояснений к нему.

В табл. 55 приведены значения  $r_1, r_2, \alpha$ , для которых проведен расчет  $q/\sigma_s|r$  и  $q/\sigma_s|r_1$  по формуле (109).

Для рассматриваемой операции характерно, что доля от напряжений, действующих в раздаваемой стенке, в величине силы  $q/\sigma_s|r_1$  в исследованном диапазоне изменения факторов не превышает 11%. В то же время изменение площади пуансона при переходе от радиуса торца к радиусу  $r_1$  значительно больше. Для детали, у которой доля раздачи в величине удельной силы составила 11%, снижение удельной силы от изменения площади – 69%.

Таблица 55. Удельная деформирующая сила на торце пуансона  $q/\sigma_s|r$  и в наибольшем сечении рабочей части пуансона  $q/\sigma_s|r_1$  в зависимости от размеров детали

| № оп. | $r_2$ | $\alpha$ , гр. | $r_1$ | $q/\sigma_s r$ | $q/\sigma_s r_1$ | № оп. | $r_2$ | $\alpha$ , гр. | $r_1$ | $q/\sigma_s r$ | $q/\sigma_s r_1$ |
|-------|-------|----------------|-------|----------------|------------------|-------|-------|----------------|-------|----------------|------------------|
| 1     | 2     | 3              | 4     | 5              | 6                | 1     | 2     | 3              | 4     | 5              | 6                |
| 1     | 1,1   | 15             | 1,1   | 4,077          | 3,424            | 19    | 1,2   | 6              | 1,1   | 3,006          | 2,513            |
| 2     | 1,1   | 15             | 1,2   | 4,168          | 3,004            | 20    | 1,2   | 6              | 1,2   | 3,102          | 2,220            |
| 3     | 1,1   | 15             | 1,3   | 4,248          | 2,677            | 21    | 1,2   | 6              | 1,3   | 3,187          | 1,991            |
| 4     | 1,1   | 9              | 1,1   | 3,861          | 3,229            | 22    | 1,2   | 3              | 1,1   | 2,898          | 2,414            |
| 5     | 1,1   | 9              | 1,2   | 3,956          | 2,828            | 23    | 1,2   | 3              | 1,2   | 2,995          | 2,128            |
| 6     | 1,1   | 9              | 1,3   | 4,040          | 2,515            | 24    | 1,2   | 3              | 1,3   | 3,081          | 1,904            |
| 7     | 1,1   | 6              | 1,1   | 3,737          | 3,118            | 25    | 1,3   | 15             | 1,1   | 2,115          | 1,802            |
| 8     | 1,1   | 6              | 1,2   | 3,833          | 2,728            | 26    | 1,3   | 15             | 1,2   | 2,206          | 1,641            |
| 9     | 1,1   | 6              | 1,3   | 3,918          | 2,423            | 27    | 1,3   | 15             | 1,3   | 2,286          | 1,516            |
| 10    | 1,1   | 3              | 1,1   | 3,581          | 2,978            | 28    | 1,3   | 9              | 1,1   | 2,072          | 1,750            |
| 11    | 1,1   | 3              | 1,2   | 3,678          | 2,600            | 29    | 1,3   | 9              | 1,2   | 2,167          | 1,585            |
| 12    | 1,1   | 3              | 1,3   | 3,764          | 2,308            | 39    | 1,3   | 9              | 1,3   | 2,251          | 1,456            |
| 13    | 1,2   | 15             | 1,1   | 3,232          | 2,725            | 31    | 1,3   | 6              | 1,1   | 2,040          | 1,715            |
| 14    | 1,2   | 15             | 1,2   | 3,323          | 2,417            | 32    | 1,3   | 6              | 1,2   | 2,136          | 1,549            |
| 15    | 1,2   | 15             | 1,3   | 3,403          | 2,177            | 33    | 1,3   | 6              | 1,3   | 2,221          | 1,419            |
| 16    | 1,2   | 9              | 1,1   | 3,091          | 2,592            | 34    | 1,3   | 3              | 1,1   | 1,996          | 1,668            |
| 17    | 1,2   | 9              | 1,2   | 3,186          | 2,293            | 35    | 1,3   | 3              | 1,2   | 2,093          | 1,500            |
| 18    | 1,2   | 9              | 1,3   | 3,269          | 2,059            | 36    | 1,3   | 3              | 1,3   | 2,179          | 1,370            |

Для выявления зависимостей относительных удельных сил  $q/\sigma_s|r$  и  $q/\sigma_s|r_1$  от каждого из трех факторов:  $r_2, \alpha$  и  $r_1$  – найдены средние арифметические значения удельных сил по каждому уровню фактора. Таким путем влияние двух

факторов усреднено и выявлено влияние третьего. Усредненные данные приведены в табл. 56.

Зафиксированные в табл. 56 изменения удельных сил от факторов  $r_2$ ,  $\alpha$  и  $r_1$  можно описать следующими зависимостями:

для  $q/\sigma_s r_1$  — соответственно  $2,85\sqrt{r_2-1,1}$ ;  $0,025(\alpha^0-3)$  и  $(r_1-1,1)$ ;

для  $q/\sigma_s r$  — соответственно  $1,9\sqrt{r_2-1,1}$ ;  $0,025(\alpha^0-3)$  и  $(r_1-1,1)$ .

Таблица 56. Усредненные значения удельных сил

| Уровень фактора  | $r_2$ |      |      | $\alpha$ , град |      |      |      | $r_1$ |      |      |
|------------------|-------|------|------|-----------------|------|------|------|-------|------|------|
|                  | 1,1   | 1,2  | 1,5  | 3               | 6    | 9    | 15   | 1,1   | 1,2  | 1,3  |
| $q/\sigma_s r_1$ | 3,90  | 3,15 | 2,15 | 2,22            | 3,02 | 3,10 | 3,23 | 2,28  | 3,07 | 3,15 |
| $q/\sigma_s r$   | 2,82  | 2,29 | 1,58 | 2,10            | 2,19 | 2,26 | 2,38 | 2,49  | 2,21 | 1,98 |

По этим зависимостям полученные при различных значениях факторов величины относительных удельных сил пересчитаны на значения факторов  $r_2 = 1,1$ ;  $\alpha = 3^0$ ;  $r_1 = 1,1$ , т.е. влияние факторов исключено. Найдены средние арифметические значения пересчитанных удельных сил, которые составляют свободные члены приведенных ниже математических моделей:

$$q/\sigma_s r_1 = 2,99 - 1,9\sqrt{r_2-1,1} + 0,025(\alpha^0-3) - 3(r_1-1,1). \quad (110)$$

$$q/\sigma_s r = 3,74 - 2,85\sqrt{r_2-1,1} + 0,025(\alpha^0-3) + (r_1-1,1). \quad (111)$$

Модели (110) и (111), так же, как экспериментально полученные модели (107) и (108), позволяют рассчитать величины удельных сил на торце конического пуансона и в сечении пуансона с радиусом  $r_1$  в зависимости от размеров выдавливаемой детали.

Сравнение результатов расчета удельных сил выдавливания с раздачей по моделям (110) и (111), полученным теоретически, и по моделям (107) и (108), полученным при обработке экспериментальных данных, приведено в табл. 57. Приняты сочетания уровней факторов, соответствующие их сочетаниям в табл. 54.

Проведенное сравнение показывает удовлетворительную сходимость результатов, хотя в теоретическом и экспериментальном исследованиях заложено принципиальное отличие: в теоретическом анализе не учтен подпор со стороны сужающегося зазора между пуансоном и матрицей.

В практических расчетах экспериментальные модели предпочтительнее, но теоретический анализ позволяет удельные силы на торцах пуансонов при выдавливании с раздачей и без нее, определенные одним и тем же методом при аналогичных допущениях.

По математическим моделям (107) и (108) построены графики, приведенные на рис. 34.

На этих графиках пунктирные линии относятся к удельным силам  $q/\sigma_s|r_1$ , приложенным к торцам пуансонов, сплошные линии – к удельным силам  $q/\sigma_s|r_2$ , действующим в пуансонах на уровне  $r_1$  (см. рис. 32).

Таблица 57. Сравнение результатов расчета по теоретическим зависимостям (110), (111) и экспериментальным (107), (108)

| № сочетания<br>в соотв. с табл. 54 | 1    | 2    | 3    | 4     | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|------------------------------------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| $q/\sigma_s r_1$ теор.             | 2,46 | 1,89 | 1,49 | 1,94  | 2,39 | 1,5  | 2,34 | 1,56 | 2,14 |
| $q/\sigma_s r_1$ эксп.             | 3,61 | 1,96 | 1,1  | 1,52  | 2,83 | 2,23 | 1,72 | 1,79 | 3,3  |
| Расхожд., %                        | 31   | 4    | 4    | 28    | 16   | 32   | 36   | 13   | 35   |
| $q/\sigma_s r_2$ теор.             | 2,92 | 2,37 | 2,44 | 2,089 | 3,24 | 2,6  | 2,62 | 2,12 | 3,19 |
| $q/\sigma_s r_2$ эксп.             | 3,54 | 1,82 | 2,95 | 1,7   | 3,01 | 3,01 | 1,98 | 2,52 | 4,4  |
| Расхожд., %                        | 18   | 30   | 17   | 29    | 8    | 26   | 32   | 16   | 28   |

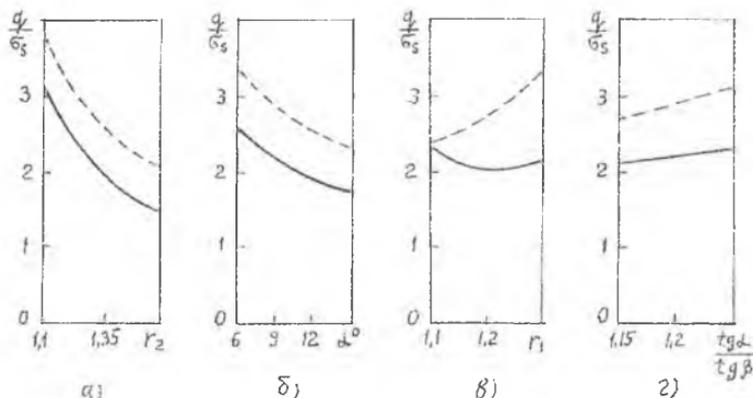


Рис. 34. Зависимости относительных удельных сил выдавливания  $q/\sigma_s|r_1$  и  $q/\sigma_s|r_2$  от размеров инструмента:  $r_2 - a$ ),  $\alpha$  (град) – б),  $r_1 - в$ ),  $\text{tg}\alpha/\text{tg}\beta - г$ )

### 3.7. Моделирование формирования заготовок из порошков на железной основе, совмещенного со спеканием импульсами электрического тока

Спецификой проведенного исследования является применение технологии нагрева уплотняемых порошковых заготовок импульсным пропусканием электрического тока для их спекания. Это позволяет достичь существенных экономии энергии и снижения стоимости процессов порошковой металлургии.

Обработка с целью спекания заготовок импульсными электрическими полями позволяет значительно снизить температуру и время спекания, отказаться от использования восстановительной и даже просто защитной атмосфер

при обеспечении удовлетворительного комплекса механических характеристик формованных и спеченных порошковых изделий.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 35. В этой установке использован импульс низкого (до 3В) напряжения с высоковольтным инициированием разряда,  $C1=1400$  мкФ, разряд производится через промежуточный согласующий трансформатор.

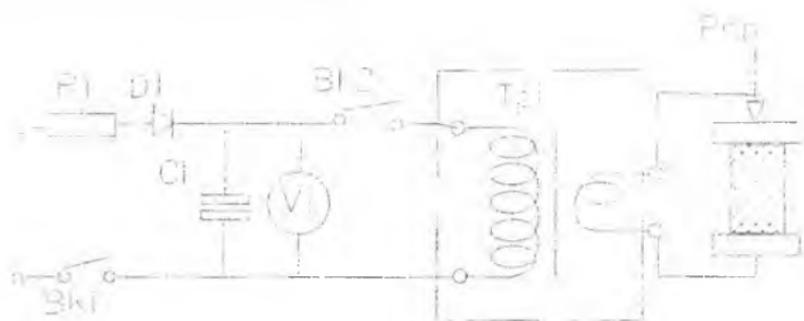


Рис. 35. Схема пропускания импульсного тока через заготовку с использованием промежуточного трансформатора:  $U$  – напряжение на входе; BK1 – выключатель зарядного устройства; R1 – ограничительное сопротивление; D1 – выпрямитель; C1 – накопительный конденсатор; V1 – вольтметр; BK2 – пускатель; Tr1 – согласующий трансформатор, коэффициент трансформации 70;  $P_{пр}$  – уплотняющая сила

При использовании приведенной на рис. 35 схемы с целью определения температуры нагрева образца применялась косвенная оценка силы тока. На стадии тестирования установки вместо уплотняемой и спекаемой заготовки устанавливали отрезок провода, имитирующий короткое замыкание. Для большей точности тестирования установки применяли отрезки медного и стального проводов.

В результате проведенных тестовых измерений было установлено, что средняя плотность тока составляла  $6 \text{ А/мм}^2$ .

Проведен многофакторный эксперимент с использованием 3 различных порошковых материалов на железной основе: NC100.24 [7]; ПЖРВ3.200.28 (ГОСТ 9849-86); ULTRAPAC-LE [17].

В закрытой матрице, имевшей диаметр 16,25 мм, пуансоном производили уплотнение порошковой шихты с одновременной обработкой импульсными токами, в результате которой происходило спекание образцов. Высота формованных образцов равнялась примерно половине их диаметра.

Для каждого из указанных порошков в экспериментах варьировали следующие факторы. Добавку в каждый из указанных порошков сажи в количестве 0,5 % по массе и 1 % – это фактор  $X_1$ . Добавку в каждый из указанных порошков меди в количестве 0,5 % по массе и 1 % – это фактор  $X_2$ . Температуру нагрева при спекании, время которого составляло 30 мин – это фактор  $X_3$ . Его

варьировали на уровнях 600 и 900 °С. Четвертым варьируемым фактором  $X_4$  являлась удельная сила при уплотнении. Это сила  $P_{пр}$  (см. рис. 34), деленная на площадь поперечного сечения полости матрицы. Фактор  $X_4$  варьировали на уровнях 350 и 700 МПа.

Спеченные образцы после их остывания подвергали испытанию на осадку между гладкими плитами. Строили графики зависимости удельной силы осадки от степени деформации образца. По графикам были определены удельные силы осадки, предшествовавшие разрушению каждого образца, достигаемые до разрушения степени деформации образцов. Также для спеченных образцов были измерены их твердости по Бринеллю. Эти данные указаны в приведенных ниже таблицах, которые составлены в виде матриц плана эксперимента.

Для каждого из трех испытанных материалов матрица плана эксперимента включала в себя 8 опытов (табл. 58 – 63).

Формулы, связывающие между собой значения факторов в натуральном и кодированном масштабах, для всех трех исследованных материалов следующие:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4(X_1 - 0,75); & x_2 &= 4(X_2 - 0,75); & x_3 &= (X_3 - 750) / 150; \\ x_4 &= -(X_4 - 525) / 175. \end{aligned} \quad (112)$$

Таблица 58. Матрица плана эксперимента  $2^4/8$   
в кодированном масштабе для порошка NC100.24

| № опыта | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Твердость спеченного образца, <i>НВ</i> | Макс. степень деформ., % | Макс. удельная сила, МПа |
|---------|-------|-------|-------|-------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1       | -     | +     | +     | +     | 245                                     | 0,28                     | 417                      |
| 2       | +     | -     | -     | +     | 128                                     | 0,25                     | 182                      |
| 3       | +     | +     | +     | -     | 157                                     | 0,28                     | 350                      |
| 4       | -     | -     | -     | -     | 128                                     | 0,22                     | 264                      |
| 5       | -     | -     | +     | -     | 426                                     | 0,49                     | 492                      |
| 6       | +     | +     | -     | -     | 294                                     | 0,45                     | 294                      |
| 7       | +     | -     | +     | +     | 325                                     | 0,42                     | 555                      |
| 8       | -     | +     | -     | +     | 256                                     | 0,49                     | 496                      |

На основании проведенных экспериментов строили математические модели в виде линейных уравнений регрессии:

в кодированном масштабе

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4; \quad (113)$$

в натуральном масштабе

$$y = b_0' + b_1' X_1 + b_2' X_2 + b_3' X_3 + b_4' X_4. \quad (114)$$

Таблица 59. Матрица плана эксперимента  $2^4/8$  в натуральном масштабе для порошка NC100.24

| № опыта | Добавка сажи, $X_1, \%$ | Добавка меди, $X_2, \%$ | Темп. спекания, $X_3, ^\circ\text{C}$ | Удельн. сила формования, $X_4, \text{МПа}$ | Тверд. спечен. образца <i>НВ</i> , средняя | Твердость спеченного образца <i>НВ</i> при повторных измер. | Дисперсия этого опыта |
|---------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1       | 0,5                     | 1                       | 900                                   | 350                                        | 245                                        | 240; 244; 251                                               | 31                    |
| 2       | 1                       | 0,5                     | 600                                   | 350                                        | 128                                        | 122; 127; 134                                               | 36,5                  |
| 3       | 1                       | 1                       | 900                                   | 700                                        | 157                                        | 151; 158; 163                                               | 36,5                  |
| 4       | 0,5                     | 0,5                     | 600                                   | 700                                        | 128                                        | 120; 127; 137                                               | 73                    |
| 5       | 0,5                     | 0,5                     | 900                                   | 700                                        | 426                                        | 420; 421; 436                                               | 80,5                  |
| 6       | 1                       | 1                       | 600                                   | 700                                        | 294                                        | 288; 294; 300                                               | 36                    |
| 7       | 1                       | 0,5                     | 900                                   | 350                                        | 325                                        | 321; 324; 329                                               | 16,5                  |
| 8       | 0,5                     | 1                       | 600                                   | 350                                        | 256                                        | 249; 255; 263                                               | 44,5                  |

Таблица 60. Матрица плана эксперимента  $2^4/8$  в кодированном масштабе для порошка ПЖРВ3.200.28

| № опыта | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Твердость спеченного образца, <i>НВ</i> | Макс. степень деформ., % | Макс. удельная сила, МПа |
|---------|-------|-------|-------|-------|-----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1       | +     | -     | +     | -     | 325                                     | 0,5                      | 420                      |
| 2       | -     | +     | -     | -     | 281                                     | 0,49                     | 434                      |
| 3       | -     | -     | +     | +     | 309                                     | 0,4                      | 796                      |
| 4       | +     | +     | -     | +     | 206                                     | 0,44                     | 477                      |
| 5       | +     | +     | +     | +     | 77                                      | 0,29                     | 69                       |
| 6       | -     | -     | -     | +     | 132                                     | 0,31                     | 331                      |
| 7       | -     | +     | +     | -     | 281                                     | 0,47                     | 448                      |
| 8       | +     | -     | -     | -     | 141                                     | 0,42                     | 197                      |

Поскольку матрицы плана в кодированном масштабе (табл. 58, 60, 62) симметричны и ортогональны, коэффициенты моделей (113) рассчитывали по формуле (9). После расчета коэффициентов математические модели в кодированном масштабе (110) приняли следующий вид.

Для порошка NC100.24:

$$y = 244,9 - 18,9 x_1 - 6,9 x_2 + 43,4 x_3 - 6,4 x_4.$$

Для порошка ПЖРВ3.200.28:

$$y = 219 - 31,8 x_1 - 7,8 x_2 + 29 x_3 - 38 x_4. \quad (115)$$

Для порошка ULTRAPAC-LE:

$$y = 195,4 - 3,9 x_1 - 16,9 x_2 - 2,9 x_3 - 2,12 x_4.$$

Таблица 61. Матрица плана эксперимента  $2^4/8$  в натуральном масштабе для порошка ПЖРВ3.200.28

| № опыта | Добавка сажи $X_1, \%$ | Добавка меди $X_2, \%$ | Темп. спекания $X_3, ^\circ\text{C}$ | Удельн. сила формования $X_4, \text{МПа}$ | Тверд. спечен. образца $HV$ , средняя | Твердость спеченного образца $HV$ при повторных измер. | Дисперсия этого опыта |
|---------|------------------------|------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1       | 1                      | 0,5                    | 900                                  | 700                                       | 325                                   | 319; 326; 330                                          | 31                    |
| 2       | 0,5                    | 1                      | 600                                  | 700                                       | 281                                   | 275; 282; 286                                          | 31                    |
| 3       | 0,5                    | 0,5                    | 900                                  | 350                                       | 309                                   | 303; 305; 315                                          | 44                    |
| 4       | 1                      | 1                      | 600                                  | 350                                       | 206                                   | 201; 205; 212                                          | 31                    |
| 5       | 1                      | 1                      | 900                                  | 350                                       | 77                                    | 71; 78; 83                                             | 36,5                  |
| 6       | 0,5                    | 0,5                    | 600                                  | 350                                       | 132                                   | 125; 133; 137                                          | 37,5                  |
| 7       | 0,5                    | 1                      | 900                                  | 700                                       | 281                                   | 276; 282; 286                                          | 25,5                  |
| 8       | 1                      | 0,5                    | 600                                  | 700                                       | 141                                   | 135; 141; 147                                          | 36                    |

Для оценки значимости коэффициентов моделей (111) были рассчитаны их дисперсии. Как видно из табл. 60, 62, 64, замеры твердости на спеченных образцах в каждом из опытов производились трижды. Дисперсии каждого из опытов рассчитывали по формуле (78). Рассчитанные дисперсии опытов указаны в правых крайних столбцах табл. 60, 62, 64.

Дисперсии воспроизводимости эксперимента рассчитаны по формуле (79):

для порошка NC100.24  $S_y^2 = 44,3$ ;

для порошка ПЖРВ3.200.28  $S_y^2 = 34,1$ ;

для порошка ULTRAPAC-LE  $S_y^2 = 24,2$ .

Дисперсии оценок коэффициентов рассчитаны по формуле (80), которая записана в следующем виде:

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{n \cdot N},$$

где  $n = 3$  – число дублей каждого опыта,  $N = 8$  – количество строк в матрицах планов экспериментов.

Таблица 62. Матрица плана эксперимента  $2^4/8$  в кодированном масштабе для порошка ULTRAPAC-LE

| № опыта | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Твердость спеченного образца, $HV$ | Макс. степень деформ., % | Макс. удельная сила, МПа |
|---------|-------|-------|-------|-------|------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1       | +     | +     | -     | +     | 198                                | 0,4                      | 724                      |
| 2       | -     | -     | +     | +     | 245                                | 0,25                     | 542                      |
| 3       | -     | +     | -     | -     | 206                                | 0,43                     | 409                      |
| 4       | +     | -     | +     | -     | 215                                | 0,39                     | 324                      |
| 5       | +     | -     | -     | -     | 206                                | 0,31                     | 266                      |
| 6       | -     | +     | +     | -     | 163                                | 0,28                     | 450                      |
| 7       | -     | -     | -     | +     | 183                                | 0,26                     | 250                      |
| 8       | +     | +     | +     | +     | 147                                | 0,23                     | 280                      |

Таблица 63. Матрица плана эксперимента  $2^4/8$  в натуральном масштабе для порошка ULTRAPAC-LE

| № опыта | Добавка сажи, $X_1, \%$ | Добавка меди, $X_2, \%$ | Темп. спекания, $X_3, ^\circ\text{C}$ | Удельн. сила формования, $X_4, \text{МПа}$ | Тверд. спечен. образца <i>НВ</i> , средняя | Твердость спеченного образца <i>НВ</i> при повторных измер. | Дисперсия этого опыта |
|---------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1       | 1                       | 1                       | 900                                   | 350                                        | 198                                        | 191; 196; 206                                               | 58,5                  |
| 2       | 0,5                     | 0,5                     | 600                                   | 350                                        | 245                                        | 240; 246; 250                                               | 25,5                  |
| 3       | 0,5                     | 1                       | 900                                   | 700                                        | 206                                        | 203; 205; 209                                               | 8,5                   |
| 4       | 1                       | 0,5                     | 600                                   | 700                                        | 215                                        | 210; 217; 219                                               | 22,5                  |
| 5       | 1                       | 0,5                     | 900                                   | 700                                        | 206                                        | 201; 207; 209                                               | 17,5                  |
| 6       | 0,5                     | 1                       | 600                                   | 700                                        | 163                                        | 159; 162; 168                                               | 21                    |
| 7       | 0,5                     | 0,5                     | 900                                   | 350                                        | 193                                        | 179; 181; 188                                               | 22,5                  |
| 8       | 1                       | 1                       | 600                                   | 350                                        | 147                                        | 142; 148; 150                                               | 17,5                  |

Получены следующие значения:

для порошка NC100.24  $S_{bi}^2 = 1,84$ ;  $S_{bi} = 1,36$ ;

для порошка ПЖРВЗ.200.28  $S_{bi}^2 = 1,42$ ;  $S_{bi} = 1,19$ ;

для порошка ULTRAPAC-LE  $S_{bi}^2 = 1,01$ ;  $S_{bi} = 1,0$ .

Проведено сравнение абсолютной величины каждого коэффициента с его доверительным интервалом, рассчитанным по формуле (81).

Определены следующие величины доверительных интервалов:

для порошка NC100.24  $\Delta = 2, 12 \times 1,36 = 2,88$ ;

для порошка ПЖРВЗ.200.28  $\Delta = 2, 12 \times 1,19 = 2,52$ ;

для порошка ULTRAPAC-LE  $\Delta = 2, 12 \times 1,0 = 2,12$ .

Сравнение абсолютных величин коэффициентов моделей с их доверительными интервалами показало, что все коэффициенты являются статистически значимыми и все факторы оказывают влияние на твердость спеченных образцов из рассмотренных трех порошковых материалов.

Для перевода в натуральный масштаб в модели (115) подставлены формулы, связывающие значения факторов в натуральном масштабе с их значениями в кодированном масштабе (112), после чего раскрыты скобки и приведены подобные члены.

После перевода факторов в натуральный масштаб модели (115) приняли следующий вид:

для порошка NC100.24:

$$HB = 86,1 - 75,6 X_1 - 27,6 X_2 + 0,29X_3 + 0,036 X_4.$$

для порошка ПЖРВЗ.200.28:

$$HB = 78,8 - 127,2 X_1 - 31,2 X_2 + 0,19X_3 + 0,22X_4. \quad (116)$$

для порошка ULTRAPAC-LE:

$$HB = 266 - 15,6 X_1 - 67,6 X_2 - 0,019X_3 + 0,012X_4.$$

В табл. 58, 60, 62, помимо данных об измеренной твердости образцов, приведены данные, полученные из испытаний образцов на осадку. В момент

начала разрушения образцов фиксировали значения степени деформации и удельной силы.

Ниже в результате корреляционного анализа определена связь между твердостью образца *НВ* и степенью деформации  $\epsilon$ , при которой начинается разрушение образца и которая в табл. 56, 58 и 60 названа максимальной степенью деформации. Также в результате корреляционного анализа определена связь между твердостью образца *НВ* и соответствующей началу разрушения величиной удельной силы осадки, которая в табл. 56, 58 и 60 названа максимальной удельной силой  $q$ .

В сумме в табл. 58, 60 и 62 содержится 24 строки. Это 24 набора данных для проведения корреляционного анализа. Эти данные использованы для расчета коэффициента корреляции между *НВ* и  $\epsilon$ , а также между *НВ* и  $q$ .

В приведенных ниже формулах для расчета коэффициента парной корреляции одна из указанных величин обозначена как  $y_1$ , а другая – как  $y_2$ .

Коэффициенты корреляции рассчитаны по следующей формуле [9]:

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)(y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \sum_{u=1}^N (y_{2u} - \bar{y}_2)^2}}, \quad (117)$$

где  $N$  – число опытов;  $u$  – номер опыта,  $\bar{y}_1 = \frac{\sum_{u=1}^N y_{1u}}{N}$ ;  $\bar{y}_2 = \frac{\sum_{u=1}^N y_{2u}}{N}$ .

В результате расчетов получено:

$$r_{НВ, \epsilon} = 0,698; r_{НВ, q} = 0,6. \quad (118)$$

Критические значения коэффициента парной корреляции приведены в табл. 64.

Таблица 64. Критические значения коэффициента корреляции

| $f$      | 1    | 2     | 3    | 4     | 6     | 8     | 10    | 12    | 14    | 16    |       |
|----------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha$ | 0,1  | 0,988 | 0,90 | 0,805 | 0,729 | 0,621 | 0,549 | 0,497 | 0,457 | 0,426 | 0,400 |
|          | 0,05 | 0,997 | 0,95 | 0,878 | 0,811 | 0,707 | 0,632 | 0,578 | 0,532 | 0,497 | 0,468 |
|          | 0,01 | 1,000 | 0,99 | 0,959 | 0,917 | 0,834 | 0,765 | 0,708 | 0,661 | 0,623 | 0,590 |

Для определения из табл. 64 критического значения коэффициента корреляции, в сравнении с которым можно оценить значимость посчитанных коэффициентов корреляции, определяется число степеней свободы  $f$ . Это число равно количеству данных  $N$  в выборках для проведения корреляционного анализа минус 2. Это 2 степени свободы, которые были потрачены для подсчета средних арифметических значений сравниваемых величин. Таким образом,  $f = 22$ . Для такого значения  $f$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$  крити-

ческое значение коэффициента корреляции равно 0,4. Поскольку оба коэффициента корреляции (118) превышают критическое значение, корреляционная связь между рассмотренными величинами является значимой.

После установления статистически значимых корреляционных связей между парами величин строятся уравнения регрессии, позволяющие предсказывать одну из величин по другой. Если предполагается предсказывать  $y_2$  по экспериментально определенным значениям  $y_1$ , то строится следующее линейное уравнение регрессии:

$$y_2 = b_0 + b_1 y_1,$$

коэффициенты которого определяются из выражений:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_{2u} \sum_{u=1}^N y_{1u}^2 - \sum_{u=1}^N y_{1u} \sum_{u=1}^N y_{1u} y_{2u}}{N \sum_{u=1}^N y_{1u}^2 - \left( \sum_{u=1}^N y_{1u} \right)^2}; \quad (119)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{u=1}^N y_{1u} y_{2u} - \sum_{u=1}^N y_{1u} \sum_{u=1}^N y_{2u}}{N \sum_{u=1}^N y_{1u}^2 - \left( \sum_{u=1}^N y_{1u} \right)^2}. \quad (120)$$

Таким образом получены следующие выражения:

$$\varepsilon = 0,000814 HB + 0,186; q = 1,217 HB + 127,1. \quad (121)$$

Математические модели (116) и (121) позволяют характеризовать основные показатели результатов спекания порошковых заготовок из трех рассмотренных материалов. К этим основным показателям относятся твердость спеченных заготовок, их пластичность и сопротивление деформированию. Также указанные модели описывают влияние добавок в порошковые композиции сажи, меди, влияние температуры спекания и удельной силы прессования на рассмотренные показатели результатов спекания.

Анализ моделей (116) и (121) показывает, что увеличение добавок сажи и меди ухудшает показатели результатов спекания. Увеличение температуры спекания улучшает эти показатели для заготовок из порошков NC100.24 и ПЖРВ3.200.28, но для заготовок из порошка ULTRAPAC-LE увеличение температуры не оказывает положительного эффекта. Увеличение давления уплотнения заготовок улучшает показатели результатов спекания.

Таким образом, в результате проведенного исследования оценена эффективность метода совместного уплотнения заготовки из железного порошка

сжатием в закрытой матрице пуансоном, перемещаемым ползуном пресса, и воздействием импульса пропускаемого через заготовку электрического тока.

В результате многофакторных экспериментов, проведенных на лабораторной установке, составлены математические модели, количественно отражающие влияние добавок в порошковые композиции сажи, меди, температуры спекания и удельной силы формования на твердость спеченных заготовок, их пластичность и сопротивление деформированию.

В результате корреляционного анализа определена связь между твердостью образца *НВ* и степенью деформации  $\epsilon$ , при которой начинается разрушение образца при его последующей осадке между плоскими плитами с целью оценки качества. Также в результате корреляционного анализа определена связь между твердостью образца *НВ* и соответствующей началу разрушения величиной удельной силы осадки.

В результате исследований авторов [8, 13] получена формула, связывающая предел прочности спеченной заготовки из железного порошка с ее твердостью *НВ*:

$$\sigma_B = 5,449 \text{ НВ} - 192,7. \quad (122)$$

Предел прочности заготовки является одной из основных характеристик ее качества, которая для рассматриваемого способа обработки может быть определена с помощью полученных математических моделей.

Таким образом, в результате проведенного исследования оценена эффективность метода совместного уплотнения заготовки из железного порошка сжатием в закрытой матрице пуансоном, перемещаемым ползуном пресса, и воздействием импульса пропускаемого через заготовку электрического тока.

В результате многофакторных экспериментов, проведенных на лабораторной установке, составлены математические модели, количественно отражающие влияние добавок в порошковые композиции сажи, меди, температуры спекания и удельной силы формования на твердость спеченных заготовок, их пластичность и сопротивление деформированию.

В результате корреляционного анализа определена связь между твердостью образца *НВ* и степенью деформации  $\epsilon$ , при которой начинается разрушение образца при его последующей осадке между плоскими плитами. Построенные с помощью проведенного анализа математические модели (116) и (121) вместе с моделью (122) позволяют количественно характеризовать результаты спекания порошковых заготовок из трех рассмотренных материалов.

### 3.8. Нахождение наилучших условий поверхностного легирования порошковых заготовок

С целью поверхностного легирования порошковую заготовку, предназначенную для выдавливания из нее детали, покрывают обмазкой с большим содержанием графита или сажи и помещают в матрицу, имеющую диаметр, равный диаметру заготовки с обмазкой. На первом этапе деформирования про-

и шодят осадку заготовки в замкнутом объеме матрицы. Поскольку материал обмазки оказывает незначительное сопротивление деформированию спеченной заготовки, последняя заполняет пространство в матрице, первоначально занятое обмазочным слоем. При этом единственным выходом материала обмазки является проникновение в поры спеченной заготовки.

Из обмазанной заготовки обратным холодным выдавливанием изготавливают полую деталь с дном, наружный диаметр которой 32 мм и диаметр полости 20 мм. Перед выдавливанием матрицу нагревают с целью повышения пластичности обмазочного слоя и облегчения внедрения его в поры заготовки.

Исследовано влияние плотности исходной заготовки, толщины слоя обмазки, предпочтительности применения графита или сажи в обмазке, температуры нагрева матрицы на величину силы холодного выдавливания деталей с указанными размерами из спеченных заготовок из железного порошка ПЖВ2.160.28. По результатам эксперимента построена математическая модель процесса и по ней методом крутого восхождения определены значения факторов, обеспечивающие наименьшую силу выдавливания.

Факторы, значения основных уровней и интервалов варьирования факторов приведены в табл. 65.

Таблица 65. Значения основных уровней и интервалов варьирования факторов

| Факторы                                 | Плотность заготовок, % ( $X_1$ ) | Толщина слоя обмазки, мм ( $X_2$ ) | Состав материала обмазки ( $X_3$ ) | Температура матрицы, °С ( $X_3$ ) |
|-----------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| Основной уровень ( $X, 0$ )             | 87,7                             | 1,5                                | —                                  | 220                               |
| Интервалы варьирования ( $\Delta X_i$ ) | 1                                | 0,5                                | —                                  | 20                                |
| Верхний уровень ( $x_i = 1$ )           | 86,7                             | 2,0                                | Сажа +<br>стеарат цинка            | 240                               |
| Нижний уровень ( $x_i = -1$ )           | 88,7                             | 1,0                                | Графит +<br>стеарат цинка          | 200                               |

Матрица плана эксперимента приведена в табл. 66.

В соответствии с планом были выполнены опыты, причем четвертый опыт дублировали 4 раза для расчета дисперсии воспроизводимости эксперимента, которую рассчитали по формуле (78).

Результаты опытов приведены в правом крайнем столбце табл. 67, дисперсия воспроизводимости эксперимента  $S_y^2 = 216,6$  (при числе степеней свободы  $f_1 = 3$ ).

Оценки коэффициентов модели, заданной в виде

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i x_i,$$

определялись по формуле (9). Их значения следующие:  $b_0 = 612,5$ ;  $b_1 = 22,5$ ;  $b_2 = 2,5$ ;  $b_3 = 0$ ;  $b_4 = 25$ .

Таблица 66. Матрица плана эксперимента в кодированном масштабе

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Сила выдавливания<br>$y$ (кН) |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------|
| 1     | +     | +     | +     | +     | +     | 560                           |
| 2     | +     | -     | +     | +     | -     | 675                           |
| 3     | +     | +     | -     | +     | -     | 625                           |
| 4     | +     | -     | -     | +     | +     | 590                           |
| 5     | +     | +     | +     | -     | -     | 600                           |
| 6     | +     | -     | +     | -     | +     | 625                           |
| 7     | +     | +     | -     | -     | +     | 575                           |
| 8     | +     | -     | -     | -     | -     | 650                           |

После определения дисперсии оценок коэффициентов по формуле (9) и доверительного интервала оценок коэффициентов по формуле (81), соответственно  $S_{b_i}^2 = 27,075$  и  $\Delta_{b_i} = 16,55$ , установлено, что статистически значимыми можно признать только коэффициенты  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_4$  при 5%-ном уровне значимости.

Таким образом, получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 612,5 - 22,5 x_1 - 25 x_4. \quad (123)$$

Проверка адекватности модели (120) при расчете дисперсии  $S_{\text{исад}}^2$  по формуле (87) при 5%-ном уровне значимости показала, что гипотеза об адекватности не отвергается.

Методом крутого восхождения по поверхности отклика исследована возможность снижения силы выдавливания. Последовательность реализации этого этапа исследования показана в табл. 67.

В результате установлено, что увеличение температуры нагрева матрицы до  $280^\circ\text{C}$  при одновременном снижении плотности заготовки до 84,7 % позволяет уменьшить силу выдавливания на 23 % по сравнению со средней силой, зафиксированной в 8 опытах в табл. 66.

Это связано с облегчением затекания обмазочного слоя в поры при увеличении температуры нагрева матрицы и пористости заготовки. Заполнивший поры обмазочный слой уменьшает трение между частицами железного порошка и способствует снижению силы выдавливания.

При температуре нагрева матрицы свыше  $280^\circ\text{C}$  работа со штампом существенно затрудняется, поэтому не исследовалась.

Таблица 67. Крутое восхождение в направлении уменьшения силы

| Факторы            | Плотность заготовок, % ( $X_1$ ) | Температура нагрева матрицы, °С ( $X_2$ ) | Сила выдавливания, кН |
|--------------------|----------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------|
| $b_i$              | - 4,5                            | - 5                                       |                       |
| $b_i \Delta x_i$   | - 4,5                            | - 100                                     |                       |
| Шаг                | 1                                | 20                                        |                       |
| $X_{i,0}$          | 87,7                             | 220                                       |                       |
| Реализованный опыт | 86,7                             | 240                                       | 565                   |
| Мысленный опыт     | 85,7                             | 260                                       | 517,5                 |
| Мысленный опыт     | 84,7                             | 280                                       | 470                   |

Применение графита и стеарата цинка в качестве смазки при выдавливании заготовок из железных порошков известно. Новым результатом, полученным в проведенном исследовании, является установление значений пористости исходной заготовки и температуры нагрева матрицы, при которых сила выдавливания является наименьшей. Также установление того, что толщина обмазочного слоя не влияет на величину силы выдавливания, когда она составляет больше 5% от диаметра заготовки. Установление температуры матрицы, при которой сила выдавливания является наименьшей.

### 3.9. Регрессионный анализ при компьютерном моделировании комбинированного выдавливания

Исследование направлено на выявление возможности самоцентрирования пуансона по отношению к оси матрицы при осуществлении выдавливания по схеме, когда металл заготовки может одновременно течь в 2 направлениях: в стенку выдавливаемого стакана и в стержневую часть полуфабриката, выдавливаемую под нижним торцом заготовки. Для проверки предположения о самоцентрировании пуансона его первоначально устанавливали на верхний торец заготовки с контролируемым эксцентриситетом и следили изменится ли, каким образом и на сколько первоначальный эксцентриситет при выдавливании.

Инструментальная оснастка для реализации описанной выше операции представлена на рис. 36.

Разработана методика исследования, базирующаяся на изложенных ниже основных положениях.

В качестве показателя эффективности схемы выбрано смещение пуансона к центру заготовки от заранее заданного эксцентриситета (эффект самоцентрирования пуансона) при варьировании геометрии инструмента. Спланированы и осуществлены эксперименты (так называемые математические) на компьютере в программном комплексе DEFORM-3D.

На первом этапе исследования оценена сходимость между собой результатов физических и компьютерных экспериментов при варьировании факторов

на 2 уровнях. По результатам физических экспериментов построено уравнение регрессии, описывающее операцию в основном на качественном уровне.

Проведено моделирование (математические эксперименты) в программном комплексе DEFORM-3D с теми же факторами и уровнями их варьирования, что и в физическом эксперименте. По результатам математических экспериментов так же, как и физических, построено уравнение регрессии.

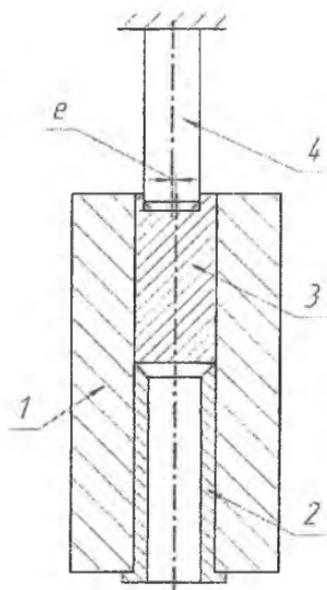


Рис. 36. Схема экспериментальной оснастки в сборе:  
1 – матрица; 2 – ступенчатая втулка; 3 – заготовка; 4 – пуансон

Сопоставление между собой результатов экспериментов в виде двух уравнений регрессии подтвердило допустимость применения программного комплекса DEFORM-3D для данного исследования.

На втором этапе исследования проведены математические эксперименты в программном комплексе DEFORM-3D с увеличенным по сравнению с первым этапом количеством факторов, четыре из которых варьируются на 4 уровнях. По результатам математических экспериментов построено нелинейное уравнение регрессии, описывающее самоцентрирование пуансона при выдавливании по предложенной схеме. С применением полученного уравнения регрессии определены размеры инструмента, позволяющие получить наименьшую разностенность изделия.

Факторы и уровни их варьирования на втором этапе исследования представлены в табл. 68.

Таблица 68. Факторы и уровни их варьирования

| $i$ | Фактор                                                                                | $X_i$ | $F_i$ |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|
| 1   | Диаметр матрицы, $D_m$ , мм                                                           | 60    | 0     |
|     |                                                                                       | 90    | 1     |
|     |                                                                                       | 120   | 2     |
|     |                                                                                       | 150   | 3     |
| 2   | Угол конусности у верхнего торца втулки 2 (см. рис. 36), $\alpha^0$                   | 10    | 0     |
|     |                                                                                       | 16    | 1     |
|     |                                                                                       | 22    | 2     |
|     |                                                                                       | 28    | 3     |
| 3   | Относительная высота заготовки, $H/D_m$                                               | 3     | 0     |
|     |                                                                                       | 4     | 1     |
| 4   | Относительный эксцентриситет в начале выдавливания, $e/D_m$                           | 0,02  | 0     |
|     |                                                                                       | 0,04  | 1     |
| 5   | Отношение диаметра матрицы к диаметру выдавливаемого стержня, $\bar{R} = D_m/d_{отр}$ | 1,2   | 0     |
|     |                                                                                       | 1,3   | 1     |
|     |                                                                                       | 1,4   | 2     |
|     |                                                                                       | 1,5   | 3     |
| 6   | Отношение диаметра матрицы к диаметру пуансона, $\bar{R} = D_m/d_p$                   | 1,5   | 0     |
|     |                                                                                       | 1,6   | 1     |
|     |                                                                                       | 1,7   | 2     |
|     |                                                                                       | 1,8   | 3     |
| 7   | Угол конусности торца пуансона, $\beta^0$                                             | 30    | 0     |
|     |                                                                                       | 40    | 1     |

Для построения уравнения регрессии составлен план главных эффектов, включающий в себя изучение влияния 7 факторов.

Строится математическая модель следующего вида:

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 + b_6X_6 + b_7X_7 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + b_{55}X_5^2 + b_{66}X_6^2 + b_{111}X_1^3 + b_{222}X_2^3 + b_{555}X_5^3 + b_{666}X_6^3. \quad (124)$$

Матрица плана эксперимента перестроена из стандартной матрицы плана  $4^3/16$ . Из нескольких рассмотренных вариантов преобразований выбран тот, у которого коэффициент  $\Psi$  имел наибольшее значение, см. п. 1.9.

Для реализованного преобразования плана  $4^3/16 \rightarrow 4^4x2^3/16$  получено  $\Psi = 1$ .

Матрица плана эксперимента в кодах  $F_i$  представлена в табл.69, а матрица в натуральном масштабе и результаты опытов – в табл. 70.

Значения  $\Delta$  были вычислены по следующей формуле:

$$\Delta = S_{низ} - S_{верх}, \quad (125)$$

где  $S_{низ}$  – толщина стенки у дна выдавленной полости (в том же месте по окружности, что и  $S_{верх}$ ),  $S_{верх}$  – толщина стенки в самой тонкой (по окружности) верхней части полости.

Таблица 69. Матрица плана эксперимента  $4^4 \times 2^3 // 16$  в кодах  $F_i$ 

| № оп. | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 2     | 2     | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | 0     |
| 3     | 3     | 1     | 1     | 0     | 3     | 3     | 1     |
| 4     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 2     | 0     |
| 5     | 0     | 1     | 1     | 1     | 2     | 3     | 0     |
| 6     | 2     | 1     | 1     | 0     | 0     | 2     | 1     |
| 7     | 3     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 8     | 1     | 0     | 0     | 1     | 3     | 1     | 1     |
| 9     | 0     | 0     | 0     | 0     | 3     | 2     | 0     |
| 10    | 2     | 0     | 0     | 1     | 1     | 3     | 1     |
| 11    | 3     | 1     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| 12    | 1     | 1     | 1     | 0     | 2     | 0     | 1     |
| 13    | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| 14    | 2     | 1     | 1     | 1     | 3     | 0     | 0     |
| 15    | 3     | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 1     |
| 16    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 3     | 0     |

Положительное значение  $\Delta$  и его увеличение по мере смещения вглубь полости, т.е. смещение оси пуансона в направлении к оси матрицы, свидетельствует о наличии эффекта самоцентрирования пуансона относительно матрицы в процессе выдавливания полости изделия. Отрицательное значение  $\Delta$  и его уменьшение по мере смещения вглубь полости, т.е. смещение оси пуансона от оси матрицы, свидетельствует об отсутствии самоцентрирования пуансона относительно матрицы.

Таблица 70. Матрица плана эксперимента  $4^4 \times 2^3 // 16$  в натуральном масштабе и результаты опытов

| № оп. | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $\Delta$ , мм |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| 1     | 60    | 10    | 3     | 0,04  | 0     | 1,2   | 40    | 0,01          |
| 2     | 120   | 10    | 3     | 0,02  | 2     | 1,4   | 30    | -0,3          |
| 3     | 150   | 10    | 4     | 0,02  | 3     | 1,5   | 40    | 1,93          |
| 4     | 90    | 10    | 4     | 0,04  | 1     | 1,3   | 30    | 0,49          |
| 5     | 60    | 22    | 4     | 0,04  | 2     | 1,4   | 30    | 0,75          |
| 6     | 120   | 22    | 4     | 0,02  | 0     | 1,2   | 40    | 0,64          |
| 7     | 150   | 22    | 3     | 0,02  | 1     | 1,3   | 30    | 0,6           |
| 8     | 90    | 22    | 3     | 0,04  | 3     | 1,5   | 40    | 1,04          |
| 9     | 60    | 28    | 3     | 0,02  | 3     | 1,5   | 30    | 0,23          |
| 10    | 120   | 28    | 3     | 0,04  | 1     | 1,3   | 40    | 1,09          |
| 11    | 150   | 28    | 4     | 0,04  | 0     | 1,2   | 30    | 2,48          |
| 12    | 90    | 28    | 4     | 0,02  | 2     | 1,4   | 40    | 1,12          |
| 13    | 60    | 16    | 4     | 0,02  | 1     | 1,3   | 40    | 0,56          |
| 14    | 120   | 16    | 4     | 0,04  | 3     | 1,5   | 30    | 1,8           |
| 15    | 150   | 16    | 3     | 0,04  | 2     | 1,4   | 40    | 2,17          |
| 16    | 90    | 16    | 3     | 0,02  | 1     | 1,2   | 30    | 0,55          |

Для обработки данных эксперимента совершен переход к кодированному масштабу. В кодированном масштабе модель (124) имеет следующий вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7 + b_{11}z_1 + b_{22}z_2 + b_{55}z_5 + b_{66}z_6 + b_{111}q_1 + b_{222}q_2 + b_{555}q_5 + b_{666}q_6. \quad (126)$$

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным (и обратно) следующие:

$$\begin{aligned} x_1 &= (X_1 - 105)/15; x_2 = (X_2 - 19)/3; x_3 = 2(X_3 - 3,5); x_4 = 100(X_4 - 0,03); \\ x_5 &= (X_5 - 1,35)/0,05; x_6 = (X_6 - 1,65)/0,05; x_7 = 0,2(X_7 - 35); z_1 = (x_1^2 - 5)/4; \\ z_2 &= (x_2^2 - 5)/4; z_5 = (x_5^2 - 5)/4; z_6 = (x_6^2 - 5)/4; q_1 = (x_1^3 - 8,2 x_1)/8; \\ q_2 &= (x_2^3 - 8,2 x_2)/8; q_5 = (x_5^3 - 8,2 x_5)/8; q_6 = (x_6^3 - 8,2 x_6)/8. \end{aligned}$$

Матрица плана эксперимента  $4^4 \times 2^3 // 16$  в кодированном масштабе представлена в табл. 71.

Таблица 71. Матрица плана эксперимента  $4^4 \times 2^3 // 16$  в кодированном масштабе и результаты опытов

| №  | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_5$ | $z_6$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_5$ | $q_6$ |      |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1  | 1     | -3    | -3    | -1    | 1     | -3    | -3    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | -0,3  | -0,3  | -0,3  | -0,3  |      |
| 2  | 1     | 1     | -3    | -1    | -1    | 1     | -1    | -1    | -1    | 1     | -1    | -1    | -0,9  | -0,3  | -0,9  | 0,9   |      |
| 3  | 1     | 3     | -3    | 1     | -1    | 3     | 3     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0,3   | -0,3  | 0,3   | 0,3   |      |
| 4  | 1     | -1    | -3    | 1     | 1     | -1    | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | -1    | 0,9   | -0,3  | 0,9   | -0,9  |      |
| 5  | 1     | -3    | 1     | 1     | 1     | 1     | 3     | -1    | 1     | -1    | -1    | 1     | -0,3  | -0,9  | -0,9  | 0,3   |      |
| 6  | 1     | 1     | 1     | 1     | -1    | -3    | 1     | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | -0,9  | -0,9  | -0,3  | -0,9  |      |
| 7  | 1     | 3     | 1     | -1    | -1    | -1    | -3    | -1    | 1     | -1    | -1    | -1    | 1     | 0,3   | -0,9  | 0,9   | -0,3 |
| 8  | 1     | -1    | 1     | -1    | 1     | 3     | -1    | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | 0,9   | -0,9  | 0,3   | 0,9   |      |
| 9  | 1     | -3    | 3     | -1    | -1    | 3     | 1     | -1    | 1     | 1     | 1     | -1    | -0,3  | 0,3   | 0,3   | -0,9  |      |
| 10 | 1     | 1     | 3     | -1    | 1     | -1    | 3     | 1     | -1    | 1     | -1    | 1     | -0,9  | 0,3   | 0,9   | 0,3   |      |
| 11 | 1     | 3     | 3     | 1     | 1     | -3    | -1    | -1    | 1     | 1     | 1     | -1    | 0,3   | 0,3   | -0,3  | 0,9   |      |
| 12 | 1     | -1    | 3     | 1     | -1    | 1     | -3    | 1     | -1    | 1     | -1    | 1     | 0,9   | 0,3   | -0,9  | -0,3  |      |
| 13 | 1     | -3    | -1    | 1     | -1    | -1    | -1    | 1     | 1     | -1    | -1    | -1    | -0,3  | 0,9   | 0,9   | 0,9   |      |
| 14 | 1     | 1     | -1    | 1     | 1     | 3     | -3    | -1    | -1    | -1    | 1     | 1     | -0,9  | 0,9   | 0,3   | -0,3  |      |
| 15 | 1     | 3     | -1    | -1    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | -1    | -1    | -1    | 0,3   | 0,9   | -0,9  | -0,9  |      |
| 16 | 1     | -1    | -1    | -1    | -1    | -3    | 3     | -1    | -1    | -1    | 1     | 1     | 0,9   | 0,9   | -0,3  | 0,3   |      |

Поскольку приведенная в табл. 71 матрица плана симметрична и ортогональна, коэффициенты модели (126) рассчитаны по формуле (9).

После расчета коэффициентов модель (126) приняла следующий вид:

$$\begin{aligned} y &= 0,9475 + 0,212x_1 + 0,079x_2 + 0,274x_3 + 0,281x_4 + 0,062x_5 + 0,027x_6 + \\ &+ 0,123x_7 + 0,144z_1 - 0,066z_2 + 0,138z_5 + 0,034z_6 + 0,231q_1 + \\ &+ 0,372q_2 - 0,07q_5 + 0,065q_6. \end{aligned} \quad (127)$$

Таблица 74. Данные для расчета дисперсии неадекватности модели

| № оп.               | 1     | 2    | 3    | 4    | 5    | 6     | 7    | 8    |
|---------------------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|
| $U_{и\text{ эксп}}$ | 1672  | 2462 | 1874 | 2150 | 1776 | 2278  | 2141 | 2445 |
| $U_{и\text{ расч}}$ | 1797  | 2443 | 1814 | 2104 | 1757 | 2403  | 2095 | 2385 |
| $ \Delta_y $        | 125   | 19   | 60   | 46   | 19   | 125   | 46   | 60   |
| $\Delta_y^2$        | 15625 | 361  | 3600 | 2116 | 361  | 15625 | 2116 | 3600 |

Анализ полученной математической модели показал, что влияние рассмотренных факторов на удельную силу выдавливания различно. Влияние добавки алмазного порошка на величину силы выдавливания невелико, о чем свидетельствует незначимая величина коэффициента  $b_2$ . Эффект взаимодействия алмазной добавки с содержанием углерода в шихте выразился в заметном снижении силы выдавливания при применении алмазной добавки на углеродосодержащих заготовках по сравнению с применением алмазной добавки на не содержащих углерод заготовках. Это объясняется меньшей плотностью углеродосодержащих заготовок. Смазка, заполнив отдельные поры, уменьшила трение внутри заготовки в приконтактных с инструментом областях. Эффект взаимодействия алмазной добавки с диаметром пуансона привел к увеличению удельной силы выдавливания при увеличении диаметра пуансона. При этом возрастает плотность в выдавливаемой заготовке, пор в приконтактной области становится меньше, что приводит к отмеченному эффекту. Таким образом, введение в смазку алмазного порошка более эффективно на более пористых заготовках. В то же время качество поверхности, оцениваемое визуально, при использовании смазки с алмазной добавкой значительно выше, чем без добавки (достигается зеркальная поверхность).

Из полученной модели видно довольно слабое влияние диаметра пуансона на удельную силу выдавливания. Это объясняется малым выбранным интервалом варьирования этого фактора.

Наиболее сильно удельная сила выдавливания зависит от процентного содержания графита в шихте, увеличение которого приводит к росту силы холодного выдавливания заготовки.

### 3.11. Статистический анализ математической модели при исследовании влияния различных порошков на железной основе на плотность, твердость и прочность деталей

Модель (28), полученная в п. 1.8 и описывающая плотность заготовок, имеет следующий вид:

$$\gamma [\text{г/см}^3] = 6,45 - 0,0062 x_1 + 0,184 x_2 + 0,533 x_3 + 0,092 x_4 + 0,306 z_1 - 0,00542 z_2 + 0,11 p_1 - 0,061 p_2 - 0,479 q_1 - 4,351 k_1.$$

При сочетании факторов для каждого опыта, заданного матрицей плана эксперимента, приведенной в табл. 14, сформованы 2 детали. Приведенные в табл. 16 значения плотностей – средние по двум деталям.

Для каждого опыта рассчитана построчная дисперсия по формуле (78). Дисперсия воспроизводимости эксперимента рассчитана по формуле (79). Дисперсии оценок коэффициентов, рассчитанные по формуле (80), получены следующие:

$$S_{b_0}^2 = S_{b_3}^2 = S_{b_4}^2 = S_{b_{22}}^2 = 0,00042; S_{b_1}^2 = 0,00089; S_{b_2}^2 = 0,00075; S_{b_{11}}^2 = 0,0026; \\ S_{b_{111}}^2 = 0,0094; S_{b_{222}}^2 = 0,01; S_{b_{1111}}^2 = 0,046; S_{b_{11111}}^2 = 0,417.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определены по формуле (81). Поскольку  $t_{0,05,24} = 2,06$  получены следующие значения:

$$\Delta_{b_0} = \Delta_{b_3} = \Delta_{b_4} = \Delta_{b_{22}} = 0,0426; \Delta_{b_1} = 0,195; \Delta_{b_2} = 0,179; \Delta_{b_{11}} = 0,105; \\ \Delta_{b_{111}} = 0,12; \Delta_{b_{222}} = 0,206; \Delta_{b_{1111}} = 0,445; \Delta_{b_{11111}} = 1,331.$$

Поскольку  $b_0, b_2, b_3, b_4, b_{11}, b_{1111}, b_{11111}$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, они признаны значимыми при 5%-ном уровне значимости. Остальные коэффициенты статистически значимыми не признаны, и члены с этими коэффициентами в модель не включены.

Таким образом, для плотности детали получено следующее уравнение регрессии:

$$y [\text{г/см}^3] = 6,45 + 0,184 x_2 + 0,533 x_3 + 0,092 x_4 + \\ + 0,306 z_1 - 0,479 q_1 - 4,351 k_1. \quad (128)$$

После перехода к натуральным значениям факторов уравнение (128) приняло следующий вид:

$$\gamma [\text{г/см}^3] = 4,7 - 2,38 X_1 + 0,031 X_2 + 1,066 X_3 + 0,368 X_4 + \\ + 3,95 X_1^2 - 2,303 X_1^3 + 0,5447 X_1^4 - 0,04455 X_1^5. \quad (129)$$

Для проверки адекватности модели была рассчитана соответствующая дисперсия по формуле (87). Получено  $S_{\text{неад}}^2 = 0,0343$ .

Расчетное значение критерия Фишера  $F^{P}_{7, 24} = 3,43$ . Табличное значение критерия при 1%-ном уровне значимости  $F^{T}_{0,01; 7, 24} = 3,71$ . Поскольку  $F^{P}_{7, 24} < F^{T}_{0,01; 7, 24}$ , гипотеза об адекватности модели не отвергается.

С использованием математической модели (129) построен график достигаемых плотностей в зависимости от значений факторов в описанном в п.1.8 эксперименте (рис. 37).

При анализе модели (129), чтобы выявить влияние марки порошка, для присвоенных порошкам значений уровней рассчитаны значения величины  $A$  по следующему уравнению:

$$A = -2,38 X_1 + 3,95 X_1^2 - 2,303 X_1^3 + 0,5447 X_1^4 - 0,04455 X_1^5.$$

Результаты расчета приведены в табл.75.

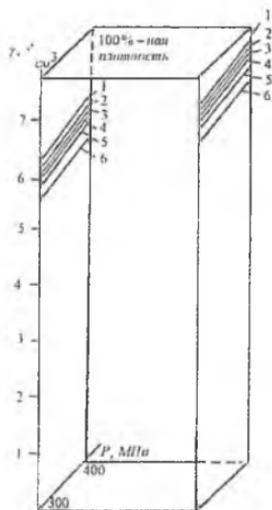


Рис. 37. Достижимые плотности заготовки в зависимости от удельной силы на торце пуансона перед началом создания сдвигов при 1%-ном содержании стеарата цинка для следующих марок железных порошков:

1 – ULTRAPAC-LE ; 2 – WPL-200; 3 – ПЖВ2.160.28;  
4 – ПЖРВ2.200.26; 5 – ПЖРВ3.200.26; 6 – ПЖВ4.160.28

Таблица 75. Влияние марки порошка на плотность заготовки

| Марка порошка        | ПЖВ2.160.28  |        | ПЖРВ3.200.26 |        | WPL-200     |        |
|----------------------|--------------|--------|--------------|--------|-------------|--------|
|                      | ПЖРВ2.200.26 |        | ПЖВ4.160.28  |        | ULTRAPAC-LE |        |
| Значение $F_1 = X_1$ | 0            | 1      | 2            | 3      | 4           | 5      |
| $A$                  | 0            | -0,233 | -0,094       | -0,476 | +0,112      | +0,194 |

Таким образом, наибольшую плотность при остальных равных условиях позволяет достичь применение порошка ULTRAPAC-LE, наименьшую – применение порошка ПЖВ4.160.28.

Анализ модели показывает также, что сила на торце порошковой заготовки (фактор  $X_2$ ) влияет линейно на ее плотность, поскольку значимость коэффициентов  $b_{22}$  и  $b_{222}$  не подтвердилась. Наибольшее влияние на плотность заготовки оказывает схема ее формования в соответствии с рис. 8. Влияние на плотность содержания стеарата цинка в шихте значительное, примерно такое же, как влияние удельной силы, приложенной к торцу заготовки.

Аналогично построена модель зависимости твердости заготовки по Бригнеллю от исследованных факторов. Значения твердости для каждого опыта приведены в табл. 76.

Таблица 76. Результаты измерений твердости деталей  
в соответствии с номерами опытов

|             |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Номер опыта | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
| НВ          | 36,1 | 47,4 | 46,5 | 50,4 | 67,8 | 71,6 | 54,5 | 53,8 |
| Номер опыта | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
| НВ          | 34,6 | 30,2 | 31   | 43,2 | 45,5 | 47,8 | 47,1 | 33,4 |
| Номер опыта | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   |
| НВ          | 46,7 | 82,3 | 85,6 | 45   | 116  | 68,2 | 59,1 | 88,4 |

Приведенные в табл. 77 значения твердости – средние по двум деталям. При этом для каждой детали твердость измеряли трехкратно на каждом из торцов и находили среднее шести измерений.  $S_{y'}^2 = 366,7 / 24 = 15,3$ .

Оценки коэффициентов модели, рассчитанные по формуле (9), следующие:

$$b_0 = 55,51; \quad b_1 = 13,86; \quad b_2 = 6,37; \quad b_3 = 7,26; \quad b_4 = -0,37; \quad b_{11} = 34,56; \\ b_{22} = -0,43; \quad b_{111} = 32,71; \quad b_{222} = -1,44; \quad b_{1111} = -19,31; \quad b_{11111} = -37,1.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов (формула (81)) имеют следующие значения:

$$\Delta_{b_0} = \Delta_{b_3} = \Delta_{b_4} = \Delta_{b_{22}} = 0,177; \quad \Delta_{b_1} = 1,74; \quad \Delta_{b_2} = 1,87; \quad \Delta_{b_{11}} = 3,5; \\ \Delta_{b_{111}} = 6,98; \quad \Delta_{b_{222}} = 7,05; \quad \Delta_{b_{1111}} = 14,8; \quad \Delta_{b_{11111}} = 41,2.$$

Поскольку  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_{11}, b_{111}, b_{1111}$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, они признаны статистически значимыми при 5%-ном уровне значимости.

Таким образом, для твердости заготовки получено следующее уравнение регрессии:

$$y' = 55,51 + 13,86 x_1 + 6,37 x_2 + 7,26 x_3 + 34,56 z_1 + 32,71 p_1 - 0,479 q_1.$$

После перехода к натуральным значениям факторов это уравнение приняло следующий вид:

$$\text{НВ} = 271,3 - 0,486 X_1 - 2,24 X_2 + 14,52 X_3 + 11,06 X_1^2 + \\ + 0,0069 X_2^2 - 13,65 X_1^3 - 0,0000066 X_2^3 + 4,26 X_1^4 - 0,38 X_1^5. \quad (130)$$

Дисперсия неадекватности модели  $S_{\text{неад}} = 53,8$ ; расчетное значение критерия Фишера  $F^P_{7, 24} = 3,52$ . Поскольку  $F^T_{0,01, 7, 24} = 3,71 > F^P_{7, 24}$ , гипотеза об адекватности модели при 1%-ном уровне значимости критерия не отвергается.

Полученное уравнение показывает, что содержание в шихте стеарата цинка не влияет на твердость детали, поскольку значимость коэффициента перед  $X_4$  не подтвердилась.

В п. 3.7 установлена зависимость (122) между твердостью спеченной порошковой детали и ее прочностью. Для порошков WPL-200 и ULTRAPAC-LE эти зависимости приведены в проспекте фирмы «Mannesmann Demag» [17].

С использованием этих зависимостей по величине твердости заготовки и каждом из опытов была определена ее прочность. Результаты приведены в табл. 77. Для каждого опыта в табл. 77 приведены два значения прочности, поскольку в каждом опыте были изготовлены по два образца.

Таблица 77. Прочности деталей для каждого из опытов, указанных в матрице плана эксперимента

|             |    |     |     |     |     |     |     |     |
|-------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Номер опыта | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
| $\sigma_b$  | 65 | 77  | 94  | 121 | 211 | 223 | 193 | 168 |
| [МПа]       | 59 | 71  | 85  | 119 | 197 | 213 | 187 | 164 |
| Номер опыта | 9  | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  |
| $\sigma_b$  | 52 | 42  | 52  | 109 | 171 | 196 | 165 | 117 |
| [МПа]       | 48 | 36  | 46  | 103 | 175 | 188 | 161 | 107 |
| Номер опыта | 17 | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| $\sigma_b$  | 69 | 202 | 214 | 128 | 390 | 227 | 199 | 332 |
| [МПа]       | 63 | 186 | 206 | 126 | 366 | 223 | 197 | 320 |

Оценки коэффициентов модели, рассчитанные по формуле (9), следующие:

$$b_0 = 155,25; \quad b_1 = 48,14; \quad b_2 = 24,5; \quad b_3 = 56,42; \quad b_4 = 3; \quad b_{11} = 106,72; \\ b_{22} = 1,83; \quad b_{111} = 93,35; \quad b_{222} = -5,02; \quad b_{1111} = 0,66; \quad b_{11111} = -268,98.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов, рассчитанные по формуле (81), следующие:

$$\Delta_{b_0} = \Delta_{b_3} = \Delta_{b_4} = \Delta_{b_{22}} = 3,6; \quad \Delta_{b_1} = 5,3; \quad \Delta_{b_2} = 4,86; \quad \Delta_{b_{11}} = 9; \\ \Delta_{b_{111}} = 16,9; \quad \Delta_{b_{222}} = 18,2; \quad \Delta_{b_{1111}} = 38,1; \quad \Delta_{b_{11111}} = 113,7.$$

Поскольку  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_{11}, b_{111}, b_{1111}$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, они признаны статистически значимыми при 5%-ном уровне значимости. Члены с остальными коэффициентами в модель не включены. Таким образом, для прочности заготовки получено следующее уравнение регрессии:

$$y'' = 155,25 + 48,14 x_1 + 24,5 x_2 + 56,42 x_3 + 106,72 z_1 + 93,35 p_1 - 268,98 k_1.$$

После перехода к натуральным значениям факторов это уравнение приняло следующий вид:

$$\sigma_b [\text{МПа}] = 115,31 - 138,31 X_1 - 94,74 X_2 + 112,83 X_3 + \\ + 12 X_4 + 236,75 X_1^2 + 0,0264 X_2^2 - 144,1545 X_1^3 - \\ - 0,000023 X_2^3 + 34,45 X_1^4 - 2,754 X_1^5. \quad (131)$$

Дисперсия неадекватности модели  $S_{\text{неад}} = 207,9$ ; расчетное значение критерия Фишера  $F^{P_{7; 24}} = 2,81$ . Поскольку  $F^{T_{0,01; 7; 24}} = 3,71 > F^{P_{7; 24}}$ , гипотеза об адекватности модели при 1%-ном уровне значимости критерия не отвергается.

Для выявления влияния типа порошка на прочность детали для присвоенных порошкам условных значений уровней было рассчитано выражение  $B = -138,31X_1 + 236,75 X_1^2 - 144,1545 X_1^3 + 34,45 X_1^4 - 2,754 X_1^5$ . Результаты расчета приведены в табл. 78.

Таблица 78. Влияние марки порошка на прочность заготовки

| Марка порошка        | ПЖВ2.160.28 |              | ПЖРВ3.200.26 |             | WPL-200     |         |
|----------------------|-------------|--------------|--------------|-------------|-------------|---------|
|                      |             | ПЖРВ2.200.26 |              | ПЖВ4.160.28 | ULTRAPAC-LE |         |
| Значение $F_1 = X_1$ | 0           | 1            | 2            | 3           | 4           | 5       |
| $B$                  | 0           | -14          | -19,9        | -55,5       | +6,64       | +129,45 |

Таким образом, наибольшая прочность при остальных равных условиях достигается на порошке ULTRAPAC-LE, наименьшая – на порошке ПЖВ4.160.28.

На рис. 38 приведены графики зависимости плотности, твердости и прочности после спекания для заготовки, формованной по схеме, показанной на рис. 8, а. Графики построены в зависимости от удельных сил, приложенных к торцу заготовки перед началом обжатия с большего диаметра на меньший при 1%-ном содержании стеарата цинка в шихте.

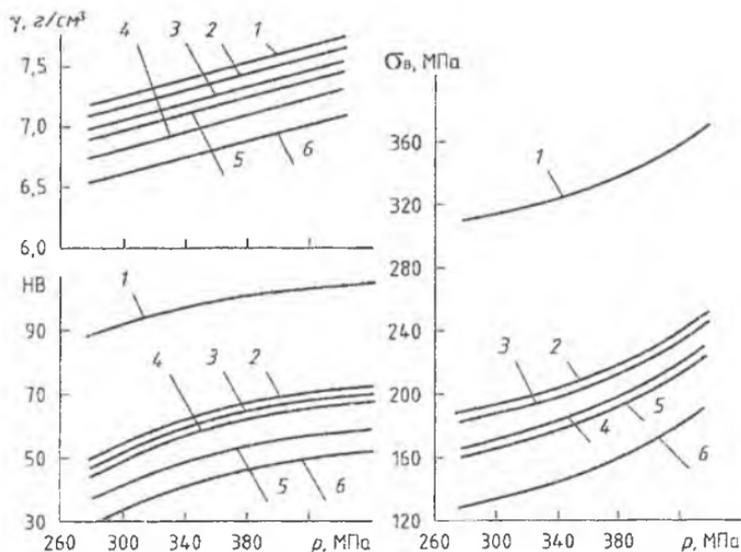


Рис. 38. Зависимости плотности  $\gamma$ , твердости  $HB$  и прочности после спекания заготовок от удельных сил перед началом обжима, т.е. заготовок, изготовленных по схеме, показанной на рис. 8, а:

1 – порошок ULTRAPAC-LE; 2 – порошок WPL-200; 3 – ПЖВ2.160.28;  
4 – ПЖРВ2.200.26; 5 – ПЖРВ3.200.26; 6 – ПЖВ4.160.28

Твердость и прочность заготовок наиболее зависят от марки порошка порошок ULTRAPAC-LE имеет существенное преимущество перед нелегированными порошками, однако механическая схема деформирования тоже вносит существенный вклад, изменяя достигаемую прочность в среднем на 50%.

При одинаковых силах формования и режимах спекания наилучшей уплотняемостью обладает порошок ULTRAPAC-LE, относительная плотность образцов из которого выше относительной плотности образцов из порошков ПЖВ2.160.28 и WPL-200. Плотность последних соответственно на 6...7% и 2...3% выше плотности образцов из порошков ПЖВ4.160.28 и распыленного водой порошков ПЖРВ2.200.26 и ПЖРВ3.200.26.

Прочность образцов из порошка ULTRAPAC-LE соответственно в 2...2,4 и 1,5...1,7 раза выше прочности образцов из ПЖВ4.160.28 и ПЖВ2.160.28. Образцы из порошка ПЖВ2.160.28 незначительно уступают по прочности образцам из WPL-200 и их прочность превышает на 6...10% прочность образцов из ПЖРВ2.200.26 и ПЖРВ3.200.26.

Проведенные исследования показали, что независимо от марки порошка для достижения высоких плотности, твердости и прочности заготовок деталей целесообразно применять механические схемы уплотнения порошковой шихты, предусматривающие большие сдвиги между частицами, при этом плотность заготовок повышается в среднем на 10...12%, а прочность – примерно в 2 раза.

Кривые, приведенные на рис. 38, позволяют провести пересчет результатов проведенных исследований по формованию порошковых деталей на другие марки железных порошков.

В частности, ниже, в п. 3.13, приведены данные по распределению плотности и прочности для втулок, изготовленных формованием из порошков ПЖВ2.160.28 и ПЖВ4.160.28. На рис. 43 плотности деталей из ПЖВ2.160.28 на 0,45 г/см<sup>3</sup> выше, чем у деталей из ПЖВ4.160.28. Соответственно прочности (рис. 44) различаются на 50 МПа. На рис. 38 для деталей из этих же порошков плотности и прочности различаются на 0,45 г/см<sup>3</sup> и на 55 МПа. Следовательно, в описанном в п. 3.13 исследовании можно было применить порошок только одной марки, а для другой результаты пересчитать с использованием графиков на рис. 38. Можно также пересчитать плотности и прочности втулок, рассмотренных в п. 3.13, для вариантов их изготовления из порошков ПЖРВ2.200.26, ПЖРВ3.200.26, WPL-200 и ULTRAPAC-LE.

Важным выводом из рассмотрения графиков на рис. 38 является постоянство расстояний между кривыми и углов наклона касательных к ним вне зависимости от удельной силы формования, толщины стенки и угла конусности втулки. Следовательно, изменение плотности, твердости и прочности порошковой заготовки, связанное с заменой марки порошка, не зависит от формы детали и силы формования.

### 3.12. Моделирование неполной горячей штамповки бронзовых заготовок с применением корреляционного и регрессионного анализов

Проектирование технологических процессов неполной горячей штамповки затруднено ограниченными сведениями в литературе о прочности и пластичности материалов при температурах в интервале 400...800 °С. Практически для каждого материала требуется проведение трудоемких испытаний на растяжение образцов в нагретом состоянии.

Трудоемкость испытаний может быть снижена применением планирования эксперимента и построением математических моделей, описывающих механические характеристики материала в зависимости от температуры.

Из механических характеристик, определяемых по результатам испытаний образцов на растяжение, наиболее просто измеряется предел текучести  $\sigma_T$ . Целесообразно по результатам выборочных испытаний получить уравнения, связывающие другие механические характеристики с пределом текучести. Тогда при дополнительных исследованиях данного материала в новых температурных условиях можно измерять только  $\sigma_T$ , а остальные механические характеристики рассчитывать по уравнениям связи.

Корреляционный анализ (см. п. 3.7) позволил установить уравнения связи между следующими характеристиками образцов: пределом текучести  $\sigma_T$ , пределом прочности  $\sigma_B$ , относительным удлинением образца  $\delta_5$  и сужением  $\Psi$  шейки. Анализ проводился по результатам испытаний на растяжение образцов из Бр А10ЖЗМц1,5 в интервале температур от 100 до 600 °С с шагом 50 °С со скоростями 5 мм/мин и 50 мм/мин для каждой температуры, по три образца при каждом сочетании температурно-скоростных параметров деформирования. Всего 60 замеров механических характеристик.

Результаты расчетов по формуле (117) сведены в табл. 79.

Критическое значение коэффициента парной корреляции при числе степеней свободы  $f = 58$  при доверительной вероятности  $P = 99\%$  равно 0,325. Признанные значимыми коэффициенты парной корреляции в табл. 79 отмечены звездочкой.

Таблица 79. Коэффициенты парной корреляции между механическими характеристиками бронзы А10ЖЗМц1,5

| Бр А10ЖЗМц1,5 | $\sigma_T$ | $\sigma_B$ | $\delta_5$ | $\Psi$   |
|---------------|------------|------------|------------|----------|
| $\sigma_T$    | 1          | 0,8544*    | 0,0388     | -0,056   |
| $\sigma_B$    | 0,8544*    | 1          | -0,1196    | -0,3364* |
| $\delta_5$    | 0,0388     | -0,1196    | 1          | 0,7096*  |
| $\Psi$        | -0,056     | -0,3364*   | 0,7096*    | 1        |

Звездочками отмечено наличие признанной значимой корреляционной связи между механическими характеристиками. Для описания этой связи по формулам (119), (120) рассчитаны следующие уравнения:

$$\sigma_B = 1,77 \sigma_T - 45,3; \quad \Psi = -0,016 \sigma_B + 49,9; \quad \delta_5 = 0,35 \Psi + 7,11.$$

Отметим, что уравнения с незначительно отличающимися от приведенных выше уравнений коэффициентами могли быть получены на основании значительно меньших объемов экспериментов.

Обработкой экспериментальных результатов получены математические модели связи предела текучести БрА10ЖМц1,5 с температурой и скоростью деформирования. Принятые в эксперименте уровни варьирования факторов и результаты измерений  $\sigma_T$  приведены в табл. 80. Фактор  $X_1$  – скорость деформирования образца, мм/мин;  $X_2$  – температура, °С.

Каждое из записанных в табл. 80 значений  $\sigma_T$  – среднее из трех измерений. Дисперсию воспроизводимости эксперимента определили по формуле (78). Рассчитанное значение:  $S_y^2 = 293,16$ .

По результатам эксперимента строится модель следующего вида:

$$y = b_0 + b_{1x_1} + b_{2x_2} + b_{22z_2} + b_{222}q_2 + b_{2222}n_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{122}x_1z_2 + b_{1222}x_1q_2 + b_{12222}x_1n_2, \quad (132)$$

где  $x_1$  – линейная функция от  $X_1$ ;  $z_2$  – квадратичная функция от  $X_2$ ;  $q_2$  – кубическая функция от  $X_2$ ;  $n_2$  – функция четвертой степени от  $X_2$ ;  $X_1$  – уровень фактора в натуральном масштабе.

Таблица 80. Матрица плана и результаты эксперимента

| № оп. | В машт. $X_i$ |       | В кодированном масштабе |       |       |       |       |       |          |          |          |          | $\sigma_T$ , МПа<br>эксп.<br>(расч.) |
|-------|---------------|-------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|--------------------------------------|
|       | $X_1$         | $X_2$ | $x_0$                   | $x_1$ | $x_2$ | $z_2$ | $q_2$ | $n_2$ | $x_1x_2$ | $x_1z_2$ | $x_1q_2$ | $x_1n_2$ |                                      |
| 1     | 5             | 150   | 1                       | -1    | -2    | 2     | -1    | 1     | 2        | -2       | 1        | -1       | 292,6<br>(292,7)                     |
| 2     | 5             | 250   | 1                       | -1    | -1    | -1    | 2     | -4    | 1        | 1        | -2       | 4        | 351,1<br>(361,6)                     |
| 3     | 5             | 350   | 1                       | -1    | 0     | -2    | 0     | 6     | 0        | 2        | 0        | -6       | 346,7<br>(365,0)                     |
| 4     | 5             | 450   | 1                       | -1    | 1     | -1    | -2    | -4    | -1       | 1        | 2        | 4        | 291,9<br>(302,9)                     |
| 5     | 5             | 550   | 1                       | -1    | 2     | 2     | 1     | 1     | -2       | -2       | -1       | -1       | 143,0<br>(175,4)                     |
| 6     | 50            | 150   | 1                       | 1     | -2    | 2     | -1    | 1     | -2       | 2        | -1       | 1        | 284,6<br>(292,7)                     |
| 7     | 50            | 250   | 1                       | 1     | -1    | -1    | 2     | -4    | -1       | -1       | 2        | -4       | 396,2<br>(361,6)                     |
| 8     | 50            | 350   | 1                       | 1     | 0     | -2    | 0     | 6     | 0        | -2       | 0        | 6        | 360,4<br>(365,0)                     |
| 9     | 50            | 450   | 1                       | 1     | 1     | -1    | -2    | -4    | 1        | -1       | -2       | -4       | 320,1<br>(302,9)                     |
| 10    | 50            | 550   | 1                       | 1     | 2     | 2     | 1     | 1     | 2        | 2        | 1        | 1        | 208,4<br>(175,3)                     |

Поскольку уровни факторов равноотстоящие, для их уровней в кодированном масштабе выбраны коэффициенты ортогональных полиномов Чебышева [14], приведенные в табл. 80.

Уравнения связи между факторами в натуральном и кодированном масштабах следующие:

$$\begin{aligned} x_1 &= (X_1 - 27,5) / 22,5; \quad x_2 = (X_2 - 350) / 100; \quad z_2 = x_2^2 - 2; \\ q_2 &= 5 (x_2^3 - 3,4 x_2) / 6. \end{aligned} \quad (133)$$

Коэффициенты модели (132) определены по формуле (9). Получены следующие их значения:

$$\begin{aligned} b_0 &= 299,5; \quad b_1 = 14,44; \quad b_2 = -29,345; \quad b_{22} = -32,725; \quad b_{222} = 2,24; \\ b_{2222} &= -1,9; \quad b_{12} = -6,495; \quad b_{122} = 0,504; \quad b_{1222} = 5,36; \quad b_{12222} = -1,097. \end{aligned}$$

Дисперсии оценок коэффициентов определены по формуле (80), их значения следующие:

$$\begin{aligned} S^2 b_0 &= S^2 b_1 = 29,32; \quad S^2 b_2 = S^2 b_{12} = S^2 b_{222} = S^2 b_{1222} = 14,66; \\ S^2 b_{22} &= S^2 b_{122} = 10,47; \quad S^2 b_{2222} = S^2 b_{12222} = 2,09. \end{aligned}$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определены по формуле (81). В данном случае при  $\alpha = 0,01$  и  $f_1 = 20$  величина  $t_{0,01;20} = 2,85$ , поэтому

$$\begin{aligned} \Delta b_0 &= \Delta b_1 = 15,433; \quad \Delta b_2 = \Delta b_{12} = \Delta b_{222} = \Delta b_{1222} = 10,913; \\ \Delta b_{22} &= \Delta b_{122} = 9,223; \quad \Delta b_{2222} = \Delta b_{12222} = 4,121. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты  $b_0$ ,  $b_2$  и  $b_{22}$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, их следует признать статистически значимыми при 1%-ном уровне значимости критерия. Остальные коэффициенты признать статистически значимыми нельзя, и в модель их можно не включать.

Таким образом, получено следующее уравнение регрессии:

$$\sigma_T [\text{МПа}] = 299,5 - 29,345 x_2 - 32,725 z_2. \quad (134)$$

Структура модели (133) показывает, что даже при желании оценить значимость влияния скорости деформирования, для определения коэффициентов достаточно было провести эксперимент  $2 \times 3 // 6$ , включающий в себя 6 опытов. При этом трехкратное повторение каждого опыта позволяет определить коэффициенты парной корреляции между механическими характеристиками и записать уравнения корреляционной связи.

Дисперсия неадекватности для модели (134) определена по формуле (87). Получено  $S^2_{\text{неад}} = 613$ .

Расчетное значение критерия Фишера определено по формуле (86). В результате  $F_{\text{расч}} = 2,09$ . Табличное значение  $F$ -критерия для принятого 1%-ного уровня значимости равно:  $F_7 = 3,71$ . Поскольку расчетное значение  $F$ -критерия не превышает табличного, гипотеза об адекватности моделей принимается.

После перехода к натуральным значениям факторов модель (134) приняла вид:

$$\sigma_T [\text{МПа}] = 66,78 + 1,997 X_2 - 0,0033 X_2^2. \quad (135)$$

Анализ модели (135) показывает, что функция имеет максимум при температуре 305,2 °С. При этом  $\sigma_T = 371,59$  МПа. Если рассматривать процесс с позиции уменьшения деформирующей силы, интервал температур от 200 до 400 °С является наиболее благоприятным для штамповки. При температуре 600 °С рассчитанное по модели (135) значение  $\sigma_T$  равно 87,8 МПа, т.е. в 4,2 раза меньше, чем при 300 °С. Рассчитанные по уравнениям корреляционной связи другие механические характеристики соответственно для 350 и 600 °С имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= 594,5 \text{ МПа}; \quad \Psi = 40,5\%; \quad \delta = 21,24\%; \\ \sigma_B &= 155,4 \text{ МПа}; \quad \Psi = 47,4\%; \quad \delta = 23,7\%. \end{aligned} \quad (136)$$

Измеренные величины этих механических характеристик (усредненные между полученными при скоростях деформирования 5 мм/мин и 50 мм/мин) следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= 545,5 \text{ МПа}; \quad \Psi = 40,42\%; \quad \delta = 20,06\%; \\ \sigma_B &= 99,2 \text{ МПа}; \quad \Psi = 33,1\%; \quad \delta = 16,2\%. \end{aligned} \quad (137)$$

Сопоставление результатов (135) и (136) показывает, что предсказанные по уравнениям регрессии значения свидетельствуют об увеличении  $\Psi$  и  $\delta$  с увеличением температуры. На самом деле значения  $\Psi$  и  $\delta$  при 600 °С меньше, чем при 350 °С. Сравнение между собой экспериментально определенных значений  $\Psi$  и  $\delta$  при разных температурах приводит к обнаружению их максимальных величин при 500 °С, а именно:  $\Psi = 58,6\%$ ;  $\delta = 28,26\%$ . При вычислении этих характеристик по уравнениям регрессии максимум потерян.

Для оптимизации процесса по комплексу механических характеристик целесообразно отразить этот комплекс функцией желательности (см. п. 1.13). Совокупность значений функции желательности по каждой из 4 механических характеристик позволила рассчитать обобщенную желательность.

Для этой обобщенной желательности построена математическая модель вида (132) при тех же уровнях варьирования факторов, что и в предыдущем эксперименте. Значения механических характеристик образцов, определенные из опытов по плану, приведенному в табл. 80, и соответствующие им значения функции желательности приведены в табл. 81. Каждое из записанных в табл. 81 значений механических характеристик и соответственно функции желательности – среднее из трех измерений. Рассчитанные значения  $S_y^2 = 0,021$ .

Обработка результатов привела к установлению следующих оценок коэффициентов модели (132) и их дисперсий:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,217; \quad b_1 = -0,0404; \quad b_2 = 0,181; \quad b_{22} = 0,096; \quad b_{222} = 0,03; \\ b_{2222} &= -0,002; \quad b_{12} = -0,027; \quad b_{122} = 0,0014; \quad b_{1222} = 0,024; \quad b_{12222} = 0,0084; \end{aligned}$$

$$S^2 b_0 = S^2 b_1 = 0,0021; S^2 b_2 = S^2 b_{12} = S^2 b_{222} = S^2 b_{1222} = 0,00105;$$

$$S^2 b_{22} = S^2 b_{122} = 0,00075; S^2 b_{2222} = S^2 b_{12222} = 0,00015.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов при 1%-ном уровне значимости критерия Стьюдента следующие:

$$\Delta b_0 = \Delta b_1 = 0,131; \Delta b_2 = \Delta b_{12} = \Delta b_{222} = \Delta b_{1222} = 0,092;$$

$$\Delta b_{22} = \Delta b_{122} = 0,078; \Delta b_{2222} = \Delta b_{12222} = 0,034.$$

Таблица 81. Механические характеристики образцов и соответствующие им значения функции желательности

| № опыта | $\sigma_T$ , МПа | $\sigma_B$ , МПа | $\delta$ , % | $\Psi$ , % | $d_{\sigma_T}$ | $d_{\sigma_B}$ | $d_{\delta}$ | $d_{\Psi}$ | $D$   | $D_p$ |
|---------|------------------|------------------|--------------|------------|----------------|----------------|--------------|------------|-------|-------|
| 1       | 29,3             | 61,5             | 21,9         | 36,1       | 0,075          | 0,001          | 0,15         | 0,004      | 0,014 | 0,047 |
| 2       | 35,1             | 58,1             | 20,5         | 45,2       | 0,0006         | 0,004          | 0,006        | 0,39       | 0,009 | -0,06 |
| 3       | 34,7             | 54,4             | 20,2         | 37,0       | 0,0009         | 0,04           | 0,006        | 0,006      | 0,006 | 0,025 |
| 4       | 29,2             | 34,5             | 27,6         | 47,5       | 0,077          | 0,7            | 0,875        | 0,55       | 0,4   | 0,302 |
| 5       | 14,3             | 17,0             | 25,5         | 57,3       | 0,875          | 0,95           | 0,735        | 0,91       | 0,86  | 0,771 |
| 6       | 28,5             | 61,2             | 21,7         | 37,6       | 0,125          | 0,0015         | 0,125        | 0,004      | 0,017 | 0,047 |
| 7       | 39,6             | 58,7             | 19,7         | 48,3       | 0,0001         | 0,003          | 0,02         | 0,61       | 0,008 | -0,06 |
| 8       | 36,0             | 54,7             | 19,9         | 43,8       | 0,0005         | 0,035          | 0,04         | 0,28       | 0,02  | 0,025 |
| 9       | 32,0             | 43,5             | 22,4         | 42,7       | 0,005          | 0,4            | 0,26         | 0,19       | 0,1   | 0,302 |
| 10      | 20,8             | 24,6             | 24,7         | 52,9       | 0,655          | 0,9            | 0,66         | 0,79       | 0,74  | 0,771 |

Поскольку коэффициенты  $b_0$ ,  $b_2$  и  $b_{22}$  по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, их следует признать статистически значимыми. Остальные коэффициенты в математические модели можно не включать.

Таким образом, получена следующая математическая модель:

$$y = 0,217 + 0,181x_2 + 0,096 z_2. \quad (138)$$

По структуре модель (138) аналогична модели (134). Для определения входящих в нее коэффициентов и оценки значимости влияния скорости деформирования достаточно было провести эксперимент, включающий в себя 6 опытов.

Из анализа табл. 81 видно, что с увеличением температуры уменьшаются  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$  и увеличиваются значения соответствующих функций желательности. Величина  $\Psi$  с увеличением температуры закономерно не изменяется. В результате значения обобщенной функции желательности с изменением температуры существенно не изменяются. Это же показал описанный выше регрессионный анализ.

Расчитанные по модели (138) значения обобщенной желательности  $D_p$  для бронзы приведены в табл. 81.

Дисперсия неадекватности для модели (138) определена аналогично определению этой дисперсии для модели (134). Получено  $S^2_{\text{неад}} = 0,01$ . Расчетное

значение критерия Фишера  $F_p = S^2_{\text{неад}} / S^2_y = 0,48$ . Табличное значение  $F$ -критерия для 1%-ного уровня значимости (с учетом, что число степеней свободы при расчете  $S^2_{\text{неад}}$  равно 7, а при расчете  $S^2_y$  равно 80)  $F_T = 2,9$ .

Поскольку рассчитанное значение  $F$ -критерия не превышает табличного, гипотеза об адекватности модели принимается.

Преобразование модели (138) с учетом уравнения  $z_2 = x_2^2 - 2$  дает следующее:

$$y = 0,096 x_2^2 + 0,181 x_2 + 0,025.$$

Эта функция имеет минимум при  $x_2 = -0,94$ , что соответствует  $X_2 = 256$  °С. Температурный интервал вблизи этого значения является неблагоприятным для штамповки. Других экстремумов функция не имеет, и при увеличении температуры нет опасности попасть в интервал низкой пластичности сплава. Верхнее ограничение температуры штамповки следует вводить с позиций недопущения большого окисления заготовки.

### 3.13. Определение качества формованных тонкостенных втулок из железных порошков

При конической внешней поверхности втулки и, как следствие, переменной по высоте площади ее поперечного сечения равномерность распределения плотности в стенке втулке существенно зависит от того, расположена ли она при формовании тонкой частью стенки вниз или вверх.

При работе с порошковыми шихтами на железной основе необходимо, чтобы под действием приложенной силы материал перемещался в расширяющуюся часть матрицы.

Согласно схемам на рис. 39 порошковая шихта засыпается со стороны тонкой части полости через верхнее отверстие между оправкой и матрицей.

При этом оправку опускают, открывая отверстие для засыпки. Порошок хорошо засыпается в расширяющуюся полость матрицы, равномерно заполняя ее. После заполнения порошком всего объема полости матрицы оправку перемещают вверх выталкивателем пресса (рис. 39, а), как показано на рисунке стрелкой с указанием  $V_{\text{оп}}$ . Под действием сил контактного трения и благодаря наличию ступени в нижней части оправки порошок хорошо заполняет узкую часть полости матрицы. При этом засыпное отверстие полости матрицы перекрывается оправкой. Опуская силой ползуна пресса матрицу навстречу неподвижному кольцевому пуансону, формуют втулку (рис. 39, б).

При уплотнении согласно рис. 39 на заготовку помимо нормальных напряжений сжатия действуют касательные напряжения  $\tau_k$  (рис. 40). Напряжения  $\tau_k$  вызваны силами трения на поверхностях контакта элементов штампа с формируемым порошком. Под действием  $\tau_k$  в материале заготовки возникают сдвиги между частицами порошка (см. п. 1.8), что приводит к закрытию пор и предотвращению так называемых перепрессовочных трещин.

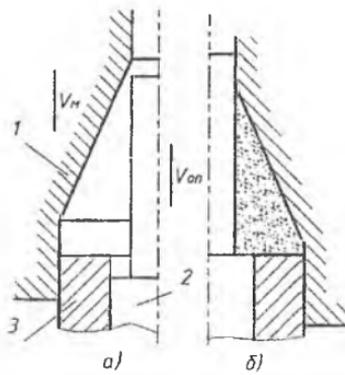


Рис. 39. Расположение элементов штампа и их перемещения при формировании втулки: *а* – начало формирования, *б* – окончание формирования; 1 – матрица; 2 – оправка со ступенью; 3 – пуансон

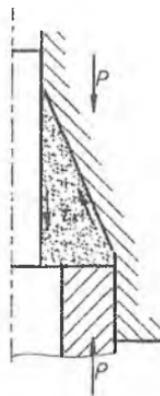


Рис. 40. Схема действия касательных напряжений  $\tau_k$  при формировании по схеме на рис. 39

Порошок как бы «затягивается» силами трения в тонкую часть стенки.

В результате в своей наиболее тонкой части формируемые втулки имеют наибольшую плотность. Это важно, поскольку после формирования втулка подвергается спеканию. У спеченной втулки плотность толстой части стенки можно повысить последующей холодной штамповкой. В то же время для повышения холодной штамповкой плотности в тонкой части стенки спеченной втулки потребовалось бы создание напряжений, которые не выдерживает даже самый лучший штамповый инструмент.

Задачей описанного ниже исследования являлось определение распределения плотности, твердости и прочности по меридиональному сечению формируемых предложенным способом втулок из железного порошка, имеющих коническую внешнюю поверхность.

Фотография формованных описанным выше способом втулок приведена на рис. 41.

После формования, как и все изделия порошковой металлургии, эти детали подвергаются спеканию и, если формируются порошковые стали, – термообработке.

Относительная плотность во втулках определена следующим образом. Из втулок вырезаны кольцевые элементы высотой 2 мм, имеющие средний относительный радиус внешней поверхности  $R = \frac{\bar{R}}{r}$  (см. рис. 42).



Рис. 41. Втулки, формованные из порошка ПЖВ2.160.28 по приведенной на рис. 39 схеме

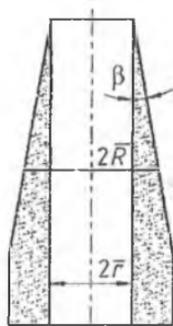


Рис. 42. Обозначения размеров конической втулки

Для определения средней относительной плотности элемента проведено его взвешивание в дистиллированной воде и на воздухе. По разнице между результатами взвешивания, с учетом плотности воды, определена относительная плотность элемента  $\gamma$ .

Для контроля качества, в частности механических характеристик, у таких тонкостенных деталей традиционные методы, при которых требуется изготавливать стандартные образцы на растяжение, на ударную вязкость, являются неприемлемыми.

Для оценки прочности тонкостенных порошковых деталей разработан косвенный метод, поскольку из тонких частей деталей невозможно вырезать стандартные образцы для определения механических характеристик. Метод заключается в том, что в результате описанного ниже проведенного исследования установлена регрессионная зависимость, связывающая предел прочности детали с ее твердостью. В дальнейшем, по результатам измерения твердости в исследуемых сечениях тонкостенной детали, по установленной зависимости был вычислен предел прочности.

Твердость для последующего расчета предела прочности определена как среднее арифметическое шести замеров: по три замера на каждом торце вырезанного из втулки кольцевого элемента.

Для установления регрессионной зависимости, связывающей твердость по Бринеллю с пределом прочности детали, изготовлены формованием из порошков ПЖВ2.160.28 и ПЖВ4.160.26 диски, предназначенные для вырезки из них стандартных образцов для испытания механических характеристик. Для этого железные порошки смешали с пластификатором: стеаратом цинка, содержание которого варьировалось от 0,5 до 1,5 %. Был применен смеситель барабанного типа при скорости вращения 100 об/мин. Смешивание производилось в течение 20 мин. Подготовленная порошковая шихта в цилиндрической матрице диаметром 60 мм была уплотнена давлением 600 МПа. Формованные диски спекли в среде эндогаза при температуре 1150 °С в течение 40 мин. Спеченные диски имели плотность в пределах 76...92 % от теоретической плотности железа и отношение высоты к диаметру 0,24...0,25. Различные плотности дисков объясняются варьированием марки порошка и содержания пластификатора. Из спеченных дисков были вырезаны стандартные образцы с диаметром 6 мм для испытания на разрыв. Предел прочности  $\sigma_B$  определен при разрыве образцов по стандартной методике, также по стандартной методике измерена твердость дисков по Бринеллю ( $HB$ ). Для большей точности твердость  $HB$  определена как среднее арифметическое из 5 замеров.

По формуле (117) было определено, что коэффициент парной корреляции между твердостью и прочностью испытанных образцов равен 0,913.

Всего в эксперименте было 16 формованных описанным выше образом и спеченных дисков, из которых вырезали образцы для испытаний на разрыв и у которых измерена твердость. При уровне значимости критерия 5% и числе степеней свободы, которое на 2 единицы меньше 16, по табл. 65 определено табличное значение коэффициента парной корреляции, равное 0,426.

Поскольку указанное расчетное значение коэффициента парной корреляции превышает табличное, корреляционная связь между пределом прочности  $\sigma_B$  и  $HB$  является статистически значимой.

В эксперименте, проведенном для описания математическими моделями распределения плотности, твердости и прочности во втулках, показанных на рис. 42, приняты следующие факторы:

- относительный средний внешний радиус вырезанного из втулки кольцевого элемента  $R = \frac{\bar{R}}{r}$ ;
  - угол наклона образующей внешней поверхности втулки к оси симметрии  $\beta$ ;
  - марка железного порошка  $X$ ;
  - удельная сила формования  $q$ , определенная как частное от деления силы формования на площадь торцевой поверхности втулки (см. рис. 42).
- Уровни варьирования указанных факторов приведены в табл. 82.

Таблица 82. Уровни варьирования факторов

| Уровни варьиров.<br>в кодах $F_i$ | Факторы     |     |         |          |
|-----------------------------------|-------------|-----|---------|----------|
|                                   | $X$         | $R$ | $\beta$ | $q$      |
| 0                                 | ПЖВ2.160.28 | 1,2 | 6       | 800 МПа  |
| 1                                 | ПЖВ4.160.26 | 1,4 | 12      | 1200 МПа |

Для описания распределения относительной плотности  $\gamma$  и прочности  $\sigma_B$  по высоте втулки проведен многофакторный эксперимент с указанными выше факторами и уровнями их варьирования. Матрица плана эксперимента приведена в табл. 83.

Таблица 83. Матрица плана и результаты эксперимента

| № оп. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\gamma, \text{г/см}^3$ | $HВ$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------|------|
| 1     | +     | -     | -     | -     | -     | 6,65                    | 62   |
| 2     | +     | +     | -     | -     | +     | 6,70                    | 65   |
| 3     | +     | -     | +     | -     | -     | 6,21                    | 77   |
| 4     | +     | +     | +     | -     | +     | 6,14                    | 65   |
| 5     | +     | -     | -     | +     | +     | 7,51                    | 86   |
| 6     | +     | +     | -     | +     | -     | 6,47                    | 74   |
| 7     | +     | -     | +     | +     | +     | 6,88                    | 75   |
| 8     | +     | +     | +     | +     | -     | 6,10                    | 60   |

Переход от натуральных значений факторов к кодированным и обратно осуществляется по следующим формулам:  $x_1 = 2(X_1 - 0,5)$ ;  $x_2 = 10(X_2 - 1,3)$ ;  $x_3 = 0,33(X_3 - 9)$ ;  $x_4 = 0,005(X_4 - 1000)$ .

Определенные в результате проведенных опытов плотность и твердость для заданных планом сочетаний уровней факторов приведены в соответствующих колонках табл. 84.

Приведенной матрице плана соответствует линейная модель вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i x_i, \quad (139)$$

где  $x_i$  — значения факторов в кодированном масштабе, приведенные в табл. 84.

Коэффициенты модели (139) определены по формуле (9). Дисперсия воспроизводимости эксперимента определена при дублировании опыта в центре плана по формуле (78). При этом опыты в центре плана были продублированы 6 раз. Для модели распределения плотности дисперсия воспроизводимости эксперимента составила 0,03, для модели распределения твердости  $S_y^2 = 1,67$ .

Результаты расчета коэффициентов  $b_i'$  и  $b_i''$  соответственно для модели распределения плотности и модели распределения твердости и доверительных интервалов оценок этих коэффициентов  $\Delta b_i'$   $\Delta b_i''$  приведены в табл. 84. Также в этой таблице даны рассчитанное и табличное значения критерия Фишера. При оценке значимости коэффициентов и оценке адекватности моделей табличные значения критериев Стьюдента и Фишера были взяты при 10%-ном уровне значимости.

Таблица 84. Результаты расчета коэффициентов и значений критерия Фишера

| $i$ | $b_i'$ | $\Delta b_i'$ | $b_i''$ | $\Delta b_i''$ | $F_p'$ | $F_p''$ | $F_T$ |
|-----|--------|---------------|---------|----------------|--------|---------|-------|
| 0   | 6,5    |               | 70,5    |                |        |         |       |
| 1   | - 0,23 |               | - 4,5   |                |        |         |       |
| 2   | - 0,25 | 0,123         | - 1,25  | 0,93           | 3,44   | 13,77   | 16,26 |
| 3   | 0,15   |               | 3,25    |                |        |         |       |
| 4   | 0,22   |               | 2,25    |                |        |         |       |

Поскольку абсолютные значения коэффициентов моделей больше соответствующих доверительных интервалов, все коэффициенты признаны статистически значимыми. Поскольку расчетные значения  $F$ -критерия меньше табличного, гипотеза об адекватности полученных моделей не отвергается.

Полученные математические модели в натуральном масштабе имеют следующий вид.

Для распределения плотности по высоте втулки:

$$\gamma \text{ [г/см}^3\text{]} = 8,64 - 0,46 X - 2,5 R + 0,05 \beta + 0,0011 q, \quad (140)$$

для распределения твердости по высоте втулки:

$$HB = 70,5 - 9 X - 12,5 R + 1,1 \beta + 0,011 q. \quad (141)$$

С использованием зависимости (122) между пределом прочности и твердостью и модели (141) получена модель распределения предела прочности по высоте втулки:

$$\sigma_B \text{ [МПа]} = 193 - 49,4 X - 68,6 R + 5,96 \beta + 0,062 q. \quad (142)$$

На основании математических моделей (140) и (142) построены графики распределения плотности и предела прочности в зависимости от относительного радиуса внешней поверхности втулки  $R$ , угла  $\beta$  и марки железного порошка

при удельной силе формования 1200 МПа, приведенные соответственно на рис. 43 и 44.

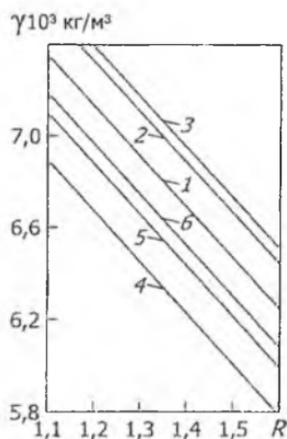


Рис. 43. Распределение плотности по высоте конической втулки. Удельная сила формования  $q = 1200$  МПа, прямые 1, 2, 3 — для втулок из порошка ПЖВ2.160.28; прямые 4, 5, 6 — для втулок из порошка ПЖВ4.160.26; прямые 1 и 4 — для  $\beta = 6^\circ$ ; прямые 2 и 5 для  $\beta = 10^\circ$ ; прямые 3 и 6 — для  $\beta = 12^\circ$

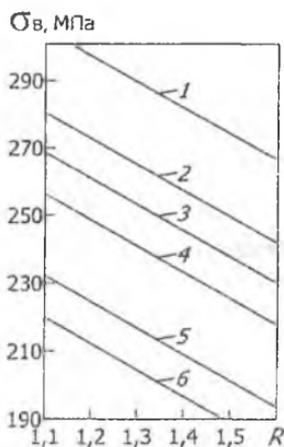


Рис. 44. Распределение прочности по высоте конической втулки. Удельная сила формования  $q = 1200$  МПа, прямые 1, 2, 3 — для втулок из порошка ПЖВ2.160.28; прямые 4, 5, 6 — для втулок из порошка ПЖВ4.160.26; прямые 1 и 4 — для  $\beta = 6^\circ$ ; прямые 2 и 5 для  $\beta = 10^\circ$ ; прямые 3 и 6 — для  $\beta = 12^\circ$

Уравнение (141) позволяет рассчитать твердости в разных участках не только у втулки из ПЖВ2.160.28, значения которых были указаны выше, но у целого семейства втулок при варьировании  $R$ ,  $\beta$ ,  $q$ , изготавливаемых из порошков двух названных марок.

Анализ модели (140) указывает направление, в котором необходимо изменять исследованные параметры технологического процесса, чтобы изготовить деталь с наибольшей плотностью.

С помощью опытов в этом направлении определили удельную силу, необходимую для формования тонкостенной втулки из порошка ПЖВ2.160.28 с размерами  $\beta = 6^\circ$ ;  $r = r_1 = 10$  мм;  $H = 50$  мм. Указанная удельная сила составляет 1750 МПа, а плотность по высоте детали распределяется согласно рис. 43, прямая 3, при этом неравномерность плотности не превышает 8 %.

### 3.14. Моделирование корреляционных связей между показателями качества заготовок, формованных из железных порошков

При использовании способа уплотнения, показанного на рис. 8, высокая плотность образцов до спекания позволяет применить для испытания на сдвиговую прочность штамп, схема которого приведена на рис. 45.

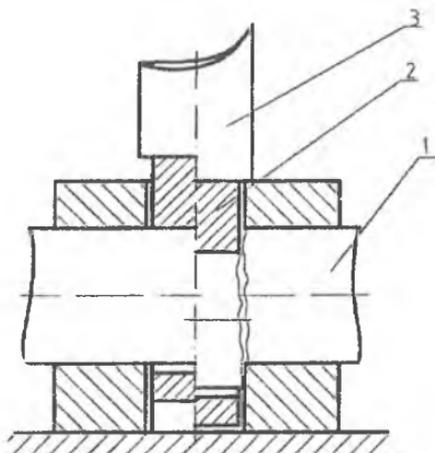


Рис. 45. Схема штампа для испытания заготовок на сдвиговую прочность ( $\tau_{ср}$ ):  
1 – образец; 2 – нож; 3 – пуансон

Изготовлены два штампа для определения напряжения разрушения при срезе  $\tau_{ср}$ , отличающихся друг от друга только диаметрами ножей для разрезки цилиндрических заготовок, получаемых с диаметром  $d = 36$  мм вследствие реализации первой схемы деформирования (рис. 8, а) и с диаметром  $d = 32$  мм – после второй схемы деформирования (рис. 8, б).

Измерения проводились на испытательной машине фирмы «Инстрон» следующим образом: штамп с заготовкой устанавливался на неподвижную плиту испытательной машины, верхняя плита опускалась, через нее передавалась сила на нож и заготовка разрезалась по двум сечениям (см. рис. 45). При этом пищащим устройством машины фиксировалась сила среза.

Величина касательного напряжения на поверхности среза  $\tau_{cp}$ . Па определялась по формуле:  $\tau_{cp} = \frac{F}{2S}$ , где  $F$  – фиксируемая сила (максимальная), Н;  $2S$  – суммарная площадь среза образца по двум поверхностям,  $m^2$ .

Помимо влияния схемы уплотнения на прочность формованного порошкового образца оценивалось влияние на эту прочность магнитно-импульсной обработки (МИО) порошка, предшествующей его уплотнению, а также МИО уже формованного образца. МИО проводилась по схеме, приведенной в п. 3.2, и преследовала ту же цель – повышение плотности заготовок.

Величина  $\tau_{cp}$  была описана следующим уравнением регрессии:

$$\tau_{cp} = 14,38 + 12,78X_1 - 0,38X_2 + 2,12X_3 + 2,84X_4 - 4,7X_5. \quad (143)$$

Факторам были присвоены следующие обозначения: схема деформирования –  $X_1$ ; наличие МИО порошка –  $X_2$ ; наличие МИО заготовки –  $X_3$ ; содержание стеарата цинка, % –  $X_4$ ; содержание углерода, % –  $X_5$ .

Первой схеме деформирования (см. рис. 8, а) было присвоено значение  $X_1 = 0$ , второй схеме деформирования (см. рис. 8, б) –  $X_1 = 1$ ; при наличии МИО порошка  $X_2 = 0$ , при отсутствии –  $X_2 = 1$ , при наличии МИО заготовки  $X_3 = 0$ , при отсутствии –  $X_3 = 1$ . Нижним уровнем содержания (по массе) стеарата цинка в шихте являлось значение  $X_4 = 1$  %, верхним уровнем –  $X_4 = 0$ . Нижним уровнем содержания (по массе) углерода в шихте являлось значение  $X_5 = 0$ , верхним уровнем –  $X_5 = 1$ .

В результатах проведенных опытов  $\tau_{cp}$  изменялось от 13,2 МПа до 30 МПа.

Анализ полученной модели позволил сделать следующее заключение. Установлено сильное влияние на прочность образца схемы деформирования ( $X_1$ ). Так, при средней величине  $\tau_{cp}$ , равной 22,36 МПа, схема деформирования изменяет это напряжение на 12,78 МПа: от 15,25 МПа до 28,03 МПа, т.е.  $\tau_{cp}$  увеличивается при второй схеме деформирования в 1,84 раза по сравнению с первой схемой. Таким образом, более интенсивное действие сдвигов в материале формируемого образца оказывает наиболее значительное влияние на величину сопротивления образца срезу до его спекания.

МИО порошка приводит к снижению  $\tau_{cp}$  сформованного образца как при применении первой схемы деформирования, так и при применении второй схемы. МИО уже сформованного образца увеличивает его  $\tau_{cp}$  вне зависимости от схемы деформирования. Эти снижения  $\tau_{cp}$  объясняются тем, что МИО выравнивает остаточные напряжения в образце до некоторого среднего значения.

Как при первой, так и при второй схемах деформирования  $\tau_{cp}$  выше при большем содержании пластификатора (стеарата цинка), выполняющего роль смазки. Это объясняется тем, что смазка способствует снижению трения между частицами и позволяет достичь при формовании большей плотности образца.

Увеличение количества углерода в шихте оказало противоположное действие по сравнению с увеличением количества пластификатора. Это можно объяснить тем, что имеющий пластинчатую структуру порошок углерода, рас-

пределенный между зернами железного порошка, способствует началу скольжения зерен порошка друг относительно друга при разрушении под действием сдвигающих напряжений.

Заметим, что описанные выше влияния содержания в шихте стеарата цинка и углерода характерны только при испытаниях образцов, не подвергнутых спеканию. В процессе спекания стеарат цинка выгорает, а углерод взаимодействует с частицами железного порошка, осуществляя его легирование.

Высокая плотность заготовок, формованных по способу уплотнения, показанному на рис. 8, позволила до проведения операции спекания изготовить из них шлифы для металлографического исследования. Для этого формованные заготовки были фрезерованы до меридионального сечения пальцевой фрезой без выкрашивания поверхности. Затем по стандартной технологии были приготовлены шлифы по всей поверхности меридионального сечения заготовок. После полирования поверхность шлифа была протравлена 5%-ным раствором азотной кислоты в спирте до выявления микроструктуры феррита.

Рассмотрение шлифов на микроскопе позволило наблюдать следующее. Частицы порошка в области боковой поверхности заготовки имеют текстуру преимущественной ориентировки (рис. 46). На рисунке показана зарисовка оператором наблюдаемой в микроскоп картины.

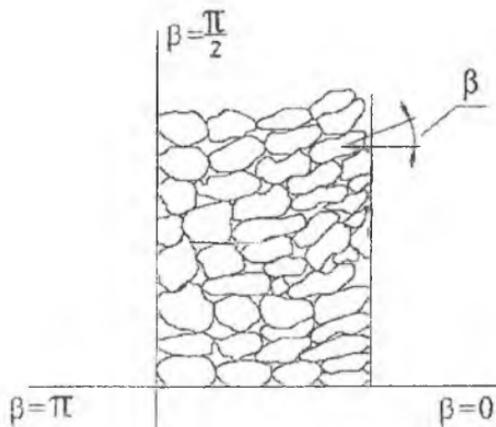


Рис. 46. Схематическое изображение укладки частиц порошка

Для характеристики наблюдаемой картины в качестве выходного параметра использован указанный на рис. 46 угол укладки зерен  $\beta$ .

При описании угла  $\beta$  уравнением регрессии расположение рассматриваемой в микроскоп области на плоскости меридионального сечения заготовки определяется факторами  $X_1$  и  $X_2$ . Фактор  $X_1$  — относительная (по отношению к радиусу боковой поверхности заготовки) координата от центра координат рассматриваемой области в радиальном направлении, фактор  $X_2$  — относительная (по отношению к радиусу боковой поверхности заготовки) координата этой

области в осевом направлении. Центр координат находится в центре плоскости меридионального сечения заготовки.

Влияние схемы деформирования (см. рис. 8) оценено фактором  $X_3$ . Значение  $X_3 = 0$  присвоено первой схеме деформирования, значение  $X_3 = 1$  – второй схеме деформирования. Учтено влияние на ориентировку зерен МИО порошка и МИО формованной заготовки. При отсутствии МИО порошка  $X_4 = 0$ , при наличии –  $X_4 = 1$ . При отсутствии МИО заготовки  $X_5 = 0$ , при наличии –  $X_5 = 1$ .

После реализации и обработки результатов эксперимента получено следующее уравнение регрессии:

$$\beta = 0,629 - 18,18 X_1^2 + 21,67 X_2^2 + 63,79 X_1 - 8,183 X_2 - 1,77 X_3 - 1,527 X_4 + 0,414 X_5. \quad (144)$$

Значения  $\beta$  минимальны в центре образца и максимальны в боковых, пристеночных областях, где они составляют  $\beta = 35^\circ \pm 2^\circ$  – для второй схемы пластического деформирования и  $\beta = 40^\circ \pm 2^\circ$  – для первой схемы деформирования.

Применение МИО приводит к заметному снижению значений углов  $\beta$  при обеих применяемых схемах деформирования. Однако МИО порошка существенно влияет на величину угла укладки частиц  $\beta$ , чем МИО уже формованной заготовки со сложившейся картиной укладки частиц. МИО порошка происходит на стадии подготовки к формованию, частицы менее наклепаны, более податливы к уплотнению и равномерной укладке.

Авторами данного учебника было проведено сопоставление качества деталей типа стаканов, изготовленных холодным выдавливанием из прошедших спекание заготовок, формованных с применением первой и второй схем деформирования. Было отмечено, что при выдавливании детали из спеченной заготовки, формованной по второй схеме, на внешней ее поверхности в районе вблизи середины ее высоты имеются мелкие поперечные разрывы. При выдавливании детали из спеченной заготовки, формованной по первой схеме, такие разрывы отсутствуют. Следовательно, меньшая величина угла  $\beta$ , характерная для первой схемы деформирования, является более предпочтительной.

Применение МИО приводит к заметному снижению значений углов  $\beta$  при обеих применяемых схемах деформирования. При этом МИО порошка существенно влияет на величину угла укладки частиц  $\beta$ , чем МИО уже формованной заготовки со сложившейся картиной укладки частиц. МИО порошка происходит на стадии подготовки к формованию, частицы менее наклепаны, более податливы к процессам уплотнения и равномерной укладки.

Таким образом, приведенная информация о текстуре формованной заготовки до ее спекания имеет практическое значение.

В то же время исследование текстуры металлографическим способом является более трудоемким, чем проведение испытания формованной заготовки на срез и определение  $\tau_{ср}$ . Ниже установлена корреляционная связь между углом  $\beta$  укладки зерен и сдвиговой прочностью, а также приведено полученное авторами уравнение (145), позволяющее по величине  $\beta$  рассчитать  $\tau_{ср}$  или провести обратный пересчет этих величин:

$$\tau_{\text{ср}} = 104,26 - 2,3 \beta. \quad (145)$$

Корреляционная связь установлена в результате обработки фактических данных, приведенных в табл. 85.

Таблица 85. Значения угла укладки зерен и сдвиговой прочности заготовки

| №<br>п/п | Угол укладки зерен | Сдвиговая прочность      |
|----------|--------------------|--------------------------|
|          | $\beta$ , град     | $\tau_{\text{ср}}$ , МПа |
| 1        | 34,14              | 26,8                     |
| 2        | 37,68              | 19,2                     |
| 3        | 40,1               | 17,7                     |
| 4        | 39,8               | 18,9                     |
| 5        | 33,5               | 13,8                     |
| 6        | 32,5               | 28,9                     |
| 7        | 27,7               | 13,2                     |
| 8        | 39,0               | 18,0                     |
| 9        | 33,17              | 30,0                     |

Использование уравнений типа (144) является удобным для практики. В частности, проведя несложное испытание формованной заготовки на величину  $\tau_{\text{ср}}$ , можно оценить прочность  $\sigma_{\text{в}}$ , которую эта заготовка будет иметь после спекания. Знание  $\sigma_{\text{в}}$  спеченной заготовки может быть использовано для оценки силы штамповки машиностроительной детали из этой заготовки.

Ниже установлена корреляционная связь между  $\tau_{\text{ср}}$  до спекания и  $\sigma_{\text{в}}$  спеченной заготовки, а также приведено полученное авторами уравнение (146), позволяющее по величине  $\beta$  рассчитать  $\tau_{\text{ср}}$  или провести обратный расчет этих величин:

$$\sigma_{\text{в}} = -56,7 + 8,33\tau_{\text{ср}}. \quad (146)$$

Корреляционная связь установлена в результате обработки фактических данных, приведенных в табл. 86.

Таблица 86. Значения сдвиговой прочности до спекания и прочности материала после спекания

| №<br>п/п | Сдвиговая прочность неспекенной заготовки $\tau_{\text{ср}}$ , МПа | Прочность детали после спекания $\sigma_{\text{в}}$ , МПа |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
|          | 1                                                                  | 26,8                                                      |
| 2        | 19,2                                                               | 90                                                        |
| 3        | 17,7                                                               | 74                                                        |
| 4        | 18,9                                                               | 104                                                       |
| 5        | 13,8                                                               | 66                                                        |
| 6        | 28,9                                                               | 192                                                       |
| 7        | 13,2                                                               | 50                                                        |
| 8        | 18,0                                                               | 98                                                        |
| 9        | 30,0                                                               | 204                                                       |

Для специалистов в области обработки давлением испытание формованной заготовки на величину  $\tau_{ср}$  является несложным. В то же время металловедам проще провести металлографический анализ и измерить угол  $\beta$ . В связи с этим нами проанализирована корреляционная связь между  $\beta$  и  $\sigma_B$  и приведено полученное авторами уравнение (146), позволяющее по величине  $\beta$  рассчитать  $\sigma_B$  спеченной заготовки или провести обратный пересчет этих величин:

$$\sigma_B = 749,3 - 17,14\beta. \quad (147)$$

Корреляционная связь установлена в результате обработки фактических данных, приведенных в табл. 87.

Отметим, что уравнения (145), (146), (147) получены авторами на основании установления сильных корреляционных связей между рассматриваемыми параметрами. Рассчитанные коэффициенты парной корреляции по абсолютной величине были не менее 0,878. Следовательно, показатели прочности имеют ярко выраженную корреляцию с углом укладки зерен. Это подтверждает правильность выбора угла укладки зерен  $\beta$  в качестве критерия оптимизации предложенных схем деформирования. Уравнения регрессии, полученные на основе корреляционного анализа, позволяют выбирать пользователю сочетания технологических параметров, обеспечивающие требуемые прочностные характеристики, не производя испытаний с целью определения  $\sigma_B$ ,  $\tau_{ср}$ .

Таблица 87. Значения угла укладки зерен и прочности

| № п/п | Угол укладки зерен $\beta$ , град | Прочность спеченной заготовки $\sigma_B$ , МПа |
|-------|-----------------------------------|------------------------------------------------|
| 1     | 34,14                             | 166                                            |
| 2     | 37,68                             | 90                                             |
| 3     | 40,1                              | 74                                             |
| 4     | 39,8                              | 104                                            |
| 5     | 38,5                              | 66                                             |
| 6     | 32,5                              | 192                                            |
| 7     | 37,7                              | 50                                             |
| 8     | 39,0                              | 98                                             |
| 9     | 33,17                             | 204                                            |

Таким образом, создан математический аппарат, позволяющий контролировать свойства деталей, изготавливаемых из порошковых материалов на железной основе, связанные с обеспечением их формы и микроструктуры, на этапах технологического процесса.

### 3.15. Описание качества порошковых деталей моделями второго порядка, полученными с применением насыщенного факторного плана

Одним из критериев оптимальности планов можно считать число опытов в них. Одними из наиболее экономичных по числу опытов являются планы

Хартли [16]. Их достоинством является, кроме того, композиционный принцип построения.

Сначала используется линейный план. Если статистическая проверка адекватности полученной в результате реализации линейного плана модели не позволяет принять эту модель, план достраивают до плана второго порядка, отсюда вытекает название: композиционный план.

В табл. 88 приведен план, содержащий всего лишь 17 опытов. Эксперимент  $3^3$  содержал бы 27 опытов. Заимствованный из [9] композиционный план применен для исследования холодного выдавливания стаканов из спеченных порошковых заготовок (см. рис. 26). Исследовано влияние сил контактного трения при выдавливании по схеме, показанной на рис. 13, средней плотности и неравномерности распределения плотности по высоте детали. Варьируемыми факторами являлись: отношение радиуса матрицы  $R$  к радиусу пуансона, исходная плотность  $\gamma$  спеченных заготовок, отношение длины заготовки к ее диаметру  $L$ , относительная скорость перемещения матрицы  $v_m = \bar{v}_m / \bar{v}_n$ , где  $\bar{v}_n$  наибольшая скорость течения материала заготовки. В случае положительного значения фактора  $v_m$  скорость матрицы и пуансона совпадают по направлению. Условие смазывания, дисперсность порошка и другие параметры находились на постоянном уровне.

Композиционный план эксперимента приведен в табл. 89.

Уровни варьирования факторов в эксперименте были приняты следующими. Фактор  $R$  принимал значения 1,75; 1,5; 1,25 в соответствии с размерами широкого круга применяемых в практике деталей.

Фактору  $\gamma_0$  присвоены значения 5,7; 6,2; 6,7 ( $\text{г/см}^3$ ) в соответствии с плотностями заготовок, применяемыми на практике.

Уровни варьирования фактора  $L$ : 1,5; 2,0; 2,5.

Таблица 88. План эксперимента в кодированном масштабе

| №  | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $x_1^2$ | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_4^2$ |
|----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | +     | +     | +     | +     | +        | +        | +        | +        | +        | +        | +       | +       | +       | +       |
| 2  | +     | -     | +     | -     | -        | +        | -        | -        | +        | -        | +       | +       | +       | +       |
| 3  | +     | +     | -     | -     | -        | -        | +        | +        | -        | -        | +       | +       | +       | +       |
| 4  | +     | -     | -     | +     | +        | -        | -        | -        | -        | +        | +       | +       | +       | +       |
| 5  | +     | +     | +     | +     | +        | +        | -        | +        | -        | -        | +       | +       | +       | +       |
| 6  | +     | -     | +     | -     | -        | +        | +        | -        | -        | +        | +       | +       | +       | +       |
| 7  | +     | +     | -     | -     | -        | -        | -        | +        | +        | +        | +       | +       | +       | +       |
| 8  | +     | -     | -     | +     | +        | -        | +        | -        | +        | -        | +       | +       | +       | +       |
| 9  | +     | +     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | +       | 0       | 0       | 0       |
| 10 | +     | -     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | +       | 0       | 0       | 0       |
| 11 | +     | 0     | +     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | +       | 0       | 0       |
| 12 | +     | 0     | -     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | +       | 0       | 0       |
| 13 | +     | 0     | 0     | +     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | +       | 0       |
| 14 | +     | 0     | 0     | -     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | +       | 0       |
| 15 | +     | 0     | 0     | 0     | +        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | 0       | +       |
| 16 | +     | 0     | 0     | 0     | -        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | 0       | +       |
| 17 | +     | 0     | 0     | 0     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0       | 0       | 0       | 0       |

За средний уровень фактора  $v_m$  принято его значение, равное 0. Крайние уровни определены из условия, что для получения качественной поверхности изделия скорость матрицы в направлении истечения материала заготовки не должна превышать скорость истечения. Таким образом, этот уровень равен +1. Симметрично противоположный уровень принят равным -1.

Формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным и обратно следующие:

$$x_1 = X_1; x_2 = (X_2 - 6,2)/0,5; x_3 = (X_3 - 1,5)/0,25; x_4 = (X_4 - 2)/0,5. \quad (148)$$

В соответствии с матрицей плана в табл. 89, указанными уровнями варьирования факторов и формулами перехода от натуральных значений к кодированным проведен эксперимент. Выходными параметрами являлись удельная сила  $q$  [МПа] выдавливания стаканов (см. рис. 26), средняя плотность выдавленных стаканов  $\gamma$  [г/см<sup>3</sup>], неравномерность распределения плотности по высоте стаканов  $\Delta\gamma$  [%].

Результаты опытов на порошке ПЖВ2.160.28 приведены в табл. 89.

Таблица 89

|                               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| № оп.                         | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |      |
| $q$ [МПа]                     | 2180 | 2420 | 1930 | 2130 | 2180 | 2420 | 1930 | 2130 |      |
| $\gamma$ [г/см <sup>3</sup> ] | 7,4  | 7,85 | 7,3  | 7,18 | 7,4  | 7,85 | 7,3  | 7,18 |      |
| $\Delta\gamma$ [%]            | 7,1  | 1    | 6,4  | 7    | 7,1  | 1    | 6,4  | 7    |      |
| № оп.                         | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   |
| $q$ [МПа]                     | 2000 | 2180 | 2150 | 1950 | 2280 | 2300 | 2120 | 2120 | 2120 |
| $\gamma$ [г/см <sup>3</sup> ] | 7,35 | 7,58 | 7,7  | 7,33 | 7,3  | 7,68 | 7,5  | 7,5  | 7,5  |
| $\Delta\gamma$ [%]            | 6,5  | 4,1  | 4,25 | 5,55 | 6,9  | 2,3  | 4,9  | 4,9  | 4,9  |

По результатам эксперимента построены модели следующего вида:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i<j}^{k-1} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{k-1} b_{ji}^* x_j x_i,$$

где  $k$  – количество факторов.

Оценки коэффициентов  $b_0$  и  $b_{ii}$  рассчитаны по формулам [9]:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= d_1 \sum_{u=1}^N y_u - d_2 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u, \\ b_{ii} &= d_3 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u + d_4 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u - d_2 \sum_{u=1}^N y_u, \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

где  $y_u$  – значение выходного параметра в  $u$ -ом опыте;  $x_i$  – значение  $i$ -го фактора в кодированном масштабе.

Оценки коэффициентов для фактора  $x_4$ , не входящего в трехбуквенный определяющий контраст, рассчитаны по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_i &= d_5 \sum_{u=1}^N x_{y_u}^2 y_u, \\ b_{ij} &= d_6 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Оценки коэффициентов для факторов  $x_1, x_2, x_3$ , образующих трехбуквенный определяющий контраст, рассчитаны по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_i^* &= d_7 \left[ \sum_{u=1}^N x_{i_u} - \sum_{i=1}^N (x_j x_i)_u y_u \right], \\ b_{ji}^* &= d_8 \sum_{u=1}^N (x_j x_i)_u y_u - d_7 \sum_{u=1}^N x_{i_u} y_u. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

В формулах (149), (150) и (151) величины  $d_i$  являются вспомогательными константами. Согласно [5] для данного плана они равны:

$$\begin{aligned} d_1 &= 0,91; d_2 = 0,0562; d_3 = 0,5; d_4 = -0,101; \\ d_5 &= 0,1; d_6 = -0,125; d_7 = 0,5; d_8 = 0,625. \end{aligned}$$

Сравнение абсолютных значений оценок коэффициентов с доверительными интервалами, рассчитанными для этих коэффициентов, показало, что статистическая значимость для некоторых из этих коэффициентов не подтвердилась. Члены с этими коэффициентами в модели не включены.

В результате получены следующие модели для выдавливания спеченных заготовок из порошка ПЖВ2.160.28:

$$\begin{aligned} q \text{ [МПа]} &= 2124,6 - 90x_1 + 100x_2 - 10x_3 + 35x_1x_3 - 20x_2x_3 - \\ &\quad - 28,1x_1^2 - 67,9x_2^2 + 172,1x_3^2 + 2,1x_4^2; \\ \gamma \text{ [г/см}^3\text{]} &= 7,505 - 0,115x_1 + 0,185x_2 - 0,19x_3 + 0,048x_1x_2 + \\ &\quad + 0,0075x_1x_3 - 0,041x_1x_4 + 0,032x_2x_3 - 0,084x_3x_4 - \\ &\quad - 0,046x_1^2 + 0,0043x_2^2 - 0,021x_3^2 - 0,011x_4^2; \\ \Delta\gamma \text{ [\%]} &= 4,8 + 1,2x_1 - 0,05x_2 + 2,3x_3 - 0,625x_1x_2 - 0,675x_1x_3 + \\ &\quad + 0,175x_2x_3 + 0,519x_1^2 + 0,119x_2^2 - 0,18x_3^2 + 0,119x_4^2, \end{aligned} \quad (152)$$

где  $x_i$  – значения факторов в кодированном масштабе, связанные со значениями факторов в натуральном масштабе соотношениями (148).

Гипотеза об адекватности моделей (152) была проверена с помощью критерия Фишера. Расчет дисперсии неадекватности, расчетных значений критерия Фишера (при 5%-ном уровне значимости) показал, что все расчетные значения  $F$ -критерия меньше табличных. Следовательно, гипотеза об адекватности моделей (152) не отвергается.

Анализ полученных моделей показал, что  $q$ ,  $\gamma$  и  $\Delta\gamma$  не зависят от фактора  $x_3$ , т.е. относительной длины заготовки. Во всех моделях сильно выражена взаимосвязь между факторами, поскольку коэффициенты  $b_{ij}$  перед произведениями факторов по абсолютной величине соизмеримы с другими коэффициентами.

Использование контактного трения, активно содействующего уплотнению материала заготовки, позволяет уменьшить неравномерность распределения плотности по высоте стакана в 2-5 раз и повысить среднюю плотность стакана на 3...6% по сравнению с обратным выдавливанием в неподвижной матрице, что способствует повышению качества деталей и коэффициента использования материала. Использование активных сил контактного трения, способствующего истечению материала в стенку стакана, позволяет снизить удельную силы на пуансоне на 7...13%.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий: Программированное введение в планирование эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. – 279 с.
3. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. М.: Наука, 1977. – 407 с.
4. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. М.: Наука, 1976. – 224 с.
5. Горский В.Г., Бродский В.З. О регрессионном анализе при планировании второго порядка. - Заводская лаборатория, 1972. Т. 38, №1. – С. 61-66.
6. Дмитриев А.М., Воронцов А.Л. Технологияковки и объемной штамповки. Ч. 1. Объемная штамповка выдавливанием: учеб. для вузов по специальности «Машины и автоматизация обработки металлов давлением». М.: Высшая школа, 2002. – 400 с.
7. Дорофеев Ю.Г., Мариненко Л.Г., Устименко В.И. Конструкционные порошковые материалы и изделия. М.: Металлургия, 1986. – 144 с.
8. Ковка и штамповка: справочник. В 4 т. Т. 3. Холодная объемная штамповка. Штамповка металлических порошков / под ред. А.М. Дмитриева. – 2-е изд. / под общ. ред. Е.И. Семенова. – М.: Машиностроение, 2010. – 352 с.
9. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. – М.: Машиностроение; София: Техника, 1980. – 304 с.
10. Овчинников А.Г. Основы теории штамповки выдавливанием на прессах. – М.: Машиностроение, 1983. – 200 с.
11. Смирнов-Аляев Г.А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. 3-е изд. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1978. – 368 с.
12. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением: учеб. для вузов. 4-е изд. М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
13. Технология конструкционных материалов: учеб. для студентов машиностроительных специальностей вузов / А.М. Дальский, А.М. Дмитриев, Т.М. Барсукова [и др.]. 6-е изд., испр. и доп. – М.: Машиностроение, 2005. – 592 с.
14. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента. М.: Мир, 1967. – 407 с.
15. Шенк Хилберт мл. Теория инженерного эксперимента – М.: Мир, 1972. – 381с.
16. Hartley H. Smallest composite designs for quadratic response surface.- Biometrics, 1959, v. 15. – P. 611-614.
17. Mannesmann Demag. Iron and Steel Powders for Sintered Components. 59 p.

Учебное издание

*Дмитриев Александр Михайлович  
Гречников Фёдор Васильевич  
Коробова Наталья Васильевна*

**КУЗНЕЧНО-ШТАМПОВОЧНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ**  
**Часть 2**  
**ВЫБОР ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**  
**ДЛЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ОБОРУДОВАНИЯ**

Учебник для вузов

Редактор Н.С. Куприянова  
Доверстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 16.03.2015. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 10,5.

Тираж 500 экз. Заказ *24* . Арт. 4/2015.

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П.Королева  
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во СГАУ. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.