

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

Ю. М. Арышенский, Ф. В. Гречников,
В. Р. Каргин

Избранные разделы по теории пластичности

Учебное пособие

С а м а р а 1 9 9 5

Избранные разделы по теории пластичности: Учеб. пособие/
Ю. М. Арышенский, Ф. В. Гречников, В. Р. Каргин; Самар. гос.
аэрокосм. ун-т. Самара, 1995. 64 с.

ISBN 5-230-16984-2

Учебное пособие содержит изложение отдельных разделов теории пластичности. Рассмотрены элементы тензорного исчисления теории пластичности анизотропных сред, теорема о разгрузке А. А. Ильюшина.

Пособие предназначено для студентов специальности 11.06, изучающих курс "Теория пластичности". Подготовлено на кафедре ОМД.

Рецензенты: проф. В. В. Уваров, М. Ю. Корзинкин

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 1995

ISBN 5-230-16984-2

© Ю. М. Арышенский,
Ф. В. Гречников,
В. Р. Каргин

Предисловие

В учебное пособие вошли разделы, которые имеют большое значение для расчетов и изготовления деталей летательных аппаратов: элементы теории пластичности ортотропных сред, теорема о разгрузке А. Ильюшина, обобщенный закон Гука. Так, материалы, используемые в авиационной технике, обладают существенной анизотропией. В то же время в стандартных учебниках по теории пластичности этот вопрос либо не рассматривается, либо в малой степени. Вопросы пружинения деталей летательных аппаратов тоже не рассматриваются, но являются обязательными при проектировании операций гибки и обтяжки. Теорема А. Ильюшина, на основе которой рассчитывается пружинение, излагается более четко с показом расчета при гибке деталей моментом.

В пособии нашли свое отражение разделы, которые, имея большое значение для понимания теории пластичности, в учебниках изложены недостаточно полно: основные гипотезы и допущения механики сплошной среды, силы и напряжения, перемещения и деформации, условия перехода металла в пластическое состояние. Раздел о тензорном исчислении ликвидирует тот пробел знаний математики, который не входит в программу вузовского курса.

Курс теории пластичности является первым из цикла дисциплин, лежащих в основе специальности ОМД. Не изучив этого курса, нельзя понять теоретические основы обработки металлов давлением.

Наука о пластичности охватывает широкий круг вопросов и позволяет решить задачи с позиций современных знаний химии, физики, математики. Отсюда и появление различных направлений теории пластичности: физического, физико-химического и механико-математического.

Физическое направление связано с природой пластической деформации, механизмом ее протекания. Это направление изучается в курсах металлографии и обработки металлов давлением. Физико-химическое направление устанавливает основные зависимости между химическим составом материала, его структурой и механическими свойствами. Оно изучает также влияние на них температуры, давления, скорости деформации. Это направление во многом носит еще экспериментальный характер. Это направление изучается в курсе „Физико-механические свойства материала”.

Наиболее развито механико-математическое направление. Это связано с тем, что оно основано на строгих физических и математических закономерностях. Естественно, что при записи основных закономерностей учитываются характеристики, найденные экспериментальным путем, чтобы отразить свойства материала. Вот такое направление и будет изучаться в данном курсе.

Основная цель изучения — определение полей напряжений и деформаций в обрабатываемом материале, что имеет не только чисто теоретический, но и практический интерес.

Теория пластичности входит в более общую науку — механику сплошной среды, которая изучает газообразные, жидкие и твердые деформируемые среды. Мы будем иметь дело только с последними. В них изучается равновесие и движение твердых тел с учетом изменения расстояния между частицами, которое возникло при наложении внешнего воздействия. Отсюда и возникло понятие деформируемости. Деформируемость — это свойство материала изменять свои размеры при действии внешних сил.

Следует подчеркнуть, что в отличие от теоретической механики здесь рассматривается изменение положения частиц среды, а это накладывает определенные ограничения. В частности, в механике сплошной деформируемой среды недопустим перенос точек приложения внешних сил и моментов.

1. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В реальном физическом мире связи между явлениями и предметами столь многообразны, что охватить и описать их невозможно. Поэтому при построении теории выбирается модель, которая представляет собой упрощение реальной ситуации. При создании модели принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи. Известны факты неудачи научного поиска из-за того, что исследователи пытались учесть те факты, которые для данного явления практически не имели значения.

Рассмотрим, как построена модель твердого деформируемого тела, какие идеализации (гипотезы) будут общими и какие из них будут дополнительными, связанными с теориями упругости и пластичности.

Общими из них являются: гипотезы о сплошности строения тела, однородности материала, шаровой изотропии и естественном ненапряженном состоянии.

Гипотеза о сплошности строения тела. По этой гипотезе тело до деформации, в процессе деформации и после остается сплошным. Можно дать следующее определение сплошности. Сплошность — это свойство материала равномерно заполнять какой угодно малый объем как в деформированном, так и недеформированном состояниях. Вполне естественно, такая гипотеза находится в противоречии с действительностью, с молекулярным строением вещества. Ведь, с точки зрения физиков, взаимодействие в кристаллических решетках, особенности внутреннего строения и определяют способность тела сопротивляться деформированию. Но, с другой стороны, понятие о сплошности является основой для математического описания поведения вещества. Поля напряжений, перемещений, деформаций в этом случае выражаются непрерывными функциями координат и времени. Следовательно, можно использовать методы анализа бесконечно малых (дифференци-

альное и интегральное исчисление). Это значительно упрощает теорию, и понятие сплошности является основополагающей гипотезой. Следует отметить, что существуют отдельные области, где это допущение работает на пределе (поведение трещин). В заключение подчеркнем, что пока невозможно оценить влияние введенного допущения даже качественно.

Допущение об однородности материала. Прежде чем рассмотреть однородность материала, сделаем замечание к принятой терминологии. Если рассматривать движение точки в твердом теле, то можно выделить два его вида — поворот вокруг некоторой оси и ее линейный перенос.

Условились, что симметрию относительно переноса называть однородностью, а относительно поворотов — изотропией.

Таким образом, однородным будет материал, который имеет одинаковые свойства во всех точках по любому из направлений. Можно сделать следующее определение однородности: как независимость свойств от величины рассматриваемого объема.

В реальных телах однородности не существует, хотя бы из-за отсутствия однородности материала. Кроме того, однородным любой из полуфабрикатов получить нельзя. Показательным является растяжение материала с получением шейки на образцах.

В последние годы стали усиленно заниматься разработкой теории упругости и пластичности неоднородных сред.

Гипотеза о шаровой изотропии. Часто сплошную среду принимают изотропной, т. е. считают, что при повороте свойства тела не меняются. Рассмотрим поворот в плоскости вокруг определенной оси и в масштабе отложим тот или иной показатель материала. Если тело изотропно, то в плоскости получим круг, а в пространстве — шар.

Данное допущение находится в противоречии с большинством реальных тел. Это видно на примере древесины, ткани. Металлические полуфабрикаты, т. е. листы, трубы, прутки, проволока, профили являются также анизотропными.

Особенно резко выражена анизотропия в полуфабрикатах, изготовленных из сплавов авиационного профиля — титановых, бериллиевых, магниевых, алюминиевых, специальных сталях. Одним из самых перспективных материалов являются композиты. Они по своему строению (конструкции) вообще не могут быть изотропными.

В связи с этим стали уделять большое внимание разработке теорий пластичности анизотропных сред. Подобные исследования проводятся и на нашей кафедре.

Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела. Согласно этой гипотезе существующие до приложения нагрузок напряжения в материале принимаются равными нулю. Эта гипотеза также не отвечает реальности, т. к. невозможно получить полуфабрикаты без остаточных напряжений.

Все перечисленное представляет собой основные допущения механики сплошной среды. Причем, если гипотезы о сплошности строения тела и его естественном ненапряженном состоянии остаются как бы неизбежными, то применение остальных не всегда является обязательным. Из перечисленного ясно, что принятые гипотезы не отвечают действительности, но они помогают строить физическую модель деформируемой среды. Причем ошибки, которые возникают при расчетах (мы их оценить не можем), в определенной степени компенсируются введением в формулы значений механических свойств реальных материалов.

Принятых допущений недостаточно для построения моделей теорий упругости и пластичности. Здесь приходится проводить дальнейшую идеализацию. Рассмотрим основные виды идеализации (рис. 1).

Идеально упругое тело (рис. 1 а). Это понятие лежит в основе теории упругости. Считается, что тело полностью восстанавливает свою форму после снятия нагрузки, т. е. выполняется первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной среде. Это явление нашло математическое отражение в законе Гука. Поэтому тела, подчиняющиеся этому закону, иногда называют телами Гука.

Нелинейно-упругое тело (рис. 1 б). Тело либо не подчиняется закону Гука, либо деформация перешла за предельно упругое состояние, но разгрузка идет по той же кривой.

Идеальное упругопластическое тело или идеально пластическое тело (рис. 1 в). При напряжении, меньшем предела упругости (текучести), тело ведет себя как тело Гука. При достижении предела текучести начинается пластическое течение и деформация здесь является неопределенной. Разгрузка протекает упруго с тем же модулем, что и при нагружении, сжатие подчиняется тем же

законам, что и растяжение, т. е. пределы текучести на растяжение и сжатие одни и те же по абсолютной величине. Такие тела называют телами Прандтля.

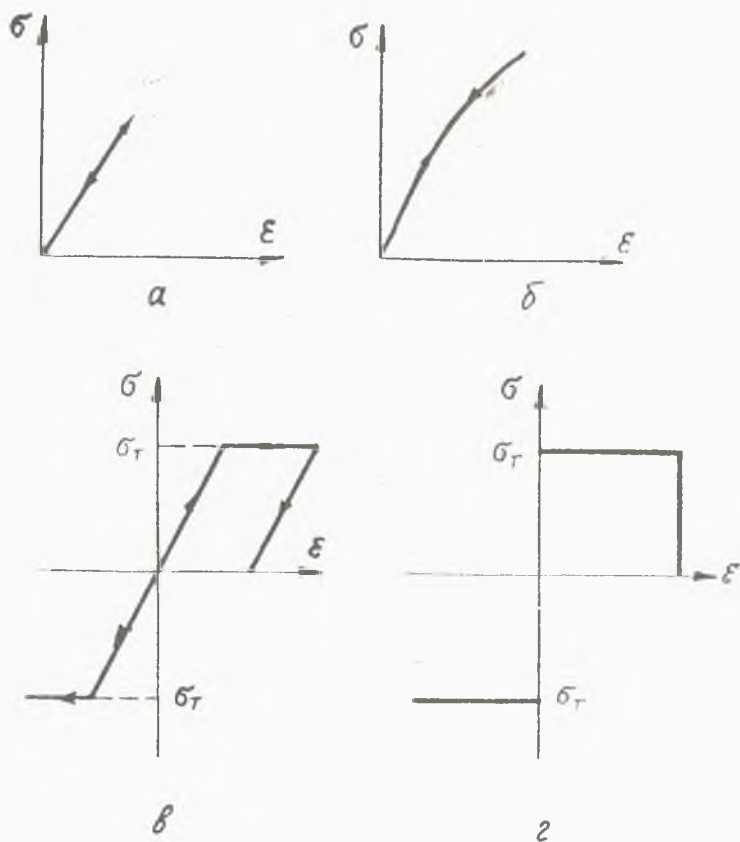


Рис. 1. Виды идеализации: а — идеально упругое тело; б — нелинейно-упругое тело; в — идеальное упругопластическое тело; г — идеальное жесткопластическое тело

Идеальное жесткопластическое тело (рис. 1 г). Если пластическая деформация является развитой, то упругой составляющей с технической точностью можно пренебречь и считать, что материал до предела текучести ведет себя как абсолютно твердое тело. И здесь пластическая деформация является неопределенной и может

неограниченно возрастать. Такие тела называют телами Сен-Венана. Определенный тип моделей может учитывать упрочнение, т. е. наблюдается повышение предела текучести и ростом деформации. В литературе рассматриваются и другие идеализации: идеально вязкие, упруговязкие и т. д. ¹¹

Следует отметить еще два допущения при построении теорий упругости и пластичности:

обычно пренебрегают временными эффектами;

считают, что упругие и пластические деформации разделены.

В заключение отметим, что подход, обоснованный на предложенных гипотезах, носит название феноменологического. При этом рассматривают чисто внешнее взаимодействие, не задаваясь вопросом, за счет чего это достигнуто, не рассматривают внутреннее строение материала и происходящие при нагружении изменения в теле. Другими словами мы отвлекаемся от физической сущности процессов.

2. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ

В процессе обработки металлов давлением участвуют деформируемый материал и инструмент. Наша задача определить их взаимодействие.

Взаимодействие обрабатываемого тела и инструмента можно рассматривать с точки зрения его величины, направления, продолжительности. С точки зрения величины и направления, взаимодействия удобно выражать силой. Известно, что силы — векторные величины, которые интуитивно можно представить как давление или тягу.

В механике твердого деформируемого тела под внешней силой понимают воздействие окружающей среды на тело, стремящееся изменить состояние его покоя или движения. Здесь под окружающей средой подразумевают другие тела и поля, например, поле тяготения земли, магнитное поле и т. д.

Внешние силы классифицируются по нескольким признакам. Так, в зависимости от места расположения точек приложения силы делятся на поверхностные и объемные (массовые). По продолжительности действия внешние силы подразделяются на постоянные и временные. Например, вес моста — сила постоянная, поезд, движущийся по нему, — сила временная. По характеру изменения величины внешние силы делятся на статические и динамические. Статическими будут такие силы, когда изменения их величины настолько малы, что ускорением точек тела и их инерцией можно пренебречь. Если ускорение велико и им нельзя пренебречь, силы — динамические. Динамические силы могут изменяться большое число раз, их называют циклическими, повторно-переменными, вибрационными. Если же они прикладываются на очень короткий промежуток времени, то силы будут ударными.

Внутренние силы связаны с тем, что реальное тело сопротивляется изменению расстояния между частицами.

Комплекс воздействия внешних и внутренних сил и приводит к изменению формы и размеров тела, т. е. вызывают деформацию. Она представляет собой совокупность трех взаимонакладывающихся и идущих последовательно процессов — упругой деформации, пластической деформации и разрушения.

Причем, деформация в металле распространяется своеобразными волнами, потрясающими кристаллическую решетку. Чем быстрее эти волны, тем пластичнее металл.

При упругой деформации происходит изменение расстояния между атомами, что приводит к изменению объема и формы тела, накоплению потенциальной энергии, возникновению напряжений. Причем, у большинства металлов объем меняется незначительно. Например, при всестороннем сжатии 1000 МПа объем железа уменьшается на 0,60 %. Исключение — цезий: при 1500 МПа объем меняется на 30%.

После удаления причин, вызывающих повышение потенциальной энергии, величина ее уменьшается, расходуясь на восстановление размеров и формы тела, и ее атомы возвращаются к своему нормальному положению устойчивого равновесия.

Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к появлению пластических деформаций. В процессе пластической деформации потенциальная (упругая) энергия переходит в кинетическую, т. е. в тепло, которая затем теряется. Поэтому при разгрузке тело не может полностью восстановить свою форму и размеры, т. е. появляется остаточная деформация, и хотя здесь происходит качественное изменение, однако связи внутри тела не нарушаются, а происходит только необратимый процесс.

Если происходит нарушение связей, то наступает разрушение.

Оценить в расчетах, как изменяются связи в металле под действием внешних нагрузок, практически не удастся. Исключительная сложность явлений вынуждает идти на идеализацию общей схемы процесса. Одной из таких идеализаций является понятие о напряжениях, которые статистически отражают внутренние связи между частицами металла. Как известно, напряжение представляет собой плотность внутренних сил или интенсивность внутренних сил, действующих между частицами сплошного тела по воображаемым плоскостям:

$$\sigma = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta F} = \frac{d p}{d F} \quad (1)$$

Как видим, формулировка напряжения предполагает тело сплошным, так как иначе невозможно связать элемент площадки с силой, действующей на этот элемент. Для дискретной теории эта формулировка неприемлема. И если говорить строго, то она неприемлема для металлических тел. Следовательно, если отказаться от сплошности, то понятие напряжений должно быть другим.

Таким образом, основное использование термина "напряжение" связано со строго макроскопической точкой зрения, обычно принимаемой инженерами. При таком использовании рассматривается совершенно непрерывная безгранично делимая среда, в которой все макроскопические характеристики осреднены. Естественно, что область применимости такой идеализации ограничена объемами материала, размеры которых во много раз больше наибольшего типичного размера микроструктуры.

Рассмотрим различные элементарные площадки, содержащие точку, т. е. мысленно проводя сечение, получим бесчисленное множество векторов напряжений. Это бесчисленное множество векторов T характеризует напряженное состояние точки тела. К счастью, для того, чтобы полностью описать напряженное состояние в точке тела, нет необходимости рассматривать все векторы. Это можно сделать, задавая векторы напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках около точки.

Поэтому для определения напряженного состояния в точке выберем плоскости, перпендикулярные осям координат, с действующими векторами (рис. 2). Известно, что любой вектор можно разложить на скаляры с соответствующими единичными векторами.

Проведем эту операцию и здесь (рис. 3). Вводится следующее обозначение компонент напряжений: первый индекс показывает площадку, нормальную к соответствующей оси координат, а второй — ось, вдоль которой направлено напряжение.

Таким образом, прямоугольный параллелепипед с гранями, перпендикулярными осям координат, вырезанный из нагруженного тела, оказывается под действием нормальных и касательных напряжений. Строго говоря, в переменном поле напряжений компоненты напряжений на противоположных гранях будут несколько отличаться. Однако, если параллелепипед брать достаточно малым, то и отличие можно сделать как угодно малым. Здесь уместно вспомнить, что для построения моделей в механике

деформируемого тела важнейшей абстракцией является понятие материальной точки. За материальную точку принимают материальное тело, размеры которого пренебрежимо малы в сравнении с расстоянием между точками. В пределе это понятие превращается в понятие математической точки.

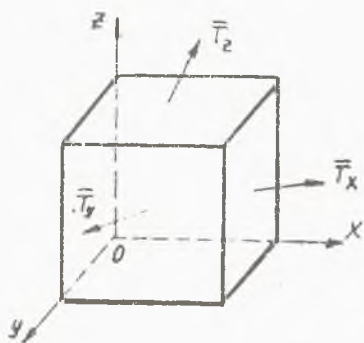


Рис. 2. Элементарный объем около точки O с действующими векторами

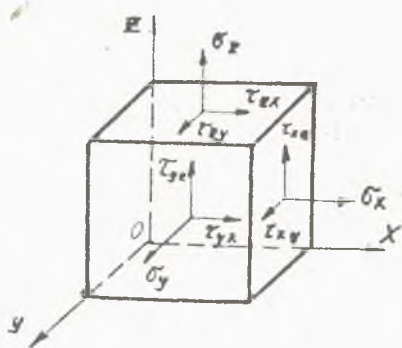


Рис. 3. Разложение векторов напряжений на скаляры (компоненты)

Следует также отметить, что все непрерывные распределения напряжений по существу однородны в произвольно малой окрестности данной точки. Поэтому мы не потеряем в общности, если ограничимся далее рассмотрением однородных напряженных состояний.

После этого пояснения снова перейдем к рассмотрению компонент напряжений. Как видно, в результате разложения получено девять скалярных величин напряжений, которые и характеризуют напряженное состояние элементарного объема, а при устремлении его к нулю — точки.

Эти девять скалярных величин могут быть заданы различными способами. В теориях упругости и пластичности обычно их задают специальной матрицей — тензором второго ранга.

3. ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРЕ И НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

При изучении механики сплошной среды, теоретической физики, кристаллографии и других дисциплин широкое применение получил тензорный аппарат. Термин "тензор" (*tension* — напряжение, растяжение) вначале появился при анализе напряжений. В современном понятии он введен А. Эйнштейном в 1916 г. и заимствован из теории упругости. Дело в том, что если рассматривать математический аппарат общей теории относительности и теории упругости, то наблюдается определенная аналогия. Чтобы понять, что такое тензор, необходимо остановиться на роли координатной системы в физических уравнениях.

Механика сплошных сред имеет дело с физическими и геометрическими объектами, которые изучаются в определенной координатной системе. Известно, что идея координат принадлежит выдающемуся французскому философу, математику, физику и физиологу Декарту (1596—1650). Он предложил метод прямоугольных координат. Метод координат имеет неопределимое значение для развития математики и физики. От него берет свое начало совершенно новая ветвь геометрии — аналитическая геометрия. В ней уже нет необходимости производить непосредственное построение, требующее применения линейки, циркуля, транспортира. Можно делать любые геометрические выводы, оперируя исключительно соотношениями между тремя координатами.

Идея координат очень проста, но в ней содержится принципиальная особенность, которую не всегда замечают. Суть ее состоит в следующем: мы имеем полное право проводить любым образом оси координат. Другими словами, не существует никакого абсолютного центра начала отсчета и никаких избранных направлений. Пространство однородно при переносах в трех направлениях и изотропно при вращении вокруг любой из трех координатных осей.

Это, в частности, приводит к законам импульса и момента, а симметрия относительно смещения во времени — к закону сохранения энергии. Таким образом, одно и то же физическое явление

можно рассматривать с точки зрения бесконечного множества различных координатных систем. Эту особенность часто маскируют некоторыми частными обстоятельствами конкретных геометрических вопросов. Так, например, изучая свойства эллипса, мы проводим координатные оси так, что они совпадают с большой и малой осями эллипса. Такой выбор естествен, поскольку он упрощает вычисления. Это соответствует симметрии фигуры. Но ошибочно думать, что эта абсолютная необходимость. Просто другие оси вызовут более сложные вычисления.

С другой стороны, ясно, что система отсчета не может быть большим, чем искусственным построением, вспомогательным средством, придуманным для удобства описания тех или иных объектов. Законы природы не зависят от системы координат, в которой мы их описываем. Таким образом, система отсчета не должна составлять единого целого с физическим миром.

Исходя из изложенного, А. Эйнштейн сформулировал "принцип общей относительности", который звучит следующим образом: "Возможно формулировать законы физического мира так, что они будут справедливы в любых возможных системах отсчета". Или по другому: "Правильно сформулированные уравнения, относящиеся к физическим явлениям, должны быть инвариантными (независимыми) к произвольному преобразованию координатных систем. С другой стороны, используют и термин "ковариантная величина" (тождественная сама себе), которая зависит от используемых координат и меняется, когда мы переходим от одной системы отсчета к другой".

Здесь согласно общему принципу относительности подлинно приемлемое описание физического закона достигается только тогда, когда мы имеем право избрать любую систему отсчета, не используя величины, которые не принадлежат этой системе. "Каждая система должна стоять на своих ногах". Только тогда будет выполняться самоочевидное философское требование, чтобы система отсчета была не более чем вспомогательным орудием описания.

Все это не означает, что в конкретной задаче мы должны избегать специально подобранных систем отсчета; напротив, это нужно делать, особенно тогда, когда такая система упрощает задачу.

П р и м е р 1. Чтобы найти траектории планет, движущихся около Солнца, в возможно более простом виде, следует выбрать за

начало отсчета Солнце, а не Землю. Это связано с тем, что масса Солнца значительно превосходит массу любой из планет. Однако мы должны подчеркнуть, что это практическое предпочтение конкретной системе отсчета вовсе не означает, что мы не можем сформулировать законы движения планет в произвольной системе отсчета. Сначала мы должны найти уравнение, которое описывает движение планет в "общековариантной форме". Выражение "общековариантный" подчеркивает тот факт, что уравнение может быть сформулировано в произвольной системе отсчета, без использования посторонних величин, не принадлежащих этой системе отсчета. Затем уже должны сделать разумный выбор конкретной системы, имея в виду простоту формального решения.

П р и м е р 2. Формулировка закона Ньютона соответствует земным условиям, если за начало отсчета выбран космос, то закон Ньютона записывают по-другому. Это к тому, что нельзя брать величины, не принадлежащие этой системе.

Когда в 1916 г. это требование сформулировал Эйнштейн, то оно не сразу было принято учеными. Сначала считали его полной чепухой, чистой мистификацией, рассчитанной на то, чтобы подавить физиков. Двадцать лет спустя стали говорить: "Ну, ладно. Если Эйнштейн хочет записать свои уравнения в общековариантном виде, он имеет на это право. Ведь математики давно решили эту задачу в известном разделе, который называется "абсолютным исчислением", или иначе "тензорным исчислением", которое и имеет дело с задачей формирования уравнений в произвольных координатных системах".

А еще через двадцать лет идея общековариантности твердо вошла в сознание физиков-теоретиков, что если теоретик рискнет записать свои уравнения в форме, не удовлетворяющей этому условию, то на него посмотрят с удивлением и скажут: "Ну какой же физический смысл могут иметь ваши уравнения, если не отвечают общему принципу относительности". Теперь из изложенного ясно одно из свойств тензоров. Тензоры — инвариантные объекты, независимые от выбора системы координат. Тензорные уравнения, верные в одной системе координат, верны и в другой, вследствие линейности и однородности их преобразования. До этого вы изучали скалярные и векторные величины. Определение вектора как направленного отрезка не позволяет перейти к понятию тензора, так как тензор нельзя в общем случае пояснить при помощи простого геометрического образа. В настоящее время

многие физические понятия и объекты, не говоря о математических, можно лишь сложным косвенным путем привести в соответствие с чувственным восприятием. Макс Планк подчеркивал, что цель состоит не в том, чтобы полностью приспособить наши мысли к нашим ощущениям, но в том, чтобы полностью освободить физическую картину мира от индивидуальности изучающего ее субъекта.

Забегая несколько вперед, отметим, что если имеем дело с любым преобразованием одной произвольной системы криволинейных координат в другую, то тензоры называют "обычными тензорами". Если же ограничиться преобразованием однородных систем координат, то тензоры называют "декартовыми". Мы будем иметь дело с декартовыми тензорами.

Тензор характеризуется определенным рангом (валентностью). Наиболее простым будет тензор нулевого ранга. Он представляет собой скалярную величину и его единственная компонента "а" не меняет своего значения при преобразовании координатной системы. Часто его называют просто "инвариант".

Вектор — тензор первого ранга. Исследуем его более подробно. Возьмем две координатные системы — старую и новую и рассмотрим в них вектор.

Известно, что поворотом системы координат и перемещением начала отсчета можно добиться простого взаимного расположения систем координат, как это показано на рис. 4.

В системе x, y, z вектор характеризуется компонентами a_x, a_y, a_z , а в системе x', y', z' — a'_x, a'_y, a'_z .

При преобразовании систем координат, компоненты в старой системе связаны с новыми следующими соотношениями:

$$a'_x = a_x \cos(x'x) + a_y \cos(x'y) + a_z \cos(x'z);$$

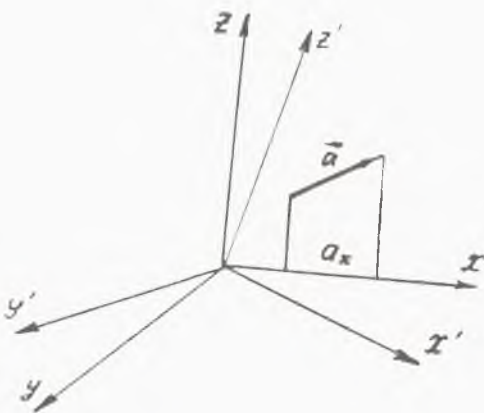


Рис. 4. Вектор в двух координатных системах

$$a'_y = a_x \cos(y' x) + a_y \cos(y' y) + a_z \cos(y' z);$$

$$a'_z = a_x \cos(z' x) + a_y \cos(z' y) + a_z \cos(z' z).$$

Преобразование здесь чисто геометрическое в декартовой системе координат.

При использовании тензорного анализа координаты обозначаются не x, y, z , а x_1, x_2, x_3 .

Тогда в сокращенной форме указанная система уравнений выглядит так:

$$a'_i = \alpha_{ij} a_j, \text{ или } a'_j = \alpha_{ji} a_i.$$

Здесь α_{ij} или α_{ji} — косинусы углов между старой и новой координатными системами; a_i — компонента в старой системе; a'_i или a'_j — в новой.

В этой записи по предложению Эйнштейна опущен знак суммы, т. е. практически нужно было записать $a'_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} a_i$.

Поэтому при записи Эйнштейна знак, который повторился два раза (немой индекс), является индексом суммирования, и он пробегает значения 1, 2, 3. В данном случае это индекс "i". Свободный индекс j или i'. Покажем тензорную развертку, т. е. просуммируем по немому индексу:

$$a'_i = \alpha_{i1} a_1 + \alpha_{i2} a_2 + \alpha_{i3} a_3.$$

Теперь свободному индексу i' можно давать значения 1, 2 или 3.

Так давая значения i' = 1, получим $a'_1 = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{12} a_2 + \alpha_{13} a_3$.

Если i' = 2, то $a'_2 = \alpha_{21} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \alpha_{23} a_3$

и, наконец, при i' = 3 имеем $a'_3 = \alpha_{31} a_1 + \alpha_{32} a_2 + \alpha_{33} a_3$.

Получена ранее приведенная система, но только в тензорной записи, где $x = 1, y = 2, z = 3$.

Из изложенного можно сделать вывод, что физическая (геометрическая) величина, характеризующаяся тремя числами, преобразующихся по указанному закону, есть вектор (тензор первого ранга).

Теперь легко перейти к тензорам более высокого ранга. Так тензором второго ранга называется любая величина, определяемая девятью числами a_{ij} в декартовой системе координат, которые при преобразовании базиса меняются по следующему закону:

$$a_{i'j'} = \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} a_{ij},$$

$$\text{или } a_{k'l} = \alpha_{k'i} \alpha_{l'j} a_{ij}.$$

Здесь немymi индексами являются i и j , поэтому нужно двойное суммирование, т. е.

$$a_{i'j'} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} a_{ij}.$$

Направляющие косинусы связаны между собой следующим соотношением:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, который принимает значение либо 0, либо 1, т. е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & | i=j \\ 0 & | i \neq j \end{cases}.$$

Правило косинусов в развернутом виде имеет вид

$$\alpha_{i1} \alpha_{j1} + \alpha_{i2} \alpha_{j2} + \alpha_{i3} \alpha_{j3} = \delta_{ij}.$$

Например, $i=j=1$, то $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1$ и т. д.

Компоненты тензора второго ранга часто записывают в виде специальной матрицы

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Следует сразу подчеркнуть, что это не определитель и раскрывать эту матрицу нельзя. Действия над тензорами будут показаны ниже.

В общем случае, для того, чтобы совокупность величин была тензором, необходимо и достаточно, чтобы при переходе от одного ортонормированного базиса к другому, она изменилась по закону

$$a_{i'j'k' \dots m'o'} = \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} \alpha_{k'k} \dots \alpha_{m'm} \alpha_{o'o} a_{ijk \dots mo}.$$

Таким образом, тензорами называют инвариантные объекты, компоненты которых при изменении координатной системы меняются по определенному линейному закону.

Число компонент тензора подчиняется следующему выражению:

$$N = 3^p,$$

где N — число компонент, а p — ранг тензора.

Еще раз подчеркнем, что если индекс повторится в записи два раза, то он немой и по нему нужно суммировать, например,

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Ранг тензора определяется только свободными индексами, так F_{ikk} — тензор первого ранга.

Над тензорами можно проводить ряд операций.

1. *Сложение декартовых тензоров.* Декартовы тензоры одинакового ранга можно складывать (или вычитать) покомпонентно. Сумма тензоров есть тензор того ранга, что и слагаемые:

$$A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -5 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & -2 & 18 \end{pmatrix}.$$

2. *Умножение тензоров.* Оно имеет несколько видов:

а) умножение тензора на скаляр дает новый тензор того же ранга, но с компонентами, увеличенными на множитель:

$$b_i = \lambda a_i,$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

б) внешнее произведение двух тензоров произвольного ранга. Это операция получения нового тензора, у которого компоненты образованы умножением компоненты одного тензора на каждую

компоненту другого тензора, ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей:

$$a_i b_j = C_{ij}; D_{ij} T_k = \Phi_{ijk};$$

в) свертывание тензора (сокращение индексов). Свертыванием по двум свободным индексам называется операция, когда два индекса обозначают одной и той же буквой. При этом они становятся немymi (индексами суммирования). В результате получаем тензор, ранг которого становится на две единицы меньше. Например, имеем тензор третьего ранга T_{ijk} . Заменяем обозначение k на j и получаем тензор первого ранга T_{ijj} , так как свободный индекс только i ;

г) свертывание произведения тензоров (скалярное внутреннее умножение). Внутренним произведением двух тензоров называют результат операции свертывания, примененной к внешнему произведению данных тензоров:

$$a_{ij} b_{il} = C_{jl}.$$

Закон Гука тоже представлен в виде свертки произведения тензоров

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Различают два вида тензоров: полевые и материальные. Первые из них не зависят от материала, его свойств, симметрии. В частности, к ним относится тензор напряжений. Вторые связаны и отражают только материалы, их свойства, состояние, симметрию.

4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

При действии внешних нагрузок все точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве и меняется их взаимное положение.

Например, некоторая точка M имела в исходном недеформированном состоянии координаты x, y, z . После деформации точка заняла положение M' и ее координаты стали равны $x' = x + u_x, y' = y + u_y, z' = z + u_z$, где u_x, u_y, u_z — проекции вектора перемещения точки M на координатные оси x, y, z (рис. 5).

Перемещения u_x, u_y, u_z являются функциями координат $u_x = u_x(x, y, z), u_y = u_y(x, y, z), u_z = u_z(x, y, z)$ и определяют поле

перемещений деформируемого тела. В силу сплошности тела будем предполагать, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по x, y, z непрерывны, а компоненты перемещения малы по сравнению с основными размерами тела.

Если рассмотреть поведение элементарного параллелепипеда с бесконечно малыми ребрами dx, dy, dz , параллельными осям координат, мысленно вырезанного в недеформированном состоянии

в окрестности точки M , то в результате деформации в общем случае этот параллелепипед в окрестности точки M' изменит и свой объем, и свою форму: ребра изменяют длину, а углы перестанут быть прямыми.

Предполагая деформацию параллелепипеда малой по сравнению с единицей, представим ее в виде последовательности двух

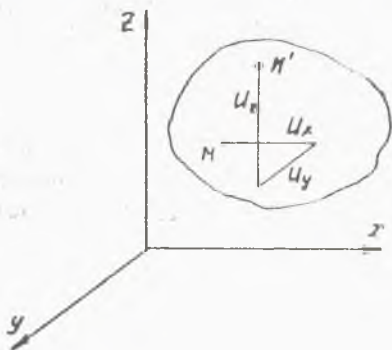


Рис. 5. Перемещение точки материального тела при деформации

видов деформаций. линейной (удлинение или укорочение) и угловой (сдвиговая). Величина линейной деформации определяется отношением приращения длины ребра к его исходной длине и обозначается через ε (рис. 6):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d x}{d x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta d y}{d y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta d z}{d z}.$$

Индекс в обозначении линейной деформации указывает ось, параллельно которой происходит изменение длины ребра. Деформации считаются положительными, если они соответствуют удлинению ребра, отрицательными — укорочению.

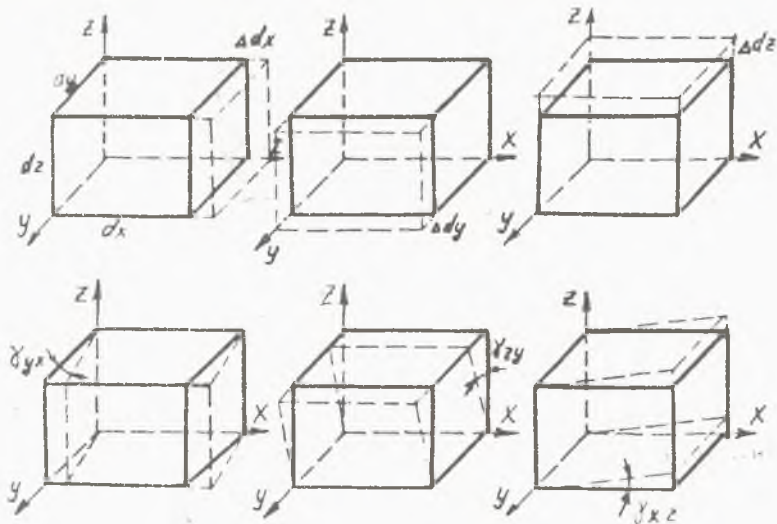


Рис. 6. Составляющие деформации параллелепипеда

Угловые деформации приводят к изменению формы тела (см. рис. 6). Величина деформации сдвига определяется углом между направлением ребер в исходном положении и после деформации и обозначается γ с двумя индексами — $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Индексы указывают, в какой координатной плоскости появляется угол сдвига между ребрами параллелепипеда. Первый индекс указывает направление оси, параллельно которой ребро находилось в исходном состоянии, а второй — ось, по направлению к которой повернулось ребро. Деформации сдвига считаются положитель-

ными, если они отвечают уменьшению угла между соответствующими гранями параллелепипеда. В противном случае деформации отрицательны.

Из изложенного следует, что деформации удлинения и сдвига являются относительными и безразмерными величинами. Их значения малы по сравнению с единицей.

Выразим теперь компоненты деформации через компоненты перемещения. Рассмотрим для этого проекцию элементарного параллелепипеда с бесконечно малыми ребрами dx , dy и dz на координатную плоскость xy . Пусть $a b c d$ — проекция этого параллелепипеда до деформации, $a_1 b_1 c_1 d_1$ — после деформации (рис. 7).

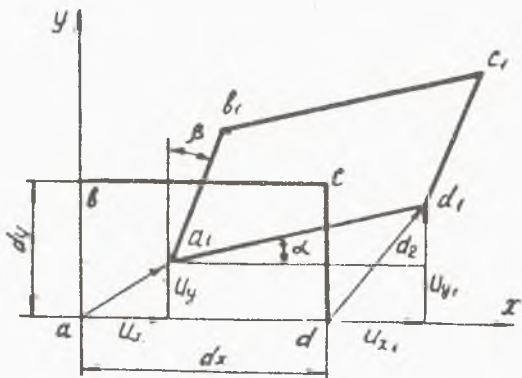


Рис. 7. Грань элементарного параллелепипеда до и после деформации

Для определения линейной деформации ϵ_x рассмотрим ребро $a d$. Перемещение точки a в направлении оси x обозначим через $u_x = u_x(x, y, z)$, точки d , расположенной от точки a на бесконечно малом расстоянии dx , через $u_{x1} = u_x(x + dx, y, z)$. Можно считать, что перемещение точки d отличается от перемещения точки a на величину приращения функции u_x на длине dx по координате x . Тогда

$$u_{x1} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx.$$

Отсюда относительное удлинение ребра $a d$ относительно оси x равно

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d x}{d x} = \frac{u_{x1} - u_x}{d x} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} d x - u_x}{d x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично для относительного удлинения ребра вдоль оси y получим

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Ребра параллелепипеда, параллельные осям координат в исходном состоянии, после деформации не будут им параллельны, так как произойдет поворот их в результате деформаций сдвига. Согласно определению деформация сдвига в плоскости $x y$ равна сумме углов α и β поворота ребер $a d$ и $a b$, т. е. $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$.

Так как изменения углов бесконечно малы, то $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, поэтому из $\Delta a_1 d_1 d_2$

$$\alpha = \frac{d_1 d_2}{a_1 d_2} = \frac{u_{y1} - u_y}{u_{x1} + d x - u_x},$$

или

$$\alpha = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} d x - u_y}{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} d x + d x - u_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{d x \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{d x (1 + \varepsilon_x)}.$$

Так как $\varepsilon_x \ll 1$, то

$$\alpha = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Аналогично определяем угол β :

$$\beta = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Тогда

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Проектируя рассматриваемый параллелепипед на плоскости yz и zx , найдем выражения других компонентов деформации от компонентов перемещения.

Окончательно получим:

линейные деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

угловые деформации

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Деформацию сдвига можно представить по-разному (рис. 8). На рис. 8а деформированное состояние характеризуется жестким поворотом параллелепипеда на угол γ_{yx} по часовой стрелке. На рис. 8б — на угол γ_{xy} против часовой стрелки. Для всех трех случаев характерно одно и то же напряженное состояние, так как поворот элементарного объема как жесткого целого не приводит к появлению в нем дополнительных усилий. В искажении формы при деформации сдвига имеет значение сумма углов, а не величина каждого из них. Поэтому можно приравнять углы α и β , а сдвиговую деформацию обозначить относительно оси x через $0,5 \gamma_{xy}$, относительно оси y — $0,5 \gamma_{yx}$. Очевидно

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}; \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{zy}; \quad \frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{xz}.$$

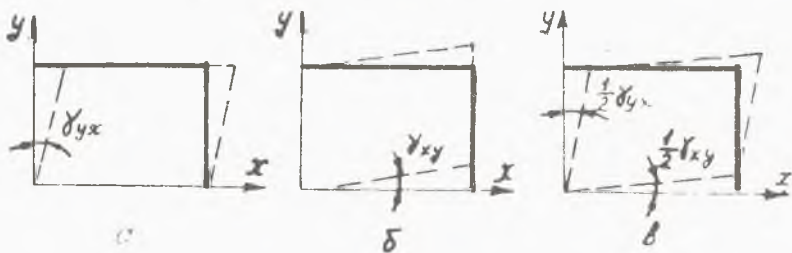


Рис. 8. Схема взаимности сдвигов

При этом индексация сдвиговых деформаций будет совпадать с индексацией касательных напряжений. Тогда деформированное

состояние в точке тела можно описать полевым тензором деформаций второго ранга:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

За счет случая на рис. 8в тензор деформаций сделан искусственно симметричным. При использовании тензорных обозначений общий компонент тензора деформаций имеет вид ε_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), причем $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$; $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$; $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$; $\varepsilon_{12} = 0,5\gamma_{xy}$; $\varepsilon_{23} = 0,5\gamma_{yz}$; $\varepsilon_{31} = 0,5\gamma_{zx}$.

В каждой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные направления, которые называют главными осями деформации. Главные оси деформации обладают тем свойством, что волокна в теле, параллельные им, испытывают только линейные деформации (укорачиваются или удлиняются), но не поворачиваются, т. е. угловые деформации в главных осях деформации равны нулю. Главные линейные деформации обозначают индексами 1, 2, 3: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Тензор деформации в главных осях имеет вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Так как принят принцип, что тело до деформации и после деформации должно оставаться сплошным, то все компоненты деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ произвольными быть не могут. Они должны быть определенным образом связаны между собой некоторыми соотношениями, которые называются уравнениями совместности деформаций. Покажем это.

На рис. 9а показано тело до деформации, разбитое на части сеткой ортогональных прямых. Зададим в теле поле линейных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, в результате чего прямые получают некоторые удлинения (рис. 9б). Так, вместо отрезка $d x$ будем иметь отрезок длиной $(1 + \varepsilon_x)d x$ и т. д. При этом возникают углы сдвига

как изменения прямых углов, зависящие от компонентов деформации — $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Очевидно, наоборот, задавая поле угловых деформаций $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в непрерывно деформируемом теле, будем иметь зависящие от них линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. В случае произвольного и независимого задания удлинений и углов сдвига деформированные элементы тела (элементарные параллелепипеды) не удастся сложить в сплошное тело.

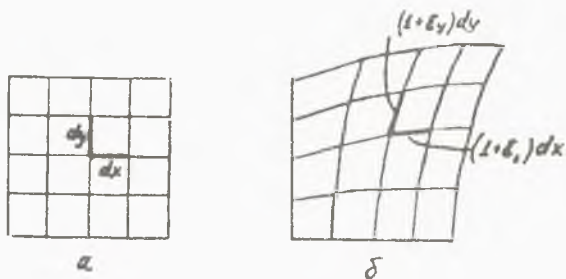


Рис. 9. Тело до деформации (а) и после (б)

Рассмотрим вывод условия совместности деформаций на примере плоской задачи. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для установления связи между компонентами деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и γ_{xy} исключим из уравнений (2) перемещения. Для этого продифференцируем первое уравнение дважды по y , второе дважды по x и полученные уравнения сложим почленно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

Выражение в скобках равно γ_{xy} , поэтому

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Полученное уравнение является условием совместности. Легко видеть, что при двух заданных линейных деформациях ε_x и ε_y , угловая деформация γ_{xy} получает вполне определенное и единственное значение.

Использование малых деформаций основано на том, что при анализе процесса обработки металлов давлением рассматриваются два бесконечно близких произвольных момента деформирования. Вместе с тем при обработке металлов давлением происходят большие деформации, когда размеры тела в процессе деформации значительно изменяются. Тогда полная относительная деформация тела определяется как сумма малых деформаций за весь период деформации. Покажем это.

Возьмем тело в форме параллелепипеда с ребрами, параллельными главным осям деформаций с исходными размерами до пластической деформации X_0, Y_0, Z_0 . Пусть этот параллелепипед после развитой пластической деформации останется параллелепипедом и размеры его будут X, Y, Z . Тогда по условию постоянства объема

$$V = X_0 Y_0 Z_0 = X Y Z = \text{const.}$$

Откуда

$$\frac{X}{X_0} \cdot \frac{Y}{Y_0} \cdot \frac{Z}{Z_0} = 1.$$

а после логарифмирования

$$\ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{Y}{Y_0} + \ln \frac{Z}{Z_0} = 0,$$

или

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

где величины e_1, e_2 и e_3 получили название логарифмических деформаций по предложению в 1909 г. П. Людвига.

$$e_1 = \ln \frac{X}{X_0}, \quad e_2 = \ln \frac{Y}{Y_0}, \quad e_3 = \ln \frac{Z}{Z_0}.$$

Логарифмическая деформация представляет собой интеграл бесконечно малого приращения данного размера тела или его

элемента, отнесенного к его величине в каждом данном момент деформации. Например, в направлении оси x

$$e_x = \int_{X_0}^X \frac{dX}{X} = \ln X / \ln X_0 = \ln \frac{X}{X_0}.$$

Степень деформации деформируемого тела можно выразить иначе, а именно, как приращение размера к начальному размеру (как при расчете малых деформаций). Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{X - X_0}{X_0} = \frac{\Delta X}{X_0}; \quad \varepsilon_y = \frac{Y - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta Y}{Y_0}; \quad \varepsilon_z = \frac{Z - Z_0}{Z_0} = \frac{\Delta Z}{Z_0}. \quad (3)$$

Величины e_x, e_y, e_z и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ связаны между собой:

$$e_x = \ln \frac{X}{X_0} = \ln \frac{X_0 + \Delta X}{X_0} = \ln(1 + \varepsilon_x);$$

$$e_y = \ln \frac{Y}{Y_0} = \ln \frac{Y_0 + \Delta Y}{Y_0} = \ln(1 + \varepsilon_y); \quad (4)$$

$$e_z = \ln \frac{Z}{Z_0} = \ln \frac{Z_0 + \Delta Z}{Z_0} = \ln(1 + \varepsilon_z).$$

Поскольку деформации в различных точках тела могут быть различны, то формулы (3) и (4) дают лишь средние степени деформации данного тела или его части.

Логарифмические деформации в отличие от формул (3) обладают свойством аддитивности, т. е. их можно складывать при определении суммарной деформации, осуществленной за несколько операций, что упрощает расчеты.

Допустим, что растяжение образца с начальной длиной l_0 произведено за два этапа. Вначале образец был растянут на длину l_1 , а после — на l_2 .

Суммарная логарифмическая деформация

$$e_{\Sigma} = \ln \frac{l_2}{l_0} = \ln \left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{l_1}{l_0} \right) = \ln \frac{l_1}{l_0} + \ln \frac{l_2}{l_1} = e_I + e_{II}.$$

Логарифмические деформации (4) меньше относительных (рис. 10). В инженерных расчетах при относительных деформациях меньше 10% можно принимать $e \approx \varepsilon$. Расчет деформаций по формулам (3) применяется только при малых степенях деформации, так как они не дают точного представления о степени

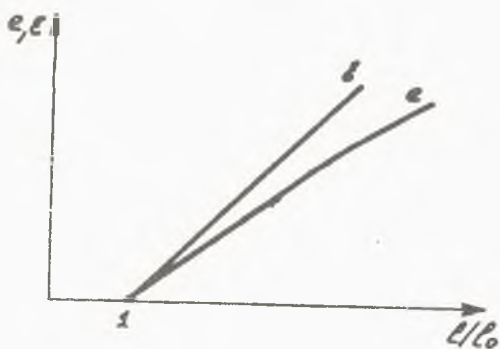


Рис. 10. Сравнение логарифмических и малых деформаций

изменения размеров, потому что приращение длины ребра отнесено к начальному размеру ребра, а размер в процессе деформации все время меняется. Правильнее определять логарифмическую деформацию, которая удовлетворяет условию постоянства объема и обладает свойством аддитивности.

Таким образом, выбор меры деформации определяется характером деформирования и точностью расчета изучаемого процесса.

5. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Он является основным законом теории упругости.

Вы изучили отдельно напряженное и деформированное состояние. Это было возможно только потому, что они выражены с помощью полевых тензоров. Это изучение несет довольно большую информацию, но не дает полной законченности в решении упругой задачи. Дело в том, что основной целью процесса деформирования является установление связи между силами и напряжениями, с одной стороны, и смещениями, деформациями — с другой. Только такая связь позволяет выяснить физическую картину процесса. Первая формулировка закона, связывающего напряжения с деформацией, принадлежит выдающемуся английскому естествоиспытателю, члену Лондонского Королевского общества (прототип — наша Академия наук) Роберту Гуку (Хуку) (1635—1703).

Гук усовершенствовал микроскоп, барометр, зеркальный телескоп, сконструировал ряд других приборов. Он совместно с Гюйгенсом установил постоянные точки термометра (точку таяния льда и точку кипения воды). Гук выступал против теории флогистона ("огненной" материи), исследовал с помощью микроскопа строение растений. Также широко известен в технике шарнир Гука. Из краткого перечня открытий видна широта и глубина его научных интересов. Кстати, свой закон упругости он открыл при создании пружины для часов, которая используется до настоящего времени.

Закон, названный его именем, был открыт в 1660 г. и опубликован в явном виде в 1678 г. В переводе на современный технический язык, содержание, которое вкладывал в свой закон Гука, можно выразить следующим образом: "Деформация упругого тела пропорциональна действующему на него усилию".

Мы же рассматриваем пропорциональность напряжений и деформаций. Ясно, что это более правильное (обобщенное понятие). Экспериментальные исследования подтвердили, что закон Гука хорошо согласуется с действительностью только при достаточно малых деформациях, где пропорциональность величин не

даст больших погрешностей. Дело в том, что в природе не существует обратимых процессов, поэтому физически никакой пропорциональности быть не может.

Но даже при малых деформациях закон Гука в простой форме типа $\sigma = E \varepsilon$ не может дать полной картины того, что происходит в деформируемом теле. Дело в том, что здесь σ и ε определяются в направлении действия силы. Другие компоненты деформации в записи не присутствуют. Таким образом, такое выражение является приближенным и применимым для линейного напряженного состояния. В общем случае объемного напряженного состояния мы имеем шесть компонент тензоров напряжений и деформаций, которые необходимо связать между собой. Другими словами, требуется обобщенный закон Гука. Такой закон создан. В его основе лежит пропорциональность (основная идея Гука), но только не двух, а нескольких величин. И хотя форма записи обобщенного закона упругости и его формулировка изменились, но из-за центральной идеи пропорциональности его называют законом Гука.

Он формулируется следующим образом: компоненты тензора деформации в данной точке являются линейными и однородными функциями компонент тензора напряжений или наоборот.

Математически в тензорной форме его можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{— прямая форма записи,}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{— обратная форма записи.}$$

Здесь S_{ijkl} — тензор модулей податливости, а C_{ijkl} — тензор модулей упругости.

Как видим, полевые тензоры напряжений и деформаций связаны материальными тензорами четвертого ранга, которые отражают свойства материала, его строение и симметрию. И если не принимать гипотезы однородности материала, мы должны находить компоненту в каждой точке тела. Но и при принятии однородности имеем практически неразрешимую задачу, так как нужно 81 испытание по определению упругих свойств. Поэтому приходится привлекать дополнительную информацию.

Так из-за симметрии тензоров напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и деформаций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ возникнет симметрия и материального тензора по двум первым и двум последним индексам, т. е.

$$S_{ijkl} = S_{jikl}, \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}.$$

В результате этого остаются только 36 независимых компонент материального тензора. Вы можете это легко проверить.

Далее пропорциональность связана с обратимостью процесса упругости, из-за чего возникает еще один тип симметрии — перестановка пар индексов, т. е.

$$S_{ijkl} = S_{klij}.$$

Тогда число независимых компонент тензора модулей податливости уменьшится до 21. Например, наблюдается следующая связь:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} + S_{1112} \sigma_{12} + S_{1113} \sigma_{13} + S_{1122} \sigma_{22} \quad \text{и т. д.}$$

Здесь линейная деформация зависит как от нормальных, так и от касательных напряжений.

Классический подход в теории упругости не позволяет далее уменьшить число независимых компонент материального тензора. Правда, академик В. Новожилов, исходя из теории инвариантов, показал, что число неизвестных можно свести к 18. Наши исследования установили, что для металлов количество независимых компонент можно свести к 15. В любом случае такое число констант определить не удастся. В связи с этим отходят от классического подхода и смотрят на особенности поведения реальных тел. Так замечено, что изготавливаемые методами обработки металлов давлением полуфабрикаты: листы, прутки, трубы и т. д. — имеют определенную симметрию механических характеристик. Рассмотрим основные из них.

1. Три плоскости симметрии (ортотропное тело, ортогональная анизотропия). Такая симметрия характерна для листовых полуфабрикатов. В этом случае через каждую точку тела проходят три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии свойств. Образно говоря, эта симметрия "спичечного коробка".

Какие упрощения вносит такая симметрия? Оказывается, что при преобразовании компонент материального тензора остаются такие, у которых либо все индексы одинаковы, либо попарно равны. Другими словами, при такой симметрии не может быть компонент типа S_{1112} , S_{2111} , S_{3331} и т. д.

Закон Гука запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} \sigma_{22} + S_{1133} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = 2 S_{1212} \sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{2211} \sigma_{11} + S_{2222} \sigma_{22} + S_{2233} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = 2 S_{2323} \sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{3311} \sigma_{11} + S_{3322} \sigma_{22} + S_{3333} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{31} = 2 S_{3131} \sigma_{31}.$$

Таким образом, не только уменьшилось число независимых компонент материального тензора до 9, но и удалось отделить линейные величины от сдвиговых.

Для того, чтобы использовать уравнения закона Гука в расчетах необходимо компоненты материального тензора выразить через технические показатели. В качестве технических показателей здесь используются коэффициенты Пуассона ν_{ij} и модули упругости E_i разных направлений. Напомним, что коэффициент Пуассона представляет собой отношение поперечной деформации к деформации вдоль действия сил. Напряженное состояние при испытании образцов для его нахождения — линейное. Например,

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{S_{2211}}{S_{1111}}.$$

Закон Гука через технические показатели запишется так:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G_{23}};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_3} - \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_{22}; \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G_{31}},$$

где G_{ij} — модули сдвига или модули упругости второго рода.

Напомним, что $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}$ и т. д.

Между отдельными показателями при ортотропном теле имеются взаимосвязи:

$$E_2 \nu_{21} = \nu_{12} E_1; \quad E_3 \nu_{31} = \nu_{13} E_1; \quad E_3 \nu_{32} = \nu_{23} E_2;$$

$$\nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} = \nu_{32} \nu_{13} \nu_{21}.$$

Для металлов, как показали наши исследования, число определяемых констант можно снизить до 7, так как для них имеются дополнительные соотношения, типа

$$\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} = \frac{1 - \nu_{31}}{1 - \nu_{32}}$$

2. *Плоскость изотропии — трансверсально изотропное тело.* Здесь через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все свойства эквивалентны (равнозначны).

Если в качестве плоскости изотропии выбрать плоскость 1—2, то наблюдается равенство следующих компонент: $S_{1111} = S_{2222}$, так как растяжение в 1-м и 2-м направлениях дают одинаковый результат; $S_{1133} = S_{2233}$ — при растяжении образца, вырезанного в направлении 3 поперечное его сужение в 1-м и 2-м направлениях приводят к одному и тому же результату; $S_{2323} = S_{3131}$ — поворот вокруг оси 3 равнозначен в направлениях 1 и 2.

Кроме того, из-за наличия плоскости изотропии 1—2, коэффициент, связанный со сдвигом, может быть заменен и через линейные коэффициенты, т. е.

$$2 S_{1212} = S_{1111} - S_{1122}$$

Уравнения по закону Гука запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} \sigma_{22} + S_{1133} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{2211} \sigma_{11} + S_{1111} \sigma_{22} + S_{1133} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = 2 S_{2323} \sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{3311} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + S_{3333} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{31} = 2 S_{2323} \sigma_{31}.$$

или

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{E_1} (1 - \nu_{12}) \sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{11} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G_{23}};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{33} - \nu_{13} (\sigma_{22} + \sigma_{11})]; \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G_{23}}.$$

Таким образом, число независимых компонент материального тензора уменьшается до пяти. Отметим, что для металлов можно их сократить до трех.

3. Полная симметрия — изотропное тело.

Здесь

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333};$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311};$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122}).$$

Тогда

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \varepsilon_{12} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{1111} \sigma_{22} + S_{1122} (\sigma_{33} + \sigma_{11}), \quad \varepsilon_{23} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{1111} \sigma_{33} + S_{1122} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{31} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{31}.$$

Таким образом, независимых компонент только две.

Выпишем закон Гука для изотропной среды, переходя к системе декартовых координат:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Здесь запись проведена через три показателя — μ, E, G . Однако независимых, как уже показано, два показателя. Поэтому

имеется связь модуля сдвига с модулем упругости: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Интересно отметить, что происходил спор между двумя группами ученых, которые возглавили Коши и Пуассон.

Группа Коши утверждала, что независимых показателей только два. В правильности их суждений вы убедились сами. Группа Пуассона говорила об одной независимой константе. Но тогда коэффициент Пуассона у всех материалов был бы равен 0,25, а это не соответствует действительности.

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

При объемном напряженном состоянии определение поля напряжений или деформаций часто оказывается сложным. Это вынуждает вводить во многих практических задачах ряд допущений относительно распределения напряжений или деформаций, т. е. переходить от объемного напряженного состояния к частным случаям.

Частными случаями объемного напряженного состояния, весьма часто встречающихся при обработке металлов давлением, являются плоское напряженное, плоское деформированное и осесимметричное напряженное состояния.

Плоское напряженное состояние реализуется приблизительно

для тонкой пластины, у которой один основной размер значительно меньше, чем другие (рис. 11).

По контуру пластины действуют силы, распределенные равномерно по ее толщине и параллельные плоскости пластины. В этом случае компоненты напряжений, содержащие индексы y ,

$\sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}$, равны

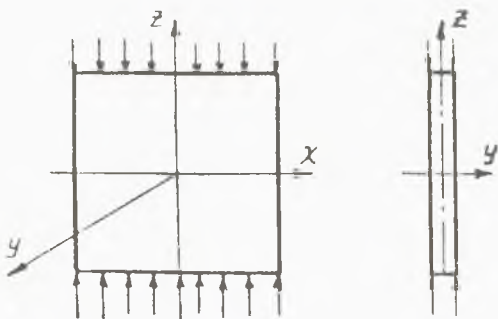


Рис. 11. Схема плоского напряженного состояния

нулю на обеих плоских поверхностях пластины и можно предположить, что они отсутствуют по всей толщине пластины. Изменение толщины пластины не имеет значения, и толщина ее может быть принята за единицу. Три другие компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ будут постоянными по всей толщине пластины.

Тензор напряжений имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Деформации происходят в пластине по всем трем осям и описываются тензором деформации

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из записи тензоров следует, что ось y является главной: напряжение $\sigma_y = 0$ — одним из главных напряжений; ε_y — главная деформация.

Величину других главных напряжений можно найти из решения определителя.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2 = 0.$$

Откуда при $\sigma_2 = 0$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия упрощаются:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0.$$

Зависимости деформаций от перемещений следующие:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Из шести условий неразрывности деформаций остается только одно, первое:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}.$$

Остальные обращаются тождественно в нуль.

Физические уравнения при упругой деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \sigma_z); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu \sigma_x);$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z); \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}.$$

Плоское напряженное состояние в процессах обработки металлов давлением может быть, например, во фланце при вытяжке цилиндрической заготовки из листового материала, при волочении и обжиге тонкостенных труб.

Плоское деформированное состояние приблизительно реализуется для тела, у которого один основной размер значительно больше, чем другие (рис. 12). В этом случае деформация в направлении оси, параллельной большему размеру, будет мала и ею можно пренебречь. В процессах обработки металлов давлением примерами плоского деформированного состояния являются прокатка широких тонких листов, когда ширина листа остается постоянной (прокатка без уширения), брус, подвергающийся осадке в направлении толщины. В этих примерах перемещения всех точек тела параллельны одной и той же плоскости.

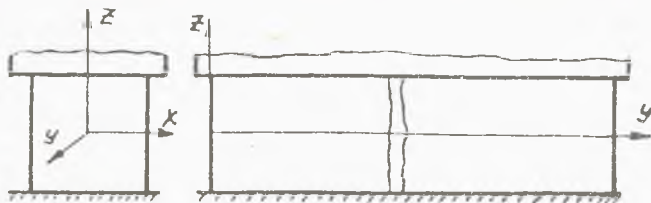


Рис. 12. Схема плоского деформированного состояния

Из определения плоской деформации $\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_x = 0$. Тогда тензор деформаций имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Напряженное состояние описывается тензором напряжений, состоящим из четырех компонентов

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Уравнения равновесия и геометрические уравнения записываются как при плоском напряженном состоянии.

Физические уравнения при плоской упругой деформации описываются законом Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x) \right];$$

$$0 = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right].$$

Из последнего уравнения при $\mu = 0,5$ $\sigma_z = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$.

Таким образом, плоское напряженное и плоское деформированное состояния характеризуются следующими особенностями: все компоненты напряжений не зависят от одной из координат, общей для всех компонентов, и остаются постоянными при ее изменении;

в плоскостях, нормальных к оси этой координаты компоненты касательных напряжений равны нулю, а нормальное напряжение равно нулю при плоском напряженном состоянии или равно полусумме двух других нормальных напряжений при плоском деформированном состоянии.

Из рассмотрения плоского напряженного и плоского деформированного состояний видно, что, несмотря на ряд общих формул для описания обоих состояний, они значительно отличаются друг от друга. При плоском напряженном состоянии в направлении главной оси нормальное напряжение равно нулю, но обязательно есть главная деформация. При плоском деформированном состоянии, наоборот, деформация равна нулю, а обязательно существует нормальное напряжение, перпендикулярное к плоскости деформации.

Осесимметричное напряженное состояние реализуется для тела вращения, к поверхности которого приложены распределенные нагрузки, расположенные симметрично относительно его оси и одинаковые во всех меридианных сечениях (рис. 13).

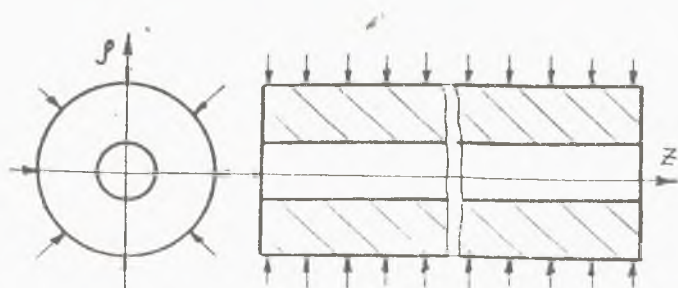


Рис. 13. Схема осесимметричного напряженного состояния

При рассмотрении процессов обработки металлов давлением, таких как осадка цилиндрической заготовки, прессование и волочение прутков и труб, а также деформация круглой толстостенной трубы, находящейся под равномерным наружным или внутренним давлением, от объемного напряженного состояния можно перейти к осесимметричному.

При анализе осесимметричного напряженного состояния удобнее пользоваться цилиндрическими координатами вместо декартовых.

Вследствие симметрии тела и симметрии внешних сил направления всех радиусов равноправны. Следовательно, составляющие напряжений не зависят от угла θ , а касательные напряжения и угловые деформации, содержащие индекс θ , будут равны нулю. Напряжение σ_θ — главное напряжение, ε_θ — главная деформация.

Тензора напряжений и деформации имеют вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\rho} & \tau_{\rho z} \\ 0 & \tau_{\rho z} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\rho} & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из трех уравнений равновесия в цилиндрических координатах остаются только два:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0.$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{u_{\rho}}{\rho}; \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}.$$

Физические уравнения:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{1}{E} [\sigma_{\rho} - \mu(\sigma_{\theta} + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - \mu(\sigma_{\rho} + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta})]; \quad \gamma_{\rho z} = \frac{1}{G} \tau_{\rho z}.$$

7. УСЛОВИЕ ПЕРЕХОДА МЕТАЛЛА В ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Начало пластических деформаций является следствием перехода от одной формы устойчивого равновесия в атомной решетке зерна к другой. При линейном напряженном состоянии, например при растяжении, можно считать, что пластическое состояние наступает тогда, когда нагрузка вызывает нормальные напряжения, равные пределу текучести σ_T . Если по мере деформации металл упрочняется, то для дальнейшего развития пластической деформации необходимо увеличить напряжение, величина которого определяется кривой упрочнения. Если упрочнение отсутствует, то пластическая деформация протекает при постоянном напряжении. Отсюда следует, что возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями.

Теперь требуется перенести эти рассуждения и на случай трехмерного (объемного) напряженного состояния. Сделать это значительно сложнее. Дело в том, что напряженное состояние в рассматриваемой точке деформируемого тела описывается шестью компонентами тензора напряжений — $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Количество возможных комбинаций напряжений, при которых тело переходит в пластическое состояние, является бесконечным. Точная форма поверхности раздела упругих и пластических деформаций неизвестна. В связи с этим приходится прибегать к гипотезам по переходу тела в пластическое состояние, а поверхность раздела строить на основе этих гипотез. Эти гипотезы и соответствующие уравнения, которые являются их математической формулировкой, называют критериями (условиями) пластичности. К ним предъявляются следующие требования.

1. Критерий пластичности должен иметь форму инварианта, так как характеризуется уравнением состояния тела, которое выражает некоторый физический закон. А это значит, что в это уравнение в качестве независимых переменных должны входить инварианты.

2. В уравнение критерия пластичности, помимо компонент тензора напряжений, должны входить компоненты материального тензора, характеризующие механические свойства металла и определяющие возникновение пластических деформаций при простейших напряженных состояниях.

3. Критерий пластичности должен быть действительным для элементарных объемов металла, находящегося в произвольном объемном напряженном состоянии.

Исходя из выше приведенных требований, для изотропного металла критерий пластичности не должен зависеть от направлений и может быть представлен в виде функции инвариантов тензора напряжений

$$F(I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)) = C, \quad (5)$$

где C — постоянная текучести.

Как показывают опыты, при всестороннем равномерном растяжении или сжатии пластические деформации не возникают. Поэтому критерий пластичности (5) можно представить как функцию только второго и третьего инвариантов девиатора напряжений:

$$F[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = C.$$

Если известны главные нормальные и максимальные касательные напряжения, то критерий пластичности можно записать в упрощенном виде

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C, \quad \text{или} \quad F(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}) = C.$$

Из многочисленных, предложенных в разное время критериев пластичности наибольшее применение в обработке металлов давлением получили условия Треска и Мизеса. Рассмотрим их более подробно в той исторической последовательности, как они появились.

Условие постоянства максимального касательного напряжения. Французский инженер Треска в 1868 г., основываясь на собственных опытах по истечению металла через отверстия, впервые высказал предположение (гипотезу) о том, что в момент начала пластической деформации во всех точках деформируемой среды максимальные касательные напряжения имеют одно и то же значение для данного металла, т. е.

$$|\tau_{\max}| = C.$$

Несколько позднее французский ученый Сен-Венан дал математическую формулировку этого условия для плоской деформации.

Если $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C.$$

При линейном напряженном состоянии $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Откуда постоянная текучести $C = 0,5 \sigma_T$. Для плоской задачи при $\sigma_2 = 0$ имеем $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$.

В объемном случае условие Треска можно записать

$$\left. \begin{aligned} 2|\tau_{12}| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T \\ 2|\tau_{23}| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_T \\ 2|\tau_{31}| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_T \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если все три условия выполняются со знаком неравенства, то металл находится в упругом состоянии. Чтобы металл находился

в состоянии текучести, в одном или двух из этих уравнений должен быть знак равенства.

Окончательно условие Треска можно сформулировать следующим образом. Переход тела из упругого состояния в пластическое не зависит от вида напряженного состояния и происходит тогда, когда по крайней мере одно или два из касательных напряжений достигают максимального значения, определяемого только механическими свойствами металла.

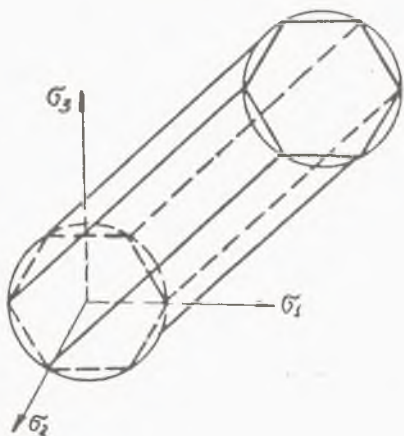


Рис. 14. Условия пластичности в пространстве главных напряжений:
1 — шестигранная призма Треска;
2 — цилиндр Мизеса

Из уравнений (6) вытекает следующее соотношение между пределом при линейном растяжении и пределом текучести при сдвиге $\tau_T : 2 \tau_T = \sigma_T$.

В трехмерном пространстве главных напряжений условие Треска интерпретируется поверхностью пластичности, представляющей собой правильную призму бесконечной длины, ось которой равнонаклонена к трем осям (рис. 14), т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Условие Треска в общем удовлетворительно характеризует наступление пластического состояния металла и согласуется с наблюдениями по линиям Людерса.

Условие постоянства интенсивности напряжений. В объемных задачах использование условия Треска в виде трех уравнений (6) наталкивается на большие математические трудности. Часто не легко установить заранее, какое из трех касательных напряжений достигает максимального значения, а также учесть влияние среднего главного напряжения. Эти обстоятельства привели немецкого ученого Мизеса в 1913 г. к гипотезе об описании вокруг шестигранной призмы в координатах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ кругового цилиндра (рис. 14), уравнение которого имеет вид

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \sigma_T^2. \quad (7)$$

Это условие пластичности читается так: пластическая деформация наступит тогда, когда интенсивность напряжений σ_T достигнет некоторого предельного значения, определяемого только механическими свойствами металла независимо от вида напряженного состояния.

Левая часть уравнения (7) отличается от второго инварианта девиатора напряжений $I_2(D_\sigma)$, интенсивности касательных напряжений T , октаэдрического касательного напряжения только постоянным множителем. Поэтому условие пластичности Мизеса носит в литературе несколько наименований:

"условие постоянства интенсивности напряжений", "условие постоянства интенсивности касательных напряжений", "условие постоянства октаэдрического касательного напряжения".

Условие пластичности Мизеса инвариантно к преобразованию координат. Оно учитывает влияние среднего главного напряжения на условие перехода упругой деформации в пластическую.

В дальнейшем выяснилось, что раньше Мизеса это условие как условие прочности было предложено польским ученым Губером в 1904 г. Позднее Генки в 1924 г. заметил, что левая часть условия (7) имеет простой физический смысл, соответствуя с точностью до постоянного множителя энергии упругого изменения формы тела.

В самом деле, удельная потенциальная энергия упругого тела

$$A_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Исключая отсюда деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ с помощью закона Гука

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_i - 3 \nu \sigma], \quad i = 1, 2, 3,$$

находим

$$A_n = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)].$$

Вычитая отсюда удельную упругую энергию изменения объема

$$A_0 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

получаем энергию упругого изменения формы

$$A_\Phi = A_n - A_0 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Таким образом, состояние текучести достигается при некоторой постоянной энергии изменения формы независимо от схемы напряженного состояния. Поэтому условие Мизеса в отличие от вышеприведенных часто называют энергетическим условием пластичности или уравнением Губера-Мизеса-Генки.

Рассмотрим графики условий начала пластических деформаций по критериям Мизеса и Треска для плоского напряженного состояния. Условие пластичности (7) при $\sigma_2 = 0$ примет вид $\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_1^2$.

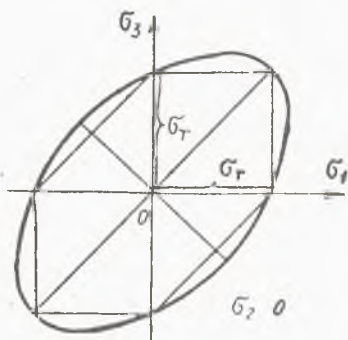


Рис. 15. Условия пластичности для плоского напряженного состояния: 1 — шестиугольник Треска; 2 — эллипс Мизеса

Это уравнение описывает эллипс с центром в начале координат и осями координат σ_1 и σ_3 (рис. 15). Условия пластичности Треска описывают шестиугольник. В точках с координатами $(0, \sigma_T), (\sigma_T, 0), (0, -\sigma_T), (-\sigma_T, 0)$ критерии пластичности Мизеса и Треска совпадают. Эти точки соответствуют линейному напряженному состоянию растяжения или сжатия.

Другие четыре точки на эллипсе $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T, \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T, \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),$
 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T, -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right)$ соответствуют плоскому напряженному и плоскому деформированному состояниям. В этих точках критерии Треска и Мизеса отличаются друг от друга на 15%.

В точках $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T, \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),$ соответствующих чистому сдвигу, критерии отличаются друг от друга примерно на 8%.

Таким образом, рассматриваемые критерии пластичности Треска и Мизеса близки друг к другу. Мизес считал условие Треска точным, а свое — приближенным. Однако многочисленные эксперименты показали, что условие Мизеса выполняется в состоянии текучести для поликристаллических металлов лучше, чем условие Треска.

8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД

Предложено несколько критериев пластичности анизотропных тел. Наиболее распространенным из них является энергетический критерий Р. Мизеса, предложенный им в 1928 году. Наилучший результат получается при использовании критерия Р. Мизеса для металлических сред. Для пластмасс, древесины, бетона и т. д. имеются свои критерии.

Если представить критерий Р. Мизеса в тензорной форме, то он будет иметь вид

$$F = \sigma_u^2 = K_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}.$$

Здесь K_{ijkl} — симметричный материальный тензор, где выполняются условия $K_{ijkl} = K_{jikl}$, $K_{ijkl} = K_{ijlk}$ и $K_{ijkl} \sigma_{kl} = 0$ (из-за условия постоянства объема), где σ_{kl} — символ Кронекера.

Фактически из-за последнего условия K_{ijkl} является девизатором. Металлические полуфабрикаты: листы, ленты, трубы, профили — обладают ортогональной анизотропией. Это такой вид симметрии материала, когда имеется три плоскости симметрии свойств. Если отложить какое-либо свойство в масштабе, то ортогональная анизотропия имеет примерно такой вид (рис. 16). Такие материалы называют также ортотропными. В отдельных случаях наблюдается трансверсальная анизотропия, когда свойства в одной из плоскостей (например, листа) одинаковы, но другие, чем по толщине.

Для ортотропного тела при записи в главных осях анизотропии условие пластичности примет вид

$$\sigma_u^2 = -K_{1122} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - K_{2233} (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - K_{3311} (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 4(K_{1212} \sigma_{12}^2 + K_{2323} \sigma_{23}^2 + K_{3131} \sigma_{31}^2).$$

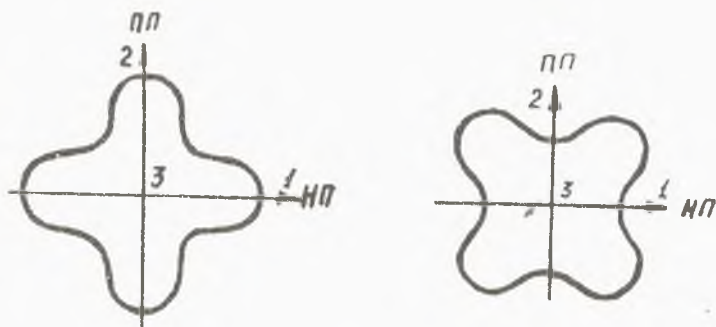


Рис. 16. Распределение свойств в плоскости ортотропного листа
 Н П 1 — направление проката; П П 2 — поперек проката; 3 — по толщине листа

Проведенные исследования ортотропного материального тензора позволили при реальных для практики, в случае металлических полуфабрикатов, допущениях (изотропная сжимаемость, независимость материального девиатора от тензорной меры воздействия) выявить следующую структуру материального девиатора:

$$K_{ijkl} = t_0 (T_{ijkl} + k \lambda_{ij} \lambda_{kl}).$$

Здесь k — скалярный функционал процесса, отражающий природу материала (тип решетки, степень соответствия текстуры монокристалла и т. д.); t_0 — произвольный множитель; λ_{ij} — нормированный девиатор ($\lambda_{ij} \lambda_{ij} = 1$), связанный с процессом и условиями деформирования. В случае чисто деформированного воздействия

$$\lambda_{ij} = \frac{e_{ij}}{e_0}; \quad e_0^2 = e_{rs} e_{rs}.$$

T_{ijkl} — девиаторная единица:

$$T_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \sigma_{jl} + \sigma_{il} \sigma_{jk}) - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{kl}.$$

В главных осях анизотропии имеем

$$K_{iiii} = t_0 \left(\frac{2}{3} + k \lambda_i^2 \right);$$

$$K_{ijjj} = t_0 \left(-\frac{1}{3} + k \lambda_i \lambda_j \right); \quad (i \neq j)$$

$$K_{ijji} = \frac{t_0}{2} \quad (i \neq j).$$

В случае изотропной среды $k = 0$ и компоненты материального тензора примут постоянный вид и в зависимости от принятого значения t_0 будем иметь ту или иную интенсивность напряжений. Это еще раз говорит о том, что материальный тензор не может быть изотропным, так как тогда он не отражает природу материала.

Раскрытие структуры материального тензора позволяет найти дополнительные взаимосвязи:

$$K_{1212} = K_{2323} = K_{3131};$$

$$\left(\frac{K_{iiii}}{2K_{ijji}} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{K_{jjjj}}{2K_{ijji}} - \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{K_{ijjj}}{2K_{ijji}} + \frac{1}{3} \right)^2.$$

Для того, чтобы воспользоваться как условием пластичности, так и другими уравнениями теории, необходимо компоненты материального тензора выразить через те или иные технические константы.

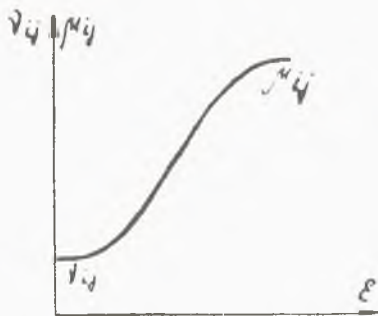


Рис. 17. Переход постоянного значения ν_{ij} в μ_{ij} с увеличением деформации

В теории упругости анизотропных сред в качестве таких показателей используют коэффициенты Пуассона и соответствующие им модули упругости. Для сохранения преобразованием (а процесс деформирования является единым) используют подобные показатели и в пластической области (рис. 17). Так, аналогично коэффициенту Пуассона, введены коэффициенты поперечной деформации

$$\mu_{ij} = -\frac{K_{ijll}}{K_{jjll}} = -\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_j}.$$

Здесь первый индекс показывает направление поперечного сжатия испытываемого образца при действии растягивающей

силы вдоль второго направления j . Схема направлений — линейная (см. рис. 16). Так, при вырезке и испытании образцов вдоль проката 1 получаем следующие коэффициенты:

$$\mu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad \mu_{31} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

При растяжении образцов, вырезанных под углом 45° к главным осям анизотропии, введены следующие обозначения:

μ_1 — коэффициент под углом 45° к осям 1 и 2 ;

μ_2 — коэффициент под углом 45° к осям 2 и 3 ;

μ_3 — коэффициент под углом 45° к осям 3 и 1 .

В случае изотропного тела все $\mu_{ij} = 0,5$. Между коэффициентами анизотропии (поперечной деформации) имеются следующие связи:

$$\mu_{21} + \mu_{31} = 1; \quad \mu_{12} + \mu_{32} = 1; \quad \mu_{13} + \mu_{23} = 1;$$

$$\mu_{12} \mu_{23} \mu_{31} = \mu_{32} \mu_{21} \mu_{13};$$

$$\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} = 1 - 2\mu_{21} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}; \quad \frac{\mu_{32}}{\mu_{23}} = 1 - 2\mu_{12} + \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}.$$

Если провести испытания материала, так чтобы σ_u совпала с одним из главных напряжений, нужно вырезать образец в равнонаклонном по всем направлениям $1, 2, 3$, что практически невозможно, особенно при листовых полуфабрикатах. Поэтому удобно ввести интенсивности напряжений, отнесенные к какому-либо направлению.

Например, ввести $\sigma_{i1} = \sigma_u / \sqrt{K_{1111}}$. Здесь интенсивность напряжений отнесена к направлению 1 (направление проката) и при линейном растяжении $\sigma_{i1} = \sigma_1$. Все это упрощает условие пластичности

$$\sigma_{i1} = \sqrt{\mu_{21}} \sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} + \frac{1}{\mu_{12}} - 2\right) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)}.$$

Между интенсивностями различных направлений существуют следующие связи:

$$\sigma_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \sigma_{i1}; \quad \sigma_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{13}}} \sigma_{i1}; \quad \sigma_{j3} = \sqrt{\frac{\mu_{23}}{\mu_{32}}} \sigma_{j2}.$$

Критерий Р. Мизеса для анизотропной среды хорошо подтверждается экспериментально и может быть выведен теоретическим путем. Геометрически его можно интерпретировать эллиптическим равнонаклоненным цилиндром.

Теории пластичности ортотропного тела можно как и для изотропной среды разбить на две группы:

теории деформационного типа;

теории пластического течения.

В основе этих теорий лежат гипотезы, близкие к изотропной среде, но со своими особенностями. Так, в теории малых упругопластических деформаций первая гипотеза формулируется так же, как и при изотропной среде — объем изменяется чисто упруго. В то же время математическая ее запись имеет такой вид $\sigma_{cp} = k \theta$,

$$\text{но } k = \frac{E_1}{3(1 - \nu_{21} - \nu_{31})} = \frac{E_2}{3(1 - \nu_{12} - \nu_{32})} = \frac{E_3}{3(1 - \nu_{13} - \nu_{23})},$$

где ν_{ij} — коэффициент Пуассона.

В пластической области

$$\nu_{ij} \rightarrow \mu_{ij}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{так как } 1 - \mu_{21} - \mu_{31} = 0.$$

Для теории течения первая гипотеза остается такой же, как и для изотропной среды (условие постоянства объема): $\dot{\epsilon}_{cp} = 0$, где

$\dot{\epsilon}_{cp}$ — средняя скорость деформации.

Если рассматривать вторые гипотезы теорий ортотропной среды, то

$$\bar{D}_\sigma \neq \bar{D}_\epsilon, \quad \text{или} \quad \bar{D}_\sigma \neq \bar{D}_\epsilon,$$

где $\bar{D}_\sigma, \bar{D}_\epsilon, \bar{D}_\epsilon$ — направляющие тензора напряжений, деформаций, скоростей деформаций.

Отсюда также следует, что $\nu_\sigma \neq \nu_\epsilon$ и $\nu_\sigma \neq \nu_\epsilon$, где $\nu_\sigma, \nu_\epsilon, \nu_\epsilon$ — показатели напряженного деформированного состояния.

Эта связь имеет следующий вид:

$$\nu_{\sigma} = \frac{C \nu_{\varepsilon} + 3D}{D \nu_{\varepsilon} + 3}, \text{ или } \nu_{\sigma} = \frac{C \nu_{\varepsilon} + 3D}{D \nu_{\varepsilon} + 3},$$

где $C = 1 - 4\mu_{12} + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}$, а $D = 2\mu_{12} - 1$.

Для изотропной среды все $\mu_{ij} = 0,5$, $D = 0$, $C = 3$ и $\nu_{\sigma} = \nu_{\varepsilon}$.

Как видно, в физической гипотезе и ее математической записи оказывает свое влияние анизотропия материала. Далее нельзя записать, как при изотропном теле, что

$$D_{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{\varepsilon}, \text{ или } D_{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{\varepsilon}.$$

В ортотропном теле подобная связь усложняется и может быть представлена в виде

$$D_{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{\varepsilon} - k \sigma_{ij} \lambda_{ij} D_{\lambda}.$$

Здесь вторая часть выражает анизотропию материала, где D_{λ} — девиатор, отражающий процесс деформирования при получении полуфабриката, например,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Подобная запись будет и при теории течения

$$D_{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{\varepsilon} - k \sigma_{ij} \lambda_{ij} D_{\lambda}.$$

Третья гипотеза также имеет своеобразие при ортотропной среде.

Как отмечалось, для построения функции $\sigma_u = \Phi(e_u)$, или $\sigma_u = \Phi(\dot{e}_u)$ необходимо испытание в равнонаклонном ко всем трем осям направлений. Поэтому в практике строят зависимость в направлении главных осей анизотропии, например, $\sigma_{i1} = \Phi(e_{i1})$. Если строить в направлении 2 (поперек проката), то имеется связь перехода на первое направление, т. е.

$$e_{12} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} e_{11}.$$

Математический аппарат теории имеет подобные уравнения, как и при изотропной среде, но имеет свои отличия, связанные с анизотропией.

Уравнения равновесия описываются полевыми тензорами и не зависят от среды. Следовательно, их вид будет здесь тот же самый

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + x_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

Геометрические соотношения описываются также полевыми тензорами.

При малых деформациях

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

В теории течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

Физические уравнения включают в себя показатели анизотропии и имеют вид (следствие второй гипотезы)

$$\dot{e}_{11} = \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - \mu_{21} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \right];$$

$$\dot{e}_{22} = \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - \mu_{12} (\sigma_{11} - \sigma_{33}) \right];$$

$$\dot{e}_{33} = \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \left[\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} (1 - \mu_{12}) (\sigma_{33} - \sigma_{22}) - (1 - \mu_{21}) (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right];$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \sigma_{12} = \frac{1}{2} \left(1 - 2\mu_{21} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \right) \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \sigma_{12};$$

$$\dot{e}_{23} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \sigma_{23};$$

$$\dot{e}_{31} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{\dot{e}_{11}}{\sigma_{11}} \sigma_{31}.$$

Эти уравнения получены при использовании ассоциированного закона течения

$$de_{ij} = dq \frac{K_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_i}; \quad \sigma_i^2 = K_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}.$$

где $q = \int \sqrt{a_{ijkl} de_{ij} de_{kl}}$ параметр упрочнения.

Здесь a_{ijkl} — обратный к K_{ijkl} материальный тензор, т. е.

$$K_{ijkl} a_{rstkl} = T_{ijkl}.$$

Параметр упрочнения входит в третью гипотезу $\sigma_i = \Phi(q)$.

В частном случае $de_{ij} \rightarrow e_{ij}$, $dq \rightarrow e_i$ и

$\sigma_i = \Phi(e_i)$, или $\sigma_{i1} = \Phi(e_{i1})$, где интенсивность скоростей деформаций имеет вид

$$\dot{e}_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}} \sqrt{\frac{\dot{e}_1^2}{\mu_{12}} + 2 \dot{e}_1 \dot{e}_2 + \frac{\dot{e}_2^2}{\mu_{21}}},$$

или для случая неглавных осей

$$\dot{e}_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left(\frac{\dot{e}_{11}^2}{\mu_{12}} + 2 \dot{e}_{11} \dot{e}_{22} + \frac{\dot{e}_{22}^2}{\mu_{21}} \right) + \frac{4(1 - \mu_1)}{1 - 2\mu_{21} + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}(1 + \mu_1)}} (\dot{e}_{12} + \dot{e}_{23} + \dot{e}_{31}).$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, необходимая для решения задач теории пластичности или обработки металлов давлением.

9. ТЕОРЕМА О РАЗГРУЗКЕ А. ИЛЬЮШИНА

Одним из важных технологических параметров обработки давлением связан с определением точностных характеристик. Это хорошо видно при определении пружинения листового материала

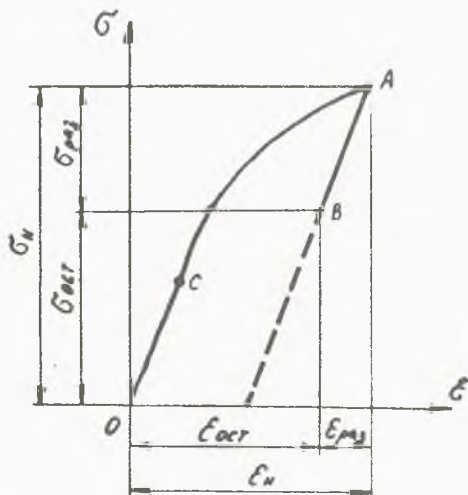


Рис. 18. Схема нагружения и разгрузки: σ_n и ϵ_n — нагрузочные напряжения и деформации; $\sigma_{раз}$ и $\epsilon_{раз}$ — разгрузочные напряжения и деформации; $\sigma_{ост}$ и $\epsilon_{ост}$ — остаточные напряжения и деформации

после процесса штамповки. Одним словом, после снятия нагрузки упругие деформации стараются изменить полученную форму детали. Наиболее это характерно для крупногабаритных обшивок летательных аппаратов. Здесь, как и при получении других деталей гибкой, обтяжкой, необходимо иметь предварительную информацию о возможном характере пружинения (разгрузки). В основе теоретического определения этого фактора лежит теорема о разгрузке А. Ильюшина. Рассмотрим случай линейного растяжения металла и его разгрузку (рис. 18).

Из рис. 18 видно, что после нагрузки до точки A и разгрузки до точки B имеются остаточные напряжения $\sigma_{ост}$ и деформации $\epsilon_{ост}$. Из рис. 18 также очевидно, что величину разгрузки AB , которая идет по упругому закону, можно перенести на начало координат точку O и нагрузить до точки C таким образом, что отрезок $AB = OC$. Эту очевидную картину А. Ильюшин рассмотрел и на случай сложного напряженного состояния в своей теореме о разгрузке. Эта теорема действительна для определения

остаточных деформаций, напряжений или перемещений точек тела. Сформулируем ее для остаточных деформаций, понимая, что в формулировке возможно заменить слово деформация словами напряжение или перемещение. Теорема звучит так: деформации точки тела в определенный момент разгрузки равны разностям между их значениями в момент начала разгрузки и упругими деформациями, которые возникли бы в ненагруженном теле под действием внешних сил, равных разностям нагрузок до и после разгрузки.

Для технологических расчетов наиболее важно следствие из теоремы.

При полном снятии внешних сил для определения остаточных деформаций нужно решить пластическую задачу для данных внешних сил, а также для этих же сил решить упругую задачу (фактически она будет фиктивной). Затем взять разность этих решений.

Чтобы было яснее, рассмотрим пример гибки листа моментом (рис. 19). Для простоты решения возьмем тело неупрочняемым и изотропным.

При гибке листа наружные слои металла будут растянуты, а внутренние — сжаты. Существует слой металла, длина которого не изменяется. Она называется нейтральной.

Естественно после снятия нагрузки все радиусы, в том числе нейтральный, изменяются.

В то же время расчет удобнее вести по нейтральному радиусу. Согласно теореме о разгрузке можно воспользоваться следующими формулами:

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_{\text{н}} - \sigma_{\text{раз}} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_{\text{раз}}$$

Здесь величины под нагрузкой $\sigma_{\text{н}}$ и $\varepsilon_{\text{н}}$ определяются по уравнениям теории пластичности

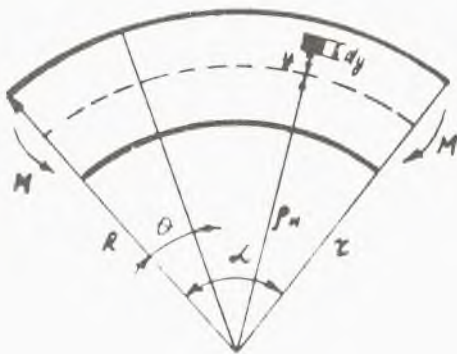


Рис. 19. Гибка листа моментом: R — внешний радиус; r — внутренний радиус; $r_{\text{н}}$ — нейтральный радиус; M — момент гiba; d — элемент материала; y — его расстояние от нейтральной оси

$$\sigma_{\text{н}} = \sigma_{\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s,$$

где $\frac{2}{\sqrt{3}}$ — учитывает плоскую деформацию; $\varepsilon_{\text{раз}}$ и $\sigma_{\text{раз}}$ — определяются по закону Гука:

$$\sigma_{\text{раз}} = \frac{E}{1 - \nu^2} H y.$$

Здесь $H = \frac{1}{\rho_{\text{н}}} - \frac{1}{\rho_{\text{ост}}}$ — изменение кривизны, где $\rho_{\text{ост}}$ — остаточный нейтральный слой, а ν — коэффициент Пуассона. Теперь

$$\sigma_{\text{ост}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s - \frac{E}{1 - \nu^2} H y.$$

Затем определяем остаточный момент:

$$M_{\text{ост}} = \int_{-0,5s}^{0,5s} \sigma_{\text{ост}} y dy,$$

где S — толщина материала.

После интегрирования получим

$$M_{\text{ост}} = \frac{\sigma_s S^2}{2\sqrt{3}} - \frac{E S^3 H}{12(1 - \nu^2)}.$$

Примем допущение, что после разгрузки остаточный момент будет равен нулю. Из этого допущения найдем изменение кривизны:

$$H = \frac{2\sqrt{3}(1 - \nu^2)\sigma_s}{ES}, \text{ или } \frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho_{\text{н}}} - \frac{2\sqrt{3}(1 - \nu^2)\sigma_s}{ES}.$$

Отсюда определим выражение для остаточного радиуса

$$\rho_{\text{ост}} = \frac{\rho_{\text{н}}}{1 - \frac{2\sqrt{3}\sigma_s(1 - \nu^2)}{ES} \rho_{\text{н}}}.$$

Угол пружинения определим из условия сохранения длины нейтрального волокна до и после разгрузки

$$\alpha \rho_H = \alpha_{\text{ост}} \rho_{\text{ост}},$$

где α — угол гiba, а $\alpha_{\text{ост}}$ — остаточный радиус гiba.

Отсюда

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha_{\text{ост}} = \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{\text{ост}}} \right) \alpha.$$

Заменим $\rho_{\text{ост}}$ его значением, получим

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3} \sigma_s}{ES} \rho_H.$$

Для практических целей вместо ρ_H удобно использовать r .

Считая $\rho_H \approx r + 0,5S$, окончательно имеем

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3} \sigma_s (1 - \nu^2)}{E} (\bar{r} + 0,5),$$

где $\bar{r} = \frac{r}{S}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сторожев М. В., Попов Е. А.* Теория обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1971, 424 с.
2. *Джонсон У., Меллор П. Б.* Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
3. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975, 400 с.
4. *Безухов Е. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968, 512 с.
5. Элементы теории упругости и пластичности в авиастроении: Метод. указания /Куйбышев. авиац. ин-т; Сост. Ю. М. Арышенский, В. Р. Каргин. Куйбышев, 1990, 32 с.
6. *Арышенский Ю. М., Гречников Ф. В.* Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов. М.: Металлургия, 1992, 304 с.
7. *Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.* Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1969, 504 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
1. Основные гипотезы и допущения механики сплошной среды	5
2. Силы и напряжения	10
3. Понятие о тензоре и некоторые элементы тензорного исчисления	14
4. Перемещения и деформации	22
5. Обобщенный закон Гука	32
6. Частные случаи объемного напряженного состояния	38
7. Условия перехода металла в пластическое состояние. Критерии пластичности	44
8. Элементы теории пластичности ортотропных сред	50
9. Теорема о разгрузке А. Ильюшина	58
Библиографический список	61