

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

И.В. БЕЛОКОНОВ, И.А. ТИМБАЙ

ДВИЖЕНИЕ НАНОСПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НА ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТАХ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2020

УДК 629.78(075)

ББК 39.6я7

Б435

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю. М. Заболотнов,
д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов

Белоконов, Игорь Витальевич

Б435 Движение наноспутника относительно центра масс на околоземных орбитах: учебное пособие / И.В. Белоконов, И.А. Тимбай. – Самара: Издательство Самарского университета, 2020. – 128 с.

ISBN 978-5-7883-1495-2

Рассмотрены особенности движения наноспутников на околоземных орбитах, обусловленные присущими им геометрическими размерами и массово-инерционными характеристиками.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика (уровень бакалавриата), 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика (уровень магистратуры). Подготовлено на межвузовской кафедре космических исследований.

УДК 629.78(075)

ББК 39.6я7

ISBN 978-5-7883-1495-2

© Самарский университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1 Уравнения движения относительно центра масс	
наноспутника	12
1.1 Динамические уравнения	12
1.2 Системы координат	13
1.3 Кинематические соотношения	16
1.4 Возмущающие моменты, действующие на наноспутник	17
1.5 Гравитационный момент	18
1.6 Аэродинамический момент	23
1.7 Магнитный момент	27
1.8 Начальные условия углового движения наноспутника	30
Глава 2 Плоское угловое движение наноспутника на круговой	
орбите под действием гравитационного и аэродинамического	
моментов	32
2.1 Математическая модель плоского углового движения.....	32
2.2 Фазовые портреты	34
2.3 Переходные режимы движения	38
2.4 Законы распределения максимального угла атаки	41
2.5 Качественный анализ движения относительно центра масс	
неуправляемого наноспутника	46
Глава 3 Пространственное движение относительно центра масс	
наноспутника	48
3.1 Отделение наноспутника от стабилизированной	
вращением платформы. Закон распределения начального значения	
угла атаки	48
3.2 Регулярная прецессия наноспутника. Законы распределения	
угла полураствора конуса прецессии и скорости прецессии.....	53
3.3 Пространственное движение аэродинамически стабилизированного	
наноспутника относительно центра масс	60
3.3.1 <i>Нерезонансный случай движения аэродинамически</i>	
<i>стабилизированного наноспутника</i>	<i>61</i>
3.3.2 <i>Резонансный случай движения аэродинамически</i>	
<i>стабилизированного наноспутника</i>	<i>67</i>

Глава 4 Методы и системы пассивной стабилизации	78
4.1 Постановка задачи. Классификация систем стабилизации 78
4.2 Аэродинамическая стабилизация по вектору скорости 82
4.3 Аэродинамически-гравитационная трёхосная стабилизация	... 86
4.4 Гравитационная одноосная стабилизация по местной вертикали	92
4.5 Гравитационная трёхосная стабилизация	95
4.6 Гравитационно-аэродинамическая трёхосная стабилизация	102
4.7 Стабилизация вращением	107
Глава 5 Анализ движения наноспутника формата CubeSat по траекторным измерениям	112
5.1 Постановка задачи	112
5.2 Методика оценки баллистического коэффициента	114
5.3 Анализ движения	117
Библиографический список	121

ВВЕДЕНИЕ

Создание космических аппаратов нанокласса является доминирующим трендом развития космической техники в настоящее время. Несмотря на большой объём исследований, проведённых с начала космической эры до настоящего времени в области анализа движения космических аппаратов, возникновение нового класса космической техники – наноспутников формата CubeSat, требует возвращения к рассмотрению основных положений их движения, которые характеризуются рядом особенностей, обусловленных комплексом факторов – геометрическими размерами, форм-фактором параллелепипеда, массово-инерционными характеристиками, типом орбит выведения (низкие орбиты, на которых влияние аэродинамических сил является доминирующим), условиями выведения на орбиту в рамках попутных запусков (возникновение больших угловых скоростей после выхода из пускового контейнера).

Проведение большинства научных и прикладных исследований в космосе предполагает обеспечение определённой ориентации углового положения наноспутника в пространстве. Для обеспечения требуемой ориентации наноспутников часто используются пассивные или комбинированные (пассивные в сочетании с активными) системы стабилизации, которые не требуют совсем или требуют незначительного расхода рабочего тела и энергии, запасённых на борту.

Важной задачей при создании любой пассивной системы пространственной ориентации является исследование неуправляемого

движения наноспутника относительно центра масс, так как обеспечение расчетных условий углового движения осуществляется только на этапе проектирования, путем выбора его конструктивных параметров, а также заданием ограничений на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения.

Следует отметить следующие особенности движения наноспутников на низких орбитах [1].

1. Для наноспутника значение баллистического коэффициента больше, чем для спутника с большими размерами и массой (при одинаковой объёмной плотности), и, следовательно, меньше срок его существования на орбите. Это даёт возможность, учитывая небольшой срок активной работы наноспутника (обычно от полугода до года), эффективно использовать достаточно низкие орбиты, избегая засорения околоземного космического пространства.

Для примера, проведём сравнение баллистических коэффициентов наноспутника формата CubeSat 1U (куб: $0,1 \times 0,1 \times 0,1 \text{ м}^3$) и мини-спутника (куб: $1 \times 1 \times 1 \text{ м}^3$), линейные размеры которого в N раз больше размеров наноспутника CubeSat 1U. Как известно, при допущении, что обтекание спутника является свободномолекулярным и удар молекул газа абсолютно неупругий, баллистический коэффициент спутника определяется по формуле $\sigma_x = c_0 \tilde{S} S / m$, где $c_0 = 2,2$ – коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности наноспутника, для проектных проработок принимается равным 2,2; \tilde{S} – площадь проекции наноспутника на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, отнесённая к ха-

рактерной площади наноспутника S ; m – масса спутника [2]. Тогда отношение баллистических коэффициентов наноспутника CubeSat 1U σ_c и указанного мини-спутника σ_m определяются N -кратным обратным отношением их объемных плотностей: $\sigma_c / \sigma_m = N(\gamma_m / \gamma_c)$. При этом следует отметить, что объемная плотность малоразмерных спутников, как правило, выше объемной плотности большеразмерных спутников.

На рис. В1 показано изменение высоты орбит спутников «Михайло Ломоносов», Аист-2Д и наноспутника SamSat-218Д, которые были совместно выведены на околокруговую орбиту со средней высотой полёта $H = 486$ км с космодрома Восточный 28 апреля 2016 года (на временном интервале 28 апреля 2016 года – 24 ноября 2018 года).

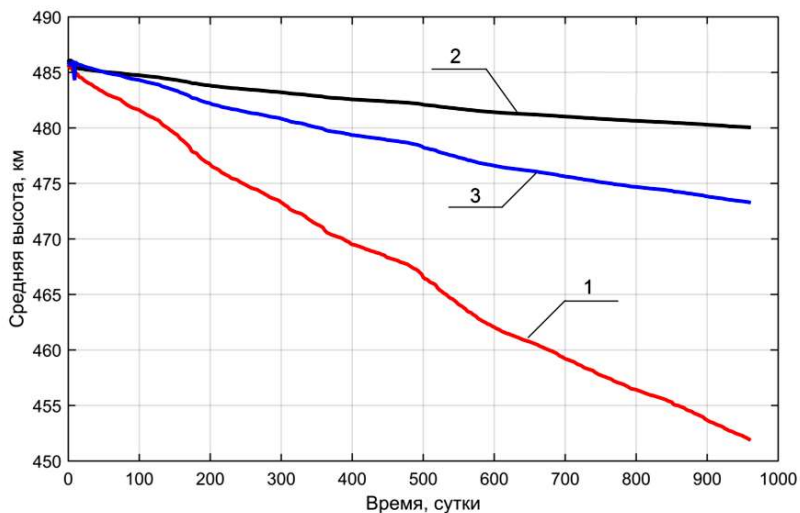


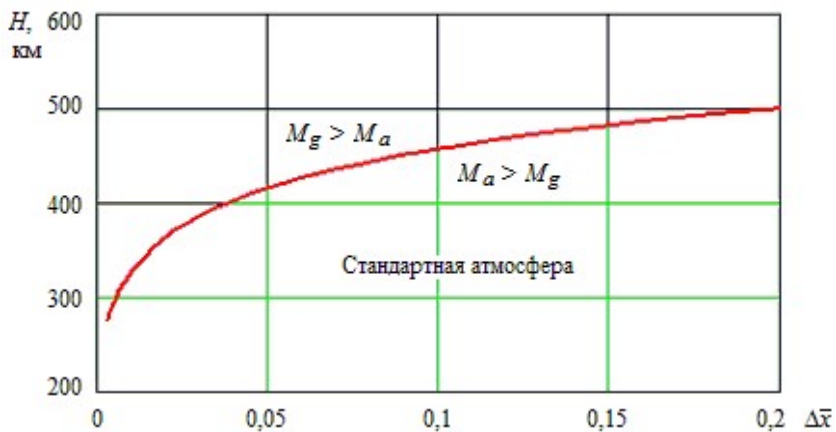
Рис. В1. Изменение высоты орбит: 1 – наноспутник SamSat-218Д, 2 – малый КА «Михайло Ломоносов», 3 – малый КА Аист-2Д

Как видно из графиков, уменьшение высоты полета наноспутника SamSat-218Д в 2,7 раза больше, чем у спутника Аист-2Д, и в 5,7 раза больше, чем у спутника «Михайло Ломоносов». При этом такие числовые отношения приближенно сохраняются и для усредненных значений баллистических коэффициентов.

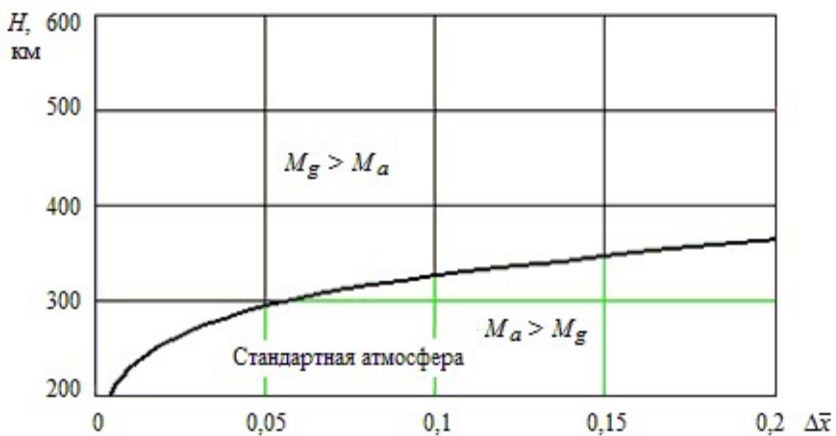
2. Угловое ускорение наноспутника, обусловленное аэродинамическим моментом, значительно выше, чем спутника с большими размерами и массой (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объёмной плотности). Это расширяет диапазон высот, на которых аэродинамический момент, действующий на наноспутник, является значимым и его можно использовать для пассивной стабилизации наноспутника по вектору скорости движения центра масс.

К примеру, отношение обусловленных аэродинамическим моментом угловых ускорений наноспутника формата CubeSat 1U и мини-спутника, линейные размеры которого в N раз больше размеров наноспутника CubeSat 1U, определяется N^2 -кратным обратным отношением их объёмных плотностей (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости).

Так, на рис. В2 показаны области высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\bar{x} = \Delta x / l$ (Δx – запас статической устойчивости, l – характерная длина наноспутника), где аэродинамический момент M_a превосходит гравитационный M_g , для наноспутника формата CubeSat 3U (рис. В2, а) и мини-спутника (рис. В2, б), размеры которого в 10 раз больше размеров наноспутника CubeSat 3U (расчеты проводились для стандартной атмосферы [3]).



a



б

Рис. В2. Область значений высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\bar{x}$, где аэродинамический момент M_a превосходит гравитационный M_g для наноспутника CubeSat 3U (*a*); для спутника, размеры которого в 10 раз больше размеров наноспутника CubeSat 3U (*б*)

3. Следует принимать во внимание, что существующие коммерческие транспортно-пусковые устройства отделения наноспутников порождают большие величины начальной угловой скорости (например, системы отделения, которые использовались в международном проекте QB50, порождают угловую скорость наноспутника после выхода из контейнера до $50^\circ/\text{с}$ [4]) Кроме того, при запуске наноспутников с платформ, осуществляющих неконтролируемое движение, необходимо дополнительно учитывать случайный характер углового движения этих платформ. Например, верхняя ступень ракеты-носителя «Союз» после отделения основной полезной нагрузки совершает регулярную прецессию со случайными величинами углов ориентации и угловых скоростей [5, 6].

4. Необходимо отметить возможность возникновения резонансных режимов движения у наноспутников, совершающих полёт на низких орбитах. Для наноспутников стандарта CubeSat, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения [7], а это создаёт предпосылки возникновения резонанса, который проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по углу атаки, когда целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю [1].

Указанные особенности движения наноспутников на низких орбитах обуславливают необходимость применения вероятностного подхода к решению задачи исследования движения относительно центра масс. Данный подход применялся при создании наноспутников в Самарском университете. С 2014 года в Самарском университете велись разработки двух наноспутников формата CubeSat 3U. Первый из них – SamSat-218Д [8] – был предназначен

для отработки технологии создания замкнутого контура управления его пространственной ориентацией при наличии специально созданного большого запаса статической устойчивости. Второй – SamSat-QB50 [9] – был создан в рамках международного университетского проекта и предназначался для исследования тропосферы Земли в составе группировки наноспутников формата CubeSat [4] с использованием разработанной технологии синтеза проектных параметров, основанной на искусственном создании требуемого запаса статической устойчивости путем трансформирования конструкции и развертывания аэродинамического стабилизатора.

ГЛАВА 1 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НАНОСПУТНИКА

1.1 Динамические уравнения

Движение наноспутника относительно центра масс как твёрдого тела может быть, согласно теореме об изменении кинетического момента, описано векторным уравнением в инерциальной системе координат (СК) [10]:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o^e. \quad (1.1)$$

или в связанной системе координат $Oxyz$:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_o = \bar{M}_o^e, \quad (1.2)$$

где $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость, $\bar{K}_o = J\bar{\omega}$ – вектор кинетического момента, J – тензор инерции, \bar{M}_o^e – главный момент внешних сил.

Пусть оси связанной СК $Oxyz$ являются главными центральными осями инерции наноспутника для точки O . Тогда векторное уравнение (1.2) в проекциях на данные оси запишется в виде:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_y, \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где M_x , M_y , M_z – проекции главного момента внешних сил на оси СК $Oxyz$; ω_x , ω_y , ω_z – проекции угловой скорости $\bar{\omega}$ на оси СК $Oxyz$; J_x , J_y , J_z – главные центральные моменты инерции наноспутника.

Отметим, что под движением тела относительно его центра масс понимается движение точек тела относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс тела (относительно так называемой кёниговой СК).

Уравнения (1.3) называются динамическими уравнениями Эйлера. Динамические уравнения Эйлера необходимо дополнить кинематическими.

1.2 Системы координат

Проведение большинства научных исследований в космосе предполагают вполне определённую ориентацию углового положения наноспутника в пространстве.

Для определённости за основной вариант ориентации наноспутника в пространстве примем аэродинамическую систему ориентации по направлению вектора скорости движения центра масс.

Определим системы координат.

$OXYZ$ – орбитальная система координат, центр O находится в центре масс наноспутника, ось OZ направлена от притягивающего центра O_E по направлению радиуса вектора наноспутника \bar{r} , ось OY совпадает с направлением вектора производной истинной аномалии \bar{v} (направлена по бинормали к траектории центра масс в ту сторону, откуда его движение видно совершающимся против часовой стрелки), ось OX дополняет СК до правой (рис. 1.1).

Введём траекторную систему координат $OX_k Y_k Z_k$, ось OX_k которой совпадает с вектором скорости наноспутника \bar{V} , ось OZ_k располагается в местной вертикальной плоскости и направлена вверх от поверхности планеты, а ось OY_k дополняет систему до правой. Угол наклона траектории θ_M – угол между осями OX_k и OX (рис. 1.1).

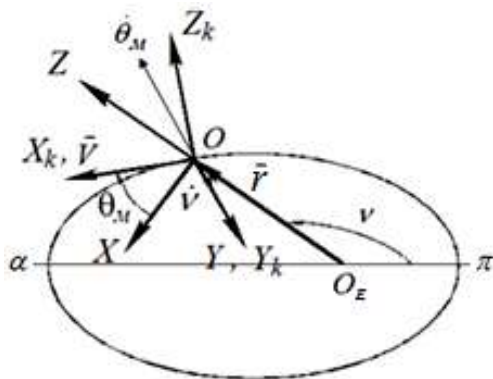


Рис. 1.1

Связь между траекторной системой координат $OX_k Y_k Z_k$ и связанной $Oxyz$ определим с помощью углов Эйлера: угла прецессии $\psi \in [0, 2\pi]$, угла нутации – пространственного угла атаки $\alpha_n \in [0, \pi]$ и угла собственного вращения $\varphi \in [0, 2\pi]$. Взаимное расположение выбранных систем координат показано на рис. 1.2. Промежуточные СК: $OX_a Y_a Z_a$ – скоростная, $OX_n Y_n Z_n$ – связанная с пространственным углом атаки.

Обозначим матрицы поворотов.

$$\text{Вокруг оси } OY \text{ на угол } \theta_M: \quad A(\theta_M) = \begin{bmatrix} \cos \theta_M & 0 & \sin \theta_M \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_M & 0 & \cos \theta_M \end{bmatrix}.$$

Переход от $OXYZ$ к $OX_k Y_k Z_k$.

$$\text{Вокруг оси } OX_k \text{ на угол } \psi: \quad A(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Переход от $OX_k Y_k Z_k$ к $OX_a Y_a Z_a$.

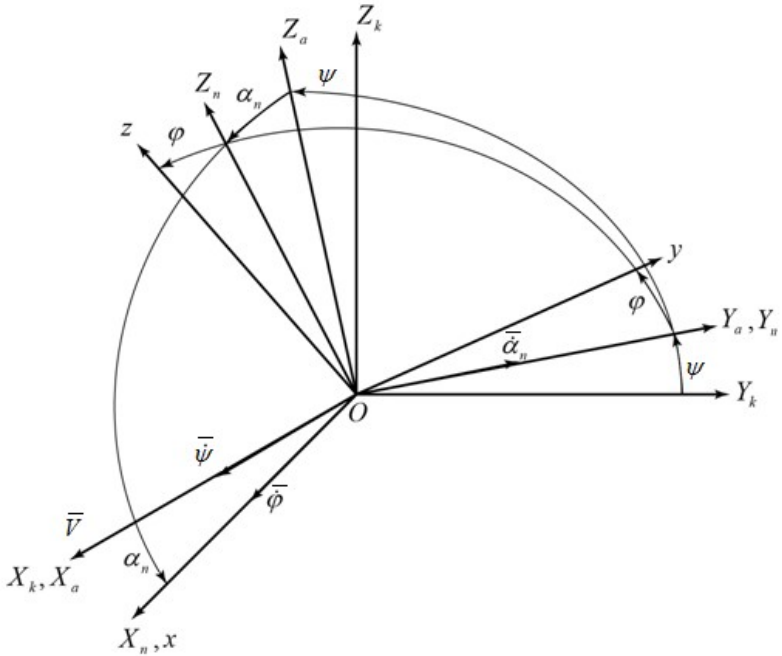


Рис. 1.2

Вокруг оси OY_a на угол α_n : $A(\alpha_n) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & 0 & -\sin \alpha_n \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_n & 0 & \cos \alpha_n \end{bmatrix}$.

Переход от $OX_aY_aZ_a$ к $OX_nY_nZ_n$.

Тогда матрица перехода от скоростной $OX_aY_aZ_a$ СК к связанной с наноспутником СК $Oxyz$:

$$A = A(\varphi)A(\alpha_n)$$

или

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & 0 & -\sin \alpha_n \\ \sin \alpha_n \sin \varphi & \cos \varphi & \cos \alpha_n \sin \varphi \\ \sin \alpha_n \cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \alpha_n \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода от траекторной СК $OX_k Y_k Z_k$ к связанной СК $Oxyz$ определяется по формуле:

$$B = A \cdot A(\psi)$$

или

$$B = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \sin\psi & -\sin\alpha_n \cos\psi \\ \sin\alpha_n \sin\varphi & \cos\varphi \cos\psi - \cos\alpha_n \sin\varphi \sin\psi & \cos\varphi \sin\psi + \cos\alpha_n \sin\varphi \cos\psi \\ \sin\alpha_n \cos\varphi & -\sin\varphi \cos\psi - \cos\alpha_n \cos\varphi \sin\psi & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\alpha_n \cos\varphi \cos\psi \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода от орбитальной $OXYZ$ к связанной с наноспутником СК $Oxyz$:

$$C = B \cdot A(\theta_m).$$

1.3 Кинематические соотношения

Дополним динамические уравнения (1.3) тремя кинематическими уравнениями, связывающими первые производные по времени Эйлеровых углов ψ , φ , α_n , и с проекциями вектора абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ на связанные оси ω_x , ω_y и ω_z .

Учитывая, что мгновенная угловая скорость равна сумме угловых скоростей составляющих вращений

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\alpha}}_n + \vec{\dot{v}} + \vec{\dot{\theta}}_m,$$

кинематические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos\alpha_n + \dot{\varphi} + (\dot{v} - \dot{\theta}_m) b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\varphi \sin\alpha_n + \dot{\alpha}_n \cos\varphi + (\dot{v} - \dot{\theta}_m) b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\varphi \sin\alpha_n - \dot{\alpha}_n \sin\varphi + (\dot{v} - \dot{\theta}_m) b_{32}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где b_{12}, b_{22}, b_{32} – элементы матрицы перехода В.

Производные истинной аномалии и угла наклона траектории определяются по формулам [11]:

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (1 + e \cos v)^2,$$

$$\dot{\theta}_m = \frac{[\dot{e} \sin v + (e \cos v + e^2) \dot{v}] \cos^2 \theta_m}{(1 + e \cos v)^2},$$

где p – фокальный параметр орбиты, e – эксцентриситет орбиты, μ – гравитационный параметр Земли.

Производные фокального параметра орбиты и эксцентриситета орбиты определяются по формулам [11]:

$$\dot{p} = 2r \frac{\sqrt{p}}{\mu} \Phi_1,$$

$$\dot{e} = \frac{\sqrt{p}}{\mu} \left\{ \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos v + e \frac{r}{p} \right] \Phi_1 + \sin v \Phi_2 \right\},$$

где $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ – длина радиуса вектора спутника; Φ_1 – проекция вектора возмущающего ускорения, действующего на центр масс наноспутника, на трансверсаль (ось OX орбитальной СК); Φ_2 – проекция вектора возмущающего ускорения, действующего на центр масс наноспутника, на радиальное направление в точке, в которой находится наноспутник (ось OZ орбитальной СК).

Динамические уравнения Эйлера (1.3) и кинематические соотношения (1.4) составляют полную систему уравнений движения относительно центра масс наноспутника.

1.4 Возмущающие моменты, действующие на наноспутник

При орбитальном полёте наноспутника на него действуют возмущающие моменты следующего рода: гравитационный момент; аэродинамический момент; момент от давления солнечных

лучей; момент от ударов метеоритных частиц; магнитный момент; реактивный момент, возникающий в результате истечения газа из корпуса наноспутника; момент от внутренних движущихся масс и наличие гибких элементов конструкции. Рассмотрим основные моменты: гравитационный момент, аэродинамический момент, магнитный момент.

1.5 Гравитационный момент

Определим гравитационный момент в соответствии с [10]. В обычных, «земных» задачах механики, связанных с ее применениями к устройствам, функционирующим вблизи или на поверхности Земли, силы притяжения, приложенные к двум материальным точкам равных масс, считаются равными и по величине, и по направлению. Это приводит к известному положению о совпадении центра масс и центра тяжести и, как следствие, к равенству нулю главного момента сил тяготения (гравитационного момента) относительно центра масс.

В действительности силы притяжения различных точек тела Землей, как правило, не будут параллельными, так как они направлены к ее центру. Кроме того, разные точки тела находятся, вообще, на разных расстояниях от центра Земли. По этим причинам силы тяготения не обязательно должны приводиться к равнодействующей, проходящей через центр масс тела: возможен еще и гравитационный момент относительно центра масс. Появление гравитационного момента можно пояснить очень простым примером. Пусть две точки P_1 и P_2 одинаковых масс соединены жестким стержнем пренебрежимо малой массы. Пусть O – середина стержня (центр масс точек P_1 и P_2), а O_E – притягивающий центр

(рис. 1.3). Пусть $O_E P_1 > O_E P_2$, тогда если h_1 – плечо силы F_1 , а h_2 – плечо силы F_2 относительно точки O , то из сравнения площадей треугольников $O_E P_1 O$ и $O_E P_2 O$ получим:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{O_E P_1}{O_E P_2} > 1.$$

Отсюда и из неравенства $F_2 > F_1$, справедливого при $O_E P_1 > O_E P_2$, следует, что $F_2 h_2 > F_1 h_1$. Таким образом, появляется момент, стремящийся расположить стержень $P_1 P_2$ вдоль прямой $O_E O$.

В обычных «земных» условиях гравитационные моменты малы по сравнению с другими воздействиями. В задачах же небесной механики они часто играют решающую роль. Например, движение Луны относительно центра масс почти полностью определяется гравитационными моментами, обусловленными притяжением Земли.

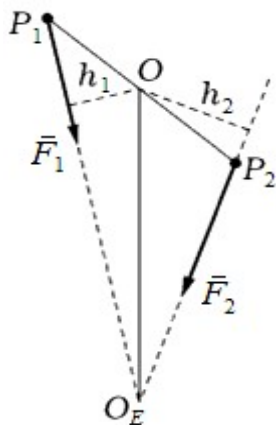


Рис. 1.3

Пусть \vec{r}_{dm} – радиус-вектор выделенного в теле малого элемента массой dm (рис. 1.4). Сила притяжения элемента dm определяется по формуле

$$d\vec{F} = -\mu \frac{dm}{r_{dm}^3} \vec{r}_{dm}. \quad (1.5)$$

Главный вектор \vec{F} сил притяжения тела получается из (1.5) путем интегрирования по всему объему тела. Произведем вычисления, считая линейные размеры тела много меньшими расстояния от центра масс тела до притягивающего центра. Это предположение вполне приемлемо для естественных и искусственных спутников планет.

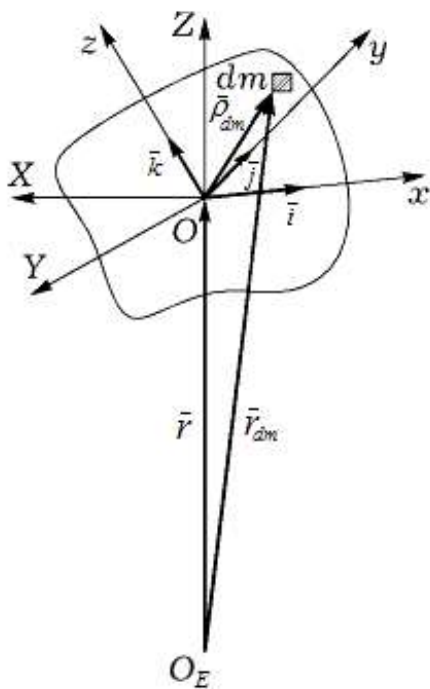


Рис. 1.4

Пусть $\bar{\rho}_{dm}$ – радиус-вектор элемента dm , а X, Y, Z – его компоненты в орбитальной системе координат. Тогда

$$\bar{r}_{dm} = \bar{r} + \bar{\rho}_{dm}, \quad r_{dm} = r \sqrt{1 + 2 \frac{Z}{r} + \frac{\rho_{dm}^2}{r^2}}. \quad (1.6)$$

Если пренебречь величинами порядка (ρ_{dm}^2 / r^2) и выше, то из (1.6) получим разложение величины $1 / r_{dm}^3$ в ряд Тейлора в виде

$$\frac{1}{r_{dm}^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3Z}{r} \right). \quad (1.7)$$

Теперь надо величину \bar{r}_{dm} из (1.6) и величину $1 / r_{dm}^3$ из (1.7) подставить в формулу (1.5) и произвести интегрирование по всему объему тела. При этом следует учесть, что, так как центр масс тела находится в начале координат, то

$$\int X dm = \int Y dm = \int Z dm = 0.$$

Произведя интегрирование, получим, что с упомянутой точностью главный вектор сил тяготения задается формулой

$$\bar{F} = -\mu \frac{m}{r^3} \bar{r},$$

где m – масса тела. Отсюда следует, что если пренебречь величинами порядка $(\rho_{dm} / r)^2$ и выше, то размеры тела не влияют на величину и направление главного вектора сил тяготения. Следовательно, в рассматриваемом приближении можно считать, что центр масс движется по коническому сечению.

Найдем теперь гравитационный момент. На основании формулы (1.5) для главного момента \bar{M}_g сил тяготения относительно центра масс получаем выражение

$$\bar{M}_g = \int \bar{\rho}_{dm} \times d\bar{F} = -\mu \int \frac{\bar{\rho}_{dm} \times \bar{r}_{dm}}{r_{dm}^3} dm, \quad (1.8)$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Вычисление интеграла (1.8) проведем, используя систему координат $Oxyz$.

В этой системе

$$\bar{\rho}_{dm} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{r} = r(c_{13}\bar{i} + c_{23}\bar{j} + c_{33}\bar{k}), \quad (1.9)$$

$$\bar{r}_{dm} = \bar{r} + \bar{\rho}_{dm} = (x + rc_{13})\bar{i} + (y + rc_{23})\bar{j} + (z + rc_{33})\bar{k}, \quad (1.10)$$

$$\bar{\rho}_{dm} \times \bar{r}_{dm} = r[(yc_{33} - zc_{23})\bar{i} + (zc_{13} - xc_{33})\bar{j} + (xc_{23} - yc_{13})\bar{k}]. \quad (1.11)$$

Если в разложении величины $1/r_{dm}^3$ в ряд Тейлора пренебречь величинами порядка $(\rho_{dm}/r)^2$ и выше, то получим

$$\frac{1}{r_{dm}^3} = \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{r}(xc_{13} + yc_{23} + zc_{33}) \right]. \quad (1.12)$$

С той же точностью из (1.11) и (1.12) получаем

$$\frac{\bar{\rho}_{dm} \times \bar{r}_{dm}}{r_{dm}^3} = \frac{1}{r^2} \left[1 - \frac{3}{r}(xc_{13} + yc_{23} + zc_{33}) \right] [(yc_{33} - zc_{23})\bar{i} + (zc_{13} - xc_{33})\bar{j} + (xc_{23} - yc_{13})\bar{k}]. \quad (1.13)$$

Подставим это выражение в формулу (1.8) и произведем интегрирование. Так как оси Ox , Oy , Oz являются главными центральными осями инерции тела, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int x dm &= \int y dm = \int z dm = 0, \\ \int xy dm &= \int xz dm = \int yz dm = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Произведя интегрирование и учтя равенства (1.14), получим

$$\bar{M}_g = \frac{3\mu}{r^3} \int [(y^2 - z^2)c_{23}c_{33}\bar{i} + (z^2 - x^2)c_{33}c_{13}\bar{j} + (x^2 - y^2)c_{13}c_{23}\bar{k}] dm. \quad (1.15)$$

Замечая, что

$$\int (y^2 - z^2) dm = J_z - J_y, \quad \int (z^2 - x^2) dm = J_x - J_z, \quad \int (x^2 - y^2) dm = J_y - J_x,$$

получаем из (1.15) такие выражения для проекций M_{gx} , M_{gy} , M_{gz} гравитационного момента на оси Ox , Oy и Oz , связанной с телом системы координат:

$$M_{gx} = \frac{3\mu}{r^3} (J_z - J_y) c_{23} c_{33}, \quad M_{gy} = \frac{3\mu}{r^3} (J_x - J_z) c_{33} c_{13},$$

$$M_{gz} = \frac{3\mu}{r^3} (J_y - J_x) c_{13} c_{23}.$$
(1.16)

Отметим, что выражения (1.16) являются приближенными. В них отброшены величины, порядок которых не ниже $(\rho_{dm}/r)^2$.

1.6 Аэродинамический момент

При движении спутника в разреженных слоях атмосферы из-за взаимодействия молекулярного потока с оболочкой спутника возникает ряд эффектов в движении спутника относительно центра масс. Отметим некоторые из возможных эффектов [2].

1. Центр давления не совпадает с центром масс. Возникает восстанавливающий (опрокидывающий) момент. При этом вектор-скорость набегающего потока не лежит в плоскости орбиты, так как Земля вращается и увлекает атмосферу, а плоскость орбиты можно считать неподвижной. Указанный момент стремится стабилизировать спутник по направлению набегающего потока.

2. Наличие скорости собственного вращения обуславливает появление диссипативных моментов, вызывающих торможение вращения спутника, и некоторые другие эффекты.

3. Плотность атмосферы неодинакова в каждой точке поверхности спутника (ближе к Земле – плотнее), что вызывает добавочный малый момент (градиентный эффект).

4. Существует еще малый эффект, связанный с наличием собственных тепловых скоростей молекул.

Тепловыми скоростями молекул можно пренебречь (они в среднем весьма малы по сравнению со скоростью движения спутника по орбите); градиентный эффект также не будем рассматривать. Определим восстанавливающий момент.

Будем полагать, что режим обтекания наноспутника газом является свободномолекулярным, т.е. считать, длина свободного пробега молекул газа значительно больше характерных размеров наноспутника. Механизм взаимодействия молекул набегающего потока с поверхностью спутника следующий. Частица при соударении отдает практически всю свою энергию и приходит в температурное равновесие с местом удара (несколько теперь нагретым). Когда это нагревание пройдет, частица выходит в пространство с тепловой скоростью, равной тепловой скорости молекул оболочки спутника. Так как эта тепловая скорость существенно меньше тепловой скорости наружных частиц, то можно идеализировать эту картину гипотезой абсолютно неупругого удара, когда частицы полностью теряют свою энергию при столкновении со спутником (и не отражаются).

В этом случае, аэродинамическая сила лобового сопротивления приложена в геометрическом центре наноспутника и определяется площадью проекции наноспутника на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [2]:

$$\bar{Q}_{xv} = -c_0 \tilde{S} q S \bar{e}_v, \quad (1.17)$$

где $q = q(H) = \rho(H)[V(H)]^2 / 2$ – скоростной напор, $V(H) = \sqrt{\mu/(R_3 + H)}$ – скорость полёта; H – высота полёта, $\rho(H)$ – плотность атмосферы, R_3 – радиус Земли, \bar{e}_v – единичный вектор по направлению вектора скорости центра масс (рис. 1.5).

Для наноспутников, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, величина \tilde{S} определяется по формуле [7]

$$\tilde{S} = |\cos(\alpha_n)| + k_s \sin(\alpha_n) \cdot (|\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)|), \quad (1.18)$$

где k_s – отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади.

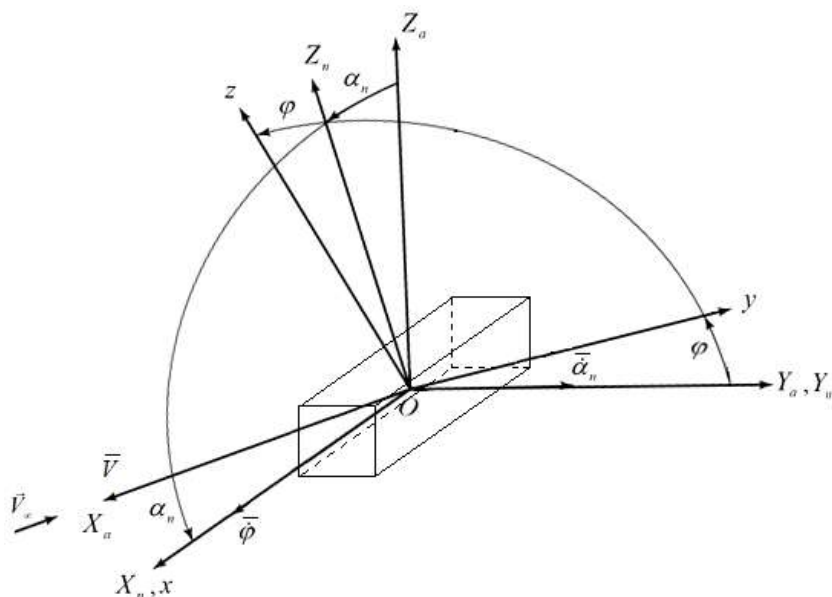


Рис. 1.5

Для наноспутников, имеющих форму отличную от прямоугольного параллелепипеда, например, за счёт раскрытия солнечных панелей, значения величины \tilde{S} можно определить с использованием САПР.

Определим положение центра давления (геометрического центра) наноспутника относительно центра масс в связанной с наноспутником СК $Oxyz$ радиус-вектором $\vec{r}_d = x_d \vec{i} + y_d \vec{j} + z_d \vec{k}$.

Определим положение центра масс относительно геометрического центра наноспутника в СК, полученной параллельным переносом осей системы $Oxyz$ в геометрический центр $\bar{r}_g = \Delta x \bar{i} + \Delta y \bar{j} + \Delta z \bar{k}$, при этом $\bar{r}_g = -\bar{r}_d$.

Момент аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс определяется выражением:

$$\bar{M}_a = \bar{r}_d \times \bar{Q}_{xv} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_d & y_d & z_d \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

где проекции аэродинамической силы лобового сопротивления на оси связанной СК $Oxyz$, учитывая матрицу перехода от траекторной СК $OX_k Y_k Z_k$ к связанной СК $Oxyz$, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_{xv} \cos \alpha_n, \\ Q_y &= Q_{xv} \sin \alpha_n \sin \varphi, \\ Q_z &= Q_{xv} \sin \alpha_n \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс равны:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= Q_{xv} \sin \alpha_n \cos \varphi y_d - Q_{xv} \sin \alpha_n \sin \varphi z_d, \\ M_{ay} &= Q_{xv} \cos \alpha_n z_d - Q_{xv} \sin \alpha_n \cos \varphi x_d, \\ M_{az} &= Q_{xv} \sin \alpha_n \sin \varphi x_d - Q_{xv} \cos \alpha_n y_d. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Рассмотрим случай, когда центр масс лежит на продольной оси наноспутника ($x_d \neq 0$, $y_d = 0$, $z_d = 0$). Тогда проекции момента аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс на оси связанной СК $Oxyz$ равны:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= 0, \\ M_{ay} &= -Q_{xv} \sin \alpha_n \cos \varphi x_d, \\ M_{az} &= Q_{xv} \sin \alpha_n \sin \varphi x_d. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Момент аэродинамической силы лобового сопротивления относительно центра масс, действующий в плоскости $OX_n Z_n$, можно записать в виде

$$M_a = -Q_{xv} x_d \sin \alpha_n = Q_{xv} \Delta x \sin \alpha_n = -c_0 \tilde{S} \Delta \bar{x} q S l \sin \alpha_n = m_\alpha(\alpha_n, \varphi) q S l, \quad (1.23)$$

где коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента, вычисленный относительно центра масс, определяется по формуле

$$m_\alpha(\alpha_n, \varphi) = -c_0 \left[|\cos(\alpha_n)| + k_s \sin(\alpha_n) (|\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)|) \right] \Delta \bar{x} \sin(\alpha_n). \quad (1.24)$$

1.7 Магнитный момент

Определим магнитный момент в соответствии с [2].

Магнитный момент, возникающий в результате взаимодействия геомагнитного поля Земли с магнитным полем наноспутника, определяется следующим векторным произведением

$$\bar{M}_{mg} = \bar{H}_E \times \bar{I}, \quad (1.25)$$

где \bar{H}_E – вектор магнитной напряжённости Земли в месте расположения наноспутника, \bar{I} – магнитный момент собственного магнитного поля наноспутника.

Для осесимметричного наноспутника магнитный момент можно определить по формуле

$$\bar{M}_{mg} = \bar{H}_E \times (\bar{I}_0 + \bar{I}_1) = \bar{H}_E \times \left\{ I_0 + \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} v (\bar{H}_E \cdot \bar{k}) \right\} \bar{k}. \quad (1.26)$$

Здесь \bar{I}_0 – постоянный магнитный момент, обусловленный наличием токовых систем на наноспутнике и постоянных магнитах в приборах, полагаем, что \bar{I}_0 направлен вдоль оси симметрии; \bar{k} – единичный вектор вдоль оси симметрии; \bar{I}_1 – магнитный мо-

мент, обусловленный намагничиванием оболочки наноспутника в магнитном поле Земли; μ_0 – магнитная проницаемость, ν – объём оболочки наноспутника. Будем считать, что \vec{l}_1 направлен вдоль оси симметрии наноспутника.

При движении центра масс наноспутника по орбите вектор геомагнитной напряженности \vec{H}_E , изменяясь в каждой точке орбиты, вообще говоря, весьма сложным образом перемещается в пространстве. Годограф вектора напряженности лежит на некоторой конической поверхности. В тех случаях, когда предпочтительна простота описания поля, а не высокая точность его аппроксимации, вполне достаточным является дипольное приближение.

Для дипольной модели геомагнитного поля вектор напряженности дипольного поля в точке пространства с радиусом-вектором \vec{r} может быть представлен в виде

$$\vec{H}_E = \frac{\mu_E}{r^3} \left[\vec{k}_E - 3(\vec{k}_E \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r \right], \quad (1.27)$$

где \vec{k}_E направление оси магнитного диполя Земли, примем для простоты, что \vec{k}_E совпадает с осью Земли, μ_E – величина магнитного момента земного диполя, \vec{e}_r – единичный вектор по направлению радиуса вектора \vec{r} орбиты.

Орбиту наноспутника будем считать кеплеровским эллипсом с наклоном i , эксцентриситетом e и радиусом-вектором \vec{r} . Введём систему координат $O_E \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$. Ось $O_E \bar{Y}$ – совпадает с осью вращения Земли, а оси $O_E \bar{Z}$, $O_E \bar{X}$ лежат в плоскости экватора Земли, причем ось $O_E \bar{Z}$ направлена в восходящий узел орбиты спутника (рис. 1.6). Угол Ω – долгота восходящего узла, ω_π –

долгота перицентра π , v – истинная аномалия центра масс спутника O , u – аргумент широты.

Проекции вектора напряженности на оси системы $O_E \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ для рассматриваемого случая можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_{E\bar{X}} &= -\frac{\mu_E}{r^3} 3 \sin i \cos i \sin^2 u, \\ H_{E\bar{Y}} &= \frac{\mu_E}{r^3} [1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i], \\ H_{E\bar{Z}} &= -\frac{\mu_E}{r^3} 3 \sin i \sin u \cos u. \end{aligned} \quad (1.28)$$

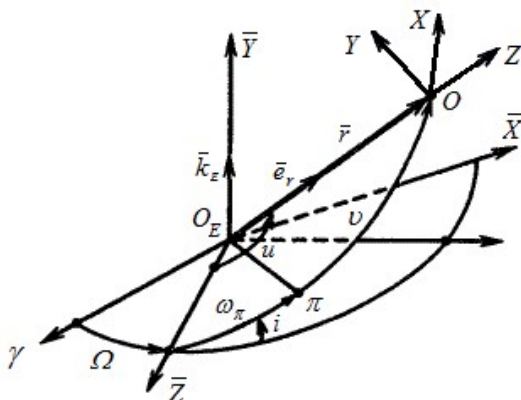


Рис. 1.6

Определим матрицу перехода от СК $O_E \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ к орбитальной СК $OXYZ$ (первый поворот на угол i , второй на угол u)

$$E = \begin{bmatrix} \cos u \cos i & \cos u \sin i & -\sin u \\ -\sin i & \cos i & 0 \\ \sin u \cos i & \sin u \sin i & \cos u \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Тогда, учитывая матрицу перехода от орбитальной СК $OXYZ$ к связанной СК $Oxyz$ – матрицу C , переход от СК $O_E \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ к связанной с наноспутником СК $Oxyz$ определяется матрицей:

$$E_H = C \cdot E . \quad (1.30)$$

Спроектируем магнитный момент (1.26) на оси связанной СК $Oxyz$. Учитывая, что $\bar{H}_E \cdot \bar{k} = H_E \cos(\text{Ох}, \bar{H}_E) = H_{Ex}$,

$$\bar{H}_E \times \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ H_{Ex} & H_{Ey} & H_{Ez} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{bmatrix} H_{Ex} \\ H_{Ey} \\ H_{Ez} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} H_{E\bar{X}} \\ H_{E\bar{Y}} \\ H_{E\bar{Z}} \end{bmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} M_{mgx} &= 0 , \\ M_{mgy} &= H_{Ey} \left\{ I_0 + \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} v H_{Ez} \right\} , \\ M_{mgz} &= -H_{Ex} \left\{ I_0 + \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} v H_{Ez} \right\} . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Данные проекции магнитного момента, возникающего в результате взаимодействия геомагнитного поля с магнитным полем наноспутника, добавляются в правые части динамических уравнений (1.3).

1.8 Начальные условия углового движения наноспутника

При отделении наноспутника от стабилизированной платформы его начальная ориентация в пространстве определяется направлением отделения, а начальные значения компонент угловой скорости определяются в основном погрешностью отделения от транспортно-пускового устройства. При запуске с платформы, со-

вершающей неуправляемое движение, начальные значения компонент угловой скорости наноспутника при этом зависят и от характера неуправляемого движения платформы.

Исследовать движение относительно центра масс наноспутника можно по полной системе нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (динамические уравнения Эйлера (1.3) и кинематические соотношения (1.4)) с учётом действия внешних моментов, описанных в данной главе. Однако общее решение указанной системы получить не представляется возможным. При численном же интегрировании уравнений движения остаются скрытыми причины, обуславливающие тот или иной характер движения. Поэтому важен поиск приближенных аналитических или полуаналитических решений, позволяющих установить закономерности, свойственные движению наноспутника. Полную систему нелинейных дифференциальных уравнений целесообразно использовать для поверочных расчетов.

ГЛАВА 2. ПЛОСКОЕ УГЛОВОЕ ДВИЖЕНИЕ НАНОСПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ

2.1 Математическая модель плоского углового движения

Для проведения качественного анализа движения относительно центра масс наноспутника, используется приближенная модель углового движения в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат. Модель описывает изменение угла атаки динамически симметричного наноспутника под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента. Данную модель можно получить из кинематических (1.4) и динамических уравнений Эйлера (1.3). Полагая в (1.4) $\dot{v} = 0$, $\dot{\theta}_m = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\psi = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $\alpha = \alpha_n$, получим $\omega_x = 0$, $\omega_z = 0$, $\omega_y = \dot{\alpha}$. Дифференцируя последнее равенство по времени и учитывая второе уравнение системы (1.3), получим $\ddot{\alpha} = M_y / J_y$. При этом гравитационный момент определяется по формуле $M_{gy} = -\frac{3\mu}{2r^3}(J_x - J_z)\sin 2\alpha$. Аэродинамический момент определим для случая, когда центр масс лежит на продольной оси наноспутника (1.23). Для проведения анализа углового движения наноспутника, для случая, когда угловая скорость собственного вращения близка к равномерной, зависимость коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента вычисленного относительно центра масс (1.24), можно усреднить по углу собственного вращения φ :

$$m_{\alpha}(\alpha) = -c_0 \left(|\cos(\alpha)| + k_s \frac{4}{\pi} |\sin(\alpha)| \right) \Delta \bar{x} \sin(\alpha). \quad (2.1)$$

Для проведения приближенного анализа параметров движения, зависимость коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента усреднённую по углу собственного вращения φ (2.1), с достаточной точностью можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки:

$$m_{\alpha}(\alpha) = a_0 \sin(\alpha), \quad (2.2)$$

где a_0 – коэффициент аппроксимации синусоидальной зависимостью по углу атаки коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента, вычисленного относительно центра масс.

Тогда, приближенная модель углового движения динамически симметричного наноспутника в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат, которая описывает изменение угла атаки под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента имеет вид:

$$\ddot{\alpha} - a(H) \sin \alpha - c(H) \sin 2\alpha = 0. \quad (2.3)$$

где $a(H) = a_0 S l q(H) / J_n$ – коэффициент, обусловленный аэродинамическим восстанавливающим моментом; J_n – поперечный момент инерции наноспутника ($J_y = J_z = J_n$); $c(H) = 3(J_n - J_x)(\omega(H))^2 / (2J_n)$ – коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента; $\omega(H) = \sqrt{\mu / (R_3 + H)^3}$ – угловая скорость движения центра масс наноспутника по орбите.

Считая, что угол снижения наноспутника, движущегося по почти круговой орбите, мал и меняется медленно, изменение высоты по времени можно определить по приближённой формуле [12]

$$\dot{H} = -\frac{2\sigma_x qV}{g}, \quad (2.4)$$

где $g = g_0(R_3/r)^2$; g_0 – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Для наноспутников, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, баллистический коэффициент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения и определяется по формуле:

$$\sigma_x(\alpha_n, \varphi) = c_0(|\cos \alpha_n| + k_s \sin \alpha_n (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|))S/m. \quad (2.5)$$

Для проведения анализа углового движения наноспутника, для случая, когда угловая скорость собственного вращения близка к равномерной, выражение для баллистического коэффициента можно усреднить по углу собственного вращения:

$$\sigma_x(\alpha_n) = c_0(|\cos \alpha_n| + \frac{4k_s}{\pi} \sin \alpha_n)S/m, \quad (2.6)$$

при этом для плоского углового движения ($\alpha = \alpha_n$):

$$\sigma_x(\alpha) = c_0(|\cos \alpha| + \frac{4k_s}{\pi} |\sin \alpha|)S/m.$$

2.2 Фазовые портреты

Для выяснения общих свойств системы (2.3) воспользуемся методом фазовой плоскости. Изменение высоты круговой орбиты вследствие сопротивления атмосферы происходит очень медленно, и при рассмотрении углового движения наноспутника на одном или нескольких витках можно принять $H = const$. В этом случае для системы (2.3) имеет место интеграл энергии:

$$\dot{\alpha}^2 / 2 + a \cos \alpha + c \cos^2 \alpha = E_0, \quad (2.7)$$

где $E_0 = a \cos \alpha_0 + c \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}$ – определяется через начальные условия.

Характер движения наноспутника определяется соотношением величин a , c и E_0 . Имеют место три вида фазовых портретов.

1. $|a| \geq 2|c|$. Фазовый портрет аналогичен колебательной системе маятникового типа и для случая $a < 0$ изображен на рис. 2.1 (при $a > 0$ фазовая картина сдвинута по оси α на величину π). В этом случае наноспутник имеет два положения равновесия по углу атаки – устойчивое при $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) и неустойчивое при $\alpha = \pi + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$). Вращательному движению наноспутника соответствует условие: $E_0 > |a| + c$ (фазовая траектория 1), колебательному движению относительно устойчивого положения равновесия $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствует условие: $-|a| + c < E_0 < |a| + c$ (фазовая траектория 2). Области возможных движений разделены сепаратрисой – фазовая траектория 3.

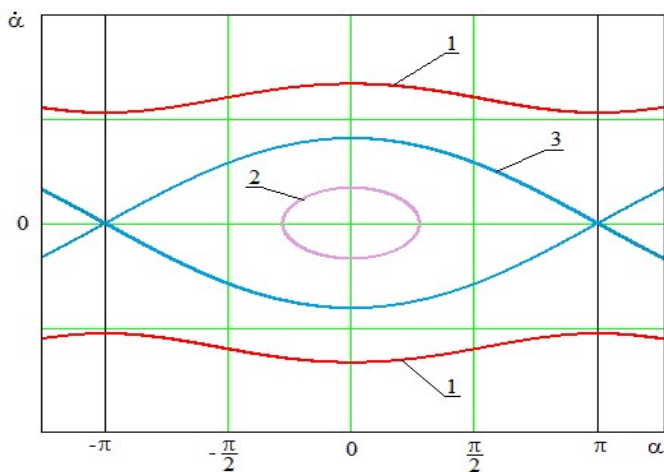


Рис. 2.1. Фазовый портрет: $|a| \geq 2|c|$

2. $c > 0,5|a|, c > 0$. Фазовый портрет для случая $a < 0$ изображен на рис. 2.2 (при $a > 0$ фазовая картина сдвинута по оси α на величину π). При таком соотношении имеют место четыре области движения наноспутника: вращательная область и три колебательные области. Наноспутник имеет четыре положения равновесия по углу атаки: $\alpha_* = \pm \arccos(-0,5a/c) + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$), $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$), $\alpha = \pi + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$).

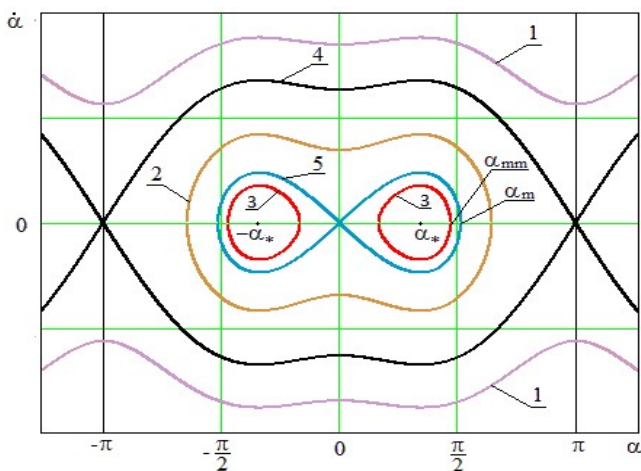


Рис. 2.2. Фазовый портрет: $c > 0,5|a|, c > 0$

Вращательному движению наноспутника соответствует условие: $E_0 > |a| + c$ – фазовая траектория 1, колебательному движению относительно положения равновесия $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) при $a < 0$ или $\alpha = \pi + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) при $a > 0$ соответствует условие: $-|a| + c < E_0 < |a| + c$ – фазовая траектория 2, колебательному движению относительно положения равновесия α_* соответствует условие: $a^2 / (-4c) < E_0 < -|a| + c$ – фазо-

вая траектория 3. Области возможных движений разделены сепаратрисами (на рис. 2.2 это фазовые траектории 4 и 5).

3. $|c| > 0,5|a|, c < 0$. При таком соотношении имеют место три области движения наноспутника: вращательная область и две колебательные области (рис. 2.3). Наноспутник имеет четыре положения равновесия по углу атаки: $\alpha_* = \pm \arccos(-0,5a/c) + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$), $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$), $\alpha = \pi + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$).

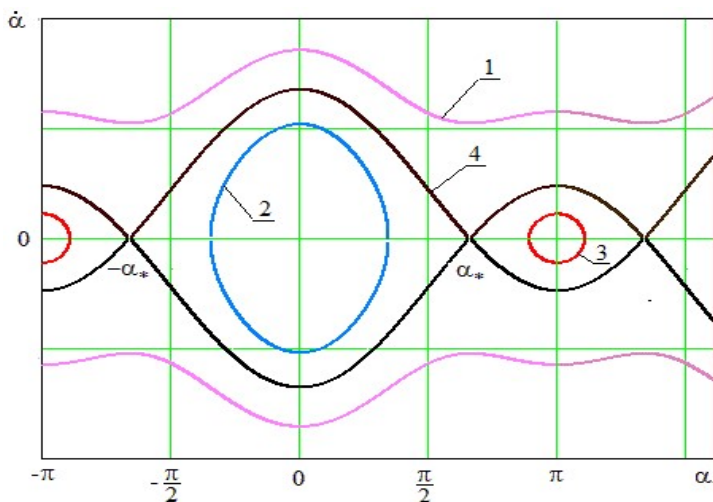


Рис. 2.3. Фазовый портрет: $|c| > 0,5|a|, c < 0$

Вращательному движению наноспутника соответствует условие: $E_0 > a^2 / (-4c)$ – фазовая траектория 1, колебательному движению относительно положения равновесия $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствует условие: $a + c < E_0 < a^2 / (-4c)$ – фазовая траектория 2, колебательному движению относительно положения равновесия

$\alpha = \pi + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots)$ соответствует условие:
 $-a + c < E_0 < a^2 / (-4c)$ – фазовая траектория 3. Области возможных движений разделены сепаратрисой – фазовая траектория 4.

2.3 Переходные режимы движения

С ростом плотности атмосферы при снижении высоты полёта коэффициент, обусловленный аэродинамическим восстанавливающим моментом a , значительно возрастает, в то время как коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента c , практически не меняется. Если движение начинается в фазовом портрете, изображенном на рис. 2.2 (выполняется условие: $c > 0,5|a|, c > 0$) или 3 (выполняется условие: $|c| > 0,5|a|, c < 0$), то в процессе снижения высоты полёта происходит смена вида фазового портрета на портрет, изображенный на рис. 2.1. Высота смены фазового портрета определяется из уравнения

$$|a_0|Slq(H) = 3|(J_n - J_x)|(\omega(H))^2, \quad (2.8)$$

которое соответствует условие $|a| = 2|c|$.

Также при снижении наноспутника происходит изменение характера фазовых траекторий, в результате которой они могут пересекать сепаратрисы, попадая в различные области фазового портрета, что сопровождается качественными изменениями характера движения: вращательное движение переходит в колебательное, колебательное движение скачкообразно переходит в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками.

Для описания движения системы с медленно меняющимися параметрами (2.3) будем использовать интеграл действия, записанный в форме

$$I_g = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha, \quad (2.9)$$

где $\dot{\alpha}$ определяется из (2.7); α_{\min} α_{\max} – амплитудные значения угла атаки (определяются из (2.7) при $\dot{\alpha} = 0$, при вращении $\alpha_{\min} = -\pi$, $\alpha_{\max} = \pi$).

Для системы (2.3) с медленно меняющимися параметрами $a(H)$ и $c(H)$ равенство $I_g = \text{const}$ справедливо для большинства начальных условий с точностью $O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ на временах порядка $1/\varepsilon$, где ε – малый параметр, характеризующий скорость изменения параметра [13].

Вычисляя интеграл действия на сепаратрисе и приравнивая значению интеграла действия вычисленного по начальным условиям движения, можно определить моменты смены характера движения. Так, например, если в начальный момент наноспутник совершал вращательное движение, то высота полёта H_* в момент, соответствующий переходу вращательного движения в колебательное, определяется из решения трансцендентных уравнений [14]:

при $c > 0,5|a|$ или $|a| \geq 2c$, $a < 0$, $c > 0$

$$I_{g0} = 4\sqrt{2c(H_*)}[\sqrt{u_* + 1} + u_* \ln((1 + \sqrt{u_* + 1})/\sqrt{u_*})], \quad (2.10)$$

при $|a| \geq 2|c|$, $a < 0$, $c < 0$

$$I_{g0} = 4\sqrt{-2c(H_*)}[\sqrt{u_* - 1} + u_* \arctg(\sqrt{1/(u_* - 1)})], \quad (2.11)$$

при $|c| > 0,5|a|$, $a < 0$, $c < 0$

$$I_{g0} = 4\sqrt{-2c(H_*)}[\sin \alpha_* + (0,5\pi - \alpha_*)\cos \alpha_*], \quad (2.12)$$

где $u_* = |0,5a(H_*)/c(H_*)|$; $\alpha_* = \arccos(-0,5a(H_*)/c(H_*))$;

$I_{g0} = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha$ – интеграл действия, вычисленный по начальным

условиям движения. Если в начальный момент наноспутник совершал колебательное движение относительно положения равновесия α_* , то высота полета H_* , соответствующая моменту перехода в колебания относительно положения равновесия $\alpha = 0$, определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$I_{g0} = 4\sqrt{-2c(H_*)}[\sin\alpha_* + (0,5\pi - \alpha_*)\cos\alpha_*]. \quad (2.13)$$

На рис. 2.4 показана зависимость высоты перехода H_* вращательного движения наноспутника ($S = 0,01 \text{ м}^2$, $l = 0,3 \text{ м}$, $\Delta x = 0,055 \text{ м}$, $a_0 = -1,5$, $J_x = 0,0033 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_n = 0,012 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$) в колебательное от величины начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ для различных значений начального угла атаки α_0 (начальная высота полёта $H_0 = 330 \text{ км}$).

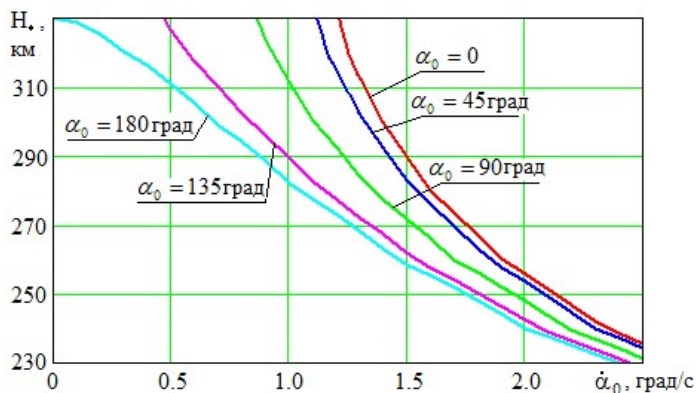


Рис. 2.4. Высота полета, соответствующая переходу вращательного движения наноспутника в колебательное движение

2.4 Законы распределения максимального угла атаки

При отделении наноспутника от транспортно пускового устройства реализация величины максимального угла атаки носит случайный характер. Максимальное значение угла атаки наноспутника, помимо величин аэродинамического и гравитационного моментов, определяется начальным значением угла атаки α_0 и начальным значением угловой скорости $\dot{\alpha}_0$.

Величину максимального угла атаки наноспутника при колебаниях можно найти из интеграла энергии (2.7) при $\dot{\alpha}=0$:

$$\cos \alpha_{\max} = -\frac{a}{2c} - \sqrt{\left(\frac{-a}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c} \cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2c}}, \quad (2.14)$$

Полагается, что из величин, входящих в (2.14), наибольший разброс значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$, разбросами других величин пренебрегается.

Пусть величина $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея

$$f(\dot{\alpha}_0) = \frac{\dot{\alpha}_0}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\dot{\alpha}_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.15)$$

где $\sigma > 0$ – масштабный параметр распределения

Тогда, вычисляя распределение функции α_{\max} (2.14) по распределению аргумента $\dot{\alpha}_0$ (2.15) в соответствии с [15], получим аналитические выражения для плотности распределения и функции распределения максимального угла атаки [7]:

$$f(\alpha_{\max}) = \frac{-a \sin \alpha_{\max} - c \sin 2\alpha_{\max}}{\sigma^2} \times \exp\left(\frac{-a(\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha_0) - c(\cos^2 \alpha_{\max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}\right), \quad (2.16)$$

$$F(\alpha_{\max}) = 1 - \exp\left(\frac{-a(\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha_0) - c(\cos^2 \alpha_{\max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}\right). \quad (2.17)$$

Пусть величина $\dot{\alpha}_0$ распределена по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0\max}]$:

$$f(\dot{\alpha}_0) = \begin{cases} \frac{1}{\dot{\alpha}_{0\max}}, & \dot{\alpha}_0 \in [0, \dot{\alpha}_{0\max}] \\ 0, & \dot{\alpha}_0 \notin [0, \dot{\alpha}_{0\max}] \end{cases}. \quad (2.18)$$

Тогда, вычисляя распределение функции α_{\max} (2.14) по распределению аргумента $\dot{\alpha}_0$ (2.18) получим аналитические выражения для плотности распределения и функции распределения максимального угла атаки:

$$f(\alpha_{\max}) = \frac{-a \sin \alpha_{\max} - c \sin 2\alpha_{\max}}{\dot{\alpha}_{0\max} \sqrt{2a(\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha_0) + 2c(\cos^2 \alpha_{\max} - \cos^2 \alpha_0)}}, \quad (2.19)$$

$$F(\alpha_{\max}) = \frac{\sqrt{2a(\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha_0) + 2c(\cos^2 \alpha_{\max} - \cos^2 \alpha_0)}}{\dot{\alpha}_{0\max}}. \quad (2.20)$$

Если движение происходит в соответствии с фазовым портретом, изображённом на рис. 2.1 (выполняется условие: $|a| \geq 2|c|$), то максимальный угол атаки при колебаниях может принимать значения из диапазона (α_0, π) . В этом случае вероятность реализации колебаний относительно положений равновесия $\alpha = 0$ равна

$$P_0 = F(\pi), \quad (2.21)$$

а вероятность реализации вращения равна

$$P_r = 1 - F(\pi). \quad (2.22)$$

Если движение происходит в соответствии с фазовым портретом, изображённом на рис. 2.2 (выполняется условие: $c > 0,5|a|, c > 0$), то максимальный угол атаки при колебаниях

может принимать значения из диапазонов: (α_{mm}, π) , если $\alpha_0 < \alpha_*$ и (α_0, π) , если $\alpha_0 > \alpha_*$, где $\alpha_{mm} = \arccos(-a/c - \cos(\alpha_0))$ – минимально возможное значение максимального угла атаки при колебаниях относительно положения равновесия α_* (рис. 2.2). Вероятность реализации колебаний относительно положения равновесия α_* равна

$$P_* = \begin{cases} F(\alpha_m), & \alpha_0 < \alpha_m \\ 0, & \alpha_0 > \alpha_m \end{cases}, \quad (2.23)$$

где $\alpha_m = \arccos(-a/c - 1)$ – максимально возможное значение максимального угла атаки при колебаниях относительно положения равновесия α_* (рис. 2.2). Вероятность реализации колебаний относительно положений равновесия $\alpha = 0$ равна

$$P_0 = F(\pi) - F(\alpha_m). \quad (2.24)$$

Вероятность реализации вращения равна

$$P_r = 1 - F(\pi). \quad (2.25)$$

Если движение происходит в соответствии с фазовым портретом, изображённом на рис. 2.3 (выполняется условие: $|c| > 0,5|a|, c < 0$), то максимальный угол атаки при колебаниях может принимать значения из диапазонов: (α_0, α_*) , если $\alpha_0 < \alpha_*$ и (α_*, α_0) , если $\alpha_0 > \alpha_*$ (рис. 2.3). Вероятность реализации колебаний равна

$$P_{os} = F(\alpha_*), \quad (2.26)$$

Вероятность реализации вращения равна

$$P_r = 1 - F(\alpha_*). \quad (2.27)$$

На рис. 2.5 и 2.6 приведены графики плотности распределения (рис. 2.5) и функции распределения (рис. 2.6) максимального угла

атаки наноспутника CubSat 3U ($S = 0,01 \text{ м}^2$, $l = 0,3 \text{ м}$, $J_x = 0,005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_n = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\Delta x = 0,055 \text{ м}$) при полёте на высоте $H = 380 \text{ км}$ (атмосфера стандартная [3], выполняется условие $|a| \geq 2|c|$) и начальном значении угла атаки $\alpha_0 = 10 \text{ град}$ для случая, когда величина начальной угловой скорости имеет распределение Рэлея.

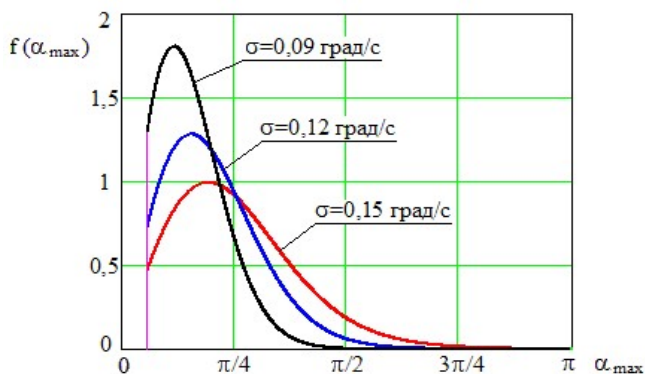


Рис. 2.5

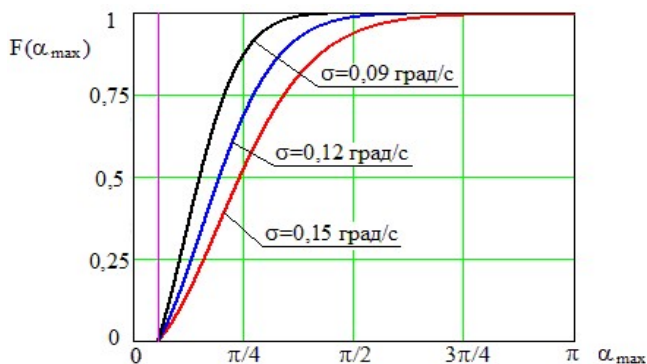


Рис. 2.6

На рис. 2.7 и 2.8 приведены графики плотности распределения (рис. 2.7) и функции распределения (рис. 2.8) максимального угла атаки наноспутника SubSat 3U при полёте на высоте $H = 380$ км (атмосфера стандартная [3], выполняется условие $|a| \geq 2|c|$) и начальном значении угла атаки $\alpha_0 = 10$ град для случая, когда величина начальной угловой скорости распределена по равномерному закону.

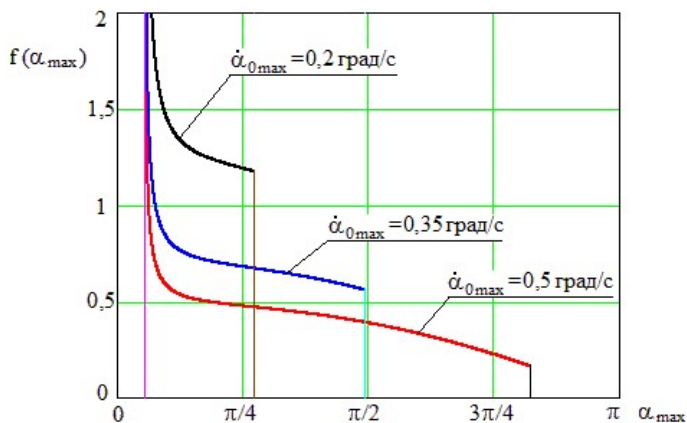


Рис. 2.7

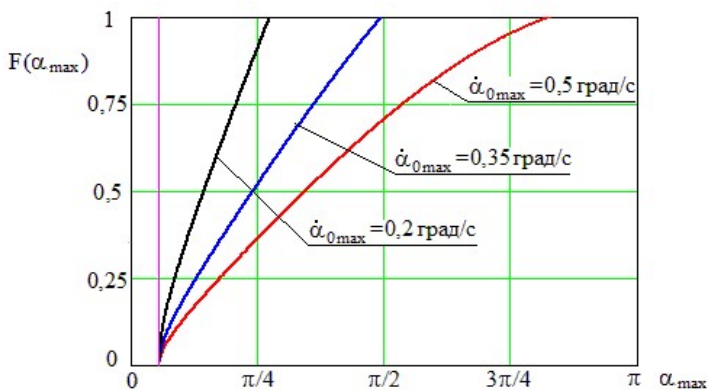


Рис. 2.8

2.5 Качественный анализ движения относительно центра масс неуправляемого наноспутника

Качественный анализ движения относительно центра масс неуправляемого наноспутника проводится на этапе выбора облика наноспутника с целью оценки возможности выполнения задач миссии, связанных с его ориентацией и стабилизацией.

Исходными данными являются геометрические, массо-центровочные, инерционные, аэродинамические характеристики, высота полёта, начальные условия углового движения наноспутника.

Для проведения качественного анализа движения относительно центра масс наноспутника, используется приближенная модель углового движения в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат (2.3). Модель описывает изменение угла атаки динамически симметричного наноспутника под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента.

Качественный анализ движения относительно центра масс неуправляемого наноспутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов состоит из следующих этапов:

1. Устанавливается вид фазового портрета (рис. 2.1-2.3) по соотношению коэффициентов a и c , определяемых исходными данными (геометрические, массо-центровочные, инерционные, аэродинамические характеристики, высота полёта наноспутника);

2. Выявляется характер движения наноспутника (вращательное, колебательное относительно соответствующего положения равновесия) по соотношению величин a , c и E_0 , определяемых исходными данными (геометрические, массо-центровочные, инер-

ционные, аэродинамические характеристики, высота полёта, начальные условия углового движения наноспутника);

3. Вычисляется вероятность реализации колебательного и вращательного движений относительно центра масс наноспутника по формулам (2.21) – (2.27) в зависимости от начальных условий углового движения и закона распределения начальной угловой скорости;

4. Вычисляется высота смены фазового портрета из уравнения (2.8), если движение начинается в фазовом портрете, изображенном на рис. 2.2 (выполняется условие: $c > 0,5|a|, c > 0$) или рис. 2.3 (выполняется условие: $|c| > 0,5|a|, c < 0$);

5. Вычисляется высота изменения характера движения наноспутника относительно центра масс (переход вращательного движения в колебательное движение, переход колебательного движения в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками) из уравнений (2.10) – (2.13) в зависимости от начального характера углового движения.

ГЛАВА 3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НАНОСПУТНИКА

3.1 Отделение наноспутника от стабилизированной вращением платформы. Закон распределения начального значения угла атаки

При отделении наноспутника от стабилизированной платформы начальные значения компонент угловой скорости определяются в основном погрешностью отделения от транспортно-пускового контейнера. При запуске с платформы, совершающей неуправляемое движение, начальные значения компонент угловой скорости наноспутника при этом зависят и от характера неуправляемого движения платформы.

Рассмотрим случай запуска наноспутника со стабилизированной вращением платформы. Примером может служить запуск наноспутника с орбитальной ступени РН «Союз», совершающей неуправляемое движение после отделения основной полезной нагрузки на низкой околокруговой орбите, используемой для выведения грузовых космических аппаратов типа «Прогресс» с максимальной высотой орбиты 245 км и минимальной высотой – 193 км. Орбитальная ступень после отделения полезной нагрузки приобретает некоторую закрутку вокруг продольной оси [16].

По штатной циклограмме работы РН «Союз» через 0,7 с после отделения основной полезной нагрузки от верхней ступени включается реактивное сопло, создающее дополнительную силу, закручивающую и уводящую верхнюю ступень от основной полезной нагрузки. Рассмотрим случай, когда с целью отделения наноспутника происходит задержка включения реактивного сопла, обеспе-

чивающая безопасность относительного движения верхней ступени, основной полезной нагрузки и наноспутника. Задержка отделения наноспутника от ступени после отделения полезной нагрузки t_d составляет 10-20 с [6]. Вращательное движение верхней ступени представляет собой регулярную прецессию, при которой продольная ось ступени, проходящая через центр масс, описывает круговой конус относительно неизменного в пространстве направления вектора кинетического момента \vec{K} (угол полураствора конуса α_k) [5]. Движение оси симметрии вокруг вектора кинетического момента \vec{K} происходит с постоянной угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}$. Одновременно ступень вращается с постоянной угловой скоростью собственного вращения $\dot{\phi}$ вокруг оси симметрии (рис. 3.1).

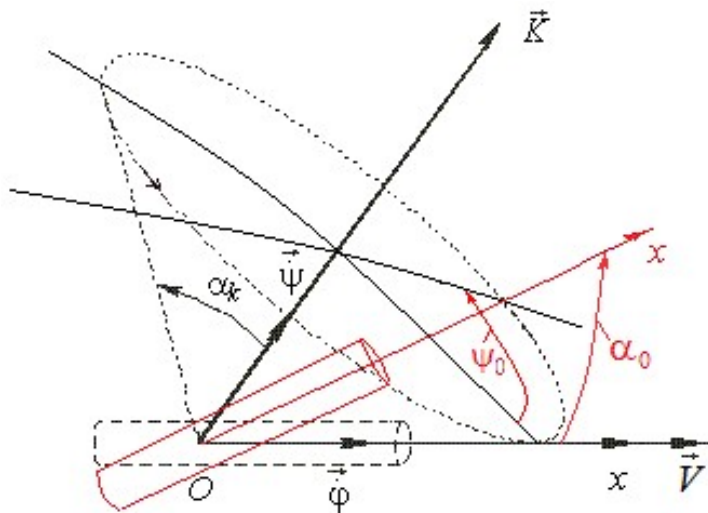


Рис. 3.1. Начальные условия углового движения наноспутника

Полагая, что в момент отделения полезной нагрузки продольная ось ступени совпадает с направлением её скорости центра масс, пространственный угол атаки α_0 (угол между продольной осью ступени и вектором скорости) в момент отделения наноспутника (рис. 3.1) можно определить по формуле [6]

$$\alpha_0 = \arccos(\cos^2 \alpha_k + \sin^2 \alpha_k \cos \psi_0), \quad (3.1)$$

где $\cos \alpha_k = K_x / K$; $\dot{\psi} = K / J_n^{os}$; $\psi_0 = \dot{\psi} t_d$ – угол прецессии в момент отделения наноспутника; $K = \sqrt{K_x^2 + K_n^2}$ – модуль кинетического момента ступени; $K_x = J_x^{os} \omega_x^{os}$, $K_n = J_n^{os} \omega_n^{os}$ – продольная и поперечная составляющие кинетического момента; J_x^{os} – продольный момент инерции ступени, $J_y^{os} = J_z^{os} = J_n^{os}$ – поперечный момент инерции ступени; ω_x^{os} , $\omega_n^{os} = \sqrt{(\omega_y^{os})^2 + (\omega_z^{os})^2}$ – продольная и поперечная составляющие угловой скорости ступени.

Для малых значений угла ψ_0 , полагая, что $\cos \psi_0 \approx 1 - \psi_0^2 / 2$, на основании соотношения (3.1) можно получить:

$$\alpha_0 = \omega_n^{os} t_d. \quad (3.2)$$

Учитывая, что компоненты поперечной угловой скорости ступени независимы и распределены по нормальному закону с дисперсиями $\sigma_{\omega_y^{os}}^2 = \sigma_{\omega_z^{os}}^2$ и нулевым математическим ожиданием [16], величина α_0 , определяемая соотношением (3.2), имеет распределение Рэлея. Выражения для плотности распределения и функции распределения имеют вид [6]:

$$f(\alpha_0) = \frac{\alpha_0}{\sigma_{\omega_y^{os}}^2 t_d^2} \exp\left(\frac{-\alpha_0^2}{2\sigma_{\omega_y^{os}}^2 t_d^2}\right), \quad (3.3)$$

$$F(\alpha_0) = 1 - \exp\left(\frac{-\alpha_0^2}{2\sigma_{\omega_y^{os}}^2 t_d^2}\right). \quad (3.4)$$

На рис. 3.2 показаны графики для эмпирической модели функции распределения угла α_0 (ступенчатая кривая) и полученной аналитической модели (3.4). Эмпирическая функция получена путем обработки выборки реализаций (10000 численных экспериментов), сформированной по соотношению (3.1) с учетом распределений угла α_k и угловой скоростью прецессии ψ , приведенных в [5], и времени задержки отделения наноспутника от ступени после отделения полезной нагрузки $t_d = 20$ с.

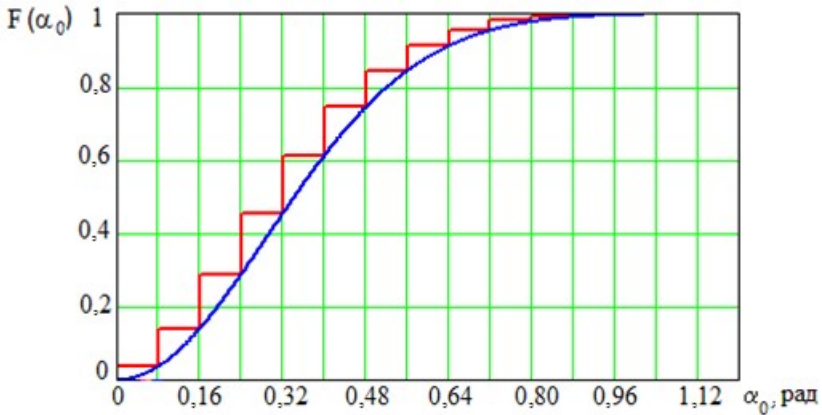


Рис. 3.2. Функция распределения угла атаки в момент отделения наноспутника

Среднее значение и среднеквадратичное отклонение угла α_0 , полученные в результате статистического моделирования равны: $\bar{\alpha}_0 = 20,9$ град, $\sigma_{\alpha_0} = 10,8$ град. При этом математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение этих величин, вычисленные с использованием выражения (3.4), равны $\bar{\alpha}_0 = 20,9$ град, $\sigma_{\alpha_0} = 10,9$ град.

Как видно из приведённых результатов, значения статистических характеристик, полученные в результате статистического моделирования и вычисленные с использованием соотношений (3.3)-(3.4), практически совпадают.

На рис. 3.3 показано изменение функции распределения угла атаки в момент отделения наноспутника α_0 в зависимости от времени задержки отделения наноспутника от ступени после отделения полезной нагрузки.

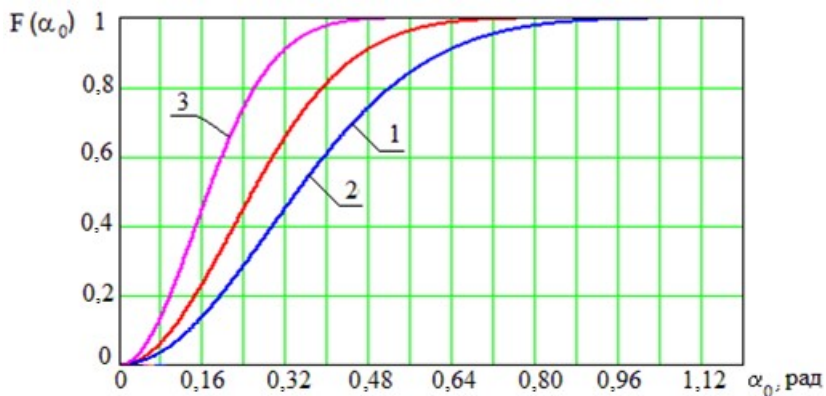


Рис 3.3. Функция распределения угла атаки в момент отделения наноспутника в зависимости от времени задержки отделения его от ступени:

$$1 - t_d = 20 \text{ с}, 2 - t_d = 15 \text{ с}, 3 - t_d = 10 \text{ с}$$

3.2 Регулярная прецессия наноспутника.

Законы распределения угла полураствора конуса прецессии и скорости прецессии

Рассмотрим случай отделения наноспутника от закрученной ступени. В результате наноспутник получает некоторый импульс и приобретает начальный кинетический момент. В случае, когда запас статической устойчивости наноспутника достаточно мал и можно пренебречь влиянием аэродинамического момента и других внешних моментов, его вращательное движение (как динамически симметричного твердого тела) после отделения от носителя представляет собой регулярную прецессию, при которой продольная ось, проходящая через центр масс, описывает круговой конус относительно неизменного в пространстве направления вектора кинетического момента \bar{K}_0 (угол полураствора этого конуса $\alpha_k \in [0, \pi/2]$). Движение оси симметрии вокруг вектора кинетического момента \bar{K}_0 происходит с постоянной угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}$. Одновременно наноспутник вращается с постоянной угловой скоростью собственного вращения $\dot{\phi}$ вокруг продольной оси симметрии (рис. 3.4).

Значения угла полураствора конуса прецессии α_k , скорости прецессии $\dot{\psi}$ и скорости собственного вращения $\dot{\phi}$ определяются по формулам [10]

$$\alpha_k = \arctan(K_{n0} / K_{x0}), \quad (3.5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{K_0}{J_n}, \quad (3.6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{J_n - J_x}{J_n} |\omega_{x0}|, \quad (3.7)$$

где $K_0 = \sqrt{K_{x0}^2 + K_{n0}^2}$ – модуль кинетического момента;
 $K_{x0} = J_x \omega_{x0}$, $K_{n0} = J_n \omega_{n0}$ – продольная и поперечная составляющие кинетического момента; J_x – продольный момент инерции наноспутника, $J_y = J_z = J_n$ – поперечный момент инерции наноспутника;
 ω_{x0} , $\omega_{n0} = \sqrt{(\omega_{y0})^2 + (\omega_{z0})^2}$ – продольная и поперечная составляющие угловой скорости.

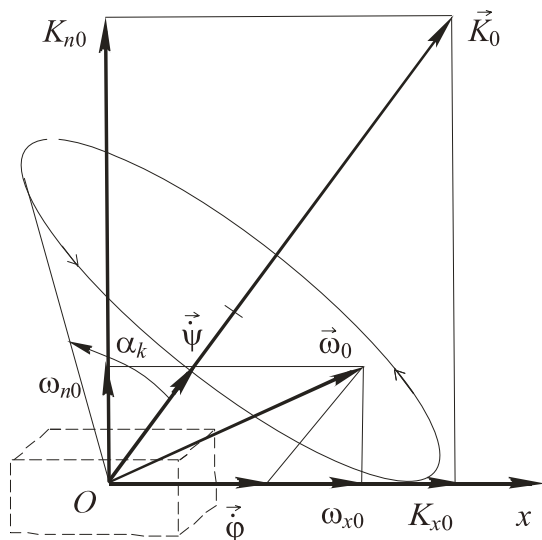


Рис. 3.4. Регулярная прецессия наноспутника

Предположим, что компоненты поперечной составляющей угловой скорости независимы и распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными $\sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma^2$. Разбросом величины продольной угловой скорости будем пренебрегать. Тогда, вычисляя распределение функции по распределению аргумента [15], получим аналитиче-

ские выражения для плотности и функции распределения угла полураствора конуса прецессии [6]:

$$f(\alpha_k) = \frac{K_{x0}^2 (\operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg}^3 \alpha_k)}{J_n^2 \sigma^2} \exp\left(\frac{-K_{x0}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_k}{2J_n^2 \sigma^2}\right), \quad (3.8)$$

$$F(\alpha_k) = 1 - \exp\left(\frac{-K_{x0}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_k}{2J_n^2 \sigma^2}\right), \quad (3.9)$$

и плотности и функции распределения угловой скорости прецессии $\dot{\psi} \in \left[\frac{|K_{x0}|}{J_n}, \infty\right)$:

$$f(\dot{\psi}) = \frac{\dot{\psi}}{\sigma^2} \exp\left(\frac{K_{x0}^2 - J_n^2 \dot{\psi}^2}{2J_n^2 \sigma^2}\right), \quad (3.10)$$

$$F(\dot{\psi}) = 1 - \exp\left(\frac{K_{x0}^2 - J_n^2 \dot{\psi}^2}{2J_n^2 \sigma^2}\right). \quad (3.11)$$

Для определения статистических характеристик распределения случайных величин, входящих в модель прецессионного движения, – угла полураствора конуса прецессии α_k , скорости прецессии $\dot{\psi}$, скорости собственного вращения $\dot{\phi}$ – было проведено статистическое моделирование по соотношениям (3.5-3.11). Принималось, что угловая скорость наноспутника в момент отделения складывается из угловой скорости ступени и угловой скорости, вызванной погрешностью системы отделения наноспутника. В соответствии с [13] компоненты поперечной угловой скорости ступени независимые и распределены по нормальному закону со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_{\omega_y^{os}} = \sigma_{\omega_z^{os}} = 0,833$ град/с и нулевыми математическими ожиданиями, а продольная угловая скорость ступени распределена по нормальному закону со средне-

квадратичным отклонением $\sigma_{\omega_x^{os}} = 0,1$ град/с и математическим ожиданием равным 2,5 град/с. Принималось, что компоненты составляющей угловой скорости наноспутника за счет системы его отделения независимы и распределены по нормальному закону со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_{\Delta\omega_y^{ns}} = \sigma_{\Delta\omega_z^{ns}} = 1$ град/с, $\sigma_{\Delta\omega_x^{ns}} = 0,2$ град/с и нулевыми математическими ожиданиями. Объём сформированной выборки реализаций составил 10000 численных экспериментов. При этом продольный и поперечный моменты инерции наноспутника моделировались как случайные величины с равномерными законами распределения на предельных интервалах изменения их величин $\pm 15\%$.

На рис. 3.5 показаны графики для эмпирической модели функции распределения угла полураствора конуса прецессии наноспутника α_k (ступенчатая кривая) и полученной аналитической модели (9), где величины продольного и поперечного моментов инерции принимались равными их средним значениям.

На рис. 3.6 показаны графики для эмпирической модели функции распределения скорости прецессии $\dot{\psi}$ (ступенчатая кривая) и полученной аналитической модели (3.11), где величины продольного и поперечного моментов инерции принимались равными их средним значениям.

В табл. 3.1 приведены средние значения и среднеквадратические отклонения угла полураствора конуса прецессии α_k , скорости прецессии $\dot{\psi}$, скорости собственного вращения $\dot{\phi}$, полученные в результате статистического моделирования, и математические ожидания и среднеквадратичные отклонения этих величин, вычисленные с использованием выражений (3.8)-(3.11).

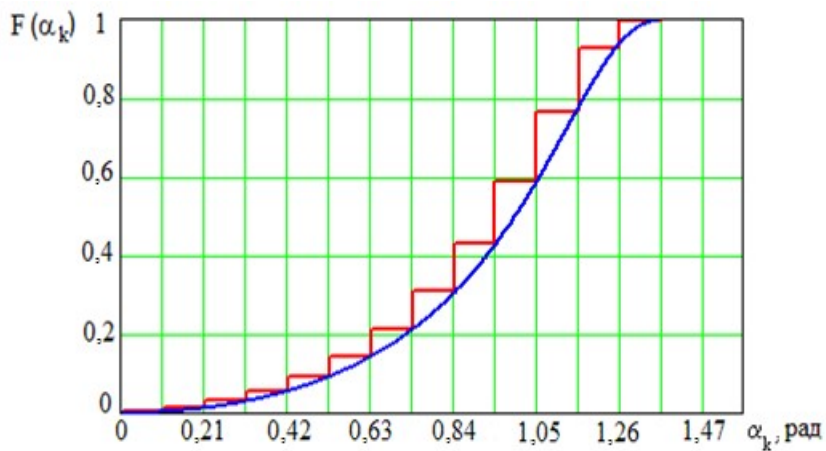


Рис.3.5. Функция распределения угла полураствора конуса прецессии наноспутника

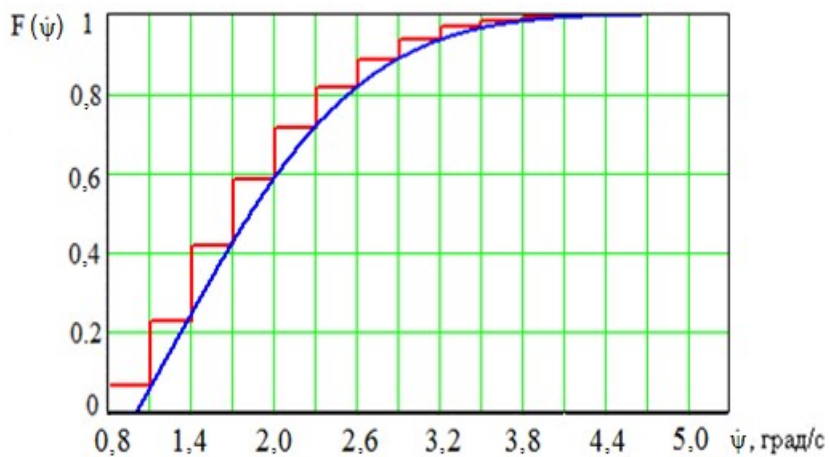


Рис. 3.6. Функция распределения скорости прецессии наноспутника

Таблица 3.1 Статистические характеристики распределения

	Угол полураствора конуса прецессии, град		Скорость прецессии, град/с		Скорость собственного вращения, град/с	
	$\bar{\alpha}_k$	σ_{α_k}	$\bar{\psi}$	σ_{ψ}	$\bar{\phi}$	σ_{ϕ}
Статистическое моделирование	53,6	15,5	1,98	0,71	1,50	0,18
С использованием формул (6)-(7)	53,5	15,3	1,97	0,71	1,50	0

Как видно из приведённых результатов, значения статистических характеристики, полученных в результате статистического моделирования и вычисленных с использованием соотношений (3.8)-(3.11), практически совпадают. Это подтверждает допустимость сделанных предположений и возможность использования полученных аналитических законов распределения (8)-(11) для анализа углового движения наноспутника. На рис. 3.7, 3.8 показаны изменения функции распределения угла полураствора конуса прецессии наноспутника α_k и скорости прецессии $\dot{\psi}$ в зависимости от величин среднеквадратичных отклонений составляющих поперечной угловой скорости за счет системы отделения наноспутника: кривая 1 для $\sigma_{\Delta\omega_y^{ns}} = \sigma_{\Delta\omega_z^{ns}} = 1$ град/с, кривая 2 для $\sigma_{\Delta\omega_y^{ns}} = \sigma_{\Delta\omega_z^{ns}} = 0,667$ град/с, кривая 3 $\sigma_{\Delta\omega_y^{ns}} = \sigma_{\Delta\omega_z^{ns}} = 0,333$ град/с, кривая 4 характеризует изменение функции распределения для случая идеального срабатывания системы отделения (отсутствуют дополнительные погрешности в начальной угловой скорости).

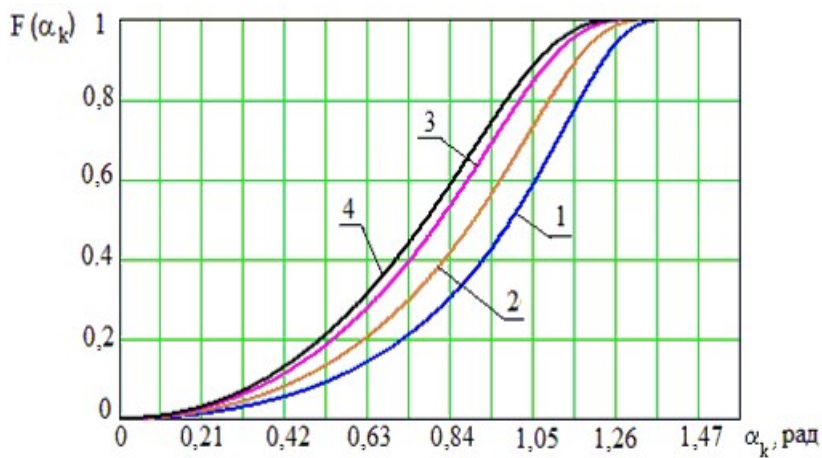


Рис 3.7. Функция распределения угла полуавтора конуса прецессии наноспутника

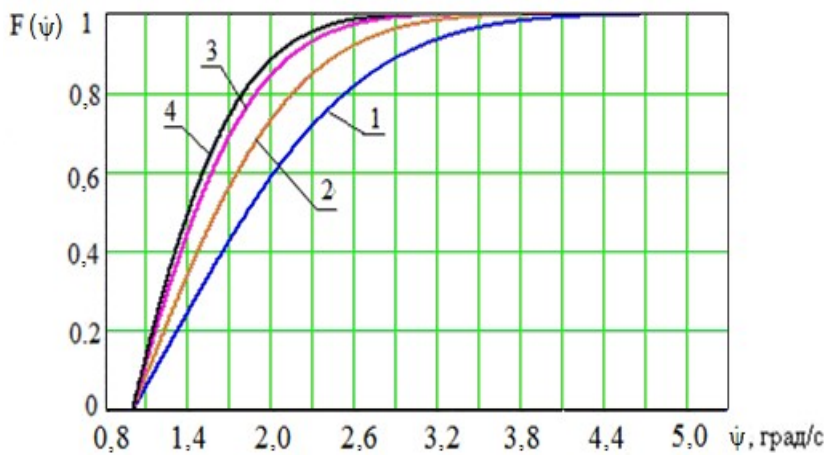


Рис 3.8. Функция распределения скорости прецессии наноспутника

3.3 Пространственное движение аэродинамически стабилизированного наноспутника относительно центра масс

Рассмотрим пространственное движение относительно центра масс динамически симметричного наноспутника формата CubeSat на низких круговых орбитах, где аэродинамический момент является преобладающим. Его влияние на движение относительно центра масс проявляется в следующем. Аэродинамический момент стремится совместить продольную ось наноспутника с направлением набегающего потока. Однако этому движению противодействуют гироскопические силы, вызывающие вынужденную прецессию вектора кинетического момента относительно вектора скорости центра масс. Вектор кинетического момента отклоняется в ту сторону, куда направлен вектор аэродинамического момента. Прецессию продольной оси спутника относительно вектора скорости центра масс \vec{V} на промежутке времени, равном периоду полного оборота, противоположную по направлению данному вектору принято называть «обратной» прецессией, а совпадающую с направлением вектора скорости центра масс \vec{V} – «прямой» прецессией [17] (рис. 3.9).

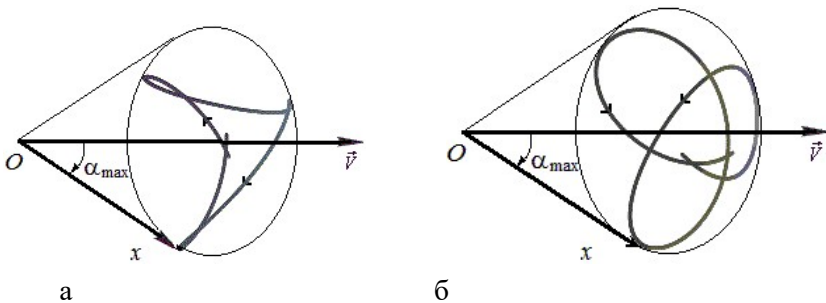


Рис. 3.9. Траектория продольной оси наноспутника на единичной сфере относительно скоростной системы координат:
а – «обратная» прецессия, б – «прямая» прецессия

Следует отметить возможность возникновения резонансных режимов движения у наноспутников, совершающих полёт на низких орбитах. Для наноспутников стандарта CubeSat, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения (1.23), а это создаёт предпосылки возникновения резонанса, который проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по углу атаки, когда целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю [1].

Рассмотрим два случая пространственного движения относительно центра масс аэродинамически стабилизированного наноспутника. Первый – нерезонансный случай движения, когда приведённые выше условия возникновения резонансного движения не выполняются. Второй – резонансный случай движения, когда условия возникновения резонансного движения выполняются.

3.3.1 Нерезонансный случай движения аэродинамически стабилизированного наноспутника

Для проведения приближенного анализа углового движения наноспутника в нерезонансном случае, полагая, что угловая скорость собственного вращения близка к равномерной, зависимость коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента вычисленного относительно центра масс (1.24), можно усреднить по углу собственного вращения (2.1) и с достаточной точностью можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки (2.2). Тогда, пренебрегая влиянием гравитационного момента и орбитальной угловой скоростью, изменение пространственного угла атаки динамически симметричного наноспутника можно описать следующим уравнением [18]:

$$\ddot{\alpha} + (G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - a(H) \sin \alpha = 0, \quad (3.12)$$

где $R = \bar{J}_x \omega_x = \text{const}$, $G = R \cos \alpha + (-\omega_y \cos \varphi + \omega_z \sin \varphi) \sin \alpha = \text{const}$ – проекции вектора кинетического момента на продольную ось наноспутника и на направление скорости центра масс, отнесённые к поперечному моменту инерции, соответственно; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат; $\bar{J}_x = J_x / J_n$.

При выполнении условия $R > G$ реализуется «обратная» прецессия, при $G > R$ – «прямая» прецессия (рис. 3.9).

При рассмотрении углового движения наноспутника можно принять $H = \text{const}$. В этом случае для системы (3.12) выполняется интеграл энергии:

$$\dot{\alpha}^2 / 2 + (R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha) / (2 \sin^2 \alpha) + a \cos \alpha = E, \quad (3.13)$$

Значение E определяется через начальные условия, при этом $\dot{\alpha}_0 = \omega_y \cos \varphi_0 + \omega_z \sin \varphi_0$.

Максимальное значение угла атаки определяется из уравнения $(R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha_{\max}) / (2 \sin^2 \alpha_{\max}) + a \cos \alpha_{\max} - E = 0$, (3.14) которое следует из интеграла энергии (3.13) при $\dot{\alpha} = 0$.

Для определения функции распределения максимального угла атаки наноспутника в случае пространственного движения было проведено статистическое моделирование (10000 численных экспериментов) по соотношению (3.14). Предполагалось, что начальное значение угла собственного вращения распределено равномерно в диапазоне $[0, \pi]$ и в начальный момент времени продольная ось наноспутника направлена по вектору скорости центра масс ($\alpha_0 \approx 0$), начальная высота $H_0 = 300$ км. Рассматривались два варианта распределения компонент начальной угловой скорости наноспутника. Первый – компоненты начальной угловой скорости

наноспутника независимы и распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями (величина поперечной угловой скорости имеет распределение Рэлея). Второй – величина поперечной угловой скорости и величина продольной угловой скорости независимы и имеют равномерное распределение.

На рис. 3.10 показано изменение функции распределения максимального угла атаки наноспутника в зависимости от величин среднеквадратичных отклонений компонент начальной угловой скорости после его трансформации (компоненты начальной угловой скорости распределены по нормальному закону):

кривая 1 соответствует $3\sigma_{\omega_y} = 3\sigma_{\omega_z} = 0,5$ град/с, $3\sigma_{\omega_x} = 0,1$ град/с;

кривая 2 – $3\sigma_{\omega_y} = 3\sigma_{\omega_z} = 1,0$ град/с, $3\sigma_{\omega_x} = 0,2$ град/с;

кривая 3 – $3\sigma_{\omega_y} = 3\sigma_{\omega_z} = 1,0$ град/с, $3\sigma_{\omega_x} = 0,3$ град/с;

кривая 4 – $3\sigma_{\omega_y} = 3\sigma_{\omega_z} = 2,0$ град/с, $3\sigma_{\omega_x} = 0,4$ град/с;

кривая 5 – $3\sigma_{\omega_y} = 3\sigma_{\omega_z} = 2,5$ град/с, $3\sigma_{\omega_x} = 0,5$ град/с.

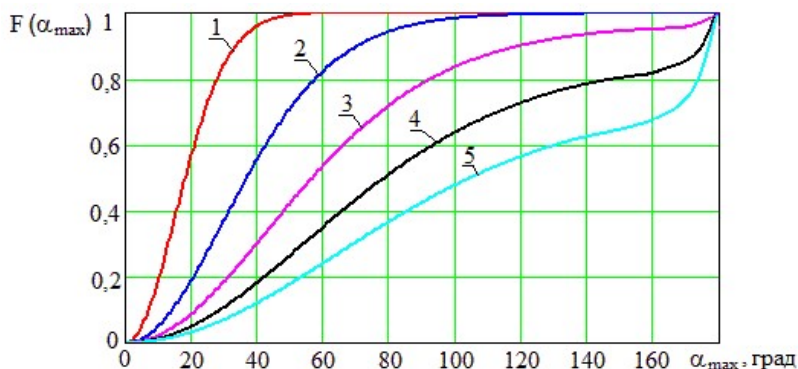


Рис. 3.10. Функция распределения максимального угла атаки (компоненты начальной угловой скорости распределены по нормальному закону)

На рис. 3.11 показано изменение функции распределения максимального угла атаки наноспутника в зависимости от величины диапазона возможных значений компонент начальной угловой скорости (поперечная и продольная угловые скорости распределены по равномерному закону):

кривая 1 для $\omega_n \in [0; 0,5]$ град/с, $\omega_x \in [0; 0,1]$ град/с;

кривая 2 для $\omega_n \in [0; 1,0]$ град/с, $\omega_x \in [0; 0,2]$ град/с;

кривая 3 для $\omega_n \in [0; 1,5]$ град/с, $\omega_x \in [0; 0,3]$ град/с;

кривая 4 для $\omega_n \in [0; 2,0]$ град/с, $\omega_x \in [0; 0,4]$ град/с;

кривая 5 для $\omega_n \in [0; 2,5]$ град/с, $\omega_x \in [0; 0,5]$ град/с.

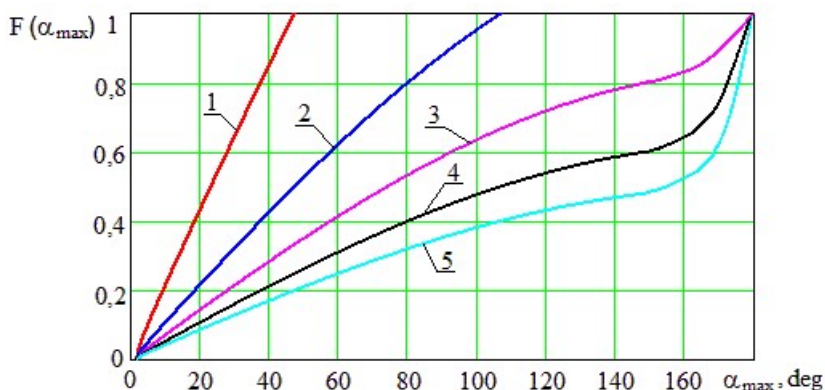


Рис. 3.11. Функция распределения максимального угла атаки (поперечная и продольная угловые скорости распределены по равномерному закону)

При малых R и G (при малой разности R и G , малом начальном значении угла атаки α_0) соотношение (3.14) можно записать в виде

$$a \cos \alpha_{\max} - E = 0, \quad (3.15)$$

где $E = a \cos \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}$.

Из (3.15) следует, что $\cos \alpha_{\max} = \cos \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2a_0}$. Это соответствует плоскому случаю углового движения под действием аэродинамического момента.

Выполнена оценка погрешности использования аналитических функций распределения максимального угла атаки, которые получены для плоского углового движения – формулы (2.17) и (2.20) при $c = 0$, в случае пространственного движения. Оценивалось влияние начального угла атаки α_0 и начальной продольной угловой скорости ω_x .

На рис. 3.12 и 3.13 для случая, когда компоненты начальной поперечной угловой скорости распределены по нормальному закону $3\sigma_{\omega_y} = 3\sigma_{\omega_z} = 2,5$ град/с, а начальный угол атаки $\alpha_0 = 1$ град (рис. 3.12) и $\alpha_0 = 15$ град (рис. 3.13), приведены графики аналитической функции распределения (2.17) (кривая 1) и графики функции распределения максимального угла атаки α_{\max} , полученные в результате численного эксперимента по соотношению (3.14) (кривая 2 для $3\sigma_{\omega_x} = 0,5$ град/с, кривая 3 для $3\sigma_{\omega_x} = 1,5$ град/с, кривая 4 для $3\sigma_{\omega_x} = 2,5$ град/с).

Как следует из полученных результатов, при отделении наноспутника по вектору скорости центра масс (начальное значение угла атаки мало) и при незначительной закрутке относительно продольной оси, можно с достаточной точностью использовать аналитическую функцию распределения максимального угла ата-

ки, полученную для случая плоского углового движения, и в случае пространственного движения. Аналогичный вывод можно сделать и для случая, когда поперечная и продольная угловые скорости распределены по равномерному закону.

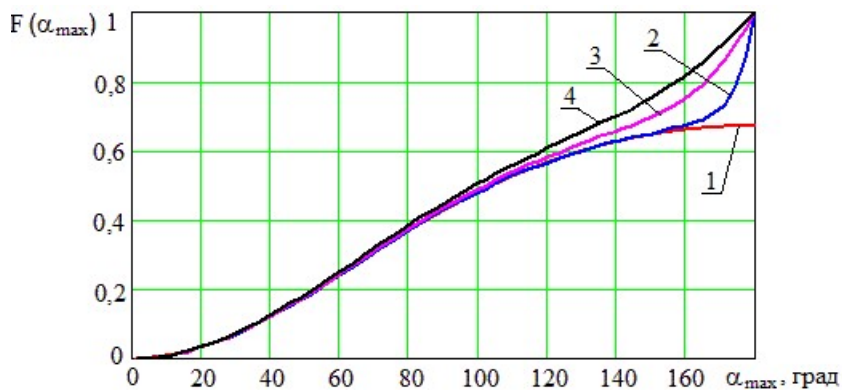


Рис. 3.12. Функция распределения максимального угла атаки
($\alpha_0 = 1$ град)

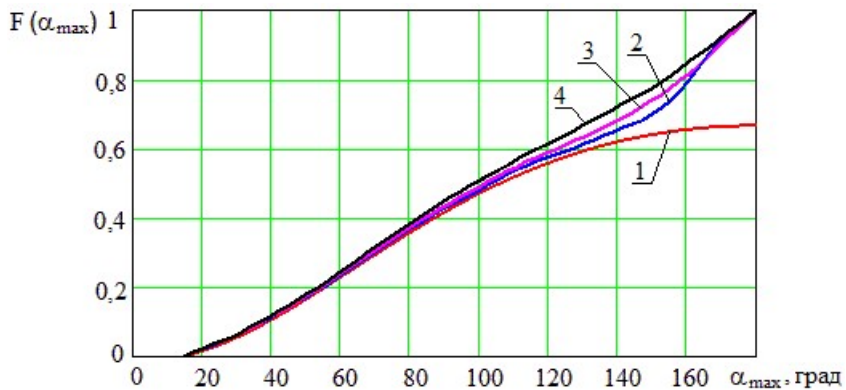


Рис. 3.13. Функция распределения максимального угла атаки
($\alpha_0 = 15$ град)

3.3.2 Резонансный случай движения аэродинамически стабилизированного наноспутника

Резонансные режимы движения космических аппаратов в атмосферной среде исследуются в работах [18-20]. В указанных работах рассматриваются космические аппараты, предназначенные для неуправляемого спуска в атмосфере, которые, как правило, относятся к классу осесимметричных тел вращения. Однако из-за конструктивных особенностей, неточности изготовления, возникает малая инерционно-массовая и геометрическая асимметрия, наличие которой и создаёт предпосылки возникновения резонанса.

Проанализируем возможность возникновения резонансных режимов движения при орбитальном полёте у наноспутников формата CubeSat, обусловленных форм-фактором прямоугольного параллелепипеда. Дело в том, что для наноспутника CubeSat, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения, а это создаёт предпосылки возникновения резонанса, который проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю.

Аэродинамическое угловое ускорение динамически симметричного наноспутника, учитывая выражение для аэродинамического момента (1.23) представим в виде

$$M_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = m_0(H)(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \sin \alpha, \quad (3.16)$$

где $m_0(H) = -\Delta \bar{x} c_0 S l q(H) / J_n$.

Для проведения анализа углового движения наноспутника в резонансном случае движения, полагая в выражении (3.16)

$$|\sin \varphi| + |\cos \varphi| \approx 1 + \frac{|\sin 2\varphi|}{1 + \sqrt{2}} \quad (\text{максимальная ошибка } 0,015), \text{ можно}$$

представить его в виде двух слагаемых: первого – основного, зависящего от пространственного угла атаки и высоты полёта и второго слагаемого, зависящего от пространственного угла атаки, угла собственного вращения и высоты полёта, приписывая ему малый параметр ε :

$$M_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = M_{\alpha}(\alpha, H) + \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H), \quad (3.17)$$

где

$$M_{\alpha}(\alpha, H) = m_0(H)(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha) \sin \alpha, \quad (3.18)$$

$$\Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = m_0(H)k_s \frac{|\sin 2\varphi|}{1 + \sqrt{2}} \sin^2 \alpha. \quad (3.19)$$

Для проведения приближенного анализа углового движения наноспутников в резонансном случае движения зависимость (3.18) с достаточной точностью также можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки

$$M_{\alpha}(\alpha, H) = m_0(H) m_{nk} \sin \alpha, \quad (3.20)$$

где $m_{nk} = 1,27$ при $k_s = 1$; $m_{nk} = 2,12$ при $k_s = 2$; $m_{nk} = 2,97$ при $k_s = 3$.

Учитывая представление аэродинамического углового ускорения наноспутника формата CubeSat в виде (3.17), угловое движение динамически симметричного наноспутника на низких круговых орбитах относительно траекторной системы координат, пренебрегая орбитальной угловой скоростью, можно описать уравнениями в форме [19], а изменение высоты полёта наноспутника уравнениям (2.4):

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} + F(\alpha, H) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H), \\
\dot{\varphi} &= R/\bar{J}_x - (G - R \cos \alpha) \cos \alpha / \sin^2 \alpha = \Phi_{\varphi}(\alpha, H), \\
\dot{H} &= -2\sigma_x(\alpha, \varphi)q(H)V(H)/g = \varepsilon \Phi_H(\alpha, \varphi, H), \\
F(\alpha, H) &= (G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - M_{\alpha}(\alpha, H).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Для изучения резонансных режимов колебательной системы (3.21), в соответствии с процедурой, предложенной в [21], приведём систему к форме, в которой содержатся медленно изменяющиеся и быстрые переменные типа быстро вращающихся фаз. Заменим первое уравнение системы (3.21) на два уравнения первого порядка для амплитуды α_{\max} и фазы $y = \omega(t - t_0)$. Множитель ω выберем так, чтобы общее решение системы (3.21) при невозмущённом движении ($\varepsilon = 0$) было 2π -периодической функцией y . В результате приходим к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, H), \quad \dot{y} = \omega(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, H), \\
\dot{\varphi} &= \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, H), \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H(y, \varphi, \alpha_{\max}, H).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, H) &= \\
&= \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max}, H)} \left[\Phi_{\alpha} \text{sign}(\dot{\alpha}) |\dot{\alpha}| - \left(\frac{\partial W(\alpha_{\max}, H)}{\partial H} - \frac{\partial W(\alpha, H)}{\partial H} \right) \Phi_H \right],
\end{aligned}$$

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2[W(\alpha_{\max}, H) - W(\alpha, H)]}, \quad W(\alpha, H) = \int F(\alpha, H) d\alpha,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, H) &= \\
&= -\varepsilon 2\pi \text{sign}(\dot{\alpha}) \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \right] \Phi_H + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_{\max}} \left(\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \right] \Phi_{\alpha_{\max}} \right\},
\end{aligned}$$

$\omega(\alpha_{\max}, H) = \frac{2\pi}{T(\alpha_{\max}, H)}$ – частота собственных колебаний системы

(3.21) при $\varepsilon = 0$, $T(\alpha_{\max}, H) = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}$ – период колебаний,

α_{\max} , α_{\min} – максимальный и минимальный углы атаки.

Введём в рассмотрение среднюю частоту собственного вращения [19]

$$\lambda(\alpha_{\max}, H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, H) dy. \quad (3.23)$$

Тогда уравнение для угла собственного вращения можно представить в виде

$$\dot{\varphi} = \lambda(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon L(y, \alpha_{\max}, H), \quad (3.24)$$

где $\varepsilon L(y, \alpha_{\max}, H) = \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, H) - \lambda(\alpha_{\max}, H)$.

С учётом соотношения (3.24) система уравнений (3.22) преобразуется к системе с двумя вращающимися фазами

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, H), & \dot{y} &= \omega(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, H) \\ \varphi &= \lambda(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon L(y, \alpha_{\max}, H), & \dot{H} &= \varepsilon \Phi_H(y, \varphi, \alpha_{\max}, H). \end{aligned} \quad (3.25)$$

В возмущенном движении резонансы проявляются, когда целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю [22]

$$n\omega - p\lambda = O(\varepsilon), \quad (3.26)$$

где n, p – целые взаимно простые числа.

Резонансные соотношения частот можно получить при вычислении средней мощности, вносимую в систему возбуждающим моментом за время T [22],

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) \dot{\alpha} dt . \quad (3.27)$$

В случае невозмущенного движения $\varepsilon = 0$, $H = \text{const}$ и, когда аэродинамическое угловое ускорение является синусоидальной функцией угла атаки (3.20), решение для пространственного угла атаки имеет вид [23]

$$\cos \alpha = A \operatorname{cn}^2 \left[\frac{yK}{\pi} + K, k \right] + x , \quad (3.28)$$

где $\operatorname{cn}(u)$ – эллиптический косинус, $x = \cos \alpha_{\max}$, $y = \omega(t - t_0)$, $\omega = \pi\beta/K$, $A = x_2 - x$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $k = \sqrt{A/2\eta}$ – модуль эллиптических функций $\beta = \sqrt{-m_0 m_{nk} \eta}$, $x_2 = \cos \alpha_{\min} = \eta - (a - bx)/(1 - x^2)$, $\eta = \sqrt{1 - 2(ax - b)/(1 - x^2) + [(a - bx)/(1 - x^2)]^2}$, $a = (R^2 + G^2)/(-4m_0 m_{nk})$, $b = RG/((-2m_0 m_{nk}))$.

Для малых значений модуля эллиптических функций k решение (3.28) упрощается [19]

$$\cos \alpha \approx a_1 + b_1 \cos y , \quad (3.29)$$

где $a_1 = (x + x_2)/2$, $b_1 = -(x_2 - x)/2$.

Средняя частота собственного вращения определяется выражением

$$\lambda \approx R(1/\bar{J}_x - 1/2) + \operatorname{sign}(R - G) \sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}} , \quad (3.30)$$

где $\omega_a = \sqrt{-m_0 m_{nk}}$.

Частота колебаний по пространственному углу атаки определяется выражением

$$\omega \approx 2 \sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}} . \quad (3.31)$$

С учётом соотношений (3.19), (3.29) после выполнения интегрирования (3.27) получим условия резонансов:

– если начальное движение соответствовало «прямой» прецессии $G > R$ то в системе имеют место резонансные соотношения частот $\omega = -4\lambda$, $\omega = 2\lambda$, $\omega = 4\lambda$, $3\omega = 4\lambda$;

– если начальное движение соответствовало «обратной» прецессии $R > G$ то в системе имеет место резонансное соотношение частот $3\omega = 4\lambda$.

Учитывая выражения для частот (3.30), (3.31), получим формулы для определения критического значения продольной угловой скорости наноспутника, при котором выполняются указанные выше условия возникновения резонансного движения:

– для соотношения частот $\omega = -4\lambda$ (при $G > R$) и $3\omega = 4\lambda$ (при $R > G$):

$$\omega_{xkr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x + \frac{3}{16} \bar{J}_x^2}}; \quad (3.32)$$

– для соотношения частот $\omega = 2\lambda$ (при $G > R$):

$$\omega_{xkr} = 2 \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x - \frac{3}{4} \bar{J}_x^2}}; \quad (3.33)$$

– для соотношения частот $\omega = 4\lambda$ (при $G > R$):

$$\omega_{xkr} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x - \frac{5}{16} \bar{J}_x^2}}; \quad (3.34)$$

– для соотношения частот $3\omega = 4\lambda$ (при $G > R$):

$$\omega_{xkr} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x - \frac{21}{16} \bar{J}_x^2}}. \quad (3.35)$$

Совокупность резонансов из (3.32)-(3.35), когда скорость собственного вращения отлична от нуля, определим как вращательные резонансы, в соответствии с терминологией, предложенной в [24].

Рассмотрим возможность возникновения так называемого резонанса крена или «лунного» резонанса [24] у наноспутника формата CubeSat, обусловленного форм-фактором прямоугольного параллелепипеда. При резонансе крена средняя угловая скорость собственного вращения близка к нулю: $\lambda \approx 0$. Резонансу крена соответствует значение $n = 0$ в резонансном условии (3.26).

Формулу для определения критического значения продольной угловой скорости наноспутника, при котором возникает резонанс крена, получим, приравняв формулу (3.30) нулю:

$$\omega_{xkr} = \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - J_x}}. \quad (3.36)$$

На рис. 3.14 представлены зависимости $\omega_{xkr}(H)$ для наноспутника CubeSat 3U ($J_x = 0,005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_n = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\Delta x = 0,05 \text{ м}$), при которых выполняются условия возникновения его резонансного движения, кривые 1,2,3,4,5 соответствуют выражениям (3.32), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36).

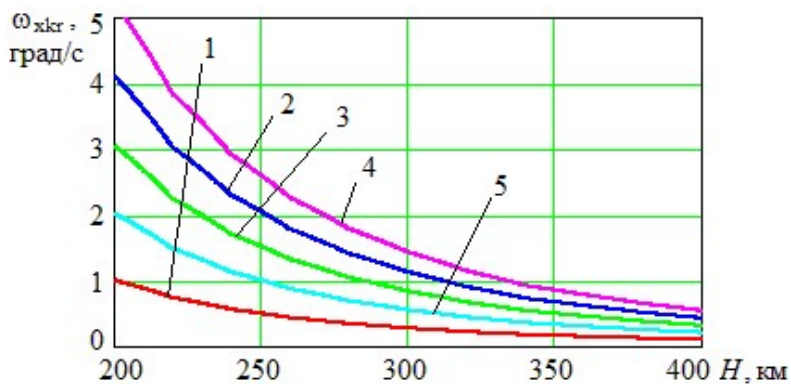


Рис. 3.14

Для примера, на рис. 3.15-3.20 показано резонансное изменение пространственного угла атаки наноспутника CubeSat 3U при различных начальных условиях движения:

– рис. 3.15 – начальная высота полёта $H = 242$ км, начальное значение пространственного угла атаки $\alpha_0 = 20$ град, начальное значение угла собственного вращения $\varphi_0 = 0$, начальное значение поперечной скорости $\omega_{z0} = 1$ град/с, продольная угловая скорость $\omega_x = 0,5$ град/с (начальное движение соответствует «прямой» прецессии $G > R$, резонансное соотношение частот $\omega = -4\lambda$);

– рис. 3.16 – $H = 300$ км, $\alpha_0 = 20$ град, $\varphi_0 = 0$, $\omega_{z0} = 0$ град/с, $\omega_x = 0,26$ град/с ($R > G$, $3\omega = 4\lambda$);

– рис. 3.17 – $H = 289$ км, $\alpha_0 = 30$ град, $\varphi_0 = 0$, $\omega_{z0} = 0,8$ град/с, $\omega_x = 1,3$ град/с ($G > R$, $\omega = 2\lambda$);

– рис. 3.18 $H = 283$ км, $\alpha_0 = 15$ град, $\varphi_0 = 0$, $\omega_{z0} = 0,6$ град/с, $\omega_x = 1$ град/с ($G > R$, $\omega = 4\lambda$);

– рис. 3.19 $H = 292$ км, $\alpha_0 = 30$ град, $\varphi_0 = 0$, $\omega_{z0} = 0,6$ град/с, $\omega_x = 1,63$ град/с ($G > R$, $3\omega = 4\lambda$);

– рис. 3.20 $H = 251$ км, $\alpha_0 = 30$ град, $\varphi_0 = 45$ град, $\omega_{z0} = 0,5$ град/с, $\omega_x = 1$ град/с ($G > R$, резонанс крена).

Таким образом, показана возможность возникновения резонансных режимов движения при орбитальном полёте у наноспутников формата CubeSat, обусловленных форм-фактором прямоугольного параллелепипеда. Получены формулы для определения критического значения продольной угловой скорости наноспутника, при котором выполняются условия возникновения резонансного движения.

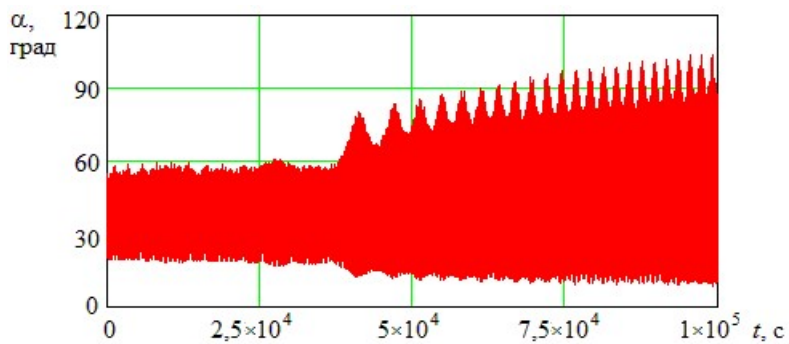


Рис. 3.15

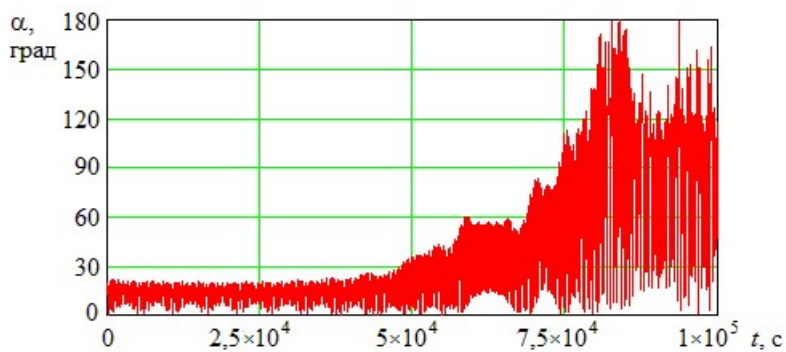


Рис. 3.16

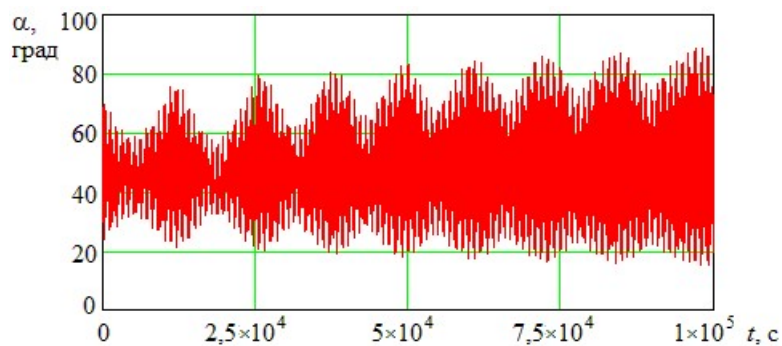


Рис. 3.17

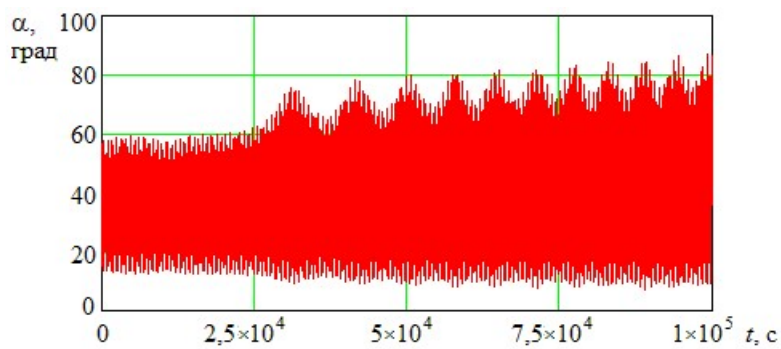


Рис. 3.18

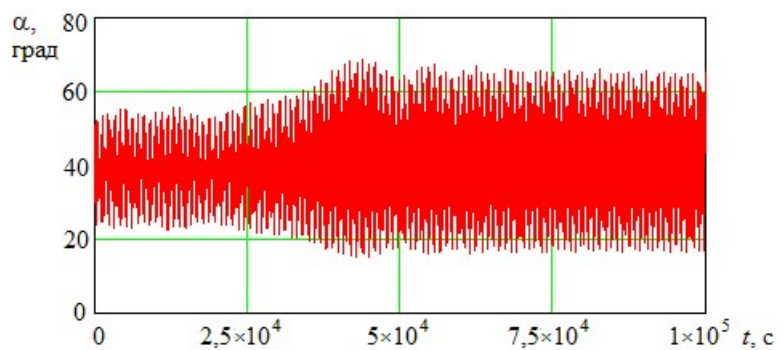


Рис. 3.19

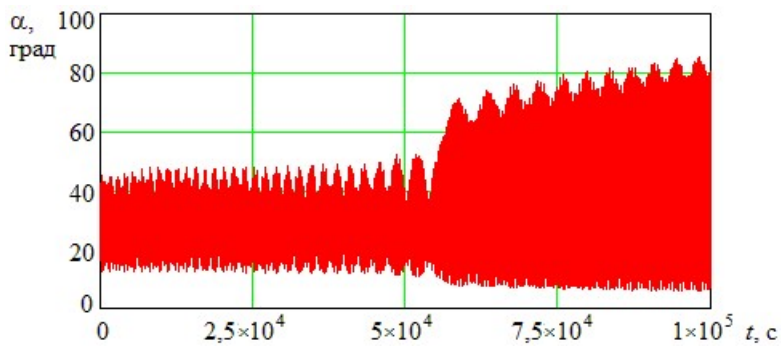


Рис. 3.20

Учёт возможности возникновения резонансных режимов движения позволит повысить эффективность работы системы ориентации наноспутника при решении им целевых задач на низких орбитах.

Исключить резонансные режимы движения наноспутника можно заданием ограничения на величину продольной угловой скорости при отделении от пускового устройства, а также включением системы стабилизации с целью рассогласования резонансного соотношения частот.

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ПАССИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

4.1 Постановка задачи. Классификация систем стабилизации

Проведение большинства научных исследований в космосе предполагает вполне определённую ориентацию углового положения в пространстве. Для обеспечения требуемой ориентации наноспутников часто используются пассивные или комбинированные (пассивные в сочетании с активными) системы стабилизации, которые не требуют или требуют незначительного расхода рабочего тела и энергии, запасённых на борту.

Анализ внешних моментов, создаваемых окружающей средой, показывает, что при соответствующем проектировании за счет выбора его формы, размеров и распределения масс можно создать такие условия, когда эти моменты будут оказывать стабилизирующее влияние на угловые движения наноспутника. В этом случае совмещение связанных осей с осями базовой системы отсчета осуществляется под действием указанных моментов без использования специальных управляющих устройств. Применение последних связано с неизбежными затратами энергии, запасенной на борту наноспутника в том или ином виде. Методы стабилизации, основанные на использовании внешних моментов, создаваемых окружающей средой, не требуют подобных затрат. Поэтому такую стабилизацию принято называть пассивной. Сюда относится также стабилизация одной оси наноспутника в пространстве за счет придания ему вокруг оси постоянной угловой скорости, так как в процессе стабилизации также не требуется использование энергии бортовых источников.

Целесообразность применения того или иного метода пассивной стабилизации (того или иного внешнего момента) определяется выбранной базовой системой отсчета, так как каждый момент стабилизирует угловые движения наноспутника относительно определенной системы координат. Гравитационный момент стабилизирует наноспутник в орбитальной системе координат, аэродинамический – в скоростной системе координат, магнитный – в магнитной системе координат, а момент давления солнечных лучей – в солнечной системе координат. С другой стороны, возможность использования конкретного метода зависит от условий полета наноспутника и, в частности, от высоты. Поэтому каждому методу свойственен определенный диапазон высот, в котором этот момент играет преобладающую роль.

Для повышения стабилизирующего действия момента могут применяться специальные меры (например, установка стабилизатора). Это позволяет повысить его интенсивность по сравнению с другими моментами и свести к минимуму их возмущающее влияние на процесс стабилизации. Кроме того, указанные меры позволяют несколько расширить область применения того или иного метода по сравнению с областями применения соответствующих моментов. Совокупность подобных устройств с устройствами пассивного демпфирования колебаний наноспутника называется системой пассивной стабилизации [25].

Одной из основных задач при разработке пассивных систем стабилизации является исследование неуправляемого движения наноспутника относительно центра масс, так как обеспечение расчетных условий углового движения осуществляется только на этапе проектирования выбором его конструктивных параметров, а также заданием ограничений на величины угловых скоростей, по-

рождаемых системой отделения, а при комбинированной системе стабилизации на момент окончания работы активной системы успокоения.

При разработке пассивной системы стабилизации, как правило, используются знания об устойчивых положениях равновесия наноспутника, обусловленные действием внешних моментов. Большинство наноспутников запускаются на низкие круговые орбиты, на которых преобладают гравитационный и аэродинамический моменты и для стабилизации углового положения целесообразно использовать оба момента. Вопросам определения положений равновесия спутников в орбитальной системе координат и анализу их устойчивости уделяется значительное внимание в литературе. основополагающие исследования влияния аэродинамического и гравитационного моментов на движение спутника относительно центра масс проведены, например, в [2, 26-28].

В известных работах задача обеспечения определённой ориентации в пространстве наноспутника решается в детерминированной постановке. Так, например, в [29-31] рассматривается задача обеспечения аэродинамической стабилизации наноспутника формата CubeSat путём развёртывания солнечных панелей под определённым углом к его продольной оси после отделения от транспортно пускового контейнера. При этом гашение начальной угловой скорости осуществляется с помощью гистерезисных стержней или средствами активной магнитной системы управления (применяется алгоритм управления $B \cdot \dot{\theta}$).

В работах [32-35], наряду с пассивной аэродинамической системой стабилизации, для достижения трёхосной стабилизации используется маховики или активная магнитная система стабилизации. В [36,37] трёхосная стабилизация обеспечивается пассивной

гравитационной стабилизацией и активной магнитной системой стабилизации.

В данной работе задача обеспечения определённой ориентации наноспутника в пространстве рассматривается в вероятностной постановке применительно к угловому движению наноспутника после его отделения от носителя, учитывая, что существующие коммерческие пусковые устройства отделения наноспутников порождают большие величины начальной угловой скорости.

Введём классификацию пассивных систем стабилизации для наноспутников формата CubeSat, совершающих полёт по круговой орбите: аэродинамическая, аэродинамически-гравитационная, гравитационная и гравитационно-аэродинамическая, которые можно использовать применительно к диапазону высот доминирования определённого типа момента внешних сил и виду стабилизации (одноосная и трёхосная).

Необходимость такой классификации систем стабилизации наноспутников формата CubeSat обусловлена тем, что величина углового ускорения наноспутника, порождаемого аэродинамическим моментом, на два порядка выше, чем для классических аппаратов с большей массой и размерами (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объемной плотности) [1]. Это позволяет расширить диапазон высот, на которых аэродинамический момент является значимым и его можно использовать совместно с гравитационным моментом для стабилизации углового положения.

На рис. 4.1 для наноспутника формата CubeSat 3U ($0,1 \times 0,1 \times 0,3 \text{ м}^3$) выделены области высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\bar{x}$ для различных типов пассивной стабилизации: I – одноосная аэродинамическая система ста-

билизации по вектору скорости (область, где аэродинамический момент превосходит гравитационный $M_a \geq 2M_g$); 2 – трёхосная аэродинамически гравитационная система стабилизации (область, где $M_a \geq 2M_g$); 3 – одноосная и трёхосная гравитационные системы стабилизации по местной вертикали (область, где $M_g \geq 5M_a$); 4 – трёхосная гравитационно-аэродинамическая система стабилизации (области любого отношения аэродинамического и гравитационного моментов).

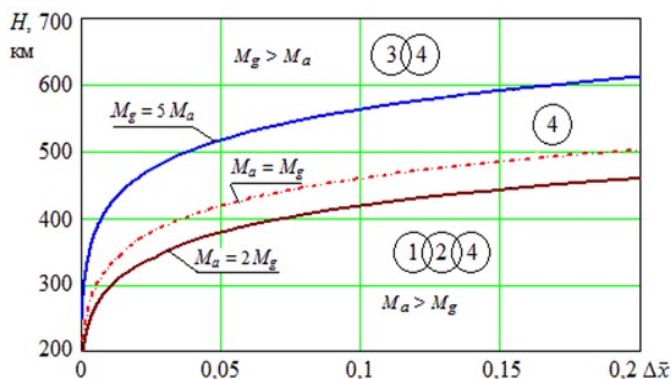


Рис. 4.1. Области предпочтительного применения типа пассивной стабилизации наноспутника CubeSat 3U в зависимости от значений высот H и относительного запаса статической устойчивости $\Delta\bar{x}$

Расчёты проводились для стандартной атмосферы [3]. Следует отметить, что размеры областей могут изменяться в зависимости от уровня солнечной активности.

4.2 Аэродинамическая стабилизация по вектору скорости

Рассмотрим вариант выбора проектных параметров динамически симметричного наноспутника формата CubeSat для обеспечения аэродинамической пассивной системы стабилизации его

продольной оси вдоль вектора скорости центра масс (область 1 на рис. 4.1).

Полученные в разделе 2.4 аналитические выражения для функции распределения максимального угла атаки положим в основу получения формул для выбора проектно-баллистических параметров (запаса статической устойчивости, геометрических размеров, поперечного момента инерции) аэродинамически стабилизированного наноспутника.

С целью разрешения уравнений (2.17) и (2.20) относительно проектных параметров наноспутника, коэффициент аппроксимации синусоидальной зависимостью по углу атаки коэффициента восстанавливающего аэродинамического момента, вычисленного относительно центра масс, можно приближённо вычислить следующим образом:

$$a_0 \approx m_\alpha(\pi/2) = -c_0 \Delta \bar{x} \frac{4k_s}{\pi}. \quad (4.1)$$

Так, например, для наноспутника CubeSat 2U с размерами $0,1 \times 0,1 \times 0,2 \text{ м}^3$ коэффициент a_0 , вычисленный методом наименьших квадратов, равен $a_0 = -1,14$, а по формуле (4.1) $a_0 = -1,12$, для наноспутника CubeSat 3U с размерами $0,1 \times 0,1 \times 0,3 \text{ м}^3$ коэффициент a_0 , определённый методом наименьших квадратов, равен $a_0 = -1,68$, а по формуле (6) $a_0 = -1,61$, что достаточно близко и не изменяет результат исследования.

Задавая p^* – вероятность реализации допустимого значения максимального угла атаки α_{\max}^* , подставляя выражение для коэффициента a , обусловленного аэродинамическим восстанавливающим моментом в (2.17), (2.20), учитывая (4.1), пренебрегая величиной коэффициента c , обусловленного действием гравитаци-

онного момента, разрешая (2.17), (2.20), относительно проектных параметров, объединенных в конструктивный параметр $d = \frac{\Delta x}{J} lb$ (b сторона основания прямоугольного параллелепипеда), получим требование к его величине. Для того чтобы максимальный угол атаки наноспутника стандарта CubSat α_{\max} был меньше допустимого значения с вероятностью не меньшей чем p^* , необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра наноспутника [1]:

- если величина начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ отвечает распределению Рэлея

$$d = \frac{\Delta x}{J} lb \geq \frac{\pi \sigma^2 \ln(1-p^*)}{4c_0 (\cos \alpha_{\max}^* - \cos \alpha_0) q(H)}; \quad (4.2)$$

- при распределении начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0\max}]$

$$d = \frac{\Delta x}{J} lb \geq \frac{\pi (\dot{\alpha}_{0\max} p^*)^2}{8c_0 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_{\max}^*) q(H)}. \quad (4.3)$$

где b - сторона основания прямоугольного параллелепипеда.

Используя полученные выражения (4.2) и (4.3), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра. Так, например, на рис. 4.2 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра наноспутника от высоты орбиты H и от величины параметра σ (начальная поперечная угловая скорость имеет распределение Рэлея) для значений максимально угла атаки $\alpha_{\max}^* = 20$ град, вероятности $p^* = 0,95$ и начального угла атаки $\alpha_0 = 0$, слева приведены значения конструктивного параметра

наноспутника CubeSat 3U с различными значениями поперечного момента инерции в зависимости от запаса статической устойчивости Δx . Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы в соответствии с ГОСТ 4401-81 [3].

Номограммы можно использовать как для выбора проектных параметров наноспутника, так и для задания требований к разбросу начальной продольной угловой скорости. В частности, на рис. 4.2 отражена последовательность выбора параметров наноспутника для высоты орбиты $H=380$ км при заданных ограничениях $\alpha_{\max}^* = 20$ град, $p^* = 0,95$, $\alpha_0 = 0$, $\sigma = 0,05$ град/с на условия движения относительно центра масс, формируемых целевой задачей полета. Как видно, значение конструктивного параметра наноспутника для обеспечения заданного движения должно отвечать условию $d \geq 0,13$ м/кг (правая часть рисунка), проектные параметры выбираются на основании левой части рисунка.

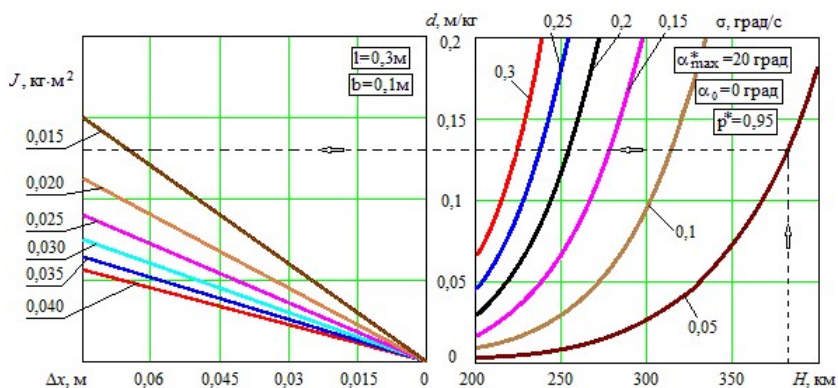


Рис. 4.2. Пример номограммы для выбора конструктивного параметра наноспутника с аэродинамической системой стабилизации

Если аэродинамический момент незначительно больше гравитационного, то можно по формулам (2.17), (2.20), провести пере-

оценку вероятности выполнения требований к максимальному углу атаки или задать новые ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения.

Если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея, то ограничение на масштабный параметр распределения σ определяется по формуле:

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{-a(\cos \alpha_{\max}^* - \cos \alpha_0) - c(\cos^2 \alpha_{\max}^* - \cos^2 \alpha_0)}{\ln(1 - p^*)}}. \quad (4.4)$$

Если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0\max}]$, то ограничение на величину $\dot{\alpha}_{0\max}$ определяется по формуле:

$$\dot{\alpha}_{0\max} \leq \frac{\sqrt{2a(\cos \alpha_{\max}^* - \cos \alpha_0) + 2c(\cos^2 \alpha_{\max}^* - \cos^2 \alpha_0)}}{p^*}. \quad (4.4a)$$

На предлагаемый подход к выбору проектных параметров аэродинамически стабилизируемого наноспутника класса CubeSat получен Евразийский патент [38].

4.3 Аэродинамически-гравитационная трёхосная стабилизация

На рис. 4.1 показана область возможной реализации аэродинамически-гравитационной трёхосной стабилизации (область 2) наноспутника на низких круговых орбитах для случая, когда определяющим движением наноспутника относительно центра масс является аэродинамический момент, который и обеспечивает стабилизацию продольной оси наноспутника (при этом стабилизация

поперечных осей наноспутника осуществляется за счёт гравитационного момента).

Стабилизация продольной оси наноспутника по вектору скорости, как было показано выше, может быть обеспечена за счёт выбора проектных параметров: запаса статической устойчивости, геометрических размеров, поперечного момента инерции, принимаемого в данном случае за наибольший момент инерции J_y . В то же время возможность стабилизации поперечных осей наноспутника может быть достигнута за счёт гравитационного момента, вызванного созданием определённой разности значений главных центральных моментов инерции относительно поперечных осей. При этом гравитационный момент стремится ориентировать поперечную ось Oy – ось наибольшего момента инерции наноспутника так, чтобы она совпала с перпендикуляром к плоскости орбиты.

Проанализируем возможность стабилизации поперечных осей наноспутника за счёт гравитационного момента, полагая, что продольная ось наноспутника стабилизирована относительно вектора скорости центра масс (угол атаки мал). Тогда, колебания поперечных осей в плоскости, перпендикулярной вектору скорости центра масс, приближённо можно описать уравнением вида [39]:

$$\ddot{\delta} - \frac{2\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \sin 2\delta = 0, \quad (4.5)$$

где δ – угол крена (угол отклонения поперечной оси Oz от плоскости полёта, для которой момент инерции J_z принимает промежуточное значение между J_x и J_y , то есть удовлетворяет условию $J_x < J_z < J_y$).

Изменение высоты круговой орбиты вследствие сопротивления атмосферы происходит очень медленно, и при рассмотрении

углового движения наноспутника на одном или нескольких витках можно принять допущение о постоянстве высоты полёта $H = \text{const}$. В этом случае для системы (4.5) справедлив интеграл энергии, записанный в виде:

$$\dot{\delta}^2 / 2 + d_0 \cos 2\delta = E_0, \quad (4.6)$$

где $E_0 = d_0 \cos 2\delta_0 + \frac{\omega_{x0}^2}{2}$ определяется через начальные условия углового движения; $\omega_{x0} = \dot{\delta}_0$ – начальная продольная угловая скорость; $d_0 = \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right)$.

Тогда величину максимального угла крена δ при колебаниях в диапазоне $[0, \pi / 2]$ можно найти из интеграла энергии (4.6) при $\dot{\delta} = 0$:

$$\delta_{\max} = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{E_0}{d_0} \right). \quad (4.7)$$

Из величин, входящих в (4.7), наибольший разброс значений имеет величина продольной угловой скорости ω_{x0} . Тогда, пренебрегая разбросами других величин, вычисляя распределение функции δ_{\max} по распределению аргумента ω_{x0} в соответствии с [15], получим аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла крена δ_{\max} для двух вариантов законов распределения модуля величины ω_{x0} .

Пусть величина ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением σ . Тогда функция распределения модуля величины ω_{x0} определяется выражением:

$$F(\omega_{x0}) = 2\Phi_0\left(\frac{\omega_{x0}}{\sigma}\right), \quad (4.8)$$

а функция распределения величины максимального угла крена δ_{\max} :

$$F(\delta_{\max}) = 2\Phi_0\left(\frac{\sqrt{2d_0(\cos 2\delta_{\max} - \cos 2\delta_0)}}{\sigma}\right), \quad (4.9)$$

где $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Пусть модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0 \max}]$:

$$F(\omega_{x0}) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{x0 \max}}, & \omega_{x0} \in [0, \omega_{x0 \max}] \\ 0, & \omega_{x0} \notin [0, \omega_{x0 \max}] \end{cases}, \quad (4.10)$$

тогда функция распределения величины максимального угла крена δ_{\max} определяется выражением:

$$F(\delta_{\max}) = \frac{\sqrt{2d_0(\cos 2\delta_{\max} - \cos 2\delta_0)}}{\omega_{x0 \max}}. \quad (4.11)$$

Задавая значение вероятности p^* реализации допустимого значения максимального угла крена δ_{\max} , разрешая выражения (4.9) и (4.11) относительно проектных параметров, объединенных в конструктивный параметр наноспутника $d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x}$, можно получить требование к его величине. Для того, чтобы максималь-

ный угол крена δ_{\max} был меньше допустимого значения с вероятностью, не меньшей чем p^* , при заданных разбросах продольной угловой скорости, порождаемых системой отделения (а при комбинированной системе стабилизации на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения), необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра наноспутника d_k :

- в случае, если величина ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением σ :

$$d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{\sigma^2 (t^*)^2}{(\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_{\max}^*)}, \quad (4.12)$$

где t^* – аргумент функции Лапласа по заданной вероятности $\Phi_0(t^*) = p^* / 2$;

- в случае распределения модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0\max}]$:

$$d_k = \frac{J_y - J_z}{J_x} \geq \frac{(R_3 + H)^3}{2\mu} \frac{(\omega_{x0\max} p^*)^2}{(\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_{\max}^*)}. \quad (4.13)$$

Используя полученные выражения (4.12) и (4.13), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра d_k . Так, например, на рис. 4.3 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра наноспутника d_k от значения допустимого угла

крена δ_{\max}^* и от значения $\omega_{x0\max}$ (начальная продольная угловая скорость распределена по равномерному закону).

Номограммы рассчитаны для начального угла крена $\delta_0 = 0$, вероятности $p^* = 0,95$ и высоты полёта $H = 380$ км. В левой части рисунка отражены зависимости значения конструктивного параметра наноспутника d_k от значений моментов инерции J_z и J_x , для выбранного ранее значения наибольшего момента инерции, равного $J_y = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

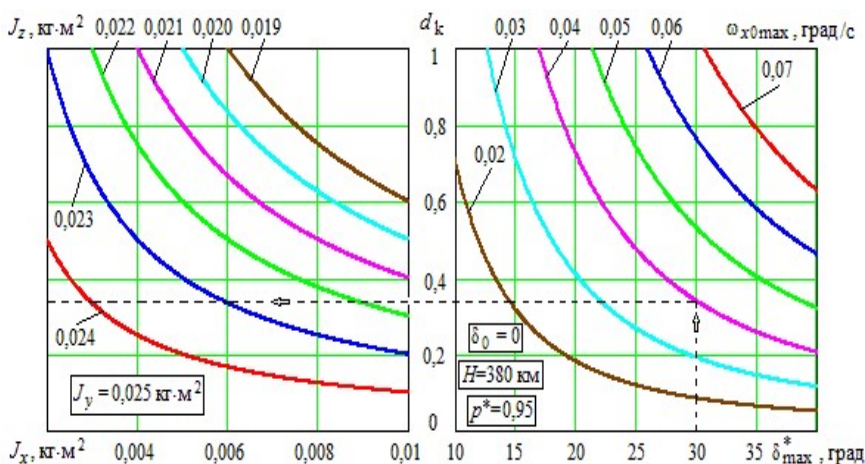


Рис. 4.3. Пример номограммы для выбора конструктивного параметра наноспутника с аэродинамически-гравитационной системой стабилизации

Номограммы можно использовать как для выбора проектных параметров наноспутника, так и для задания требований к разбросу начальной продольной угловой скорости.

4.4 Гравитационная одноосная стабилизация по местной вертикали

Рассмотрим вариант выбора проектных параметров динамически симметричного наноспутника формата CubeSat для обеспечения гравитационной пассивной системы стабилизации его продольной оси вдоль местной вертикали (область 3 на рис. 4.1).

Этот тип пассивной одноосной стабилизации динамически симметричного наноспутника применим для диапазона орбит, на которых гравитационный момент играет доминирующую роль и стремится сориентировать наноспутник так, чтобы ось наименьшего момента инерции совпадала с местной вертикалью.

Подставляя выражение для коэффициента c , обусловленного гравитационным моментом в (2.17) и (2.20), пренебрегая величиной коэффициента a , обусловленного действием аэродинамического момента, разрешая (2.17) и (2.20) относительно проектных параметров (моментов инерции), объединенных в конструктивный параметр $d_g = \frac{J_x}{J}$, получим требование к его величине. Для того чтобы максимальный угол отклонения продольной оси наноспутника от гравитационной вертикали β_{\max} ($\beta_{\max} = \alpha_{\max} - \pi/2$) был меньше допустимого значения β_{\max}^* с вероятностью не меньшей чем p^* , необходимо выполнение следующего условия для конструктивного параметра наноспутника d_g [40]:

- в случае если начальная угловая скорость $\dot{\beta}_0$ имеет распределение Рэлея

$$d_g = \frac{J_x}{J} \leq 1 - \frac{4(R_3 + H)^3}{3\mu} \frac{\sigma^2 \ln(1 - p^*)}{(\cos 2\beta_{\max}^* - \cos 2\beta_0)}; \quad (4.14)$$

• в случае распределения начальной угловой скорости по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\beta}_{0\max}]$

$$d_g = \frac{J_x}{J} \leq 1 - \frac{4(R_3 + H)^3}{3\mu} \frac{(\dot{\beta}_{0\max} p^*)^2}{-2(\cos 2\beta_{\max}^* - \cos 2\beta_0)}, \quad (4.15)$$

где β_0 начальное значение отклонения продольной оси наноспутника от гравитационной вертикали.

Используя полученные выражения (4.14) и (4.15), можно построить номограммы для оценки возможности обеспечения требуемого значения конструктивного параметра d_g . Так, например, на рис. 4.4 справа приведены зависимости требуемого конструктивного параметра гравитационно-стабилизированного наноспутника от допустимого значения максимального угла отклонения продольной оси наноспутника от вертикали β_{\max}^* и от значения $\dot{\beta}_{0\max}$ (начальная поперечная угловая скорость распределена по равномерному закону) для вероятности $p^* = 0,95$, при $\beta_0 = 2$ град, $H_0 = 500$ км, слева приведены значения конструктивного параметра гравитационно-стабилизированного наноспутника с различными значениями поперечного и продольного моментов инерции.

Если гравитационный момент незначительно больше аэродинамического, то можно провести переоценку вероятности выполнения требований к максимальному углу отклонения продольной оси наноспутника от гравитационной вертикали по формулам (4.14) и (4.15), полагая $\alpha_{\max} = \pi/2 + \beta_{\max}$, или задать новые ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения.

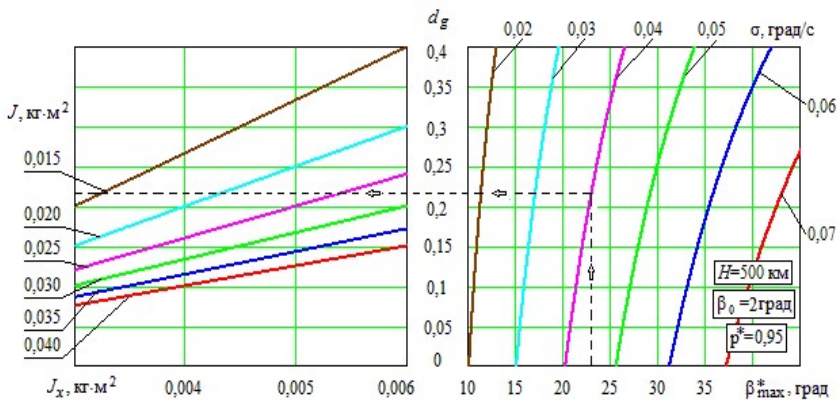


Рис. 4.4. Пример номограммы для выбора конструктивного параметра наноспутника с гравитационной системой стабилизации

Если модуль величины $\dot{\beta}_0$ имеет распределение Рэлея, то ограничение на масштабный параметр распределения σ определяется по формуле:

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{a(\sin \beta_{\max}^* - \sin \beta_0) - c(\sin^2 \beta_{\max}^* - \sin^2 \beta_0)}{\ln(1 - p^*)}}. \quad (4.16)$$

Если модуль величины $\dot{\beta}_0$ распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\beta}_{0\max}]$, то ограничение на величину $\dot{\beta}_{0\max}$ определяется по формуле:

$$\dot{\beta}_{0\max} \leq \frac{\sqrt{-2a(\sin \beta_{\max}^* - \sin \beta_0) + 2c(\sin^2 \beta_{\max}^* - \sin^2 \beta_0)}}{p^*}. \quad (4.17)$$

4.5 Гравитационная трёхосная стабилизация

Гравитационная трёхосная стабилизация отмечена на рис. 4.1 как область 3. Известно, что гравитационный момент стремится ориентировать наноспутник так, чтобы ось наименьшего главного центрального момента инерции (продольная ось) совпала с местной вертикалью, ось наибольшего главного центрального момента инерции – с перпендикуляром к плоскости орбиты и ось главного центрального момента инерции с промежуточным значением – с направлением движения.

В данной работе задача обеспечения трёхосной гравитационной ориентации наноспутника в пространстве рассматривается в вероятностной постановке применительно к угловому движению наноспутника.

Стабилизацию продольной оси наноспутника в первом приближении можно обеспечить путём выбора проектных параметров (наименьшего момента инерции J_x и поперечного момента инерции J) по формулам и номограммам, приведённым выше для одноосной гравитационной стабилизации. Принимая в данном случае за величину наибольшего момента инерции J_y величину поперечного момента инерции J . Значения наименьшего J_x и промежуточного J_z моментов инерции рекомендуется при компоновке наноспутника обеспечить минимально возможными.

Для решения задачи стабилизации продольной оси наноспутника с заданной вероятностью использовалась приближённая модель углового движения, которая описывает изменение угла β ($\beta = \alpha - \pi / 2$):

$$\ddot{\beta} + \frac{3\mu}{2(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) \sin 2\beta = 0. \quad (4.18)$$

Если модуль величины начальной поперечной скорости ω_{n0} имеет распределение Рэлея, то функция распределения максимального угла β_{\max} определяется по формуле:

$$F(\beta_{\max}) = 1 - e^{-\frac{-3\mu}{2(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{\max} - \sin^2 \beta_0)}{\sigma^2} . \quad (4.19)$$

где β_0 – начальное значение угла β .

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0 \max}]$, то функция распределения максимального угла β_{\max} определяется по формуле:

$$F(\beta_{\max}) = \frac{\sqrt{\frac{3\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{\max} - \sin^2 \beta_0)}}{\omega_{n0 \max}} . \quad (4.20)$$

Для решения задачи обеспечения стабилизации поперечных осей использовались следующие приближенные модели углового движения (при получении которых, полагалось, что пространственный угол атаки близок к 90 град).

Для получения аналитических законов распределения угла прецессии ψ использовалась модель:

$$\ddot{\psi} + \frac{2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \sin 2\psi = 0 . \quad (4.21)$$

Если модуль величины начальной поперечной скорости ω_{n0} имеет распределение Рэлея, то функция распределения максимального угла прецессии ψ_{\max} определяется по формуле:

$$F(\psi_{\max}) = 1 - e^{-\frac{-2\mu}{(R_3+H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{\max} - \sin^2 \psi_0)}{\sigma^2} . \quad (4.22)$$

где ψ_0 – начальное значение угла прецессии.

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0 \max}]$, то функция распределения максимального угла прецессии ψ_{\max} определяется по формуле:

$$F(\psi_{\max}) = \frac{\sqrt{\frac{4\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{\max} - \sin^2 \psi_0)}}{\omega_{n0 \max}}. \quad (4.23)$$

Для получения аналитических законов распределения угла собственного вращения φ (угол между плоскостью пространственного угла атаки и осью Oz) использовалась модель:

$$\ddot{\varphi} - \frac{\mu}{2(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \sin 2\varphi = 0. \quad (4.24)$$

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то функция распределения максимального угла собственного вращения φ_{\max} определяется по формуле:

$$F(\varphi_{\max}) = 2\Phi_0 \left(\frac{\sqrt{\frac{2\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{\max} - \cos 2\varphi_0)}}{\sigma} \right). \quad (4.25)$$

где φ_0 начальное значение угла собственного вращения.

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0 \max}]$, то функция распределения величины максимального угла φ_{\max} определяется выражением:

$$F(\varphi_{\max}) = \frac{\sqrt{\frac{2\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{\max} - \cos 2\varphi_0)}}{\omega_{x0\max}}. \quad (4.26)$$

Задавая значение вероятности p^* реализации допустимых значений максимальных углов β_{\max}^* , ψ_{\max}^* и φ_{\max}^* , используя формулы (4.19), (4.20), (4.22), (4.23), (4.25), (4.26), можно задать ограничения на величины угловых скоростей, порождаемых системой отделения, а при использовании комбинированной системы стабилизации – на момент окончания работы активной системы предварительного успокоения.

Если модуль величины ω_{n0} имеет распределение Рэлея, то ограничение на масштабный параметр распределения σ определяется по формуле:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{-3\mu}{2(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{\max}^* - \sin^2 \beta_0)}{\ln(1 - p^*)}. \quad (4.27)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{-2\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{\max}^* - \sin^2 \psi_0)}{\ln(1 - p^*)}. \quad (4.28)$$

Следует отметить, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (4.27) более жесткое (включает выполнение условия (4.28)).

Если модуль величины ω_{n0} распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{n0 \max}]$, то ограничение на величину $\omega_{n0 \max}$ определяется по формуле:

– при рассмотрении движения по углу β

$$\omega_{n0 \max} \leq \frac{\sqrt{\frac{3\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) (\sin^2 \beta_{\max}^* - \sin^2 \beta_0)}}{p^*}; \quad (4.29)$$

– при рассмотрении движения по углу ψ

$$\omega_{n0 \max} \leq \frac{\sqrt{\frac{4\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_y - J_x}{J_z} \right) (\sin^2 \psi_{\max}^* - \sin^2 \psi_0)}}{p^*}. \quad (4.30)$$

Следует отметить, что при задании одинаковой вероятности p^* и одинаковых начальных и максимальных значений углов β и ψ условие (30) более жесткое.

Если величина начальной продольной угловой скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то требуется выполнение ограничения на его величину

$$\sigma \leq \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{\max}^* - \cos 2\varphi_0)}}{t^*}. \quad (4.31)$$

В случае распределения модуля начальной продольной угловой скорости ω_{x0} по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0 \max}]$ требуется выполнение ограничения на величину $\omega_{x0 \max}$

$$\omega_{x0\max} \leq \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos 2\varphi_{\max}^* - \cos 2\varphi_0)}}{p^*}. \quad (4.32)$$

Используя полученные выражения (4.27-4.32), можно построить номограммы для задания ограничений на величины начальных угловых скоростей. Так, например, для наноспутника с моментами инерции $J_y = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 0,023 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ и $J_x = 0,003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ на рис. 4.5 (при рассмотрении движения по углу β) и рис. 4.6 (при рассмотрении движения по углу ψ) показаны номограммы для определения ограничений на величину начальной поперечной угловой скорости (из двух значений выбирается минимальное) в зависимости от начальных значений углов β_0 , ψ_0 и их допустимых максимальных значений β_{\max}^* , ψ_{\max}^* .

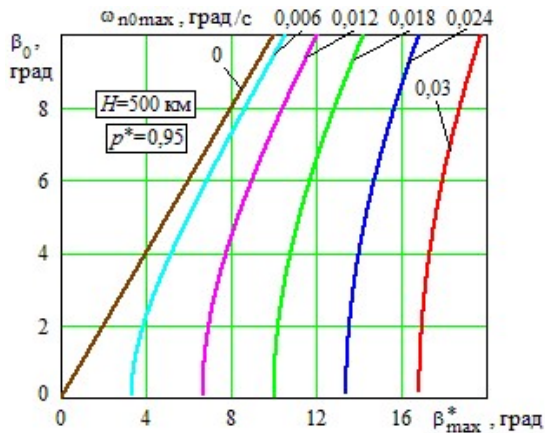


Рис. 4.5. Пример номограммы для задания ограничений на величину начальной поперечной угловой скорости наноспутника с гравитационной трёхосной стабилизацией при рассмотрении движения по углу β

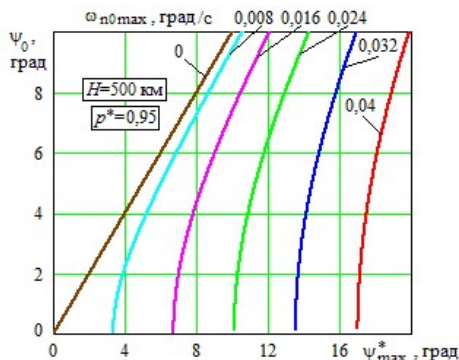


Рис. 4.6. Пример номограммы для задания ограничений на величину начальной поперечной угловой скорости наноспутника с гравитационной трёхосной стабилизацией при рассмотрении движения по углу ψ

На рис. 4.7 показана номограмма для определения ограничений на величину начальной продольной угловой скорости в зависимости от начального значения угла φ_0 и его допустимого максимального значения φ^*_{\max} .

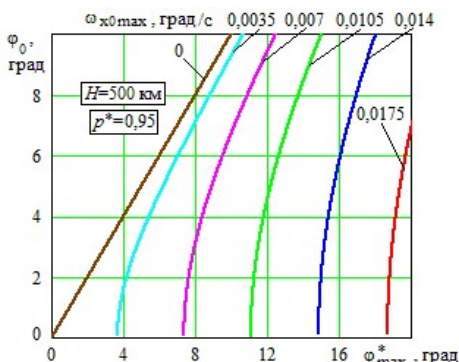


Рис. 4.7. Пример номограммы для задания ограничений на величину начальной продольной угловой скорости наноспутника с гравитационной трёхосной стабилизацией

Номограммы рассчитаны для вероятности $p^*=0,95$ и высоты полёта $H = 500$ км.

4.6 Гравитационно-аэродинамическая трёхосная стабилизация

Гравитационно-аэродинамическая трёхосная стабилизация отмечена на рис. 4.1 как область 4. Пассивная трёхосная гравитационно-аэродинамическая стабилизация осуществляется путём смещения центра масс от центра давления на определённую величину по оси с промежуточным значением момента инерции наноспутника. В этом случае для стабилизации углового положения используются два момента: гравитационный и аэродинамический.

Будем полагать, что центр масс наноспутника смещён от его геометрического центра вдоль оси промежуточного главного момента инерции на величину Δz и вдоль продольной оси на величину Δx (при этом $\Delta x \ll \Delta z$), а ось наибольшего главного момента инерции наноспутника направлена перпендикулярно к плоскости орбиты. Угловое движение наноспутника в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат под действием гравитационного момента и аэродинамического момента описывается уравнением [41]:

$$\ddot{\alpha} - (a_x(h) \sin \alpha + a_z(h) \cos \alpha) \left(|\cos \alpha| + k_s |\sin \alpha| \right) - c_1(h) \sin 2\alpha = 0. \quad (4.33)$$

Здесь $a_z(H) = \Delta \bar{z} c_0 S l q(H) / J_y$, коэффициент, обусловленный составляющей аэродинамического момента, вызванной смещением центра масс вдоль оси с промежуточным значением момента инерции J_z , $\Delta \bar{z} = \Delta z / l$ – относительный запас статической устойчивости по оси Oz , J_y – наибольший момент инерции; $a_x(H) = -\Delta \bar{x} c_0 S l q(H) / J_y$ – коэффициент, обусловленный составляющей аэродинамического момента, вызванной смещением центра масс вдоль продольной оси; $c_1(H) = 3(J_z - J_x)(\omega(H))^2 / (2J_y)$ –

коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента, J_x – наименьший момент инерции.

При сохранении допущения $H = const$ для системы (4.33) может быть записан интеграл энергии:

$$\dot{\alpha}^2 / 2 + a_x u(\alpha) - a_z v(\alpha) + c_1 \cos^2 \alpha = E_0, \quad (4.34)$$

где

$$u(\alpha) = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \cos^2 \alpha + \frac{k}{2} \text{sign}(\sin(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha + 2\pi \cdot \left[\frac{\alpha + \pi}{2\pi} \right] \right),$$

$$v(\alpha) = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot \left[\frac{\alpha + \pi/2}{2\pi} \right] \right) + \frac{k}{2} \text{sign}(\sin(\alpha)) \sin^2 \alpha,$$

$[x]$ – антье x (наибольшее целое число, не превосходящее x),

$$E_0 = a_x u(\alpha_0) - a_z v(\alpha_0) + c_1 \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2} - \text{определяется через начальные условия.}$$

По аналогии с ранее выполненными исследованиями величина максимального угла атаки α_{\max} наноспутника при колебаниях определяется из интеграла энергии (4.34) при $\dot{\alpha} = 0$. Из величин, входящих в выражение для α_{\max} , наибольший разброс значений имеет величина угловой скорости $\dot{\alpha}_0$.

Тогда, пренебрегая разбросами других величин, получим аналитические выражения для функции распределения величины максимального угла атаки α_{\max} :

- если модуль величины начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ имеет распределение Рэлея, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{\max}) = 1 - e^{-\frac{a_z(v(\alpha_{\max}) - v(\alpha_0)) - a_x(u(\alpha_{\max}) - u(\alpha_0)) - c_1(\cos^2 \alpha_{\max} - \cos^2 \alpha_0)}{\sigma^2}}. \quad (4.35)$$

• если модуль величины $\dot{\alpha}_0$ распределен по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0\max}]$, то функция распределения максимального угла атаки определяется по формуле:

$$F(\alpha_{\max}) = [-2a_z(v(\alpha_{\max}) - v(\alpha_0)) + 2a_x(u(\alpha_{\max}) - u(\alpha_0)) + 2c_1(\cos^2 \alpha_{\max} - \cos^2 \alpha_0)]^{1/2} / \dot{\alpha}_{0\max}. \quad (4.36)$$

Для получения аналитических законов распределения угла собственного вращения φ использовалась расширенная модель (4.24), учитывающая действие аэродинамического момента:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu}{2(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \sin 2\varphi - \frac{k\Delta\bar{z}c_0Slq(H)}{J_x} \sin \varphi. \quad (4.37)$$

Законы распределения величины максимального угла φ_{\max} при этом будут следующими.

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то функция распределения максимального угла собственного вращения φ_{\max} определяется по формуле:

$$F(\varphi_{\max}) = 2\Phi_0 \left(\frac{\sqrt{\frac{-2k\Delta\bar{z}c_0Slq(H)}{J_x}(\cos\varphi_{\max} - \cos\varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{\max} - \cos^2 \varphi_0)}}{\sigma} \right). \quad (4.38)$$

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0\max}]$. Тогда функция распределения величины максимального угла φ_{\max} определяется выражением:

$$F(\varphi_{\max}) = \sqrt{\frac{-2k\Delta\bar{z}c_0Slq(H)}{J_x}(\cos\varphi_{\max} - \cos\varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2 \varphi_{\max} - \cos^2 \varphi_0)} / \omega_{x0\max}. \quad (4.39)$$

Предлагается следующий алгоритм решения задачи обеспечения гравитационно-аэродинамической трёхосной стабилизации наноспутника. На первом этапе определяется ограничение на величину начальной поперечной угловой скорости наноспутника в зависимости от начального значения угла прецессии ψ_0 , допустимого максимального значения ψ_{\max}^* , вероятности p^* и высоты полёта H . При этом используются формулы и номограммы, рассмотренные в предыдущем разделе. На втором, для стабилизации продольной оси в плоскости угла атаки относительно положения, определяемого условием $\alpha = \pi/2$, выбирается запас статической устойчивости по оси Oz , при этом задается ограничение на величину начальной поперечной угловой скорости, определённой при рассмотрении движения по углу прецессии ψ . На третьем шаге определяется ограничение на величину начальной продольной угловой скорости наноспутника.

Требование к величине запаса статической устойчивости Δz можно найти, разрешая функции (4.35) и (4.36) относительно Δz , задавая p^* – вероятность реализации β_{\max}^* – допустимого значения максимального угла отклонения продольной оси от положения, определяемого условием $\alpha = \pi/2$ ($\beta_{\max}^* = \alpha_{\max}^* - \pi/2$):

- в случае, если начальная угловая скорость имеет распределение Рэлея

$$\Delta z \geq J_y [\ln(1 - p^*) \sigma^2 + c_1 (\cos^2 \alpha_{\max}^* - \cos^2 \alpha_0) + a_x (u(\alpha_{\max}^*) - u(\alpha_0))] / [c_0 S q(H) (v(\alpha_{\max}^*) - v(\alpha_0))]; \quad (4.40)$$

- в случае распределения начальной угловой скорости по равномерному закону в диапазоне $[0, \dot{\alpha}_{0 \max}]$:

$$\Delta z \geq J_y [(\dot{\alpha}_{0 \max} p^*)^2 - 2c_1 (\cos^2 \alpha_{\max}^* - \cos^2 \alpha_0) - 2a_x (u(\alpha_{\max}^*) - u(\alpha_0))] / [-2c_0 S q(H) (v(\alpha_{\max}^*) - v(\alpha_0))] \quad (4.41)$$

Используя полученные выражения (4.40) и (4.41), можно построить номограммы для задания требования к величине запаса статической устойчивости Δz . Так, например, для наноспутника с моментами инерции $J_y = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 0,023 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ и $J_x = 0,003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ на рис. 4.8 приведены зависимости величины запаса статической устойчивости Δz от высоты полёта H и от величины $\dot{\alpha}_{0 \max} = \omega_{n0 \max}$ (начальная поперечная угловая скорость распределена по равномерному закону) для значений $\beta_{\max}^* = 20$ град, $\beta_0 = 5$ град, вероятности $p^* = 0,95$, начального угла атаки, смещения центра масс вдоль продольной оси $\Delta x = 0,0002 \text{ м}$.

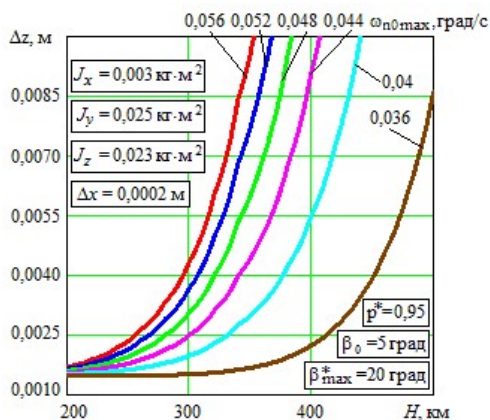


Рис. 4.8. Пример номограммы для задания требования к величине запаса статической устойчивости Δz наноспутника с гравитационно-аэродинамической трёхосной стабилизацией

Расчёты проводились для стандартной плотности атмосферы в соответствии с ГОСТ 4401-81 [3].

Используя полученные выражения (4.38) и (4.39), получим ограничение на величину начальной продольной угловой скорости наноспутника ω_{x0} .

Если величина начальной продольной скорости ω_{x0} имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, и среднеквадратичным отклонением σ , то ограничение на σ определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{-2k\Delta\bar{\varepsilon}c_0Slq(H)(\cos\varphi_{\max} - \cos\varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2\varphi_{\max} - \cos^2\varphi_0)}{t^*}}. \quad (4.42)$$

Если модуль величины ω_{x0} распределён по равномерному закону в диапазоне $[0, \omega_{x0\max}]$, то ограничение на величину $\omega_{x0\max}$ определяется по формуле:

$$\omega_{x0\max} = \sqrt{\frac{-2k\Delta\bar{\varepsilon}c_0Slq(H)(\cos\varphi_{\max} - \cos\varphi_0) + \frac{\mu}{(R_3 + H)^3} \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} \right) (\cos^2\varphi_{\max} - \cos^2\varphi_0)}{p^*}}. \quad (4.43)$$

Проведение поверочных расчётов по пространственной модели движения наноспутника подтвердило правомерность предложенных решений.

4.7 Стабилизация вращением

Ориентация одной оси наноспутника в пространстве, как отмечалось выше в разделе 4.1, может быть обеспечена приданием наноспутнику вращения вокруг этой оси. Вследствие гироскопического эффекта наноспутник приобретает тенденцию к сохранению неизменного направления оси вращения. Данный метод стабилизации является также пассивным поскольку для поддержания ориентации не требуется использование энергии бортовых источников.

Пусть наноспутник представляет собой динамически симметричное тело. При отсутствии внешних моментов наноспутник, как показано в разделе 3.2, совершает регулярную прецессию. В этой прецессии ось симметрии наноспутника описывает круговой конус с осью неизменного в пространстве направления вектора кинетического момента \bar{K}_0 и углом при вершине $2\alpha_k$. (см. рис. 3.4, стр. 54). Движение оси симметрии вокруг \bar{K}_0 происходит с постоянной угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}$, одновременно наноспутник вращается с постоянной угловой скоростью собственного вращения $\dot{\phi}$ вокруг оси симметрии.

В данном разделе рассмотрим устойчивость движения наноспутника при наличии в его конструкции подвижных элементов [25].

Пусть наноспутник закручен относительно оси с наименьшим моментом инерции ($J_x < J_n$). Выражение для кинетического момента и кинетической энергии можно записать в виде

$$K_0 = \sqrt{J_x^2 \omega_x^2 + J_n^2 \omega_n^2}, \quad (4.44)$$

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_n \omega_n^2). \quad (4.45)$$

В соответствии с законом сохранения кинетического момента, последний остаётся неподвижным в пространстве при отсутствии внешних моментов $\bar{M}_0^{(e)} = 0$.

Угол полураствора конуса прецессии α_k определяется формулой (см. рис. 3.4, стр. 54)

$$\sin \alpha_k = \frac{K_n}{K_0} = \frac{J_n \omega_n}{K_0}.$$

Из (4.44) и (4.45) следует, что

$$I_n^2 \omega_n^2 = \frac{J_n}{J_n - J_x} (K_0^2 - 2T J_x), \quad (4.46)$$

и, следовательно

$$\sin^2 \alpha_k = \frac{J_n}{J_n - J_x} \left(\frac{K_0^2 - 2T J_x}{K_0^2} \right). \quad (4.47)$$

Для абсолютно твёрдого тела $T = \text{const}$, поэтому дифференцируя по времени (4.46) получим

$$\sin \alpha_k \cos \alpha_k \dot{\alpha}_k = 0.$$

Поскольку $\alpha_k \neq 0$ при $\omega_n \neq 0$, то $\dot{\alpha}_k = 0$ или $\alpha_k = \text{const}$. То есть для абсолютно твёрдого тела угол α_k остаётся неизменным в процессе движения.

Допустим, что внутри корпуса наноспутника имеются подвижные относительно корпуса элементы, преобразующие кинетическую энергию относительного движения в тепло. Или в конструкции наноспутника есть гибкие тела (антенны, развёрнутые солнечные панели и т.п.). Под действием периодических инерционных сил, обусловленных наличием угловой скорости ω_n , гибкие тела совершают вынужденные колебания, при этом происходит рассеивание энергии, $T \neq \text{const}$, $\dot{T} < 0$.

Выясним влияние рассеивания энергии на прецессионное движение наноспутника. Продифференцируем по времени выражение (4.47), полагая, что колебания гибких тел не вызывают ощутимого изменения моментов инерции наноспутника,

$$\dot{\alpha}_k = - \frac{2 J_n J_x \dot{T}}{(J_n - J_x) K_0^2 \sin 2\alpha_k}. \quad (4.48)$$

Поскольку $J_n > J_x$, а $\dot{T} < 0$, то $\dot{\alpha}_k > 0$. Итак, в данном случае рассеивание энергии в относительном движении подвижных элементов или гибких тел приводит к увеличению угла полураствора конуса прецессии α_k .

Таким образом, вращение наноспутника относительно оси с наименьшим моментом инерции является неустойчивым. При этом исходя из условия постоянства вектора кинетического момента $\bar{K}_0 = \text{const}$, продольная скорость ω_x будет уменьшаться, а поперечная ω_n возрастать. Движение наноспутника будет стремиться к устойчивому состоянию – вращению вокруг поперечной оси с наибольшим моментом инерции.

Величина энергии ΔT , подлежащая рассеиванию в данном случае, может быть определена разностью энергии двух состояний наноспутника при $\alpha_k = \alpha_{k0}$ и $\alpha_k = 90$ град.

В первом случае

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_{x0}^2 + J_n \omega_{n0}^2),$$

во втором

$$T_{\min} = \frac{1}{2} J_n \omega_{nk}^2.$$

Значение поперечной угловой скорости определяется из условия постоянства кинетического момента в обоих состояниях наноспутника, т.е.

$$J_x^2 \omega_{x0}^2 + J_n^2 \omega_{n0}^2 = J_n^2 \omega_{nk}^2,$$

откуда

$$\omega_{nk}^2 = \frac{J_x^2}{J_n^2} \omega_{x0}^2 + \omega_{n0}^2. \quad (4.49)$$

С учётом последнего равенства имеем

$$\Delta T = T_{\min} - T_0 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{J_x}{J_n} \right) I_x \omega_{x0}^2. \quad (4.50)$$

Таким образом, при стабилизации наноспутника вращением рекомендуется закрутку осуществлять вокруг оси с наибольшим моментом инерции, вращение относительно которой устойчивое. Если закрутка наноспутника осуществляется относительно оси с наименьшим моментом инерции, то необходимо учитывать рассмотренный выше эффект.

ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НАНОСПУТНИКА ФОРМАТА CUBESAT ПО ТРАЕКТОРНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

5.1 Постановка задачи

Анализ движения наноспутника формата CubeSat по траекторным измерениям рассмотрим на примере наноспутника SamSat-218Д [8]. Наноспутник SamSat-218Д формата CubeSat 3U – первый наноспутник, разработанный студентами и учёными Самарского университета. 28 апреля 2016 года он стал участником первой пусковой кампании с космодрома Восточный, и одновременно с двумя другими спутниками («Михайло Ломоносов» и Аист-2Д) был выведен на орбиту с наклоном $97,3^\circ$ и средней высотой 486 км с помощью ракеты-носителя «Союз-2.1а». SamSat-218Д был предназначен для отработки ряда технологических и образовательных задач. В первую очередь он предназначался для отработки алгоритмов управления ориентацией наноспутников. Однако, после запуска на орбиту установить связь с ним не удалось.

На рис. 5.1 приведены графики зависимости баллистического коэффициента наноспутника SamSat-218Д от угла атаки при разных значениях угла собственного вращения, рассчитанные по формулам (2.5) и (2.6). Отношение максимального баллистического коэффициента к минимуму составляет 4,75. Этот факт позволяет получить информацию об ориентации и динамике движения наноспутника из сведений о значении баллистического коэффициента.

Рассмотрим траекторные измерения наноспутника SamSat-218Д. На рис. В1 (см. Введение, стр. 7) показаны изменения высоты его орбиты. Сведения приведены на основании обработки данных из файлов TLE системы NORAD [42].

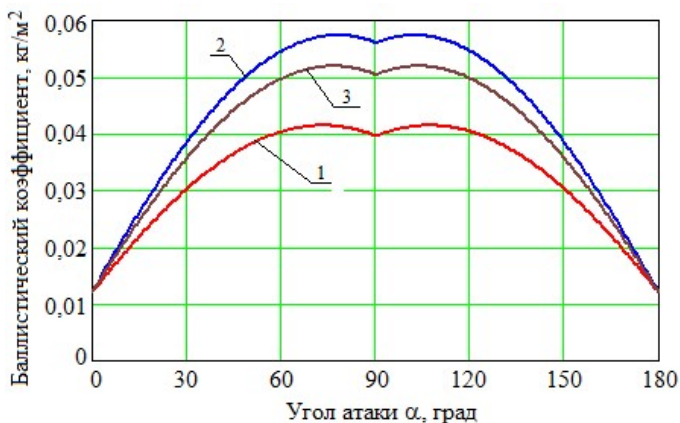


Рис. 5.1. Зависимость баллистического коэффициента нанопутника SamSat-218Д от угла атаки α и угла собственного вращения ($1 - \varphi = 0$ град; $2 - \varphi = 45$ град; $3 -$ усреднённая по углу собственного вращения)

Следует отметить, что рассматриваемому временному интервалу движения спутника (28 апреля 2016 года – 24 ноября 2018 года) соответствует уменьшение солнечной активности, что приводит к снижению плотности верхней атмосферы и темпа падения высоты полёта.

Используя информацию об изменении высоты нанопутника SamSat-218Д (траекторные измерения), а также данные о его конструктивных параметрах (масса, моменты инерции, аэродинамические характеристики) и результаты теоретических исследований режимов динамики движения нанопутника формата CubeSat3U [7] требуется:

- 1) изучить изменения баллистического коэффициента нанопутника SamSat-218Д;
- 2) выявить наиболее вероятный режим движения нанопутника SamSat-218Д относительно центра масс, который был реализован после отделения от разгонного блока «Волга».

5.2 Методика оценки баллистического коэффициента

Возмущения орбиты спутника, вызванные действием аэродинамического ускорения, для круговой орбиты описываются формулой [11]:

$$\dot{r} = -2r \sqrt{\frac{r}{\mu}} \sigma_x q . \quad (5.1)$$

Используя (5.1), а также файлы TLE для спутников SamSat-218Д и Аист-2Д, предлагается следующая методика вычисления усреднённого за сутки баллистического коэффициента для наноспутника SamSat-218Д [43]:

– вычисление радиус-векторов по данным TLE файлов на момент времени получения эфемерид для спутников SamSat-218Д и Аист-2Д

$$r = \sqrt[3]{\mu / n^2} ,$$

где n – среднее движение;

– сглаживание и повторная дискретизация таблицы данных радиус-векторов обоих спутников, полученных в пункте (1), кубическим сглаживающим сплайном с шагом дискретизации один сутки и параметром сглаживания $p = 0,95$ (выбранная величина параметра сглаживания обеспечивает приемлемую интерполяцию с удалением высокочастотных шумов);

– вычисление производной радиус-вектора для SamSat-218Д и Аист-2Д методом численного дифференцирования;

– определение среднесуточной плотности атмосферы (рис. 5.2) по торможению спутника Аист-2Д, для которого величина баллистического коэффициента известна и составляет $\bar{\sigma}_{\text{const}} = 0,0227 \text{ м}^2/\text{кк}$ (Аист-2Д поддерживает свою ориентацию в орбитальной системе координат)

$$\bar{\rho}_a = -\dot{r}_a / \bar{\sigma}_{const} \sqrt{\mu r_a},$$

где r_a – радиус-вектор спутника Аист-2Д; \dot{r}_a – производная радиус-вектора спутника Аист-2Д;

– вычисление среднесуточной плотности атмосферы для спутника SamSat-218Д с использованием формулы корреляции слоёв верхней атмосферы из ГОСТ 25645.101-83 [44] (рис. 5.2)

$$\bar{\rho}_{ss} = \bar{\rho}_a \exp(a_2[\sqrt{r_a - a_3} - \sqrt{r_{ss} - a_3}]),$$

где коэффициенты $a_2 = 0,71604 \text{ км}^{-1/2}$ и $a_3 = 6461,34 \text{ км}$ взяты для высотного диапазона $180 \text{ км} \leq H < 600 \text{ км}$ и индекса солнечной активности $F_{10,7} \approx 75 \cdot 10^{-22} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц})$;

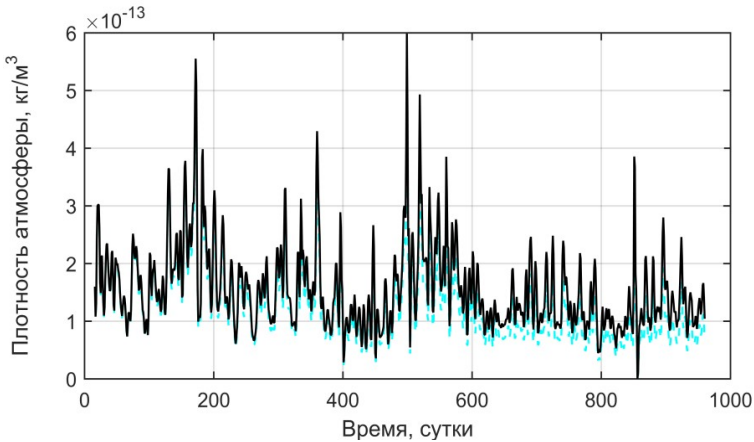


Рис. 5.2. Изменения плотности атмосферы во времени для спутников Аист-2Д (голубой), SamSat-218Д (чёрный)

– вычисление усреднённого за сутки баллистического коэффициента $\bar{\sigma}_{ss}$ для SamSat-218Д:

$$\bar{\sigma}_{ss} = -\dot{r}_{ss} / \bar{\rho}_{ss} \sqrt{\mu r_{ss}},$$

где r_{ss} радиус-вектор спутника SamSat-218Д; \dot{r}_{ss} – производная радиус-вектора спутника SamSat-218Д.

На рис. 5.3 представлены результаты оценки усреднённого баллистического коэффициента для наноспутника SamSat-218Д.

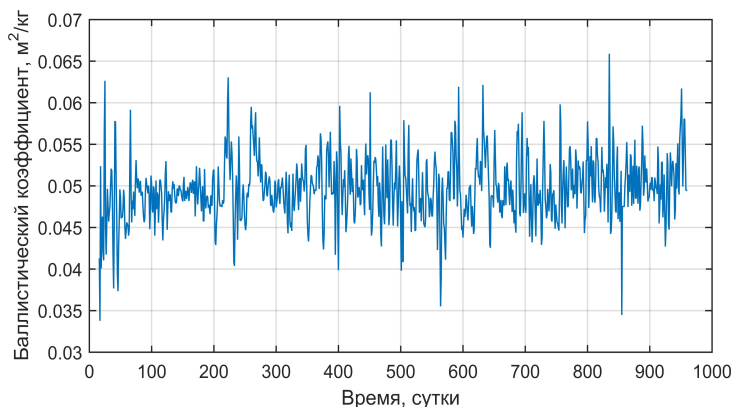


Рис. 5.3. Изменения усреднённого за сутки баллистического коэффициента наноспутника SamSat-218Д

На рис. 5.4 показан фрагмент графика изменения усреднённо за сутки баллистического коэффициента во времени с 16 по 100 сутки.

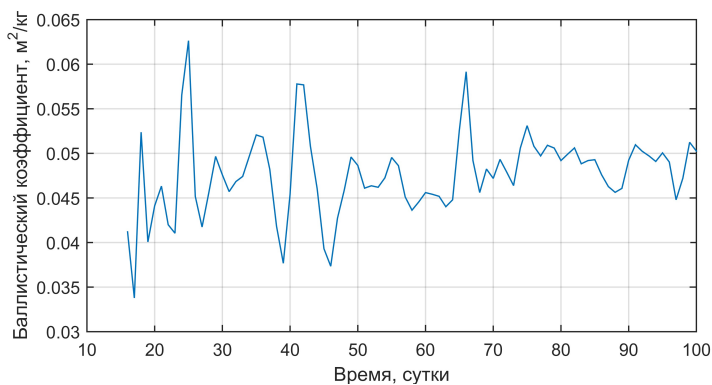


Рис. 5.4. Изменение усреднённого за сутки баллистического коэффициента (с 16 по 100 сутки)

Следует принимать во внимание, что вариации усреднённого баллистического коэффициента обусловлены как ошибками траекторных измерений, так и характером углового движения наноспутника.

5.3 Анализ движения

Для качественного анализа движения относительно центра масс наноспутника SamSat-218Д используется приближённая модель углового движения в плоскости круговой орбиты относительно траекторной системы координат (2.3), которая описывает изменение угла атаки под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента

В силу неизвестности начальных угловых скоростей, приобретённых наноспутником SamSat-218Д после выхода из пускового устройства, проведено многократное моделирование движения в широком диапазоне значений начальных угловых скоростей с использованием данных об изменении плотности атмосферы (рис. 5.2). Целью моделирования является установление соответствия между вариациями расчётного и найденного по траекторным измерениям усреднённого баллистического коэффициента (рис.5.4). На рис. 5.5 показано изменение отношения M_a/M_g максимальных значений аэродинамического и гравитационного моментов с 16 по 100 сутки, которое обусловлено цикличностью изменения плотности атмосферы, вызванного солнечной активностью.

Из полученных результатов следует, что наиболее вероятным движением относительно центра масс наноспутника SamSat-218Д является переходный режим движения между различными положениями равновесия по углу атаки α_* (см. рис. 2.2). Такому режиму движения относительно центра масс соответствует изменение угла атаки, показанное на рис. 5.6 и изменение усреднённого бал-

листического коэффициента на указанном промежутке времени, показанное на рис. 5.7.

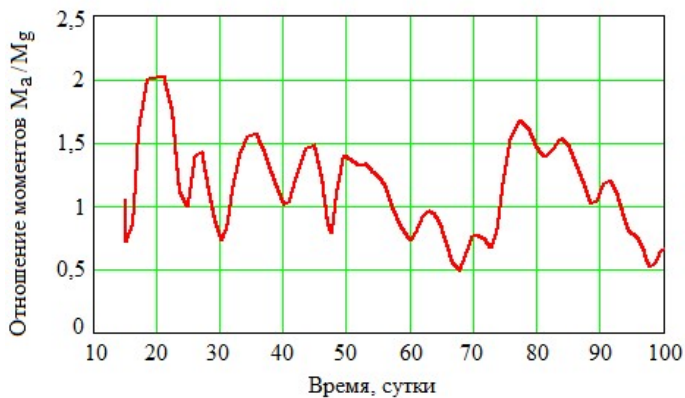


Рис. 5.5. Изменение отношения максимальных значений аэродинамического и гравитационного моментов с 16 по 100 сутки

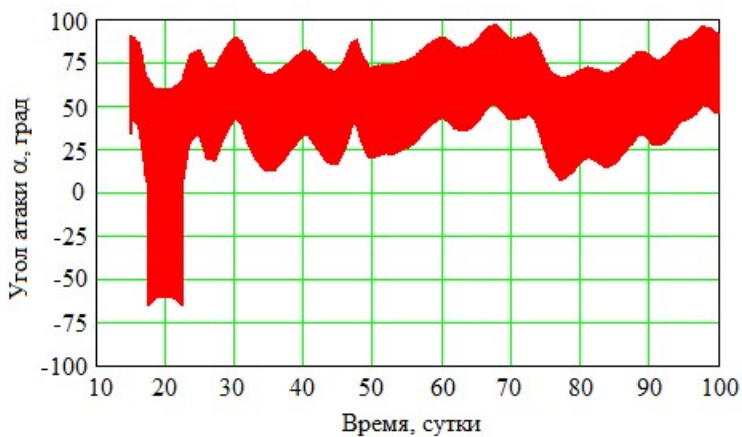


Рис. 5.6. Изменение угла атаки с 16 по 100 сутки

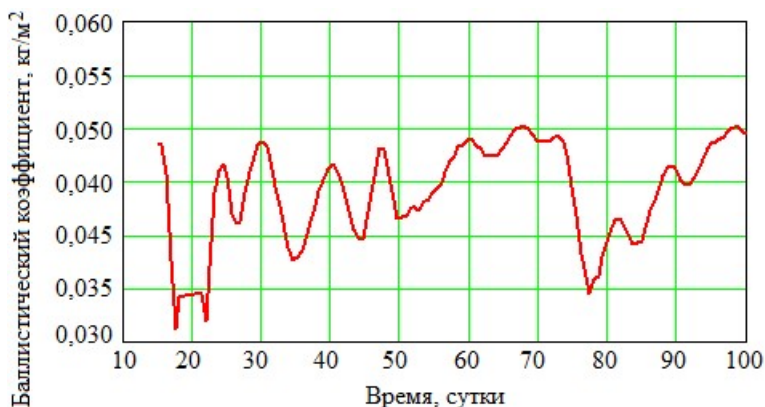


Рис. 5.7. Изменение усреднённого баллистического коэффициента с 16 по 100 сутки

Вначале непродолжительное время наноспутник совершает колебания относительно положениями равновесия по углу атаки α_* (порядка 65 град). Затем, с ростом плотности атмосферы, растёт аэродинамический момент и наноспутник переходит в колебания относительно нулевого значения угла атаки. Далее, с уменьшением плотности атмосферы, аэродинамический момент уменьшается и наноспутник переходит в колебания относительно изменяющегося положения равновесия α_* (в диапазоне 35-75 град). Такой сложный характер изменения проявляется только при наблюдаемых соизмеримых величинах аэродинамического и гравитационного моментов.

Недостаточная определённость вывода о режиме движения обусловлена практически неизменной плотностью атмосферы в виду снижения солнечной активности в рассматриваемый период времени движения наноспутника.

В дальнейшем предполагается продолжить наблюдение за торможением наноспутника SamSat-218Д для того, чтобы повысить степень достоверности выводов об изменяемой динамике

движения и справедливости разработанной методики проектирования аэродинамически стабилизируемого наноспутника.

Предложенный подход к анализу углового движения наноспутника по траекторным измерениям, апробированный в рамках «пассивного» эксперимента на наноспутнике SamSat-218Д, позволяет разработчикам наноспутников с неуправляемым движением относительно центра масс сделать выводы о причинах наблюдаемого движения по известным характеристикам космического аппарата. Если наноспутник после выхода на орбиту должен изменить свою конфигурацию, например, раскрыть панели солнечных батарей, или выдвинуть штанги, то применение этого подхода позволяет сделать вывод о выполнении такой операции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Belokonov, I.V. Analysis and Synthesis of Motion of Aerodynamically Stabilized Nanosatellites of the CubeSat Design / I.V. Belokonov, I.A. Timbai, P.N. Nikolaev // Gyroscopy and Navigation. – 2018. – Vol. 9. – No. 4. – Pp. 287–300.

2. Белецкий, В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В.В. Белецкий. – Москва: Наука, 1965.

3. ГОСТ 4401-81 Атмосфера стандартная. Параметры / Введ. 1981-02-27. – Москва: Изд-во стандартов, 1981. – 181 с.

4. <https://www.qb50.eu/>

5. Belokonov, I.V. Modes of motion of Soyuz orbital stage after payload separation at carrying out of the short-term research experiments / I.V. Belokonov, A.D. Storozh, I.A. Timbay // Advances in the Astronautical Sciences. – 2012. – Vol. 145. – Pp. 99–107.

6. Belokonov, I.V. Problems of satellite navigation and communications for nanosatellites launched as piggyback payload from the orbital stage of carrier rockets / I. Belokonov, A. Kramlikh, I. Timbai, O. Lagno // Proc. 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – 2014. – Pp. 407–415.

7. Belokonov, I.V. Low-orbital transformable nanosatellite: Research of the dynamics and possibilities of navigational and communication problems solving for passive aerodynamic stabilization / I.V. Belokonov, A.V. Kramlikh, I.A. Timbai // Advances in the Astronautical Sciences. – 2015. – Vol. 153. – Pp. 383–397.

8. Kirillin, A. SSAU nanosatellite project for the navigation and control technologies demonstration / A. Kirillin, I. Belokonov, I. Tim-

bai, A. Kramlikh, M. Melnik, E. Ustiugov, A. Egorov, S. Shafran // *Procedia Engineering*. – 2015. – Vol. 104. – Pp. 97–106.

9. Shakhmatov, E. SSAU project of the nanosatellite SamSat-QB50 for monitoring the Earth's thermosphere parameters, *Procedia Engineering* / E. Shakhmatov, I. Belokonov, I. Timbai, E. Ustiugov, A. Nikitin, S. Shafran. – 2015. – Vol. 104. – Pp. 139–146.

10. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев. – Москва: Наука, 1990.

11. Механика космического полета: учебник для вузов / М.С. Константинов, Р.Ф. Каменков, Б.П. Перельгин, В.К. Безвербий; под ред. В.П. Мишина. – Москва: Машиностроение, 1989.

12. Балк, М.Б. Элементы динамики космического полёта / М.Б. Балк. – Москва: Наука, 1965.

13. Нейштадт, А.И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису / А.И. Нейштадт // *Физика плазмы*. – 1986. – Т. 12. – Вып. 8. – С. 992.

14. Aslanov, V.S. Transient modes of spacecraft angular motion on the upper section of reentry trajectory / V.S. Aslanov and I.A. Timbay // *Cosmic Research*. – Vol. 35. – No 3. – 1997. – Pp. 260-267.

15. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – Москва: Физматлит, 1969.

16. Белоконов, И.В. Оценка возможности управляемого схода с орбиты верхней ступени РН «Союз» за счет использования остатков топлива в баках / И.В. Белоконов, Г.Е. Круглов, В.И. Трушляков, В.В. Юдинцев // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета)*. – 2010. – №2(22), – с. 105–111.

17. Platus, D.H. Angle-of-Attack Convergence Windward =Meridian Rotation Rate of Rolling Re-Entry Vehicles / D.H. Platus // AIAA Journal. – V. 7. – No.12. – Deg., 1969. – P. 2324-2330.

18. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере / В.А. Ярошевский. – М.: Машиностроение, 1978.

19. Aslanov, V.S. Nonlinear resonant motion of an asymmetrical spacecraft in the atmosphere / V.S. Aslanov, V.V. Boiko // Cosmic Research. – 1985. – Vol. 23(3). – Pp. 341-347.

20. Zabolotnov, Yu.M. Application of the Method Integralof Manifolds for Construction of resonant Curves for the Problem of Spacecraft Entry into the Atmosphere / Yu.M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // Cosmic Research. – 2003. – Vol. 41 (5). – Pp. 453-459.

21. Волосов, В.М. Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – Москва: Изд-во МГУ, 1971. – 508 с.

22. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.

23. Асланов, В.С. О вращательном движении баллистического осесимметричного аппарата при спуске в атмосфере / В.С. Асланов // Космические исследования. – 1976. – Т. 14. – №4. – С. 491-497.

24. Асланов В. С. Два вида нелинейного резонансного движения асимметричного КА в атмосфере / В.С. Асланов // Космические исследования. – 1988. – Т. 26. – № 2. – С. 220-226.

25. Алексеев, К.Б. Управление космическими летательными аппаратами / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин – М.: Машиностроение, 1974.

26. Sarychev, V.A. Dynamics of a satellite with a passive aerodynamic orientation system / V.A. Sarychev and M.Yu. Ovchinnikov / *Kosm. Issled.* – 1994. – Vol. 32. – No.6. – Pp. 561–575.

27. Sarychev, V.A. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques / V.A. Sarychev, S.A. Mirer, A.A. Degtyarev, E.K. Duarte // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* – 2007. – Vol. 97. – No.4. – Pp. 267–287.

28. Sarychev, V.A. Satellite dynamics under the influence of gravitational and aerodynamic torques. A study of stability of equilibrium positions / V.A. Sarychev, S.A. Gutnik // *Cosmic Research.* – 2016. – Vol.54 (5). – Pp. 388–398.

29. Rawashdeh, S. Aerodynamic attitude stabilization for a ramfacing CubeSat / S. Rawashdeh, D. Jones, D. Erb, A. Karam, J.E. Lumpp // *Advances in the Astronautical Sciences.* – 2009. – Vol. 133. – Pp. 583-595.

30. Rawashdeh, Samir A. Aerodynamic Stability for CubeSats at ISS Orbit / Samir A. Rawashdeh and James E. Lumpp, [et al.] // *JoSS.* – 2013. – Vol. 2. – No.1. – Pp. 85–104.

31. Rawashdeh, Samir A. Attitude Analysis of Small Satellites Using Model-Based Simulation / Samir A. Rawashdeh // *International Journal of Aerospace Engineering,* – 2019. – Vol. 2019. Article ID 3020581 (11 pages).

32. Armstrong, J. Pointing control for low altitude triple CubeSat space darts, 2009, in *Proc. 23rd Annu / J. Armstrong, G. Casey, G. Creamer, G. Dutchover / AIAA/USU Conf. Small Satellites,* Logan, UT.

33. Chesi, S. Aerodynamic Three-Axis Attitude Stabilization of a Spacecraft by Center-of-Mass Shifting / S. Chesi, Q. Gong, M. Roma-

no / Journal of Guidance, Control, and Dynamics, – 2017. – Vol. 40. – №7. – Pp. 1613–1626.

34. Chesi, S. Satellite attitude control by center-of-mass shifting / S. Chesi, Q. Gong, M. Romano // Advances in the Astronautical Sciences. – 2014. – Vol. 150. – Pp. 2575–2594.

35. Psiaki, M.L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing / M.L. Psiaki // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2004. – Vol. 27. – №3. – Pp. 347-355.

36. Grassi, M. Attitude determination and control for a small remote sensing satellite / M. Grassi // Acta Astronautica. – 1997. – Vol. 40. – №9. – Pp. 675–681.

37. Lovera, M. Global magnetic attitude control of spacecraft in the presence of gravity gradient / M. Lovera, A. Astolfi // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2006. – Vol. 42. – №3. – Pp. 796–805.

38. Евразийский патент на изобретение (21) 201400132 (13) А1. Способ аэродинамической стабилизации наноспутника класса CubeSat и устройство его осуществления (варианты), опубл. 30.07.2015 г. / И.В. Белоконов, И.А. Тимбай, Е.В. Устюгов.

39. Belokonov, I.V. Passive three-axis stabilization of a nanosatellite in low-altitude orbits: Feasibility study / I.V. Belokonov, I.A. Timbai, D.D. Davydov // 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor. – 2018. – Pp. 1–4.

40. Belokonov, I.V. Passive stabilization systems for CubeSat nanosatellites: general principles and features / I.V. Belokonov, I.A. Timbai, D.D. Davydov // 26th Saint Petersburg International Conference on

Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor. – 2019. – P. 1–4.

41. Belokonov, I.V. Passive gravitational aerodynamic stabilization of nanosatellite / I.V. Belokonov, I.A. Timbai, M.S. Kurmanbekov // 24th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor. – 2017. – Proc., 2017. – Pp. 543-546.

42. Project Space Track. <https://www.space-track.org>

43. Belokonov, I. Approach for estimation of nanosatellite's motion concerning of mass centre by trajectory measurements (IAA-B12-0703) / I. Belokonov, I. Timbai and P. Nikolaev // 12th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, Berlin, Germany, 06-10 May 2019 (<https://web.tresorit.com/l#xb50seCuu9al-bxLzoVQdA>).

44. GOST 25645.101-83. Earth upper atmosphere. Density model for project ballistic computations of artificial earth satellites. Moscow: Standard Publ. – 1984. – 168 p. (In Russ.)

Учебное издание

*Белоконов Игорь Витальевич,
Тимбай Иван Александрович*

**ДВИЖЕНИЕ НАНОСПУТНИКА
ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС
НА ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТАХ**

Учебное пособие

Редактор И.И. Спиридонова
Компьютерная верстка И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 13.07.2020. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 8,0.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 10(P1У)/2020.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

