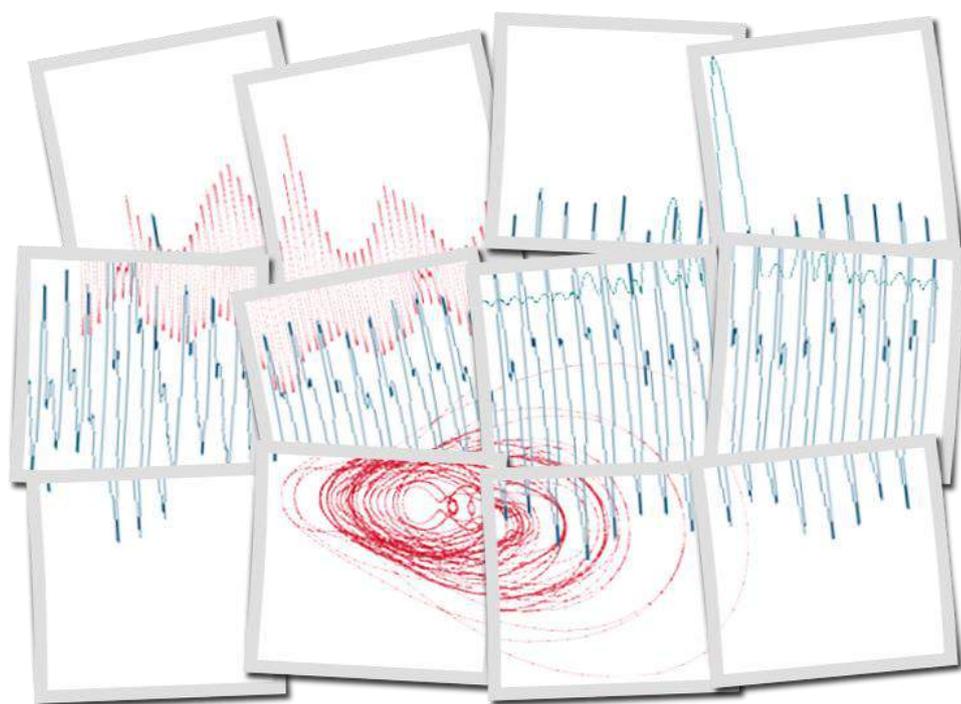


**С.А. Прохоров, И.М. Куликовских**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ  
АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА  
КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИК В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ**



**Самара 2019 г.**

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/  
ББК 32.965я73

Рецензенты:

д. т. н., профессор Бахарева Н.Ф., заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики;

д. т. н., профессор Радченко В.П., заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.

**П 10 Прохоров С.А., Куликовских И.М.**

**П 10 Прохоров С.А., Куликовских И.М. Численные методы и алгоритмы аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик в ортогональных базисах / СИЦ РАН, 2019. 252 с., ил.**

**ISBN – 978-5-93424-351-8**

Рассматриваются классические ортогональные полиномы и функции, определяются их основные характеристики, применяемые при построении и исследовании ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов (временных рядов).

Анализируются численные методы, алгоритмы аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик временных рядов в различных ортогональных базисах: корреляционных функций и спектральных плотностей мощности, функций спектра и т.д.

Предлагаются для закрепления теоретического материала задания вычислительного практикума и примеры их выполнения в системе MATHCAD.

Учебное пособие предназначено для аспирантов, докторантов, преподавателей, научных сотрудников, инженеров как руководство по численным методам, алгоритмам аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик в ортогональных базисах.

**ББК 32.965я73**

*ДОПУЩЕНО*

*УМУ Самарского национального исследовательского университета  
имени академика С.П. Королева  
в качестве учебного пособия по направлению  
09.06.01 Информатика и вычислительная техника,  
профиля «Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ»*

© С.А. Прохоров, 2019  
И.М. Куликовских, 2019



**Прохоров Сергей Антонович** – доктор технических наук, профессор, действительный член Международной академии информатизации, Международной общественной организации «Академия навигации и управления движением», академии телекоммуникаций и информатики, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, лауреат губернской премии в области науки и техники, областной премии Ленинского комсомола, конкурса на лучшую научную книгу 2005, 2007, 2009 годов среди преподавателей высших учебных заведений России, награжден медалями

Келдыша М.В., Гагарина Ю.А., Королева С.П. федерации космонавтики РФ, изобретателя СССР, «За заслуги перед городом Самара», нагрудными знаками «Победитель социалистического соревнования - 1975» «Ветеран космодрома Плесецк», знаками РАЕ «Заслуженный деятель науки и образования», «Основатель научной школы», заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Принимал участие в руководстве и выполнении 36 хозяйственных и госбюджетных НИР.

Подготовил 4 докторов и 27 кандидатов технических наук, по 5 кандидатским диссертациям являлся научным консультантом, являлся руководителем 154 дипломных проектов и работ, 3 магистерских диссертаций. Являлся официальным оппонентом по 42 докторским и 57 кандидатским диссертациям.

Опубликовал 485 научных работ, в том числе, 22 монографии, 13 брошюр, 40 авторских свидетельств, 21 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. Результаты работы обсуждались на 123 международных, Всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

**Куликовских Илона Марковна** – к.т.н., доцент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева, научный сотрудник Загребского университета (Faculty of Electrical Engineering and Computing) и института Руджер Бошкович (Division of Electronics).

Обладатель грантов Президента РФ (2018-2019), РФФИ (2018-2019), стипендии правительства РФ (2010-2011), победитель программ У.М.Н.И.К. (2010-2011) и СТАРТ (2019-2020), лауреат губернской премии в области науки и техники для аспирантов (2009) и молодых ученых (2013), лауреат конкурса на лучшую научную книгу 2009 годов среди преподавателей высших учебных заведений России.

Являлась руководителем 25 дипломных работ и 10 магистерских диссертаций.

Опубликовала 99 научных работ, в том числе, 5 монографий, 12 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ. Результаты работы обсуждались на 25 международных и всероссийских конференциях.



СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	6
ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ВВЕДЕНИЕ	11
1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	17
1.1. Ортогональные полиномы и их свойства во временной области	17
1.2. Ортогональные функции их свойства во временной области	25
1.3. Дискретизация ортогональных функций	31
1.4. Частотные характеристики ортогональных функций	32
1.5. Ортогональные модели корреляционных функций	44
1.6. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями с учетом условия нормировки	64
1.7. Ортогональные модели взаимных корреляционных функций	72
1.8. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей	75
1.9. Анализ методических погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции	81
1.10. Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями	84
1.11. Аппроксимация спектральных плотностей мощности по параметрам моделей корреляционных функций	88
1.12. Взаимный аппроксимативный спектральный анализ по параметрам ортогональных моделей ВКФ	90
1.13. Аппроксимация спектральных плотностей мощности ортогональными функциями	94
1.14. Аппроксимация спектральных функций ортогональными функциями	99
1.15. Оценка обобщенных корреляционно-спектральных характеристик	104
2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ В СИСТЕМЕ МАТНСАД	115
2.1. Исследование свойств ортогональных полиномов во временной области	115
2.1.1. Теоретические основы	115
2.1.2. Задание на самостоятельную работу	115
2.1.3. Содержание отчёта	115
2.1.4. Контрольные вопросы	116
2.2. Исследование свойств ортогональных функций во временной области	116
2.2.1. Теоретические основы	116
2.2.2. Задание на самостоятельную работу	116
2.2.3. Содержание отчёта	117
2.2.4. Контрольные вопросы	117
2.3. Дискретизация ортогональных функций	118
2.3.1. Теоретические основы	118
2.3.2. Задание на самостоятельную работу	118
2.3.3. Содержание отчёта	118
2.3.4. Контрольные вопросы	119
2.4. Частотные характеристики ортогональных функций и фильтров	119
2.4.1. Теоретические основы	119
2.4.2. Задание на самостоятельную работу	119
2.4.3. Содержание отчёта	119
2.4.4. Контрольные вопросы	120
2.5. Ортогональные модели корреляционных функций	120
2.5.1. Теоретические основы	120

2.5.2.	Задание на самостоятельную работу	120
2.5.3.	Содержание отчёта	121
2.5.4.	Контрольные вопросы	121
2.6.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями с учетом условия нормировки	122
2.6.1.	Теоретические основы	122
2.6.2.	Задание на самостоятельную работу	122
2.6.3.	Содержание отчёта	122
2.6.4.	Контрольные вопросы	123
2.7.	Анализ методических погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции	123
2.7.1.	Теоретические основы	123
2.7.2.	Задание на самостоятельную работу	123
2.7.3.	Содержание отчёта	124
2.7.4.	Контрольные вопросы	124
2.8.	Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями	124
2.8.1.	Теоретические основы	124
2.8.2.	Задание на самостоятельную работу	124
2.8.3.	Содержание отчёта	125
2.8.4.	Контрольные вопросы	125
2.9.	Аппроксимация спектральных плотностей мощности	125
2.9.1.	Теоретические основы	125
2.9.2.	Задание на самостоятельную работу	125
2.9.3.	Содержание отчёта	126
2.9.4.	Контрольные вопросы	126
2.10.	Аппроксимация спектральных функций	126
2.10.1.	Теоретические основы	126
2.10.2.	Задание на самостоятельную работу	126
2.10.3.	Содержание отчёта	127
2.10.4.	Контрольные вопросы	127
2.11.	Аппроксимативный анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик	127
2.11.1.	Теоретические основы	127
2.11.2.	Задание на самостоятельную работу	127
2.11.3.	Содержание отчёта	128
2.11.4.	Контрольные вопросы	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		129
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ		130
ПРИЛОЖЕНИЕ		134
П.1.	Вид ортогональных полиномов 0 – 5 порядков	134
П.2.	Вид ортогональных функций 0 – 5 порядков	136
П.3.	Правила действий над коэффициентами производящих функций и интегральное представление комбинаторных чисел	138
П.4.	Частотные характеристики ортогональных функций	142
П.5.	Частотные характеристики ортогональных фильтров	155
П.6.	Алгебраические выражения для вычисления коэффициентов разложения	166
П.7.	Рекуррентные соотношения для ортогональных функций	173
П.8.	Аналитические выражения, используемые при вычислении минимальной погрешности аппроксимации	180

П.9.	Обобщенные спектральные характеристики	181
П.10.	Задание 1. «Исследование свойств ортогональных полиномов»	183
П.11.	Задание 2. «Исследование свойств ортогональных функций»	189
П.12.	Задание 3. «Определение максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций»	197
П.13.	Задание 4. «Частотные характеристики ортогональных функций»	202
П.14.	Задание 5. «Ортогональные модели корреляционных функций»	206
П.15.	Задание 6. «Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями с учетом условия нормировки»	219
П.16.	Задание 7. «Анализ методических погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции»	234
П.17.	Задание 8. «Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями»	239
П.18.	Задание 9. «Аппроксимация спектральных плотностей мощности»	243
П.19.	Задание 10. «Аппроксимация спектральных функций»	247
П.20.	Задание 11 «Аппроксимативный анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик»	249

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АСНИ – автоматизированная система научных исследований;  
ВКФ – взаимная корреляционная функция;  
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;  
ВР – временной ряд;  
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;  
ИИС – информационно-измерительная система;  
КФ – корреляционная функция;  
НКФ – нормированная корреляционная функция;  
ПО – процессор обработки;  
ПРИС – процессорно-измерительное средство;  
СП – случайный процесс;  
 $A_{\Theta} \{ \hat{x}(t_k) \}$  – алгоритм оценки вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $A_s \{ \hat{x}(t_k) \}$  – алгоритм оценки сигнала;  
 $C_x(J)$  – интервальная корреляционная функция;  
 $d$  – параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );  
 $\hat{D}_x$  – оценка дисперсии;  
 $\text{Ent}[ ]$  – операция взятия целой части числа;  
 $F_x(\omega)$  – спектральная функция;  
 $gl J$  – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $K_a(\tau)$  – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;  
 $K_{axy}(\tau)$  – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;  
 $K_x(\tau)$  – корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $K_x(t, t')$  – корреляционная функция случайного процесса;  
 $K_{xy}(\tau)$  – взаимная корреляционная функция;  
 $\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$  – ортогональная функция  $k$ -го порядка;  
 $M[ ]$  – оператор математического ожидания;  
 $S_d$  – оператор усреднения;  
 $\text{Sign}$  – знаковая функция;  
 $S_{axy}(\omega)$  – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;  
 $S_x(\omega)$  – спектральная плотность мощности процесса  $\dot{x}(t)$ ;  
 $S_{xn}(\omega)$  – нормированная спектральная плотность мощности процесса  $\dot{x}(t)$ ;  
 $S_{xy}(\omega)$  – взаимная спектральная плотность мощности;  
 $\text{Re } S_{axy}(\omega)$  – действительная часть взаимной спектральной плотности мощности;  
 $\text{Im } S_{axy}(\omega)$  – мнимая часть взаимной спектральной плотности мощности;  
 $|S_{xy}(\omega)|$  – модуль взаимной спектральной плотности мощности;  
 $\Phi[S_{xy}(\omega)]$  – фаза взаимной спектральной плотности мощности;  
 $F_x(\omega)$  – спектральная функция;

$W_k(j\omega)$  – частотная характеристика ортогональных функций  $k$ -го порядка;  
 $x_j(t)$  –  $j$ -ая реализация случайного процесса;  
 $\bar{x}(\bar{\Theta}, t)$  – реализация случайного процесса;  
 $\beta_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $b_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $c_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $\Delta$  – погрешность аппроксимации;  
 $\delta$  – относительная погрешность аппроксимации;  
 $\Delta t_{ji}$  – интервал дискретизации;  
 $\Delta\omega_\phi$  – полоса пропускания фильтра;  
 $\Delta\omega_c$  – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;  
 $\gamma_{см}$  – погрешность от смещенности оценки;  
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$  – допустимые значения погрешностей оценки;  
 $\gamma_m$  – методическая статистическая погрешность;  
 $\mu$  – показатель колебательности;  
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$  –  $j$ -текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\Theta[X(t)], \Theta$  – измеряемая вероятностная характеристика;  
 $\bar{\Theta}$  – вектор информативных параметров случайного процесса;  
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$  – средняя оценка вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}[X(t)]$  – оценка измеряемой вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$  –  $t$ -текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;  
 $\rho_x(\tau)$  – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $\rho_x(t, t')$  – нормированная корреляционная функция случайного процесса;  
 $\rho_{xy}(\tau)$  – взаимная нормированная корреляционная функция;  
 $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)]$  – фазовый портрет нормированной корреляционной функции;  
 $\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)]$  – фазовый портрет нормированной взаимной корреляционной функции;  
 $r_{xy}$  – коэффициент корреляции;  
 $\tau_k^{(i)}$  – интервал корреляции;  
 $\tau_{k \max}$  – максимальный интервал корреляции;  
 $\bar{\Omega}$  – вектор информативных параметров объекта исследований.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое Вашему вниманию учебное пособие, посвященное изучению ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов, подготовлено для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов и дополняет следующие монографии:

1. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 209 с.: ил.
2. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. – 191 с.: ил.
3. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 277 с., ил.
4. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 374 с.: ил.
5. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. – 329 с., ил.
6. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 380 с., ил.
7. Прикладной анализ случайных процессов. Под ред. Прохорова С.А./СНЦ РАН, 2007. – 582 с., ил.
8. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум/СНЦ РАН, 2008. – 301 с., ил.

В пособии приводятся классические ортогональные полиномы и функции, определяются их основные характеристики, применяемые при построении и исследовании ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов (временных рядов). Анализируются численные методы и алгоритмы аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик временных рядов в различных ортогональных базисах: корреляционных функций и спектральных плотностей мощности, функций спектра и т.д.

Представленные задания вычислительного практикума учебного пособия можно разбить на два блока:

- 1) изучение свойств ортогональных полиномов и функций с использованием системы Mathcad (1 - 4 задания);
- 2) построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик, изучение их свойств, анализ методических погрешностей с использованием системы Mathcad (5 - 11 задания).

В отличие от ранее предложенных, задания, включенные в данное учебное пособие, рассматривают более эффективную реализацию алгоритмов корреляционно-спектрального анализа с использованием векторных и матричных преобразований. Результатом таких преобразований является значительно меньшее время, требуемое для выполнения задания в рамках выделяемого академического часа. Таким образом, обучаемые могут уделить больше времени на проведение анализа качества моделей с учетом различных входных параметров. Дополнительным достоинством такой реализации алгоритмов является совместимость с другими системами и языками программирования, в частности, MATLAB и Python.

Материалы, представленные в учебном пособии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, естественно-математическом факультете (PMF) и факультете электротехники и вычислительной техники (FER) Загребского университета, «Центре исследования моря» (СИМ) института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия).

Отдельные разделы учебного пособия использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов, магистров и аспирантов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарском государственном аэрокосмическом университете), Самарском государственном университете, Волгоградском государственном университете, Оренбургском государственном университете, Пензенском государственном университете, Саратовском государственном техническом университете, Уфимском государственном авиационно-техническом университете, также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), на естественно-математическом факультете (PMF) и факультете электротехники и вычислительной техники (FER) Загребского университета, Международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете (Китай).

В полном объеме учебное пособие прошло апробацию на кафедре информационных систем и технологий Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева при подготовке аспирантов по направлению 09.06.01 Информатика и вычислительная техника, профиля «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», магистров по направлению 09.04.01 – ИВТ, кафедре безопасности информационных систем Самарском государственном университете при подготовке специалистов по специализации 10.05.01 – компьютерная безопасность, 10.03.01 – информационная безопасность, кафедре радиоэлектроники и телекоммуникаций Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина при подготовке магистров по направлению 11.04.02 - инфокоммуникационные технологии и системы связи и, на наш взгляд, может быть рекомендован для подготовки специалистов по другим направлениям и специальностям, где изучаются вопросы, связанные с обработкой результатов моделирования и экспериментальных исследований.

Авторы выражают благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам указанных кафедр за обсуждение материалов учебного пособия, критические замечания которых были учтены.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность рецензентам: д. т. н., профессору Бахаревой Н.Ф. - заведующей кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, д. т. н., профессору Радченко В.П. - заведующему кафедрой прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, - за ценные замечания.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:  
Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: [sp.prokhorov@gmail.com](mailto:sp.prokhorov@gmail.com)

## ВВЕДЕНИЕ

При проведении научных исследований, комплексных испытаний с помощью средств информационно-измерительной техники исследователь получает случайный сигнал  $x(t, \Theta)$ , характеристики которого  $\Theta$  подлежат определению.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. В.1).

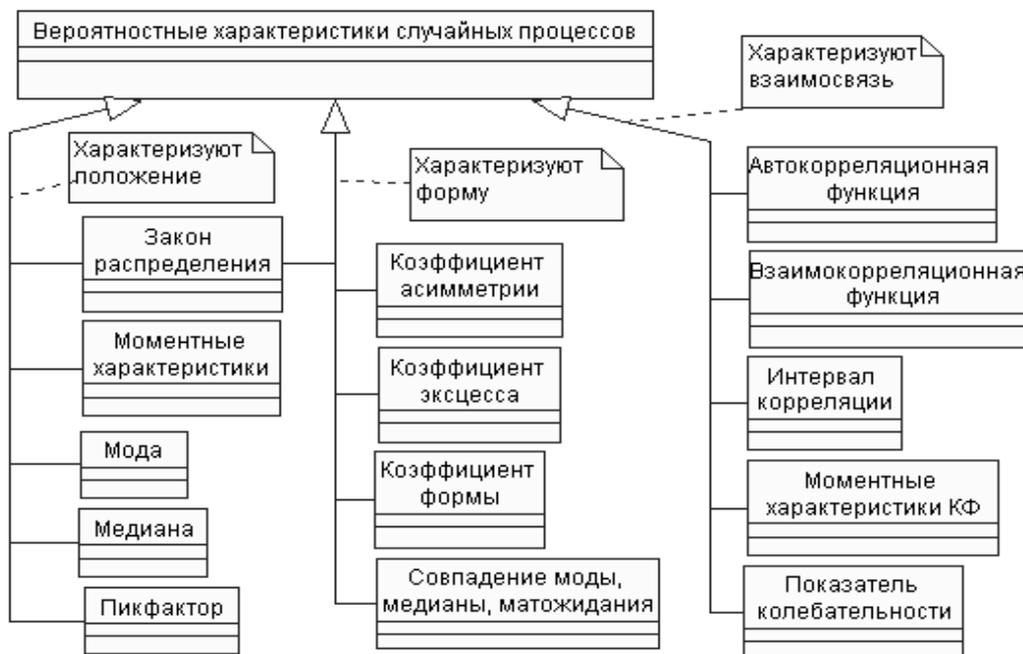


Рисунок В.1 - Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [55] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (B.1)$$

где  $\Theta$  – измеряемая вероятностная характеристика;

$S_d$  – оператор идеального усреднения;

$d$  – параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );

$g$  – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;

$x_j(t)$  –  $j$ -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (\text{B.2})$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.3})$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.4})$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (\text{B.5})$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (\text{B.6})$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (\text{B.7})$$

при любом  $\varepsilon$ .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

**Эффективными** называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [2, 55].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (B.2) - (B.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (\text{B.8})$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (\text{B.9})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.10})$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от текущего времени и называется  $t$ -текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_t$  [55]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации  $j$ , вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от номера реализации и называется  $j$ -текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_j$ . При усреднении и по времени, и совокупности значение  $\Theta[X(t)]$  не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой –  $\hat{\Theta}_{cp}$ .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

**Стационарным** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство  $\Theta_t = const$  выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если  $\Theta_j = const$ , где  $j$  – номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. В.2): стационарные эргодические; стационарные неэргодические; нестационарные эргодические; нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание – **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки

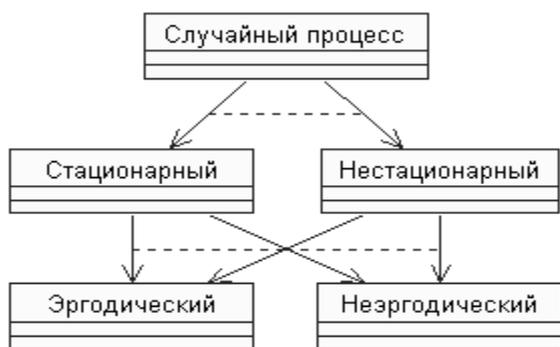


Рисунок В.2 - Классификация случайных процессов

с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять:  $\Theta_i$ ,  $\Theta_j$ ,  $\Theta_{cp}$ , – во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки работы.

В [55] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса  $\Theta_i = \Theta_j = \Theta_{cp}$ , для стационарного неэргодического процесса –  $\Theta_i = \Theta_{cp}$ , для нестационарного эргодического –  $\Theta_j = \Theta_{cp}$ , а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе  $S_d$  вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [55]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение  $N$ ,  $M$  и  $T$ , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

**Прямым методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (В.1).

**Косвенным методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_l(t_i^{(y)})], \dots\}, \quad (В.11)$$

где  $F\{\}$  представляет собой функциональное преобразование полученных оценок  $\hat{\Theta}[x(t)]$ ,  $\hat{\Theta}[y(t)]$  и т.д. с целью получения оценки  $\hat{\Theta}[z(t)]$ .

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \{S_{d1}g^{(i)}[x_j^{(i)}(t_i^{(i)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\} = 0; \quad (В.12)$$

$$\Xi_i \{F^{(i)}\{S_{d1}g^{(i)}[x_j^{(i)}(t_i^{(i)})]\}, \dots, F^{(m)}\{S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\}\} = 0. \quad (В.13)$$

Автоматизированные системы научных исследований (АСНИ) дают возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов – временные ряды**.

В этом случае выражения (В.2) – (В.4) при представлении случайного процесса  $X(t)$  ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.14})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.15})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (\text{B.16})$$

где  $x_j(t_i)$  –  $i$ -ый отсчёт  $j$ -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (B.5) примет вид:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] \quad (j = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, M) . \quad (\text{B.17})$$

Выражения (B.8) – (B.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.18})$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.19})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (\text{B.20})$$

Следующим шагом является построение математической модели анализируемой вероятностной функциональной характеристики в виде параметрической модели. Следует отметить, что модель должна сохранять основные свойства анализируемой характеристики, особенно условие нормировки [20].

Учитывая большое разнообразие функциональных вероятностных характеристик, наиболее целесообразно искать их модель в виде ряда в том или ином ортогональном базисе  $\psi_k(x, \alpha/\gamma)$  с весом  $\mu(x)$ , где  $\alpha/\gamma$  – параметр масштаба [8, 20-22, 30].

Представив модель вероятностной функциональной характеристики в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha/\gamma), \quad (\text{B.21})$$

$$\int_a^b \psi_k(x, \alpha/\gamma) \psi_n(x, \alpha/\gamma) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Для минимизации квадратической погрешности приближения

$$\Delta = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha/\gamma) \right]^2 \mu(x) dx = \min \quad (\text{B.22})$$

лишь коэффициенты разложения – коэффициенты Фурье с учетом свойств ортогональных функций автоматически определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|} \int_a^b f(x) \psi_k(x, \alpha/\gamma) \mu(x) dx. \quad (\text{B.23})$$

Для определения же остальных параметров модели необходимо решать дополнительные задачи.

Таким образом, для построения ортогональной модели необходимо:

- 1) выбрать ортогональный базис –  $\psi_k(x, \alpha / \gamma)$ ;
- 2) определить численное значение параметра масштаба  $\alpha / \gamma$ ;
- 3) определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ ;
- 4) определить количество членов разложения ряда (В.21);
- 5) определить корректирующие коэффициенты, обеспечивающие выполнение моделью основных свойств вероятностной функциональной характеристики, как правило, условия нормировки [20, 22].

Графическая интерпретация аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов представлена ниже:

$$\{x_j(t)\}_{j=0..N}^{t \in [0, Tj]} \Longrightarrow \{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0..N}^{i=1..M} \Longrightarrow \hat{\Theta}[X(t)] = S_a g \left[ \{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0..N}^{i=1..M} \right]$$

где  $\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0..N}^{i=1..M}$  - временной ряд.

Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ случайных процессов:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{\Theta}[X(t)] = \sigma_x^2 \hat{\rho}_x(\tau) & & & & & & \\ \hat{\rho}_x(\tau) \Longrightarrow \hat{\rho}_{ax}(\tau, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{S}_a(\omega, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{F}_a(\omega, \bar{\beta}_m) & & & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta\omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) & & \end{array}$$

Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{\Theta}[X(t), Y(t)] = \sigma_{xy}^2 \hat{\rho}_{xy}(\tau) & & & & & & \\ \hat{\rho}_{xy}(\tau) \Longrightarrow \hat{\rho}_{axy}(\tau, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{S}_a(\omega, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{F}_a(\omega, \bar{\beta}_m) & & & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta\omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) & & \end{array}$$

Изучению особенностей решения задач, связанных с построением ортогональных моделей корреляционно-спектральных вероятностных характеристик, и предназначено предлагаемое учебное пособие.

# 1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

## 1.1. Ортогональные полиномы и их свойства во временной области

Рассмотрим основные понятия и определения, необходимые для описания и исследования ортогональных полиномов и функций, применяемых для построения функциональных вероятностных характеристик случайных процессов [8, 18, 20–44, 49, 52].

**Определение 1.** Функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется **функцией с суммируемым квадратом**, если

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty. \quad (1.1)$$

Множество всех функций с суммируемым квадратом обозначается обычно символом  $L_2$  -  $f(x) \in L_2$ . Отметим, что и  $cf(x) \in L_2$ , где  $c = const$ .

**Определение 2.** **Нормой** функции  $f(x)$  называется число, определяемое выражением

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \quad (1.2)$$

Отметим, что

1.  $\|f\| \geq 0$ , причем  $\|f\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  тождественно равно нулю;
2.  $\|cf\| = |c|\|f\|$  и, в частности  $\|f\| = \|-f\|$ ;
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

Введение нормы позволяет рассматривать  $L_2$  как метрическое пространство, в котором можно производить измерения, если принять число

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

за расстояние между элементами  $f$  и  $g$  класса  $L_2$ .

При этом расстояние  $\rho(f, g)$  обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(f, g) \geq 0$ , причем  $\rho(f, g) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = g$ ;
2.  $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ ;
3.  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ .

Если на некотором множестве  $A$  элементов любой природы задана функция  $\rho(f, g)$ , то множество  $A$  называют метрическим пространством. Следовательно, множество  $L_2$  - метрическое пространство. Впервые эту точку зрения на  $L_2$  развил Д. Гильберт, поэтому  $L_2$  часто называют пространством Гильберта.

**Определение 3.** Элемент  $f$  пространства  $L_2$  называется пределом последовательности  $f_1, f_2, \dots$ , элементов этого же пространства, если всякому  $\varepsilon > 0$  отвечает такое  $N$ , что при всех  $n > N$  будет выполняться  $\|f - f_n\| < \varepsilon$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \quad (1.3)$$

Этот вид сходимости последовательности функций называется *сходимостью в среднем*.

**Определение 4.** Две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , заданные на отрезке  $[a, b]$ , называются *взаимно ортогональными*, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (1.4)$$

**Определение 5.** Функция  $f_n(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется *нормированной*, если

$$\int_a^b f_n^2(x)dx = 1. \quad (1.5)$$

Отметим, что в общем случае  $\int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2$  и  $f_n(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$ .

**Определение 6.** Система функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется *ортонормальной* системой, если каждая функция системы нормирована, а любые две функции системы ортогональны. Иначе говоря, система функций  $\{\psi_k(x)\}$  *ортонормальна*, если

$$\int_a^b \psi_{n,k}(x)\psi_{n,n}(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Определение 7.** Система функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется *ортогональной* системой, если любые две функции системы ортогональны:

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.7)$$

Отметим, что  $\psi_{n,k}(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|}$ .

**Определение 8.** Пусть  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  есть ортонормальная система и  $f(x)$  некоторая функция из  $L_2$ . Тогда числа

$$\beta_k = \int_a^b f(x)\psi_{n,k}(x)dx \quad (1.8)$$

называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$  в системе функций  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

Для ортогональной системы  $\{\psi_k(x)\}$  коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  определяются в виде

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx. \quad (1.9)$$

**Определение 9.** Ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_{n,k}(x) \quad (1.10)$$

называется рядом Фурье функции  $f(x)$  в системе  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

Рассмотрим, насколько близка в пространстве Гильберта частная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x), \quad (1.11)$$

к самой этой функции, т.е. вычислим  $\|f - f_m\|^2$ . С учетом свойств ортогональности (см. определение б), получим

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (1.12)$$

Это равенство называется **тождеством Бесселя**. Так как его левая часть не отрицательна, то из него следует **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.13)$$

Поскольку  $m$  произвольно, то **неравенство Бесселя** можно представить в усиленной форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.14)$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 = \|f\|^2, \quad (1.15)$$

то это равенство носит название **формулы замкнутости или равенства Парсеваля**.

С учетом (1.15) формулу (1.12) представим в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_m\| = 0. \quad (1.16)$$

Иначе говоря, формула замкнутости означает, что частные суммы  $f_m(x)$  ряда Фурье функции  $f(x)$  **сходятся в среднем** к этой функции.

Для ортогональной системы функций выражение (1.12) приведем к виду

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.17)$$

**Определение 10.** Ортонормальная система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  называется **замкнутой**, если формула замкнутости имеет место для любой функции из  $L_2$ .

**Теорема 10.1.** Если система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  замкнута, то для любой пары функций  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L_2$  будет

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad (1.18)$$

$$\text{где } a_k = \int_a^b f(x)\psi_{n,k}(x)dx, \quad (1.19)$$

$$b_k = \int_a^b g(x)\psi_{n,k}(x)dx. \quad (1.20)$$

Эта формула называется **обобщенной формулой замкнутости**.

**Следствие.** Если система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  замкнута и  $f(x) \in L_2$ , то ряд Фурье  $f(x)$  в системе  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  можно почленно интегрировать по любому измеримому множеству  $E \subset [a, b]$ , т.е.

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \int_E \psi_{n,k}(x)dx. \quad (1.21)$$

**Определение 11.** Система функций  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и принадлежащих  $L_2$  называется **полной**, если в  $L_2$  не существуют отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

**Теорема.** Для того, чтобы ортонормальная система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  была полна, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.

**Определение 12.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана положительная непрерывная функция  $\mu(x)$ . Система функций  $\{\varphi_k(x)\}$ , заданная на отрезке  $[a, b]$  называется **ортogonalной (первое условие ортогональности)** на этом отрезке с весом  $\mu(x)$ , если

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\mu(x)dx = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.22)$$

Из ортогональности системы  $\{\varphi_k(x)\}$  с весом  $\mu(x)$  следует ортогональность системы  $\psi_k(x) = \sqrt{\mu(x)}\varphi_k(x)$ . Отметим, что в этом случае  $\|\varphi_k\| = \|\psi_k\|$ .

**Определение 13.** Все нули ортогонального многочлена  $\psi_k(x)$  действительны, различны и расположены в интервале  $(a, b)$  - **второе условие ортогональности**.

**Определение 14.** Система  $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  называется линейно независимой, если

$$\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j = 0, \quad (1.23)$$

только тогда, когда все  $C_j = 0$ .

Важным аппаратом многих исследований является ортогонализация заданной системы элементов гильбертова пространства. Если задана линейно независимая система элементов  $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , можно построить ортогональную линейно независимую систему  $\Psi_n = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  элементов вида

$$\psi_j = \sum_{i=1}^j b_{ji} \varphi_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.24)$$

где  $b_{ii} = 1$ .

Совокупность соотношений (1.24) при  $j \leq n$  можно представить в виде

$$\psi_n = B_n \Phi_n, \quad (1.25)$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ b_{31} & b_{32} & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

и  $\Psi_n$ ,  $\Phi_n$  являются вектор-столбцами из соответствующих элементов. В то же время, перенося все  $\psi_i$  из правой части в левую, получим

$$\Phi_n = A_n \Psi_n,$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}; \quad (1.27)$$

матрицу  $B_n$  иногда называют матрицей ортогонализации. Так как  $\det B_n = 1$ , то преобразование, задаваемое матрицей  $B_n$ , является невырожденным и переводит линейно независимую систему элементов  $\Phi_n$  в линейно независимую систему  $\Psi_n$ .

В силу линейной независимости системы функций  $\Phi_n$  отсюда следует, что  $B_n = A_n^{-1}$ .

При построении ортогональных многочленов в качестве элементов системы функций  $\Phi_j$  берутся функции  $1, x, x^{j-1}$  и производится ортогонализация по описанной выше процедуре. Получаемые многочлены

$$\psi_j(x) = x^{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} x^{i-1} \quad (1.28)$$

называются ортогональными многочленами, соответствующими весу  $\mu(x)$  и отрезку ортогональности  $[a, b]$ . Иногда ортогональными многочленами, соответствующими весу  $\mu(x)$ , называют многочлены  $g_j(x) = \alpha_j \psi_j(x)$ , в которых величины  $\alpha_j$  подбираются из каких-либо дополнительных соображений.

Ответ на вопрос, каким образом определяется весовая функция ортогональных полиномов, дает решение дифференциального уравнения Пирсона [54]:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2}, \quad (1.29)$$

в правой части которого все коэффициенты действительны.

Вид решения этого уравнения и область существования зависят от многочленов

$$A(x) = p_0 + p_1 x; \quad (1.30)$$

$$B(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2. \quad (1.31)$$

Рассмотрим решения уравнения (1.29) в зависимости от коэффициентов многочленов (1.30) и (1.31) и выделим те из них, которые на всей связной области своего существования могут быть весовой функцией, и, следовательно, могут определять некоторую систему ортогональных многочленов, а именно, те системы, которые будут использоваться при последующем анализе.

Пусть многочлен  $B(x)$  не имеет нулей, т. е.  $q_2 = 0$ ,  $q_1 \neq 0$ . Тогда без нарушения общности можно считать  $q_0 = 0$ , так как это достигается линейным преобразованием независимого переменного, а уравнение (1.29) примет вид:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} - \beta, \quad (1.32)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые постоянные.

Его решение

$$y = \mu(x) = c_1 x^\alpha e^{-\beta x} \quad (1.33)$$

будет весовой функцией на полусегменте  $[0, \infty)$  при условиях  $c_1 > 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > 0$ .

Многочлены, ортогональные с весом (1.9) и  $\beta = 1$ , можно рассматривать как обобщенные многочлены Сонина-Лагерра [20, 39].

Пусть многочлен  $B(x)$  имеет два действительных и различных нуля. Тогда уравнение Пирсона можно представить в виде

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2(x-a)(x-b)} = \frac{\beta}{x-a} - \frac{\alpha}{b-x}, \quad (1.34)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые постоянные, а  $a < b$ .

Решение уравнения (1.34)

$$y = \mu(x) = c_2 (b-x)^\alpha (x-a)^\beta \quad (1.35)$$

определено на интервале  $(a, b)$  и весовой функцией может быть только при условиях  $c_2 > 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . Линейным преобразованием функция (1.35) сводится к весовой функции многочленов Якоби.

Легко видеть, что при тех же коэффициентах уравнение Пирсона имеет решения и на интервалах  $(-\infty, a)$  и  $(b, \infty)$ , но полученные решения не могут служить весовыми функциями [52].

Ортогональные многочлены полученных весовых функций, а именно Якоби и Сонина-Лагерра, относятся к числу классических ортогональных многочленов.

Заметим, при параметрах  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_0 \neq 0$  решением уравнения (1.29) является весовая функция многочленов Эрмита, которые также относятся к числу классических.

Для классических ортогональных многочленов имеет место весьма важное представление через весовую функцию, которое называется обобщенной формулой Родрига [52].

Если весовая функция  $h(x)$  на интервале ортогональности удовлетворяет уравнению (1.29), то функция

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\mu(x)} [\mu(x) B^{(n)}(x)]^{(n)} \quad (1.36)$$

есть многочлен степени не выше  $n$ .

В дальнейшем при анализе будут использоваться системы ортогональных многочленов Сонина-Лагерра  $L_k^{(\alpha)}(x)$  (1.33) при  $\beta = 1$  и Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$  (1.35) при задании некоторых частных параметров, а именно: Сонина-Лагерра (0) (Лагерра)  $L_k^{(0)}(x) = L_k(x)$ ; Сонина-Лагерра (1)  $L_k^{(1)}(x)$ ; Сонина-Лагерра (2)  $L_k^{(2)}(x)$ ; Якоби  $(-0,5, 0)$   $P_k^{(-0,5,0)}(x)$ ; Якоби  $(0,5, 0)$   $P_k^{(0,5,0)}(x)$ ; Якоби  $(0, 0)$  (Лежандра)  $P_k^{(0,0)}(x) = Leg_k(x)$ ; Яко-

би (1, 0)  $P_k^{(1,0)}(x)$ ; Якоби (2, 0)  $P_k^{(2,0)}(x)$ ; Якоби (0, 1)  $P_k^{(0,1)}(x)$ ; Якоби (0, 2)  $P_k^{(0,2)}(x)$ ; Якоби (-0,5, -0,5) (Чебышева 1-ого рода)  $P_k^{(-0,5,-0,5)}(x) = T_k(x)$ ; Якоби (0,5, 0,5) (Чебышева 2-ого рода)  $P_k^{(0,5,0,5)}(x) = U_k(x)$ , а также широко применяемые в прикладном анализе ортогональные полиномы Дирихле 1  $D_k(x)$  и Дирихле 2  $Dir_k(x)$ . Следует отметить, что ортогональные полиномы Дирихле не относятся к классическим полиномам. Вид ортогональных полиномов представлен в Приложении 1.

Общие представления Родрига для ортогональных базисов Сонина-Лагерра и Якоби соответственно имеют вид:

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{k!} x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+k} e^{-x})^{(k)}; \quad (1.37)$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^k}{k! 2^k} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left[ (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^k \right]^{(k)}. \quad (1.38)$$

Явные выражения многочленов представлены в таблице 1.1.

При проведении аналитических преобразований с использованием ортогональных многочленов более удобным является представление в виде конечного ряда, получаемого проведением операции дифференцирования с помощью формулы Лейбница [5] к выражению (1.36). В общем случае представления (1.37) и (1.38) в виде конечного ряда имеют вид [52]:

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^k C_{k+\alpha}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}; \quad (1.39)$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{k! 2^k} \sum_{s=0}^k \frac{C_k^s (x-I)^{k-s} (x+I)^s}{\Gamma(\alpha+k-s+1)\Gamma(\beta+s+1)}. \quad (1.40)$$

Форма представления ортогональных многочленов в виде конечного ряда является более удобной и наглядной для анализа и проведения различных операций над ними, в частности, операций интегрирования и дифференцирования. Однако такие выражения для ортогональных многочленов обладают существенным недостатком при реализации на ЭВМ: невозможность вычисления многочлена высокого порядка из-за необходимости вычисления комбинаторного числа сочетаний.

Форма представления ортогональных полиномов в виде конечного ряда представлена в таблице 1.1.

Указанный недостаток может быть исправлен использованием рекуррентных соотношений. Общие выражения для рекуррентных соотношений рассматриваемых ортогональных базисов представлены ниже [52]:

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+2k+1-x)}{(k+1)} L_k^{(\alpha)}(x) - \frac{(\alpha+k)}{(k+1)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x); \quad (1.41)$$

$$P_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{[(\alpha+\beta+2k+2)(\alpha+\beta+2k)x + \alpha^2 - \beta^2](\alpha+\beta+2k+1)}{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)(\alpha+\beta+2k)} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{(\alpha+k)(\beta+k)(\alpha+\beta+2k+2)}{(k+1)(\alpha+\beta+k+1)(\alpha+\beta+2k)} P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (1.42)$$

Применение рекуррентных соотношений (1.41) и (1.42) позволяет резко снизить как временные затраты, так и ресурсные, исследовать ортогональные полиномы высоких порядков и их свойства.

Орт. полиномы	Представление в форме Родрига	Представление в виде конечного ряда
Якоби $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x)^{1/2} \left( \frac{1}{(1-x)^{1/2}} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \left( (1-x)^{1/2} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(1,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)} \left( (1-x)(1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^2} \left( (1-x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(0,1)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1+x)} \left( (1+x)(1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(0,2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1+x)^2} \left( (1+x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^{k-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s$
Лежандра $Leg_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \left( (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Чебышева 1-ого рода $T_k(x) = P_k^{(-1/2,-1/2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x^2)^{1/2} \left( (1-x^2)^{k-1/2} \right)^{(k)}$	$\frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^k C_{2k}^{2s} (x-1)^{k-s} (x+1)^s$
Чебышева 2-ого рода $U_k(x) = P_k^{(1/2,1/2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \left( (1-x^2)^{k+1/2} \right)^{(k)}$	$\frac{1}{2^k (k+1)} \sum_{s=0}^k C_{2k+2}^{2s+1} (x-1)^{k-s} (x+1)^s$
Дирихле 1 $D_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{s/2}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left( \frac{1-x}{2} \right)^{s/2}$
Лагерра $L_k(x) = L_k^{(0)}(x)$	$\frac{1}{k!} e^x (x^k e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-x)^s}{s!}$
Сонина-Лагерра $L_k^{(1)}(x)$	$\frac{1}{k! x} e^x (x^{k+1} e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}$
Сонина-Лагерра $L_k^{(2)}(x)$	$\frac{1}{k! x^2} e^x (x^{k+2} e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}$

Отметим, что, в общем случае, для построения и исследования ортогональных моделей функциональных вероятностных характеристик необходимо для каждой ортогональной системы определить [39]:

1. интервал ортогональности  $[a, b]$ ;

2. вес;
3. аналитическое выражение ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
4. рекуррентную формулу определения ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
5. норму ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
6. значение ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка на концах сегмента ортогональности (в «нуле»);
7. длительность ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
8. преобразование Фурье ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
9. выражения для коэффициентов разложения для различных моделей исследуемой функциональной характеристики случайных процессов;
10. выражения для оценки методической погрешности аппроксимации функциональной характеристики;
11. аналитические выражения для оценки параметров ортогональных функций;
12. выражения для оценки методической погрешности коэффициентов разложения функциональной характеристики и её составляющих.

Следует отметить, что задачи 1 – 8 инварианты к виду вероятностной функциональной характеристики, а – 9 – 12 решаются для конкретных случаев.

Основные характеристики ортогональных полиномов представлены в таблице 1.2.

## 1.2. Ортогональных функций и их свойства во временной области

При решении значительного количества прикладных задач наиболее часто применяются ортогональные функции, определенные на интервале  $[0, \infty)$  [7, 20, 39]. Как правило, они получаются из соответствующих ортогональных полиномов путем введения замены:

$$x = 1 - ae^{-c\gamma\tau}, \quad (1.43)$$

где  $\gamma$  – параметр масштаба;  $c$  – целое число, определяемое для каждого ортогонального базиса;  $a$  – параметр, который зависит от заданного сегмента ортогональности (см. таблицу 1.3).

С учетом введенной замены (1.43) выражение для определения квадрата нормы (1.7) примет следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) d(1 - ae^{-c\gamma\tau}) = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (1.44)$$

Проделив ряд преобразований, получим:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) e^{-c\gamma\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (1.45)$$

Выражение (1.45) показывает, что ортогональные полиномы  $\psi_k(x)$  преобразуются в ортогональные функции:

$$\psi_{k,f}(\tau, \gamma) = \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \sqrt{\mu(1 - ae^{-c\gamma\tau})} e^{-\frac{c\gamma\tau}{2}}, \quad (1.46)$$

Основные характеристики ортогональных полиномов

Таблица 1.2

Орт. полиномы	$\mu(x)$	$\ \psi_k\ ^2$
Якоби $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{4k+1}$
Якоби $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\sqrt{1-x}$	$\frac{4\sqrt{2}}{4k+3}$
Якоби $P_k^{(1,0)}(x)$	$1-x$	$\frac{2}{k+1}$
Якоби $P_k^{(2,0)}(x)$	$(1-x)^2$	$\frac{8}{2k+3}$
Якоби $P_k^{(0,1)}(x)$	$1+x$	$\frac{2}{(k+1)}$
Якоби $P_k^{(0,2)}(x)$	$(1+x)^2$	$\frac{8}{(2k+3)}$
Лежандра $Leg_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$	$1$	$\frac{2}{2k+1}$
Чебышева 1-ого рода $T_k(x) = P_k^{(-1/2,-1/2)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \pi, k=0 \\ \pi/2, k \neq 0 \end{cases}$
Чебышева 2-ого рода $U_k(x) = P_k^{(1/2,1/2)}(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2(k+1)^2}$
Дирихле 1 $D_k(x)$	$1$	$\frac{1}{k+1}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	$1$	$\frac{2}{k+1}$
Лагерра $L_k(x) = L_k^{(0)}(x)$	$e^{-x}$	$1$
Сонина-Лагерра $L_k^{(1)}(x)$	$xe^{-x}$	$k+1$
Сонина-Лагерра $L_k^{(2)}(x)$	$x^2e^{-x}$	$(k+1)(k+2)$

определенные на интервале  $[0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau, \gamma) = 1$  и нормой

$$\|\psi_{k,f}\|^2 = \frac{\|\psi_k\|^2}{a\gamma}. \quad (1.47)$$

Ортогональные функции  $k$ -ого порядка

$$\psi_k(\tau, \gamma) = \psi_{k,f}(\tau, \gamma) / \psi_{k,f}(0, \gamma)$$

в различных базисах и их основные характеристики представлены в таблице 1.3, а вид – в Приложении 2. По аналогии с импульсной переходной характеристикой можно

ввести понятие длительности ортогональной функции, применяемое в различных приложениях [20]:

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{1}{\psi_k(0,\gamma)} \int_0^\infty \psi_k(\tau,\gamma) d\tau; \quad (1.48)$$

$$\tau_{k,u}^{(4)} = \int_0^\infty \left[ \frac{\psi_k(\tau,\gamma)}{\psi_k(0,\gamma)} \right]^2 d\tau. \quad (1.49)$$

Форма представления и характеристики ортогональных функций

Таблица 1.3

Орт. функции	Представление в виде конечно-го ряда $\psi_k(\tau,\gamma)$	$(a, c)$	$\ \psi_k\ ^2$	$\psi_k(0,\gamma/\alpha)$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau,\gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	(2,2)	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau,\gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s e^{-\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	(2,2)	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(1,0)}(\tau,\gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	(2,1)	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(2,0)}(\tau,\gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	(2,2)	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(0,1)}(\tau,\gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	(2,2)	$\frac{1}{4\gamma(k+1)^3}$	$(-1)^k$
$P_k^{(0,2)}(\tau,\gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	(2,2)	$\frac{2}{\gamma(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}$	$(-1)^k$
$Leg_k(\tau,\alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	(2,2)	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
$T_k(\tau,\gamma)$	$\begin{cases} e^{-\gamma\tau}, k=0 \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} e^{-[2(k-s)+1]\gamma\tau}, k \neq 0 \end{cases}$	(2,2)	$\begin{cases} \frac{\pi}{4\gamma}, k=0 \\ \frac{\pi}{8\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$	$(-1)^k$
$U_k(\tau,\gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} e^{-[2(k-s)+1]\gamma\tau}$	(2,2)	$\frac{\pi}{8\gamma(k+1)^2}$	$(-1)^k$
$D_k(\tau,\alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	(1,2)	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
$Dir_k(\tau,\alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	(2,2)	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
$L_k(\tau,\alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\alpha\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\alpha\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{\alpha}$	1

$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\gamma\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma^2}$	1
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\gamma\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)\gamma^3}$	1

В качестве примера рассмотрим ортогональные полиномы  $D_k(x)$  на интервале  $[0, 1]$  с весом  $\mu(x) = 1$

$$D_k(x) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{\frac{s}{2}} \quad (1.50)$$

и преобразуем их в ортогональные функции на интервале  $[0, \infty)$ .

Отметим, что значение ортогональных полиномов в «нуле» и норма [20]

$$D_k(0) = 1, \quad (1.51)$$

$$\|D_k\|^2 = \int_0^1 D_k(x) D_m(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (1.52)$$

В соответствии с (1.43) для преобразования интервала  $[0, 1]$  в диапазон  $[0, \infty)$  введем замену переменных  $x = 1 - e^{-2\alpha\tau}$ . С учетом введенной замены выражение (1.52) примет вид:

$$2\alpha \int_0^\infty D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) D_m(1 - e^{-2\alpha\tau}) e^{-2\alpha\tau} \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (1.53)$$

Соотношение (1.53) показывает, что ортогональные полиномы преобразуются в функции, ортогональные на интервале  $[0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau) = 1$ .

$$D_k(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}. \quad (1.54)$$

Квадрат нормы и длительность с учетом (1.48) и (1.52) имеет вид:

$$\int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) D_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha(k+1)}, & m = k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \quad (1.55)$$

$$\tau_{k,\mu}^{(2)} = \int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) d\tau = \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha}. \quad (1.56)$$

Способ представления ортогональных полиномов и функций в виде комбинаторных сумм (см. таблицу 1.1 и таблицу 1.3 позволяет использовать унифицированный подход к вычислению конечных и бесконечных сумм путем их сведения к одномерным и кратным интегралам, как правило, контурным.

Одним из таких унифицированных подходов является метод производящих функций, являющийся одним из основных аналитических подходов получения комбинаторных тождеств [12]. Производящие функции, либо производящие интегралы, могут быть использованы для изучения свойств систем многочленов, включая нахож-

дение явных формул, получение и решение рекуррентных соотношений (дифференциальных, интегральных и дифференциально-разностных уравнений), связывающих эти последовательности чисел, получение асимптотических формул для производимых чисел (функций) [12].

Однако при решении задач с определением и изучением свойств ортогональных многочленов, рассматриваемых нами, воспользуемся общим унифицируемым подходом – методом коэффициентов.

Опишем необходимую последовательность действий при реализации данного метода.

На первом этапе вычислений нами в простейшем виде реализуется фундаментальная идея об интегральном представлении решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям. На заключительном этапе, в случае представления решения с помощью контурных интегралов, используется теория вычетов одного или нескольких комплексных переменных [12, 50]. Главным отличием данного метода вычисления комбинаторных сумм от известных ранее подходов является создание единой стандартизированной процедуры получения интегральных представлений вычисляемых сумм с полным обоснованием данного метода, как и метода производящих функций, с помощью теории одномерных и кратных вычетов [50]. В случае формальных рядов вводится понятие коэффициентов *Coef*, непосредственно связанное с понятием вычета из теории аналитических функций и пригодное для использования различных функций, включая степенные. Связь с теорией вычетов позволила выписать свойства *Coef*, аналогичные свойствам вычета, и унифицировать схему метода коэффициентов, независимо от того, какие ряды: сходящиеся либо формальные - используется при вычислениях [12].

Для работы с *Coef* и проведения различных операций над ними существует правила, записанные в табличном виде и приведенные в Приложении 3. Там же приведены интегральные представления комбинаторных чисел [12].

Результат использования метода коэффициентов можно увидеть на примере получения соотношения для ортогональных функций Якоби:

$$P_k^{(\alpha,0)}(0, \gamma) = (-1)^k, \quad (1.57)$$

где

$$P_k^{(\alpha,0)}(0, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s. \quad (1.58)$$

Последовательность действий, реализующая метод коэффициентов с использованием правил работы над *Coef* представлена ниже.

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s &= \sum_{s=0}^k \underset{u}{Coef} \left( (1+u)^k u^{-s-1} \right) \cdot \underset{v}{Coef} \left( (1+v)^{k+s+\alpha} v^{-s-\alpha-1} \right) \cdot (-1)^s = \\ &= \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot \left( \sum_{s=0}^k \left( -\frac{(1+v)}{v} \right)^s \underset{u}{Coef} \left( (1+u)^k u^{-s-1} \right) \right) = \\ &= \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot \left( 1 - \frac{(1+v)}{v} \right)^k = \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot (-1)^k v^{-k} = \\ &= (-1)^k \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-k-\alpha-1} = (-1)^k C_{k+\alpha}^{k+\alpha} = (-1)^k. \end{aligned}$$

В справедливости полученного соотношения несложно убедиться [20, 33-35]. Для других ортогональных функций подход аналогичен.

Разумеется, с использованием данного подхода можно реализовать аналитические преобразования более сложных комбинаторных сумм и выражений. В качестве демонстрации сказанному представим аналитические преобразования с использованием *Coef* при получении соотношения также для ортогональных функций Якоби для общности:

$$\|P_k^{(\alpha,0)}\|^2 = \frac{1}{(2k + \alpha + 1)c\gamma}, \quad (1.59)$$

где

$$\|P_k^{(\alpha,0)}\|^2 = \int_0^\infty P_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) P_m^{(\alpha)}(\tau, \gamma) d\tau; \quad (1.60)$$

$$P_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s e^{-c\left(\frac{s+\alpha+1}{2}\right)\gamma\tau}; \quad (1.61)$$

где  $c$  - параметр замены (1.43).

Заметим, что при проведении аналитических преобразований над равенством цифровым эквивалентом указывается используемое при получении промежуточного результата правило (см. Приложение 3).

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} \sum_{s=0}^m C_m^s C_{m+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} \sum_{s=0}^k \underset{u}{Coef} (1+u)^k u^{-s-1} \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+s+\alpha} u^{-k+s+\alpha-1} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} \times \\ & \times \sum_{s=0}^m \underset{u}{Coef} (1+u)^m u^{-s-1} \underset{v}{Coef} (1+v)^{m+s+\alpha} u^{-m+s+\alpha-1} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+1}} \left( \sum_{s=0}^k \left( -\frac{(1+v)v}{e^{cs\gamma\tau}} \right)^s \underset{u}{Coef} (1+u)^k u^{-s-1} \right) \times \\ & \times \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{m+\alpha}}{v^{m-\alpha+1}} \left( \sum_{s=0}^m \left( -\frac{(1+v)v}{e^{cs\gamma\tau}} \right)^s \underset{u}{Coef} (1+u)^m u^{-s-1} \right) d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} e^{-(k+m)c\gamma\tau} \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+1}} (e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^k \times \\ & \times \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+1}} (e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^k \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{m-k}}{v^{m-k}} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+k+m+1)\gamma\tau} \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{2k+2\alpha}}{v^{2k-2\alpha+1}} \underset{v}{Coef} \frac{(e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^{2k}}{v} \overset{def}{\delta_{mk}} d\tau = \end{aligned}$$

$$\overset{def}{=} \begin{cases} \frac{1}{(2k + \alpha + 1)c\gamma\tau}, k = m; \\ 0, k \neq m. \end{cases}$$

Справедливость получаемых соотношений после ряда аналитических преобразований с помощью указанных методов несложно проверить с использованием общих математических пакетов, либо специализированных автоматизированных систем, одной из которых является автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби [33]. Данная система позволяет строить ортогональные полиномы и функции высоких порядков, исследовать свойства ортогональных многочленов и влияние параметров ортогонального базиса друг на друга и на результат исследования.

### 1.3. Дискретизация ортогональных функций

Длительность ортогональной функции  $k$ -ого порядка  $\tau_{k \max}$  определяется в результате решения уравнения [20-22]:

$$|\psi_k(\tau > \tau_{k \max}, \alpha / \gamma)| \leq \Delta, \quad (1.62)$$

где  $\Delta$  – заданная погрешность,

$\alpha / \gamma$  – параметр масштаба ортогональных функций.

Таким образом, под длительностью ортогональной функции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  или  $-\Delta$ , после которой функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рисунке 1.1 показан пример определения длительности ортогональной функции  $k$ -ого порядка. Также, с заданной погрешностью можно считать, что вне интервала  $[0, \tau_{k \max}]$  функция тождественно равна нулю.

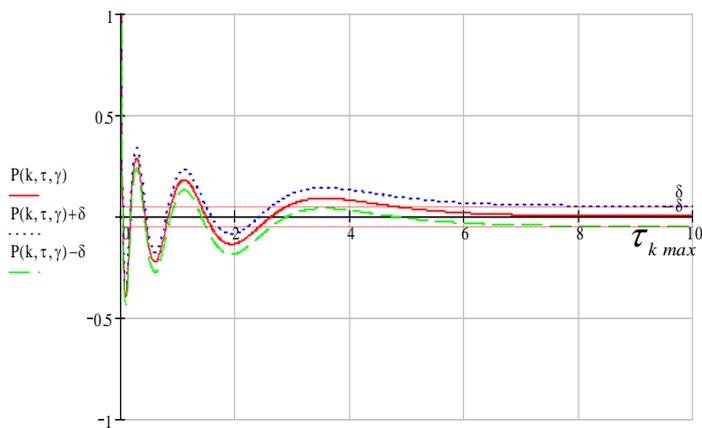


Рисунок 1.1 – Определение длительности  $\psi_k(\tau, \gamma)$

Интервал дискретизации при линейной интерполяции с заданной погрешностью можно вычислить по формуле [20]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8\delta}{\|\psi_k''\|_{\max}}}, \quad (1.63)$$

где  $\delta$  – заданная погрешность восстановления,

$\|\psi_k''\|_{\max}$  – максимальное по модулю значение второй производной соответствующей функции.

Число интервалов дискретизации определяется выражением:

$$n = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta t} + 0,5 \right], \quad (1.64)$$

где  $\text{Ent}[\ ]$  – целая часть от числа,

$\tau_{k \max}$  – максимальная длительность ортогональной функции  $k$ -ого порядка.

## 1.4. Частотные характеристики ортогональных функций

Многие задачи аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа удобнее решать с использованием частотных характеристик ортогональных функций [20, 27, 39, 42, 43]. Рассмотрим ортогональные базисы, представленные в таблице 1.3.

Найдем преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 1.4)

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.65)$$

Из результатов, представленных в таблице 1.4, видно, что преобразование Фурье ортогональных функций 1, 4-10 ( $\mu(\tau) = 1$ ) можно представить в общем виде:

$$W_k(j\omega) = \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{j\omega + 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}. \quad (1.66)$$

Выражение (1.66) приведем к виду

$$W_k(j\omega) = \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + j2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega - 1}{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega + 1}. \quad (1.67)$$

Введем обозначения  $tg\varphi_s = 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$ ,  $\varphi_s = \arctg 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} W_k(j\omega) &= \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + jtg\varphi_k} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{jtg\varphi_s - 1}{jtg\varphi_s + 1} = \\ &= 2(-1)^k \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos\varphi_k \exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} W_k(j\omega) = 2(-1)^k \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos\varphi_k \cos\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]; \quad (1.69)$$

$$\operatorname{Im} W_k(j\omega) = 2(-1)^{k+1} \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos\varphi_k \sin\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]; \quad (1.70)$$

$$|W_k(j\omega)| = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \cos\varphi_k; \quad (1.71)$$

$$\Phi_k(j\omega) = -\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right) + \operatorname{Ent} \left[ \frac{\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s}{\pi} + 0,5 \right] \pi \quad (1.72)$$

Частотные характеристики с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций, представленные в виде (1.68) – (1.72), удобно применять при корреляционно-спектральном анализе [20-22].

Примеры частотных характеристик исследуемых ортогональных функций различных порядков, соответствующие таблице 1.4 и формуле (1.68) представлены в Приложении 4.

Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) и (2), как видно из таблицы 1.4, не описываются формулой (1.66). Однако, введя обозначения  $tg\varphi = 2\omega/\gamma$ ,  $\varphi = \arctg 2\omega/\gamma$ , также можно получить аналитические выражения частотных характеристик с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций.

Преобразование Фурье ортогональных функций

Таблица 1.4

№	Ортогональные функции	$W_k(j\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)} \left( 1 - \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^{k+1} \right)$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma^2(k+1)(k+2)} \left[ \left( \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^{k+1} - 1 \right) (j\omega - \gamma/2) + \gamma(k+1) \right]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
13	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{1}{\gamma + j\omega}, k=0 \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{1}{(2(k-s)+1)\gamma + j\omega}, k \neq 0 \end{cases}$
14	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{1}{(2(k-s)+1)\gamma + j\omega}$

Так для ортогональных функций Сонина-Лагерра (1):

$$W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( 1 + (-1)^k \exp[-2(k+1)j\varphi] \right); \quad (1.73)$$

$$\operatorname{Re} W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( 1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi] \right); \quad (1.74)$$

$$\operatorname{Im} W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( (-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi] \right). \quad (1.74)$$

Для ортогональных функций Сонина-Лагерра (2):

$$W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{\exp(-j\varphi)}{2\cos\varphi} + \frac{(-1)^k \exp[-(2k+3)j\varphi]}{2\cos\varphi} + k+1 \right); \quad (1.75)$$

$$\operatorname{Re} W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi]}{2\cos\varphi} + k+1 \right); \quad (1.76)$$

$$\operatorname{Im} W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi]}{2\cos\varphi} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \right). \quad (1.77)$$

Частотные характеристики ортогональных функций Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2)

с учетом обозначения  $\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$ ,  $\varphi_s = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$  равны:

$$W_k^{(0,1)}(j\omega) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos\varphi_s \exp(-j\varphi_s)}{(2s+1)}; \quad (1.78)$$

$$\operatorname{Re} W_k^{(0,1)}(j\omega) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2\varphi_s}{(2s+1)}; \quad (1.79)$$

$$\operatorname{Im} W_k^{(0,1)}(j\omega) = -\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos\varphi_s \sin\varphi_s}{(2s+1)}; \quad (1.80)$$

$$W_k^{(0,2)}(j\omega) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos\varphi_s \exp(-j\varphi_s)}{(2s+1)}; \quad (1.81)$$

$$\operatorname{Re} W_k^{(0,2)}(j\omega) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2\varphi_s}{(2s+1)}; \quad (1.82)$$

$$\operatorname{Im} W_k^{(0,2)}(j\omega) = -\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos\varphi_s \sin\varphi_s}{(2s+1)}. \quad (1.83)$$

Модули и фазы частотных характеристик ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) и (2), Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) определяются следующими общими выражениями:

$$|W_k(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re} W_k^{(i/0,i)}(j\omega)^2 + \operatorname{Im} W_k^{(i/0,i)}(j\omega)^2}; \quad (1.84)$$

$$\Phi_k(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W_k^{(i/0,i)}(j\omega)}{\operatorname{Re} W_k^{(i/0,i)}(j\omega)}. \quad (1.85)$$

Полученные выражения для преобразования Фурье ортогональных функций позволяют решать разнообразные задачи аппроксимативного анализа случайных процессов. Так, например, из выражения (1.65) можно найти выражение для определения длительности ортогональных функций (см. таблицу 1.5), необходимые для оценки интервала корреляции [20].

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = W_k(0, \alpha). \quad (1.86)$$

Длительность ортогональных функций

Таблица 1.5

№	Ортогональные функции	$\tau_{k,u}^{(2)}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(-1)^k}{\alpha}$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \left[ \frac{(k+1) \bmod 2}{k+1} \right]$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \left[ \frac{(k+2) \operatorname{div} 2}{(k+1)(k+2)} \right]$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha(2k+1)}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^k}{\alpha(k+1)}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(4k+1)}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(4k+3)}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(2k+1)}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(2k+3)}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(k+1) \bmod 2}{(k+1)^2 \gamma}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2 \gamma}$

Введем понятие полосы пропускания линейной динамической системы [20]

$$\Delta \omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W_m^*(j\omega)|^2 d\omega}{|W_m^*(j\omega)|_{\max}^2}, \quad (1.87)$$

где  $W_m^*(j\omega) = \frac{1}{\|\psi_m\|^2} \int_0^\infty \psi_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  – частотная характеристика семейства ортогональных фильтров (см. таблицу 1.5);

$|W_m^*(j\omega)|^2 = W_m^*(j\omega) \cdot W_m^*(-j\omega)$  – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных фильтров.

Вид частотных характеристик ортогональных фильтров приведен в Приложении 5.

Следует отметить, что для ортогональных функций 1, 4 - 10  $\mu(\tau) = 1$  и

$$W_m^*(j\omega) = \frac{1}{\|\psi_m\|^2} W_m(j\omega). \quad (1.88)$$

Графически полоса пропускания показана на рисунке 1.2.

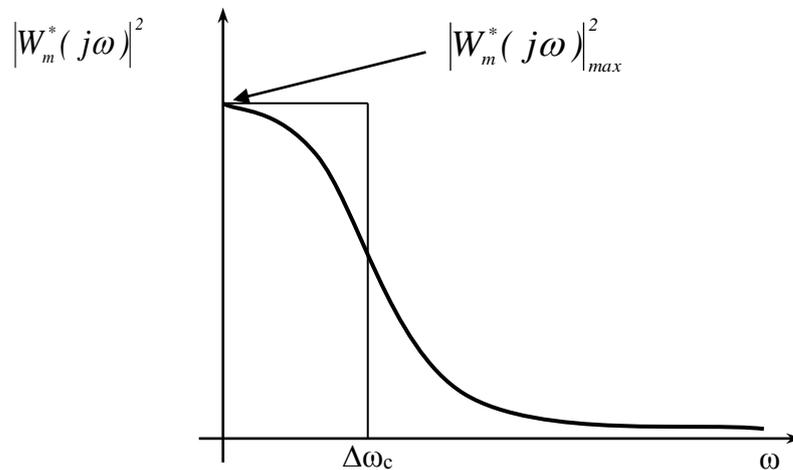


Рисунок 1.2 - Полоса пропускания линейной динамической системы

### Частотные характеристики ортогональных фильтров

Таблица 1.5

№	Ортогональные функции	$W_k^*(j\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2}{(j\omega + \gamma/2)^2} \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^k$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2(j\omega + \gamma/2)^3} \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^k$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{2\alpha(2k+1)}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$

5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{2\alpha(k+1)}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4k+1)\gamma}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4k+3)\gamma}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(k+1)}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(2k+1)}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(2k+3)}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{8\gamma^2(k+1)^3}{[(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+1)\gamma + j\omega]} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^3(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}{[(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+5)\gamma + j\omega]} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$

Квадраты модулей частотных характеристик ортогональных фильтров и их максимумы приведены в таблице 1.6.

Квадраты модулей частотных характеристик и их максимумы

Таблица 1.6

№	Ортогональные функции	$ W_m^*(j\omega) ^2$	$ W_m^*(j\omega) _{\max}^2$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2/4 + \omega^2}$	4
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^4(m+1)^2}{(\gamma^2/4 + \omega^2)^2}$	$16(m+1)^2$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^6(m+1)^2(m+2)^2}{4(\gamma^2/4 + \omega^2)^3}$	$16(m+1)^2(m+2)^2$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	4
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	4
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(4m+1)^2 \cdot \gamma^2/4 + \omega^2}$	4
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4m+3)^2 \cdot \gamma^2}{(4m+3)^2 \cdot \gamma^2/4 + \omega^2}$	4

8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+3)^2 \cdot \gamma^2}{(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{64(m+1)^6 \cdot \gamma^4}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$	$\frac{64(m+1)^6}{(2m+1)^2(2m+3)^2}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{16(2m+3)^2(m+1)^4(m+2)^4 \cdot \gamma^6}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+5)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$	$\frac{16(m+1)^4(m+2)^4}{(2m+1)^2(2m+5)^2}$

Значения полосы пропускания линейной динамической системы для различных ортогональных функций приведены в таблице 1.7.

Значения полосы пропускания линейной динамической системы

Таблица 1.7

№	Ортогональные функции	$\Delta\omega_c$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma}{8}$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\pi\gamma}{32}$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\alpha(m+1)}{4}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(4m+1)}{4}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(4m+3)}{4}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(m+1)}{2}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)}{2}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+3)}{2}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)(2m+3)}{8(m+1)}$

12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\pi\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{64(m+1)(m+2)}$
----	-----------------------------	---

Отметим, что квадраты модуля частотных характеристик ортогональных фильтров  $m$ -ого порядка 1, 4 - 10 соответствуют квадрату модуля  $\theta$ -ого порядка с параметром  $1/2\|\psi_m\|^2$

$$|W_m(j\omega)|^2 = \frac{1}{\|\psi_m\|^4(1/4\|\psi_m\|^4 + \omega^2)} = \frac{4}{1 + 4\|\psi_m\|^4\omega^2}, \quad (1.89)$$

а соотношение неопределенности [49]:

$$\Delta\omega_c\tau_{0,u} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.90)$$

Заметим, что выражения для частотных характеристик ортогональных функций записаны с учетом некоторых преобразований в более удобной форме для дальнейшего использования и применения. В частности, для ортогонального базиса Сонина-Лагерра с использованием формулы геометрической прогрессии [5], а для ортогонального базиса Якоби с единичной весовой функцией с использованием чисел Стирлинга 1-ого и 2-ого рода.

Ниже, в качестве примера, приведем аналитические преобразования с использованием комбинаторных чисел Стирлинга при получении соотношения для преобразования Фурье ортогональных функций Якоби:

$$W_{k,1}(j\omega) = \frac{1}{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}, \quad (1.91)$$

где

$$W_{k,2}(j\omega) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s \frac{1}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}. \quad (1.92)$$

Выражение (1.91) необходимо проверить на сходимость с использованием соотношения:

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_k)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{a_1}{n}\right)\left(1 - \frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 - \frac{b_1}{n}\right)\left(1 - \frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{b_k}{n}\right)}. \quad (1.93)$$

Необходимым условием сходимости соотношения является следующее [11]:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - b_2 - \dots - b_k = 0. \quad (1.94)$$

Вид суммы ряда  $W_{k,2}(j\omega)$  позволяет перейти к более общей комбинаторной схеме: работе с комбинаторными числами. Под комбинаторными числами понимают перечисления различных множеств комбинаторных объектов. Различные элементы в перечисляемом множестве могут быть неравноценны, что приводит к назначению ве-

сов, в общем случае различных, на множестве отображений и вычислению сумм этих весов на каких-либо подмножествах исходного множества. Тогда операцию нахождения таких сумм называют взвешенными перечислениями (перечисления с весами). В частном случае считающих весов, равных единице на каждом элементе - обычное перечисление - имеем дело с биномиальными коэффициентами.

Многие комбинаторные числа – частные случаи элементов обобщенного треугольника. Известно, как строится треугольник Паскаля. Число сочетаний  $C_n^k$  определяют как решение разностного уравнения

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.95)$$

Обобщения производят, дополняя различными способами разностное уравнение. По аналогии с построением треугольника Паскаля строят обобщенный треугольник на основании рекуррентного соотношения [11]:

$$V(n, k) = \beta_{n, k-1} V(n-1, k-1) + \alpha_{n, k} V(n-1, k). \quad (1.96)$$

Величины  $\alpha_{n, k}$  и  $\beta_{n, k}$  - весовые коэффициенты.

$$V_n = \sum_{k=0}^n V(n, k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n, k} + \beta_{n, k}) V(n-1, k). \quad (1.97)$$

Однако иногда оказывается полезной и следующая интерпретация элементов обобщенного треугольника Паскаля. Полагая, что  $V(n, n) \neq 0$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  зафиксируем значение параметра  $n$  и построим нормированную последовательность элементов  $n$ -ой строки:

$$\frac{V(n, 0)}{V(n, n)}, \frac{V(n, 1)}{V(n, n)}, \dots, \frac{V(n, n)}{V(n, n)}. \quad (1.98)$$

Пусть

$$P_n(x) = \frac{1}{V(n, n)} \sum_{k=0}^n V(n, k) x^k, \quad (1.99)$$

где  $\mu_{n, 0}, \mu_{n, 1}, \dots, \mu_{n, n-1}$  - корни многочлена  $P_n(x)$ , взятые с противоположным знаком.

Тогда

$$\frac{V(n, k)}{V(n, n)} = B_k^n, \quad (1.100)$$

где  $B_k^n$  - обобщенные числа Стирлинга 1-ого рода, строящиеся при каждом фиксированном  $n$  на базе  $\{\mu_{n, m}\}_{m=0}^{n-1}$ .

В свою очередь, биномиальные коэффициенты получаются из (1.96) при значениях  $V_0 = 1$ ,  $\alpha_{n, k} = \beta_{n, k} = 1$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Если же  $V_0 = 1$ ,  $\beta_{n, k} = 1$ , а  $\alpha_{n, k} = \mu_{n-1}$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ , то имеем рекуррентное соотношение для обобщенных чисел Стирлинга 1-ого рода:

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \mu_{n-1} B_k^{n-1}. \quad (1.101)$$

Рассмотрим случай:  $V_0 = 1$ ,  $\alpha_{n, k} = \alpha_n$ ,  $\beta_{n, k} = \beta_k$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

В этом случае имеем:

$$V(n, k) = \beta_k V(n-1, k-1) + \alpha_n V(n-1, k). \quad (1.102)$$

Считая, что в последовательности  $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$  все члены отличны от нуля, введем величины:

$$B_0^0 = 1, B_k^n = \frac{V(n, k)}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}. \quad (1.103)$$

Тогда

$$B_0^0 = 1, B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \frac{\alpha_n}{\beta_k} B_k^{n-1}.$$

После нормировки элементы каждой строки обобщенного треугольника выражаются при помощи обобщенных чисел Стирлинга 1-ого рода, построенных на базе

$$\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_k} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Нормировку можно проводить и иными методами в зависимости от условия решаемой задачи.

Введем базу  $\{\alpha_s\}_{s=0}^k$ ,  $\alpha_s = \frac{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega}$  и затем построим на этой базе обобщенные числа Стирлинга 1-ого рода.

Тогда в соответствии с постановкой задачи, выражениями (1.97) и (1.99), рекуррентным соотношением (1.101) будем иметь:

$$B_s^k = B_{s-1}^{k-1} + \alpha_k B_s^{k-1}; \quad (1.104)$$

$$B_s^k = B_s^{k-1}(\alpha_k - 1) = B_s^{k-1} \left( \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega} - 1 \right); \quad (1.105)$$

$$B_s^k = B_s^{k-1} \frac{\left( c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega \right)}{j\omega}; \quad (1.106)$$

$$B_s^{k-1} = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{1}{\left( \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega} + 1 \right)}. \quad (1.107)$$

Далее произведем формирование чисел Стирлинга на заданной базе:

$$B_s^k = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} \cdot \frac{\left( c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega \right)}{j\omega}; \quad (1.108)$$

$$B_s^k = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}. \quad (1.109)$$

Введем следующее обозначение:

$$W_{k,2}'(j\omega) = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} = \sum_{s=0}^k B_s^k x^s, \text{ т. е. } x = -1, \quad (1.110)$$

где

$$W_{k,2}'(j\omega) = \left( c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega \right) W_{k,2}(j\omega). \quad (1.111)$$

Введем понятия чисел Стирлинга и на их основании рассмотрим свойства этих чисел [11].

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1); \quad (1.112)$$

$$[x]_n = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad (1.113)$$

которые называются факториальными степенями и выражаются формулами:

$$(x)_0 = [x]_0 = 1; \quad (1.114)$$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} b_k^n x^k; \quad (1.115)$$

$$x^k = \sum_{k=0}^n a_k^n (x)_k; \quad (1.116)$$

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n b_k^n x^k; \quad (1.117)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k^n [x]_k, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.118)$$

Коэффициенты  $(-1)^{n-k} b_k^n$  и  $a_k^n$  - числа Стирлинга 1-ого и 2-ого рода соответственно.

Пусть  $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ . Тогда анализ записанных выше формул позволяет сделать выводы:

1) число  $b_k^n$ ,  $n > k$  - сумма всех различных произведений по  $n - k$  сомножителей, которые выбираются без повторения из множества  $A_{n-1}$ ;

2) число  $a_k^n$ ,  $n > k$  - сумма всех различных произведений по  $n - k$  сомножителей, которые выбираются, допуская многократные повторения, из множества  $A_k$ .

Приведенные правила, по которым из элементов множества  $A_{n-1}$  и  $A_k$  строятся числа Стирлинга, позволяют выполнить аналогичные построения из элементов различных последовательностей (даже не обязательно числовых). Возьмем последова-

тельность элементов некоторого кольца  $\{\mu_i\}_{i=0}^{\infty}$  - базу. С применением членов базы строят разложения:

$$\prod_{i=0}^{k-1} (x + \mu_i) = \sum_{k=0}^n B_k^n x^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (1.119)$$

$$x^k \prod_{i=0}^k \frac{1}{(1 - \mu_i x)} = \sum_{n=k}^{\infty} A_k^n x^n, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (1.120)$$

В свою очередь, коэффициенты в суммах известны:

- 1)  $B_k^n$  – элементарные симметрические функции;
- 2)  $A_k^n$  – суммы однородных произведений.

Иначе обобщенные числа Стирлинга 1-ого и 2-ого рода соответственно.

Воспользуемся выражениями (1.119) и (1.120) для построения производящей функции  $B$ - формы распределения, которой является следующее выражение с нормированными коэффициентами [12]:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(x + \alpha_k)}{(1 + \alpha_k)} = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{k=0}^n B_k^n x^k, \quad \alpha_k > 0, \quad (1.121)$$

Таким образом

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^k B_s^k x^s = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(x + \alpha_s)}{(1 + \alpha_s)}; \quad (1.122)$$

$$\sum_{s=0}^k B_s^k x^s = \prod_{k=0}^{k-1} \frac{(x + \alpha_s)}{(1 + \alpha_s)}. \quad (1.123)$$

С учетом выражений (1.120) и (1.121) запишем:

$$\sum_{s=0}^k B_s^k x^s = W_{k,2}'(j\omega) \Big|_{x=-1}; \quad (1.124)$$

$$W_{k,2}'(j\omega) = \prod_{k=0}^{k-1} \frac{(\alpha_s - 1)}{(\alpha_s + 1)}. \quad (1.125)$$

Соотношения (1.124) и (1.125) позволяют записать результат в виде:

$$\left( c \left( k + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma - j\omega \right) \cdot W_{k,2}(j\omega) = \frac{\left( c \left( k + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma - j\omega \right)}{\left( c \left( k + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega \right)} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\left( \frac{c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma}{j\omega} - 1 \right)}{\left( \frac{c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma}{j\omega} + 1 \right)}; \quad (1.126)$$

$$W_{k,2}(j\omega) = \frac{1}{c \left( k + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\left( c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma - j\omega \right)}{\left( c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega \right)}. \quad (1.127)$$

## 1.5. Ортогональные модели корреляционных функций

Важной частью статистического анализа является корреляционный анализ. Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем, выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса, оценивать погрешности средств измерений, строить корреляционные приёмники и т.д. [20, 49, 55].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент ее значений при двух значениях аргумента  $t$  и  $t'$ , рассматриваемый как функция [45, 46]:

$$K_x(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (1.128)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , а  $m_x(t)$  – математическое ожидание случайного процесса в сечении  $t$ .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.129)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией [49]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (1.130)$$

Это свойство позволяет **определять одну ветвь** корреляционной функции, т.е. только во временном интервале  $[0, \infty)$ .

Нормированная корреляционная функция для стационарных процессов, в соответствии с выражением (1.129), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.131)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1.$$

В практических приложениях часто для описания временной зависимости нормальных стационарных процессов применяют [20]:

- релейную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \text{Sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = k_\phi \sigma_x \rho_x(\tau); \quad (1.132)$$

- полярную (знаковую) корреляционную функцию:

$$P_x(\tau) = M \left[ \text{sign}x(t) \text{sign}x(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_x(\tau). \quad (1.133)$$

По найденной релейной корреляционной функции можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \right]}. \quad (1.135)$$

Отметим, что  $R_x(0) = k_\phi \sigma_x$ . Отсюда видно, что для оценки релейной корреляционной функции процессов, отличных от нормального, необходима априорная информация о законе распределения, т.е. необходимо знание  $k_\phi$ .

Зная полярную корреляционную функцию, из выражения (1.133) можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} P_x(\tau). \quad (1.136)$$

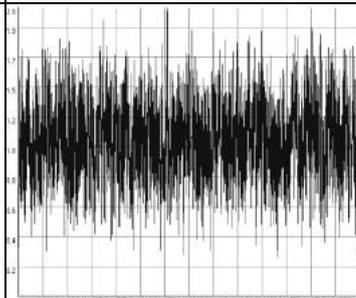
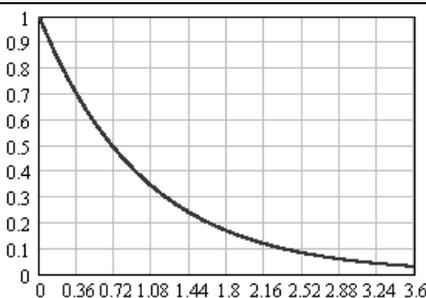
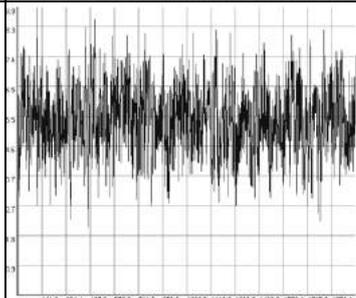
Из выражения (1.136) следует, что при оценке полярной корреляционной функции теряется информация о мощности процесса.

Несмотря на ограничения на закон распределения, релейные и полярные корреляционные функции находят широкое применение при решении различных практических задач. Это объясняется простотой технической реализации алгоритмов.

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 1.8 ( $\lambda_i = 1$  и  $\omega_{0,i} = 5$ ), а их классификация – на рис. 1.3 [25]. Обратите внимание на разную длительность корреляционных функций при одном и том же значении параметра затухания  $\lambda_i$ .

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 1.8

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	Случайный процесс	Нормированная корреляционная функция
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$		
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau )$		

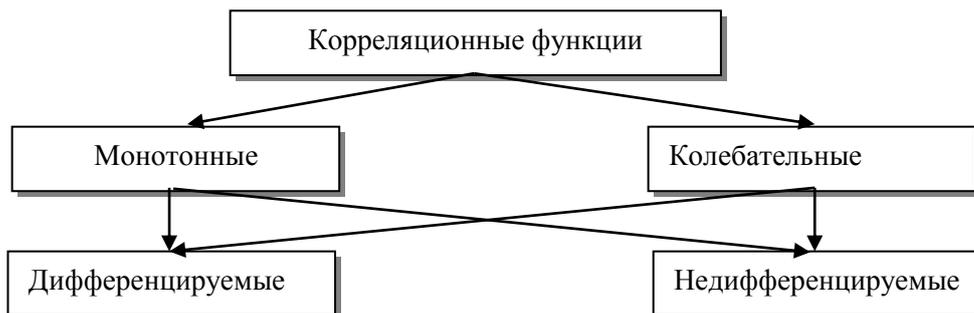
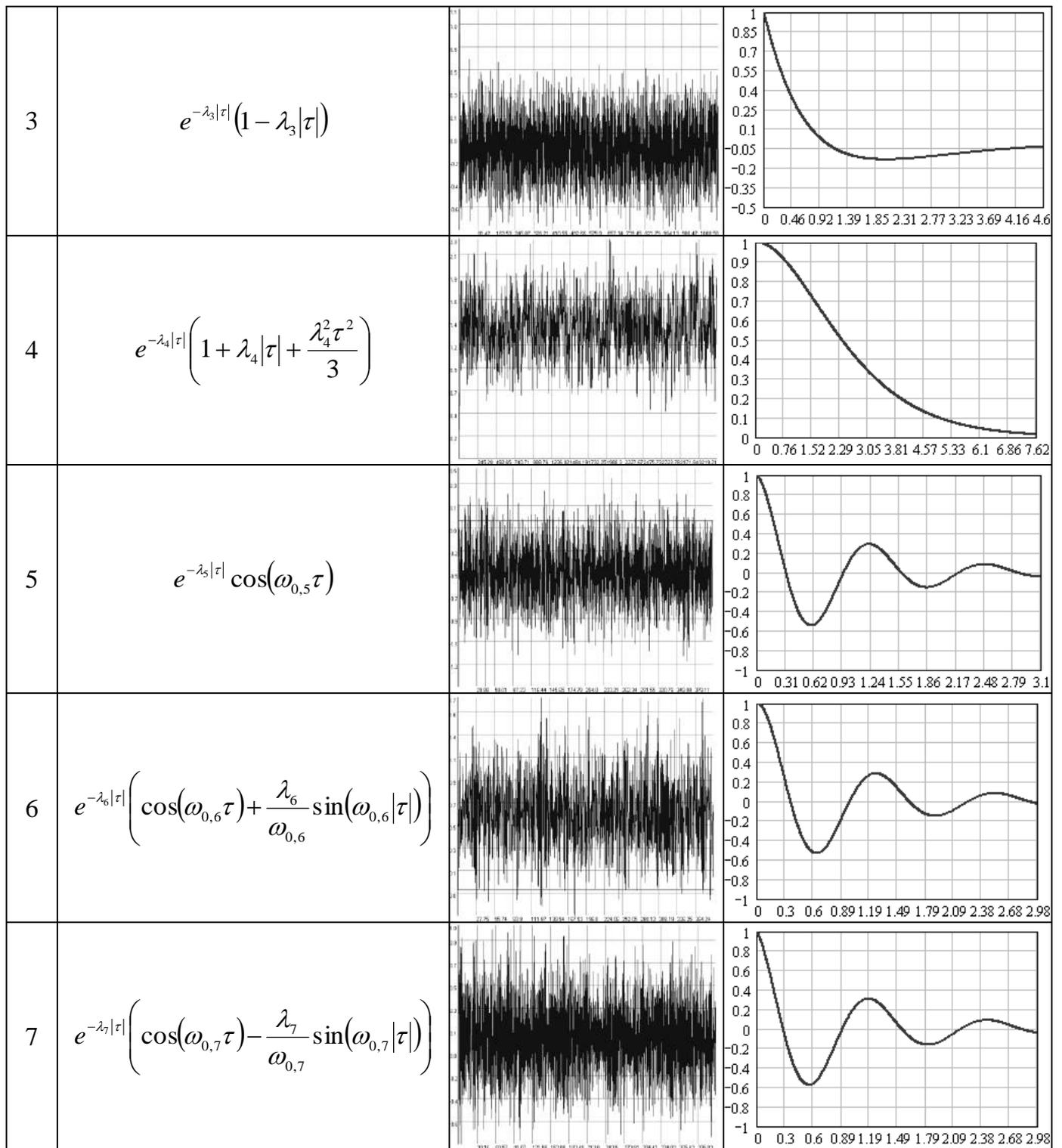


Рисунок 1.3 - Классификация корреляционных функций

Из анализа моделей видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные (1-2) и колебательные (3-7).

Из графиков видно, что в ряде случаев (модели 1, 3, 5, 7) в «нуле» производная корреляционных функций при подходе к нулю слева и справа определяется неоднозначно, т. е.  $K'(\tau - 0) \neq K'(\tau + 0)$ . Такие случайные процессы относятся к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6).

Отметим, что корреляционная функция  $n$ -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (1.137)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами [50].

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при решении самых разнообразных задач, например, аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [21, 22].

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$  называется неслучайная функция двух аргументов  $t$  и  $t'$ , которая при каждой паре значений  $t$  и  $t'$  равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции  $x(t)$  и случайной функции  $y(t)$ :

$$K_{xy}(t, t') = M \left[ x(t) y(t') \right]. \quad (1.138)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

Следует отметить, что при одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (1.139)$$

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_y(t')}}. \quad (1.140)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [45] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов  $\tau = t - t'$ .

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.140), равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (1.141)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (1.142)$$

Из свойства взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные

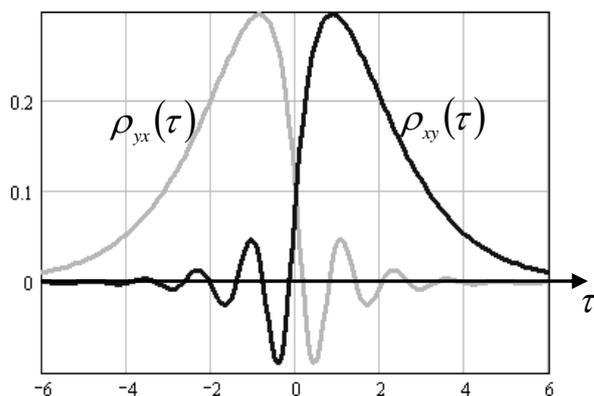


Рисунок 1.4 - Взаимные корреляционные функции

корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , взятых в различных порядках, связаны соотношением

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (1.143)$$

Графически это означает, что кривая  $\rho_{yx}(\tau)$  является зеркальным отражением кривой  $\rho_{xy}(\tau)$  относительно оси ординат (рис. 1.4).

Из анализа рис. 1.4 видно, что при взаимном корреляционном анализе необходимо **оценивать две ветви** корреляционной функции.

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяются параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой информации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [20, 22, 49];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [20, 22, 49].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выби-

рать конкретный вид модели, желательно с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя [22].

Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего неизвестно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов [22].

Впервые этот метод предложил Д. Лампард [60]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера, согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (1.143)$$

где  $\beta_k$  - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau, \alpha)$  - семейство ортогональных функций в интервале  $[0, \infty)$ ;

$\alpha$  - параметр масштаба.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \psi_n(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \|\psi_k(\alpha)\|^2, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (1.144)$$

Так как ряд сходится в интервале  $[0, \infty)$ , то коэффициенты разложения  $\beta_k$  в соответствии с [25] определяются выражением:

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau. \quad (1.145)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Якоби и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (1.143)

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha). \quad (1.146)$$

Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели. С учетом свойств ортогональных функций определим относительную методическую погрешность аппроксимации в виде

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k(\alpha)\|^2}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}. \quad (1.147)$$

Из (1.147) видно, что значение относительной погрешности аппроксимации  $\delta$  зависит от значений  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ , т.е. вида корреляционной функции (см. выражение 1.146), значения параметра масштаба  $\alpha$  и числа членов разложения ряда (1.146)  $m$ .

Задавшись видом модели корреляционной функции, в первую очередь необходимо найти аналитические выражения коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ . Как показали исследования при прочих равных условиях численные значения методических

погрешностей больше у колебательных моделей КФ [20]. Для решения этой задачи воспользуемся частотным представлением ортогональных функций.

Так, например, НКФ  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , воспользовавшись преобразованием Эйлера, представим в виде

$$\rho_{5,x}(\tau) = \frac{1}{2} [e^{-(\lambda-j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda+j\omega_0)\tau}], \quad \tau > 0. \quad (1.148)$$

Подставив выражение (1.148) в выражение (1.145), получим для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ ,

$$\beta_{5,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda-j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda+j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (1.149)$$

С учетом выражения (1.65), выражение (1.149) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} &= \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} [W_k(\lambda - j\omega_0) + W_k(\lambda + j\omega_0)] = \\ &= \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \left\{ \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda - j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda + j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \right\}. \end{aligned} \quad (1.150)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} tg \varphi_{1,k} &= \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad A_{1,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \\ tg \varphi_{2,k} &= \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \quad A_{2,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{1}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \\ \varphi_{1,k} &= \arctg \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad \varphi_{2,k} = \arctg \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Тогда

$$\beta_k = \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)]}{1 - jtg \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 - jtg \varphi_{2,s}}{1 - jtg \varphi_{1,s}} + \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + jtg \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 + jtg \varphi_{2,s}}{1 + jtg \varphi_{1,s}}. \quad (1.152)$$

Или

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} &= \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} - j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} - j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} - j \sin \varphi_{1,s}} + \\ &+ \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} + j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} + j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} + j \sin \varphi_{1,s}}, \end{aligned} \quad (1.153)$$

$$\text{где } B_s = \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{\cos \varphi_{1,s}}{\cos \varphi_{2,s}}.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] + \\
&+ A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(-j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[-j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] = \\
&= A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp \left[ j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \exp \left[ -j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \right\} = \\
&= 2A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \tag{1.154}
\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов разложения модели  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  для различных ортогональных базисов зависят от принятых обозначений, представленных в таблице 1.9.

### Принятые обозначения

Таблица 1.9

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$tg \varphi_{1,k}$	$tg \varphi_{2,k}$	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha/2}$	$\frac{\alpha/2}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\alpha/2}{\lambda - \alpha/2}$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha(2k+1)}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\lambda - \alpha(2k+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha(k+1)}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\lambda - \alpha(k+1)}$
4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(4k+1)/2}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\lambda - \gamma(4k+1)/2}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(4k+3)/2}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\lambda - \gamma(4k+3)/2}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(k+1)}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\lambda - \gamma(k+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(2k+1)}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\lambda - \gamma(2k+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(2k+3)}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\lambda - \gamma(2k+3)}$

В таблице 1.10 представлены выражения коэффициентов разложения модели  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Таблица 1.10

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{5,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} \cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s})$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
3	$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(\alpha,0)}(\tau, \gamma)$	$2A_{1,k} (-1)^k \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Для определения коэффициентов разложения 6 и 7 моделей

$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$  необходимо определить

$$J = \frac{\lambda}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 j\omega_0} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda-j\omega_0)\tau} - e^{-(\lambda+j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (1.155)$$

Тогда

$$\beta_{6,7,k} = \beta_{5,k} \pm J. \quad (1.156)$$

С учетом (1.155), получим

$$J = \frac{\lambda}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 j\omega_0} [W_k(\lambda - j\omega_0) - W_k(\lambda + j\omega_0)]. \quad (1.157)$$

С учетом принятых обозначений (5.151)

$$\begin{aligned} J &= \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \lambda}{j\omega_0} \cos \varphi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp \left[ j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \lambda}{\omega_0} A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Подставив выражение (1.158) в выражение (5.155), окончательно получим

$$\begin{aligned} \beta_{6,7,k} &= 2A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (1.159)$$

В таблице 1.11 представлены выражения коэффициентов разложения модели

$$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Таблица 1.11

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{6,7,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s}) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s}) \right]$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
3	$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(\alpha,0)}(\tau, \gamma)$	$2A_{1,k} (-1)^k \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Воспользовавшись предлагаемым подходом, с учетом принятых обозначений (см. таблицу 1.12), аналитические выражения коэффициентов разложения для типовых колебательных моделей корреляционных функций в ортогональных базисах Соинна-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$  представим в таблицах 1.13 и 1.14.

Принятые обозначения

Таблица 1.12

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$tg \phi_{i,k}$	$A_{i,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$ , $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\lambda + \gamma/2}$ ; $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\lambda - \gamma/2}$	$A_{1,k} = \frac{1}{\lambda + \gamma/2}$ ; $A_{2,k} = \frac{1}{\lambda - \gamma/2}$
2	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda}$ ; $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda}$ ; $tg \phi_{3,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) - \lambda}$	$A_{1,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda}$ ; $A_{2,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+3) + \lambda}$ ; $A_{3,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+1) - \lambda}$
		$B_s = \frac{A_{1,s} \cos \varphi_{1,s}}{A_{3,s} \cos \varphi_{3,s}}$ ; $C_k = A_{1,k} A_{2,k} \cos \varphi_{1,k} \cos \varphi_{2,k}$	
3	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda}$ ; $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$A_{1,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+1) + \lambda}$ ; $A_{2,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+3) + \lambda}$

	$tg\phi_{3,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+5)+\lambda};$ $tg\phi_{4,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1)-\lambda}$	$A_{3,k} = \frac{\gamma}{\gamma(2k+5)+\lambda};$ $A_{4,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+1)-\lambda}$
$B_s = \frac{A_{1,s}}{A_{4,s}} \frac{\cos\varphi_{1,s}}{\cos\varphi_{4,s}}; C_k = A_{1,k} A_{2,k} A_{3,k} \cos\varphi_{1,k} \cos\varphi_{2,k} \cos\varphi_{3,k}$		

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 5 модели

Таблица 1.13

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{5,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2(k+1)A_{1,k}^2 B_k^k \cos^2 \phi_{1,k} \cos[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}]$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3(k+1)(k+2)}{2} A_{1,k}^3 B_k^k \cos^3 \phi_{1,k} \cos[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}]$
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$2 C_k (k+1) \cos\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{3,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$4 C_k (2k+3) \cos\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \varphi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{4,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 6 и 7 моделей

Таблица 1.14

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{6,7,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2(k+1) \cdot A_{1,k}^2 B_k^k \cos^2 \phi_{1,k} [\cos[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}] \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}]]$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3(k+1)(k+2)}{2} \cdot A_{1,k}^3 B_k^k \cos^3 \phi_{1,k} [\cos[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}] \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}]]$
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$2 C_k (k+1) \left[ \cos\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{3,s})\right) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{3,s})\right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$4 C_k (2k+3) \left[ \cos\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \varphi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{4,s})\right) \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \varphi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{4,s})\right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Коэффициенты разложения  $\beta_k$  могут быть представлены и в алгебраической форме. В качестве примера в таблице 1.15 представлены коэффициенты разложения в ортогональном базисе Лежандра для типовых моделей корреляционных функций.

Таблица 1.15

№	$\rho_x(\tau)$	$\beta_k$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{\lambda + \alpha(2s+1)}$
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau )$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
4	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau  + \lambda^2 \tau^2 / 3)$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{8\lambda^2 + 9\alpha\lambda(2s+1) + \alpha^2(2s+1)^2}{3[\lambda + \alpha(2s+1)]^3}$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$2\alpha(2k+1)\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$

Алгебраические выражения для коэффициентов разложения типовых моделей корреляционных и ортогональных функций приведены в Приложении 6.

Воспользовавшись выражениями для оценки коэффициентов разложения, определим погрешности аппроксимации в соответствии с (1.147). На рисунке 1.5 представлены результаты оценки погрешности аппроксимации 5, 6 моделей с параметрами  $\lambda = 1, \omega_0, \alpha = 0,1961$  ортогональными функциями Лежандра.

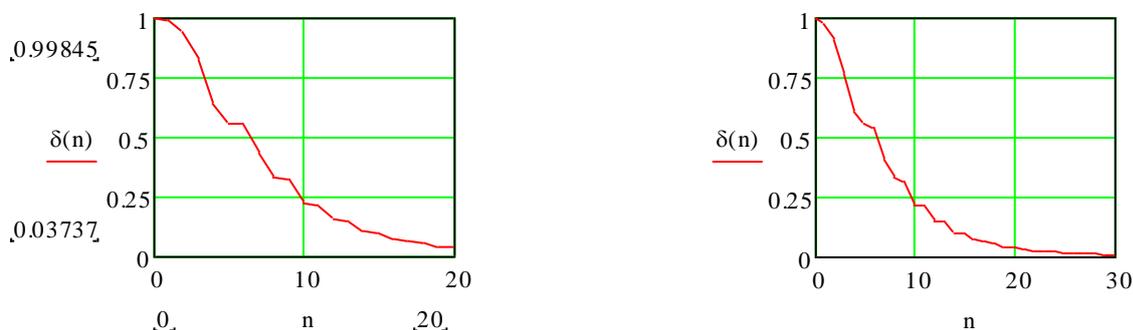


Рисунок 1.5 - Погрешность аппроксимации ортогональными функциями Лежандра

Из анализа рис. 1.5 видно, что при  $n \rightarrow \infty \delta(n) \rightarrow 0$ , т.е. выполняется равенство Парсеваля [8].

Как показали исследования значение погрешности аппроксимации, определяемой выражением (1.147), зависит от параметра масштаба [20].

В таблице 1.16 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cos(\omega_{0,5}\tau)$  при разных значениях  $m$ , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю затухания исследуемых корреляционных функций –  $\chi_5 = \frac{\gamma}{\lambda_5}$  для ортогональных базисов Якоби  $(\alpha, 0)$ .

Из полученных результатов видно, что при выбранной модели корреляционной функции,  $\mu = const$ ,  $m = const$ , погрешность существенным образом зависит от  $\chi$ , т.е.  $\gamma$ . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от  $m$  [20]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Отметим, что точное решение задачи определения параметра масштаба в силу свойств ортогональных функций возможно лишь для ортогональных функций Лагерра [20].

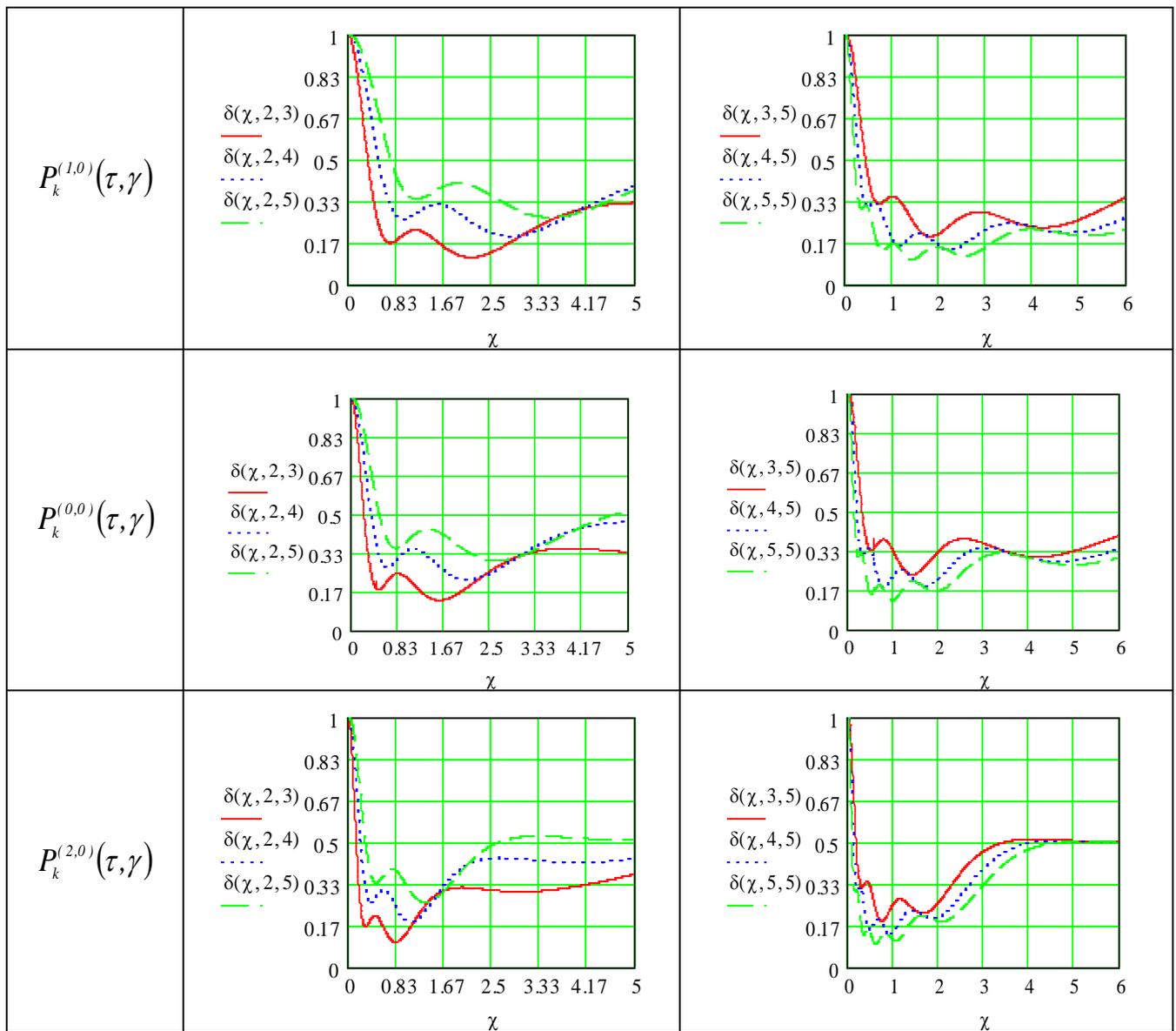
Для этого необходимо решить уравнение относительно  $\alpha$

$$\beta_{m+1} = 0. \tag{1.160}$$

Относительная методическая погрешность аппроксимации НКФ  $\delta(\chi/m, \mu)$  в ортогональном базисе Якоби  $(\alpha, 0)$

Таблица 1.16

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	График методической погрешности ( $\mu_5 = 3,4,5; m = 2$ )	График методической погрешности ( $\mu_5 = 5; m = 3,4,5$ )
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$		



Рассмотрим один из эмпирических способов определения параметра масштаба ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$  [20]. Он основан на применении соотношения неопределенности [20, 49]

$$\Delta\omega_{\alpha,k} \tau_{k,u}^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (1.161)$$

где  $\Delta\omega_{\alpha,k} = \frac{\int_0^\infty |W_k^*(j\omega)|^2 d\omega}{|W_k^*(j\omega)|_{\max}^2}$  – эквивалентная частота пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$W_k^*(j\omega) = \int_0^\infty \phi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau$  – частотная характеристика ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$\phi_k(\tau, \alpha) = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \psi_k(\tau, \alpha)$  – импульсная переходная характеристика ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} \phi_k(\tau, \alpha) d\tau}{\phi_k(\tau, \alpha)_{\max}} = W_k^*(0) / \phi_k(\tau, \alpha)_{\max} - \text{длительность импульсной переходной характе-}$$

ристики ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

Отсюда

$$\Delta\omega_{\varepsilon,k} = \frac{\pi}{2\tau_{k,u}^{(2)}}. \quad (1.162)$$

Заметим, что квадраты модуля частотных характеристик рассматриваемых ортогональных фильтров соответствуют квадратам модуля апериодического звена первого порядка (см. таблицу 1.6), импульсная характеристика которого определяется выражением

$$h_k(\tau) = \frac{1}{\tau_{k,u}^{(2)}} \exp[-\tau_{k,u}^{(2)}\tau]. \quad (1.163)$$

Следовательно, можно записать, что для погрешности восстановления импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции 2% [20]

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{0,4}{\Delta\tau_0}, \quad (1.164)$$

где  $\Delta\tau_0 = \Delta\tau$  – интервал дискретизации случайного процесса.

Подставив выражение (1.164) в (1.162), получим

$$\Delta\omega_{\varepsilon,k} = \frac{0,2\pi}{\Delta\tau_0}. \quad (1.165)$$

Отсюда можно определить численное значение параметра масштаба для любого ортогонального базиса при  $m$  членов разложения ряда (1.146).

В таблице 1.17 приведены основные соотношения для определения  $\alpha/\gamma$  для различных ортогональных базисов.

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Лагерра, Лежандра, Дирихле

Таблица 1.17

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\Delta\omega_{\varepsilon,m}$	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\alpha$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2/4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{0,8}{\Delta\tau_0}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{4(2m+1)^2\alpha^2}{(2m+1)^2\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+1)\alpha}{2}$	$\frac{1}{(2m+1)\alpha}$	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau_0}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{4(m+1)^2\alpha_2}{(m+1)^2\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(m+1)\alpha}{2}$	$\frac{1}{(m+1)\alpha}$	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau_0}$

В таблице 1.18 приведены основные соотношения для определения параметра масштаба  $\gamma$  для ортогональных функций Якоби ( $\alpha, 0$ ) и Сонина - Лагерра.

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Якоби  $(\alpha, 0)$  и Сонина - Лагерра

Таблица 1.18

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\Delta\omega_{\vartheta, m}$	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\gamma$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2(4m+1)^2}{\left(\frac{4m+1}{2}\right)^2 \gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(4m+1)\gamma}{4}$	$\frac{2}{(4m+1)\gamma}$	$\frac{0,8}{(4m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2(4m+3)^2}{\left(\frac{4m+3}{2}\right)^2 \gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(4m+3)\gamma}{4}$	$\frac{2}{(4m+3)\gamma}$	$\frac{0,8}{(4m+3)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(m+1)^2}{(m+1)^2 \gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(m+1)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(m+1)\gamma}$	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(2m+1)^2}{(2m+1)^2 \gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+1)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(2m+1)\gamma}$	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(2m+3)^2}{(2m+3)^2 \gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+3)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(2m+3)\gamma}$	$\frac{0,4}{(2m+3)\Delta\tau_0}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^4(m+1)^2}{(\gamma^2/4 + \omega^2)^2}$	$\frac{\pi\gamma}{8}$	$\frac{4}{\gamma}$	$\frac{1,6}{\Delta\tau_0}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^6(m+1)^2(m+2)^2}{4(\gamma^2/4 + \omega^2)^3}$	$\frac{3\pi\gamma}{32}$	$\frac{16}{3\gamma}$	$\frac{6,4}{3\Delta\tau_0}$

В таблице 1.19 приведены основные соотношения для определения параметра масштаба  $\gamma$  для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$ .

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Якоби  $(0, \beta)$

Таблица 1.19

$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\frac{64(m+1)^6 \cdot \gamma^4}{\left[ (2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2 \right] \left[ (2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2 \right]}$
	$\Delta\omega_{\vartheta, m}$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)(2m+3)}{8(m+1)}$
	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\frac{4(m+1)}{\gamma(2m+1)(2m+3)}$
	$\gamma$	$\frac{1,6(m+1)}{(2m+1)(2m+3)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\frac{16(2m+3)^2(m+1)^4(m+2)^4 \cdot \gamma^6}{\left[ (2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2 \right] \left[ (2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2 \right] \left[ (2m+5)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2 \right]}$
	$\Delta\omega_{\vartheta, m}$	$\frac{3\pi\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{64(m+1)(m+2)}$

$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\frac{32(m+1)(m+2)}{3\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$
$\gamma$	$\frac{12,8(m+1)(m+2)}{3\Delta\tau_0(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$

Так как для колебательных моделей КФ с погрешностью восстановления 2%

$$\Delta\tau_0 = \frac{0,4}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}, \quad (1.166)$$

выражения для определения параметра масштаба для различных ортогональных функций примут вид, представленный в таблице 1.20.

Параметр масштаба для колебательных моделей

Таблица 1.20

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\alpha / \gamma$
$L_k(\tau, \alpha)$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$4\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{16\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{3}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+1)}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(m+1)}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4m+1)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4m+3)}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(m+1)}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+3)}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{32(m+1)(m+2)\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{3(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$

В работе [4] показано, что для ортогональных функций Лагерра параметр масштаба  $\alpha$  может быть определен в результате решения уравнения

$$\beta_0 = 1. \quad (1.167)$$

Рассмотрим это же уравнение для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ , в общем виде

$$\frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) \psi_k^*(\tau, \alpha) d\tau - 1 = 0, \quad (1.168)$$

где  $\psi_k^*(\tau, \alpha) = \exp\left(-\tau/2\|\psi_k(\alpha)\|^2\right)$ .

Как видно из выражения (1.168), численное значение параметра масштаба зависит от вида корреляционной функции. Так для  $\rho_{x5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  это уравнение приведем к виду:

$$\frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \cos \omega_0 \tau \exp\left[-\left(1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda\right)\tau\right] d\tau - 1 = 0. \quad (1.169)$$

Разрешив уравнение относительно  $1/\|\psi_k(\alpha)\|^2$ , получим:

$$1/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (1.170)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 1.21.

Параметры масштаба ортогональных функций для 5 модели

Таблица 1.21

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)\}$	$\alpha_0(\gamma_0)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (k+1)$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+3)$

Решив уравнение (1.168) для корреляционных функций

$\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ , получим:

$$1/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (1.171)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 1.22.

Параметры масштаба ортогональных функций для 6,7 моделей

Таблица 1.22

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)\}$	$\alpha(\gamma)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right)$
2	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (4m+1)$
3	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (m+1)$

4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda)/(2m+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda)/(4m+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda)/(2m+3)$

Для ортогональных функций Сонина - Лагерра одно из возможных решений, обеспечивающее допустимую погрешность аппроксимации и лучшую сходимость с наименьшими вычислительными затратами, связано с введением ограничения (1.167) [39].

Решим уравнение

$$\frac{1}{\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty L_0^{(\alpha)}(\tau, \gamma) e^{-\lambda\tau} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right) \cdot \tau^\alpha d\tau = 1 \quad (1.172)$$

для моделей  $\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ .

Проведя ряд преобразований, выражение (1.172) представим в виде:

$$\frac{\alpha!}{2\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \left[ K1 \pm \frac{\lambda}{\omega_0} K2 \right] = 1, \quad (1.173)$$

где

$$K1 = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} + \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}}; K2 = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}}.$$

Введем некоторые упрощения, позволяющие представить уравнение (1.174) в форме, удобной для дальнейшего преобразования и применения:

1. с увеличением параметра  $\alpha$   $K2$  принимает ничтожно малые значения, которыми можно пренебречь;

2. наиболее простой вид уравнение принимает при значении  $\alpha = 0$ .

Тогда с учетом принятых упрощений получим уравнение

$$\frac{\gamma}{2} \left[ \frac{\frac{\gamma}{2} + \lambda}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda\right)^2 + \omega_0^2} \right] = 1. \quad (1.175)$$

Проведя ряд преобразований, и решив получившееся квадратное уравнение с учетом того, что параметр масштаба  $\gamma > 0$ , получим

$$\gamma = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (1.176)$$

Следует отметить, параметр масштаба  $\gamma$ , определенный по алгоритму (5.36), находится вблизи оптимального значения  $\gamma_{opt}$ , и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным погрешностям. На рис. 1.6 построены двумерные зависимости относительной погрешности аппроксимации при разных значениях  $m$  и рассматриваемых  $\alpha$  от параметра масштаба, где в качестве модели КФ взята модель

$$\rho_{x,6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) \text{ с параметрами } \lambda = 1 \text{ и } \omega_0 = 5.$$

На рис. 1.7 представлены проекции двумерных зависимостей (см. рис. 5.4), представляющий относительную погрешность аппроксимации на плоскость  $m = 5$  при заданных значениях  $\alpha$  в одной системе координат. Заметим, что прямая линия на рисунке символизирует найденное решение (5.44).

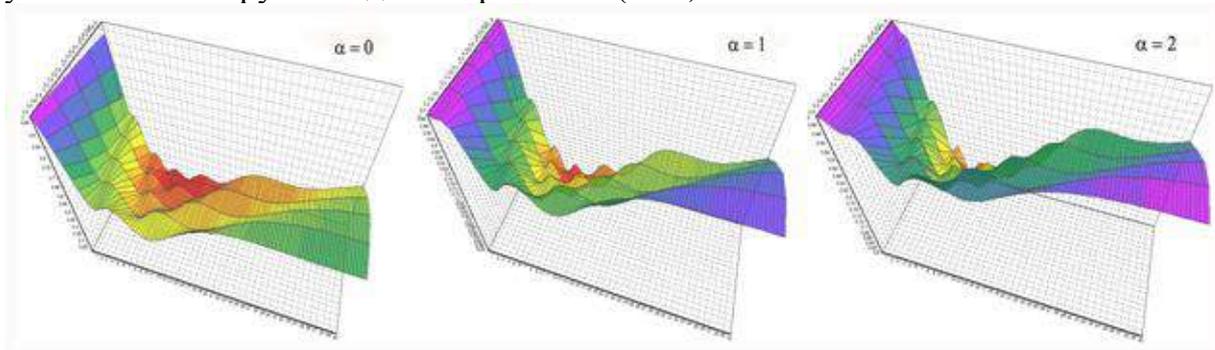


Рисунок 1.6 - Двумерные зависимости относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба  $\gamma \in (0, 40]$  и числа членов  $m \in [2, 6]$  для  $\alpha = 0, 1, 2$

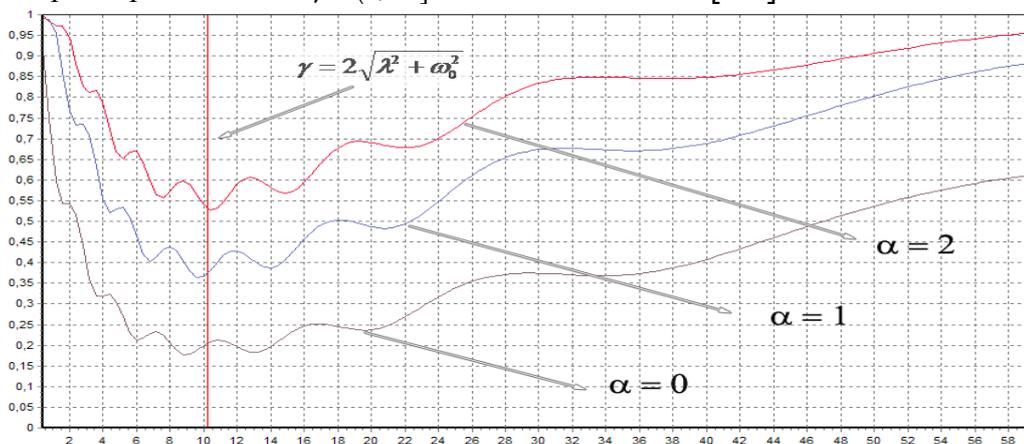
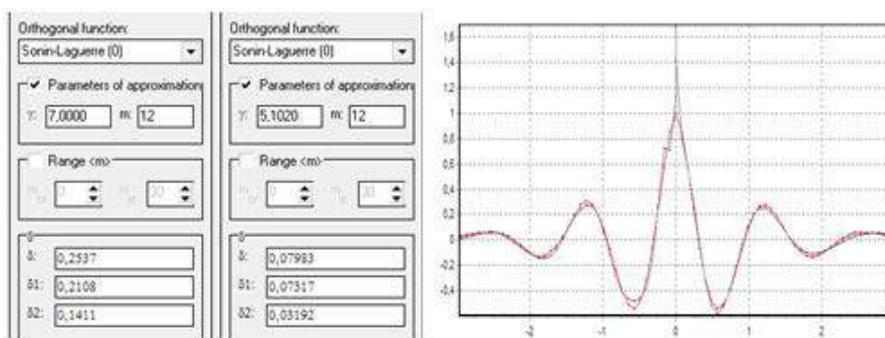


Рисунок 1.7. - Зависимости относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба  $\gamma \in (0, 60]$  при  $m = 5$  для  $\alpha = 0, 1, 2$

Из рис. 1.7 видно, что значение  $\gamma$ , полученное в результате решения уравнения (1.172), при всех исследуемых значениях параметра  $\alpha$  располагается вблизи глобального оптимума, и с увеличением данного параметра решение (1.176) становится более близким, что объясняется правильностью введенных выше упрощений.

Аналогичные результаты можно получить и для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$ , Чебышева 1 (аналогично Якоби  $(-0,5,0)$ ), Чебышева 2 (аналогично Якоби  $(0,5,0)$ ), выполнив преобразования (5.41) - (5.44) [39].



Ниже для примера на рис. 1.8 приведены результаты аппроксимации КФ 5 модели при произвольном выборе численного значения  $\alpha = 7$ ,  $m = 12$  (левая ветвь).

Рисунок 1.8 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

## 1.6. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями с учетом условия нормировки

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями является то, что её основное свойство

$$\hat{K}_a(0) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \neq \sigma_x^2 \quad (1.177)$$

при произвольной величине  $\alpha$  не выполняется при конечном  $m$  [20] (см. рис. 1.9), т.е. не выполняется условие нормировки.

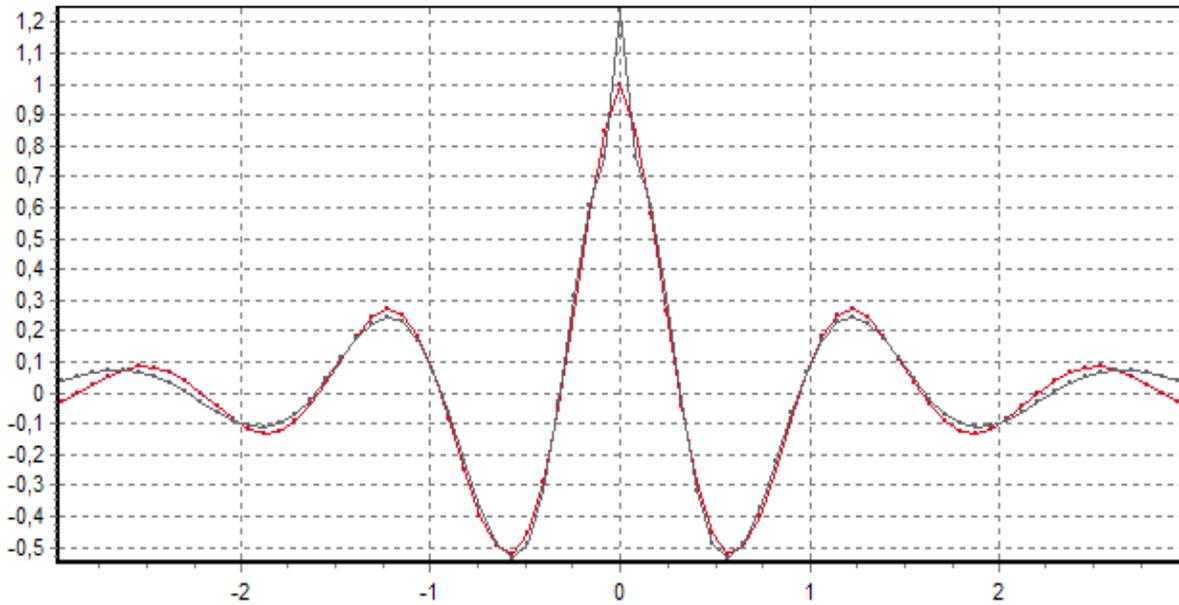


Рисунок 1.9 - Аппроксимация КФ 5 модели с  $\mu = 5$  ортогональными функциями Лагерра -  $m = 15$ ,  $\alpha = 4,899$

Для обеспечения условия (1.177) аналитическое выражение  $K_x(\tau)$  можно искать в виде:

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m v_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)$$

где 
$$v_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} \quad (1.178)$$

Легко проверить, что в этом случае  $\hat{\rho}_a(0) = \sum_{k=0}^m v_k \psi_k(0, \alpha) = 1$ . Однако, коэффициенты разложения  $v_k$ , определенные по формуле (1.178), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции  $b_k$  для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ ,

$$\hat{\rho}_a(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \quad (1.179)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$\hat{\rho}_a(0) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (1.180)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать  $\Delta_1$  по  $b_k$  [20-22]:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min$$

Найдём частные производные  $\frac{\partial \Delta_1}{\partial \beta_n}$  и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} = -2 \int_0^{\infty} \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (1.181)$$

Выполнив промежуточные преобразования, определим

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (1.182)$$

Отсюда

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}. \quad (1.183)$$

Подставляя найденное значение  $b_n$  в выражение (1.180), получим:

$$\sum_{k=0}^m \left[ \beta_k - \frac{\lambda}{2} \frac{\psi_k(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2} \right] \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (1.184)$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{\left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}} \quad (1.185)$$

Отметим, что для рассматриваемых ортогональных базисов  $\psi_k^2(0, \alpha) = 1$ .

Подставив  $\lambda/2$  в выражение для оценки коэффициента разложения  $b_n$ , получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n. \quad (1.186)$$

Выражения для  $C_n$  для различных ортогональных базисов представлены в таблице 1.23.

Значения коэффициентов  $C_n$  при ограничениях на модель

корреляционной функции  $\mu(\tau) = 1$

Таблица 1.23

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$C_n$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1)$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(n+1) \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (4n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(2m+1)}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (4n+3) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (2n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n 2(n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (2n+3) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(m+3)}$

Заметим, что при произвольном весе ортогональной функции  $\mu(\tau)$  необходимо минимизировать  $\Delta_I^{(1)}$  по  $b_k$ :

$$\Delta_I^{(1)} = \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 \mu(\tau) d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min. \quad (1.187)$$

Выполнив преобразования, аналогичные (1.181) – (1.186), получим аналитические выражения для коэффициентов  $C_n$  (см. таблицу 1.24).

Значения коэффициентов  $C_n$  при ограничениях на модель  
корреляционной функции  $\mu(\tau) \neq 1$

Таблица 1.24

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$C_n$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}(n+1)$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)(m+3)}(n+1)(n+2)$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right]}{(m+1)^2(m+2)^2}(-1)^n(n+1)^3$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right]}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}(-1)^n(2n+3)(n+1)^2(n+2)^2$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)}{(m+1)}(-1)^n$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{6\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)}{(m+1)(m+2)(2m+3)}(-1)^n(n+1)^2$

Определим погрешность аппроксимации  $\Delta_l$  ( $\mu(\tau) = 1$ ).

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \tag{1.188}$$

Представим погрешности аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta_l = \Delta + \Delta_2, \tag{1.189}$$

где  $\Delta_2$  составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (1.180).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \tag{1.190}$$

Вторую составляющую погрешности  $\Delta_2$  удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (1.191)$$

В таблице 1.25 приведены выражения для оценки  $\Delta$  и  $\Delta_2$  для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ ортогональными функциями  $\mu(\tau) = 1$

Таблица 1.25

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\Delta$	$\Delta_2$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{\alpha(m+1)}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)^2}{2\alpha(m+1)^2}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{\alpha(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{4k+1}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+1)}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{4k+3}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)^2}{2\gamma(m+1)^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+3}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{2\gamma(m+1)(m+3)}$

При произвольном весе ортогональной функции  $\mu(\tau) \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)} &= \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 \mu(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (1.192)$$

В этом случае

$$\Delta^{(1)} = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.193)$$

Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции ортогональными функциями при  $\mu(\tau) \neq 1$  представлены в таблице 1.26.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ ортогональными функциями  $\mu(\tau) \neq 1$

Таблица 1.26

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta_2$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)}$	$\frac{2}{\gamma^2} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{4}{\gamma^3} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{12}{\gamma^3} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{4\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)^3}$	$\frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2(m+2)^2}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}$	$\frac{6}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{4\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, & k=0; \\ \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{8\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, & k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{4\gamma(m+1)}, & k=0; \\ \frac{\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{8\gamma(m+1)}, & k \neq 0 \end{cases}$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{8\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)^2}$	$\frac{3\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{4\gamma(m+1)(m+2)(2m+3)}$

В [21, 22] для ортогонального базиса Лагерра было показано, что  $\Delta$  является функцией параметра  $\alpha$ . Можно показать, что и погрешность  $\Delta_2$ , которую с учетом (1.191) приведем к виду:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\alpha(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega_1) S_{x_H}(\omega_2) \left[ \frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^{m+1} d\omega_1 d\omega_2, \quad (1.194)$$

также является функцией параметра  $\alpha$ .

Найдём условие определения оптимального значения параметра  $\alpha$ , при котором  $\Delta = \min$ .

Это условие, как следует из (1.189), найдем из уравнения:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (1.195)$$

Значение  $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$  определяется выражением

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -(m+1) \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}, \quad (1.196)$$

а  $\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha}$  с учётом (1.194) примет вид:

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ 2\alpha(m+1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} d\omega \right] \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 \right] \right\}. \quad (1.197)$$

Подставив в (1.195) выражения (1.196) и (1.197), после промежуточных преобразований получим:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 - \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}. \quad (1.198)$$

Представляя в выражении (1.198) разность квадратов как произведение суммы оснований на их разность, получим:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \times \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_{m+1}(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_H}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]. \quad (1.199)$$

Выражение (1.199) с учётом (1.188) равно:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} b_m b_{m+1}. \quad (1.200)$$

Так как коэффициент  $b_m \neq 0$  и параметр  $\alpha \neq 0$ , условие минимума погрешности  $\Delta$ , примет вид:

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{1 - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (1.201)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра  $\alpha$  добиться равенства нулю  $\beta_{m+1}$  коэффициента. Значения  $b_0, \dots, b_m$  в этом случае будут оптимальными.

На рис. 1.10. представлены результаты аппроксимации КФ 5 модели с  $\mu = 5$ , коэффициенты разложения которой определяются в соответствии с выражением (1.186).

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- число корней уравнения (1.201) в общем случае равно  $(m+1)$ ;
- величина минимума погрешности  $\Delta$  зависит от найденного значения  $\alpha$ ;
- для обеспечения минимума - минимума погрешности необходимо правильно выбирать диапазон изменения  $\alpha$ , т.е. необходима априорная информация о свойствах процесса. Как показали исследования [22],  $\alpha_{opt}$  находится вблизи корня, найденного в результате решения уравнения  $\beta_0 - 1 = 0$ .

Следует отметить, что при изменении числа членов разложения ряда (1.179), необходимо пересчитать в соответствии с (1.186) все параметры  $b_k$ .

К сожалению, для других ортогональных базисов аналитически решить задачу поиска оптимального значения  $\alpha$  не удалось [38].

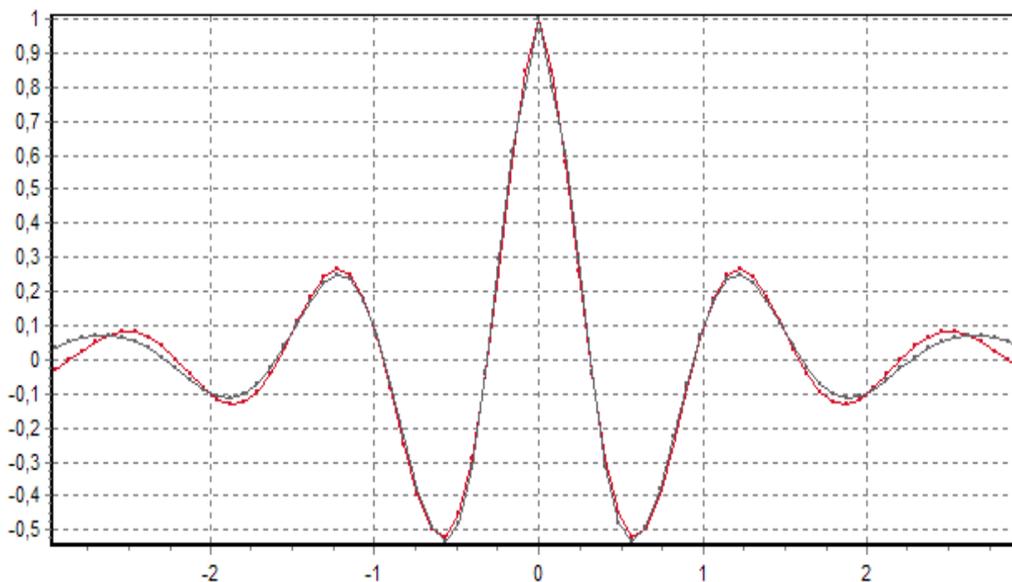


Рисунок 1.10 - Аппроксимация КФ 5 модели с  $\mu = 5$  ортогональными функциями Лагерра -  $m = 15$ ,  $\alpha = 4,899$

## 1.7. Ортогональные модели взаимных корреляционных функций

Формально полученные результаты для аппроксимации НКФ можно обобщить и для построения ортогональных моделей взаимных корреляционных функций (ВКФ). Так как ВКФ не является четной [20, 22], необходимо аппроксимировать как правую, так и левую её ветви. Причем число членов аппроксимирующего ряда для каждой ветви может быть свое:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} 1(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} 1(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_l) \right\}, \quad (1.202)$$

$$\text{где } 1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \text{ и } 1(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 1, & \tau < 0, \end{cases} \quad (1.203)$$

$A_m = \sigma_x \sigma_y$  - наибольшее значение ВКФ.

Учитывая, что нормированная ВКФ для стационарно связанных процессов равна

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1.204)$$

коэффициенты разложения ВКФ определяются следующими выражениями

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (1.205)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{yx}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (1.206)$$

Соответственно методическая погрешность аппроксимации будет равна

$$\Delta = \sigma_x \sigma_y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau - \left( \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \right) \right\}. \quad (1.207)$$

Исследования показали [20, 22], что модель (1.202) будет справедлива, если максимум ВКФ будет находиться в «нуле» или вблизи нуля.

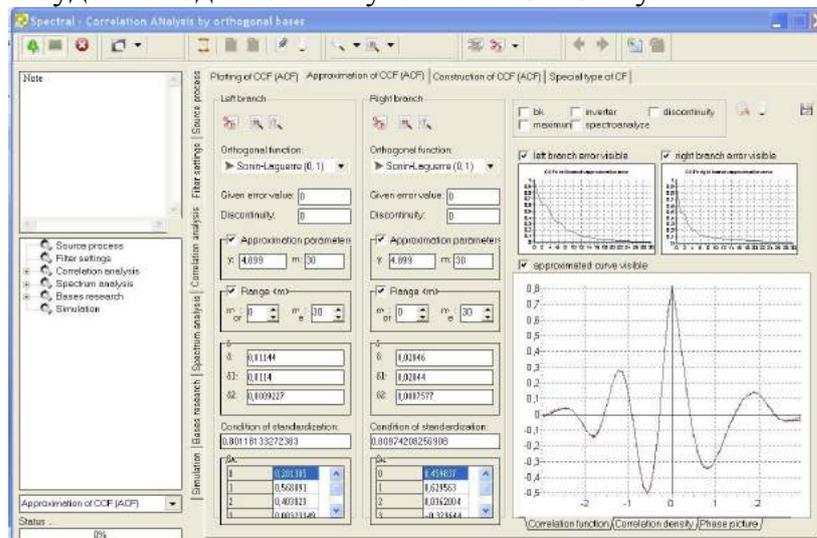


Рисунок 1.11 – Результаты аппроксимации ВКФ

Если максимум ВКФ находится в точке  $\tau_m$ , модель взаимной корреляционной функции необходимо искать в виде:

$$K_{xy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^m \beta_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (1.208)$$

Коэффициенты разложения для модели (1.208) определяются выражениями:

где 
$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau + \tau_m) \psi_k(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (1.209)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) d\tau. \quad (1.210)$$

Результаты аппроксимации для  $\tau_m = 4,082$  приведены на рисунке 1.12.

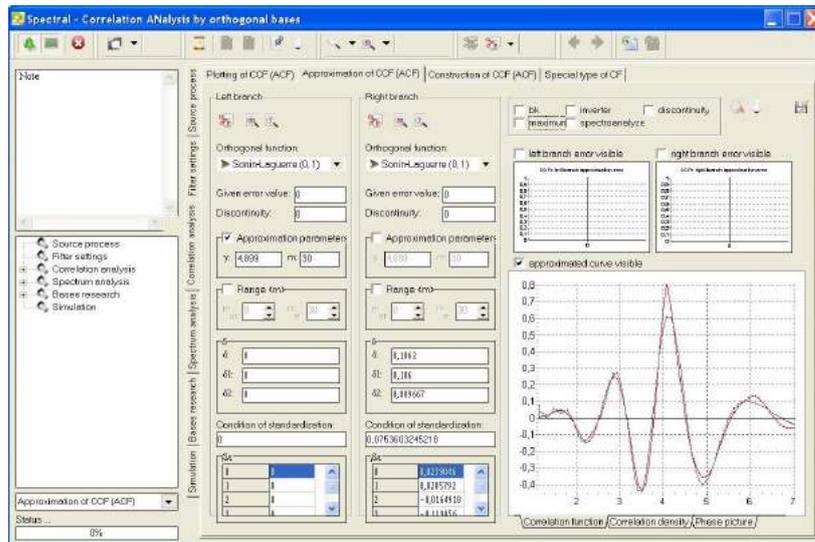


Рисунок 1.12 - Аппроксимации ВКФ  $\tau_m = 4,082$

Из рисунка видно, что в точке  $\tau_m$  значение модели и ВКФ не совпадают.

Для обеспечения «склеивания» левой и правой ветвей ВНКФ, т.е. выполнения условия нормировки:

$$\rho_{xy}(\tau_m) = \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \psi_k(0, \alpha_n) = \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \psi_k(0, \alpha_l) = 1, \quad (1.211)$$

в соответствии с рекомендациями подраздела 1.6 рекомендуется вместо коэффициентов  $\beta_k$  использовать коэффициенты  $b_k$ , определяемые в виде (1.186) (см. таблицы 1.23 – 1.24):

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_n\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n. \quad (1.212)$$

С учетом (1.208) модель ВНКФ можно представить в виде

$$\rho_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l). \quad (1.213)$$

Численные значения параметров масштаба  $\alpha_l$  и  $\alpha_n$  определяются в соответствии с результатами таблиц 1.17, 1.20 -1.22.

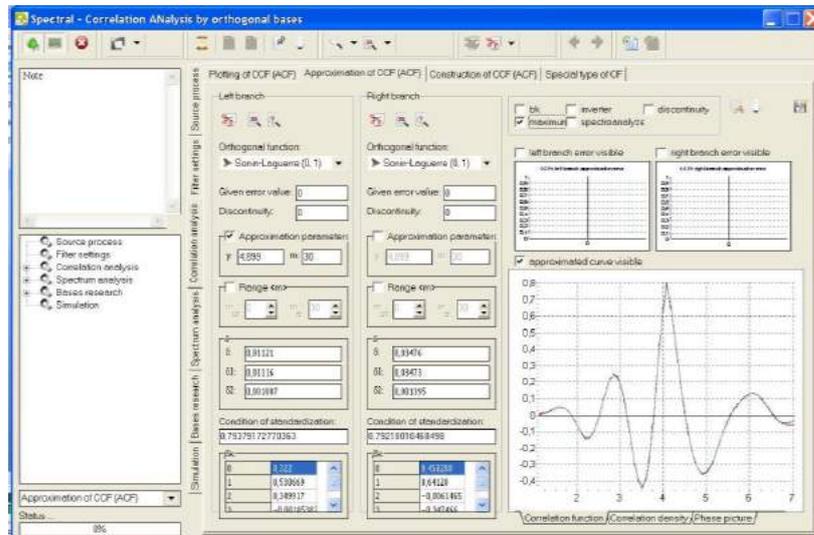


Рисунок 1.13 – Результаты аппроксимации с выполнением условия нормировки

Следует отметить, что «склеивание» левой и правой ветвей в точке  $\tau_m$ , позволяет использовать для построения ортогональной модели ВКФ разные ортогональные базисы (см. рис. 1.14).

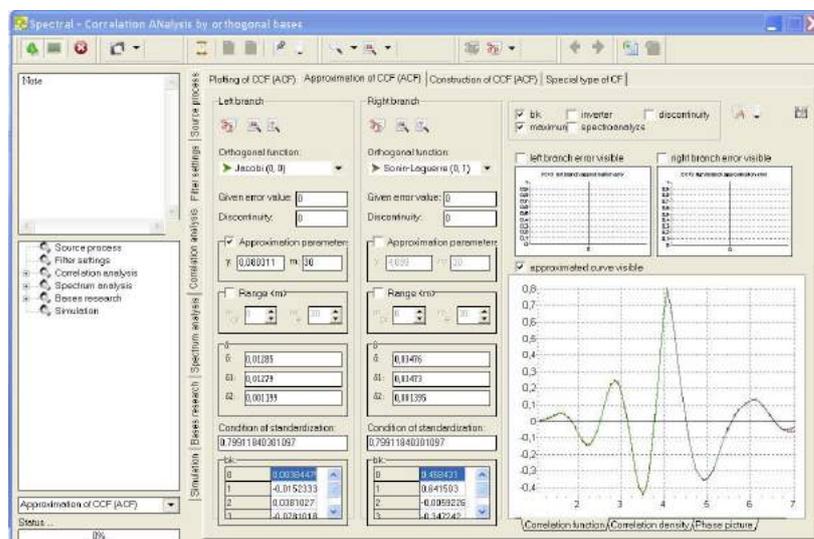


Рисунок 1.14 – Аппроксимация ВКФ левой и правой ветвей разными ортогональными базисами

## 1.8. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей

При построении ортогональной модели функциональной характеристики  $f(\tau)$  необходимо выполнить следующие действия: выбрать ортогональный базис  $\psi_k(\tau, \gamma)$ ; определить число членов ряда  $m$  и параметр масштаба ортогональных функций  $\gamma$ ; рассчитать коэффициенты Фурье ортогонального ряда  $\beta_k$ , удовлетворяющие минимуму взвешенной квадратической погрешности аппроксимации в общем случае [20, 22, 39]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[ f(\tau) - \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \psi_k(\tau, \gamma) \right]^2 \mu(\tau, \gamma) d\tau \rightarrow \min, \quad (1.214)$$

где

$$\hat{\beta}_k = \hat{\beta}_{k,1} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \Phi \left( \hat{f}(\Delta\tau \cdot i) \psi_k(\Delta\tau \cdot i), \tau_{k \max}, N \right) \quad (1.215)$$

- оценка коэффициента разложения

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} f(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau, \quad (1.216)$$

для которой

$\tau_{k \max}$  - максимальный интервал корреляции,

$\Delta\tau$  - шаг дискретизации,

$i = 1 \dots J_{\max}$ ,  $J_{\max} = \text{Ent}[\tau_{k \max} / \Delta\tau]$  - число ординат, необходимых для построения

функциональной зависимости,

$N$  - объем выборки,

$\Phi(\cdot)$  - функционал, зависящий от численного метода интегрирования;

$\mu(\tau, \gamma)$  - весовая функция ортогонального базиса;

$\|\psi_k\|^2$  - норма ортогональных функций.

Выражение (1.214) можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_1, \quad (1.217)$$

где

$$\Delta_{\min} = \int_0^{\infty} f^2(\tau) \mu(\tau, \gamma) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 \quad (1.218)$$

- минимальная погрешность аппроксимации;

$$\Delta_1 = \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k}^2 \|\psi_k\|^2 \quad (1.219)$$

- погрешность аппроксимации, вызванная оценкой коэффициентов разложения,

где

$$\Delta_{\beta_k}^2 = \left( \hat{\beta}_k - \beta_k \right)^2. \quad (1.220)$$

Из выражений (1.218) и (1.219) видно, что значение погрешности  $\Delta_{\min}$  падает с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ , в то время как значение погрешности

$\Delta_1$  возрастает [39]. Следовательно, для уменьшения результирующей погрешности аппроксимации (1.217) необходимо минимизировать составляющую (1.219).

Решения этой проблемы можно добиться применением следующего подхода.

В общем виде с использованием линейной интерполяции  $f(\tau)$  можно записать в виде [1]:

$$f(\tau) = \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} (a_j + b_j \tau) \delta_j, \quad (1.221)$$

где  $\delta_j = \begin{cases} 1, & \tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$  - индикатор состояния.

Тогда, подставив (1.211) в (1.206), получим

$$\hat{\beta}_{k,2} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} (a_j + b_j \tau) \delta_j \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} \left( a_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \psi_k(\tau, \gamma) d\tau + b_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \psi_k(\tau, \gamma) \tau d\tau \right). \quad (1.222)$$

Для оценки коэффициентов разложения (1.222) необходимо определить  $\int \psi_k(\tau, \gamma) d\tau$  и  $\int \tau \psi_k(\tau, \gamma) d\tau$ .

Представим решение данной задачи для ортогональных функций Лагерра  $L_k(\tau, \gamma)$  и Лежандра  $Leg_k(\tau, \gamma)$ , являющиеся простейшими представителями ортогональных базисов Сони́на-Лагерра  $L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma)$  и Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$  с нулевыми параметрами ортогональных базисов  $\alpha, \beta$  и единичной весовой функцией  $\mu(\tau, \gamma)$ .

Для решения данной задачи воспользуемся рекуррентными соотношениями

$$L_k(\tau, \gamma) = \frac{(2k-1-\gamma\tau)}{k} L_{k-1}(\tau, \gamma) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(\tau, \gamma), \quad (1.223)$$

где  $L_0(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$ ,  $L_1(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}(1-\gamma\tau)$ ;

$$\frac{dL_k(\tau, \gamma)}{d\tau} = -\gamma L_{k-1}^{(1)}(\tau, \gamma) - \frac{\gamma}{2} L_k(\tau, \gamma), \quad (1.224)$$

где  $L_0^{(1)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$ ,

и выражением

$$L_k^{(\alpha+1)}(\tau, \gamma) = \sum_{\nu=0}^k L_{\nu}^{(\alpha)}(\tau, \gamma). \quad (1.225)$$

Проведя ряд преобразований над выражениями (1.223)-(1.225), получим рекуррентные соотношения для интегралов  $\int L_k(\tau, \gamma) d\tau$  и  $\int \tau L_k(\tau, \gamma) d\tau$ :

$$\int L_k(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} L_k(\tau, \gamma) - 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \int L_{\nu}(\tau, \gamma) d\tau, \quad (1.226)$$

где  $\int L_0(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$ ,

$$\int \tau L_k(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{k+1}{\gamma} \int L_{k+1}(\tau, \gamma) d\tau + \frac{2k+1}{\gamma} \int L_k(\tau, \gamma) d\tau - \frac{k}{\gamma} \int L_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau, \quad (1.227)$$

где  $\int \tau L_0(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (2 + \gamma\tau)$ .

Подобным образом для ортогональных функций Лежандра будем иметь следующие рекуррентные соотношения:

$$L_k(\tau, \gamma) = \frac{(2k-1)}{k} (1 - 2e^{-2\gamma\tau}) Leg_{k-1}(\tau, \gamma) - \frac{k-1}{k} Leg_{k-2}(\tau, \gamma), \quad (1.228)$$

где  $Leg_0(\tau, \gamma) = e^{-\gamma\tau}$ ,  $Leg_1(\tau, \gamma) = e^{-\gamma\tau} (1 - 2e^{-2\gamma\tau})$ ;

$$\frac{dLeg_k(\tau, \gamma)}{d\tau} = \frac{dLeg_{k-2}(\tau, \gamma)}{d\tau} - \gamma [(2k+1) Leg_k(\tau, \gamma) - 2(2k-1) Leg_{k-1}(\tau, \gamma) + (2k-3) Leg_{k-2}(\tau, \gamma)], \quad (1.229)$$

где  $\frac{dLeg_0(\tau, \gamma)}{d\tau} = -\gamma e^{-\gamma\tau}$ ,  $\frac{dLeg_1(\tau, \gamma)}{d\tau} = -\gamma e^{-\gamma\tau} (1 - 6e^{-2\gamma\tau})$ .

Из выражений (1.228), (1.229) следуют искомые рекуррентные соотношения

$$\int Leg_k(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(2k-1)}{2k+1} \int Leg_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{(2k-3)}{2k+1} \int Leg_{k-2}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+1)} [Leg_k(\tau, \gamma) - Leg_{k-2}(\tau, \gamma)], \quad (1.230)$$

где  $\int Leg_0(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau}$ ,  $\int Leg_1(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-2\gamma\tau}\right)$ ;

$$\int \tau Leg_k(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(2k-1)}{2k+1} \int \tau Leg_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{(2k-3)}{2k+1} \int \tau Leg_{k-2}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+1)} \left[ \tau (Leg_k(\tau, \gamma) - Leg_{k-2}(\tau, \gamma)) - \int Leg_k(\tau, \gamma) d\tau + \int Leg_{k-2}(\tau, \gamma) d\tau \right], \quad (1.231)$$

где  $\int \tau Leg_0(\tau, \gamma) d\tau = -e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right)$ ,

$$\int \tau Leg_1(\tau, \gamma) d\tau = 2e^{-3\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{3\gamma} + \frac{1}{9\gamma^2} \right) - e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

Полученные аналитические выражения, представленные в виде рекуррентных соотношений, позволяют вычислять коэффициенты разложения высоких порядков при реализации на ЭВМ. При этом погрешность вычисления коэффициентов разложения в данном случае зависит лишь от шага дискретизации, являющегося исходным параметром при обработке информационных массивов. Выражения для других ортогональных функций, а именно: Якоби (-0,5, 0), Якоби (0,5, 0), Якоби (1, 0), Якоби (2, 0) - с единичной весом, - и Сонина-Лагерра (1), Сонина-Лагерра (2), Якоби (0, 1), Якоби (0, 2) - с весом, отличным от единицы, - приведены в Приложении 7.

Заметим, что с учетом выражения (1.230) возможна более точная оценка минимальной погрешности аппроксимации (1.228) вследствие аналитического взятия соответствующего интеграла с последующей подстановкой пределов интегрирования.

С учетом (1.228) выражение (1.230) представим в виде

$$A_{\min} = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} (a_j + b_j \tau)^2 \delta_j d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 =$$

$$\sum_{j=0}^{J_{\max}-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (a_j + b_j \tau)^2 d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (1.232)$$

где  $\int (a_j + b_j \tau)^2 d\tau = a_j^2 \tau + a_j b_j \tau^2 + \frac{b_j^2 \tau^3}{3} + C$ .

Аналогичные аналитические выражения  $\int (a_j + b_j \tau)^2 \mu(\tau, \gamma) d\tau$  для функций с весом, отличным от единичного, приведены в Приложении 7.

Сравним представленные методики определения коэффициентов разложения (1.215) и (1.222) при проведении имитационного моделирования, состоящего в построении ортогональной модели нормированной корреляционной функции (НКФ) вида  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  с показателем колебательности  $\mu = \omega_0 / \lambda = 5$ , объемом выборки  $N = 5000$ ,  $\Delta\tau = 0,0816$  и  $J_{\max} = 37$  с помощью ортогональных функций Лагерра и оценке погрешностей, соответствующих выражениям (1.214), (1.217) - (1.220). Заметим, что согласно РТМ [16], имитационное моделирование проводилось по 29 экспериментам.

На рис. 1.15 представлены результаты оценки коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_{k,1}$  и  $\hat{\beta}_{k,2}$ , соответствующие выражению (1.222), при заданном диапазоне  $m = 0..30$  и значении параметра  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} = 4,899$  [20, 22, 44].

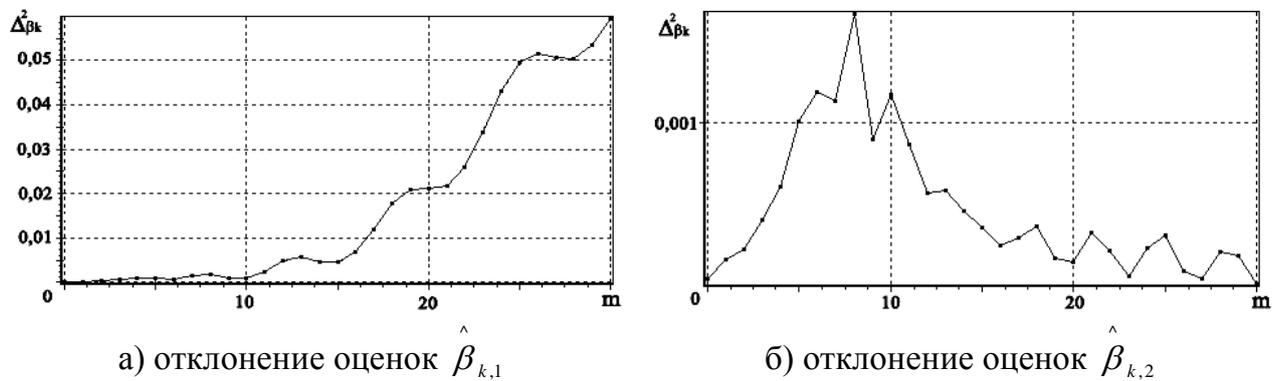
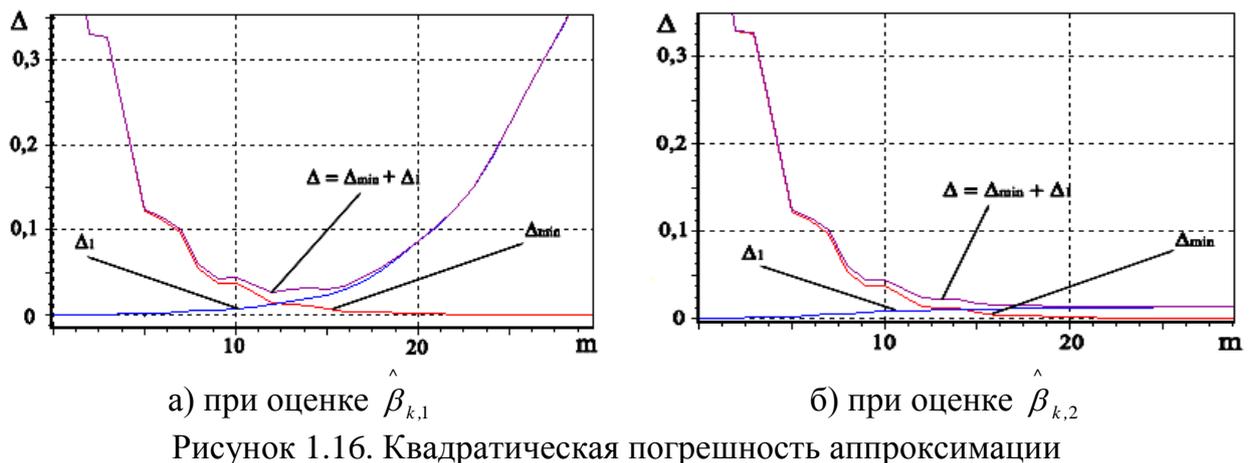


Рисунок 1.15 - Отклонения  $\Delta_{\beta_k}^2$  при оценке коэффициентов разложения по разным методикам

Из рис. 1.16 б) видно, что при дальнейшем увеличении числа членов рядов отклонения  $\Delta_{\beta_k}^2$  уменьшаются, и величина этих отклонений при прочих равных параметрах ниже, более чем на порядок. Отсюда следует, что вклад погрешности вычисления коэффициентов, вызванной случайными отклонениями, в результирующую погрешность аппроксимации значительно снижается.

На рис. 1.16 приведены квадратические погрешности аппроксимации (1.217) при оценке коэффициентов разложения по различным методикам.



Из рис. 1.16 а) видно, что так как минимальная погрешность аппроксимации убывает, а погрешность вычисления коэффициентов разложения возрастает, то существует некое оптимальное значение параметра  $m$ , при котором достигается минимум-минимум суммарной погрешности аппроксимации.

В свою очередь, рис. 1.16 б) демонстрирует выполнение равенства Парсеваля [8], согласно которому результирующая погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением  $m$ .

Следовательно, полученный результат позволяет строить ортогональные модели с некоторой допустимой либо наперед заданной погрешностью  $\Delta \leq \Delta_{\text{дон}}$ . По заданной погрешности  $\Delta_{\text{дон}}$  определяется необходимое число членов разложения, которое может быть достаточно большим.

Проведем сравнительный анализ широкого спектра ортогональных функций при решении поставленной задачи: построение ортогональной модели теоретической НКФ вида  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  с показателем колебательности  $\mu = 5$ ,  $\Delta \tau = 0,0816$  и  $J_{\text{max}} = 37$ , - с использованием предложенного подхода при одном и том же числе членов разложения ряда  $m = 30$ . Результаты представим в виде таблицы (табл. 1.27).

Таблица 1.27

Вид функции	Параметр масштаба $\gamma$	Относительная погрешность аппроксимации $\delta = \Delta / \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau, \gamma) d\tau$
<b>Лагерра</b>	<b>4,899</b>	<b>0,02254</b>
<i>Сонина-Лагерра (1)</i>	4,899	0,05168
<i>Сонина-Лагерра (2)</i>	4,899	0,0902
Лежандра	0,080311	0,02454
Якоби (-0,5, 0)	0,080975	0,02451
Якоби (0,5, 0)	0,079658	0,02455
Якоби (1, 0)	0,15803	0,02449
Якоби (2, 0)	0,077762	0,02418
<i>Якоби (0, 1)</i>	<i>0,080311</i>	<i>0,05198</i>
<i>Якоби (0, 2)</i>	<i>0,080311</i>	<i>0,08511</i>

Из табл. 1.27 видно, что наименьшая погрешность аппроксимации получена при построении ортогональной модели в базисе Лагерра. Так же следует заметить, что для функций с весом (выделены курсивом), отличным от единицы, указаны значения, соответствующие взвешенной погрешности аппроксимации.

Как показали полученные результаты, значительных различий при построении ортогональных функций в различных базисах не наблюдается. Однако, ортогональный базис Сонина-Лагерра, как частный случай функции Лагерра, является более приоритетным по ряду причин. Одна из таких причин - удобство выбора параметра масштаба  $\gamma$ . Во-первых, параметр масштаба не зависит от числа членов разложения ряда  $m$ , следовательно, нет необходимости пересчета  $\gamma$  при изменении  $m$ . Во-вторых, при большом значении  $m$ , область нахождения локальных оптимумов, близких к минимуму-миниморуму, значительно расширяется. Следовательно, квазиоптимальный алгоритм подбора параметра масштаба дает значения, близкие к оптимуму, без усложнения процедуры вычисления [20, 22].

Также к числу достоинств ортогональных функций Сонина-Лагерра, как частный и наиболее простой случай функции Лагерра, относятся меньшие временные затраты при вычислении рекуррентных соотношений и аналитических выражений (см. Приложение 8) и простота определения различных частотных характеристик [20, 27, 42, 43] в сравнении с ортогональными функциями Якоби.

Приведенные алгоритмы положены в основу работы автоматизированной системы корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах «CSA» [41].

Ниже представлен пример обработки экспериментальных данных физического эксперимента с помощью разработанной автоматизированной системы.

На рис. 1.17 представлена экранная форма подсистемы отображения характеристик сигнала, поступающего на вход системы.

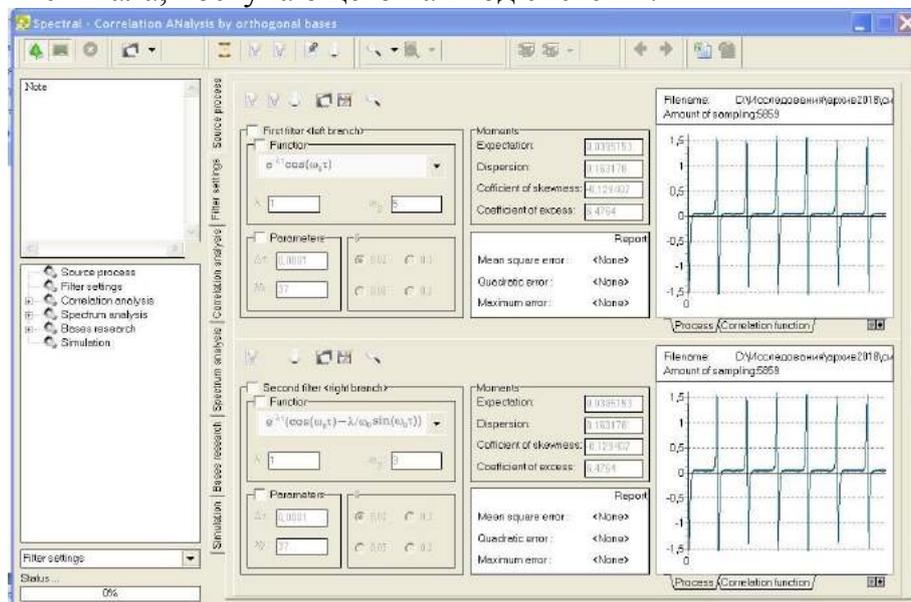


Рисунок 1.17. Экранная форма подсистемы отображения характеристик входного сигнала

На рис. 1.18 – экранная форма подсистемы аппроксимации АКФ в базисе Лагерра с параметром масштаба  $\gamma = 4000$ ,  $m = 200$  и относительной погрешностью аппроксимации  $\delta = 0,03423$ .

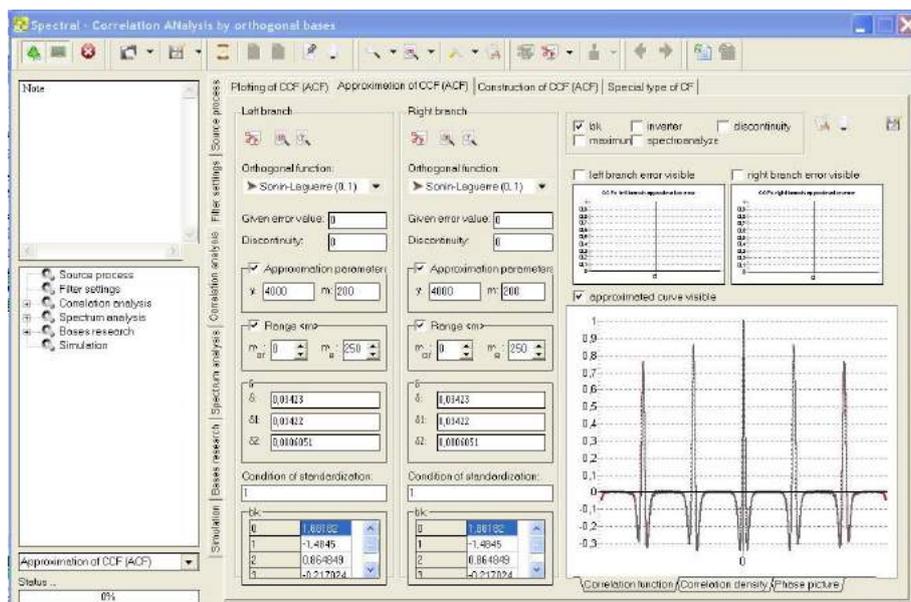


Рис. 1.18. Экранная форма подсистемы аппроксимации АКФ в базе Лагерра

### 1.9. Анализ методических погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции

Рассмотрим методику анализа методических погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции и ее составляющих, образующих полную группу погрешностей [22, 39].

На практике вместо определения коэффициента разложения ортогональной модели (1.145) в соответствии с выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (1.233)$$

как правило, приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения корреляционной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\tau_{k \max}} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (1.234)$$

где  $\tau_{k \max}$  – интервал корреляции;

При этом появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_{\tau_{k \max}}^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (1.235)$$

Необходимо отметить, что  $\lim_{\tau_m \rightarrow \infty} \Delta_{\beta_k}^{(1)} = 0$ .

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в выборе численного метода для вычисления интеграла в (9.2), «дискретизации» уравнений для оценки параметра масштаба  $\alpha/\gamma$ .

Обозначим оператор численного интегрирования  $\Phi\{\}$ . Тогда оценка коэффициента разложения, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования выражения (1.224) примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi\{K_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k(\Delta\tau i, \alpha), J_{\max}\}, \quad (1.236)$$

В этом случае составляющая методической погрешности, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования, равна

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (1.237)$$

В связи с конечностью выборки значений КФ выражение для оценки коэффициента разложения представим в виде

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi\left\{\hat{K}_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k(\Delta\tau i), \tau_{k\max}, N\right\}, \quad (1.238)$$

$N := N, M, NM$  – объем выборки.

С учетом выражений (1.236.) и (1.238), составляющая методической погрешности, вызванная конечностью объема выборки, будет равна:

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (1.239)$$

Отметим, что для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), как показали исследования, количество отсчетов равно  $N = 5000 - 2000$  соответственно [20].

Составляющие методической погрешности, как следует из выражений (9.3), (9.5) и (9.7) образуют полную группу погрешностей. Следовательно, методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения  $\beta_k$  определяется выражением:

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k. \quad (1.240)$$

Конечность интервала интегрирования (интервала корреляции КФ) и интегрирование численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки значений КФ – случайную составляющую. Поэтому составляющие погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(1)}$  и  $\Delta_{\beta_k}^{(2)}$  можно определить, например, с помощью математического пакета Mathcad, а  $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$  - методом имитационного моделирования.

На рис. 1.19 – 1.21 для примера приведены результаты оценки коэффициентов разложения и составляющих методической погрешности методом имитационного моделирования с помощью системы SCAN [20, 39, 41]. В качестве входного процесса был выбран процесс с корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = \exp(-|\tau|)\cos 5\tau$ . Ниже в таблице 1.28 представлены исходные данные для моделирования.

Исходные данные для моделирования

Таблица 1.28

analysis   Filter settings   Source process	DATA:	Orthogonal function: Sonin-Laguerre (0, 1)
	Experiment number: 29	Given error value: 0
	Sample size: 5000	Range <m>: 0.30
	Number of CF model: 5	SIMULATION:
	Parameters of CF model:	Current experiment: 29
	$\Delta\tau = 0,08165$ $\lambda = 1$	Coefficients analysis
	$Nx = 37$ $\omega_0 = 5$	beta (g) - coefficients by generated CF
	$\delta = 0,02$	beta (f) - coefficients by theoretical CF
		beta (a) - analytical coefficients
		Table with value Fourier coefficients beta

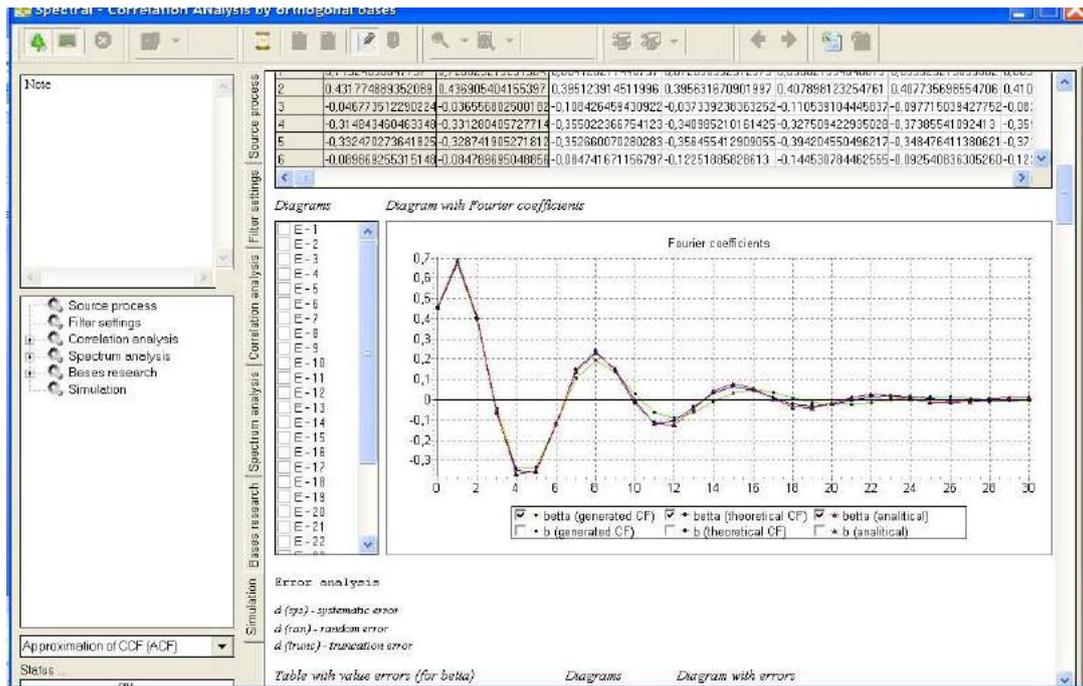


Рисунок 1.19 Коэффициенты разложения НКФ в ортогональный ряд

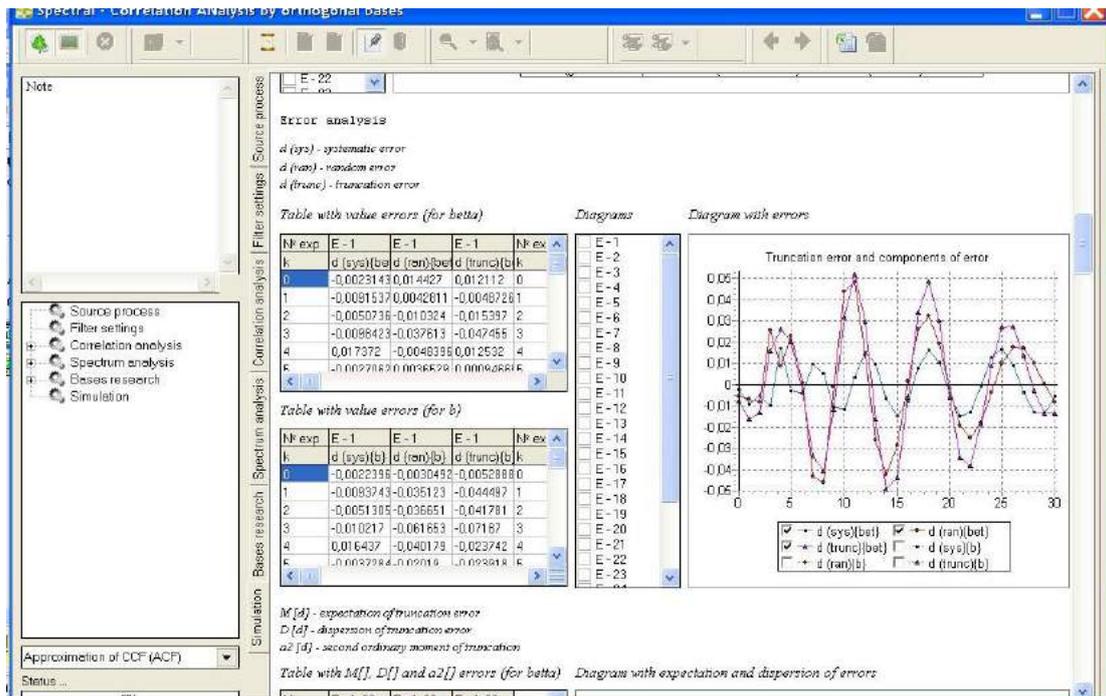


Рисунок 1.20 – Примеры оценки составляющих методической погрешности

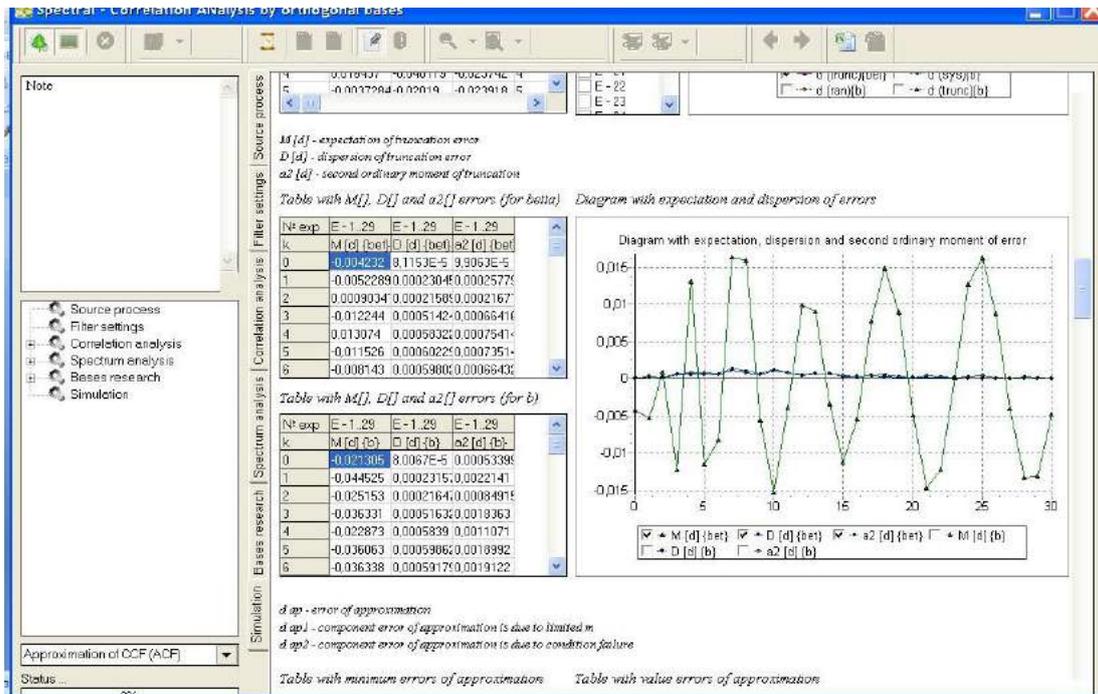


Рисунок 1.21 – Примеры оценки составляющих методической погрешности

Вопрос оценки составляющих методической погрешности методом имитационного моделирования будет подробно рассмотрен в разделе 4.5.

### 1.10. Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями

Запишем погрешность аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (1.241)$$

где  $\hat{\beta}_k$  оценка коэффициента  $\beta_k$ .

С учетом свойств ортогональных функций [20, 39]

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2\sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.242)$$

Выражение (1.242) является функцией случайных оценок коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$ . Считая отклонения оценок от коэффициентов разложения малыми, разложим выражение (1.242) в ряд Тейлора относительно  $\hat{\beta}_k$  в окрестности  $\beta_k$ , ограничившись квадратичными членами

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \hat{\beta}_k - \beta_k \right)^2. \quad (1.244)$$

В общем случае оценка коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$  смещена, поэтому

$$\hat{\beta}_k = \beta_k + \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k}. \quad (1.245)$$

С учетом того, что

$$\Delta_{\min} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (1.246)$$

выражение (1.234) приведем к виду

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_m, \quad (1.247)$$

где  $\Delta_m = \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k} \right)^2$ .

Математическое ожидание погрешности аппроксимации равно

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + M[\Delta_m] = \Delta_{\min} + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2). \quad (1.248)$$

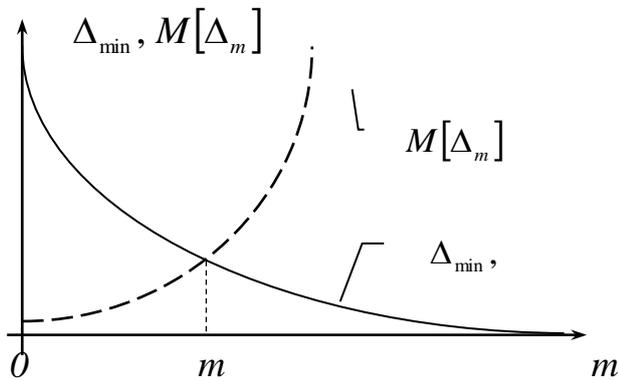


Рисунок 1.22 - Составляющие погрешности аппроксимации

Из выражения (1.248) видно, что математическое ожидание погрешности аппроксимации кроме минимальной погрешности, содержит вторую составляющую, численное значение которой линейно зависит от погрешности оценки коэффициентов разложения и увеличивается с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ . Следует отметить, что в общем случае с увеличением числа членов разложения ряда  $\Delta_{\min}$  уменьшается. Следовательно,

существует минимум погрешности по  $m$  (см. рис. 1.22).

Выполнив все необходимые преобразования, получим дисперсию погрешности аппроксимации:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}^2 &= \sigma_x^8 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 M \left[ \overset{\circ}{\gamma}_k \overset{\circ}{\gamma}_n \right] = \\ &= \sigma_x^8 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\gamma k}^2 + 2\sigma_x^8 \sum_{k \neq n}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 K_{\gamma,k,n}, \end{aligned} \quad (1.249)$$

где  $\overset{\circ}{\gamma}_k = \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k} \right)^2 - \left( \sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2 \right)$ , а  $\sigma_{\gamma k}^2$  и  $K_{\gamma,k,n}$  - дисперсия и корреляционный момент случайной величины  $\gamma$ .

При условии некоррелированности  $\gamma_k, \gamma_n$  ( $K_{\gamma,k,n} = 0$ ), получим:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_x^8 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\gamma k}^2. \quad (1.250)$$

Оценим  $\sigma_{\gamma k}^2$ . Закон распределения  $\overset{\circ}{\beta}_k$ , так как выполняются условия теоремы Ляпунова, можно считать нормальным. Тогда

$$\sigma_{\gamma k}^2 = M \left\{ \left[ \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k} \right)^2 - \left( \sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2 \right) \right]^2 \right\} = 2\sigma_k^4 + 4\sigma_k^2 \Delta_{см,k}^2. \quad (1.251)$$

Подставив в (1.250) выражение (1.251) и выполнив преобразования, окончательно получим:

$$\sigma_{\Delta}^2 = 2\sigma_x^8 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2). \quad (1.252)$$

Из выражения (1.252) следует, что дисперсия погрешности аппроксимации растет с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ , а её численное значение зависит как от вида ортогональных функций, так и дисперсии и погрешности от смещенности оценки коэффициентов разложения ряда (1.146).

Приведем выражения для оценки математического ожидания и дисперсии погрешности для различных систем ортогональных функций.

Так как для ортогональных функций Лагерра  $\|L_k\|^2 = 1/\alpha$ , выражения (1.248) и (1.252) примут вид:

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + \frac{\sigma_x^4}{\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2), \quad (1.253)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{2\sigma_x^8}{\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2). \quad (1.254)$$

Норма для ортогональных функций Лежандра равна  $\|Leg_k\|^2 = 1/2\alpha(2k+1)$ . Тогда выражения (1.248), (1.252) равны:

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + \frac{\sigma_x^4}{2\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2)/(2k+1), \quad (1.255)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_x^8}{2\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2)/(2k+1)^2. \quad (1.256)$$

Норма ортогональных функций Дирихле равна  $\|D_k\|^2 = 1/2\alpha(k+1)$ . Следовательно

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + \frac{\sigma_x^4}{2\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2)/(k+1), \quad (1.257)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_x^8}{2\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2)/(k+1)^2. \quad (1.258)$$

Так как на практике, как правило, оценивают относительную погрешность аппроксимации, выражения (1.244) и (1.250) приведем к виду

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} = \delta_{\min} + \delta_m, \quad (1.259)$$

где  $\delta_m = \frac{1}{\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \beta_k + \Delta_{cm,k} \right)^2$ .

$$\sigma_{\delta}^2 = \frac{\sigma_{\Delta}^2}{\left[ \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau \right]^2} = \frac{2}{\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2). \quad (1.260)$$

Тогда выражения для оценки относительных математических ожиданий для рассматриваемых ортогональных функций примут вид:

- ортогональные функции Лагерра:

$$M[\delta] = \delta_{\min} + \frac{1}{\alpha \tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2); \quad (1.261)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{2}{\alpha^2 \tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2); \quad (1.262)$$

- ортогональные функции Лежандра:

$$M[\delta] = \delta_{\min} + \frac{1}{2\alpha \tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2) / (2k+1); \quad (1.263)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{1}{2\alpha^2 \tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2) / (2k+1)^2; \quad (1.264)$$

- ортогональные функции Дирихле:

$$M[\delta] = \delta_{\min} + \frac{1}{2\alpha \tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2) / (k+1); \quad (1.265)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{1}{2\alpha^2 \tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2) / (k+1)^2. \quad (1.266)$$

На рис. 1.23 представлены результаты определения второго слагаемого в выражениях (10.20) – ряд 1, (10.22) – ряд 2 и (10.24) – ряд 3 для различных значений погрешности оценки коэффициентов разложения ( $\gamma_k = \sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2$ ). Отсюда видно, что наименьший вклад в увеличении методической погрешности аппроксимации при одинаковой погрешности оценки коэффициентов разложения наблюдается у ортогональных функций Лагерра.

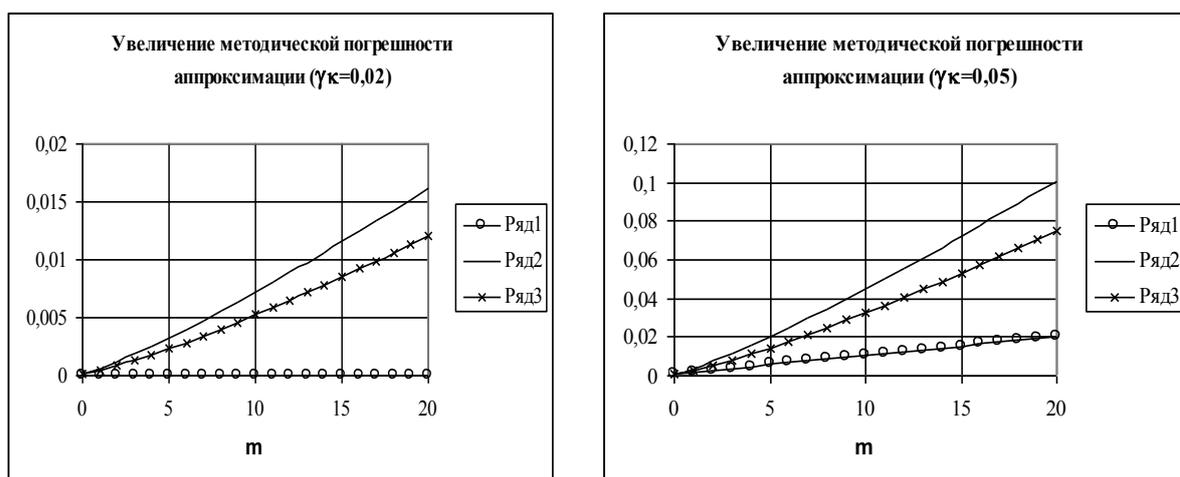


Рисунок 1.23 - Увеличение методической погрешности аппроксимации

### 1.11. Аппроксимация спектральных плотностей мощности по параметрам моделей корреляционных функций

Спектральные плотности мощности представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [9, 10, 20]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.267)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.268)$$

Определив параметры ортогональной модели корреляционной функции  $b_0, \dots, b_m, \alpha$

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right\}, \quad (1.269)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого необходимо подставить модель корреляционной функции (1.269) в выражение для определения спектральной плотности мощности. В результате получим.

$$\begin{aligned} S_a(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^m b_k [W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)] \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega). \end{aligned} \quad (1.270)$$

Воспользовавшись результатами, представленными в разделе 1.4, приведем аналитические модели спектральной плотности для различных базисов (см. табл. 1.29 – 1.31).

Аналитические выражения спектральной плотности мощности

Таблица 1.29

№	Орт. базис	$\varphi_k$	$S_a(\omega)$
1	Лагерра	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi$
2	Лежандра	$\arctg \frac{\omega}{2(k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
3	Дирихле	$\arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для частных ортогональных функций Якоби  $(\alpha, \beta)$

Таблица 1.30

№	$(\alpha, \beta)$	$\varphi_k$	$S_a(\omega)$
1	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$\arctg \frac{2\omega}{(4k+1)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
2	$(\frac{1}{2}, 0)$	$\arctg \frac{2\omega}{(4k+3)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
3	(1,0)	$\arctg \frac{\omega}{(k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
4	(0,0)	$\arctg \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
5	(2,0)	$\arctg \frac{\omega}{(2k+3)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для частных ортогональных функций Сонина-Лагерра, Якоби  $(\alpha, \beta)$

Таблица 1.31

№	Орт. базис	$\varphi_k$	$S_a(\omega)$
1	Сонина-Лагерра (1)	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \left[ 1 + (-1)^k \cos(2(k+1)\varphi_k) \right]$
2	Сонина-Лагерра (2)		$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos((2k+3)\varphi_k)}{2 \cos \varphi_k} + k + 1 \right]$
3	Якоби (0, 1)	$\arctg \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$
4	Якоби (0, 2)		$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$

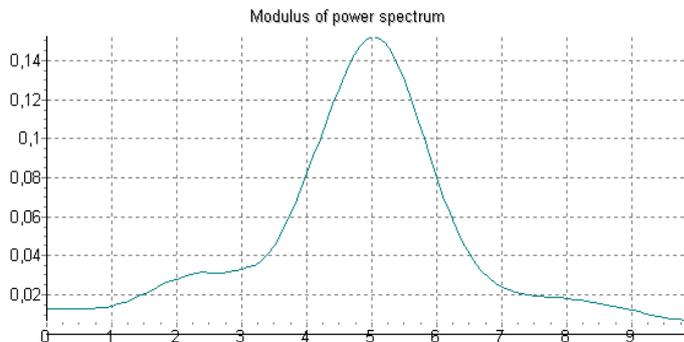


Рисунок 1.24 - Результат аппроксимации СПМ

На рисунке 1.24. представлены результаты аппроксимации СПМ в ортогональном базисе Якоби с параметрами (0,0) (функции Лежандра) для случайного процесса с  $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ ,  $N = 5000$ ,  $\Delta\tau = 0,078$ .

## 1.12. Взаимный аппроксимативный спектральный анализ по параметрам ортогональных моделей ВКФ

Полученные результаты можно обобщить на оценку взаимной спектральной плотности мощности и её составляющих по параметрам ортогональных моделей ВКФ.

Представим модель ВКФ в виде [20]:

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (1.271)$$

где  $\tau_m$  - значение аргумента, соответствующего максимуму ВКФ

Определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (1.272)$$

Введем замену переменных  $u = \tau - \tau_m$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_{axy}(j\omega) &= \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_k(u, \alpha_1) \exp(-j\omega u) du + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \int_{-\infty}^0 \psi_k(-u, \alpha_2) \exp(-j\omega u) du \right] = \\ &= \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} W_k(-j\omega) \right]. \end{aligned} \quad (1.273)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S_{axy}(j\omega) &= \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ \cos \omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \operatorname{Re} W_k(j\omega) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \operatorname{Re} W_k(j\omega) \right] - \sin \omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \operatorname{Im} W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \operatorname{Im} W_k(j\omega) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.274)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) &= \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ -\sin \omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \operatorname{Re} W_k(j\omega) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \operatorname{Re} W_k(j\omega) \right] + \cos \omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \operatorname{Im} W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \operatorname{Im} W_k(j\omega) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.275)$$

Введем обозначения

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \operatorname{Re} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \operatorname{Re} W_k(j\omega); \quad (1.276)$$

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \operatorname{Im} W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \operatorname{Im} W_k(j\omega). \quad (1.277)$$

Окончательно получим

$$\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [A(\omega) \cos \omega\tau_m - B(\omega) \sin \omega\tau_m]; \quad (1.278)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [B(\omega) \cos \omega \tau_m - A(\omega) \sin \omega \tau_m] \quad (1.279)$$

В таблицах 1.32. – 1.34 для различных ортогональных базисов приведены выражения для  $\operatorname{Re} W_k(j\omega)$  и  $\operatorname{Im} W_k(j\omega)$ .

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье  
ортогональных функций

Таблица 1.32

№	Орт. базис	$\operatorname{Re} W_k(j\omega)$	$\operatorname{Im} W_k(j\omega)$
1	Лагерра	$\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi$	$-\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \sin(2k+1)\varphi$
2	Лежандра	$\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
3	Дирихле	$\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье  
ортогональных функций Якоби

Таблица 1.33

Якоби	$\operatorname{Re} W_k(j\omega)$	$\operatorname{Im} W_k(j\omega)$
(-1/2, 0)	$\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
(1/2, 0)	$\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
(1, 0)	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
(2, 0)	$\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$

Таблица 1.34

Орт. базис	$\operatorname{Re} W_k(j\omega)$	$\operatorname{Im} W_k(j\omega)$
Сонина-Лагерра (1)	$\frac{1}{\gamma(k+1)} \left( 1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi_k] \right)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)} \left( (-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi_k] \right)$
Сонина-Лагерра (2)	$\frac{2}{\gamma(k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi_k]}{2 \cos \varphi_k} + k+1 \right)$	$\frac{2}{\gamma(k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi_k]}{2 \cos \varphi_k} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{2} \right)$
Якоби (0, 1)	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}$
Якоби (0, 2)	$\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$	$-\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}$

Отметим, что при построении ортогональной модели взаимной спектральной плотности мощности по параметрам ортогональной модели взаимной корреляционной функции при аппроксимации корреляционной функции возможно применение различных ортогональных базисов при аппроксимации левой и правой ветвей взаимной корреляционной функции.

На рисунках 1.25 приведены результаты построения взаимной спектральной плотности мощности с помощью аппроксимирующих выражений Лагерра в сравнении с результатами аппроксимации функциями заданного вида [20].

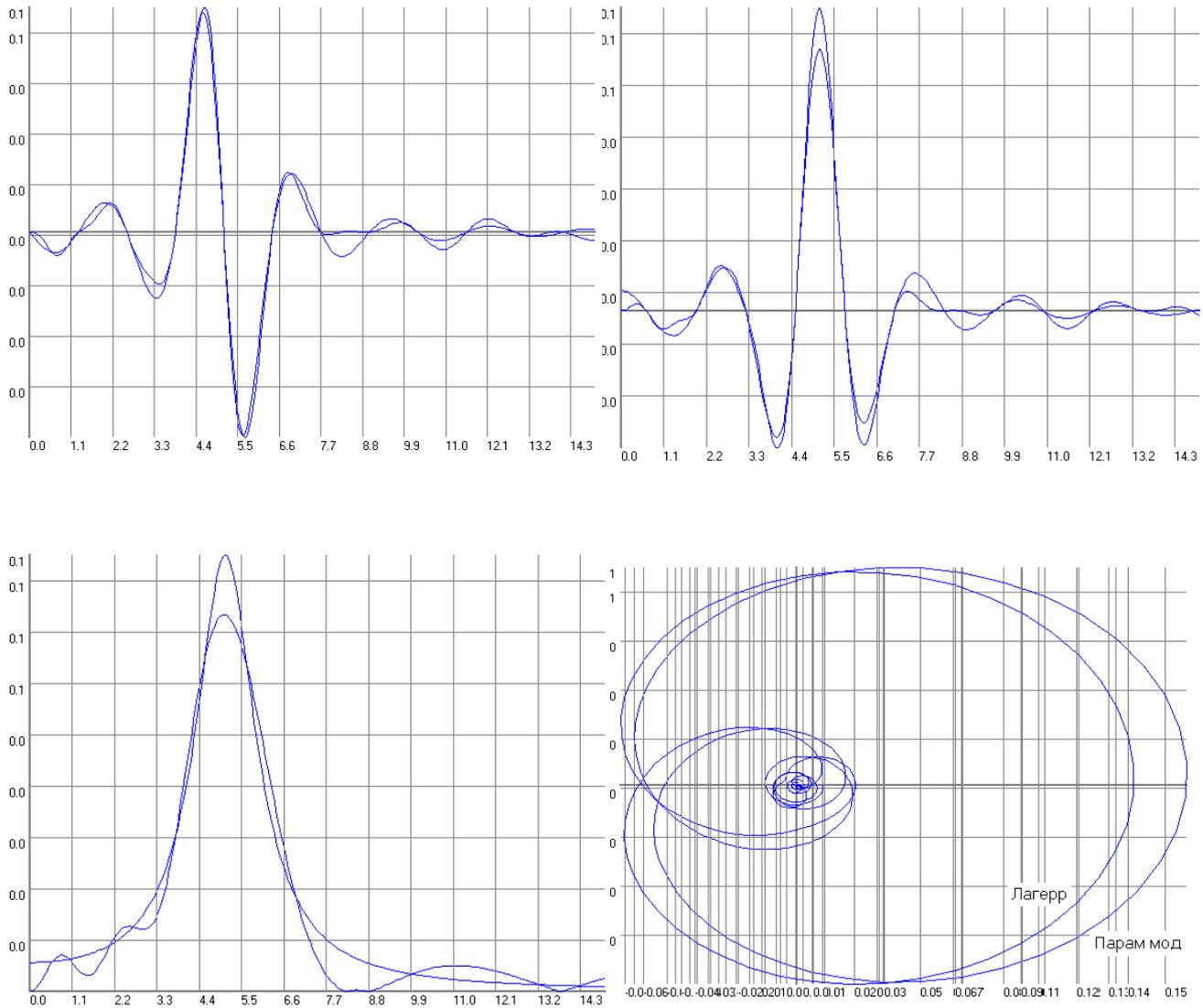


Рисунок 1.25 - Вещественная, мнимая части, модуль и спектральная плотность мощности

При построении спектра с большим значением  $\tau_m$ , необходимо правильно выбирать значение интервала дискретизации спектра  $\Delta\omega$ . В противном случае будет проявляться эффект наложения частот. Рекомендуемое значение интервала дискретизации, определяемое для восстановления  $\cos\omega\tau_m$

$$\Delta\omega \leq \frac{0,2 \div 0,4}{\tau_m} \quad (1.280)$$

Рисунок 1.26 иллюстрирует эту ситуацию.

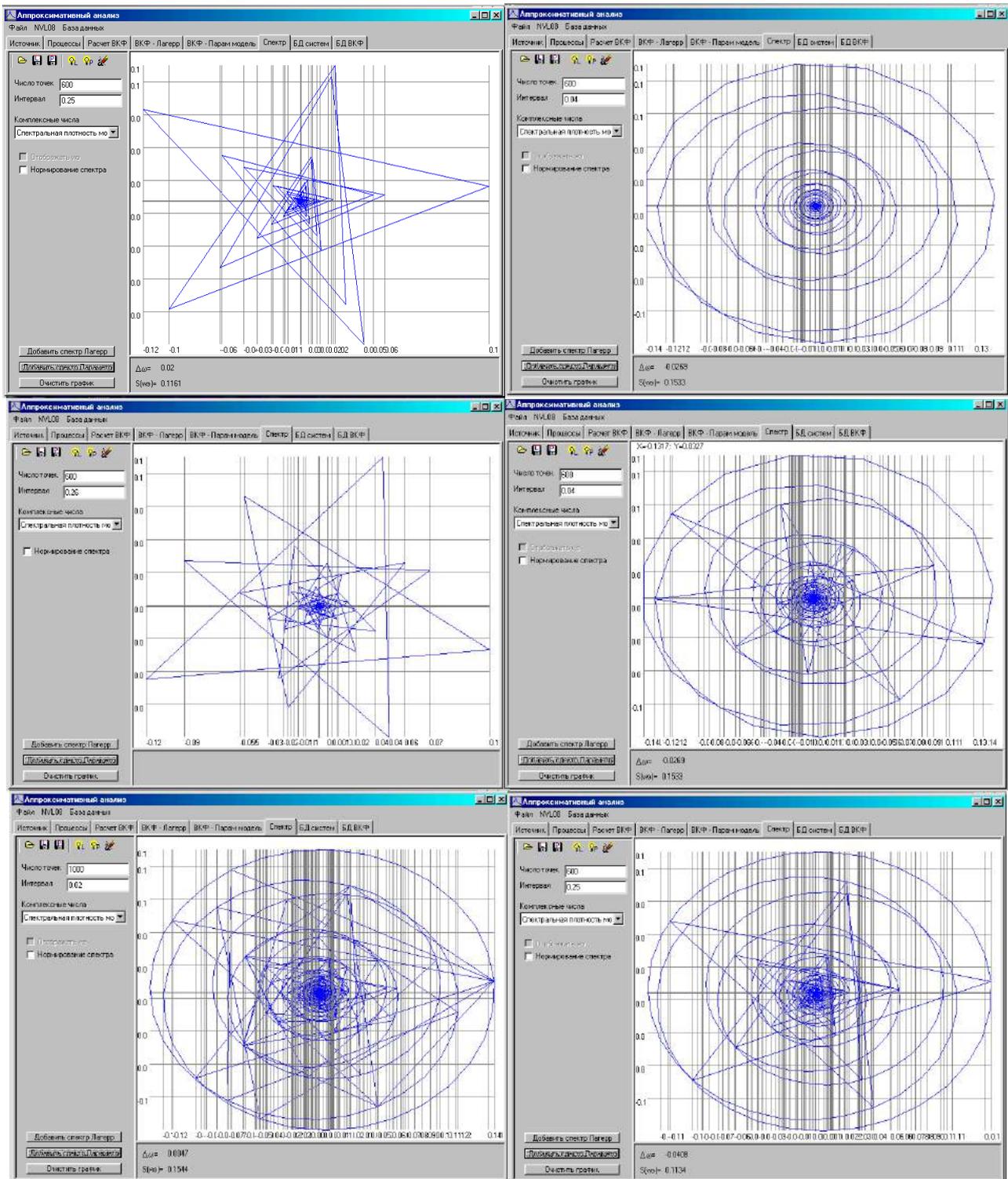


Рисунок 1.26 - Взаимные спектральные плотности мощности при разных значениях интервала дискретизации для  $\rho_{xy}(\tau) = \exp(-|\tau - 10|)\cos 5(\tau - 10)$

### 1.13. Аппроксимация спектральных плотностей мощности ортогональными функциями

Другой способ построения ортогональной модели спектральной плотности мощности заключается в аппроксимации спектральной плотности мощности в каком либо базисе  $\{\psi_k(\omega, \alpha)\}_{k=0, \dots, m}$ . При этом, учитывая четность спектральной плотности мощности, необходимо выбором параметров модели гарантировать выполнения условия нормировки [20]

$$\int_0^{\infty} S_{a_n}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\omega, \alpha) d\omega = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) = 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (1.281)$$

Однако, в общем случае условие (1.281) не выполняется.

Для выполнения свойства (1.281), представим модель в виде

$$S_{a_n}(\omega) = \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha). \quad (1.282)$$

при условии, что

$$2 \sum_{k=0}^m c_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (1.282)$$

Запишем выражение для оценки погрешности с учетом условия (1.282)

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \left[ S_{x_n}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega + 2\lambda \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = \min. \quad (1.283)$$

Для определения значения параметров  $c_n$  найдем

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial c_n} = -2 \int_0^{\infty} \left[ S_{x_n}(x) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right] \psi_n(\omega, \alpha) d\omega + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (1.284)$$

С учетом свойств ортогональных функций выражение (1.284) приведем к виду

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2c_n \|\psi_n\|^2 + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (1.285)$$

Отсюда

$$c_n = \beta_n - \lambda [-\psi_n(0, \alpha)]^n. \quad (1.286)$$

С учетом (13.3) выражение для определения  $\lambda$  равно

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k - 1/4}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (1.287)$$

Подставив выражение (1.286) в выражение (1.285), окончательно получим

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2} \right] [-\psi_n(0, \alpha)]^n = \beta_n + \zeta_n. \quad (1.288)$$

$$= \beta_n + \zeta_n.$$

Так для ортогональных функций Лагерра с учетом их свойств

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k - \alpha/4}{m+1}, \quad (1.289)$$

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{\alpha/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n. \quad (1.290)$$

На рис. 1.27 приведен пример аппроксимации вещественной части СПМ (для АКФ вещественная часть совпадает со спектральной плотностью мощности)  $\rho_{x5}(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|)\cos\omega_0\tau$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ .

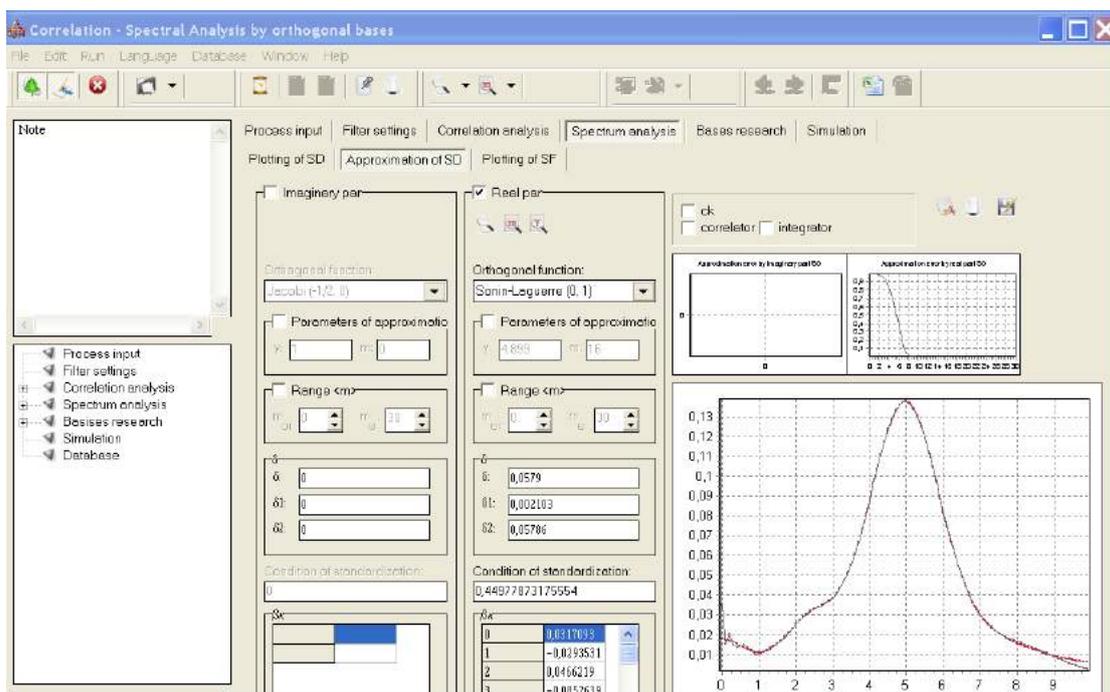


Рисунок 1.27 - Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями Лагерра,  $\alpha = 4,899$ ,  $m = 16$

Пример коэффициентов разложения в ортогональном базисе Лагерра для рассматриваемого примера приведены в таблице 1.35.

Таблица 1.35

$k$	$\beta_k$
0	0,0317
1	0,0293
2	0,0466
3	0,0852
...	...
...	...
15	0,0063
16	0,0067

Выражения для оценки корректирующих коэффициентов  $\zeta_n$  для других ортогональных базисов представлены в таблице 1.36.

### Корректирующие коэффициенты

Таблица 1.36

Ортогональный базис	$\zeta_n$
Лагерра	$\left[ \frac{\alpha/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n$
Лежандра	$\frac{\alpha/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
Дирихле	$\left[ \frac{\alpha/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}} \right] (-1)^n$
Якоби $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\gamma/4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1}}$
Якоби $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\gamma/4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+3}}$
Якоби $(1, 0)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}}$
Якоби $(0, 0)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
Якоби $(2, 0)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+3}}$

Определим погрешность аппроксимации  $\Delta_1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[ S_{xH}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \cdot \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega = \\ &= \int_0^\infty S_{xH}(\omega) - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \zeta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (1.291)$$

Представим погрешности аппроксимации СПМ в виде:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (1.292)$$

где  $\Delta_2$  составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (1.281).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \int_0^\infty S_{xH}(\omega) d\omega - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m \zeta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (1.293)$$

Вторую составляющую погрешности  $\Delta_2$  удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[ 1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \right]^2}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (1.294)$$

В таблице 1.37 приведены выражения для оценки  $\Delta_2$  для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Таблица 1.37

Ортогональный базис	$\Delta_2$
Лагерра	$\frac{\left[ 1/4 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]^2}{(m+1)/\alpha}$
Сонина-Лагерра (1)	$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\left[ \frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
Сонина-Лагерра (2)	$\frac{4}{\gamma^3} \frac{\left[ \frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)}}$

Лежандра	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)}}$
Дирихле	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
Якоби (0,1)	$\frac{1}{4\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)^2}\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
Якоби (0,2)	$\frac{2}{\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2}\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^4 (2k+3)}{(k+1)^2 (k+2)^2}}$
Якоби $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+1)}\right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+1)}}$
Якоби $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+3)}\right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+3)}}$
Якоби (1,0)	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
Якоби (2,0)	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+3)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+3)}}$

Аналогично может быть решена задача аппроксимации вещественной и мнимой частей взаимного спектра, по которым можно построить как ортогональную модель взаимного спектра, так и - взаимной корреляционной функции [25].

Обозначим

$$S_{xy}(j\omega) = \operatorname{Re} S_{xy}(j\omega) - j \operatorname{Im} S_{xy}(j\omega). \quad (1.295)$$

При использовании в качестве аппроксимирующих функций ортогональные функции  $\psi_k(\omega, \alpha_{\operatorname{Re}})$  и  $\psi_k(\omega, \alpha_{\operatorname{Im}})$  получим:

$$\operatorname{Re} S_{xy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{\operatorname{Re}}} \beta_{k \operatorname{Re}} \psi_k(\omega, \alpha_{\operatorname{Re}}); \quad (1.296)$$

$$\operatorname{Im} S_{xy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{\operatorname{Im}}} \beta_{k \operatorname{Im}} \psi_k(\omega, \alpha_{\operatorname{Im}}). \quad (1.297)$$

На рис. 1.28 приведены результаты аппроксимации вещественной и мнимой частей спектральной плотности мощности.

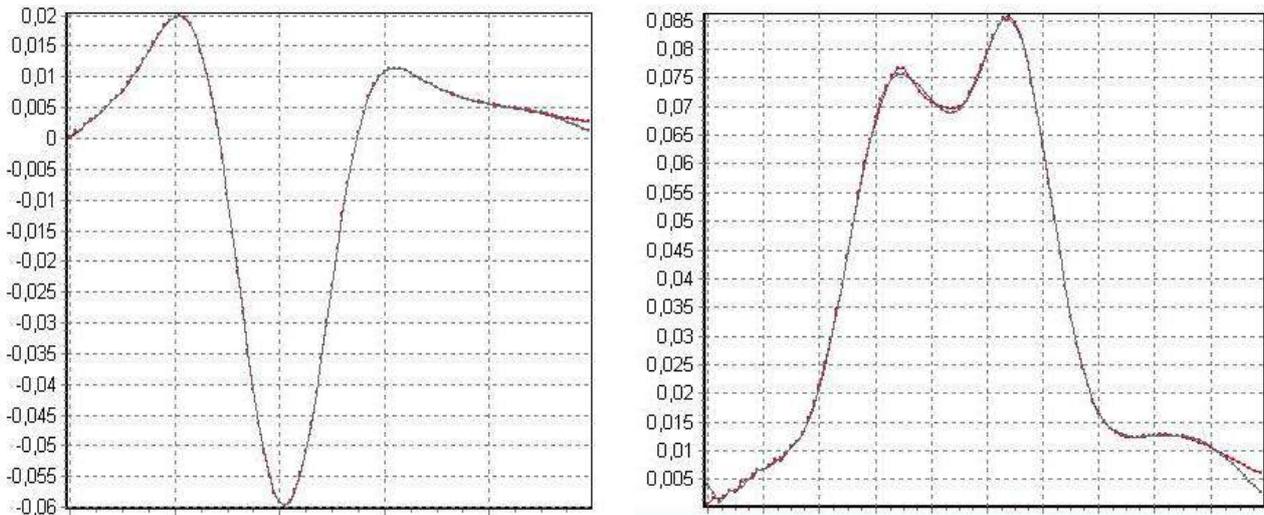


Рисунок 1.28 – Аппроксимация вещественной и мнимой частей спектральной плотности мощности

#### 1.14. Аппроксимация спектральных функций ортогональными функциями

Определим спектральную функцию по аналогии с функцией распределения в виде [25]:

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega. \quad (1.298)$$

Спектральная функция позволяет определить мощность процесса в заданном диапазоне частот  $P(\omega_1, \omega_2) = F_x(\omega_2) - F_x(\omega_1)$ .

Выражения для спектральной плотности мощности типовых моделей КФ, более удобные для нахождения спектральной функции, представлены в таблице 1.38.

Спектральные плотности мощности

Таблица 1.38

№ модели КФ	$S_x(\omega)$	$\varphi$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi$	$\arctg \frac{\omega}{\lambda}$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi (1 \pm \cos 2\varphi)$	
4	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \left[ \cos^2 \varphi (1 + \cos 2\varphi) + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \cos 3\varphi \right]$	
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\lambda\pi} (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2)$	$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega + \omega_0}{\lambda}$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2}{\lambda} \pm \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2\omega_0} \right)$	$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\lambda}$

Спектральные функции для типовых моделей КФ с учетом принятых обозначений представлены в таблице 1.39.

Спектральные функции

Таблица 1.39

№ модели КФ	$F_x(\omega)$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \varphi$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left( \varphi \pm \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)$
4	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left( \varphi + \frac{2 \sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{12} \right)$
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} (\varphi_1 + \varphi_2)$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left( \varphi_1 + \varphi_2 \mp \frac{\lambda}{\omega_0} (\ln  \cos \varphi_1  - \ln  \cos \varphi_2 ) \right)$

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [20]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (1.299)$$

где  $\sum_{k=0}^m b_k = 1$ ;

$$\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}, \quad (1.300)$$

получим

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\omega} \cos\varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (1.301)$$

Из выражения (1.300), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos\varphi} d\varphi, \quad (1.302)$$

откуда

$$J = \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi, & \text{если } k = 0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (1.303)$$

Подставив (1.303) в (1.302), получим

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \varphi + 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi}{2s} \right]. \quad (1.304)$$

Отметим, что при  $\varphi = 0$   $F_x(\omega) = 0$ , а при,  $\varphi = \pi/2$ ,  $F_x(\omega) = \sigma_x^2$ .

Результаты определения функции спектра для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра приведены на рис. 1.29 ( $\sigma_x^2 = 1$ ).

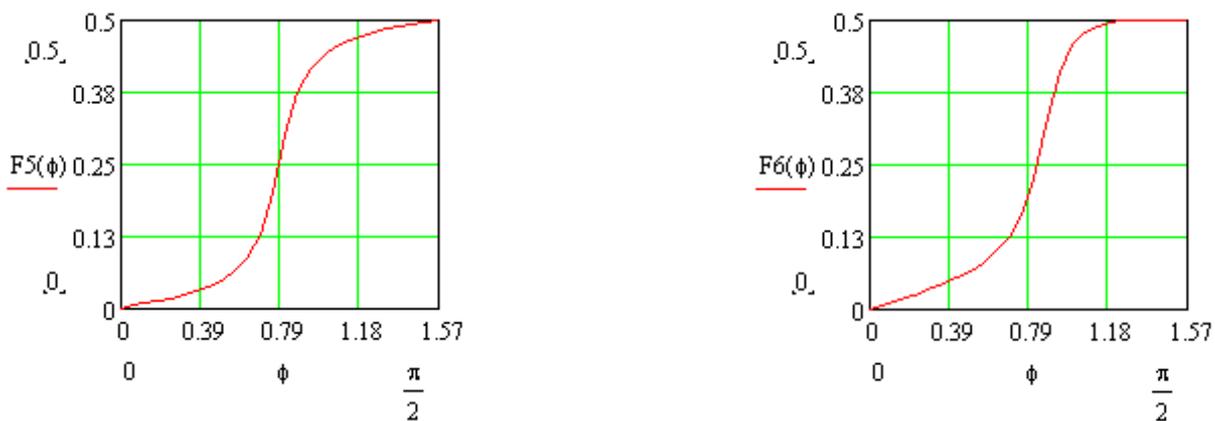


Рисунок 1.29 - Спектральные функции для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра

Следует отметить, что спектральную функцию для других ортогональных базисов, воспользовавшись определением спектральной плотности мощности в виде

(1.304), определить невозможно. Это объясняется тем, что в отличие от ортогональных функций Лагерра у других ортогональных функций экспоненциального типа норма не постоянна, а зависит от порядка функции.

Для определения ортогональных моделей спектральной функции воспользуемся другим представлением спектральной плотности мощности. Так как

$$S_a(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega), \quad (1.305)$$

а для ортогональных функций экспоненциального типа

$$\operatorname{Re} W_k(j\omega) = \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1/2 \|\psi_s\|^2}{1/4 \|\psi_s\|^4 + \omega^2}, \quad (1.306)$$

выражения для ортогональных моделей спектральной плотности мощности представим в виде (см. таблицу 1.40).

### Спектральные плотности мощности

Таблица 1.40

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$S_x(\omega)$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{\alpha^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2(s+1)^2 + \omega^2}$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma(4s+1)/2}{\gamma^2(4s+1)^2 / 4 + \omega^2}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma(4s+3)/2}{\gamma^2(4s+3)^2 / 4 + \omega^2}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{\gamma^2(s+1)^2 + \omega^2}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{\gamma^2(2s+3)^2 + \omega^2}$

Ниже приведены аналитические выражения спектральных функций для различных представленных базисов.

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$F_x(\omega)$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \arctg \frac{\omega}{\alpha(2s+1)}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \arctg \frac{\omega}{\alpha(s+1)}$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \arctg \frac{2\omega}{\gamma(4s+1)}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \arctg \frac{2\omega}{\gamma(4s+3)}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \arctg \frac{\omega}{\gamma(s+1)}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+3)}$

На рис. 1.30 – приведены результаты определения спектральной функции для  $\rho_{x,5}(\tau)$  в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле ( $\sigma_x^2 = 1$ ).

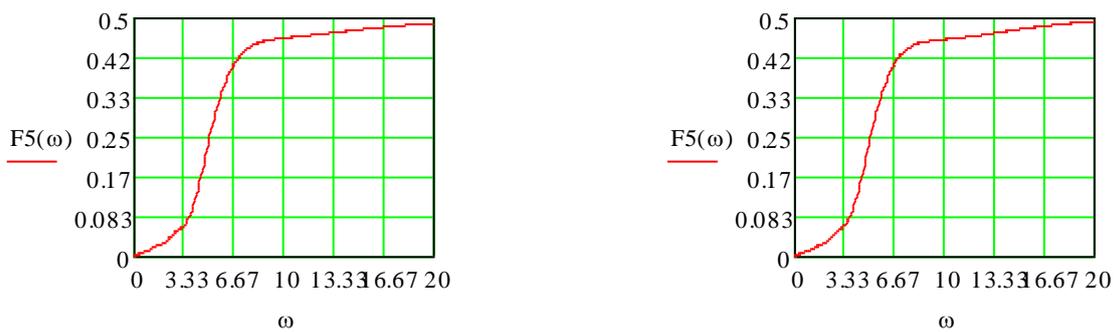


Рисунок 1.30 - Спектральные функции для  $\rho_{x,5}(\tau)$  в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле

## 1.15. Оценка обобщенных корреляционно-спектральных характеристик

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [20, 22, 23, 48, 55]:

- показатель колебательности, равный числу пересечения «нуля» корреляционной функции и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Учитывая важность обобщенных корреляционных характеристик в прикладном анализе случайных процессов, рассмотрим их более подробно.

### 1.15.1. Оценка показателя колебательности

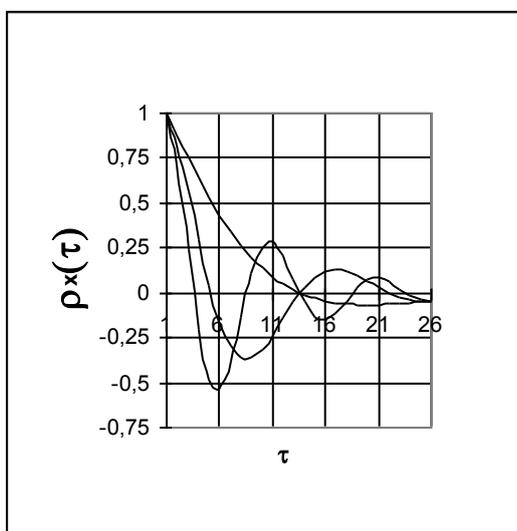


Рисунок 1.31 Корреляционные функции

Рассмотрим колебательную модель корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ . Введем безразмерную величину  $\mu = \omega_0 / \alpha$ , равную отношению частоты колебания корреляционной функции к показателю затухания и характеризующую число пересечений корреляционной функцией «нуля». Эта характеристика называется **показателем колебательности** корреляционной функции. На рис. 1.31 представлены три нормированные корреляционные функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , имеющие показатели колебательности 1, 3, 5 соответственно. Введенный показатель колебательности оказывается очень полезной характеристикой и при исследовании других колебательных моделей корреляционных функций. Показатель колебательности, в общем случае, равен числу пересечения корреляционной функции оси  $\tau$  на максимальном интервале корреляции. Учитывая, что «хвост» корреляционной функции оценивается с большей погрешностью, показатель колебательности целесообразнее определять по фазовым портретам. На рис. 1.32 приведены примеры оценки показателя колебательности для различных колебательных моделей корреляционных

функций. Он равен числу пересечения фазового портрета оси  $\tau$ . Заметим, что для стационарных эргодических процессов  $\rho_x(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Следовательно, фазовый портрет заканчивается в точке с координатами  $(0,0)$ .

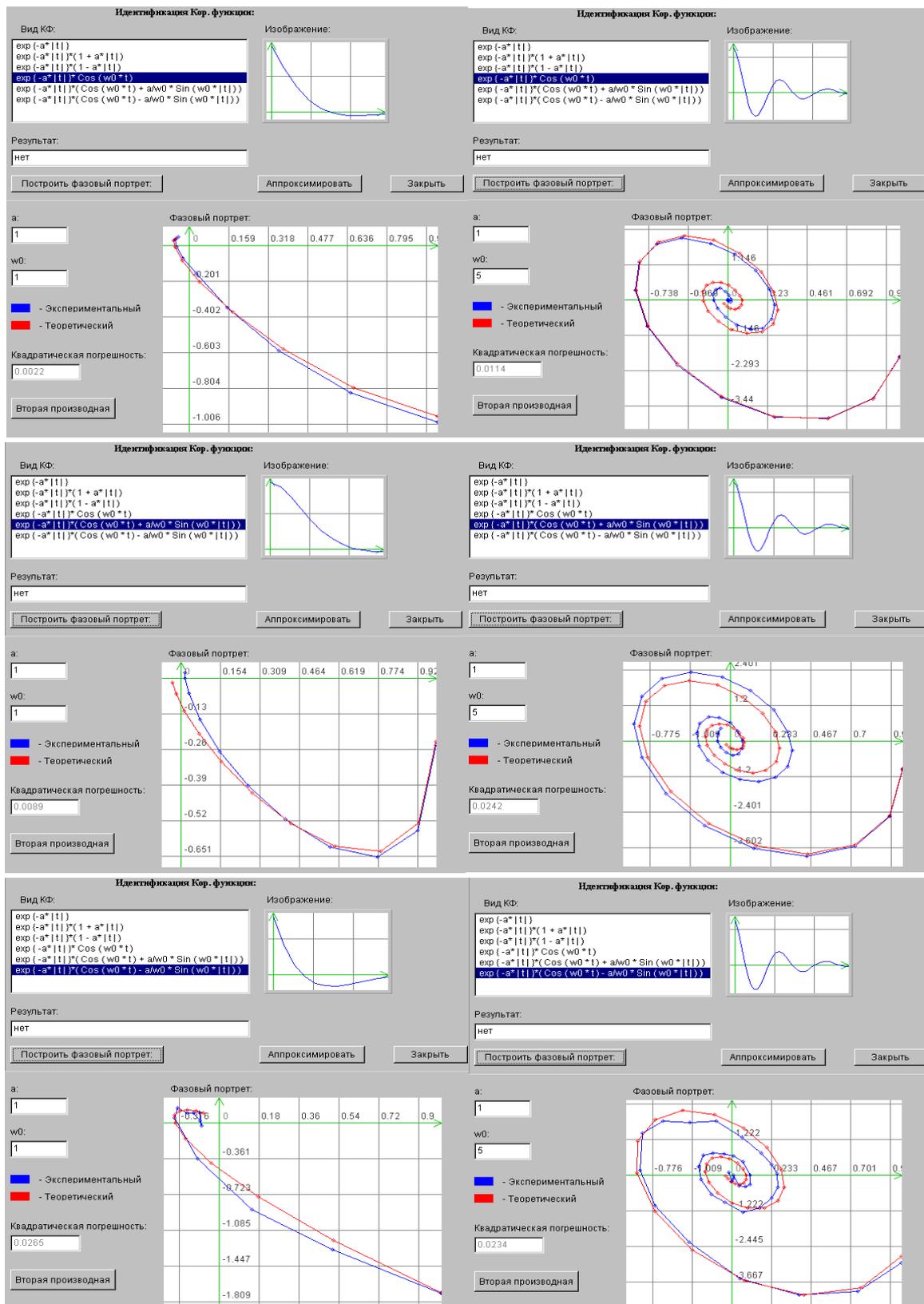


Рисунок 1.32. К определению показателя колебательности

Показатель колебательности входит в аналитические выражения для определения отношения интервалов дискретизации случайных процессов (см. таблицу 1.44), используется при идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции, анализе методических погрешностей оценивания вероятностных характеристик и т.д. [20].

### 1.15.2. Оценка интервалов корреляции

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл - **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции  $\tau_k^{(1)} = \tau_{k \max}$  определяется в результате решения уравнения [20, 22]:

$$|\rho(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta. \quad (1.307)$$

Т.е. под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  и  $-\Delta$ , после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рис. 1.33 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  при  $\alpha=1, \omega_0=5, \Delta=0,05$ .

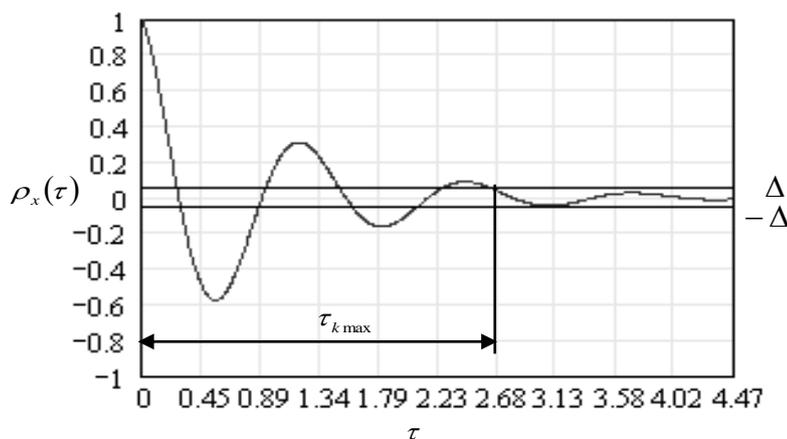


Рисунок 1.33 – Максимальный интервал корреляции

Аналитические выражения  $\tau_{k \max}$  для типовых моделей  $\rho_x(\tau)$  приведены в таблице 1.42.

#### Максимальные интервалы корреляции типовых моделей КФ

Таблица 1.42

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$

5,6,7	$e^{-\alpha \tau }(\cos\omega_0\tau + c\sin\omega_0\tau)$ , где $c = 0, \alpha/\omega_0, -\alpha/\omega_0$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
-------	---	---------------	---------------	------------

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной корреляционной функцией [20, 22]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (1.308)$$

Отметим, что для некоторого класса процессов  $\tau_k^{(2)} = 0$  (например, для колебательных моделей, площадь положительной и отрицательной части которых равна), что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает  $\tau_{k\max} > 0$ . Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции  $\tau_k^{(2)}$  целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка в [49] были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau, \quad (1.309)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (1.309)$$

Анализ выражений (1.308) и (1.309) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение  $\tau_k^{(4)}$ . Поэтому, несмотря на то, что  $\tau_k^{(4)}$  дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем  $\tau_k^{(3)}$ . Значения интервалов корреляции  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.43.

#### Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.43

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau }\cos\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

В таблице 1.44 показано, во сколько раз  $\tau_{k \max}$  больше  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  ( $\Delta = 0,05$ ).

Таблица 1.44

№	Наименование	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	6
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	2,375	3,8
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\infty$	16,56
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2/3)\tau$	2,22	3,38
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$3(1 + \mu^2)$	$\frac{2(1 + \mu^2)}{2 + \mu^2}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$1,5(1 + \mu^2)$	$\frac{12(1 + \mu^2)}{(5 + \mu^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\infty$	12

Отсюда видно, что  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  дают сильно заниженный результат по сравнению  $\tau_{k \max}$ .

Определив параметры модели корреляционной функции в каком-либо ортогональном базисе в виде (1.145) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти аналитические выражения интервалов корреляции, содержащие только параметры модели. Так выражение для интервала корреляции

$$\hat{\tau}_k^{(4)} \equiv \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) d\tau \approx \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (1.310)$$

а выражение для оценки  $\tau_k^{(2)}$  примет вид:

$$\hat{\tau}_k^{(2)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) = 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (1.311)$$

Аналитические выражения  $\tau_k^{(2)}$  для различных ортогональных базисов приведены в таблице 1.45.

Интервалы корреляции в различных ортогональных базисах

Таблица 1.45

№	Ортогональный базис	$\tau_k^{(2)}$
1	Лагерра	$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k$
2	Лежандра	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)}$

3	Дирихле	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}$
4	Якоби (-1/2, 0)	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)}$
5	Якоби (1/2, 0)	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)}$
6	Якоби (1, 0)	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)}$
7	Якоби (2, 0)	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)}$

Конечное число членов разложения ряда (1.311)  $m$  приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{см} = \frac{\hat{\tau}_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (1.312)$$

Так для  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda\tau}$  оценка интервала корреляции в ортогональном базисе Лагерра равна:

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{2}{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \cdot \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k (-1)^k = \frac{1 - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (1.313)$$

Погрешность от смещенности в соответствии с (1.312) примет вид:

$$\gamma_{см} = - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}. \quad (1.314)$$

При произвольном значении  $\alpha$   $\gamma_{см}$  может принимать достаточно большое значение. Определив  $\alpha = 2\lambda$  в результате решения уравнения  $\beta_0 = 1$ , получим  $\gamma_{см} = 0$ .

Решение задачи для колебательной модели корреляционной функции:  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , - показывает, что выражения для оценки погрешности от смещенности для четных  $m = 2n$  и нечетных  $m = 2n + 1$  различны и, кроме того, зависят от показателя колебательности  $\mu$ .

Так для  $m = 2n$

$$\gamma_{..} = (-1)^{n+1} \mu \left( \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}, \quad (1.315)$$

а для  $m = 2n + 1$

$$\gamma_{..} = (-1)^{n+1} \left( \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}. \quad (1.316)$$

Анализ выражений (1.315) и (1.316) показывает, что для повышения точности оценки интервала корреляции целесообразнее выбирать нечетное число членов разложения ряда.

Следует отметить, что при анализе взаимной корреляционной функции интервалы корреляции отдельно определяются для левой и правой ветвей (см. рис. 1.34).

### 1.15.3. Оценка моментов корреляционных функций

Определив начальный момент  $k$ -го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau, \quad (1.317)$$

Знание моментов позволяет решать задачи идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции и ввести ещё одно определение длительности существования корреляционной функции (Стратонович Р.Л.) [49]:

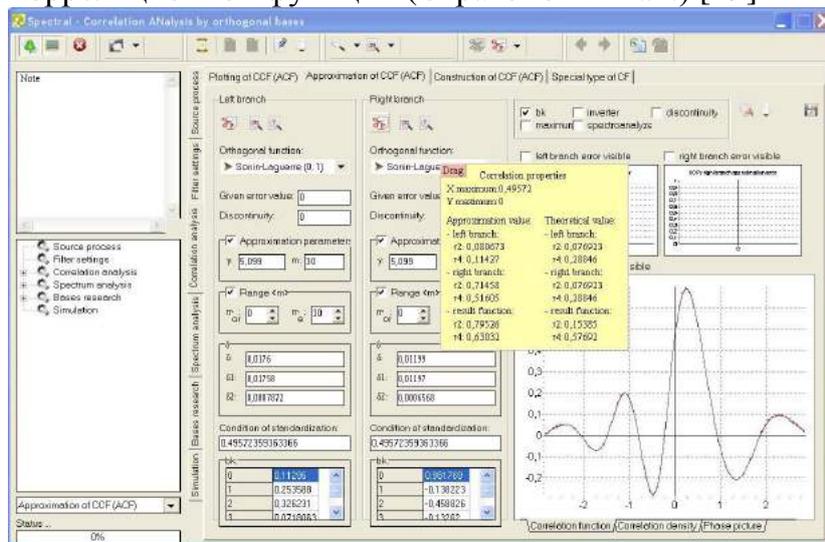


Рисунок 1.34 - Оценка интервалов корреляции ВКФ

$$\tau_k^{(5)} = \mu_1 / \mu_0. \quad (1.318)$$

Значение моментов для типовых моделей корреляционных функций приведено в таблице 1.46.

Таблица 1.46

№	Наименование	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6 \frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6 \frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6 \frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

Можно показать, что при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра [21, 22]

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (1.319)$$

Рекомендации по выбору параметров модели  $\alpha$ ,  $m$  и  $\beta_k$  аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$ . Выражения для первых четырёх моментов представлены в таблице 1.47.

К определению моментов корреляционной функции

Таблица 1.47

$\mu_n$	$\varphi_n(\alpha)$	$c_{nk}$
$\mu_0$	$2/\alpha$	1
$\mu_1$	$4/\alpha^2$	$1+2k$
$\mu_2$	$16\alpha^3$	$1+2k+2k^2$
$\mu_3$	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

С учетом (1.317) выражения для корреляционных моментов в ортогональном базисе Лежандра и Дирихле равны

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \frac{(-1)^s}{(2s+1)^{n+1}}. \quad (1.320)$$

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \frac{(-1)^s}{(s+1)^{n+1}}. \quad (1.321)$$

#### 1.15.4. Оценка эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [21, 22]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (1.322)$$

где  $\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}$ , (1.323)

и определим эквивалентную ширину спектра мощности для более общего случая, когда основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности  $\omega_0$ , а не в нуле (см. рис. 1.35).

В этом случае

$$\Delta\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega_0 / 2. \quad (1.324)$$

С учетом выражений (1.322) и (1.323) определим

$$J = \int_{\omega_0}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\omega_0}^{\infty} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (1.325)$$

Из выражения (1.323), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

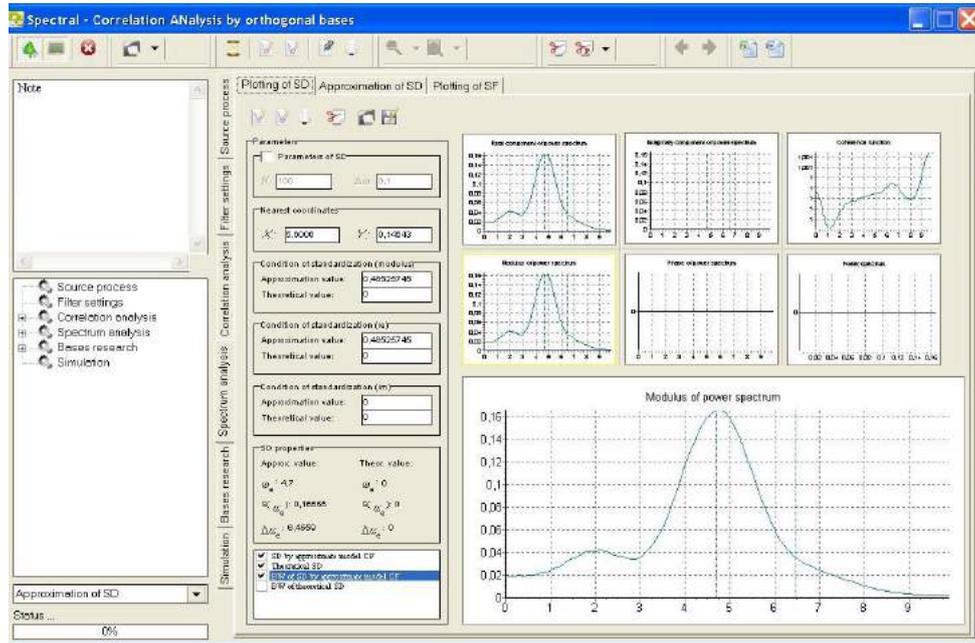


Рисунок 1.35 – Эквивалентная ширина спектра мощности для 6 модели

Следовательно,

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\varphi_3}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (1.326)$$

где  $\varphi_3 = \arctg \frac{2\omega_3}{\alpha}$ .

В соответствии с 2.539.7 [5]

$$J1_k = \int \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi + c, & \text{если } k = 0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi + c, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (1.327)$$

Подставив пределы интегрирования, получим

$$J2_k = \int_{\omega_3}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \pi/2 - \varphi_3, & \text{если } k = 0; \\ (-1)^k \pi/2 - 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi_3}{2s} - (-1)^k \varphi_3, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (1.328)$$

Подставив  $J2$  в  $J$ , получим

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_3 - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_3}{2s} \right]. \quad (1.329)$$

Тогда выражение для определения эквивалентной ширины спектра мощности примет вид

$$\Delta\omega_3 = \omega_3 + \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_3)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_3 - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_3}{2s} \right]. \quad (1.330)$$

Для других ортогональных базисов, представив модель спектральной плотности мощности в виде (см. таблицу 1.29) и выполнив необходимые преобразования, получим выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности

$$\Delta\omega_3 = \omega_3 + \frac{\sigma_x^2}{S_x(\omega_3)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \psi_k(0, \alpha/\gamma)^k - \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^k A_{k,s} \arctg 2\omega_3 \|\psi_s\|^2 \right] \right\}. \quad (1.331)$$

Принятые обозначения для выражения (1.331) представлены в таблице 1.48.

Таблица 1.48

№	$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$A_{k,s}$	$\arctg 2\omega_3 \ \psi_s\ ^2$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_3}{\alpha(2s+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s}$	$\arctg \frac{\omega_3}{\alpha(s+1)}$
4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_3}{\gamma(4s+1)}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_3}{\gamma(4s+3)}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_3}{\alpha(s+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_3}{\alpha(2s+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_3}{\alpha(2s+3)}$

Отметим, что для широкополосных процессов с учетом соотношения неопределенности [20, 49]

$$\Delta\omega_3 \tau_k^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad (1.332)$$

и выражения для определения интервала корреляции

$$\tau_k^{(2)} = 2 \sum_{k=0}^m b_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \quad (1.333)$$

можно получить более простое выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности в различных ортогональных базисах

$$\Delta\omega_3 = \frac{\pi}{4 \sum_{k=0}^m b_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}. \quad (1.334)$$

Отметим, что эквивалентную ширину спектра мощности случайного процесса можно получить, воспользовавшись аппроксимацией спектральной плотности мощности в ортогональных базисах в виде

$$S_x(\tau) = S_x(\omega_3) \left( \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\omega - \omega_3) \psi_k(\omega - \omega_3, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\omega_3 - \omega) \psi_k(\omega_3 - \omega, \alpha_n) \right), \quad (1.335)$$

где  $\omega_3$  - частота соответствующая последнему максимуму спектральной плотности мощности. По аналогии с определением интервала корреляции  $\tau_k^{(2)}$ , окончательно получим

$$\Delta\omega_3 = \omega_3 + 2\sum_{k=0}^m b_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k. \quad (1.336)$$

В Приложении 9 приведены спектральные характеристики для различных моделей.

Еще один способ определения эквивалентной ширины спектра мощности связан с использованием спектральной функции (см. рис. 1.36, раздел 1.15)

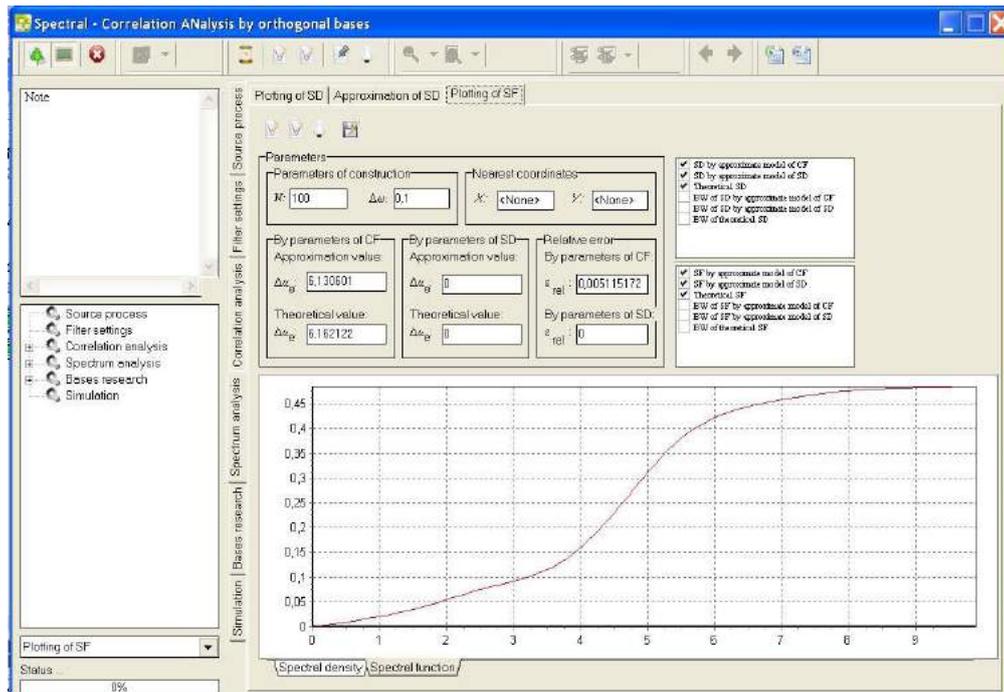


Рисунок 1.36 - Определение эквивалентной ширины спектра мощности по спектральной функции

### 1.15.5. Оценка обобщенных характеристик взаимной корреляционной функции

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$ ; (1.337)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$ ; (1.338)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$ ; (1.339)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$ ; (1.340)

- моменты корреляционных функций  $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$ . (1.341)

## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ В СИСТЕМЕ MATHCAD

### 2.1. Исследование свойств ортогональных полиномов во временной области

**Цель работы:** изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

#### 2.1.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.1 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.1.

#### 2.1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Представление ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка:
  - 1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига (если есть) и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков;
  - 1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Сравнить результат с пунктом 1.1.
2. Определить интервал ортогональности  $[a, b]$ . Рассчитать ортогональные полиномы  $k$  - ого порядка на концах интервала ортогональности.
3. Определение нормы ортогональных полиномов:
  - 3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1.22). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$ .
  - 3.2. Определить значения нормы ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице 1.2. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы  $(k, m)$ , полученной в пункте 3.1.
4. Проверить выполняемость 1 – ого условия ортогональности.
5. Проверить выполняемость 2 – ого условия ортогональности.
6. Оформить отчет.

#### 2.1.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Аналитические выражения и графики ортогональных полиномов первых шести порядков заданного ортогонального базиса (пункт 1.1 и пункт 1.2) в полученном интервале ортогональности (пункт 2).
6. Матрицу значений нормы ортогональных полиномов с разрядностью  $(k, m)$  и соответствующую ей графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$  (пункт 3.1).
7. Вектор значений нормы ортогональных полиномов (пункт 3.2).

8. График, иллюстрирующий проверку 1 – ого условия ортогональности (пункт 4).
  9. График, иллюстрирующий проверку 2 – ого условия ортогональности (пункт 5).
  10. Выводы.
- Пример выполнения задания 1 приведен в Приложении 10.

#### 2.1.4. Контрольные вопросы

1. Что называют интервалом ортогональности ортогональных многочленов? От чего зависит его значение?
2. Что такое весовая функция и как она влияет на поведение ортогонального многочлена?
3. Чем ортогональная линейно независимая система функций отличается от линейно независимой системы функций? Что понимают под матрицей ортогонализации?
4. Что такое ортогональный многочлен и каковы его основные характеристики?
5. Сформулируйте 1 – ое и 2 – ое условия ортогональности. О чем говорит их выполнимость?

### 2.2. Исследование свойств ортогональных функций во временной области

**Цель работы:** исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

#### 2.2.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.2 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.2.

#### 2.2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получение ортогональных функций  $k$  - ого порядка:
  - 1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка путем введения соответствующей замены, приведенной в таблице 2.1, и использования выражения (2.4). Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков.
  - 1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в таблице 2.1. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Полученный результат сравнить с пунктом 1.1.
2. Рассчитать значения ортогональных функций  $k$  - ого порядка в «нуле».
3. Определение нормы ортогональных функций:
  - 3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (2.5). Результат представить в виде матрицы значений с размерностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$ .

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций  $k$ -ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице 2.1. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы  $(k, m)$ , полученной в пункте 3.1.

4. Рассчитать длительности, используя выражения (2.6) и (2.7). Построить графические зависимости  $\tau_{k,u}^{(2)}$  и  $\tau_{k,u}^{(4)}$  ортогональных функций  $k$ -ого порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость длительности от порядка и параметра масштаба для каждого из выражений.

5. Оформить отчет.

### 2.2.3. Содержание отчета

11. Цель работы.
  12. Задание.
  13. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  14. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  15. Аналитические выражения и графики ортогональных функций первых шести порядков заданного ортогонального базиса (пункт 1.1 и пункт 1.2).
  16. Матрицу значений нормы ортогональных функций с разрядностью  $(k, m)$  и соответствующую ей графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$  (пункт 3.1).
  17. Вектор значений нормы ортогональных функций (пункт 3.2).
  18. Графические зависимости  $\tau_{k,u}^{(2)}(\gamma)$  и  $\tau_{k,u}^{(4)}(\gamma)$  ортогональных функций  $k$ -ого порядка.
  19. Двумерные графические зависимости  $\tau_u^{(2)}(k, \gamma)$  и  $\tau_u^{(4)}(k, \gamma)$ .
  20. Выводы.
- Пример выполнения задания 2 приведен в Приложении 11.

### 2.2.4. Контрольные вопросы

1. Почему при решении ряда прикладных задач ортогональные полиномы предпочитают ортогональным функциям?
2. При решении каких задач целесообразно использовать ортогональные полиномы, ортогональные функции?
3. Что дает получение ортогонального многочлена с единичной весовой функцией?
4. Для каких целей вводят параметр масштаба ортогональных функций? Какие значения он может принимать?
5. Что понимают под длительностью ортогональной функции, и какой смысл она имеет?
6. Чем отличаются два введенных определения длительности? Для чего введено второе определение, и в каких случаях целесообразнее использовать данное определение?
7. О чем говорит полученная двумерная зависимость?

## 2.3. Дискретизация ортогональных функций

**Цель работы:** изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

### 2.3.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.3 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.3.

### 2.3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать вид ортогональной функции.
2. Задать порядок ортогональной функции.
3. Задать значение параметра масштаба.
4. Задать погрешность приближения  $\delta = 0,02; 0,05; 0,1$ .
5. Построить график ортогональной функции.
6. На основании графика приблизительно определить интервал, внутри которого находится значение  $\tau_{k\max}$  для данной функции и заданном значении погрешности приближения.
7. Получить на основании общей формулы ортогональных функции частные формулы функции, ее первой, второй и третьей производных.
8. Вычислить максимум второй производной.
9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.
10. Определить максимальную длительность ортогональной функции.
11. Вычислить количество интервалов дискретизации.
12. Занести все полученные значения (максимум второй производной, длительность функции, интервал дискретизации, число интервалов дискретизации) в таблицу.
13. Повторить пункты 4-12 для каждого из заданных значений погрешности приближения.
14. Повторить пункты 3-13 для каждого заданного значения параметра масштаба.
15. Повторить пункты 2-14 для каждого заданного порядка ортогональных функций.
16. Построить зависимость  $\tau_{k\max} = f_1(k/\alpha)$ .
17. Построить зависимость  $\tau_{k\max} = f_2(\alpha/k)$ .
18. Построить зависимость  $\Delta t = f_3(k/\alpha)$ .
19. Оформить отчет.

### 2.3.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Метод и алгоритм нахождения интервала дискретизации и длительности функции.
  6. Графики заданных ортогональных функций.
  7. Формулы заданных ортогональных функций и их трех первых производных.
  8. Выводы.
- Пример выполнения задания 3 приведен в Приложении 12.

### 2.3.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл длительности ортогональной функции?
2. Какой информацией необходимо располагать для определения интервала дискретизации ортогональных функций?
3. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением её порядка?
4. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением параметра масштаба?
5. Как изменяется число интервалов дискретизации с увеличением погрешности восстановления?

## 2.4. Частотные характеристики ортогональных функций

**Цель работы:** исследование частотных характеристик ортогональных функций.

### 2.4.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.4 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.4.

### 2.4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданных систем ортогональных функций для  $m=0-4$  и  $\alpha = const$  построить частотные характеристики и их составляющие: вещественную, мнимую, модуль и фазу, например, для моделей 1, 4 - 10 - соответствующие выражениям (4.4) - (4.8).
2. Для заданных систем ортогональных функций и  $\alpha/\gamma = const$  построить  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m/\alpha)$  для  $m=0-4$ .
3. Для заданных систем ортогональных функций и  $m = const$  построить  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(\alpha/m)$ .
4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.
5. Оформить отчет.

### 2.4.3. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Графические зависимости  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m/\alpha)$  для  $m=0-4$ .
  6. Графические зависимости  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(\alpha/m)$ .
  7. Графические зависимости полосы пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.
  8. Выводы.
- Пример выполнения задания 4 приведен в Приложении 13.

#### 2.4.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл полосы пропускания ортогонального фильтра?
2. Для какой ортогональной системы функций полоса пропускания не зависит от порядка функций?
3. Что такое соотношение неопределенности для ортогонального фильтра?
4. Как определить порядок ортогональной функции по виду вещественной частотной характеристики?
5. Чем различаются частотные характеристики ортогональных функций и ортогонального фильтра? В чем их физический смысл?

### 2.5. Ортогональные модели корреляционных функций

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

#### 2.5.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.5 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.5.

#### 2.5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ . Построить графическую зависимость  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ .

2. Построить зависимость  $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu) = \sqrt{\frac{\Delta(m/\chi, \mu)}{\int_0^\infty \rho_x^2(\tau)\mu(\tau)d\tau}}$ . Значение пара-

метра  $\chi$  выбрать произвольно,  $\mu=0 \div 5$ . Убедиться в справедливости равенства Парсеваля (см. лаб. работу 1).

3. Построить зависимость  $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$ ,  $m=2 \div 6$ ,  $\mu=0 \div 5$  (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.9). Определить количество локальных

минимумов  $\delta(\chi/t, \mu)$ , их численные значения  $\bar{\chi}_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

4. Построить зависимость  $\delta_{min}^{(3)}(\mu/t, \chi_{opt})$  и  $\delta_{min}^{(1)}(t/\mu, \chi_{opt})$ .
5. Сравнить результаты оценки  $\delta_1^{(3)}(\mu/t, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(3)}(\mu/t, \chi_2)$ ,  $\delta_1^{(1)}(t/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(1)}(t/\mu, \chi_2)$  с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра  $\chi_1$  определяется по таблице 5.10-5.13, а  $\chi_2$  - по таблицам 5.13-5.14.
6. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 5.16, для  $\lambda = 1, \mu = 5, \chi_1, \chi_2, \chi_{opt}, t = 5, 10$ .
7. Оформить отчет.

### 2.5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
  6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ .
  7. Аналитические выражения для оценки  $\chi_1$  и  $\chi_2$ .
  8. Графические зависимости  $\delta^{(1)}(t/\chi, \mu)$  (пункт 2).
  9. Графические зависимости  $\delta^{(2)}(\chi/t, \mu)$  (пункт 3).
  10. Графические зависимости  $\delta_{min}^{(3)}(\mu/t, \chi_{opt})$  и  $\delta_{min}^{(1)}(t/\mu, \chi_{opt})$  (пункт 4).
  11. Графические зависимости  $\delta_1^{(3)}(\mu/t, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(3)}(\mu/t, \chi_2)$ ,  $\delta_1^{(1)}(t/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(1)}(t/\mu, \chi_2)$  (пункт 5).
  12. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
  13. Выводы.
- Пример выполнения задания 5 приведен в Приложении 14.

### 2.5.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции?
2. Как параметры ортогональной модели влияют на вид оцениваемой корреляционной функции?
3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с  $t$  и  $\mu$ ?
4. Какое условие положено в основу приближенного определения параметра масштаба?
5. Каким образом изменится длительность ортогональной функции при увеличении параметра масштаба?

6. Как изменится численное значение параметра масштаба при увеличении числа членов разложения ряда?
7. Как изменится численное значение параметра масштаба при увеличении показателя колебательности корреляционной функции?

## 2.6. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями с учетом условия нормировки

**Цель работы:** изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями с учетом условия нормировки.

### 2.6.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.6 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.6.

### 2.6.2. Задание на самостоятельную работу

8. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  и  $m$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ . Параметр  $\alpha$  задать произвольно. Построить графическую зависимость  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ .

9. Построить зависимость  $\delta_b^{(2)}(\chi/m, \mu)$ ,  $m = 2 \div 6$ ,  $\mu = 0 \div 5$  (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.6). Определить количество локальных минимумов  $\delta_b^{(2)}(\chi/m, \mu)$ , численные значения параметров  $\bar{\chi}_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

10. Построить зависимости  $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{b,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$  и сравнить их с соответствующими зависимостями  $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\beta,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$ .

11. Сравнить результаты оценки  $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_{b,1}^{(2)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(2)}(m/\mu, \chi_2)$  с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра  $\chi_1$  определяется по таблице 5.10-5.13, а  $\chi_2$  - по таблицам 5.14.

12. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 6.3, для  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{opt}$ ,  $m = 5, 10$ .

13. Оформить отчет.

### 2.6.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
  6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ ,  $\chi_1$  и  $\chi_2$ .
  7. Графические зависимости  $\delta_b^{(2)}(\chi/m, \mu)$  (пункт 2).
  8. Графические зависимости  $\delta_{b,\min}^{(1)}(\mu/m, \chi_{opt})$ ,  $\delta_{b,\min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$ ,  $\delta_{\beta,\min}^{(1)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\beta,\min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$  (пункт 3).
  9. Графические зависимости  $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_{b,1}^{(2)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(2)}(m/\mu, \chi_2)$  (пункт 5).
  10. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
  11. Выводы.
- Пример выполнения задания 6 приведен в Приложении 15.

#### 2.6.4. Контрольные вопросы

8. Поясните физический смысл условия нормировки ортогональной модели корреляционной функции.
9. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции при выполнении условия нормировки?
10. Из каких соображений выбирается значение параметра масштаба ортогональных функций?
11. Для какого ортогонального базиса возможно точное решение определения параметра масштаба? Почему?
12. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с  $m$  и  $\mu$ ?
13. Перечислите недостатки метода построения ортогональной модели с применением корректирующих коэффициентов.

### 2.7. Анализ методических погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции

**Цель работы:** анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции

#### 2.7.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.7 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.7.

#### 2.7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  (см. лабораторную работу 5).

2. Найти оценку  $\hat{\beta}_k^{(1)}$  и составляющую методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(1)}$ .
3. Выбрать численный метод и найти оценку  $\hat{\beta}_k^{(2)}$  и составляющую методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(2)}$ .
4. Найти систематическую составляющую методической погрешности оценки коэффициента разложения.
5. Оформить отчет.

### 2.7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad
5. Выражения для оценки составляющих методической погрешности и их численные значения.
6. Выводы.  
Пример выполнения задания 7 приведен в Приложении 16.

### 2.7.4. Контрольные вопросы

1. Какие составляющие погрешности образуют полную группу погрешностей?
2. Из каких соображений выбирается интервал дискретизации корреляционной функции?
3. Какие составляющие методической погрешности относятся к систематическим?

## 2.8. Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями

**Цель работы:** изучение влияния погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями.

### 2.8.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.8 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.8.

### 2.8.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\delta_{min}(\alpha, m)$  (см. лабораторную работу 5).
2. Построить зависимость  $\delta_{min}(m/\rho_x(\tau), \alpha)$ .

3. Задавшись значениями  $\gamma_k$  построить зависимость  $M[\delta_m] = f_1(m/\gamma_k)$ .
4. Построить зависимость  $M[\delta] = f_2(m/\gamma_k)$ .
5. Построить зависимость  $m_{opt} = f_3(\gamma_k/\mu)$ .
6. Оформить отчет.

### 2.8.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad
5. Основные соотношения
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения задания 8 приведен в Приложении 17.

### 2.8.4. Контрольные вопросы

1. От чего зависит значение  $m_{opt}$  при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями?
2. Как изменится значение  $m_{opt}$  при уменьшении значения параметра масштаба  $\alpha(\gamma)$ ?

## 2.9. Аппроксимация спектральных плотностей мощности

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

### 2.9.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.9 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.9.

### 2.9.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\delta_{min}(\alpha, m)$  (см. задание 5).
2. Найти модель спектральной плотности мощности для определенных параметров нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.
3. Найти модель спектральной плотности мощности для параметров  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$  нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.

4. Для той же модели спектральной модели плотности мощности определить корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$  и построить ортогональную модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.
5. Оформить отчет.

### 2.9.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения задания 9 приведен в Приложении 18.

### 2.9.4. Контрольные вопросы

1. Что такое условие нормировки для спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений определяются корректирующие коэффициенты?
3. Что характеризует спектральная плотность мощности?

## 2.10. Аппроксимация спектральных функций

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных функций случайных процессов ортогональными функциями.

### 2.10.1 Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование задания 2.10 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.10.

### 2.10.2 Задание на самостоятельную работу

6. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и её параметров, воспользовавшись средствами Mathcad, найти численное значение параметра масштаба  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$  (см. лабораторную работу 6).
  7. Построить спектральную функцию и её ортогональную модель.
  8. Найти приведенную погрешность определения спектральной функции её ортогональной моделью, построить график.
  9. Оформить отчет.
- Пример выполнения задания 10 приведен в Приложении 19.

### 2.10.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 10 приведен в Приложении 15.

### 2.10.4 Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл спектральной функции.
2. Чему равно значение спектральной функции при  $\omega \rightarrow \infty$ ?
3. Как с помощью спектральной функции определить мощность процесса в заданной полосе частот?
4. Как с помощью спектральной функции определить эквивалентную ширину спектра мощности процесса?

### 2.11. Аппроксимативный анализ обобщенных корреляционно-спектральных характеристик

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов ортогональными функциями.

#### 2.11.1. Теоретические основы

Теоретическое обоснование задания 2.11 вычислительного практикума приведено в подразделе 1.11.

#### 2.11.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad, найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ ,  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$  и соответствующие оценки интервалов корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  и  $\hat{\tau}_k^{(4)}$ .
2. Определить относительные погрешности оценки интервалов корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  и  $\hat{\tau}_k^{(4)}$ ,  $\gamma_{см}^{(1)}(m)$ ,  $\gamma_{см}^{(2)}(m)$ .
3. Для заданной модели спектральной плотности мощности с использованием параметров модели корреляционной функции определить  $\Delta\omega'$  по аналитиче-

ским выражениям и  $\Delta\omega$ , по параметрам ортогональной модели корреляционной функции.

4. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам модели корреляционной функции  $\gamma_{см}^{(3)}(m)$ .
5. Найти параметры модели спектральной плотности мощности, корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Определить  $\Delta\omega$ , по параметрам модели спектральной плотности мощности.
6. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности  $\gamma_{см}^{(4)}(m)$ .
7. Оформить отчет.

### 2.11.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Основные соотношения.
4. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
5. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения задания 11 приведен в Приложении 20.

### 2.11.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл интервалов корреляции.
2. В каких случаях целесообразно использовать каждое из описанных определений интервала корреляции?
3. Поясните физический смысл эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса.
4. Какой из способов определения эквивалентной ширины дает более точный результат? Почему?
5. Для чего необходимы аналитические соотношения для определения эквивалентной ширины спектра мощности?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены вопросы:

- 1) математического описания ортогональных полиномов и функций, исследования их свойств;
- 2) построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их обобщенных характеристик;
- 3) анализа погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик.

Задания вычислительного практикума выполняются с помощью математического пакета Mathcad, примеры выполнения которых приведены в приложениях.

Отметим, что предлагаемый перечень заданий вычислительного практикума отражает лишь опыт и точку зрения автора и может быть существенно расширен как по номенклатуре работ, так и по количеству пунктов исследований в каждой работе.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

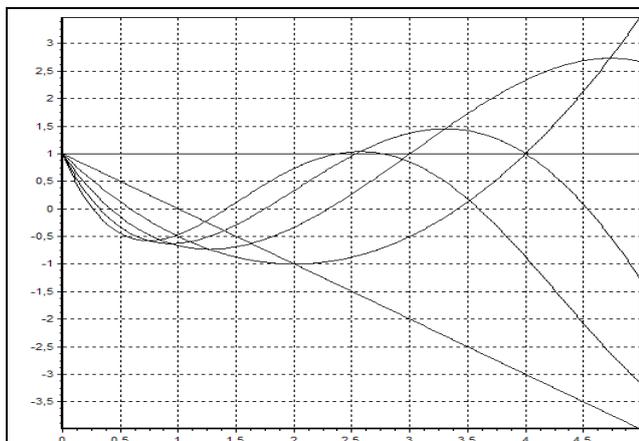
1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционной функции стационарных процессов//ИВУЗов СССР, Радиофизика. – т. XVI, N 11. – 1973. – С. 1770-1771.
4. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра //ИВУЗов СССР «Приборостроение». – т. XVII, №7. – 1974. – С.66-72.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
6. Губарев В.В. Алгоритмы статистических измерений. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 272 с.
7. Дедус Ф.Ф., Махортых С.А., Устинин М.Н. и др. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. – М.: Машиностроение, 1999. – 357 с.
8. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. - М.: Главное издательство иностранной литературы, 1974. – 260 с.
9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. – М.: Мир, 1971. – 320 с.
10. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.2. – М.: Мир, 1972. – 288 с.
11. Докин В.Н., Жуков В.Д., Колокольникова Н.А. и др. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990. – 208 с. Докин\_Комб
12. Егорычев Г.П. Интегральное представление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 286 с.
13. Котюк А.Ф., Цветков Э.И. Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. – М.: Изд-во стандартов, 1970.-104с.
14. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции //Перевод с нем. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 466 с.
15. Куликовских И.М. Многомерная параметрическая модель артериальной пульсовой волны //Биотехнические, медицинские, экологические системы и комплексы (БИОМЕДСИСТЕМЫ – 2007): Материалы XX Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. - Рязань, 2007. – С. 112-113.
16. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74 //Минприбор. – 1974. – 76 с.
17. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. – 480 с.
18. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985.
19. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. Новое в жизни, науке и технике. Сер. Мат-ка, киб., №11. М.: Знание, 1983. – 64 с.
20. Прикладной анализ случайных процессов/Под ред. С.А. Прохорова. – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
21. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – Самара, СНЦ РАН, 2001. – 329 с.

22. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 380 с., ил.
23. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 209 с.: ил.
24. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. – 191 с.: ил.
25. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 277 с., ил.
26. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 374 с.: ил.
27. Прохоров С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 2. – Самара, 2006. – С. 55- 62.
28. Прохоров С.А., Графкин А.В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. – Самара: СНЦ РАН, 2005. – 241 с.
29. Прохоров С.А., Графкин А.В., Графкин В.В. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». 2005. – С. 329-324.
30. Прохоров С.А., Графкин В.В. Ортогональные модели структурных функций//Автометрия. – 2011. – том 47, №1. – С. 50-58.
31. Прохоров С.А., Графкин В.В. Структурно-спектральный анализ случайных процессов/ СНЦ РАН, 2010. – 147 с., ил.
32. В. Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. - СНЦ РАН, 2003. – 286 с., ил.
33. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби //Проблемы автоматизации и управления в технических системах: Материалы международной научно-технической конференции. – ИИЦ ПГУ. – Пенза, 2007. – С. 149-152.
34. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2006. – С. 50-53.
35. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Сонина - Лагерра //Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». -2008. - №2 (17) – С. 185-191.
36. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби/ Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2005. – С. 54-59.
37. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Чебышева// Радиотехника и связь: Материалы четвертой международной научно-технической конференции. - Саратов, 2007. – С. 12-17.
38. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Об одном подходе к уточнению параметра масштаба ортогональных функций в задачах аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2007. – С. 42-45.

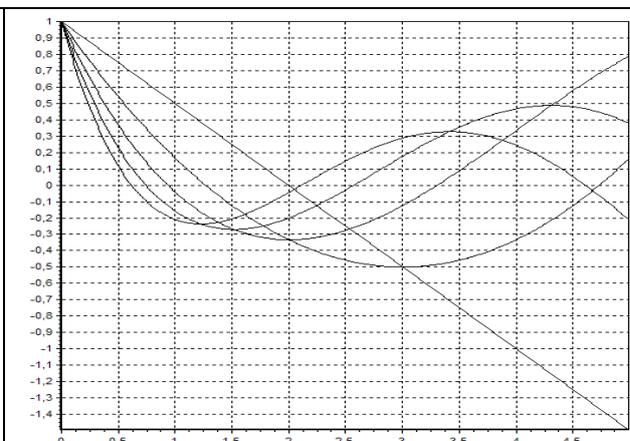
39. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум/ СНЦ РАН, 2008. – 301 с., ил.
40. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Основные ортогональные функции и их приложения. Часть 1. Ортогональные функции экспоненциального типа. Самара, СНЦ РАН, 2013. – 200 с.
41. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Создание комплекса программ на основе пространственной схемы взаимодействия объектов/Международный журнал «Программные продукты и системы». – 2012. – №3. – С. 5-8.
42. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные свойства ортогональных функций Якоби //Информационные технологии в высшем профессиональном образовании: сборник докладов второй межрегиональной научно-технической конференции. – Тольятти, 2007. – С. 125-128.
43. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра//Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». -2007. - №2 (15) – С. 123-127.
44. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей//Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2009. – 2(19). – С. 140-146.
45. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. – 368 с.
46. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматиздат., 1962. – 884 с.
47. Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоздат, 1979. – 280 с.
48. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. - М.: Энергия, 1974. – 176 с., ил.
49. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. - М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.
50. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2001. – 336 с.
51. Соучек Б. Мини-ЭВМ в системах обработки информации. - М.: Мир, 1976. – 520 с.
52. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1976. – 328 с.
53. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л: Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1984. – 144 с., ил.
54. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. - М.: Энергия, 1973.-128с., ил.
55. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. – 256 с.
56. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972.
57. Soucek B., Prohorov S. Event-Train Correlation and Real-Time Microcomputer Systems//Computer Compacts. – Vol. 1, Issue 1. – 1983. – pp. 51–52. DOI: 10.1016/0167-7136(83)90149-X
58. Soucek B., Prokhorov S. Event - Train Correlation and Real - Time Microcomputer Systems//Microprocessing and Microprogramming. - vol. 1. № 1 – 1983. – pp. 23-29.
59. Volkov I.I., Motov V.V., Prokhorov S.A. A certain method of equipment approximation of the correlation functions of stationary random processes. Radiophysics and Quantum Electronics. Vol. 16, Issue 11. – 1975. – pp. 1370-1371, DOI: 10.1007/BF01080923
60. Lampard D.G. A new method of determining correlation function stationary time series. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. – vol. 102, № 1. – 1955. – pp. 35 – 41.

61. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique condition for generalized Laguerre functions to solve pole position problem//Signal Processing. – Vol. 108. – 2015. – pp. 25-29. DOI: 10.1016/j.sigpro.2014.08.040.
62. Prokhorov S., Kulikovskikh I. Pole position problem rational Meixner filters//Signal Processing. – Vol. 120. – 2016. – pp. 8–12. DOI:10.1016/j.sigpro.2015.08.009.
63. Prokhorov S., Kulikovskikh I. Basic orthogonal functions and its applications. Part I. Orthogonal functions of exponential type. 2013. – 192 p.
64. Soucek B., Carlson A.D. Computers in Neurobiology and Behavior. John Wiley, New York, 1976. – 324 p.

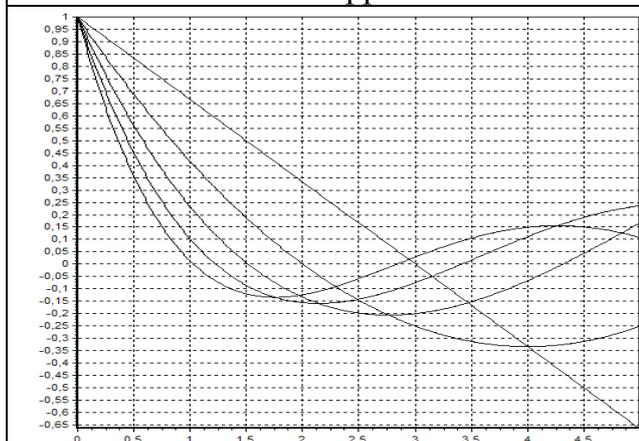
ВИД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ 0 – 5 ПОРЯДКОВ



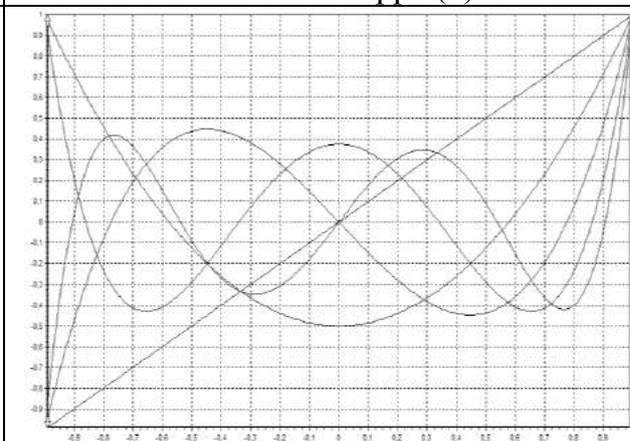
Лагерра



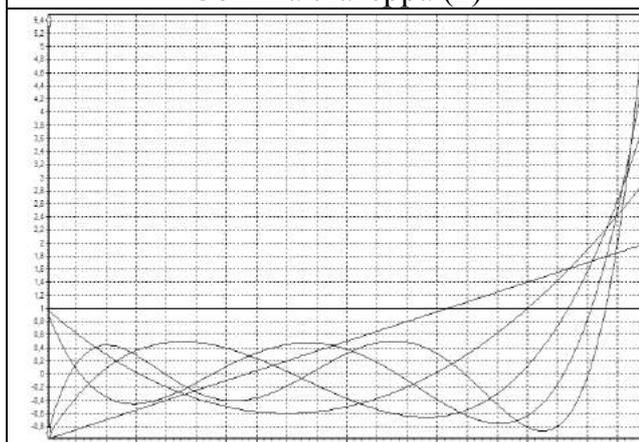
Сонина-Лагерра (1)



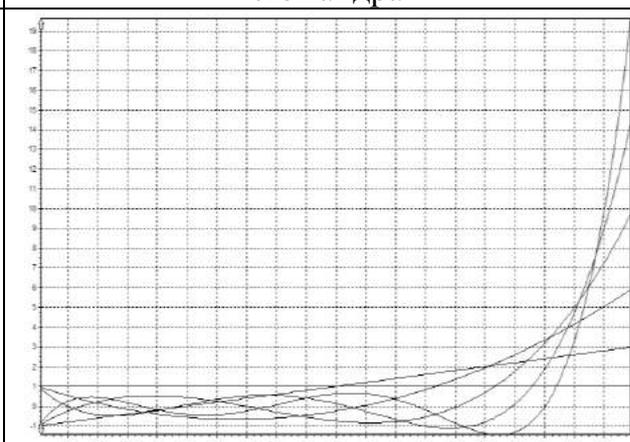
Сонина-Лагерра (2)



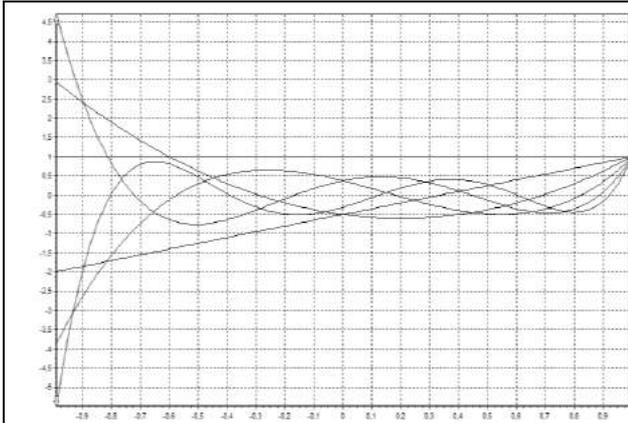
Лежандра



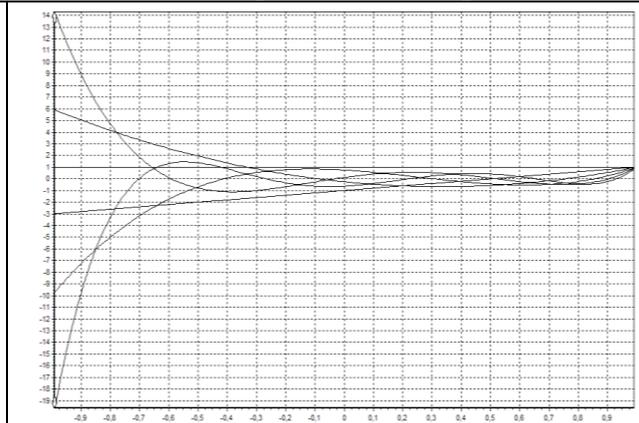
Якоби (1, 0)



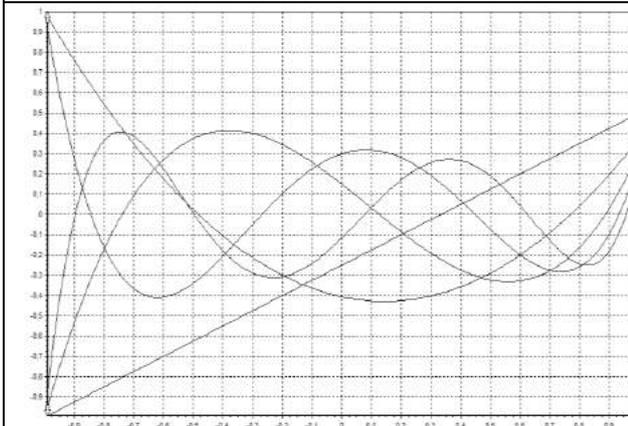
Якоби (2, 0)



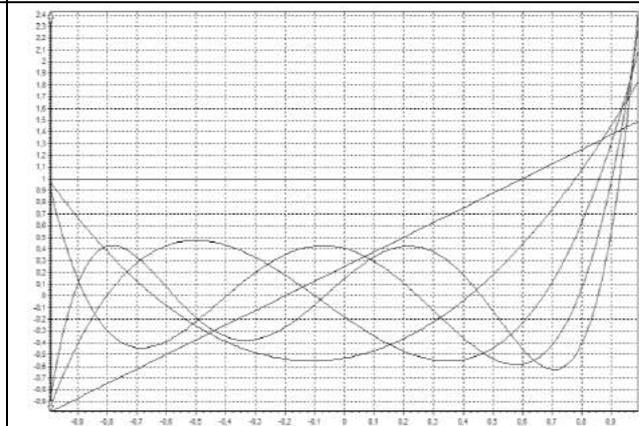
Якоби (0, 1)



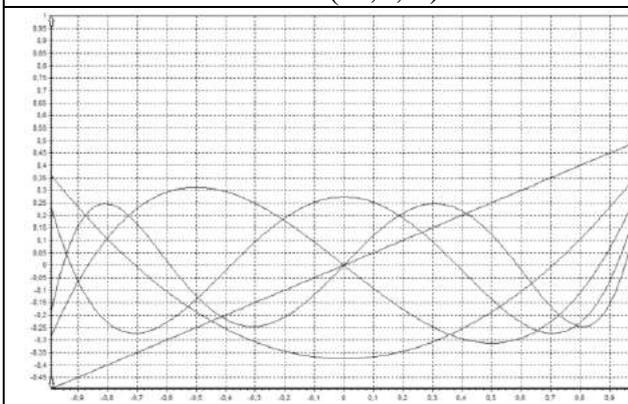
Якоби (0, 2)



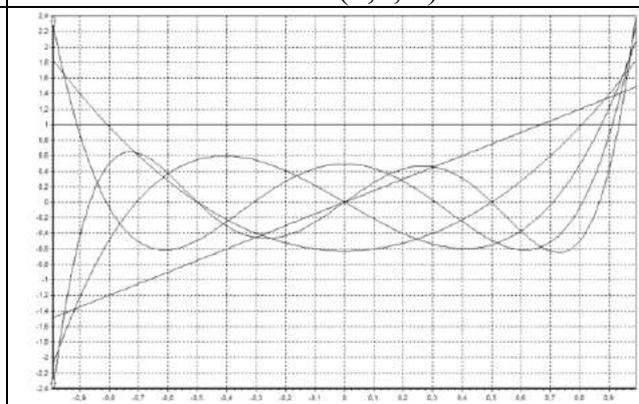
Якоби (-0,5, 0)



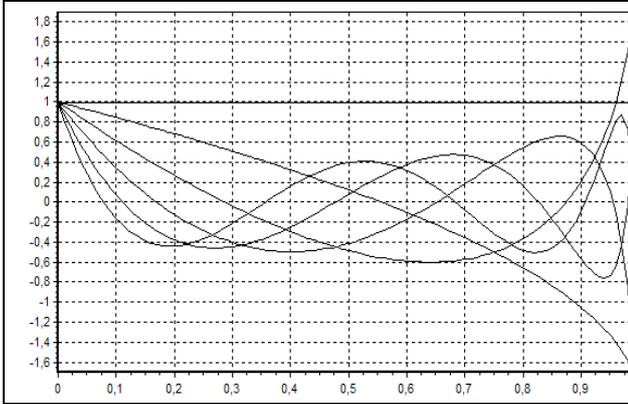
Якоби (0,5, 0)



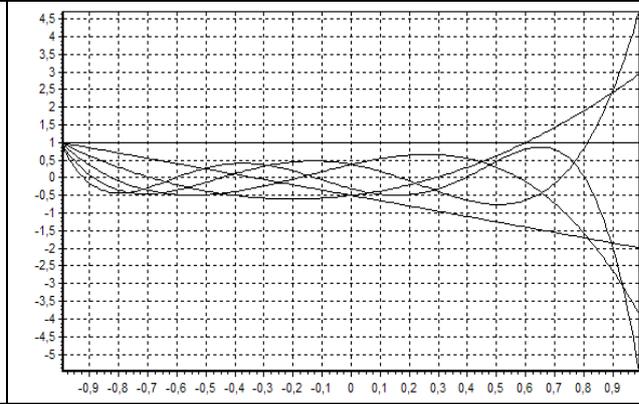
Чебышева 1-ого рода



Чебышева 2-ого рода

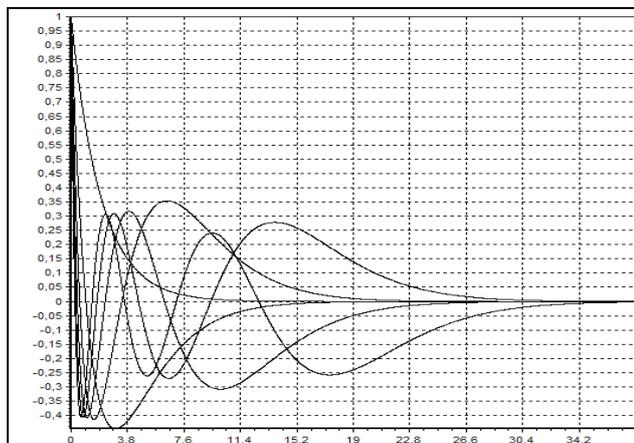


Дирихле 1

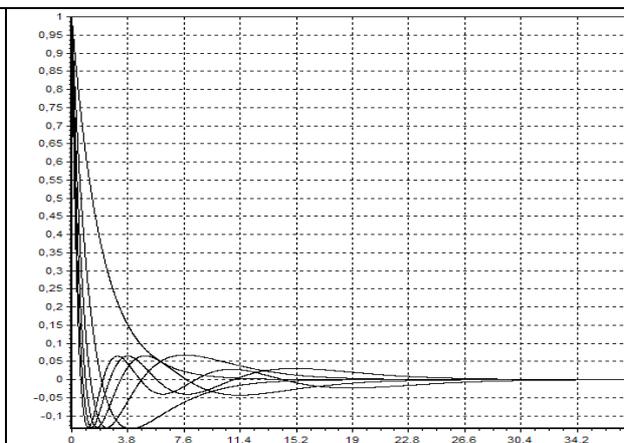


Дирихле 2

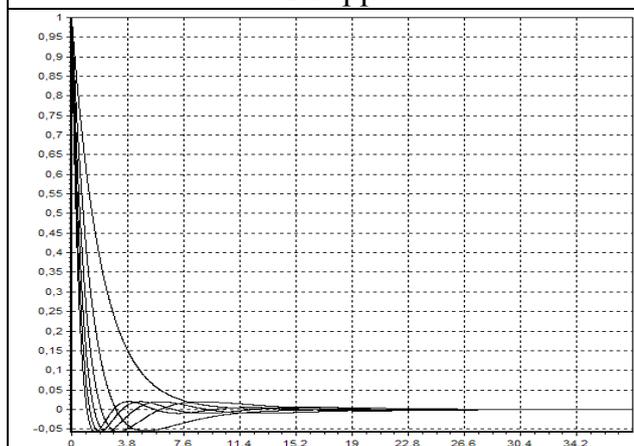
ВИД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ 0 – 5 ПОРЯДКОВ



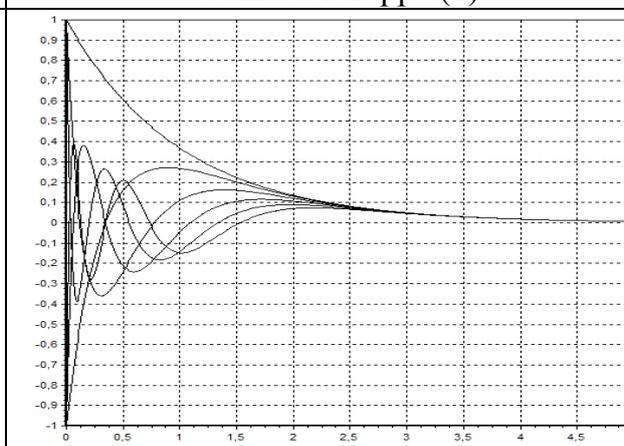
Лагерра



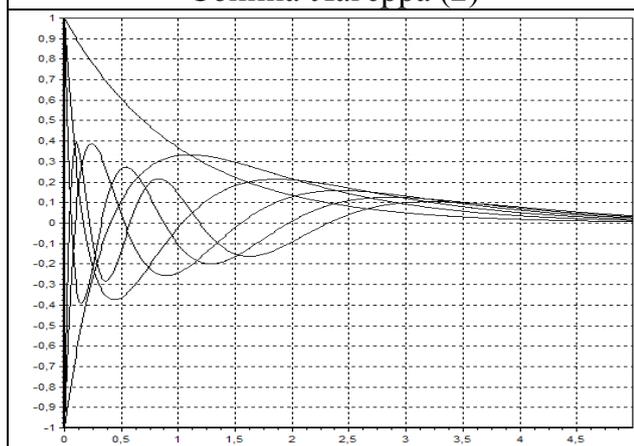
Сонина-Лагерра (1)



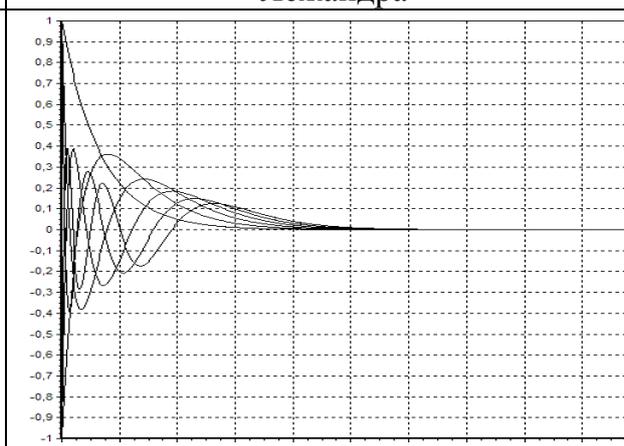
Сонина-Лагерра (2)



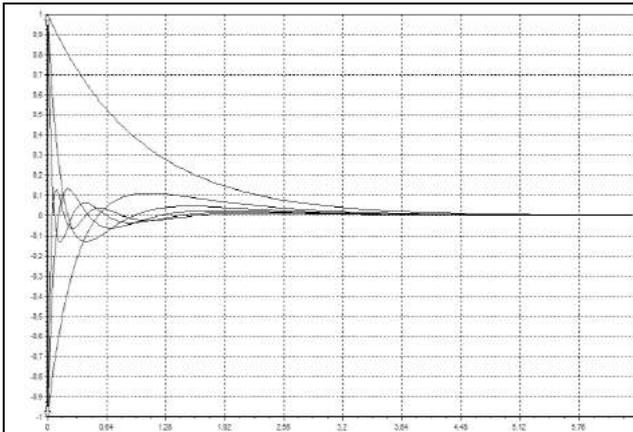
Лежандра



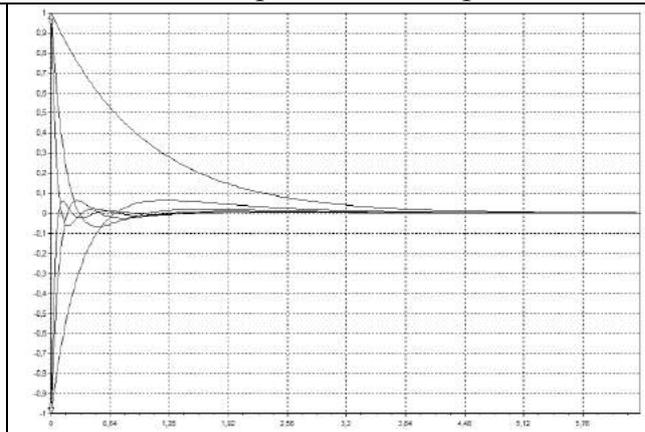
Якоби (1, 0)



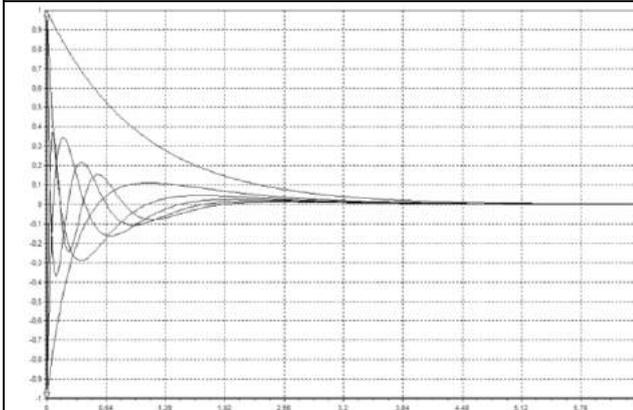
Якоби (2, 0)



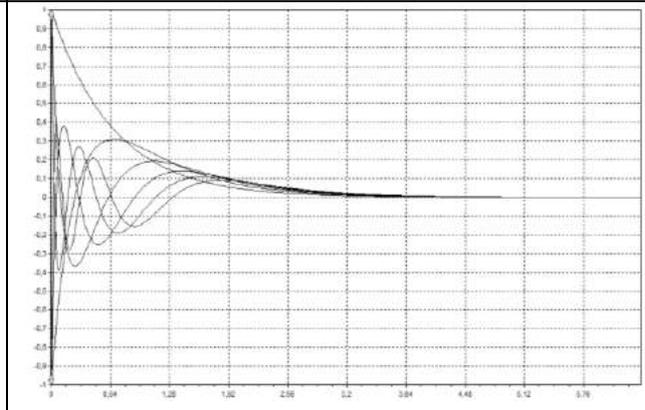
Якоби (0, 1)



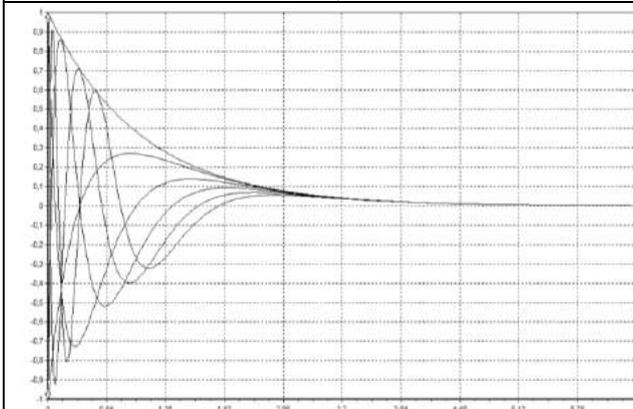
Якоби (0, 2)



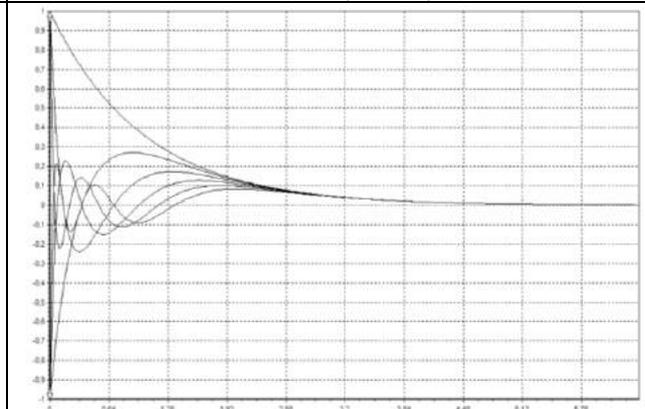
Якоби (-0,5, 0)



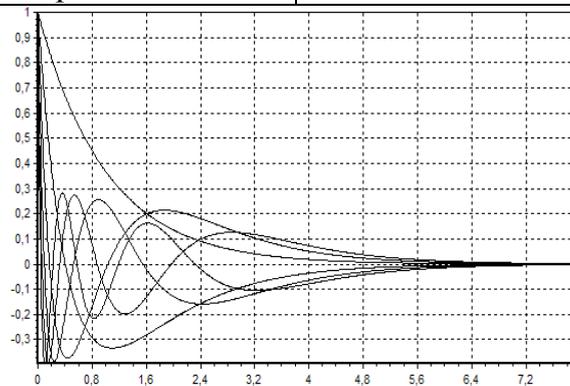
Якоби (0,5, 0)



Чебышева 1-ого рода



Чебышева 2-ого рода



Дирихле

**ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОИЗВОДЯЩИХ  
ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ**

**Правила действий над коэффициентами**

Таблица П 3.1

<p>Правило 1 (снятия коэффициента)</p> $\underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} B(w)w^{-k-1}, k = 0, 1, \dots,$ <p>тогда и только тогда, когда</p> $A(w) = B(w)$
<p>Правило 2 (линейности)</p> $\alpha \cdot \underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} + \beta \cdot \underset{w}{\text{Coef}} B(w)w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} (\alpha \cdot A(w) + \beta \cdot B(w))w^{-k-1}$
<p>Правило 3 (замены переменных)</p> <p>Если <math>z \in R</math>, то</p> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} = A(z)$ <p>Соотношение остается справедливым и в случае, когда <math>A(w)</math>- полином, а <math>z = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k w^k, a_m \neq 0</math>, где <math>m</math>- натуральное число.</p>
<p>Правило 4 (обращения)</p> <p>Если <math>f(w) \in R_0</math>, то</p> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underset{w}{\text{Coef}} A(w)f^k(w)w^{-k-1} = \left[ A(w)(f(w)h'(w))^{-1} \right] \Big _{w=g(z)},$ <p>где <math>h(w) = wf^{-1}(w)</math>, а <math>g(z) \in R</math>- обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>z = h(w) \in R</math>.</p>
<p>Правило 5 (замены переменных под знаком <i>Coef</i>)</p> <p>Если <math>f(z) \in R_0</math>, то</p> $\underset{w}{\text{Coef}} (A(w)f^k(w)w^{-k-1}) = \underset{z}{\text{Coef}} \left[ A(w)(f(w)h'(w))^{-1} \right] \Big _{w=g(z)} z^{-k-1}, k = 0, 1, \dots,$ <p>где <math>h(w) = wf^{-1}(w)</math>, а <math>g(z) \in R</math>- обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>z = h(w) \in R</math>.</p>
<p>Правило 6 (разложения в ряд Бюрмана-Лагранжа)</p> <p>Если <math>g(w) \in R, h(z) = zf^{-1}(z) \in R</math>- обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>g(w)</math>, то</p> $B(z) \Big _{z=g(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k \underset{w}{\text{Coef}} B(w)h'(w)f^{k+1}(w)w^{-k-1}$
<p>Правило 7 (дифференцирования)</p> $k \underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} A'(w)w^{-k}, k = 0, 1, \dots$

Правило 8 (интегрирования)
$\frac{1}{k+1} \underset{w}{\text{Coef}} A(w) w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} \left( \int_0^w A(w) dw \right) w^{-k-2}, k = 0, 1, \dots$

## Таблица М интегральных представлений чисел

Таблица П 3.2

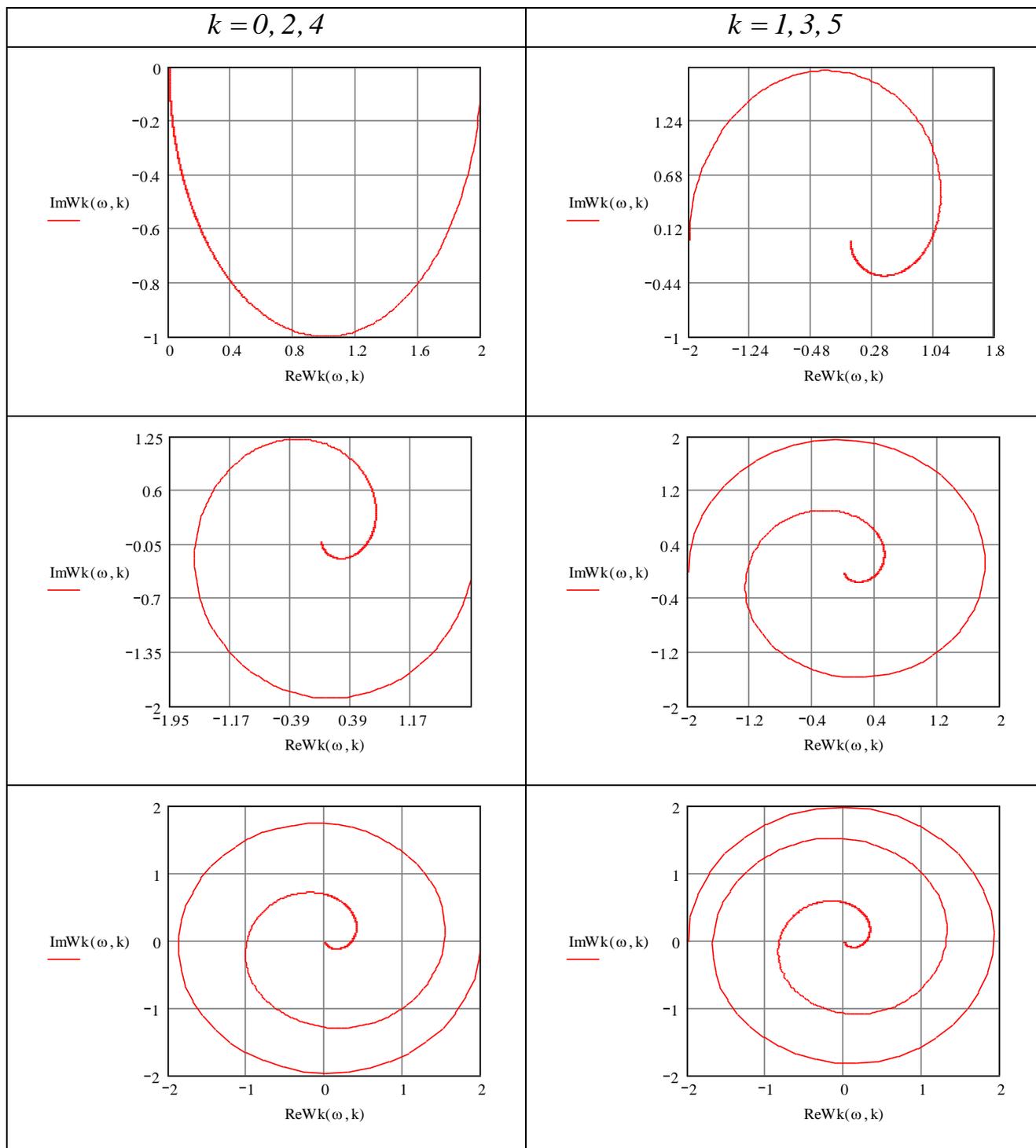
1. Биномиальный коэффициент
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_1 = M_1(w)</math></i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">C_\alpha^n = \begin{cases} 1, &amp; n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, &amp; n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, &amp; n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}</math> </li> <li> <math display="block">C_\alpha^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^\alpha w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1+w)^\alpha w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> <li> <math display="block">C_m^n = \begin{cases} 1, &amp; n = 0 \\ \frac{m!}{n!(m-n)!}, &amp; n = 1, 2, 3, \dots, m \\ 0, &amp; n = -1, -2, -3, \dots, n &gt; m \end{cases}</math> </li> <li> <math display="block">C_m^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^m w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1+w)^m w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; \infty</math> </li> <li> <p>Зная, что <math>C_m^n = C_m^{m-n}</math> используют представление вида</p> <math display="block">C_m^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^m w^{-m+n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1+w)^m w^{-m+n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; \infty</math> </li> <li> <math display="block">C_{-m}^n = (-1)^n C_{m+n-1}^n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math> </li> <li> <math display="block">C_{m+n-1}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-w)^{-m} w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1-w)^{-m} w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> <li> <p>Зная, что <math>C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}</math> используют представление вида</p> <math display="block">C_{m+n-1}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-w)^{-n-1} w^{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1-w)^{-n-1} w^{-m} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> <li> <math display="block">C_{-1/2}^n = 4^{-n} C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}</math> </li> <li> <math display="block">C_{2n}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-4w)^{-1/2} w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1-4w)^{-1/2} w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> </ul>

2. Коэффициенты разложения логарифмической функции - $\ln(1-w)$	
Определение и интегральное представление - $M_2 = M_2(w)$	
$\left. \begin{array}{l} 0, \quad n=0, \\ \frac{1}{n}, \quad n=1,2,3,\dots \end{array} \right\} = \underset{w}{\text{Coef}}(-\ln(1-w))w^{-n-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} \ln(1-w)w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < 1$	
3. Коэффициенты разложения экспоненциальной функции - $e^{\alpha w}$	
Определение и интегральное представление - $M_3 = M_3(w)$	
$\frac{\alpha^n}{n!} = \underset{w}{\text{Coef}}(e^{\alpha w} w^{-n-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} e^{\alpha w} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty, \quad n=0,1,2,\dots$	
4. Числа Эйлера - $E_n$ (обычные), $n=0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_4 = M_4(w)$	
$E_n = n! \underset{w}{\text{Coef}} ch^{-1}(w)w^{-n-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} ch^{-1}(w)w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n=0,1,2,\dots$	
5. Числа Бернулли - $B_n$ , $n=0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_5 = M_5(w)$	
$B_n = n! \underset{w}{\text{Coef}}(e^w - 1)^{-1} w^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^{-1} w^{-n} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n=0,1,2,\dots$	
6. Числа Стирлинга 1-ого рода - $s_1(m,n)$ , $n=0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_6 = M_6(w)$	
$(w)_m = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(m,n)w^n, \quad s_1(0,0) = 1$	
$s_1(m,n) = \underset{w}{\text{Coef}} (w)_m w^{-n-1} = \frac{m!}{n!} \underset{w}{\text{Coef}} (\ln(1+w))^n w^{-m-1} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (\ln(1+w))^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < 1$	
7. Числа Стирлинга 2-ого рода - $s_2(m,n)$ , $n=0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_7 = M_7(w)$	
$w^m = \sum_{n=0}^{\infty} s_2(m,n)(w)_n, \quad s_2(0,0) = 1$	
$s_2(m,n) = \frac{m!}{n!} \underset{w}{\text{Coef}} (e^w - 1)^n w^{-m-1} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad m=0,1,2,\dots$	
8. Гамма – функция - $\Gamma(z)$	
Определение и интегральное представление - $M_8 = M_8(s)$	
$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{z-1} ds, \quad Re z > 0$	
Частный случай	
$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds \quad n=0,1,2,\dots$	

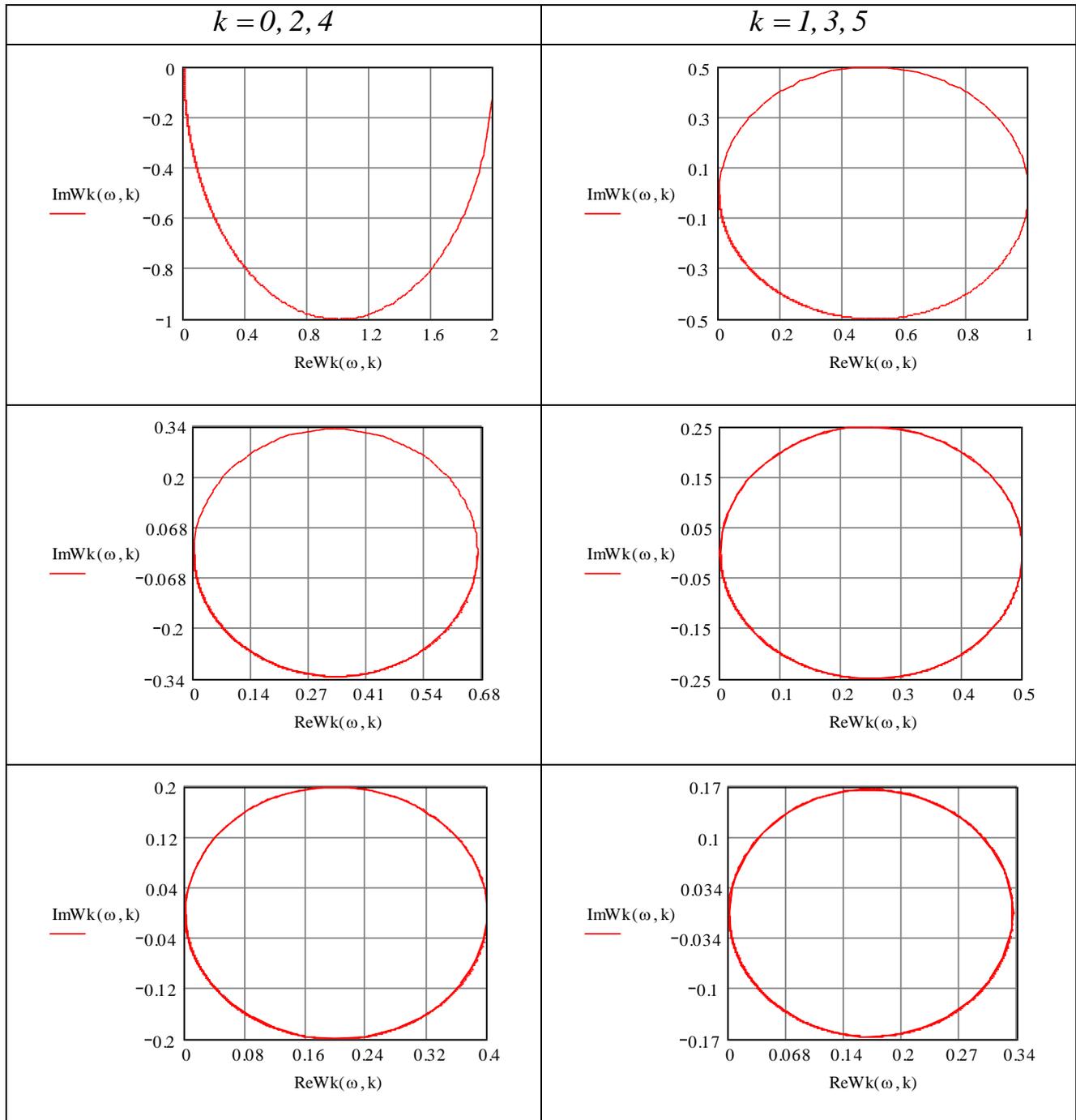
<p>9. Бета – функция - <math>B(u, v)</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_8 = M_9 = M_9(t)</math></i></p> $B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0$ <p>Частный случай</p> $\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = B(n+1, m+1) = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$
<p>10. Обобщенные числа Стирлинга 2-ого рода - <math>s_2^{(\alpha)}(m, n, k)</math>, <math>n = 0, 1, 2, \dots, k</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{10} = M_{10}(w)</math></i></p> $s_2^{(\alpha)}(m, n, k) = \frac{m!}{n!} \operatorname{Coef}_w e^{\alpha w} \frac{(e^{kw} - 1)^n}{w^{m+1}} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} e^{\alpha w} (e^{kw} - 1)^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty$
<p>11. Обобщенные числа Бернулли - <math>B_n^{(m)}</math>, <math>n = 0, 1, 2, \dots</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{11} = M_{11}(w)</math></i></p> $B_n^{(m)} = n! \operatorname{Coef}_w (e^w - 1)^{-m} w^{-n+m-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^{-m} w^{-n+m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$
<p>12. Числа Эйлера - <math>E_n^{(m)}</math> <math>m</math> – ого порядка, <math>n = 0, 1, 2, \dots</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{12} = M_{12}(w)</math></i></p> $E_n^{(m)} = n! \operatorname{Coef}_w (chw)^{-m} w^{-n-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (chw)^{-m} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$
<p>13. Обобщенные числа Эйлера - <math>A(n, k)</math>, <math>n = 0, 1, 2, \dots</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{13} = M_{13}(w, z)</math></i></p> $A(n, k) = n! \operatorname{Coef}_{w, z} \frac{(z-1)^{n+1} dw \wedge dz}{(ze^{-w} - 1)w^{n+1}z^{k+1}} \quad 0 < \rho_1 < \infty, 0 < \rho_2 < 1 \quad n, k = 0, 1, 2, \dots$

## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

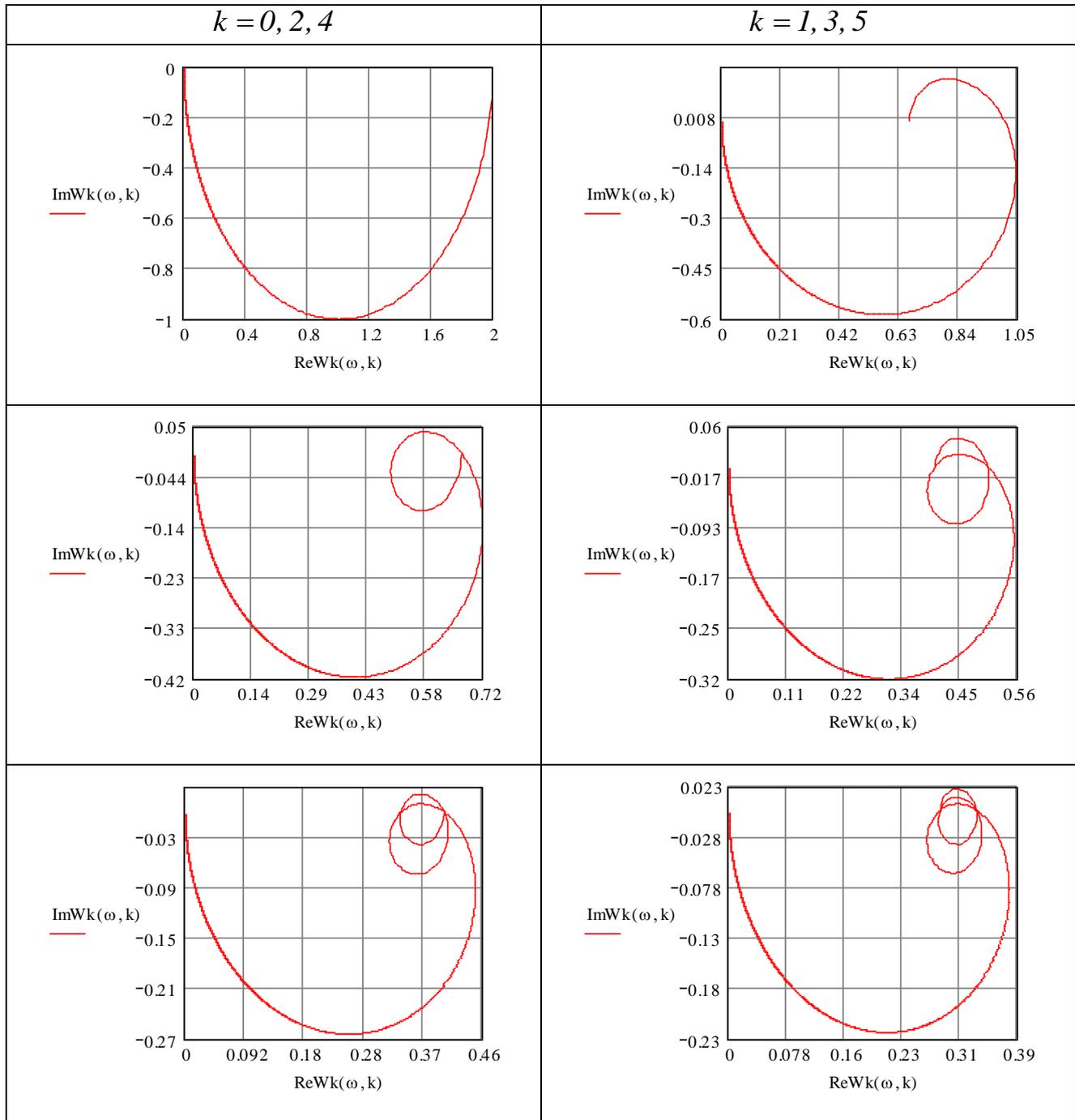
Частотные характеристики ортогональных функций Лагерра



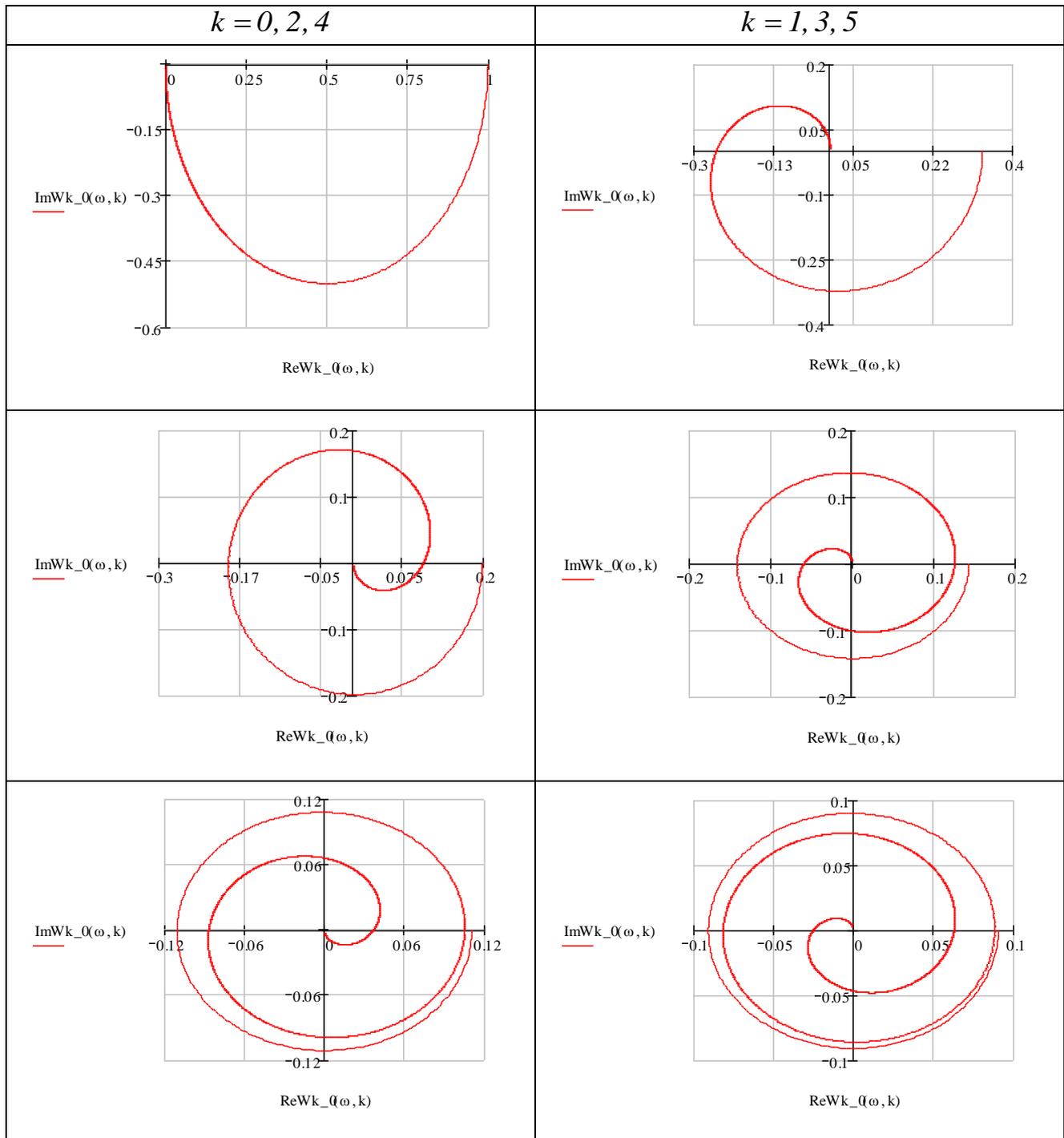
Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра ( $\alpha = 1$ )



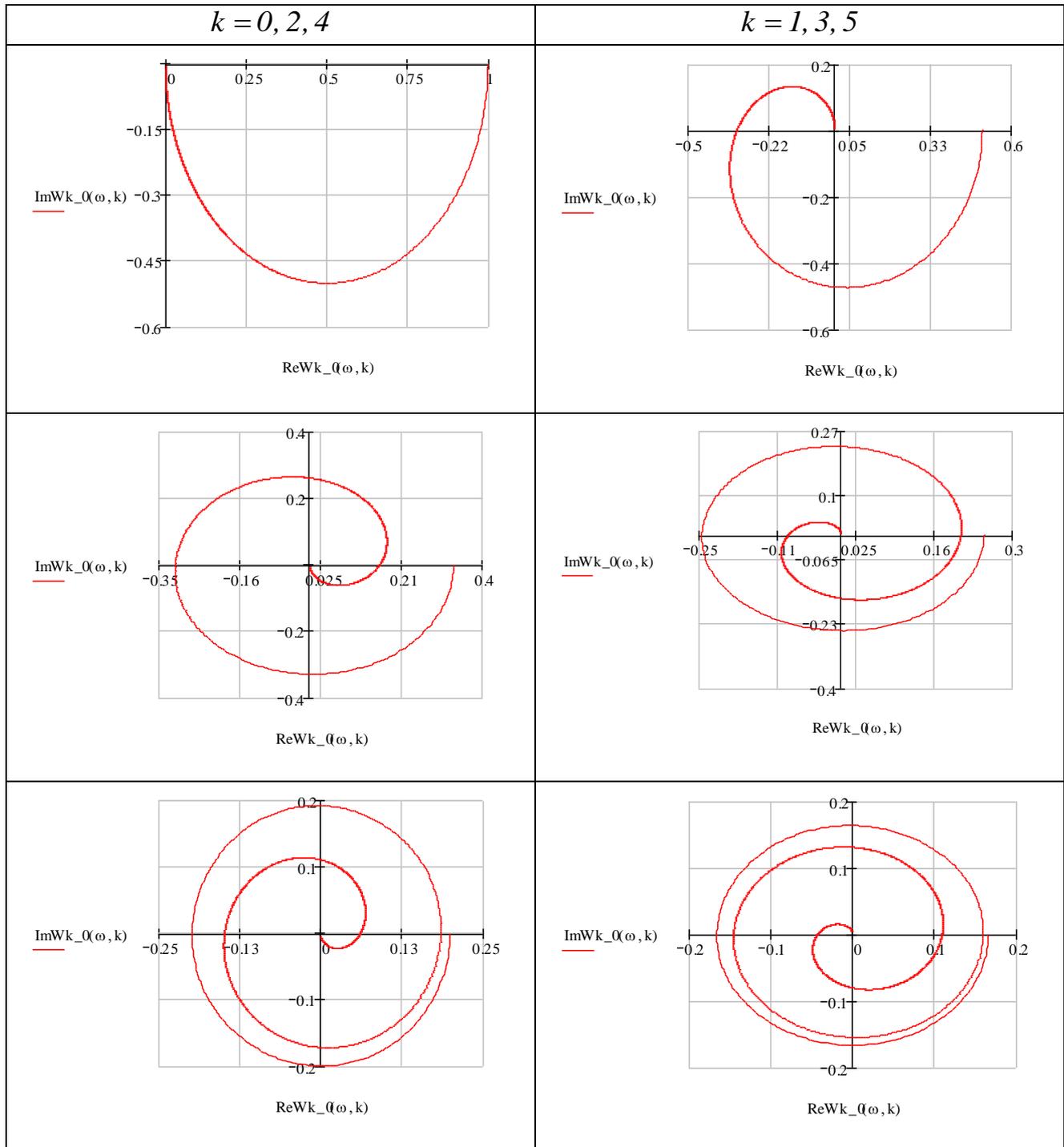
Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра ( $\alpha = 2$ )



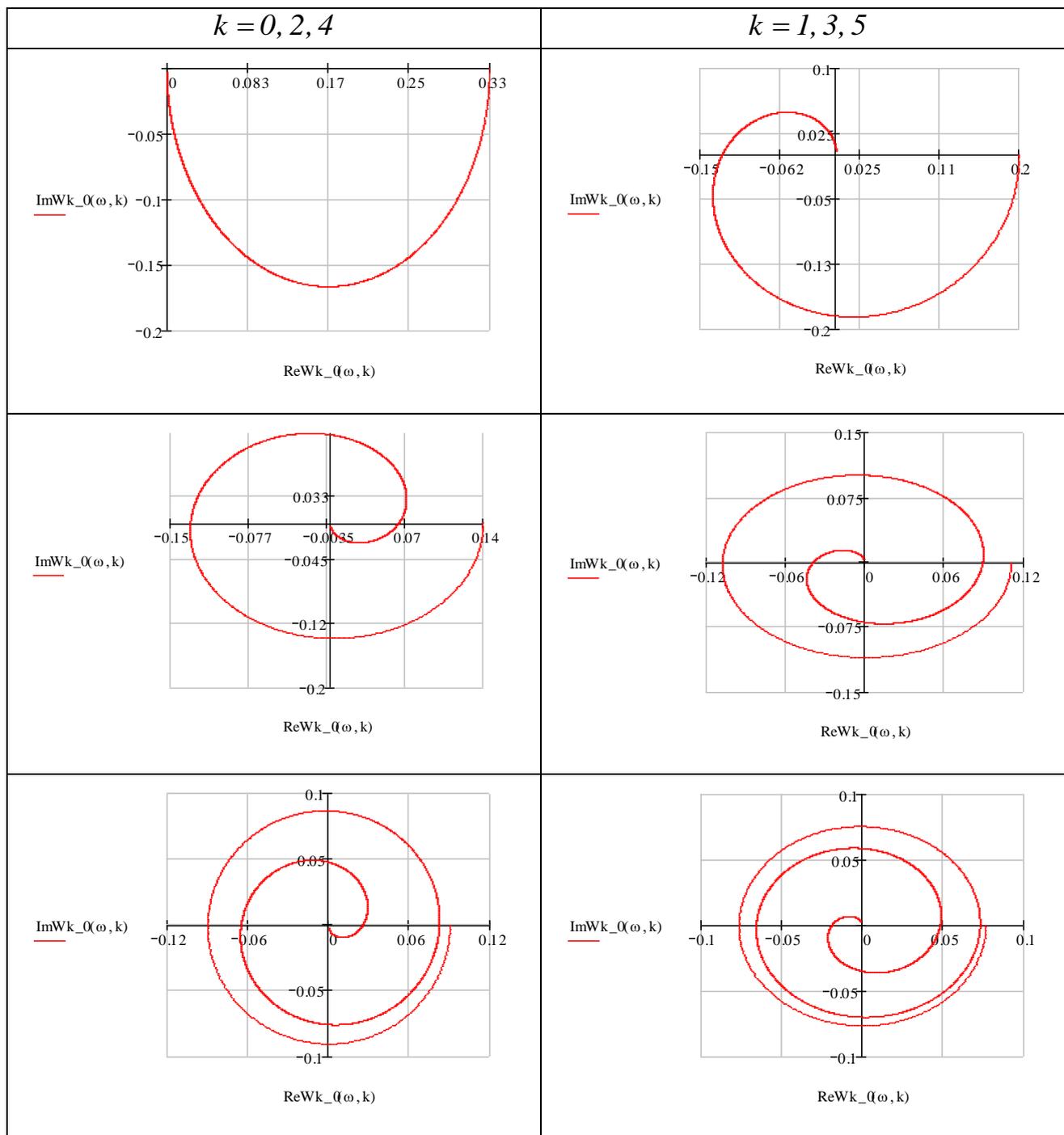
Частотные характеристики ортогональных функций Лежандра



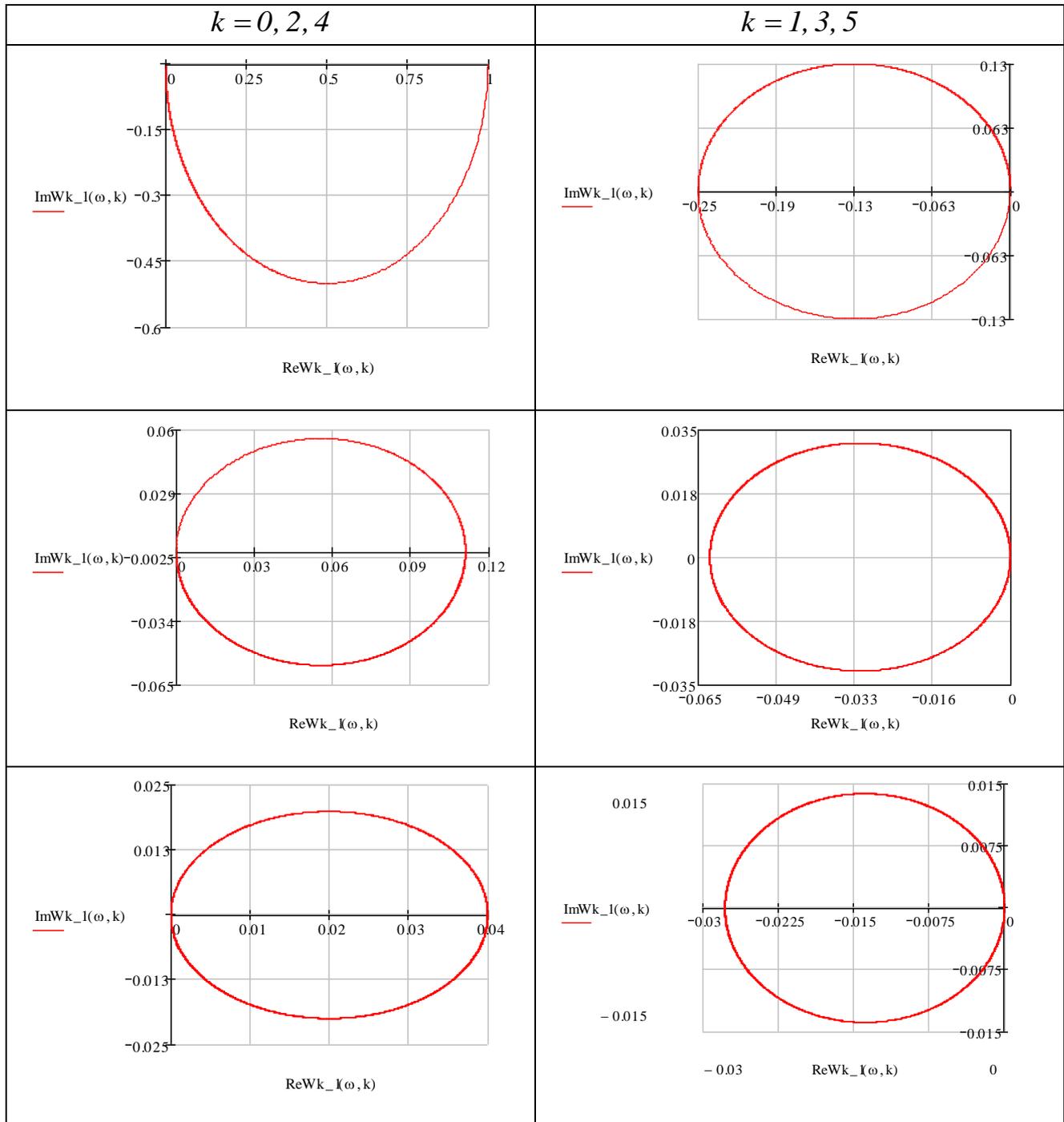
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )



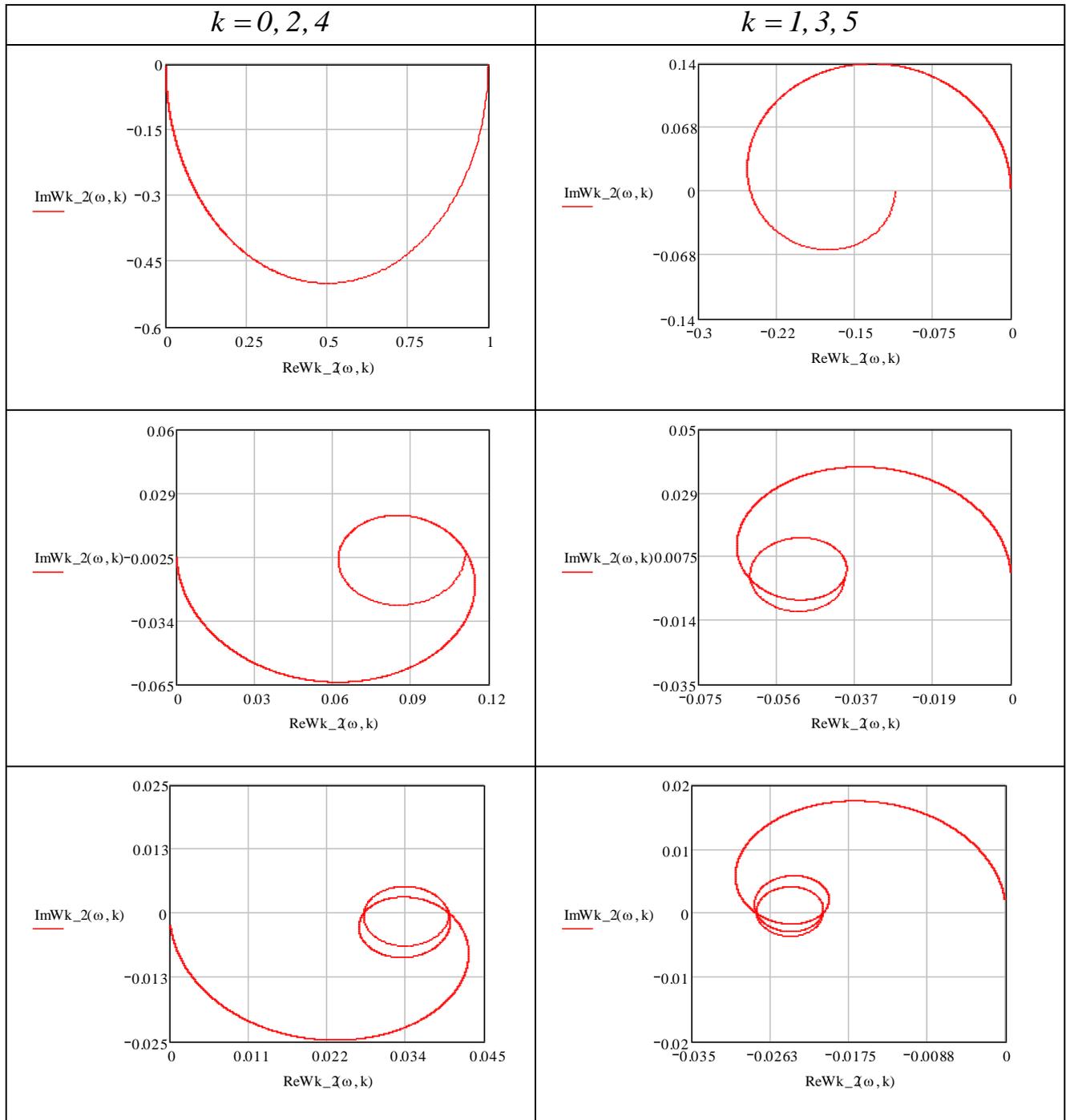
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )



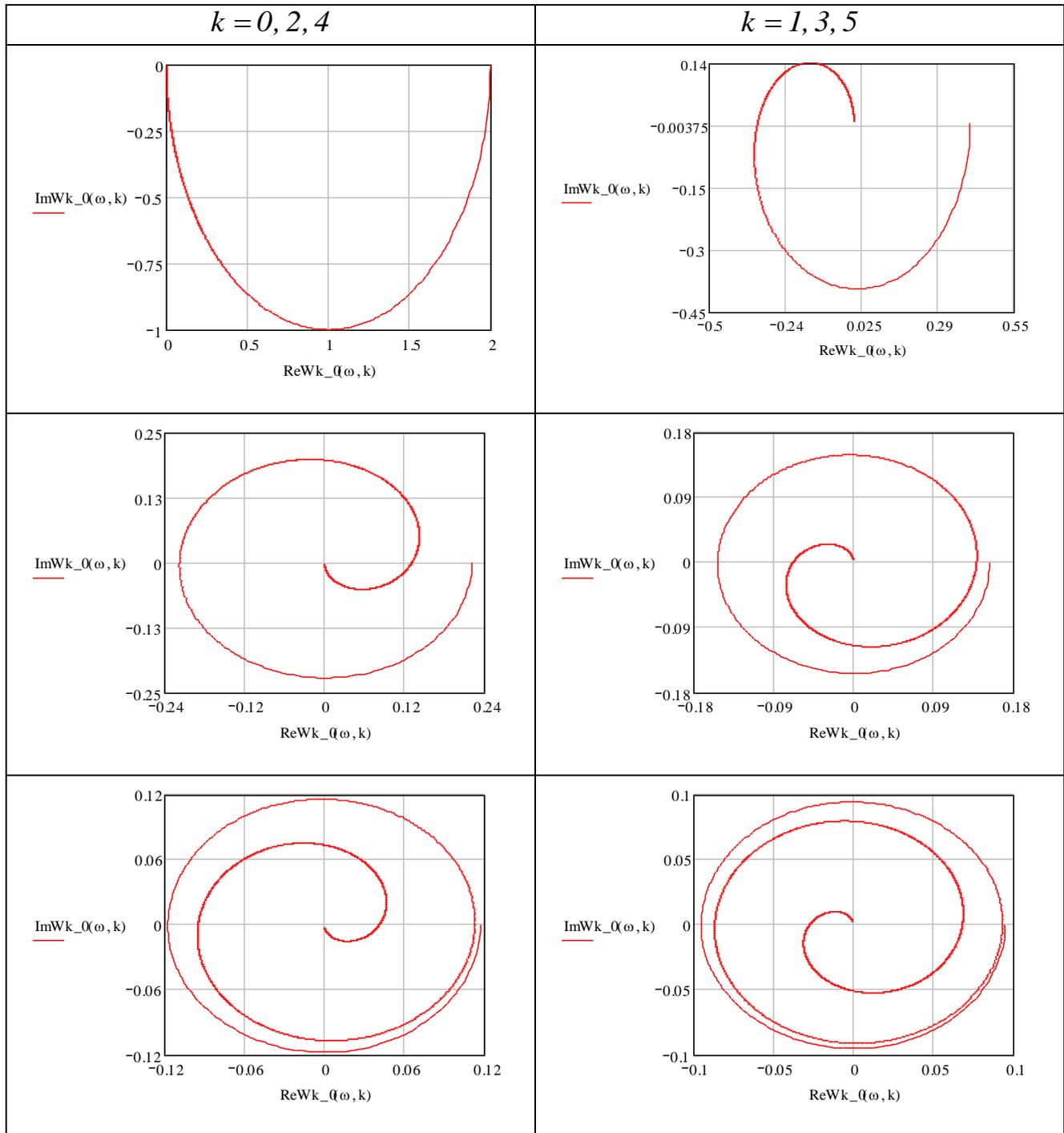
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )



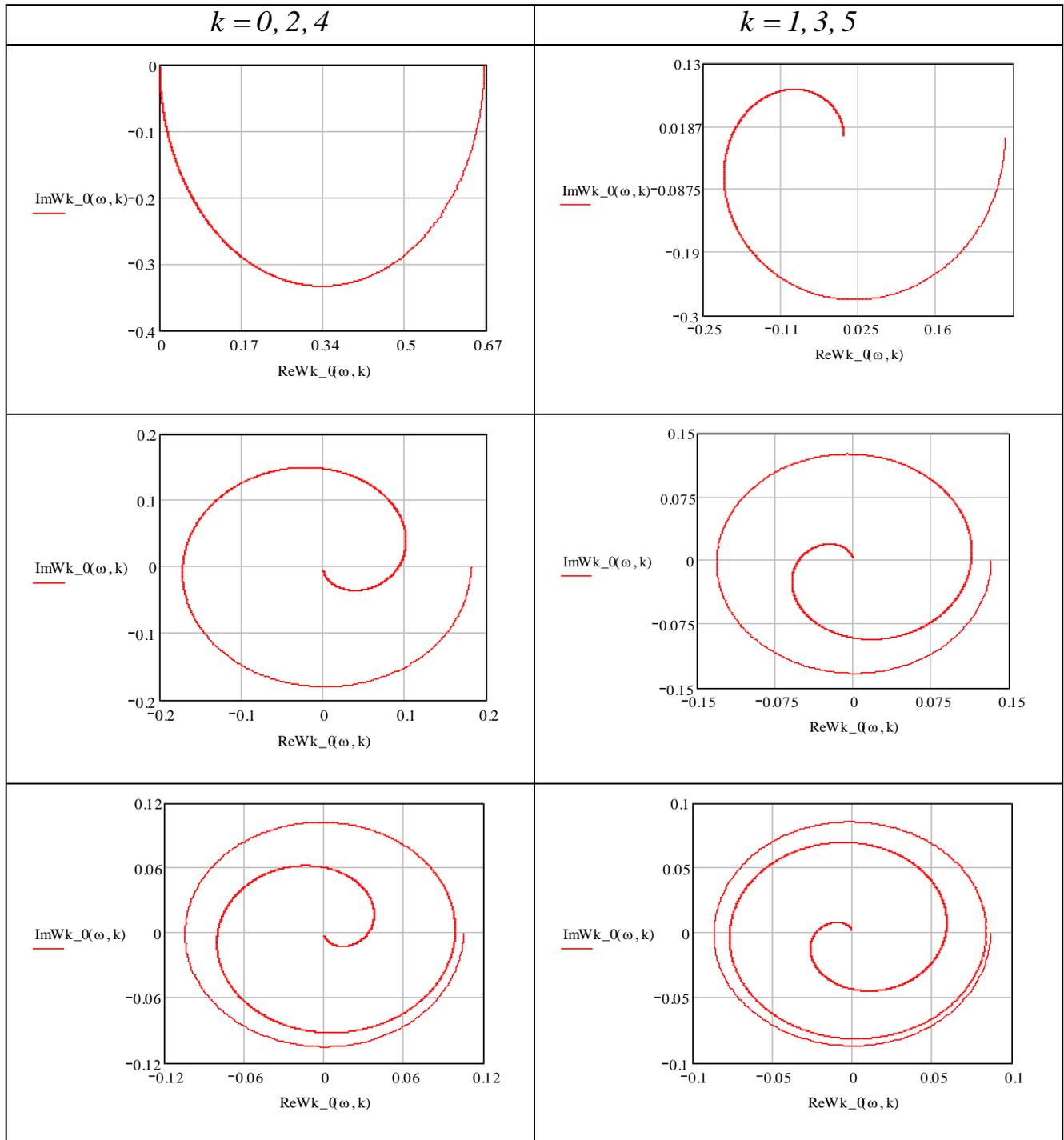
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )



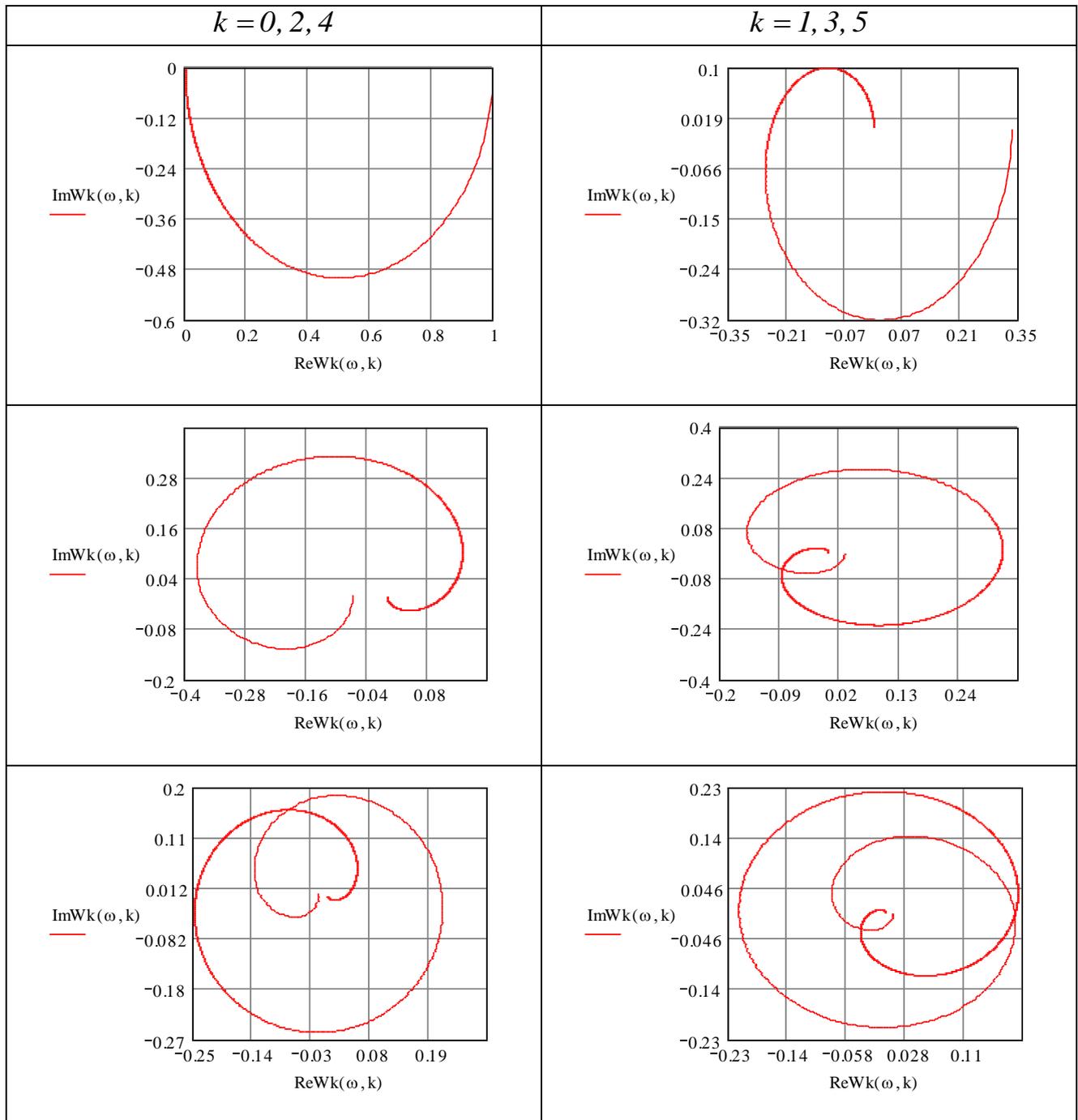
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = -0,5, \beta = 0$ )



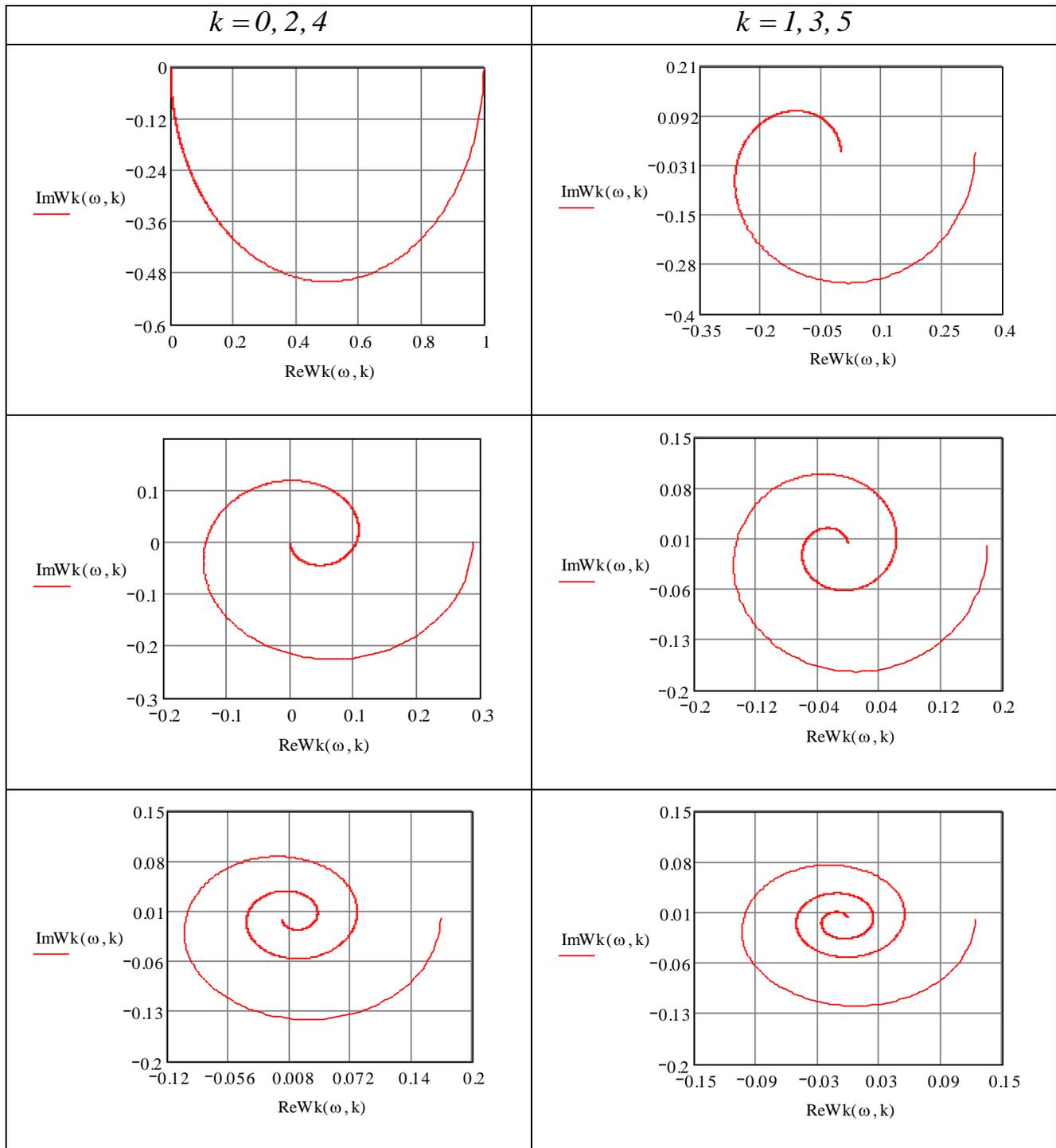
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0,5, \beta = 0$ )



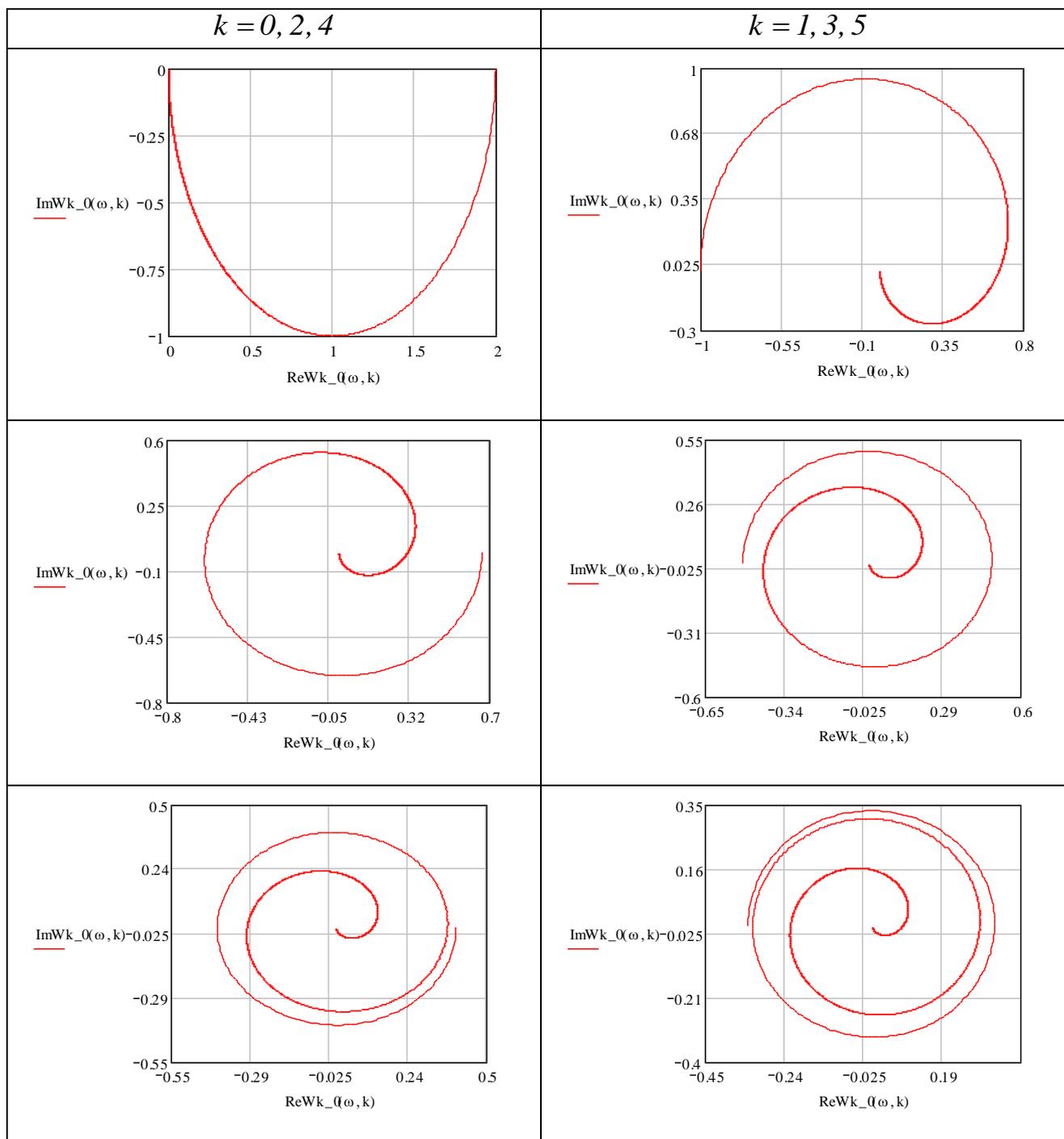
Частотные характеристики ортогональных функций Чебышева 1-ого рода



Частотные характеристики ортогональных функций Чебышева 2-ого рода

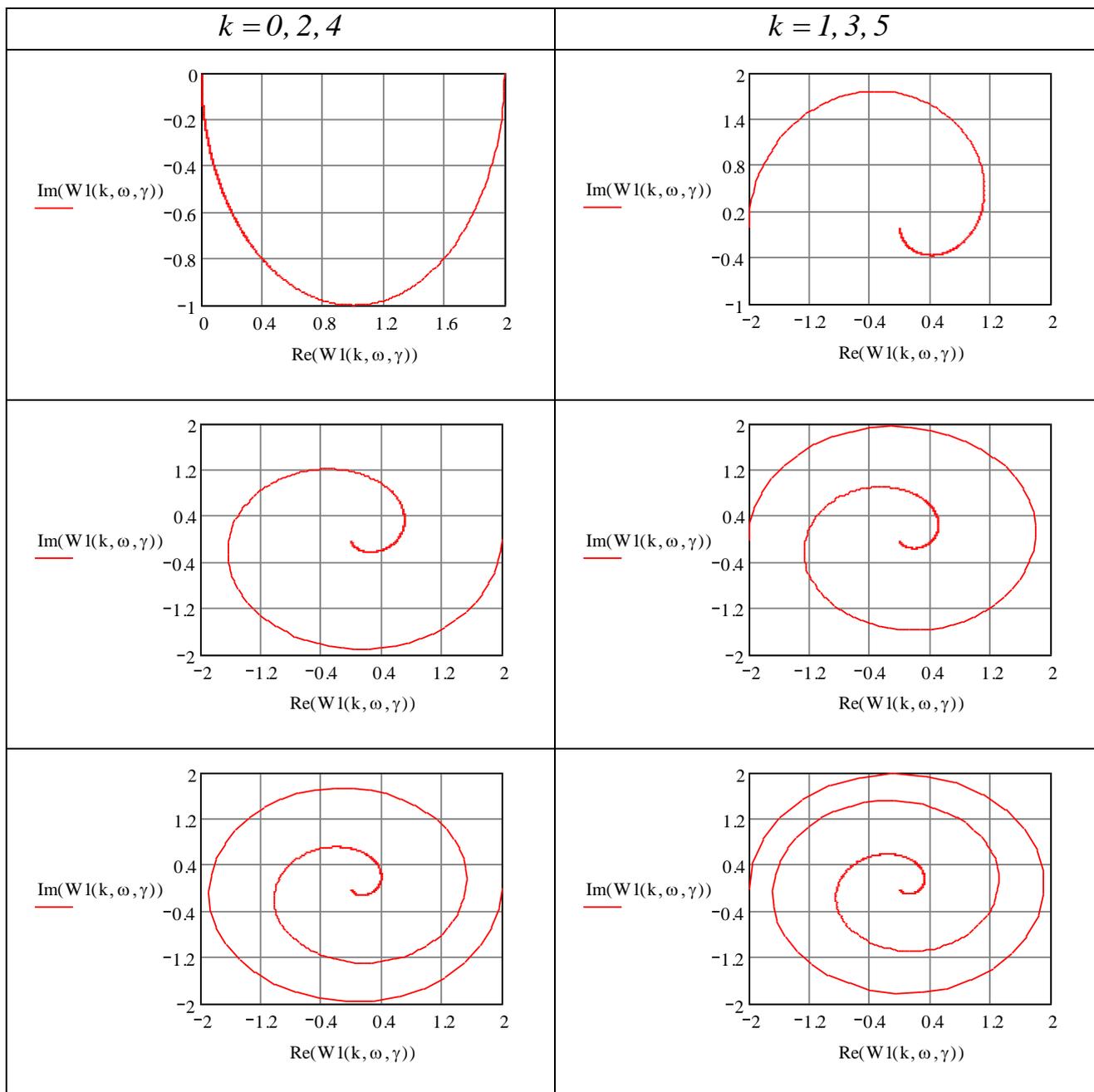


Частотные характеристики ортогональных функций Дирихле

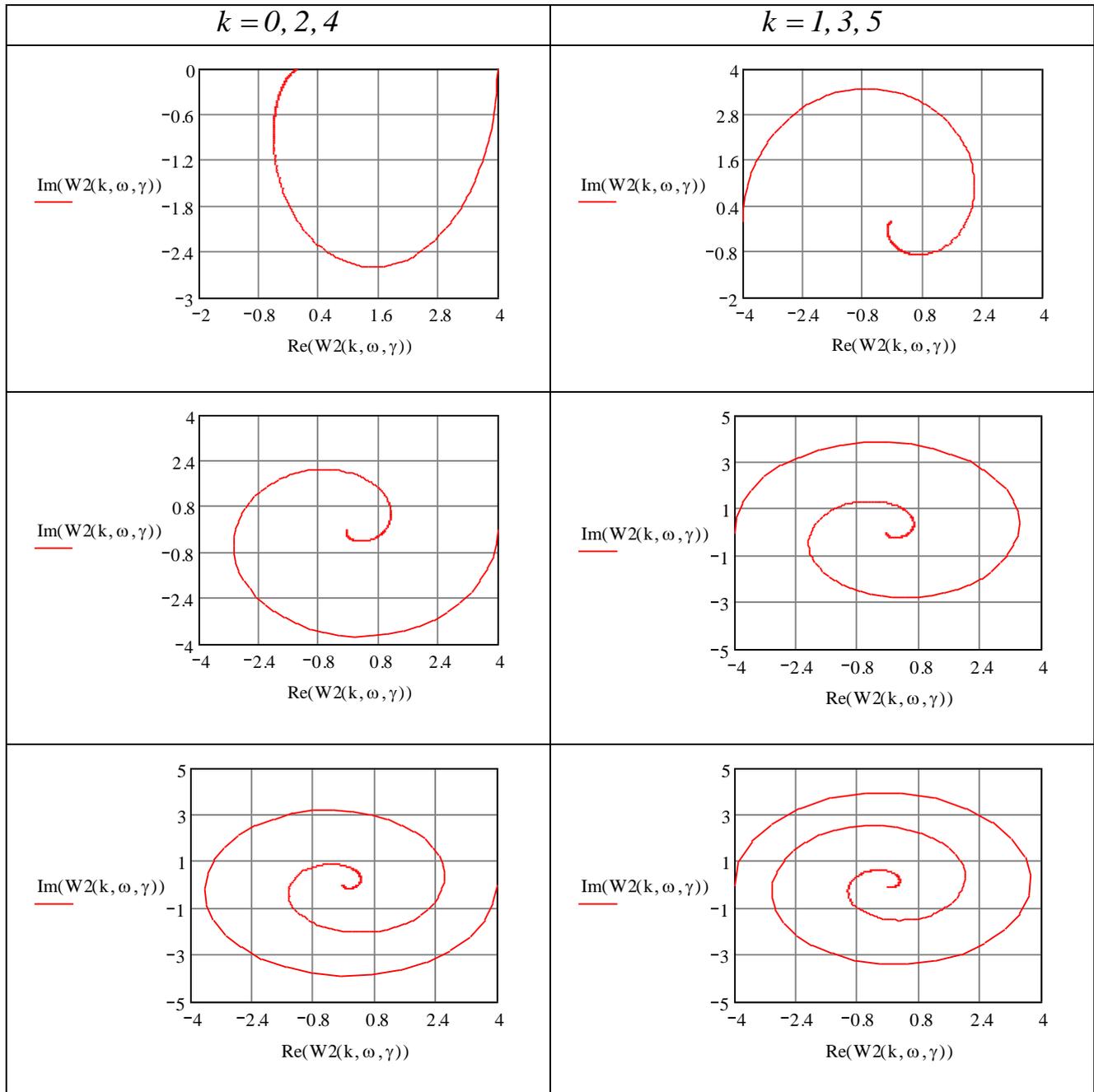


ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ

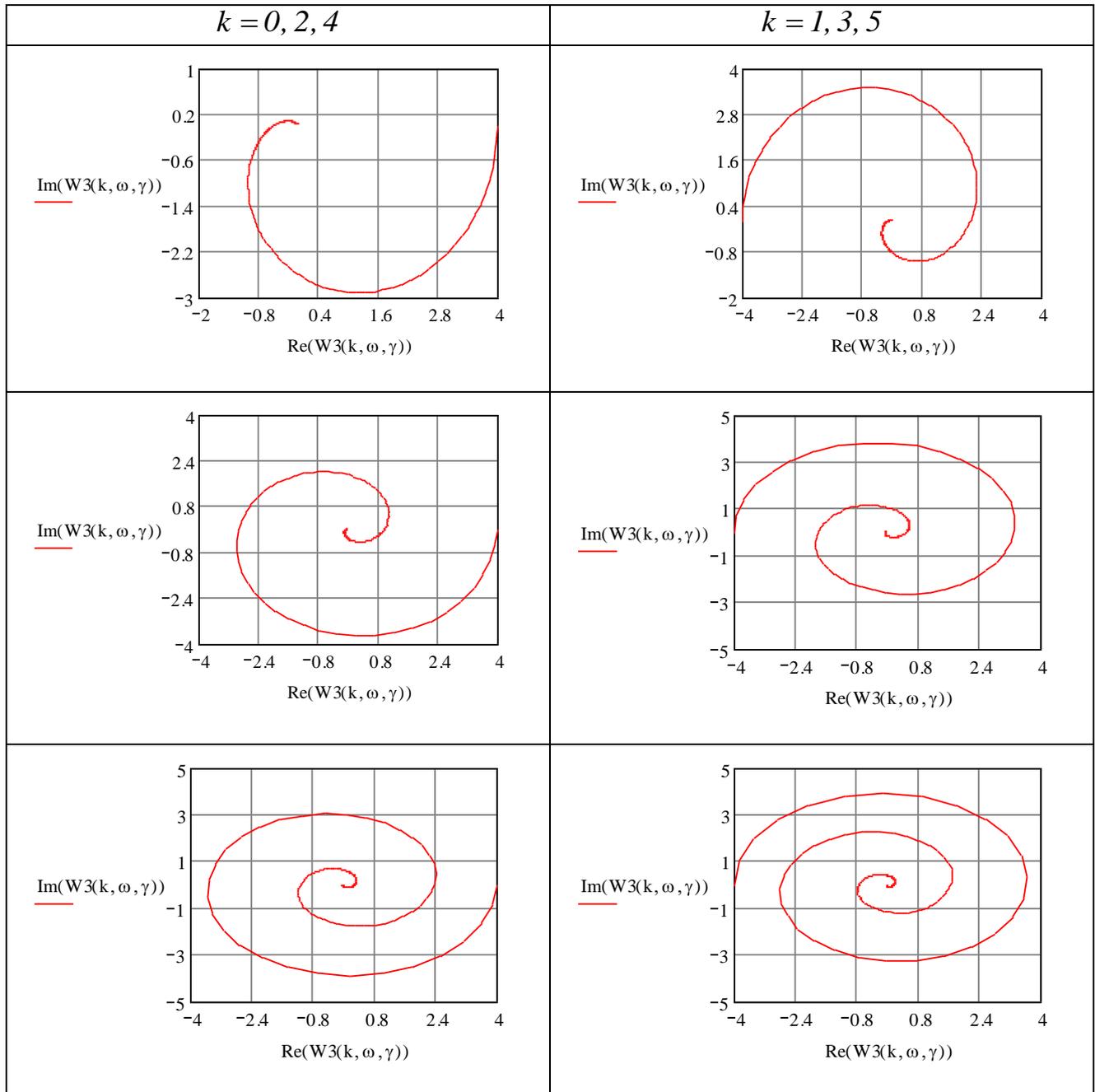
Частотные характеристики ортогональных фильтров Лагерра



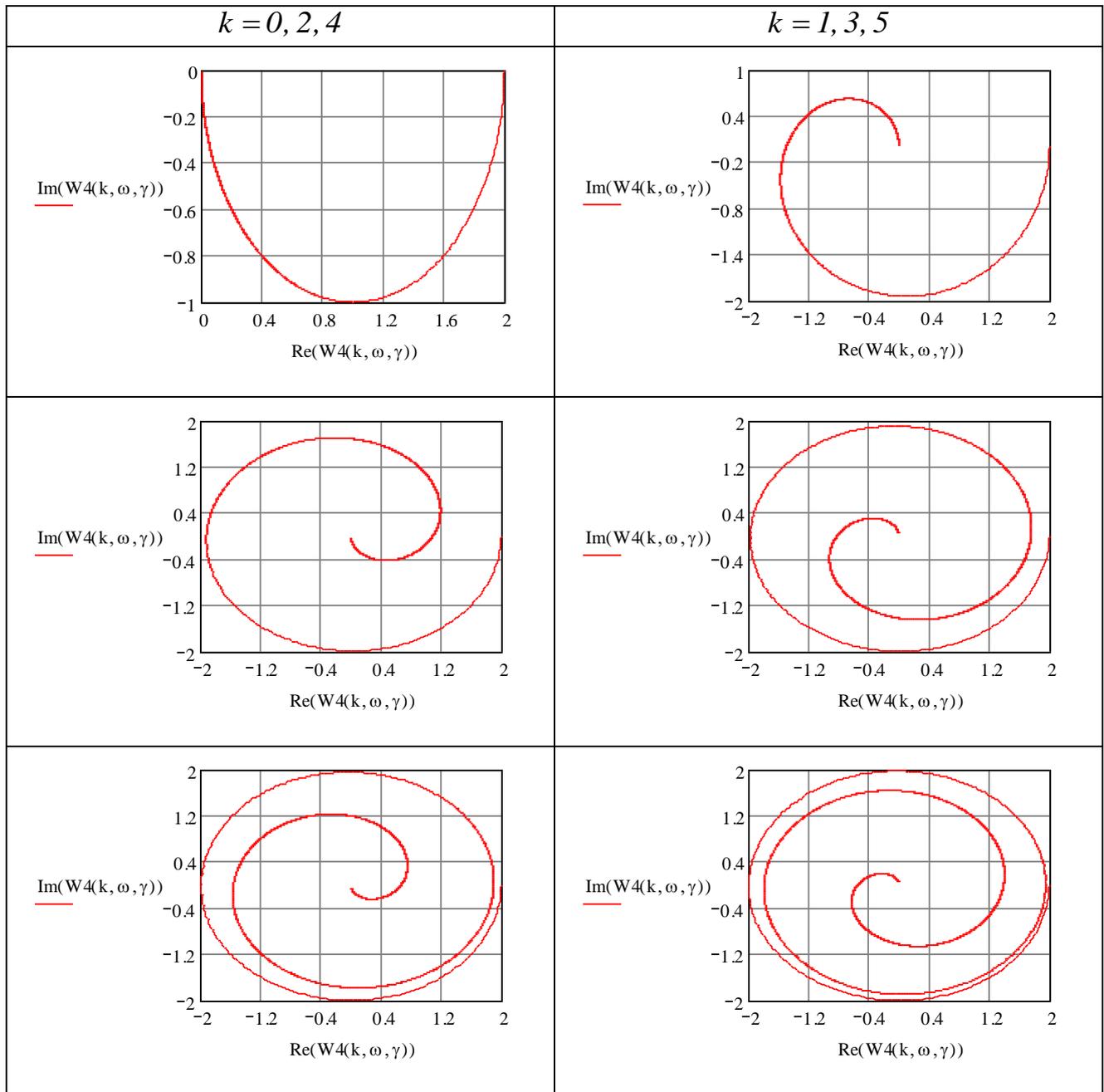
Частотные характеристики ортогональных фильтров Сонина-Лагерра ( $\alpha = 1$ )



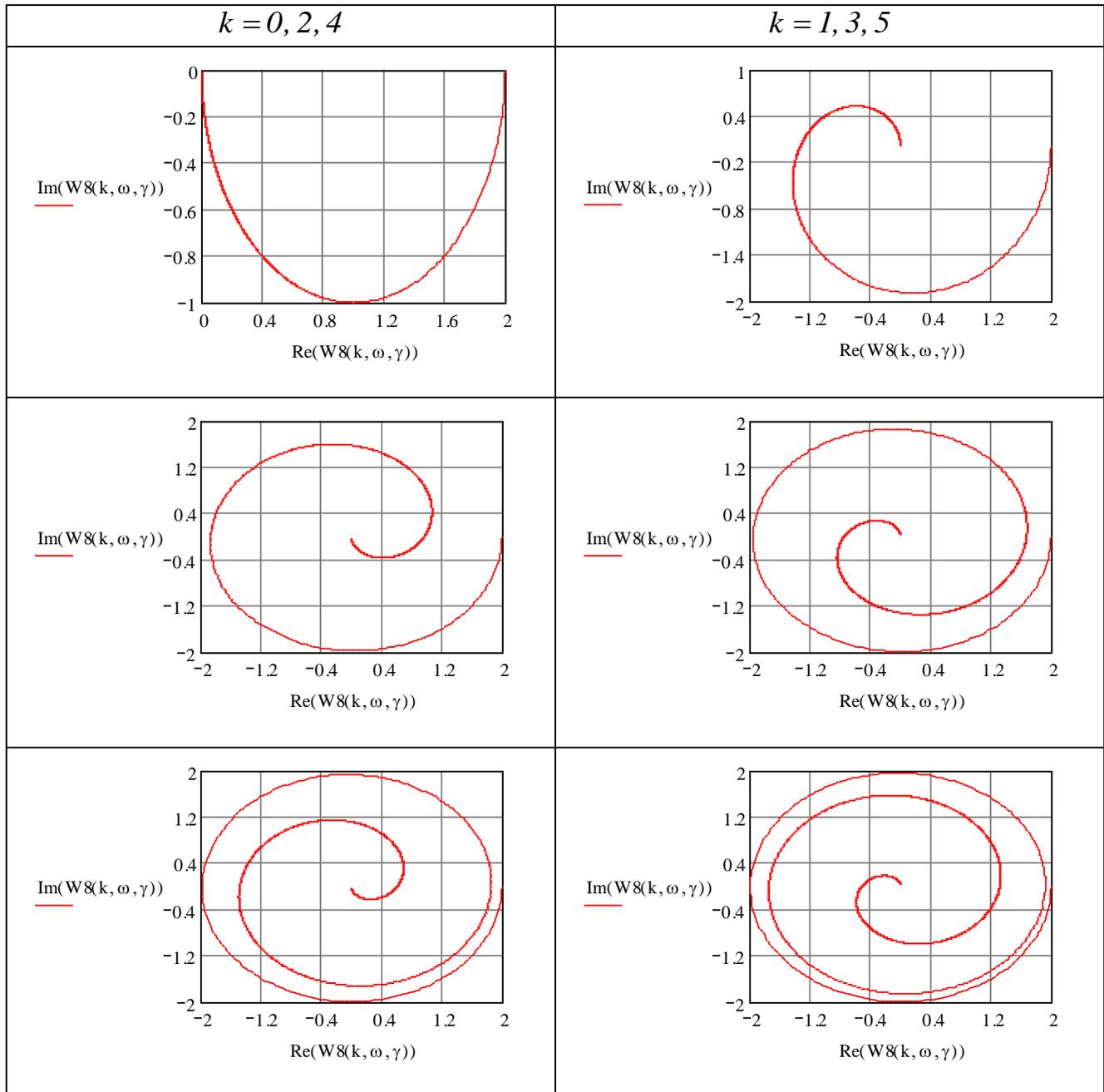
Частотные характеристики ортогональных фильтров Сонина-Лагерра ( $\alpha = 2$ )



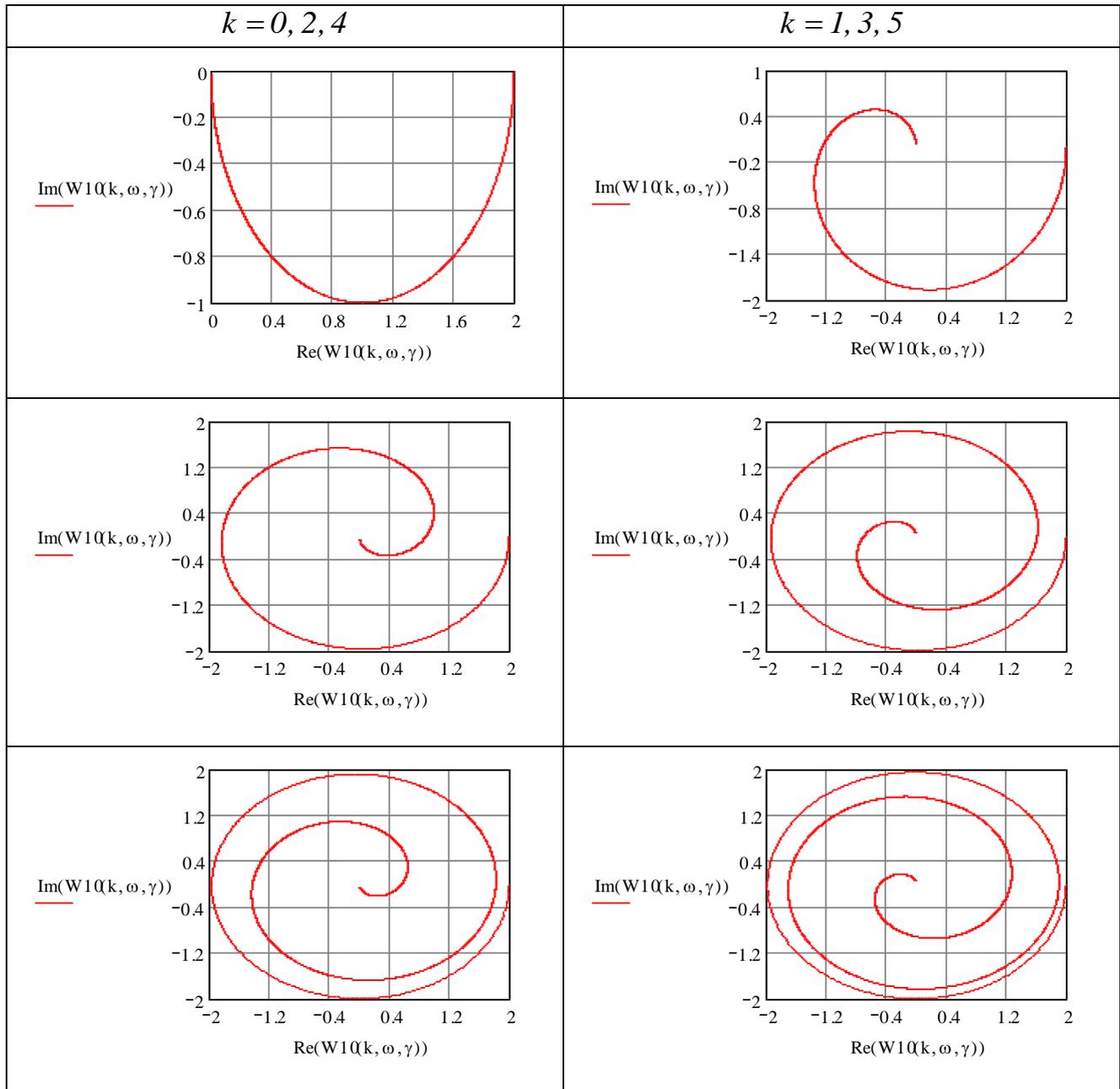
Частотные характеристики ортогональных фильтров Лежандра



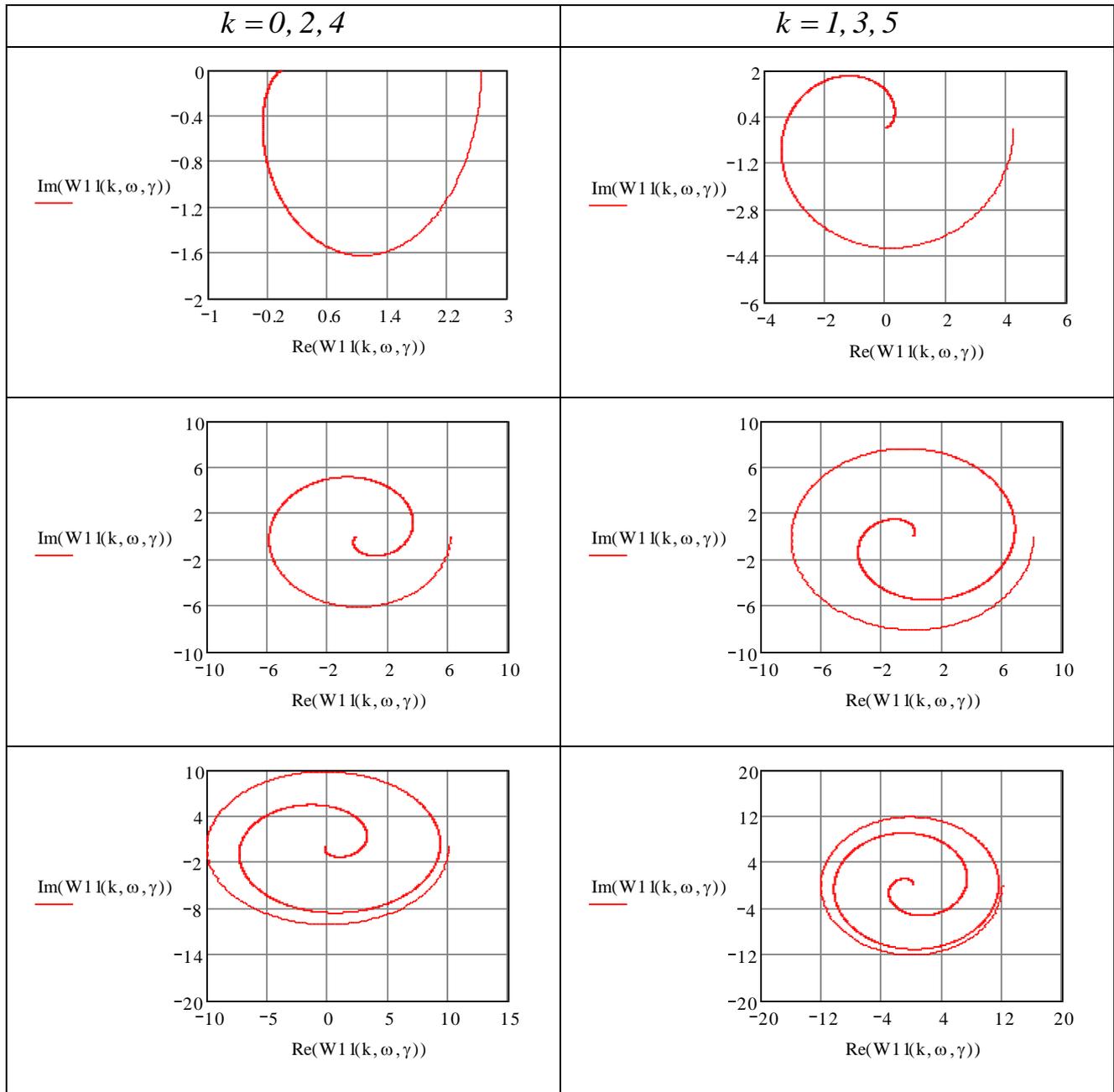
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )



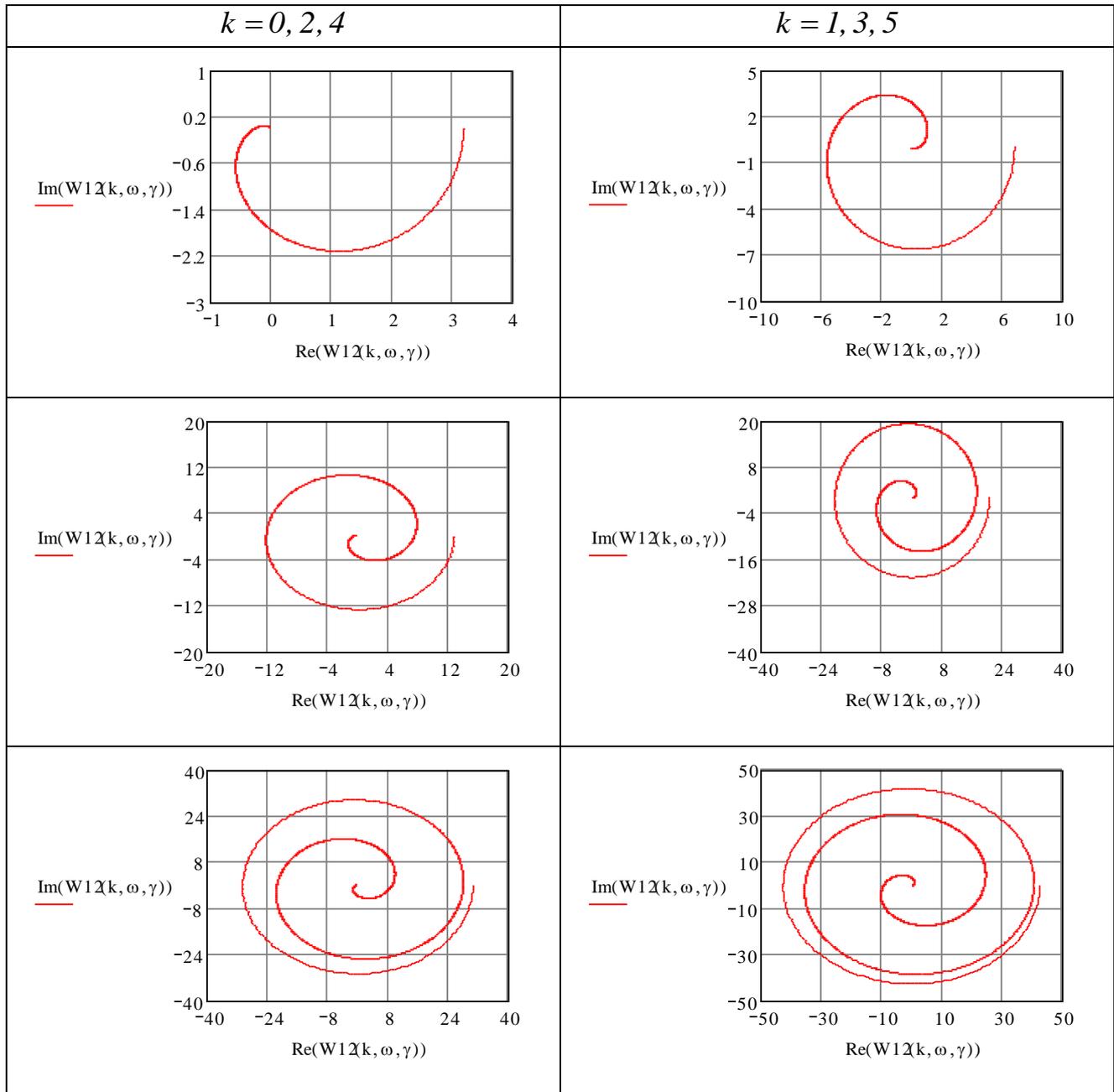
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )



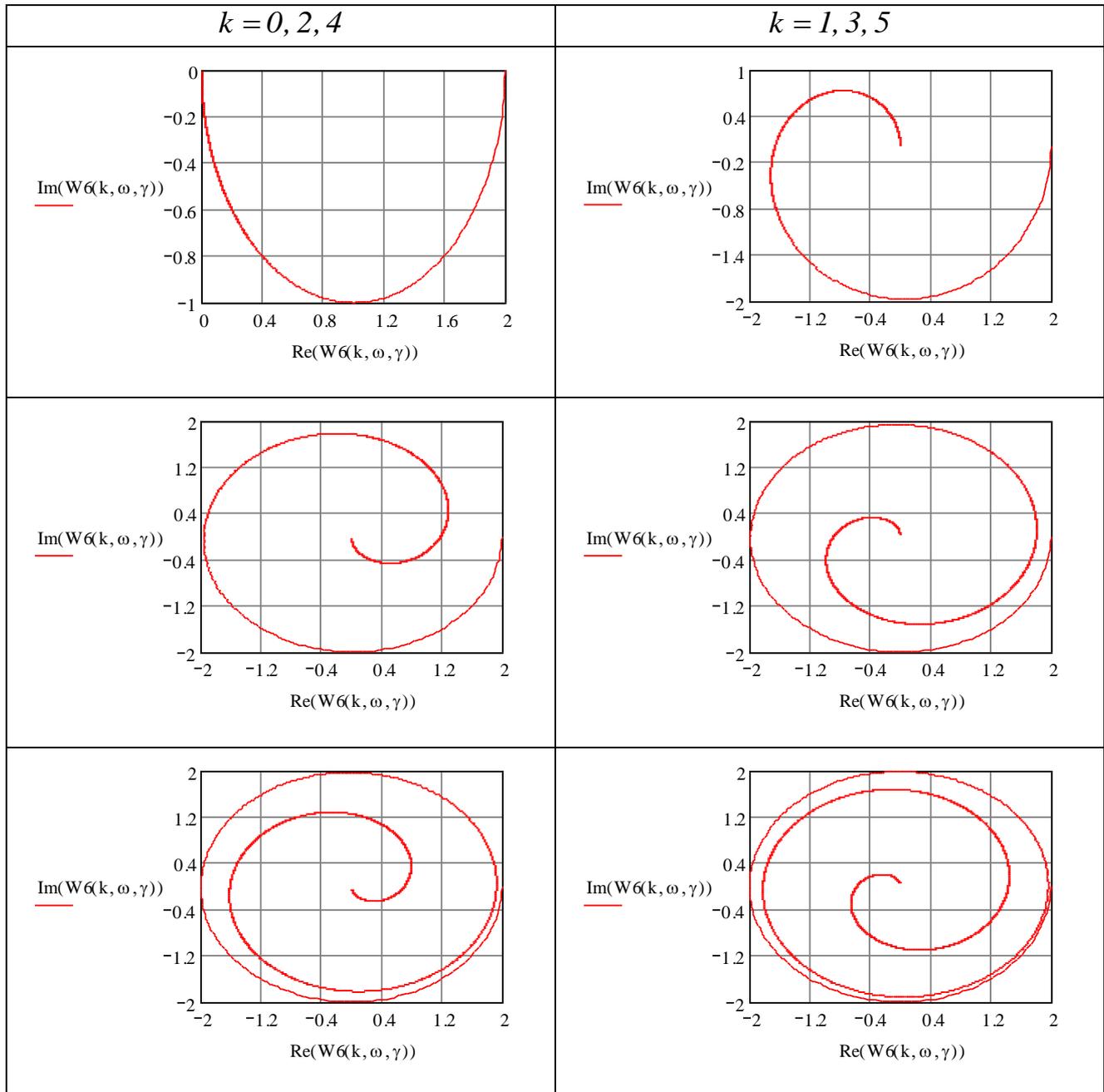
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )



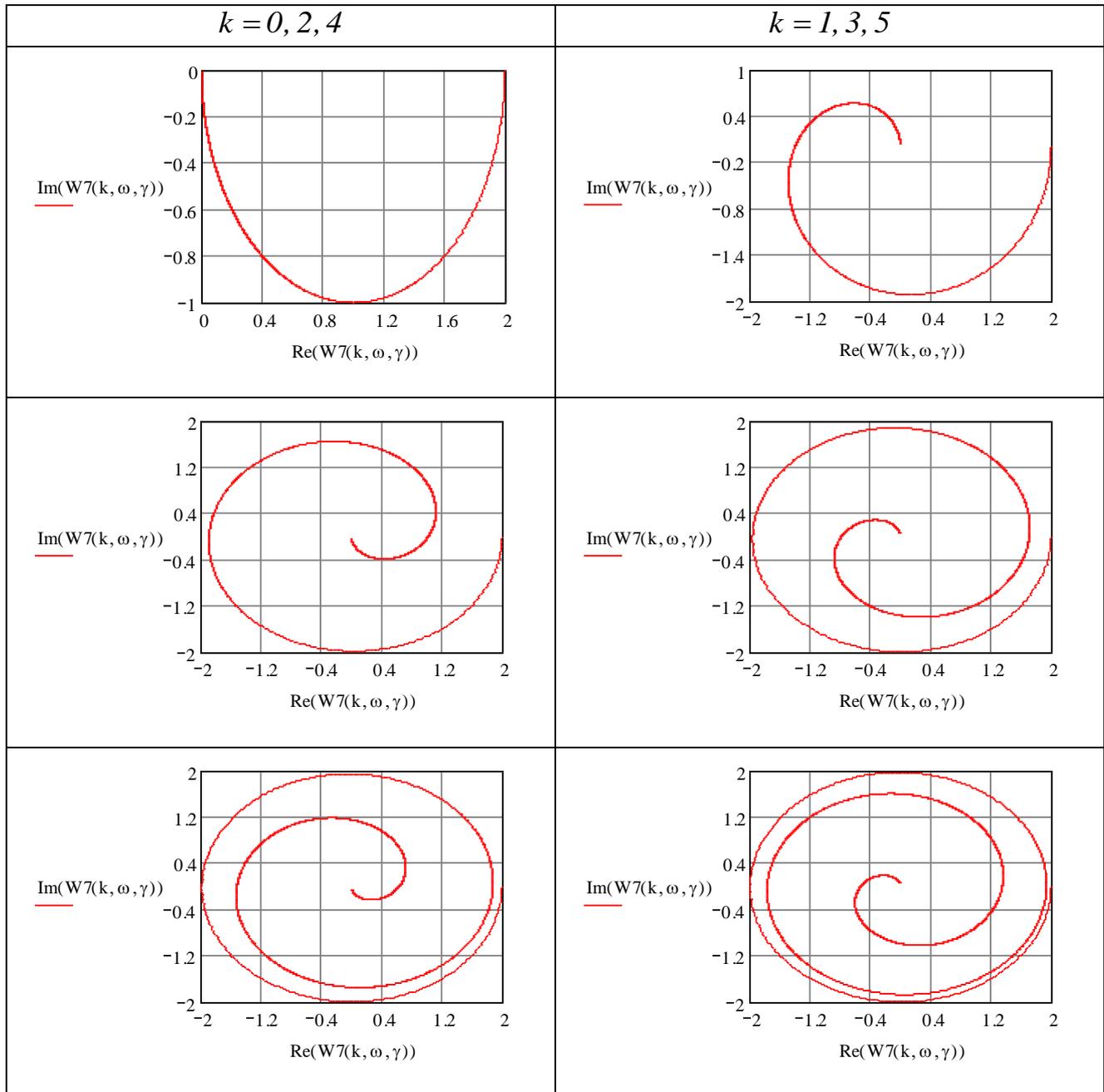
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )



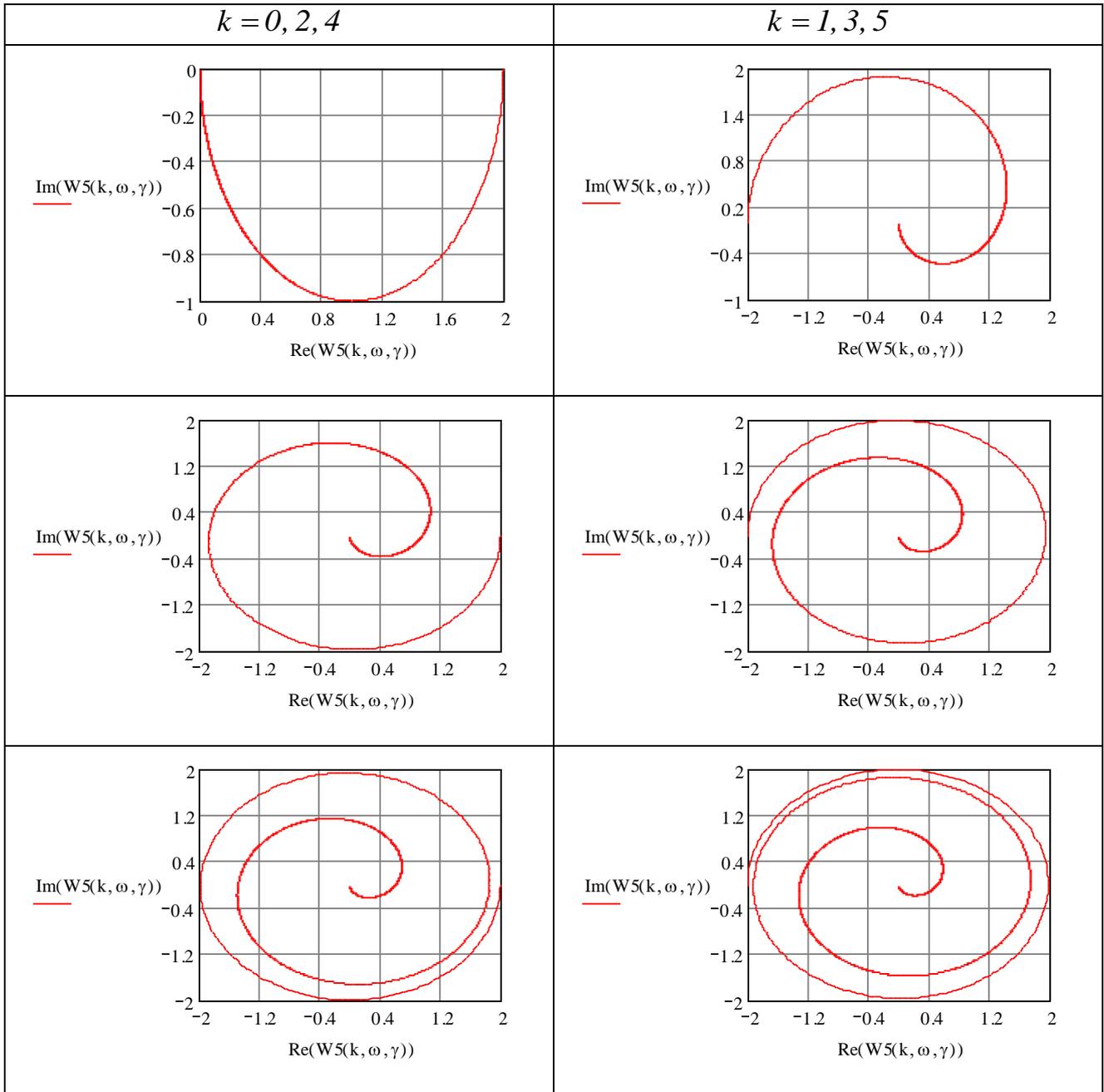
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = -0,5, \beta = 0$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0,5, \beta = 0$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Дирихле



**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ**

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$

Таблица П 6.1

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(2s+1))}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(s+1))}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(2s+3))}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+1}}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}}$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$

Таблица П 6.2

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma((4s+1)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma((4s+3)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(2s+1)}{(\lambda + \gamma(2s+1))^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(s+1)}{(\lambda + \gamma(s+1))^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(2s+3)}{(\lambda + \gamma(2s+3))^2}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}} (\lambda(s+2) + \gamma/2)$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} (\lambda(s+3) + \gamma/2)$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} (\lambda(s+4) + \gamma/2)$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$

Таблица П 6.3

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+1)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+3)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{(\lambda + \gamma(2s+1))^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{(\lambda + \gamma(s+1))^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{(\lambda + \gamma(2s+3))^2}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}} (\gamma/2 - \lambda s)$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} (\gamma/2 - \lambda(s+1))$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} (\gamma/2 - \lambda(s+2))$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)$

Таблица П 6.4

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma((4s+1)/2) + 3\gamma^2((4s+1)/2)^2]}{3(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^3}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma((4s+3)/2) + 3\gamma^2((4s+3)/2)^2]}{3(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^3}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(2s+1) + 3\gamma^2(2s+1)^2]}{3(\lambda + \gamma(2s+1))^3}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(s+1) + 3\gamma^2(s+1)^2]}{3(\lambda + \gamma(s+1))^3}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(2s+3) + 3\gamma^2(2s+3)^2]}{3(\lambda + \gamma(2s+3))^3}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} [3(\lambda(s+2) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+1)(s+2)]$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} [3(\lambda(s+3) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+2)(s+3)]$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+5}} [3(\lambda(s+4) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+3)(s+4)]$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

Таблица П 6.5

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(2s+1))}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(s+1))}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(2s+3))}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

Таблица П 6.6

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma((4s+1)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma((4s+3)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(2s+1))}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(s+1))}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(2s+3))}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

Таблица П 6.7

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+1)/2)}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+3)/2)}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица П.7.1 – Ортогональные функции Лагерра

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$L_k(\tau, \gamma)$	$L_k(\tau, \gamma) = \frac{(2k-1-\gamma\tau)}{k} L_{k-1}(\tau, \gamma) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(\tau, \gamma)$	$L_0(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $L_1(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (1 - \gamma\tau)$
2.	$\frac{\partial L_k(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial L_k(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\gamma L_{k-1}^{(1)}(\tau, \gamma) - \frac{\gamma}{2} L_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\partial L_0(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $\frac{\partial L_1(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (3 - \gamma\tau)$
3.	$\int L_k(\tau, \gamma) d\tau$	$\int L_k(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} L_k(\tau, \gamma) - 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \int L_\nu(\tau, \gamma) d\tau$	$\int L_0(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $\int L_1(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2}{\gamma} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (1 + \gamma\tau)$
4.	$\int \tau L_k(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau L_k(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{k+1}{\gamma} \int L_{k+1}(\tau, \gamma) d\tau + \frac{2k+1}{\gamma} \int L_k(\tau, \gamma) d\tau -$ $-\frac{k}{\gamma} \int L_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau L_0(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (2 + \gamma\tau);$ $\int \tau L_1(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (6 + 3\gamma\tau + \gamma^2 \tau^2)$

Таблица П.7.2 – Ортогональные функции Сонина-Лагерра (1)

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma) = \frac{(2k - \gamma\tau)}{k} L_{k-1}^{(1)}(\tau, \gamma) - L_{k-2}^{(1)}(\tau, \gamma)$	$L_0^{(1)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $L_1^{(1)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}(2 - \gamma\tau)$
2.	$\frac{\partial L_k^{(1)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial L_k^{(1)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\gamma L_{k-1}^{(2)}(\tau, \gamma) - \frac{\gamma}{2} L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\partial L_0^{(1)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $\frac{\partial L_1^{(1)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}(4 - \gamma\tau)$
3.	$\int L_k^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau$	$\int L_k^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = \int \tau L_k(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau + \int L_{k-1}^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau;$ $\int L_k^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{2} \int \tau L_{k+1}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau + \frac{1}{\gamma} \int L_{k+1}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau -$ $-\frac{1}{\gamma} \tau L_{k+1}(\tau, \gamma)$	$\int L_0^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}(2 + \gamma\tau);$ $\int L_1^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}(4 + 2\gamma\tau + \gamma^2\tau^2)$
4.	$\int \tau L_k^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau L_k^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{k+1}{\gamma} \int L_{k+1}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau + \frac{2k+2}{\gamma} \int L_k^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau -$ $-\frac{k+1}{\gamma} \int L_{k-1}^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau L_0^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma^3} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \times$ $\times (8 + 4\gamma\tau + \gamma^2\tau^2);$ $\int \tau L_1^{(1)}(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2}{\gamma^3} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \times$ $\times (32 + 16\gamma\tau + 4\gamma^2\tau^2 + \gamma^3\tau^3)$

Таблица П.7,3 – Ортогональные функции Лежандра

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$L_k(\tau, \gamma) = \frac{(2k-1)}{k}(1-2e^{-2\gamma\tau})Leg_{k-1}(\tau, \gamma) - \frac{k-1}{k}Leg_{k-2}(\tau, \gamma)$	$Leg_0(\tau, \gamma) = e^{-\gamma\tau};$ $Leg_1(\tau, \gamma) = e^{-\gamma\tau}(1-2e^{-2\gamma\tau})$
2.	$\frac{\partial Leg_k(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial Leg_k(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = \frac{\partial Leg_{k-2}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} - \gamma [(2k+1)Leg_k(\tau, \gamma) - 2(2k-1)Leg_{k-1}(\tau, \gamma) + (2k-3)Leg_{k-2}(\tau, \gamma)]$	$\frac{\partial Leg_0(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\gamma e^{-\gamma\tau};$ $\frac{\partial Leg_1(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\gamma e^{-\gamma\tau}(1-6e^{-2\gamma\tau})$
3.	$\int Leg_k(\tau, \gamma)d\tau$	$\int Leg_k(\tau, \gamma)d\tau = \frac{2(2k-1)}{2k+1} \int Leg_{k-1}(\tau, \gamma)d\tau - \frac{(2k-3)}{2k+1} \int Leg_{k-2}(\tau, \gamma)d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+1)} [Leg_k(\tau, \gamma) - Leg_{k-2}(\tau, \gamma)]$	$\int Leg_0(\tau, \gamma)d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau};$ $\int Leg_1(\tau, \gamma)d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-2\gamma\tau}\right)$
4.	$\int \tau Leg_k(\tau, \gamma)d\tau$	$\int \tau Leg_k(\tau, \gamma)d\tau = \frac{2(2k-1)}{2k+1} \int \tau Leg_{k-1}(\tau, \gamma)d\tau - \frac{(2k-3)}{2k+1} \int \tau Leg_{k-2}(\tau, \gamma)d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+1)} \left[ \tau (Leg_k(\tau, \gamma) - Leg_{k-2}(\tau, \gamma)) - \int Leg_k(\tau, \gamma)d\tau + \int Leg_{k-2}(\tau, \gamma)d\tau \right]$	$\int \tau Leg_0(\tau, \gamma)d\tau = -e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right);$ $\int \tau Leg_1(\tau, \gamma)d\tau = 2e^{-3\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{3\gamma} + \frac{1}{9\gamma^2} \right) - e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right)$

Таблица П.7.4 – Ортогональные функции Якоби  $(-1/2, 0)$ 

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) = \frac{[(4k-1)(4k-5)(1-2e^{-2\gamma\tau})+1](4k-3)}{4k(2k-1)(4k-5)} P_{k-1}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) -$ $- \frac{(k-1)(2k-3)(4k-1)}{k(2k-1)(4k-5)} P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$P_0^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $P_1^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2\gamma\tau} \right)$
2.	$\frac{\partial P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = \frac{\partial P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} - \gamma \left[ \frac{(4k+1)}{2} P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) - (4k-3) P_{k-1}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) + \right.$ $\left. + \frac{(4k-7)}{2} P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) \right]$	$\frac{\partial P_0^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $\frac{\partial P_1^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{4} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} (1 - 15e^{-2\gamma\tau})$
3.	$\int P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(4k-3)}{4k+1} \int P_{k-1}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau -$ $- \frac{(4k-7)}{4k+1} \int P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{2}{\gamma(4k+1)} [P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)]$	$\int P_0^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}};$ $\int P_1^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \left( 1 - \frac{3}{5} e^{-2\gamma\tau} \right)$
4.	$\int \tau P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(4k-3)}{4k+1} \int \tau P_{k-1}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau -$ $- \frac{(4k-7)}{4k+1} \int \tau P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{2}{\gamma(4k+1)} \left[ \tau (P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)) - \right.$ $\left. - \int P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau + \int P_{k-2}^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau \right]$	$\int \tau P_0^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \left( \frac{2\tau}{\gamma} + \frac{4}{\gamma^2} \right);$ $\int \tau P_1^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{3}{2} e^{-\frac{5\gamma\tau}{2}} \left( \frac{2\tau}{5\gamma} + \frac{4}{25\gamma^2} \right) -$ $- \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}} \left( \frac{2\tau}{\gamma} + \frac{4}{\gamma^2} \right)$

Таблица П.7.5 – Ортогональные функции Якоби (1/2,0)

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) = \frac{[(4k+1)(4k-3)(1-2e^{-2\gamma\tau})+1](4k-1)}{4k(2k+1)(4k-3)} P_{k-1}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) - \frac{(k-1)(2k-1)(4k+1)}{k(2k+1)(4k-3)} P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$P_0^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}};$ $P_1^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) = e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}} \left( \frac{3}{2} - \frac{5}{2} e^{-2\gamma\tau} \right)$
2.	$\frac{\partial P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = \frac{\partial P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} - \gamma \left[ \frac{(4k+3)}{2} P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) - (4k-1) P_{k-1}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) + \frac{(4k-5)}{2} P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) \right]$	$\frac{\partial P_0^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{3\gamma}{2} e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}};$ $\frac{\partial P_1^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\frac{\gamma}{4} e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}} (9 - 35 e^{-2\gamma\tau})$
3.	$\int P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(4k-1)}{4k+3} \int P_{k-1}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{(4k-5)}{4k+3} \int P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{2}{\gamma(4k+3)} [P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)]$	$\int P_0^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{3\gamma} e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}};$ $\int P_1^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}} \left( 1 - \frac{5}{7} e^{-2\gamma\tau} \right)$
4.	$\int \tau P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(4k-1)}{4k+3} \int \tau P_{k-1}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{(4k-5)}{4k+3} \int \tau P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{2}{\gamma(4k+3)} \left[ \tau (P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)) - \int P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau + \int P_{k-2}^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau \right]$	$\int \tau P_0^{(1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}} \left( \frac{2\tau}{3\gamma} + \frac{4}{9\gamma^2} \right);$ $\int \tau P_1^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{5}{2} e^{-\frac{7\gamma\tau}{2}} \left( \frac{2\tau}{7\gamma} + \frac{4}{49\gamma^2} \right) - \frac{3}{2} e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}} \left( \frac{2\tau}{3\gamma} + \frac{4}{9\gamma^2} \right)$

Таблица П.7.6 – Ортогональные функции Якоби (1,0)

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) = \frac{[(2k-1)(2k+1)(1-2e^{-\gamma\tau})+1]}{(2k-1)(k+1)} P_{k-1}^{(1,0)}(\tau, \gamma) - \frac{(k-1)(2k+1)}{(2k-1)(k+1)} P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$P_0^{(1,0)}(\tau, \gamma) = e^{-\gamma\tau};$ $P_1^{(1,0)}(\tau, \gamma) = e^{-\gamma\tau}(2-3e^{-\gamma\tau})$
2.	$\frac{\partial P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = \frac{\partial P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} - \gamma [(k+1)P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) - 2kP_{k-1}^{(1,0)}(\tau, \gamma) + (k-1)P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma)]$	$\frac{\partial P_0^{(1,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\gamma e^{-\gamma\tau};$ $\frac{\partial P_1^{(1,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -2\gamma e^{-\gamma\tau}(1-3e^{-\gamma\tau})$
3.	$\int P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2k}{k+1} \int P_{k-1}^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{(k-1)}{k+1} \int P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(k+1)} [P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma)]$	$\int P_0^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau};$ $\int P_1^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau} \left( 2 - \frac{3}{2} e^{-\gamma\tau} \right)$
4.	$\int \tau P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2k}{k+1} \int \tau P_{k-1}^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{(k-1)}{k+1} \int \tau P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(k+1)} \left[ \tau (P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma)) - \int P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau + \int P_{k-2}^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau \right]$	$\int \tau P_0^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right);$ $\int \tau P_1^{(1,0)}(\tau, \gamma) d\tau = 3e^{-2\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{2\gamma} + \frac{1}{4\gamma^2} \right) - 2e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right)$

Таблица П.7.7 – Ортогональные функции Якоби (2,0)

№	Вид соотношения	Рекуррентное соотношение	Частные случаи
1.	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) = \frac{[k(k+1)(1-2e^{-2\gamma\tau})+1](2k+1)}{k^2(k+2)} P_{k-1}^{(2,0)}(\tau, \gamma) -$ $- \frac{(k-1)(k+1)^2}{k^2(k+2)} P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$P_0^{(2,0)}(\tau, \gamma) = e^{-3\gamma\tau};$ $P_1^{(2,0)}(\tau, \gamma) = e^{-3\gamma\tau}(3-4e^{-2\gamma\tau})$
2.	$\frac{\partial P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau}$	$\frac{\partial P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = \frac{\partial P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} - \gamma [(2k+3)P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) - 2(2k+1)P_{k-1}^{(2,0)}(\tau, \gamma) +$ $+ (2k-1)P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma)]$	$\frac{\partial P_0^{(2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -3\gamma e^{-3\gamma\tau};$ $\frac{\partial P_1^{(2,0)}(\tau, \gamma)}{\partial \tau} = -\gamma e^{-3\gamma\tau}(9-20e^{-2\gamma\tau})$
3.	$\int P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(2k+1)}{2k+3} \int P_{k-1}^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau -$ $- \frac{(2k-1)}{2k+3} \int P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+3)} [P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma)]$	$\int P_0^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{3\gamma} e^{-3\gamma\tau};$ $\int P_1^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{1}{\gamma} e^{-3\gamma\tau} \left(1 - \frac{4}{5} e^{-2\gamma\tau}\right)$
4.	$\int \tau P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau$	$\int \tau P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(2k+1)}{2k+3} \int \tau P_{k-1}^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau -$ $- \frac{(2k-1)}{2k+3} \int \tau P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+3)} \left[ \tau (P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) - P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma)) -$ $- \int P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau + \int P_{k-2}^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau \right]$	$\int \tau P_0^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = -e^{-3\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{3\gamma} + \frac{1}{9\gamma^2} \right);$ $\int \tau P_1^{(2,0)}(\tau, \gamma) d\tau = 4e^{-5\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{5\gamma} + \frac{1}{25\gamma^2} \right) -$ $- 3e^{-3\gamma\tau} \left( \frac{\tau}{3\gamma} + \frac{1}{9\gamma^2} \right)$

**Аналитические выражения, используемые при вычислении минимальной погрешности аппроксимации**

Вид функции	Вид интеграла	Аналитическое выражение
Сонина-Лагерра (1) $L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\int (a_j + b_j \tau)^2 \tau d\tau$	$\frac{a_j^2 \tau^2}{2} + \frac{2a_j b_j \tau^3}{3} + \frac{b_j^2 \tau^4}{4} + C$
Сонина-Лагерра (2) $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\int (a_j + b_j \tau)^2 \tau^2 d\tau$	$\frac{a_j^2 \tau^3}{3} + \frac{a_j b_j \tau^4}{2} + \frac{b_j^2 \tau^5}{5} + C$
Якоби (0, 1) $P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\int (a_j + b_j \tau)^2 (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau$	$a_j^2 \left( \tau + \frac{e^{-2\gamma\tau}}{2\gamma} \right) + a_j b_j \left( \tau^2 + \frac{e^{-2\gamma\tau}}{2\gamma^2} (2\gamma\tau + 1) \right) + b_j^2 \left( \frac{\tau^3}{3} + \frac{e^{-2\gamma\tau}}{8\gamma^3} ((2\gamma\tau + 1)^2 + 1) \right) + C$
Якоби (0, 2) $P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\int (a_j + b_j \tau)^2 (1 - e^{-2\gamma\tau})^2 d\tau$	$a_j^2 \left( \tau + \frac{e^{-2\gamma\tau}}{\gamma} - \frac{e^{-4\gamma\tau}}{4\gamma} \right) + a_j b_j \left( \tau^2 + \frac{e^{-2\gamma\tau}}{\gamma^2} (2\gamma\tau + 1) - \frac{e^{-4\gamma\tau}}{8\gamma^2} (4\gamma\tau + 1) \right) +$ $+ b_j^2 \left( \frac{\tau^3}{3} + \frac{e^{-2\gamma\tau}}{4\gamma^3} ((2\gamma\tau + 1)^2 + 1) - \frac{e^{-4\gamma\tau}}{64\gamma^3} ((4\gamma\tau + 1)^2 + 1) \right) + C$

Обобщенные спектральные характеристики

№	$K_x(\tau)$	$\omega_0$	$S_x(\omega_0)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sigma_x^2}{9\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)}$	$\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2+\omega_0^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+(\omega_0-\omega_0)^2\right]\left[\alpha^2+(\omega_0+\omega_0)^2\right]} \right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$

Продолжение приложения 15

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{9\pi\alpha}{4}$	$\frac{\alpha(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \pi\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0\right)^2\right]\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0\right)^2\right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

## ЗАДАНИЕ 1. «ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ»

**Цель работы:** изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

1. Представление ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка

1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

$$P_1(k, x) := \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot \left[ \frac{d^k}{dx^k} \left[ (1-x)^{k+1} \cdot (1+x)^k \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_1(0, x) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

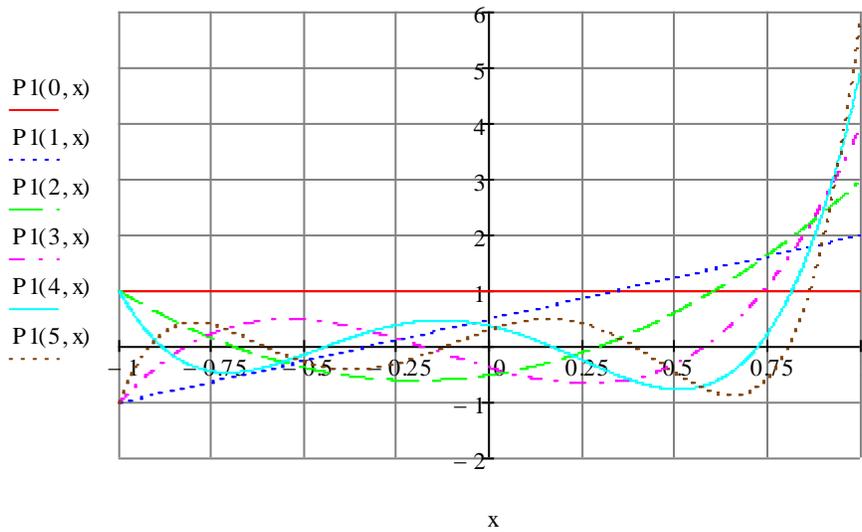
$$P_1(1, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$P_1(2, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{5 \cdot x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$$

$$P_1(3, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{35x^3}{8} + \frac{15x^2}{8} - \frac{15x}{8} - \frac{3}{8}$$

$$P_1(4, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{63x^4}{8} + \frac{7x^3}{2} - \frac{21x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$P_1(5, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{231x^5}{16} + \frac{105x^4}{16} - \frac{105x^3}{8} - \frac{35x^2}{8} + \frac{35x}{16} + \frac{5}{16}$$



1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

$$P(k, x) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{s! \cdot (k-s)!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^s \right]$$

$$P(0, x) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

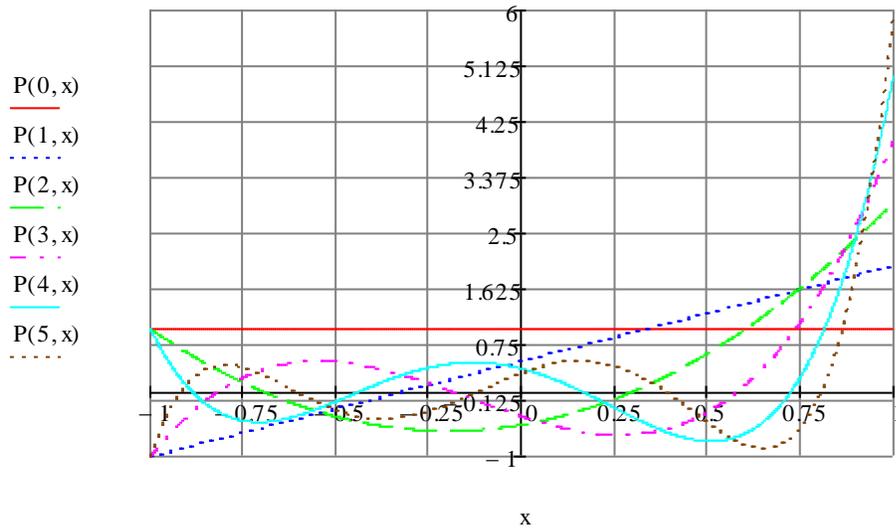
$$P(1, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$P(2, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{5 \cdot x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$$

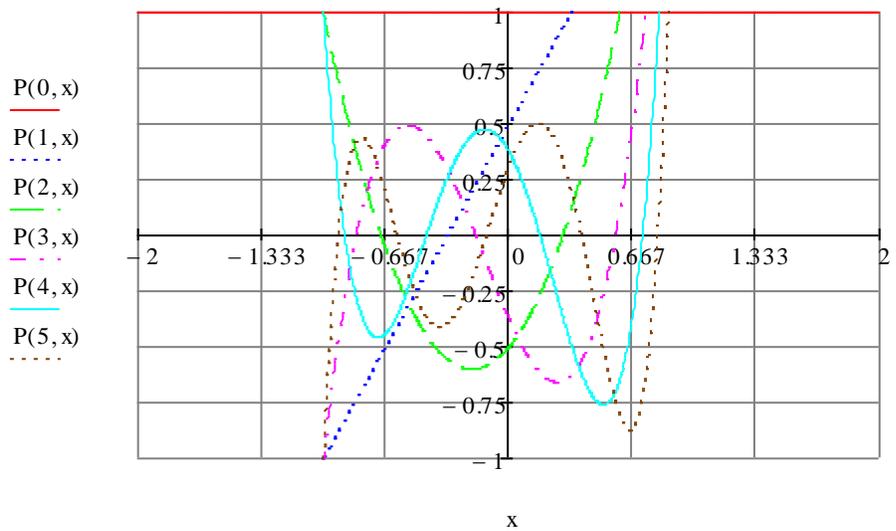
$$P(3, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{35 \cdot x^3}{8} + \frac{15 \cdot x^2}{8} - \frac{15 \cdot x}{8} - \frac{3}{8}$$

$$P(4, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{63 \cdot x^4}{8} + \frac{7 \cdot x^3}{2} - \frac{21 \cdot x^2}{4} - \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$P(5, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{231 \cdot x^5}{16} + \frac{105 \cdot x^4}{16} - \frac{105 \cdot x^3}{8} - \frac{35 \cdot x^2}{8} + \frac{35 \cdot x}{16} + \frac{5}{16}$$



2. Определить интервал ортогональности  $[a, b]$ . Рассчитать ортогональные полиномы  $k$ -ого порядка на концах интервала ортогональности.



a := -1

k := 0..5

b := 1

P(k, -1) :

P(k, 1) =

1
-1
1
-1
1
-1

1
2
3
4
5
6

### 3. Определение нормы ортогональных полиномов.

3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1. 7).

Результат - в виде матрицы значений с разрядностью (k, m), привести графическую интерпретацию.

k := 6

$\mu(x) := 1 - x$

i := 0..k - 1

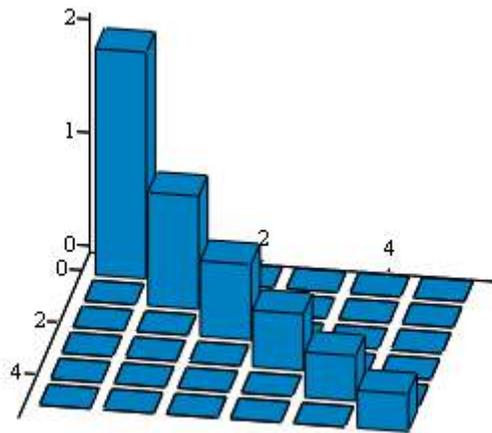
m := k

j := 0..m - 1

$$\text{NormP}(i, j) := \int_a^b P(i, x) \cdot P(j, x) \cdot \mu(x) dx$$

NormMP := matrix(k, m, NormP)

$$\text{NormMP} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0.667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0 \\ 0 & -0 & 0 & -0 & -0 & 0.333 \end{pmatrix}$$



NormMP

3.2. Определить значение нормы ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице 1.2. Результат представить в виде вектора значений.

$$\text{NormPT}_i := \frac{2}{i+1}$$

NormPT<sub>1</sub> =

2
1
0.667
0.5
0.4
0.333

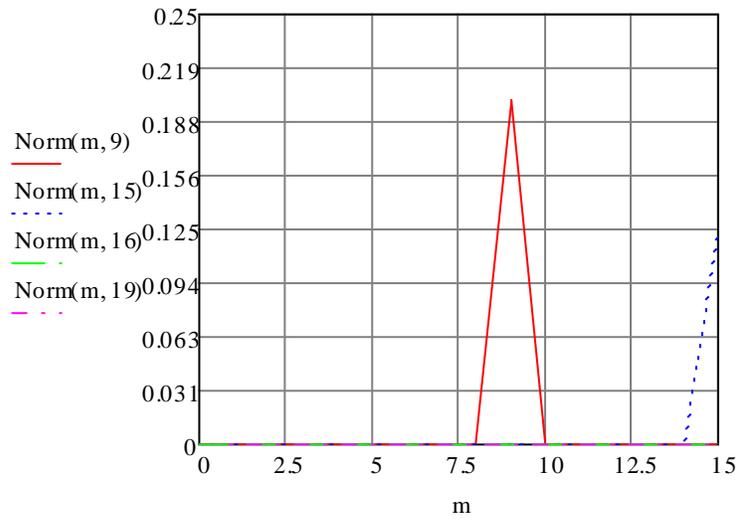
4. Проверить выполняемость 1-ого условия ортогональности.

$m := 0..15$

$$\text{Norm}(m, n) := \int_a^b P(m, x) \cdot P(n, x) \cdot \mu(x) dx$$

Norm(m, 16) =

1.768·10 <sup>-6</sup>
-1.285·10 <sup>-6</sup>
6.731·10 <sup>-7</sup>
5.008·10 <sup>-8</sup>
3.222·10 <sup>-7</sup>
-1.308·10 <sup>-7</sup>
-4.025·10 <sup>-7</sup>
7.898·10 <sup>-7</sup>
-9.839·10 <sup>-7</sup>
9.833·10 <sup>-7</sup>
-8.235·10 <sup>-7</sup>
5.652·10 <sup>-7</sup>
-2.808·10 <sup>-7</sup>
3.314·10 <sup>-8</sup>
-1.771·10 <sup>-7</sup>
2.112·10 <sup>-7</sup>



1 - ое условие ортогональности выполнено

5. Проверить выполняемость 2 - ого условия ортогональности.

x := 0

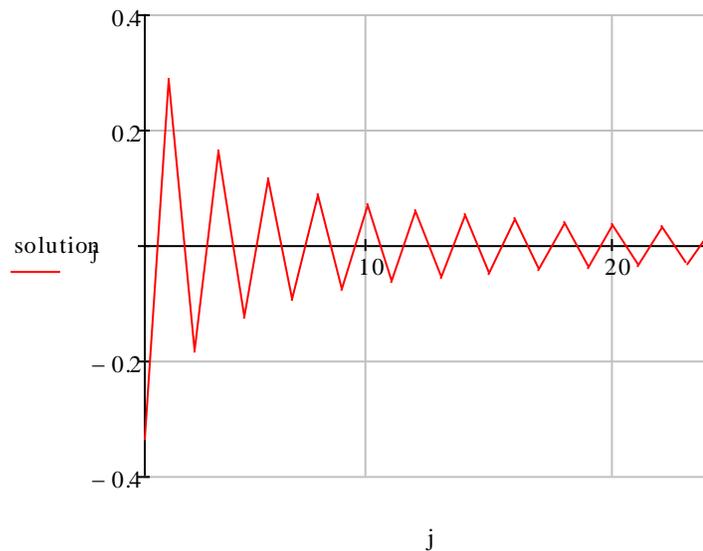
j := 1..25

f(j, x) := P(j, x)

solution<sub>j</sub> := root(f(j, x), x)

solution<sub>j</sub> =

-0.333
0.29
-0.181
0.167
-0.124
0.117
-0.094
0.09
-0.076
0.073
-0.064
0.062
-0.055
0.053
-0.048
...



2 - ое условие ортогональности выполнено

## ЗАДАНИЕ 2. «ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

1. Получение ортогональных функций  $k$ -ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка путем введения соответствующей замены. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков:

$$P1(k, x) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^s \right] \quad \mu(x) := 1-x$$

$$x(\tau, \gamma) := 1 - 2e^{-\gamma \cdot \tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau, \gamma) \rightarrow 2 \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma \cdot \tau} \quad \mu(\tau, \gamma) := 1 - x(\tau, \gamma)$$

$$P1(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left( \frac{x(\tau, \gamma) - 1}{2} \right)^s \cdot \sqrt{\frac{\frac{d}{d\tau} x(\tau, \gamma)}{2\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\mu(\tau, \gamma)}{2}} \right]$$

$$\gamma := 1$$

$$P1(0, \tau, \gamma) \text{ simplify} \rightarrow e^{-\tau}$$

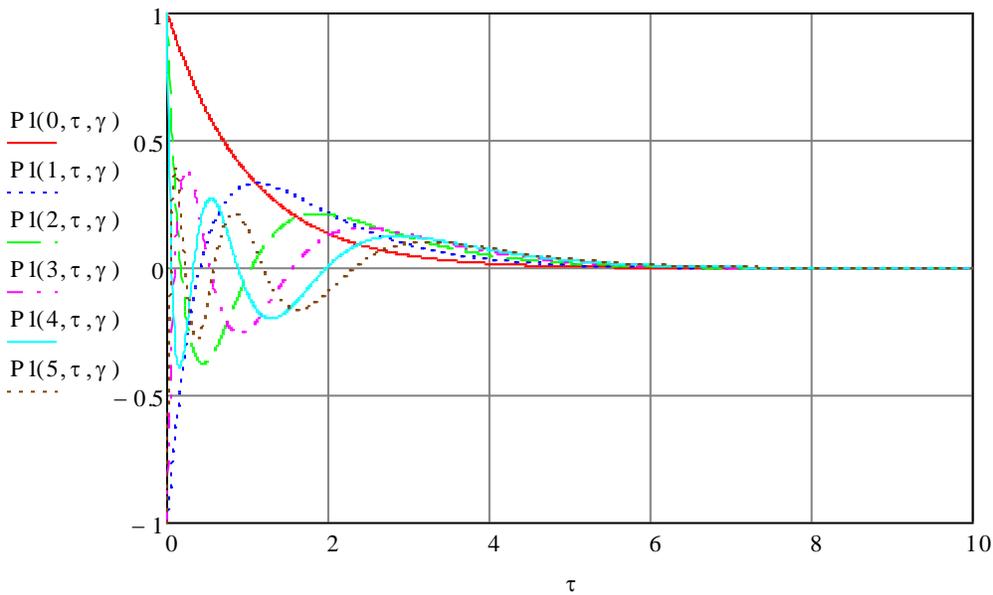
$$P1(1, \tau, \gamma) \text{ simplify} \rightarrow 2e^{-\tau} - 3e^{-2\tau}$$

$$P1(2, \tau, \gamma) \text{ simplify} \rightarrow 3e^{-\tau} - 12e^{-2\tau} + 10e^{-3\tau}$$

$$P1(3, \tau, \gamma) \text{ simplify} \rightarrow 4e^{-\tau} - 30e^{-2\tau} + 60e^{-3\tau} - 35e^{-4\tau}$$

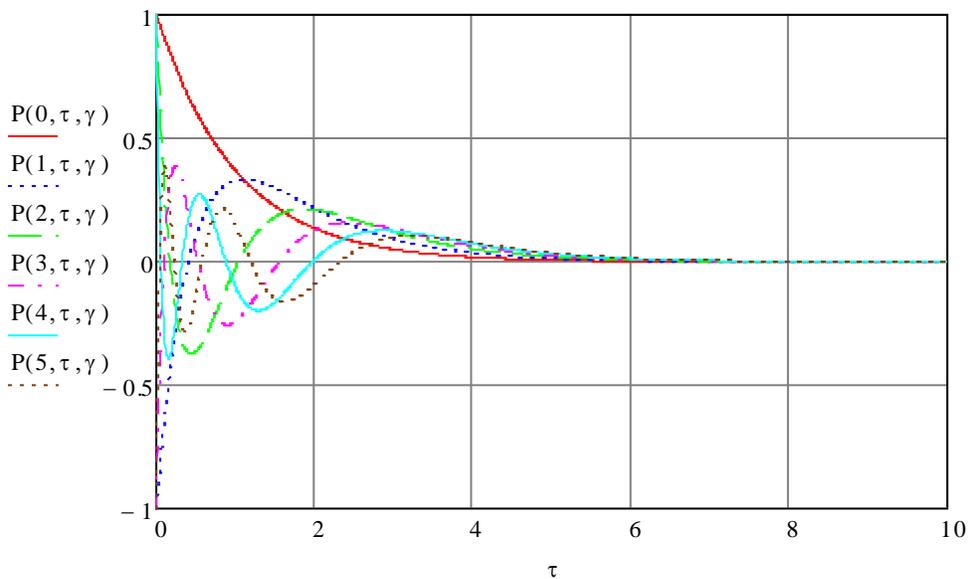
$$P_l(4, \tau, \gamma) \text{ simplify} \rightarrow 5 \cdot e^{-\tau} - 60e^{-2 \cdot \tau} + 210e^{-3 \cdot \tau} - 280e^{-4 \cdot \tau} + 126e^{-5 \cdot \tau}$$

$$P_l(5, \tau, \gamma) \text{ simplify} \rightarrow 6e^{-\tau} - 105e^{-2 \cdot \tau} + 560e^{-3 \cdot \tau} - 1260e^{-4 \cdot \tau} + 1260e^{-5 \cdot \tau} - 462e^{-6 \cdot \tau}$$

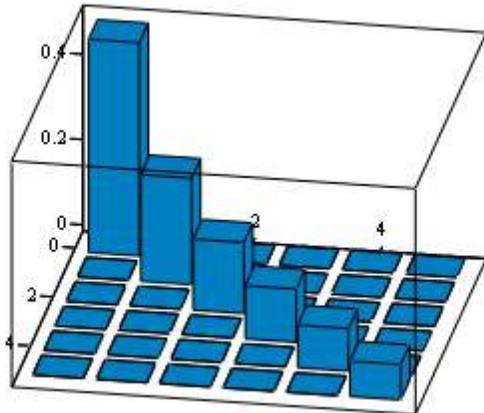


1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в таблице. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков:

$$P(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1)\gamma \cdot \tau} \right]$$







NormMP

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций  $k$ -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице 2.1 (см. содержание лабораторной работы). Результат представить в виде вектора значений.

$$\text{NormPT}_i := \frac{1}{2\gamma(i+1)}$$

NormPT<sub>i</sub> =

0.5
0.25
0.167
0.125
0.1
0.083

4. Рассчитать длительность, используя выражения (2.5) и (2.6) (см. содержание лабораторной работы). Построить графическую зависимость длительности ортогональной функции  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.

$$k_{\text{max}} := 0..5$$

$$\tau_{2(k,\gamma)} := \int_0^\infty P(k, \tau, \gamma) d\tau$$

$$\tau_{4(k,\gamma)} := \int_0^\infty P(k, \tau, \gamma)^2 d\tau$$

$\tau_{2(k,\gamma)} =$

1
0.5
0.333
0.25
0.2
0.167

$\tau_{4(k,\gamma)} =$

0.5
0.25
0.167
0.125
0.1
0.083

$\gamma_1 := 0.1, 0.1 + 0.1 \cdot 2$

$i := 0..20$

$\tau_{2V0_1} := \tau_{2(0, i \cdot 0.1 + 0.1)}$

$\tau_{2V2_1} := \tau_{2(2, i \cdot 0.1 + 0.1)}$

$\tau_{2V4_1} := \tau_{2(4, i \cdot 0.1 + 0.1)}$

$\tau_{2V1_1} := \tau_{2(1, i \cdot 0.1 + 0.1)}$

$\tau_{2V3_1} := \tau_{2(3, i \cdot 0.1 + 0.1)}$

$\tau_{2V5_1} := \tau_{2(5, i \cdot 0.1 + 0.1)}$

$\tau_{2M}^{(0)} := \tau_{2V0}$

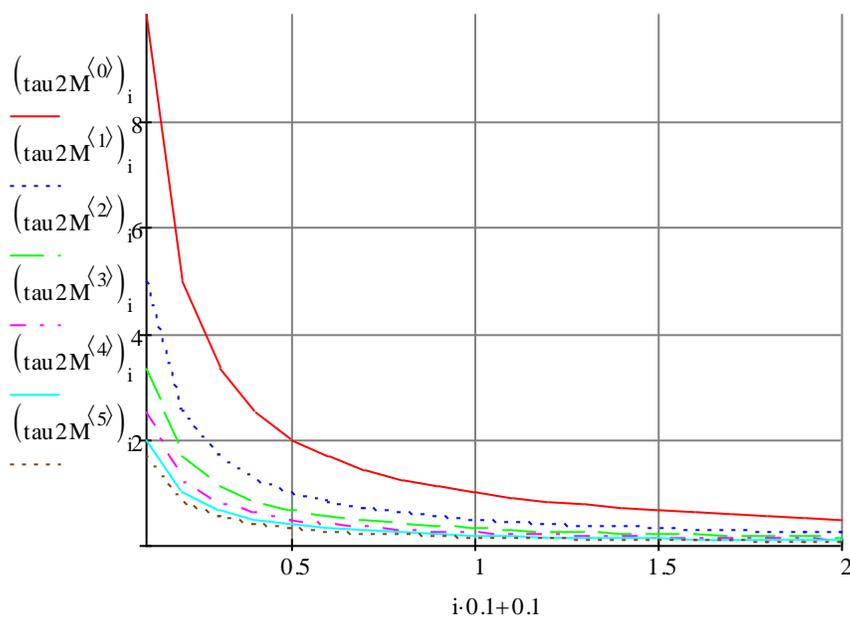
$\tau_{2M}^{(2)} := \tau_{2V2}$

$\tau_{2M}^{(4)} := \tau_{2V4}$

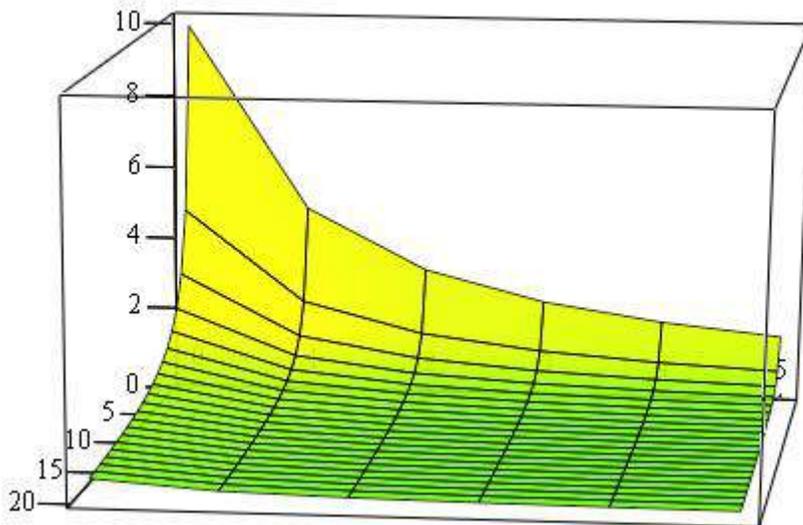
$\tau_{2M}^{(1)} := \tau_{2V1}$

$\tau_{2M}^{(3)} := \tau_{2V3}$

$\tau_{2M}^{(5)} := \tau_{2V5}$



	0	1	2	3	4	5
0	10	5	3.333	2.5	2	1.667
1	5	2.5	1.667	1.25	1	0.833
2	3.333	1.667	1.111	0.833	0.667	0.556
3	2.5	1.25	0.833	0.625	0.5	0.417
4	2	1	0.667	0.5	0.4	0.333
5	1.667	0.833	0.556	0.417	0.333	0.278
6	1.429	0.714	0.476	0.357	0.286	0.238
7	1.25	0.625	0.417	0.313	0.25	0.208
8	1.111	0.556	0.37	0.278	0.222	0.185
9	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167
10	0.909	0.455	0.303	0.227	0.182	0.152
11	0.833	0.417	0.278	0.208	0.167	0.139
12	0.769	0.385	0.256	0.192	0.154	0.128
13	0.714	0.357	0.238	0.179	0.143	0.119
14	0.667	0.333	0.222	0.167	0.133	0.111
15	0.625	0.312	0.208	0.156	0.125	...



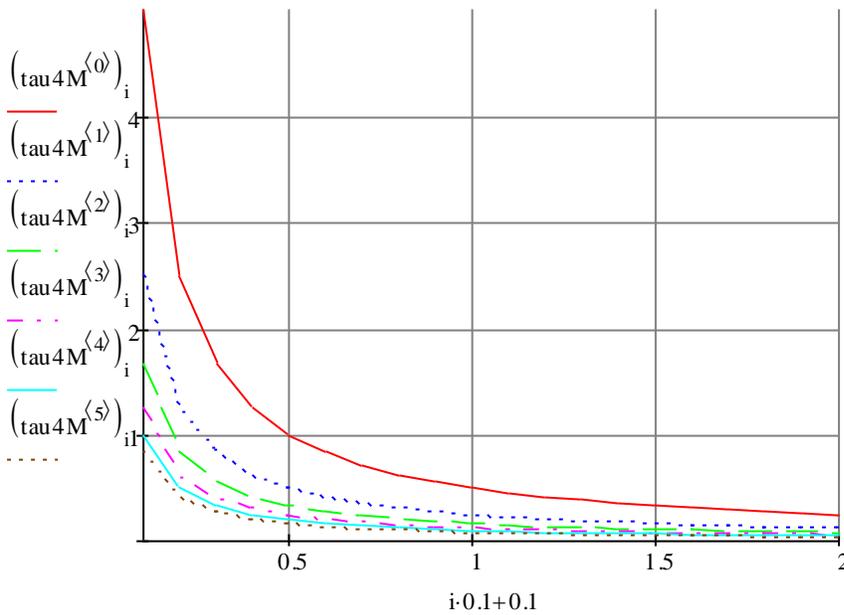
tau2M

$$\tau_{4V0} := \tau_{4(0,i-0.1+0.1)} \quad \tau_{4V2} := \tau_{4(2,i-0.1+0.1)} \quad \tau_{4V4} := \tau_{4(4,i-0.1+0.1)}$$

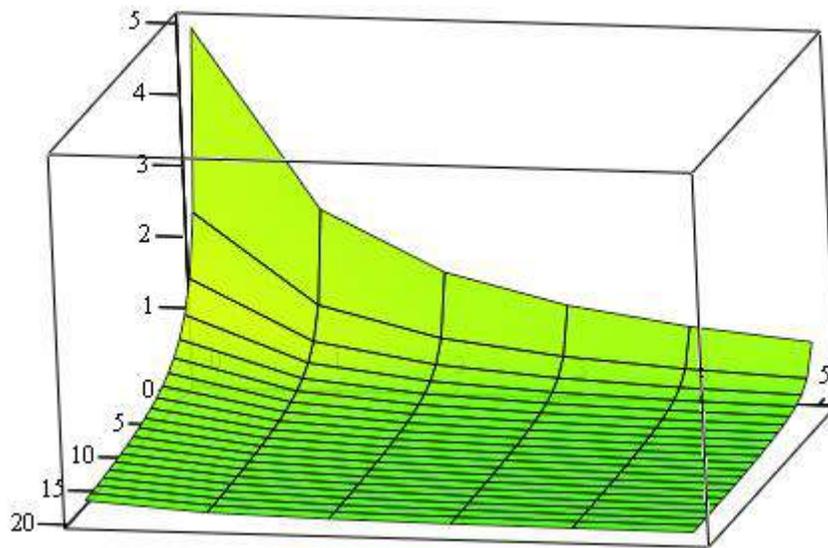
$$\tau_{4V1} := \tau_{4(1,i-0.1+0.1)} \quad \tau_{4V3} := \tau_{4(3,i-0.1+0.1)} \quad \tau_{4V5} := \tau_{4(5,i-0.1+0.1)}$$

$$\tau_{4M}^{(0)} := \tau_{4V0} \quad \tau_{4M}^{(2)} := \tau_{4V2} \quad \tau_{4M}^{(4)} := \tau_{4V4}$$

$$\tau_{4M}^{(1)} := \tau_{4V1} \quad \tau_{4M}^{(3)} := \tau_{4V3} \quad \tau_{4M}^{(5)} := \tau_{4V5}$$



	0	1	2	3	4	5
0	5	2.5	1.667	1.25	1	0.833
1	2.5	1.25	0.833	0.625	0.5	0.417
2	1.667	0.833	0.556	0.417	0.333	0.278
3	1.25	0.625	0.417	0.313	0.25	0.208
4	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167
5	0.833	0.417	0.278	0.208	0.167	0.139
6	0.714	0.357	0.238	0.179	0.143	0.119
7	0.625	0.313	0.208	0.156	0.125	0.104
8	0.556	0.278	0.185	0.139	0.111	0.093
9	0.5	0.25	0.167	0.125	0.1	0.083
10	0.455	0.227	0.152	0.114	0.091	0.076
11	0.417	0.208	0.139	0.104	0.083	0.069
12	0.385	0.192	0.128	0.096	0.077	0.064
13	0.357	0.179	0.119	0.089	0.071	0.06
14	0.333	0.167	0.111	0.083	0.067	0.056
15	0.312	0.156	0.104	0.078	0.063	...



tau4M

### ЗАДАНИЕ 3. «ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

1. Задать вид ортогональных функций.

$$P(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1)\gamma \cdot \tau}$$

2. Задать порядок ортогональных функций.

k :=

3. Задать значение параметра масштаба.

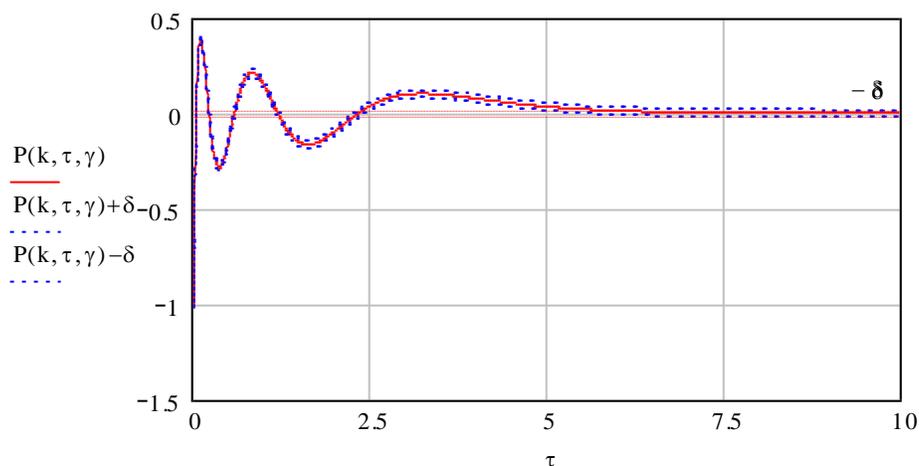
$$\gamma := 1$$

4. Задать погрешность приближения.

$\delta_n :=$

$$\delta := \begin{cases} 0.02 & \text{if } \delta_n = 1 \\ 0.05 & \text{if } \delta_n = 2 \\ 0.1 & \text{if } \delta_n = 3 \end{cases}$$

5. Построить график ортогональной функции.



6. Определить максимальный интервал корреляции на основании графика.

$$\tau_1 := 10$$

Given

$$P(k, \tau_1, \gamma) = \delta$$

$$\text{Find}(\tau_1) = 5.641$$

7. Получить на основании общей формулы частные формулы ортогональной функции, ее первой, второй и третьей производной.

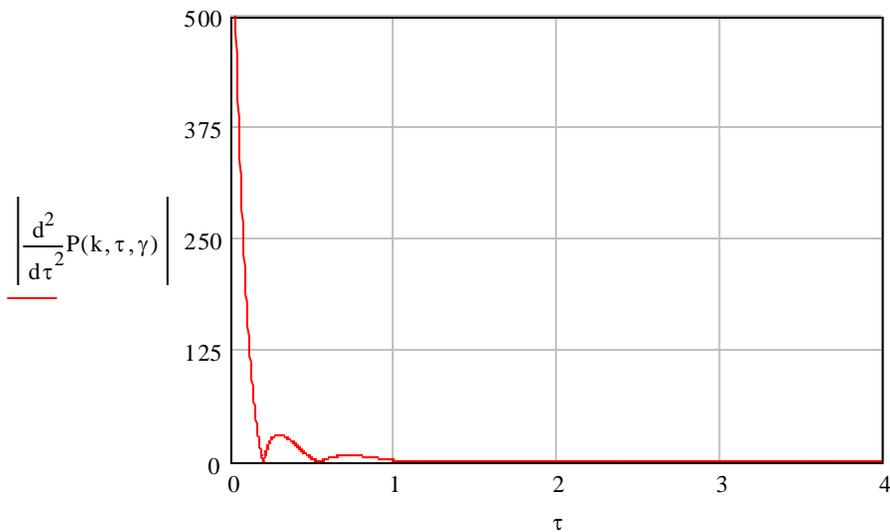
$$P(k, \tau, \gamma) \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 105 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 560 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) - 1260 \cdot \exp(-4 \cdot \tau) + 1260 \cdot \exp(-5 \cdot \tau) - 462 \cdot \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d}{d\tau} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow -6 \cdot \exp(-\tau) + 210 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) - 1680 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) + 5040 \cdot \exp(-4 \cdot \tau) - 6300 \cdot \exp(-5 \cdot \tau) + 2772 \cdot \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 420 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 5040 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) - 20160 \cdot \exp(-4 \cdot \tau) + 31500 \cdot \exp(-5 \cdot \tau) - 16632 \cdot \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d^3}{d\tau^3} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow -6 \cdot \exp(-\tau) + 840 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) - 15120 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) + 80640 \cdot \exp(-4 \cdot \tau) - 157500 \cdot \exp(-5 \cdot \tau) + 99792 \cdot \exp(-6 \cdot \tau)$$

8. Вычислить максимум второй производной.



$$\text{fder}(\tau) := \left| \frac{d^2}{d\tau^2} P(k, \tau, \gamma) \right|$$

$$\tau := 2^i$$

$$\text{Maximize}(\text{fder}, \tau) = 0$$

$$\text{fder}(\text{Maximize}(\text{fder}, \tau)) = 666$$

9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.

$$\Delta t := \sqrt{\frac{8 \cdot \delta}{|\text{fder}(\text{Maximize}(\text{fder}, \tau))|}}$$

$$\Delta t = 0.015$$

10. Определить максимальную длительность ортогональной функции.

$$\tau_{\max} := 5.64$$

11. Вычислить количество интервалов дискретизации.

$$n := \text{trunc}\left(\frac{\tau_{\max}}{\Delta t} + 0.5\right)$$

$$n = 364$$

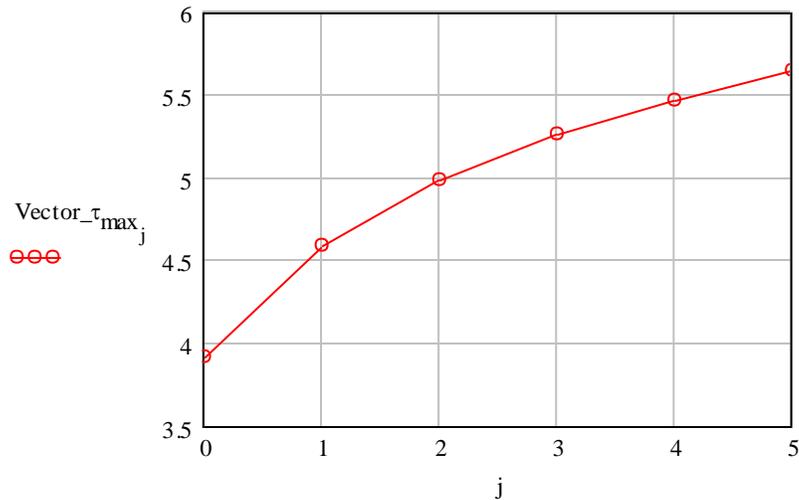
12. Занести полученные значения в таблицу (Microsoft Word, Microsoft Excel).

13 - 15. Выполнить аналогично 1-12.

16. Построить зависимость максимального интервала корреляции от порядка при заданном параметре масштаба.

При параметре масштаба  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.5$ .

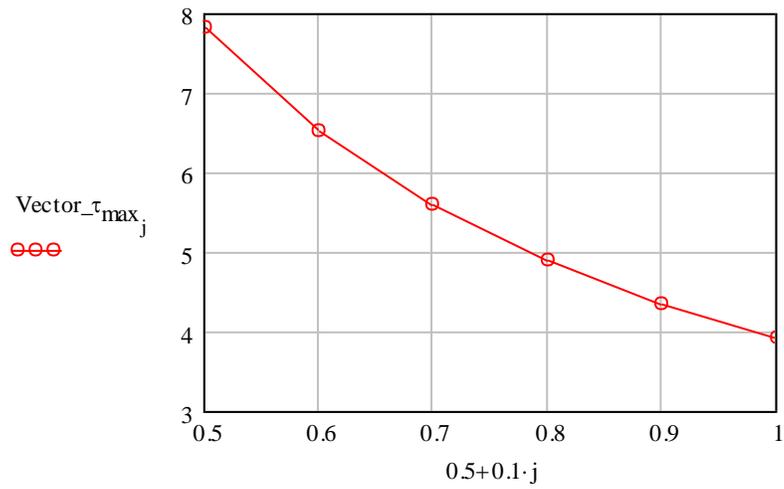
$$\text{Vector}_{\tau_{\max}} := \begin{pmatrix} 3.912 \\ 4.59 \\ 4.983 \\ 5.259 \\ 5.47 \\ 5.641 \end{pmatrix} \quad j := 0..5$$



17. Построить зависимость максимального интервала корреляции от параметра масштаба при заданном порядке ортогональной функции.

При заданном порядке  $k = 0$ ,  $\gamma = 0.5, 0.5+0.1..1$ .

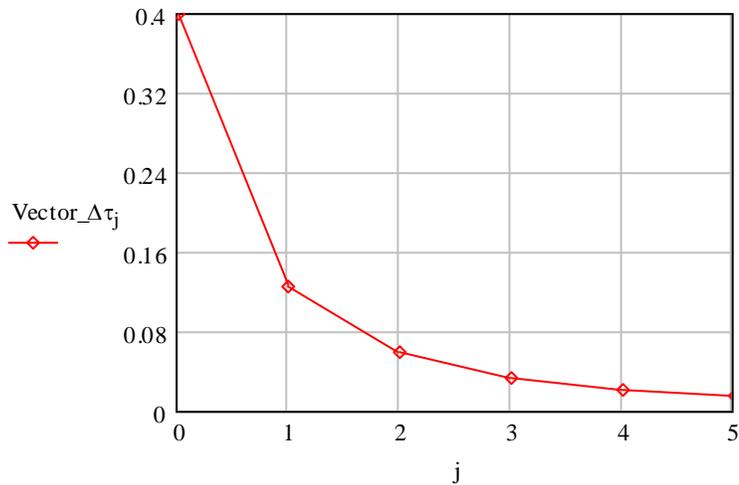
$$\text{Vector}_{\tau_{\max}} := \begin{pmatrix} 7.824 \\ 6.52 \\ 5.589 \\ 4.89 \\ 4.347 \\ 3.912 \end{pmatrix} \quad \varepsilon := 0.5, 0.5 + 0.1..1$$



18. Построить зависимость интервала дискретизации от порядка функции при заданном параметре масштаба.

При параметре масштаба  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.5$ .

$$Vector_{\Delta\tau} := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.126 \\ 0.06 \\ 0.034 \\ 0.022 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$



**ЗАДАНИЕ 4. «ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** исследование частотных характеристик ортогональных функций.

1. Построить частотные характеристики, соответствующие выражениям (4.6) - (4.9);  $m = 0 - 4$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

$$m := 0..4$$

$$\gamma := 0.875$$

$$\omega := 0,0 + 0.01..50$$

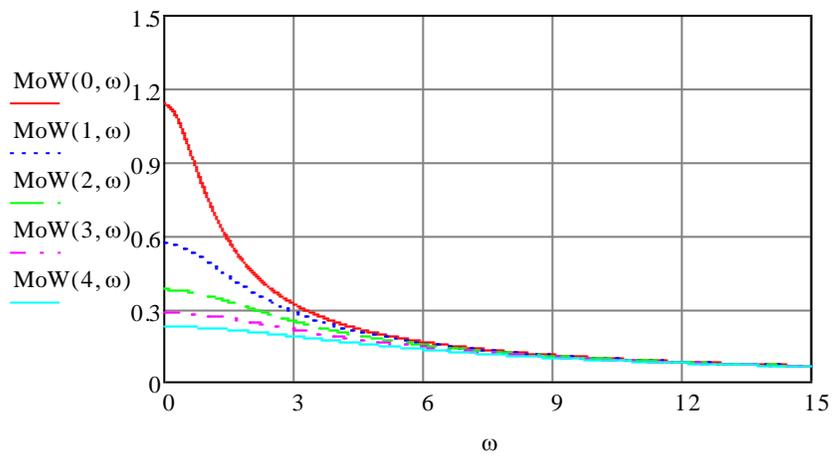
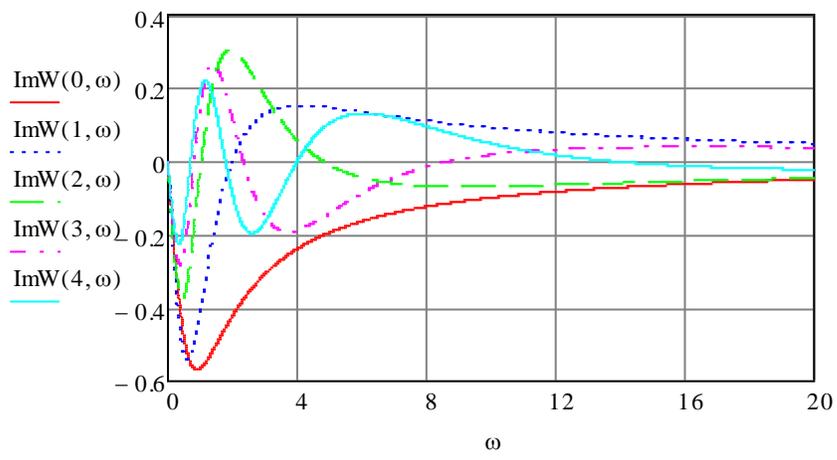
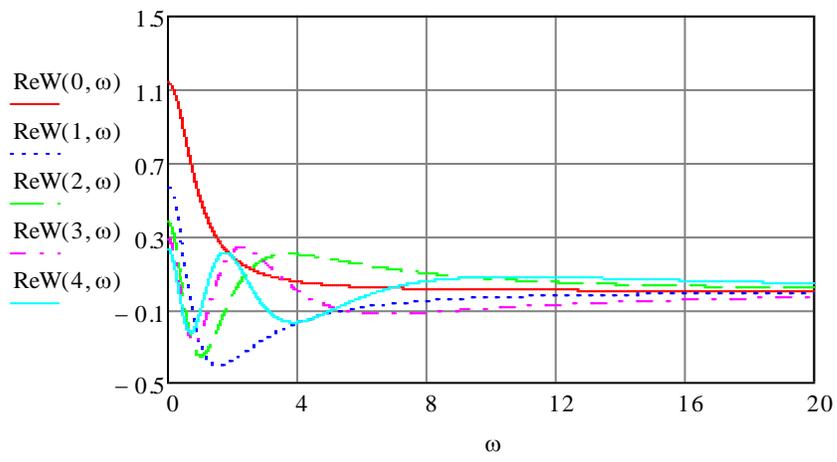
$$\phi(k, \omega) := \text{atan} \left[ \frac{\omega}{\gamma \cdot (k + 1)} \right]$$

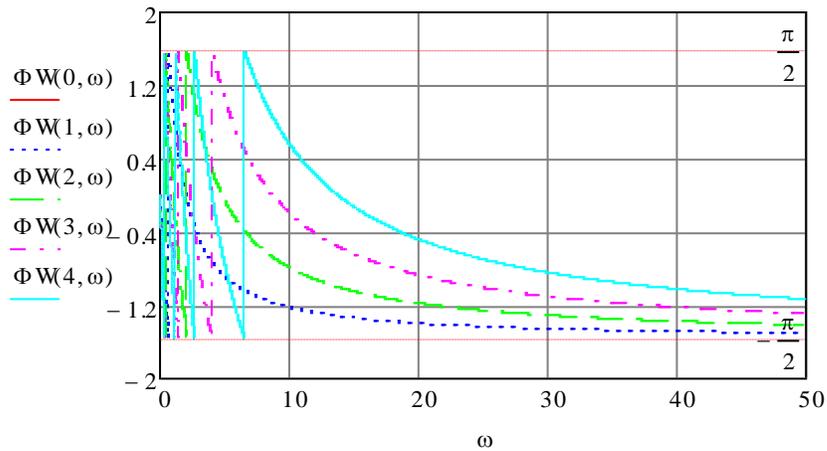
$$\text{Re}W(m, \omega) := \frac{1}{\gamma \cdot (m + 1)} \cdot \cos(\phi(m, \omega)) \cdot \cos \left[ \phi(m, \omega) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } m = 0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right) \text{ otherwise} \end{array} \right] \right]$$

$$\text{Im}W(m, \omega) := -\frac{1}{\gamma \cdot (m + 1)} \cdot \cos(\phi(m, \omega)) \cdot \sin \left[ \phi(m, \omega) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } m = 0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right) \text{ otherwise} \end{array} \right] \right]$$

$$\text{Mo}W(m, \omega) := \frac{\cos(\phi(m, \omega))}{\gamma \cdot (m + 1)}$$

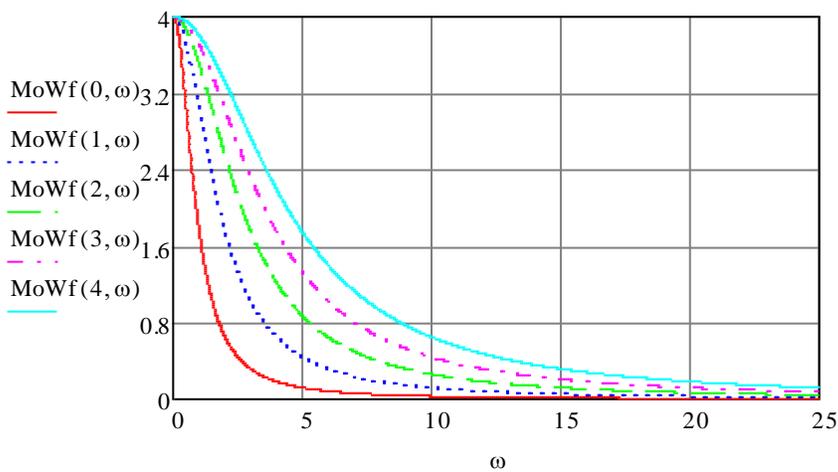
$$\Phi W(m, \omega) := - \left( \phi(m, \omega) + 2 \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right) + \text{trunc} \left[ \frac{\left( \phi(m, \omega) + 2 \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right)}{\pi} + 0.5 \right] \cdot \pi$$





2. Построить зависимость квадрата модуля частотной характеристики ортогонального фильтра от порядка  $m$ ;  $m = 0 - 4$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

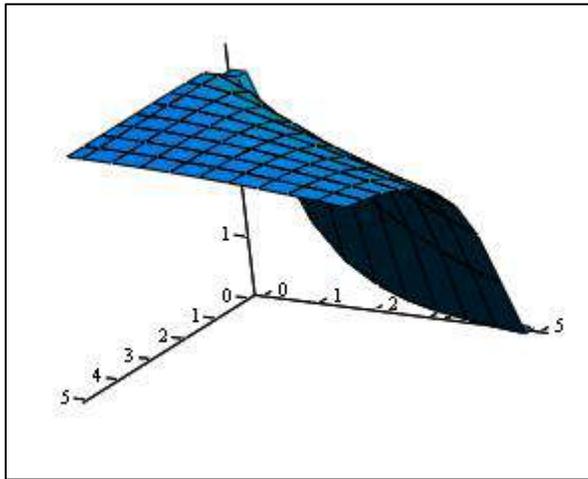
$$\text{MoWf}(m, \omega) := \frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$$



3. Построить зависимость квадрата модуля частотной характеристики ортогонального фильтра от параметра  $\gamma$ ;  $m = \text{const}$ .

$$m := 3$$

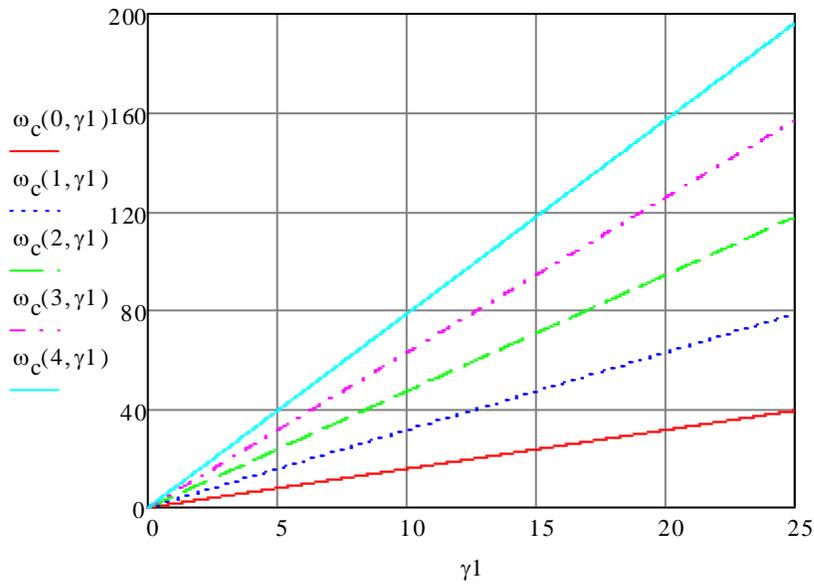
$$\text{MoWf}(\gamma, \omega) := \frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$$



CreateMesh (MoWf)

4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра  $m$ -ого порядка от параметра  $\gamma$ ;  $m = 0 - 4$ .

$$\omega_c(m, \gamma) := \frac{\pi \cdot \gamma \cdot (m + 1)}{2}$$



### ЗАДАНИЕ 5. «ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

1. Определить коэффициенты разложения. Построить графические зависимости от порядка  $m$

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.3061$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\phi_1(k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\cdot\gamma + \lambda}\right]$$

$$\phi_2(k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\gamma - \lambda}\right]$$

$$A_1(k) := \frac{\gamma \cdot (k+1)}{(k+1)\cdot\gamma + \lambda}$$

$$A_2(k) := \frac{\gamma \cdot (k+1)}{(k+1)\cdot\gamma - \lambda}$$

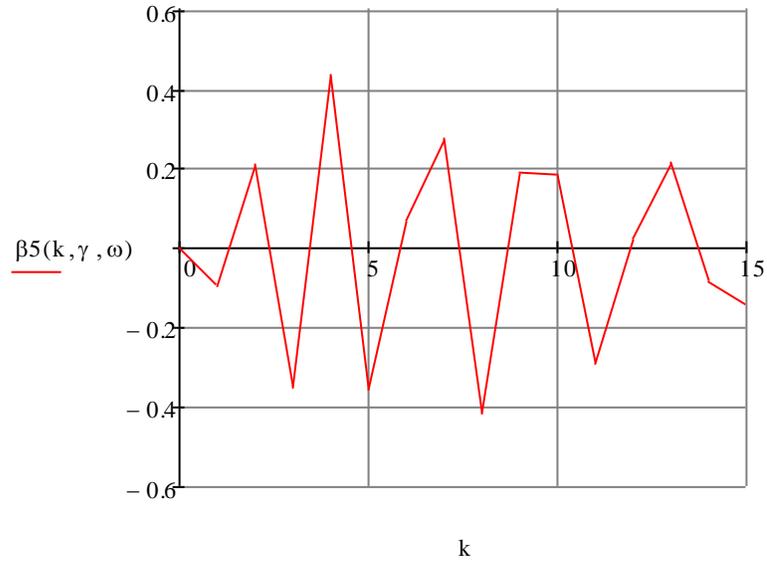
$$B(k) := \frac{A_1(k) \cdot \cos(\phi_1(k))}{A_2(k) \cdot \cos(\phi_2(k))}$$

$$\beta_5(k, \gamma, \omega) := 2 \cdot A_1(k) \cdot \cos(\phi_1(k)) \cdot \left[ \cos\left[\phi_1(k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0 \\ \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_1(s) + \phi_2(s)) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \cdot \prod_{s=0}^{k-1} B(s) \right]$$

$$\beta_5(k, \gamma, \omega) =$$

0
-0.09485
0.21058
-0.35094
0.43418
-0.35344
0.07198
0.27425
-0.41313
0.1892
0.18679
-0.29204
0.02293
0.21325
-0.08428
-0.13962

$$\beta_5(0, \gamma, \omega) \rightarrow 0.0292564929643983908$$



2. Построить графические зависимости от числа членов разложения  $m$ ;  $m = 0 - 5$

$$\tau_4(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\chi := \gamma$$

$$P_7(k, \tau, \chi) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, k) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \chi \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_{5i}(k, \chi, \omega) := 2\chi \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P_7(k, \tau, \chi) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\delta l(\chi, m, \omega) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \tau_4(\omega)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta_{5i}(k, \chi, \omega))^2}{k + 1}}$$

m1 := 0..15

$$\delta 1 V0_{m1} := \delta 1(\chi, m1, 0)$$

$$\delta 1 V2_{m1} := \delta 1(\chi, m1, 2)$$

$$\delta 1 V4_{m1} := \delta 1(\chi, m1, 4)$$

$$\delta 1 V1_{m1} := \delta 1(\chi, m1, 1)$$

$$\delta 1 V3_{m1} := \delta 1(\chi, m1, 3)$$

$$\delta 1 V5_{m1} := \delta 1(\chi, m1, 5)$$

$$\delta 1 M^{(0)} := \delta 1 V_0$$

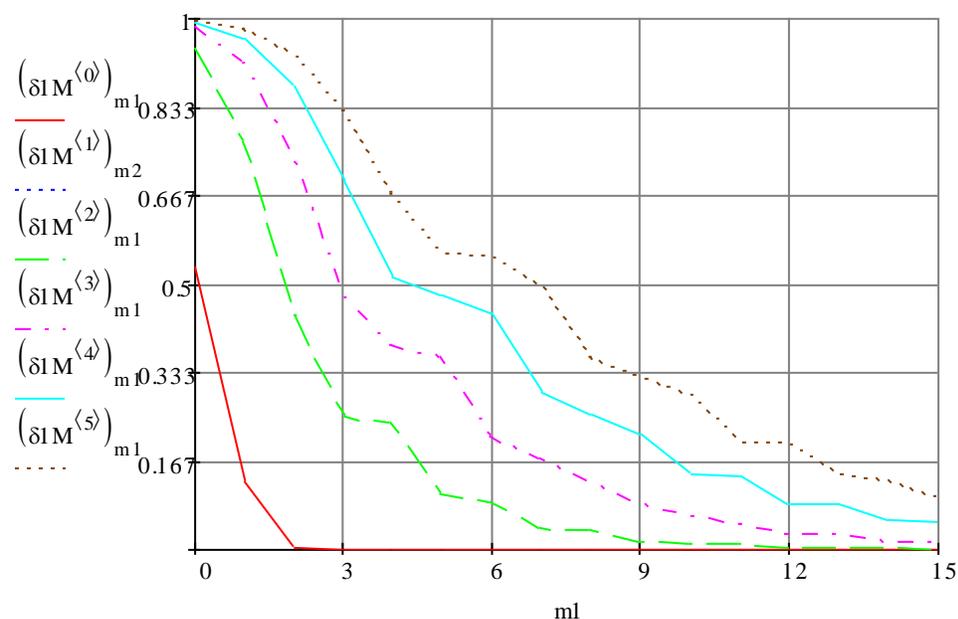
$$\delta 1 M^{(2)} := \delta 1 V_2$$

$$\delta 1 M^{(4)} := \delta 1 V_4$$

$$\delta 1 M^{(1)} := \delta 1 V_1$$

$$\delta 1 M^{(3)} := \delta 1 V_3$$

$$\delta 1 M^{(5)} := \delta 1 V_5$$



3. Построить графические зависимости от параметра ; = 0 - 5 m = 2 - 6  
 Определить количество локальных экстремумов, значения параметра орт и соответствующие им значения погрешностей.

i := 0..100

$$\delta 2 V0_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 0)$$

$$\delta 2 V2_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 2)$$

$$\delta 2 V4_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 4)$$

$$\delta 2 V1_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 1)$$

$$\delta 2 V3_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 3)$$

$$\delta 2 V5_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 5)$$

$$\delta 2M^{(0)} := \delta 2V_0$$

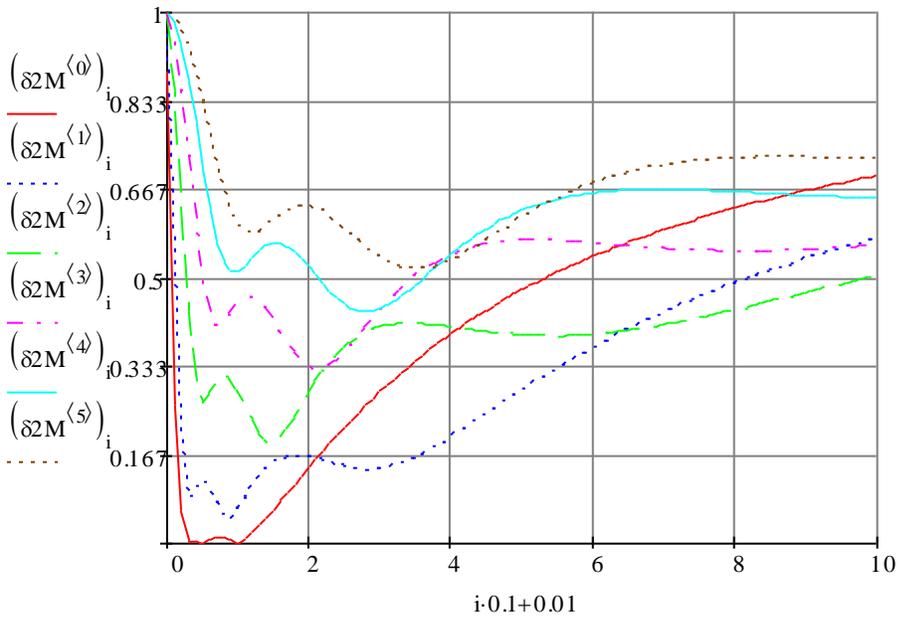
$$\delta 2M^{(2)} := \delta 2V_2$$

$$\delta 2M^{(4)} := \delta 2V_4$$

$$\delta 2M^{(1)} := \delta 2V_1$$

$$\delta 2M^{(3)} := \delta 2V_3$$

$$\delta 2M^{(5)} := \delta 2V_5$$



$$\delta 3V_0 := \delta 1(i-0.1+0.01, 2, 5)$$

$$\delta 3V_2 := \delta 1(i-0.1+0.01, 4, 5)$$

$$\delta 3V_4 := \delta 1(i-0.1+0.01, 6, 5)$$

$$\delta 3V_1 := \delta 1(i-0.1+0.01, 3, 5)$$

$$\delta 3V_3 := \delta 1(i-0.1+0.01, 5, 5)$$

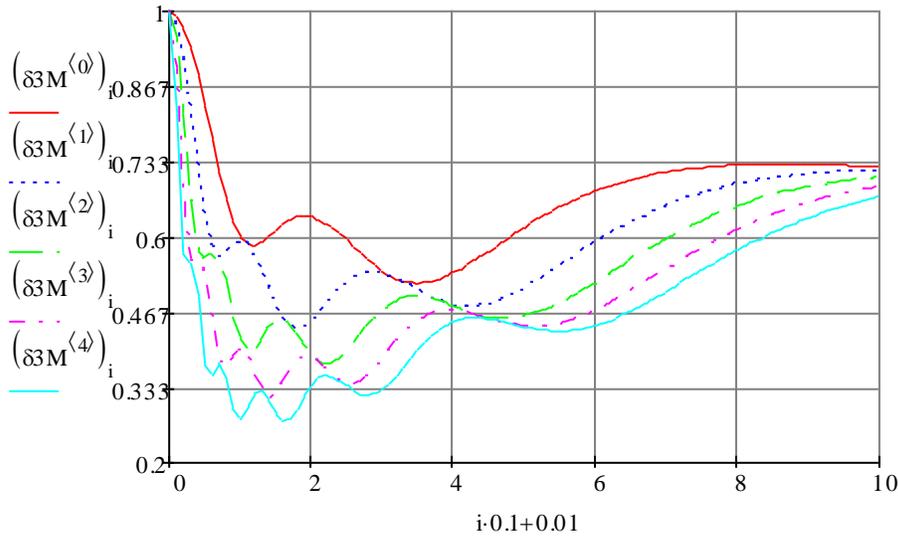
$$\delta 3M^{(0)} := \delta 3V_0$$

$$\delta 3M^{(2)} := \delta 3V_2$$

$$\delta 3M^{(4)} := \delta 3V_4$$

$$\delta 3M^{(1)} := \delta 3V_1$$

$$\delta 3M^{(3)} := \delta 3V_3$$



$$\min(\delta 3M^{(0)}) = 0.519$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{(0)}), \delta 3M^{(0)})_{0.1+0.01} = \begin{pmatrix} 3.41 \\ 3.51 \\ 3.61 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\min M_0} := \text{match}(\min(\delta 3M^{(0)}), \delta 3M^{(0)})_{1 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta 3M^{(1)}) = 0.439$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{(1)}), \delta 3M^{(1)})_{0.1+0.01} = (1.81)$$

$$\chi_{\min M_1} := \text{match}(\min(\delta 3M^{(1)}), \delta 3M^{(1)})_{0 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta 3M^{(2)}) = 0.375$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{(2)}), \delta 3M^{(2)})_{0.1+0.01} = (2.21)$$

$$\chi_{\min M_2} := \text{match}(\min(\delta 3M^{(2)}), \delta 3M^{(2)})_{0 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta 3M^{(3)}) = 0.316$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{(3)}), \delta 3M^{(3)}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.41)$$

$$\chi_{\min M_3} := \text{match}(\min(\delta 3M^{(3)}), \delta 3M^{(3)})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\min(\delta 3M^{(4)}) = 0.273$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{(4)}), \delta 3M^{(4)}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.61)$$

$$\chi_{\min M_4} := \text{match}(\min(\delta 3M^{(4)}), \delta 3M^{(4)})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\chi_{\min M} = \begin{pmatrix} 3.51 \\ 1.81 \\ 2.21 \\ 1.41 \\ 1.61 \end{pmatrix}$$

$$j := 0..4$$

$$\min(\delta 3M^{(j)})$$

0.519
0.439
0.375
0.316
0.273

4. Построить графические зависимости от параметра , m; = 0 - 5 m = 2 - 6, opt.

$$\omega 1 := 0..5$$

$$\delta 4V0_{\omega 1} := \delta l(\chi_{\min M_0, 2}, \omega 1)$$

$$\delta 4V2_{\omega 1} := \delta l(\chi_{\min M_2, 4}, \omega 1)$$

$$\delta 4V4_{\omega 1} := \delta l(\chi, 6, \omega 1)$$

$$\delta 4V1_{\omega 1} := \delta l(\chi_{\min M_1, 3}, \omega 1)$$

$$\delta 4V3_{\omega 1} := \delta l(\chi_{\min M_3, 5}, \omega 1)$$

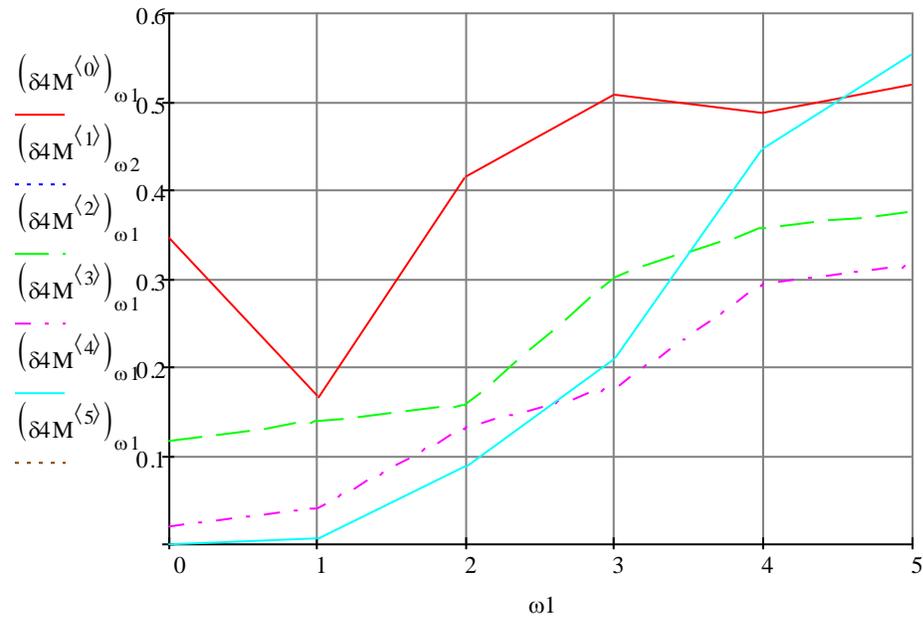
$$\delta 4M^{(0)} := \delta 4V_0$$

$$\delta 4M^{(2)} := \delta 4V_2$$

$$\delta 4M^{(4)} := \delta 4V_4$$

$$\delta 4M^{(1)} := \delta 4V_1$$

$$\delta 4M^{(3)} := \delta 4V_3$$



$$m2 := 2..6$$

$$\delta 5V0_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 0})$$

$$\delta 5V2_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 2})$$

$$\delta 5V4_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 4})$$

$$\delta 5V1_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 1})$$

$$\delta 5V3_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 3})$$

$$\delta 5V5_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 5})$$

$$\delta 5M^{(0)} := \delta 5V_0$$

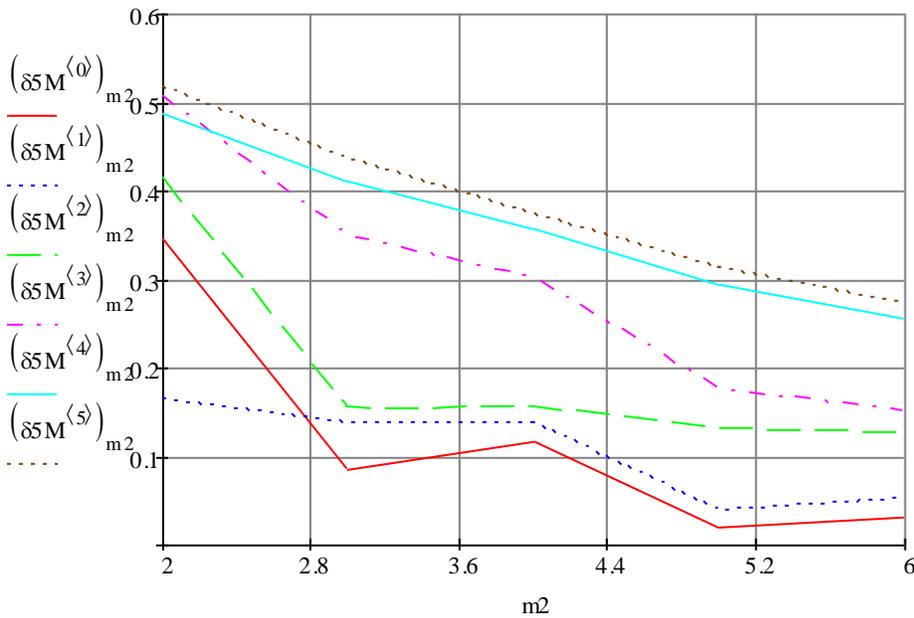
$$\delta 5M^{(2)} := \delta 5V_2$$

$$\delta 5M^{(4)} := \delta 5V_4$$

$$\delta 5M^{(1)} := \delta 5V_1$$

$$\delta 5M^{(3)} := \delta 5V_3$$

$$\delta 5M^{(5)} := \delta 5V_5$$



5. Построить графические зависимости от параметра , m; = 0 - 5 m = 2 - 6, .

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\chi^1_{m2} := \frac{0.4}{(m2+1) \cdot \Delta_t}$$

$$\chi^1_{m2} =$$

1.633
1.225
0.98
0.816
0.7

$$\chi^{1c(m)} := \frac{0.4}{(mx+1) \cdot \Delta_t}$$

$$\delta V_{\omega 1}^{0} := \delta l(\chi^1_{2,2}, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{2} := \delta l(\chi^1_{4,4}, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{4} := \delta l(\chi^1_{6,6}, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{1} := \delta l(\chi^1_{3,3}, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{3} := \delta l(\chi^1_{5,5}, \omega 1)$$

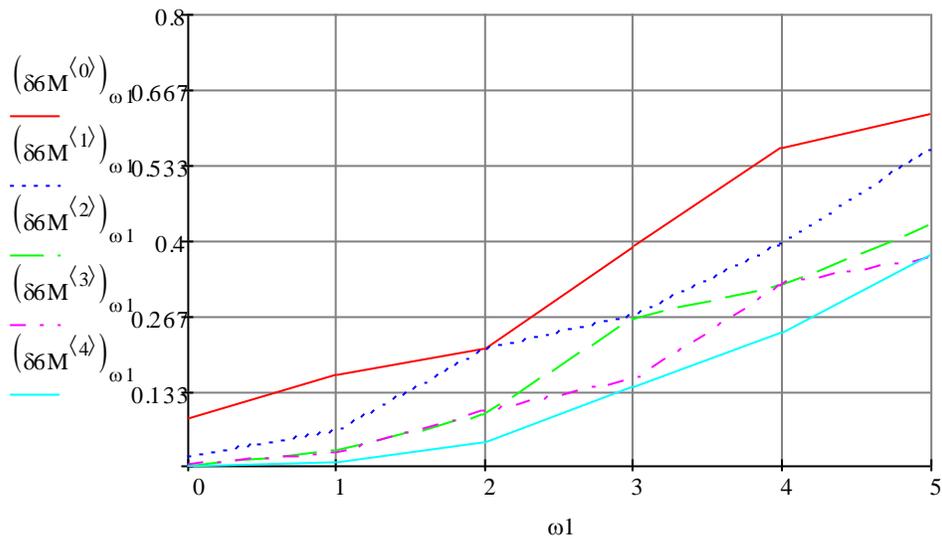
$$\delta M^{(0)} := \delta V_0$$

$$\delta M^{(2)} := \delta V_2$$

$$\delta M^{(4)} := \delta V_4$$

$$\delta M^{(1)} := \delta V_1$$

$$\delta M^{(3)} := \delta V_3$$



$$\delta V0_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 0)$$

$$\delta V2_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 2)$$

$$\delta V4_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 4)$$

$$\delta V1_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 1)$$

$$\delta V3_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 3)$$

$$\delta V5_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 5)$$

$$\delta M^{(0)} := \delta V0$$

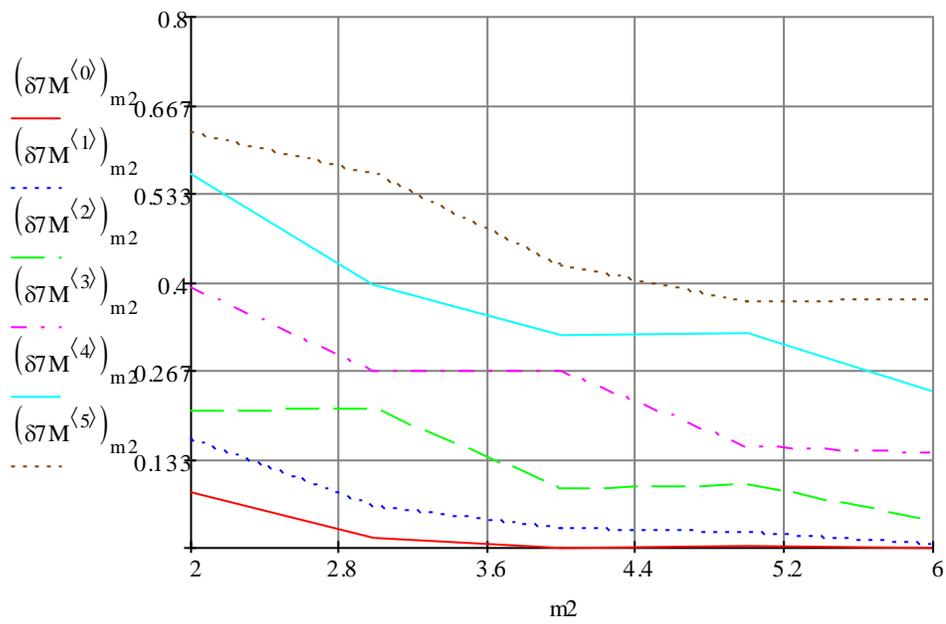
$$\delta M^{(2)} := \delta V2$$

$$\delta M^{(4)} := \delta V4$$

$$\delta M^{(1)} := \delta V1$$

$$\delta M^{(3)} := \delta V3$$

$$\delta M^{(5)} := \delta V5$$



$$\chi^2_{m2} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m2 + 1)}$$

$$\chi^2_{m2} =$$

1.7
1.275
1.02
0.85
0.728

$$\chi^2_{c(m\grave{x})} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m\grave{x} + 1)}$$

$$\delta\delta V0_{\omega1} := \delta l(\chi^2_{2,2}, \omega1)$$

$$\delta\delta V2_{\omega1} := \delta l(\chi^2_{4,4}, \omega1)$$

$$\delta\delta V4_{\omega1} := \delta l(\chi^2_{6,6}, \omega1)$$

$$\delta\delta V1_{\omega1} := \delta l(\chi^2_{3,3}, \omega1)$$

$$\delta\delta V3_{\omega1} := \delta l(\chi^2_{5,5}, \omega1)$$

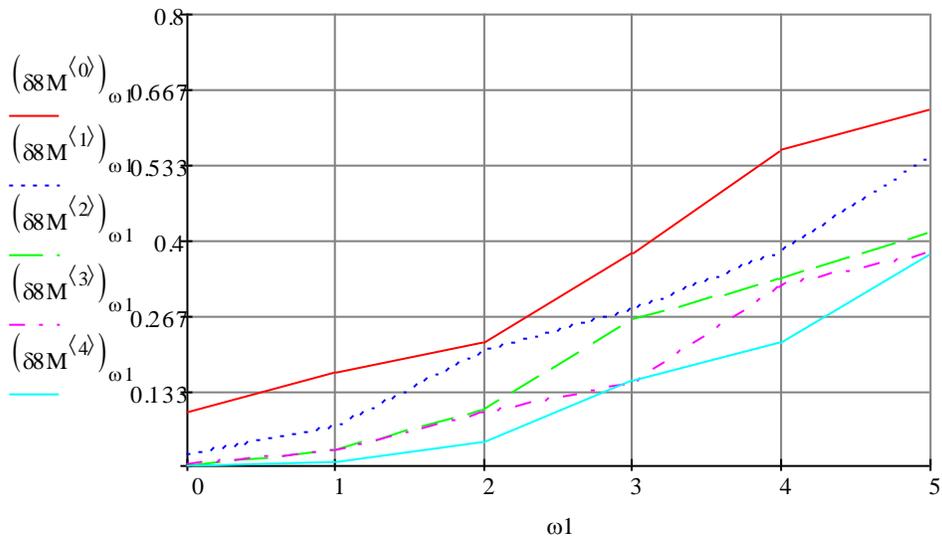
$$\delta\delta M^{(0)} := \delta\delta V0$$

$$\delta\delta M^{(2)} := \delta\delta V2$$

$$\delta\delta M^{(4)} := \delta\delta V4$$

$$\delta\delta M^{(1)} := \delta\delta V1$$

$$\delta\delta M^{(3)} := \delta\delta V3$$



$$\delta V_{m_2}^{(0)} := \delta l(\chi_{m_2, m_2}^2, m_2, 0)$$

$$\delta V_{m_2}^{(2)} := \delta l(\chi_{m_2, m_2}^2, m_2, 2)$$

$$\delta V_{m_2}^{(4)} := \delta l(\chi_{m_2, m_2}^2, m_2, 4)$$

$$\delta V_{m_2}^{(1)} := \delta l(\chi_{m_2, m_2}^2, m_2, 1)$$

$$\delta V_{m_2}^{(3)} := \delta l(\chi_{m_2, m_2}^2, m_2, 3)$$

$$\delta V_{m_2}^{(5)} := \delta l(\chi_{m_2, m_2}^2, m_2, 5)$$

$$\delta M^{(0)} := \delta V$$

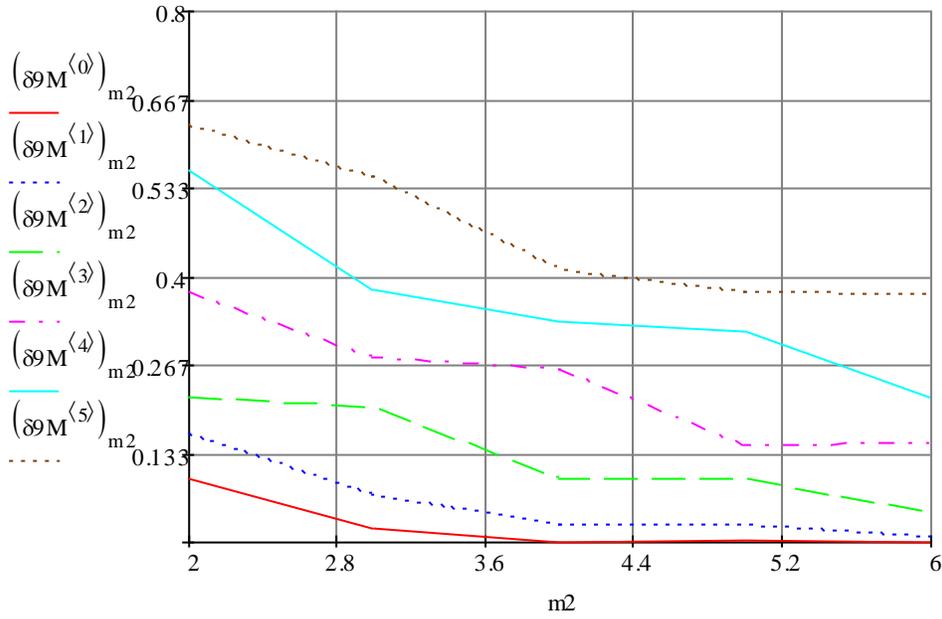
$$\delta M^{(2)} := \delta V_2$$

$$\delta M^{(4)} := \delta V_4$$

$$\delta M^{(1)} := \delta V_1$$

$$\delta M^{(3)} := \delta V_3$$

$$\delta M^{(5)} := \delta V_5$$



6. Построить модели корреляционной функции;  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 5$   $m = 5/10$ , opt.

$$\rho(\tau, m, \chi) := \sum_{k=0}^m (\beta 5^i(k, \chi, \omega) \cdot P7(k, \tau, \chi))$$

$$\Delta\tau := 0.081649 \quad N_x := 37$$

$$\tau := 0, 0 + \Delta\tau \dots (N_x - 1) \cdot \Delta\tau$$

$$\rho t(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$m\_1 := 5$$

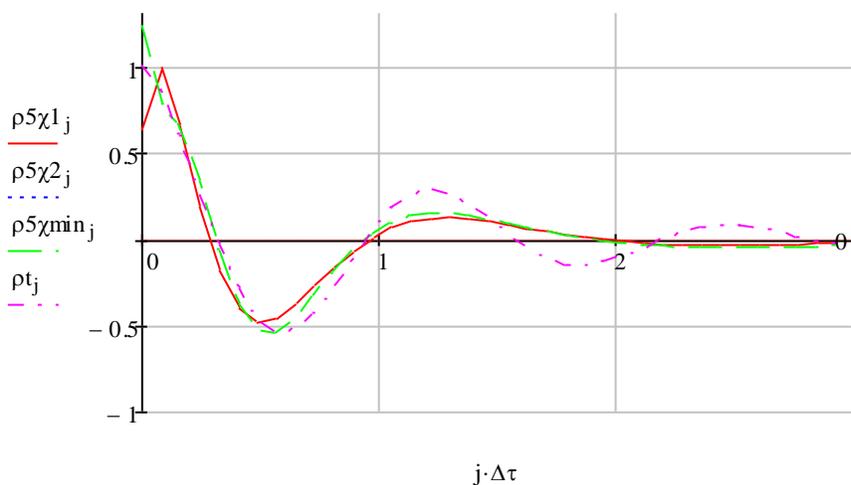
$$j := 0..N_x - 1$$

$$\rho 5 \chi 1_j := \rho(j \cdot \Delta\tau, m\_1, \chi 1 c(m\_1))$$

$$\rho 5 \chi 2_j := \rho(j \cdot \Delta\tau, m\_1, \chi 2 c(m\_1))$$

$$\rho 5 \chi \min_j := \rho(j \cdot \Delta\tau, m\_1, \chi \min M_{m\_1-2})$$

$$\rho t_j := \rho t(j \cdot \Delta\tau)$$



$$\delta 3 V \delta_1 := \delta 1(i \cdot 0.1 + 0.01, 10, 5)$$

$$\delta 3 M^{(8)} := \delta 3 V \delta$$

$$\min(\delta 3 M^{(8)}) = 0.148$$

$$\text{match}(\min(\delta 3 M^{(8)}), \delta 3 M^{(8)}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.11)$$

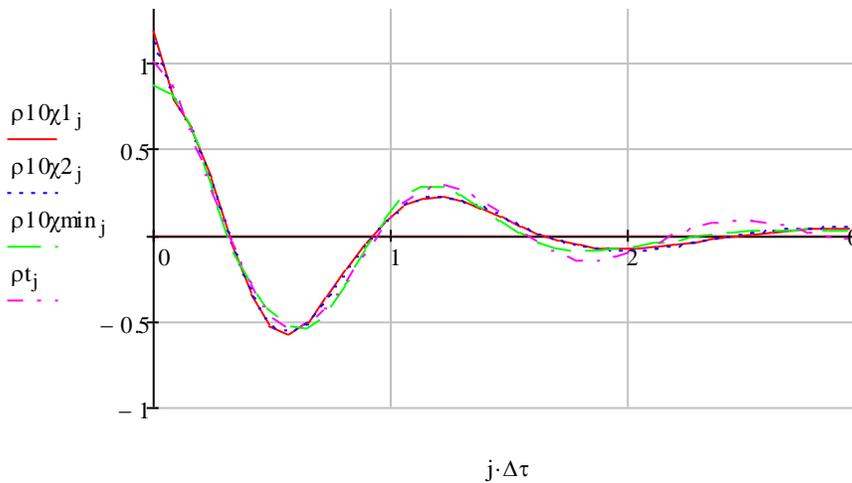
$$\chi \min M_g := \text{match}(\min(\delta 3 M^{(8)}), \delta 3 M^{(8)})_{0.1 + 0.01}$$

$$m\_2 := 10$$

$$\rho 10 \chi 1_j := \rho(j \cdot \Delta \tau, m\_2, \chi 1 c(m\_2))$$

$$\rho 10 \chi 2_j := \rho(j \cdot \Delta \tau, m\_2, \chi 2 c(m\_2))$$

$$\rho 10 \chi \min_j := \rho(j \cdot \Delta \tau, m\_2, \chi \min M_{m\_2-2})$$



**ЗАДАНИЕ 6. «АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ  
ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С УЧЕТОМ  
УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ»**

**Цель работы:** изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями при ограничении на её модель.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$  и  $b_k$ . Построить графические зависимости  $\beta_k$  и  $b_k$  от порядка  $k$ ;  $\mu$ ,  $m$ ,  $\gamma$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.3061$$

$$m := 15$$

$$k := 0..n$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta5M_k := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b5M_k := \beta5M_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta5M_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

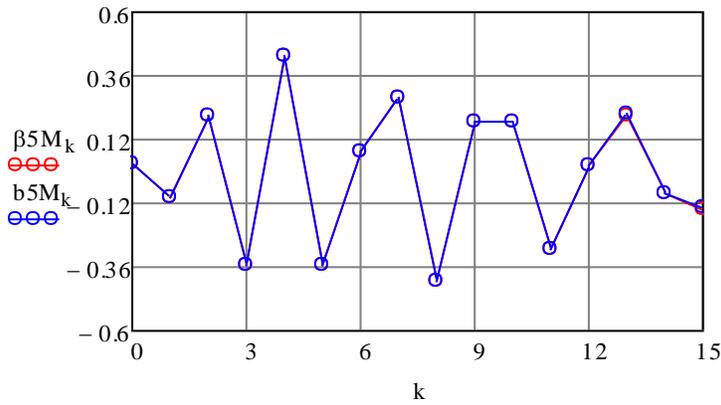
$\beta 5M_k =$

0.029948
-0.094859
0.210559
-0.350974
0.434154
-0.353464
0.071981
0.274272
-0.41309
0.189251
0.186837
-0.292016
0.022924
0.21321
-0.084344
-0.139691

$b5M_k =$

0.029851
-0.094664
0.210267
-0.350585
0.433667
-0.35288
0.071299
0.275051
-0.413966
0.190224
0.185766
-0.290847
0.021658
0.214573
-0.085804
-0.138134

$$\sum_{k=0}^m \left[ b5M_k \cdot (-1)^k \right] = 1$$



2. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\chi$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ .  
Определить количество локальных экстремумов, значения параметра  $\chi_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

$$\tau_4(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\chi := \gamma$$

$$\beta 5(k, \chi, \omega) := 2\chi \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \chi) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

$$b5(k, \chi, \omega) := \beta 5(k, \chi, \omega) + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m [(-1)^s \cdot \beta 5(s, \chi, \omega)] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\delta l(\chi, m, \omega) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \tau 4(\omega)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(b5(k, \chi, \omega))^2}{k + 1}}$$

**i := 0..100**

$$\delta 2V0_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 0)$$

$$\delta 2V2_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 2)$$

$$\delta 2V4_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 4)$$

$$\delta 2V1_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 1)$$

$$\delta 2V3_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 3)$$

$$\delta 2V5_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 5)$$

$$\delta 2M^{(0)} := \delta 2V0$$

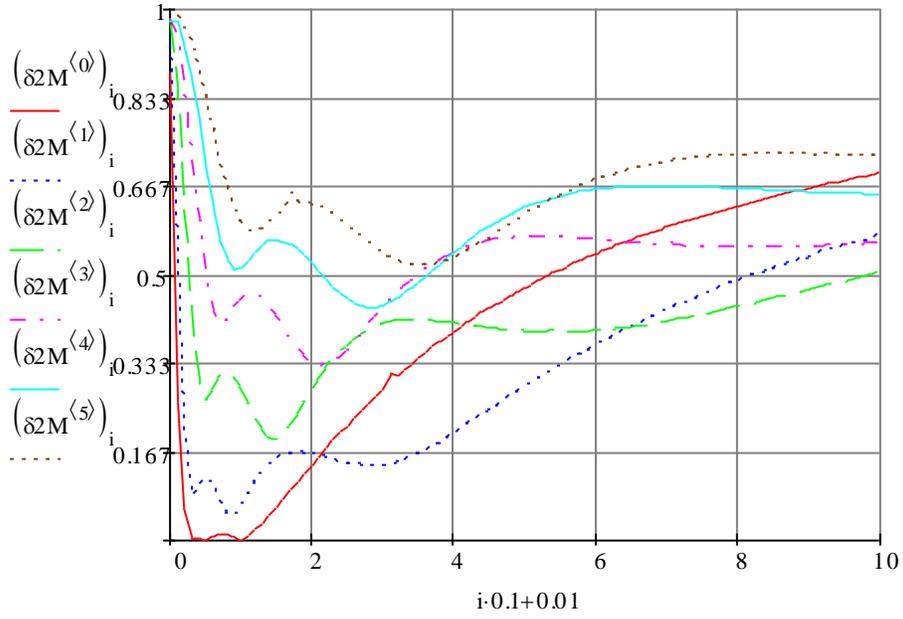
$$\delta 2M^{(2)} := \delta 2V2$$

$$\delta 2M^{(5)} := \delta 2V5$$

$$\delta 2M^{(1)} := \delta 2V1$$

$$\delta 2M^{(3)} := \delta 2V3$$

$$\delta 2M^{(4)} := \delta 2V4$$



$$\delta\delta V_1^{(0)} := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 5)$$

$$\delta\delta V_1^{(2)} := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 4, 5)$$

$$\delta\delta V_1^{(4)} := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 6, 5)$$

$$\delta\delta V_1^{(1)} := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 3, 5)$$

$$\delta\delta V_1^{(3)} := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 5, 5)$$

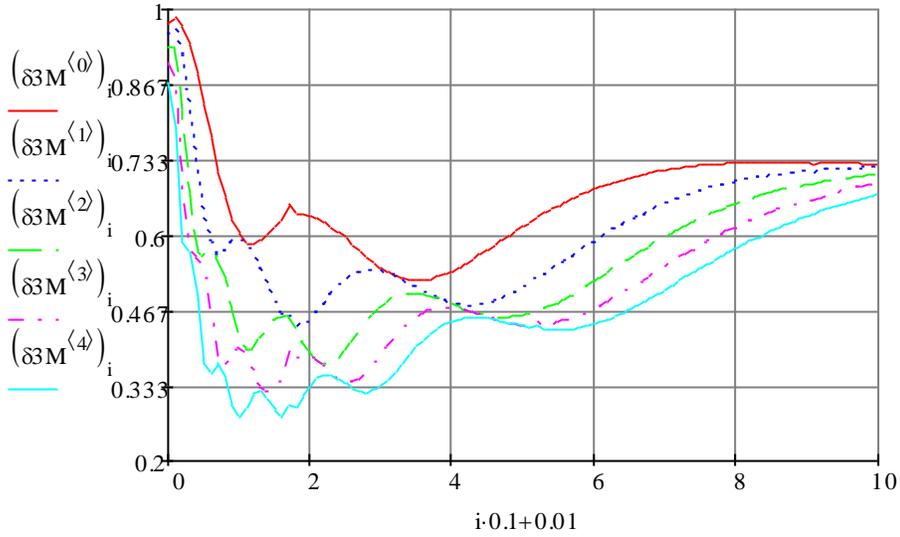
$$\delta\delta M^{(0)} := \delta\delta V_0$$

$$\delta\delta M^{(2)} := \delta\delta V_2$$

$$\delta\delta M^{(4)} := \delta\delta V_4$$

$$\delta\delta M^{(1)} := \delta\delta V_1$$

$$\delta\delta M^{(3)} := \delta\delta V_3$$



$$\min(\delta M^{(0)}) = 0.52$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{(0)}), \delta M^{(0)})_{0.1+0.01} = \begin{pmatrix} 3.41 \\ 3.51 \\ 3.61 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\min M_0} := \text{match}(\min(\delta M^{(0)}), \delta M^{(0)})_{1 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta M^{(1)}) = 0.439$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{(1)}), \delta M^{(1)})_{0.1+0.01} = (1.81)$$

$$\chi_{\min M_1} := \text{match}(\min(\delta M^{(1)}), \delta M^{(1)})_{0 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta M^{(2)}) = 0.372$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{(2)}), \delta M^{(2)})_{0.1+0.01} = (2.21)$$

$$\chi_{\min M_2} := \text{match}(\min(\delta M^{(2)}), \delta M^{(2)})_{0 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta M^{(3)}) = 0.318$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{(3)}), \delta M^{(3)}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.41)$$

$$\chi_{\min M_3} := \text{match}(\min(\delta M^{(3)}), \delta M^{(3)})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\min(\delta M^{(4)}) = 0.276$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{(4)}), \delta M^{(4)}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.61)$$

$$\chi_{\min M_4} := \text{match}(\min(\delta M^{(4)}), \delta M^{(4)})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\chi_{\min M} = \begin{pmatrix} 3.51 \\ 1.81 \\ 2.21 \\ 1.41 \\ 1.61 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} j := 0..4 \\ \min(\delta M^{(j)}) \\ \hline 0.52 \\ \hline 0.439 \\ \hline 0.372 \\ \hline 0.318 \\ \hline 0.276 \end{array}$$

3. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_{\text{орт}}$ .

$$\omega_1 := 0..5$$

$$\delta V_{\omega_1}^0 := \delta l(\chi_{\min M_0, 2}, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^2 := \delta l(\chi_{\min M_2, 4}, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^4 := \delta l(\chi, 6, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^1 := \delta l(\chi_{\min M_1, 3}, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^3 := \delta l(\chi_{\min M_3, 5}, \omega_1)$$

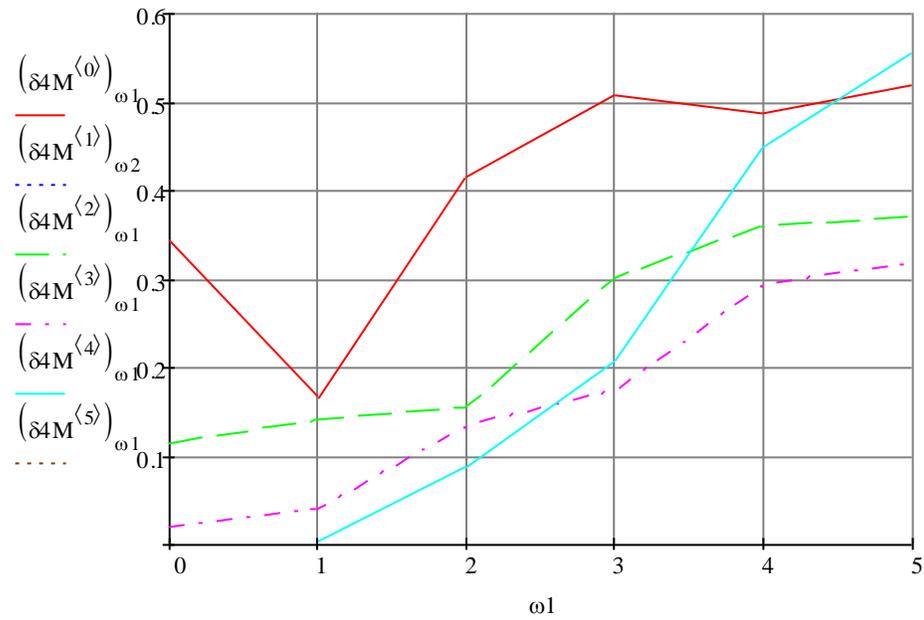
$$\delta 4M^{(0)} := \delta 4V_0$$

$$\delta 4M^{(2)} := \delta 4V_2$$

$$\delta 4M^{(4)} := \delta 4V_4$$

$$\delta 4M^{(1)} := \delta 4V_1$$

$$\delta 4M^{(3)} := \delta 4V_3$$



$$m2 := 2..6$$

$$\delta 5V0_{m2} := \delta l(\chi_{\min} M_{m2-2, m2, 0})$$

$$\delta 5V2_{m2} := \delta l(\chi_{\min} M_{m2-2, m2, 2})$$

$$\delta 5V4_{m2} := \delta l(\chi_{\min} M_{m2-2, m2, 4})$$

$$\delta 5V1_{m2} := \delta l(\chi_{\min} M_{m2-2, m2, 1})$$

$$\delta 5V3_{m2} := \delta l(\chi_{\min} M_{m2-2, m2, 3})$$

$$\delta 5V5_{m2} := \delta l(\chi_{\min} M_{m2-2, m2, 5})$$

$$\delta 5M^{(0)} := \delta 5V_0$$

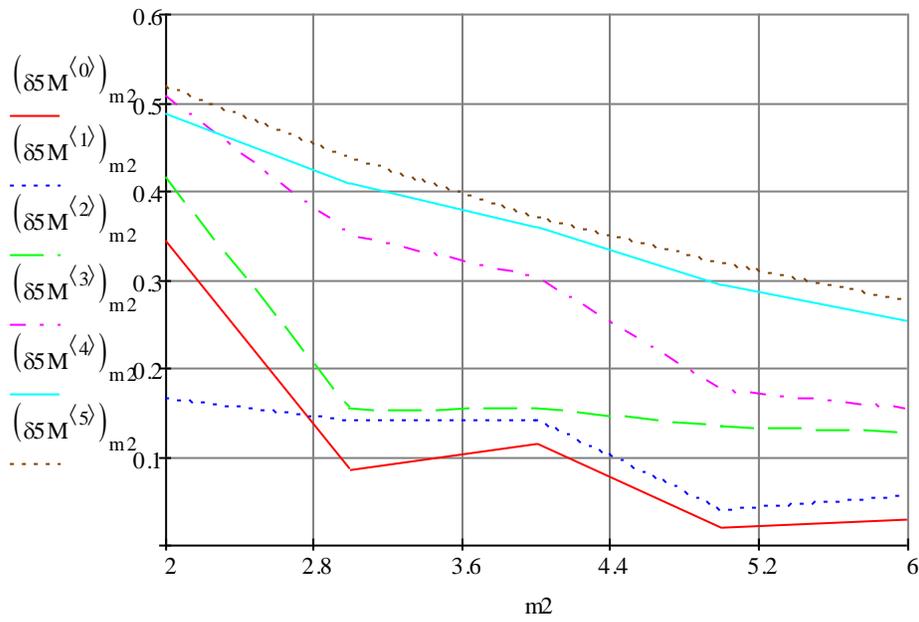
$$\delta 5M^{(2)} := \delta 5V_2$$

$$\delta 5M^{(4)} := \delta 5V_4$$

$$\delta 5M^{(1)} := \delta 5V_1$$

$$\delta 5M^{(3)} := \delta 5V_3$$

$$\delta 5M^{(5)} := \delta 5V_5$$



4. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_1, \chi_2$ .

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\chi_{1m2}^1 := \frac{0.4}{(m2+1) \cdot \Delta_t}$$

$$\chi_{1m2}^1 =$$

1.633
1.225
0.98
0.816
0.7

$$\chi_{1c(m)} := \frac{0.4}{(mx+1) \cdot \Delta_t}$$

$$\delta V_{\omega 1}^0 := \delta l(\chi_{1_2, 2, \omega 1}^1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^2 := \delta l(\chi_{1_4, 4, \omega 1}^1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^4 := \delta l(\chi_{1_6, 6, \omega 1}^1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^1 := \delta l(\chi_{1_3, 3, \omega 1}^1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^3 := \delta l(\chi_{1_5, 5, \omega 1}^1)$$

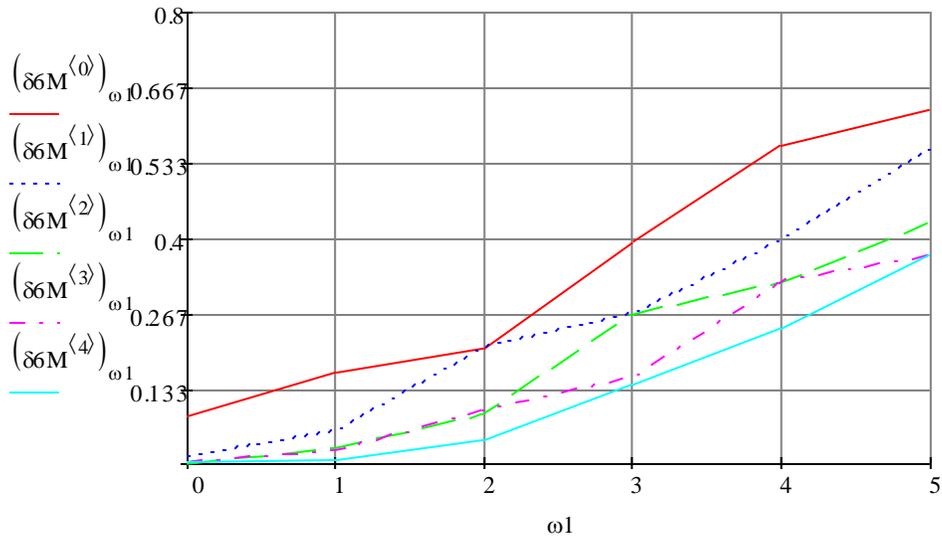
$$\delta M^{0)} := \delta V^0$$

$$\delta M^{2)} := \delta V^2$$

$$\delta M^{4)} := \delta V^4$$

$$\delta M^{1)} := \delta V^1$$

$$\delta M^{3)} := \delta V^3$$



$$\delta 7 V 0_{m 2} := \delta l\left(\chi^1_{m 2}, m 2, 0\right)$$

$$\delta 7 V 2_{m 2} := \delta l\left(\chi^1_{m 2}, m 2, 2\right)$$

$$\delta 7 V 4_{m 2} := \delta l\left(\chi^1_{m 2}, m 2, 4\right)$$

$$\delta 7 V 1_{m 2} := \delta l\left(\chi^1_{m 2}, m 2, 1\right)$$

$$\delta 7 V 3_{m 2} := \delta l\left(\chi^1_{m 2}, m 2, 3\right)$$

$$\delta 7 V 5_{m 2} := \delta l\left(\chi^1_{m 2}, m 2, 5\right)$$

$$\delta 7 M^{<0>} := \delta 7 V 0$$

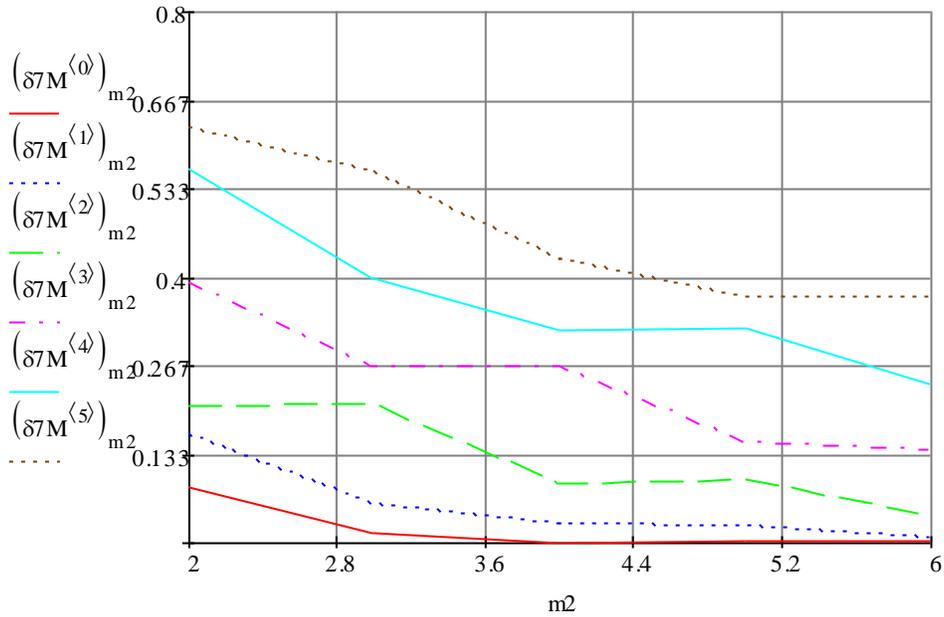
$$\delta 7 M^{<2>} := \delta 7 V 2$$

$$\delta 7 M^{<4>} := \delta 7 V 4$$

$$\delta 7 M^{<1>} := \delta 7 V 1$$

$$\delta 7 M^{<3>} := \delta 7 V 3$$

$$\delta 7 M^{<5>} := \delta 7 V 5$$



$$\chi^2_{m2} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m2 + 1)}$$

$$\chi^2_{m2} =$$

1.7
1.275
1.02
0.85
0.728

$$\chi^2_{c(m2)} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m2 + 1)}$$

$$\delta V_{\omega 1}^{(0)} := \delta l(\chi^2_2, 2, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{(2)} := \delta l(\chi^2_4, 4, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{(4)} := \delta l(\chi^2_6, 6, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{(1)} := \delta l(\chi^2_3, 3, \omega 1)$$

$$\delta V_{\omega 1}^{(3)} := \delta l(\chi^2_5, 5, \omega 1)$$

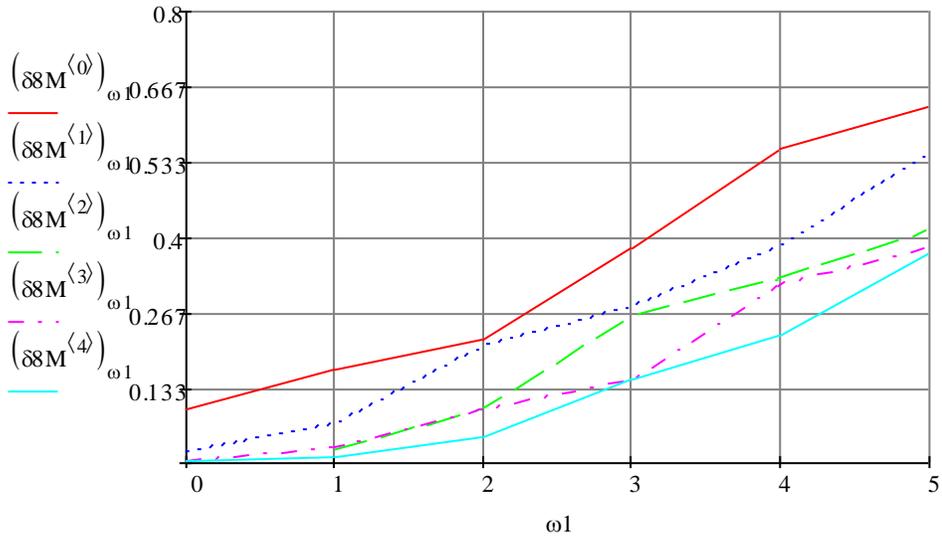
$$\delta M^{(0)} := \delta V_0$$

$$\delta M^{(2)} := \delta V_2$$

$$\delta M^{(4)} := \delta V_4$$

$$\delta M^{(1)} := \delta V_1$$

$$\delta M^{(3)} := \delta V_3$$



$$\partial V_0_{m_2} := \delta l(\chi^2_{m_2}, m_2, 0)$$

$$\partial V_2_{m_2} := \delta l(\chi^2_{m_2}, m_2, 2)$$

$$\partial V_4_{m_2} := \delta l(\chi^2_{m_2}, m_2, 4)$$

$$\partial V_1_{m_2} := \delta l(\chi^2_{m_2}, m_2, 1)$$

$$\partial V_3_{m_2} := \delta l(\chi^2_{m_2}, m_2, 3)$$

$$\partial V_5_{m_2} := \delta l(\chi^2_{m_2}, m_2, 5)$$

$$\partial M^{(0)} := \partial V_0$$

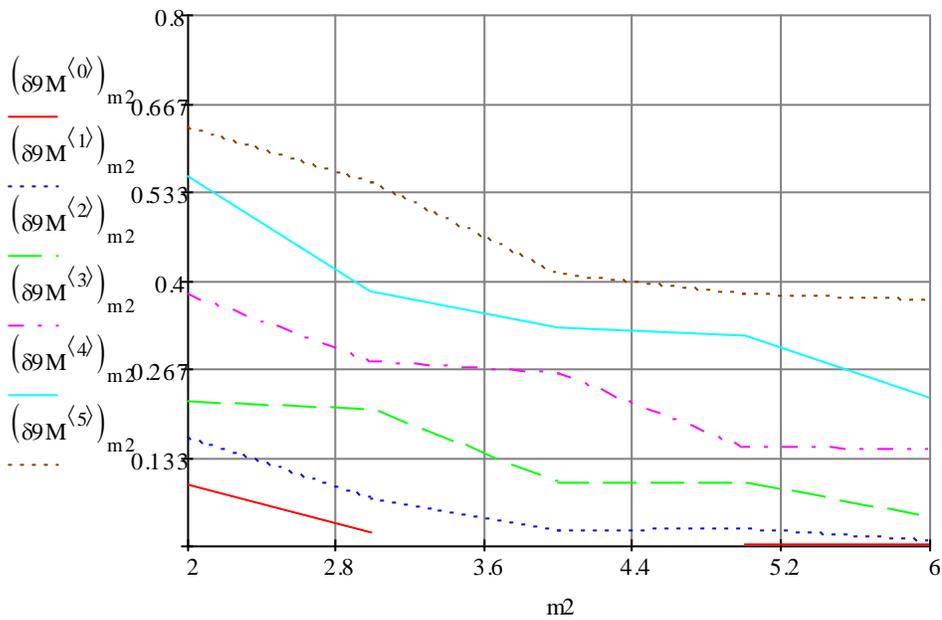
$$\partial M^{(2)} := \partial V_2$$

$$\partial M^{(4)} := \partial V_4$$

$$\partial M^{(1)} := \partial V_1$$

$$\partial M^{(3)} := \partial V_3$$

$$\partial M^{(5)} := \partial V_5$$



5. Построить модели корреляционной функции;  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $m = 5/10$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{opt}$ .

$$\rho(\tau, m, \chi) := \sum_{k=0}^m (b5(k, \chi, \omega) \cdot P7(k, \tau, \chi))$$

$$\Delta\tau := 0.081649 \quad Nx := 37$$

$$\tau := 0, 0 + \Delta\tau \dots (Nx - 1) \cdot \Delta\tau$$

$$\rho t(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$m\_1 := 5$$

$$j := 0..Nx - 1$$

$$\beta 5 M \chi 1 m\_1 k := 2 \chi 1 c(m\_1) \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \chi 1 c(m\_1)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

$$b5 M \chi 1 m\_1 k := \beta 5 M \chi 1 m\_1 k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5 M \chi 1 m\_1 s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho 5 \chi 1(\tau) := \sum_{k=0}^{m\_1} (b5 M \chi 1 m\_1 k \cdot P7(k, \tau, \chi 1 c(m\_1)))$$

$$\beta 5 M \chi 2 m\_1 k := 2 \chi 2 c(m\_1) \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \chi 2 c(m\_1)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

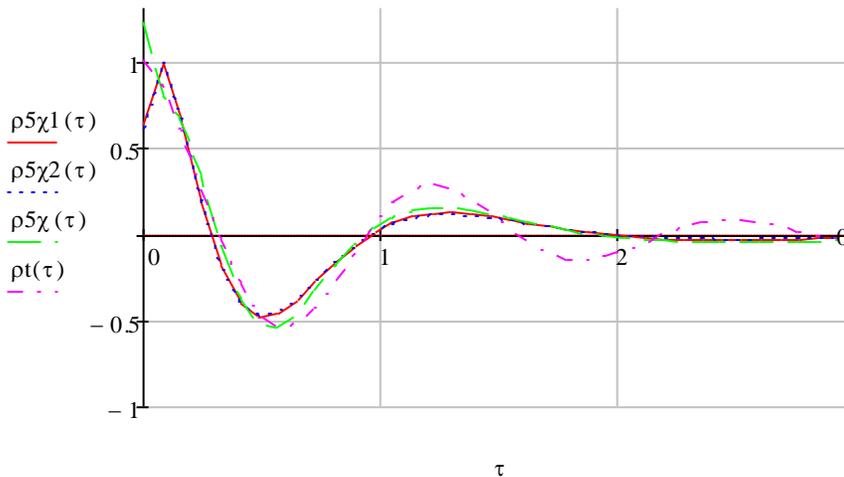
$$b5 M \chi 2 m\_1 k := \beta 5 M \chi 2 m\_1 k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5 M \chi 2 m\_1 s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho_{5\chi_2}(\tau) := \sum_{k=0}^{m-1} \left( b_{5M\chi_2 m-1_k} \cdot P_7(k, \tau, \chi_{2c(m-1)}) \right)$$

$$b_{5M\chi m-1_k} := 2\chi_{\min M_{m-1-2}} \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P_7(k, \tau, \chi_{\min M_{m-1-2}}) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b_{5M\chi m-1_k} := b_{5M\chi m-1_k} + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot b_{5M\chi m-1_s} \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\rho_{5\chi}(\tau) := \sum_{k=0}^{m-1} \left( b_{5M\chi m-1_k} \cdot P_7(k, \tau, \chi_{\min M_{m-1-2}}) \right)$$



$$\delta_{3V_1} := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 10, 5)$$

$$\delta_{3M}^{(g)} := \delta_{3V_1}$$

$$\min(\delta_{3M}^{(g)}) = 0.143$$

$$\text{match}(\min(\delta_{3M}^{(g)}), \delta_{3M}^{(g)}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.11)$$

$$\chi_{\min M_8} := \text{match}(\min(\delta_{3M}^{(g)}), \delta_{3M}^{(g)}) \cdot 0.1 + 0.01$$

$$m_2 := 10$$

$$\beta 5M\chi 1m_{2k} := 2\chi 1c(m_2) \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \chi 1c(m_2)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

$$b5M\chi 1m_{2k} := \beta 5M\chi 1m_{2k} + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5M\chi 1m_{2s} \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\rho 10\chi 1(\tau) := \sum_{k=0}^{m_2} \left( b5M\chi 1m_{2k} \cdot P7(k, \tau, \chi 1c(m_2)) \right)$$

$$\beta 5M\chi 2m_{2k} := 2\chi 2c(m_2) \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \chi 2c(m_2)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

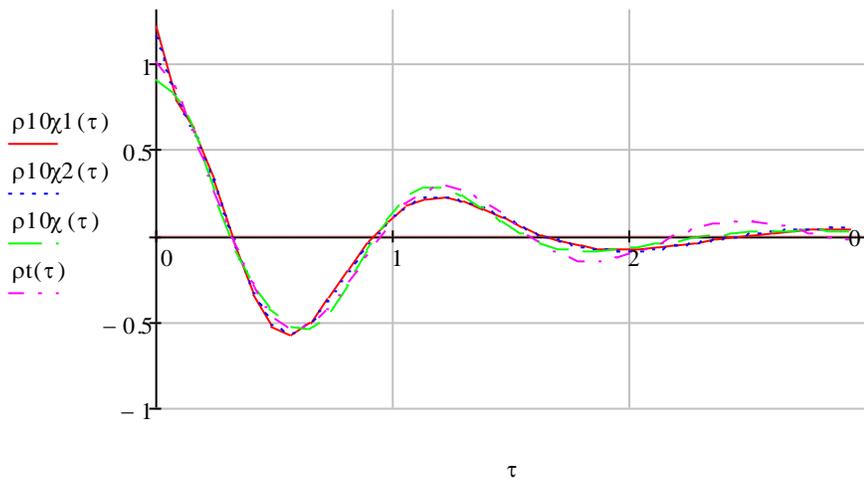
$$b5M\chi 2m_{2k} := \beta 5M\chi 2m_{2k} + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5M\chi 2m_{2s} \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\rho 10\chi 2(\tau) := \sum_{k=0}^{m_2} \left( b5M\chi 2m_{2k} \cdot P7(k, \tau, \chi 2c(m_2)) \right)$$

$$\beta 5M\chi m_{2k} := 2\chi \min M_{m_2-2} \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \chi \min M_{m_2-2}) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

$$b5M\chi m_{2k} := \beta 5M\chi m_{2k} + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5M\chi m_{2s} \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\rho 10\chi(\tau) := \sum_{k=0}^{m_2} \left( b5M\chi m_{2k} \cdot P7(k, \tau, \chi \min M_{m_2-2}) \right)$$



**ЗАДАНИЕ 7. «АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ»**

**Цель работы:** анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.3061$$

$$m := 14$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta\tau := 0.081649 \quad N_x := 37$$

$$\tau_{\max} := \Delta\tau \cdot N_x$$

$$\rho_x(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta5_k := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

2. Найти оценку коэффициентов разложения  $\beta_{k\_1}$  и составляющую методической погрешности, вызванную конечным верхним пределом интегрирования  $\Delta 1 \beta$ .

$$\beta5_{1k} := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\tau_{\max}} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\Delta^1 \beta_{5_k} := \beta_{5_{k-1}} - \beta_{5_k}$$

$$\Delta^1 \beta_{5_k} =$$

0.00174
0.0027
-0.00127
-0.00453
-0.00032
0.00581
0.00304
-0.00596
-0.00655
0.00431
0.01011
-0.00042
-0.01275
-0.00615
0.0124
0.01452

3. Найти оценку коэффициентов разложения  $\beta_{k,2}$  и составляющую методической погрешности, вызванную дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования  $\Delta^2 \beta$ .

MethodInt :=

$$\text{func}(k, dt, J) := \rho_x(dt \cdot J) \cdot P7(k, dt \cdot J, \gamma)$$

Реализация методов численного интегрирования.

Метод прямоугольников.

```

IntP(dt, J, k) :=
  temp ← 0
  for i ∈ 1..J - 1
    temp ← temp + func(k, dt, i)
  temp ← temp · dt
  temp

```

Метод трапеций.

```

IntT(dt,J,k) :=
temp ← 0
for i ∈ 1..J - 2
temp ← temp + func (k, dt, i)
temp ← temp +  $\frac{(\text{func}(k, dt, 0) + \text{func}(k, dt, J - 1))}{2}$ 
temp ← temp · dt
temp

```

Метод Ньютона.

```

IntN(dt,J,k) :=
i ← 0
temp ← 0
while i ≤ J - 4
| temp ← temp + (func (k, dt, i) + 3 func (k, dt, i + 1) + 3 func (k, dt, i + 2) + func (k, dt, i + 3))
| i ← i + 3
temp ← temp · dt ·  $\frac{3}{8}$ 
temp

```

Метод Симпсона.

```

IntS(dt,J,k) :=
i ← 1
temp ← 0
while i ≤ J - 2
| temp ← temp + 4 func (k, dt, i)
| i ← i + 2
i ← 2
while i ≤ J - 3
| temp ← temp + 2 func (k, dt, i)
| i ← i + 2
temp ←  $\frac{(\text{temp} + \text{func}(k, dt, 0) + \text{func}(k, dt, J - 1)) \cdot dt}{3}$ 
temp

```

$$\text{Integ}(dt, J, k) := \begin{cases} \text{IntP}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 1 \\ \text{IntT}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 2 \\ \text{IntN}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 3 \\ \text{IntS}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 4 \end{cases}$$

$$\beta_{5\_2k} := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \text{Integ}(\Delta\tau, Nx, k)$$

$$\Delta^2 \beta_{5k} := \beta_{5\_2k} - \beta_{5\_1k}$$

$$\Delta^2 \beta_{5k} =$$

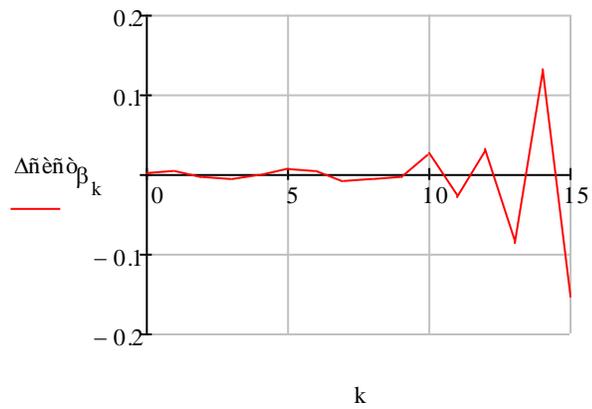
0.00068
0.00116
-0.00055
-0.00156
-0.00063
0.00238
0.0012
-0.00266
0.00082
-0.00624
0.01792
-0.02777
0.04449
-0.07804
0.12012
-0.16853

4. Найти систематическую составляющую методической погрешности  $\Delta_{\text{сист}} \beta$ .

$$\Delta_{\text{сист}} \beta_k := \Delta^1 \beta_{5_k} + \Delta^2 \beta_{5_k}$$

$$\Delta_{\text{сист}} \beta_k =$$

0.00242
0.00386
-0.00181
-0.00609
-0.00095
0.00819
0.00424
-0.00862
-0.00573
-0.00194
0.02803
-0.02819
0.03174
-0.08419
0.13252
-0.15401



**ЗАДАНИЕ 8. «ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ»**

**Цель работы:** изучение погрешностей аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 3$$

$$m := 12$$

$$k := 0..n$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2 - 1}}$$

$$\gamma(m) := \frac{0.4}{(m + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

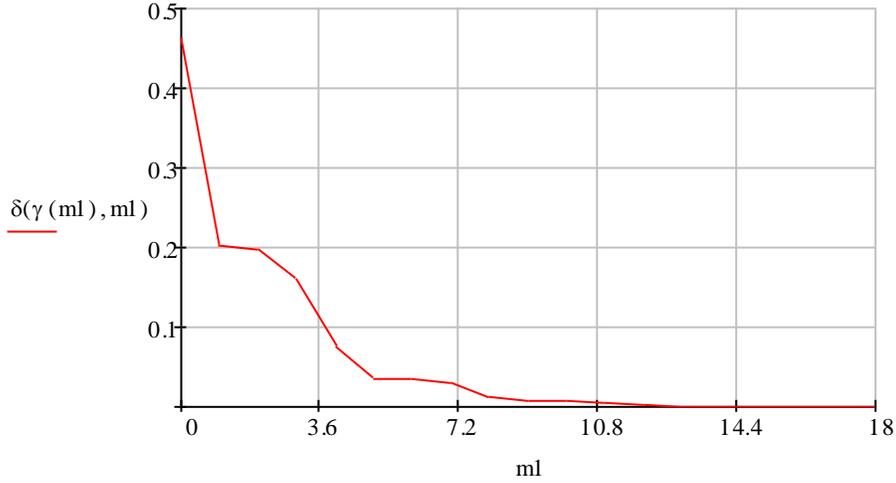
$$\beta5(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\tau4 := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\delta(\gamma, m) := 1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta5(k, \gamma))^2}{k + 1}$$

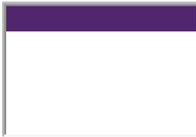
2. Построить зависимость  $\delta_{\min}$  от параметра  $m$  при заданном параметре масштаба.

$m1 := 0..18$



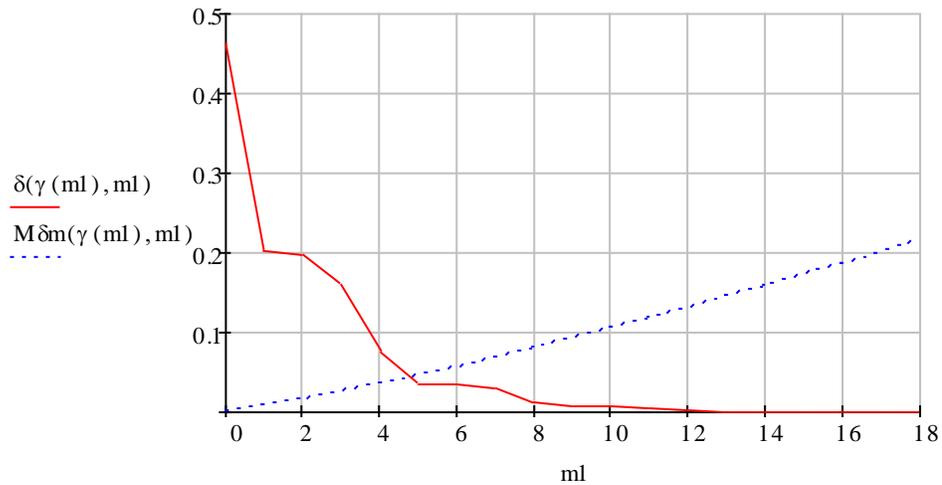
3. Построить зависимость  $M[\delta m]$  от параметра  $m$  при заданном параметре  $\gamma_k$ .

$gk :=$



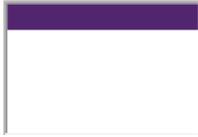
$$\gamma_k := \begin{cases} 0.005 & \text{if } gk = 1 \\ 0.01 & \text{if } gk = 2 \\ 0.02 & \text{if } gk = 3 \\ 0.05 & \text{if } gk = 4 \\ 0.1 & \text{if } gk = 5 \end{cases}$$

$$M\delta m(\gamma, m) := \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau^4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\gamma_k}{k+1}$$



4. Построить зависимость  $M[\delta]$  от параметра  $m$  при заданном параметре  $\gamma_k$ .

$g_k :=$



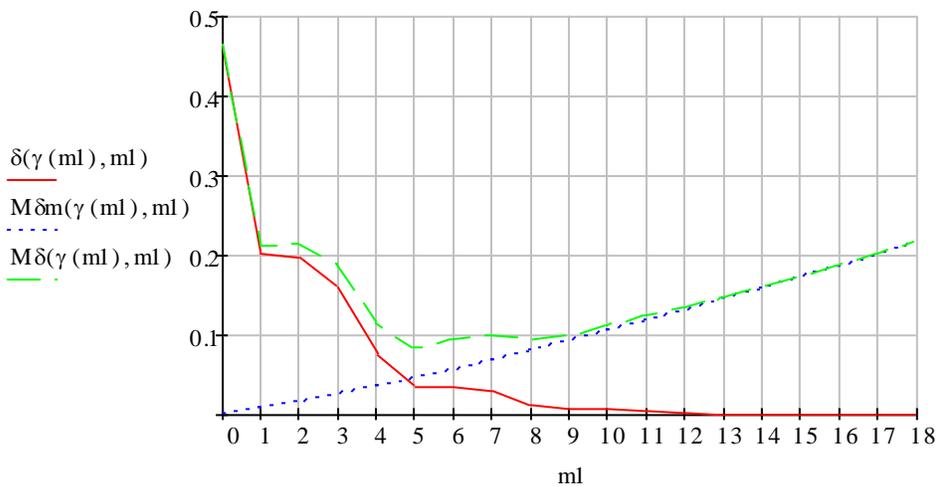
$\gamma_k :=$

0.005	if $g_k = 1$
0.01	if $g_k = 2$
0.02	if $g_k = 3$
0.05	if $g_k = 4$
0.1	if $g_k = 5$

$$\delta(\gamma, m) := 1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau_4} \cdot \sum_{k=0}^{\text{trunc}(m)} \frac{(\beta_5(k, \gamma))^2}{k+1}$$

$$M\delta_m(\gamma, m) := \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau_4} \cdot \sum_{k=0}^{\text{trunc}(m)} \frac{\gamma_k}{k+1}$$

$$M\delta(\gamma, m) := \delta(\gamma, m) + M\delta_m(\gamma, m)$$



5. Построить зависимость  $m_{\text{opt}}$  от параметра  $\gamma_k$ .

$$M\delta(\gamma, m_2) := \delta(\gamma, m_2) + M\delta_m(\gamma, m_2)$$

$$m_2 := 12$$

Given

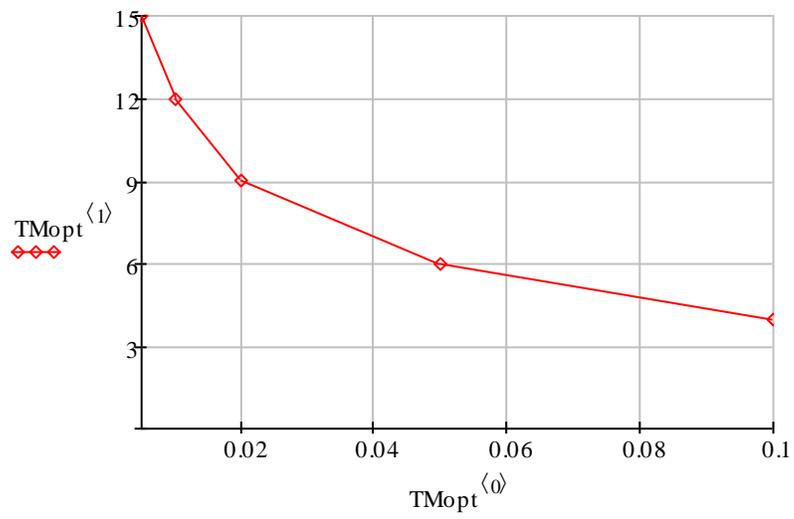
$$M\delta_m(\gamma(m_2), m_2) = \delta(\gamma(m_2), m_2)$$

Find(m2) = 5.941

m3 := trunc(5.941)

m3 = 5

TMopt :=  $\begin{pmatrix} 0.005 & 15 \\ 0.01 & 12 \\ 0.02 & 9 \\ 0.05 & 6 \\ 0.1 & 4 \end{pmatrix}$



## ЗАДАНИЕ 9. «АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 3$$

$$m := 12$$

$$k := 0..n$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\gamma := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t}$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta5(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\beta M_k := \beta5(k, \gamma)$$

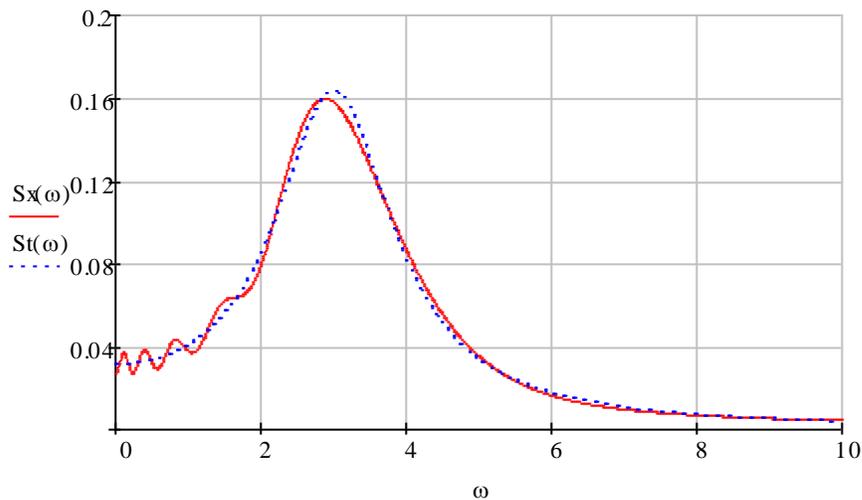
2. Найти модель спектральной плотности мощности по параметрам нормированной корреляционной функции  $\beta_k$ . Проверить условие нормировки.

$$\phi(\omega, k) := \text{atan} \left[ \frac{\omega}{(k+1)\gamma} \right]$$

$$S_X(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{\beta M_k}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2]} + \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2]} \right]$$

$$\omega := 0,0 + 0,01 \cdot 10$$



Проверка условия нормировки модели нормированной корреляционной функции.

$$\sum_{k=0}^m \left[ \beta M_k \cdot (-1)^k \right] = 1.004$$

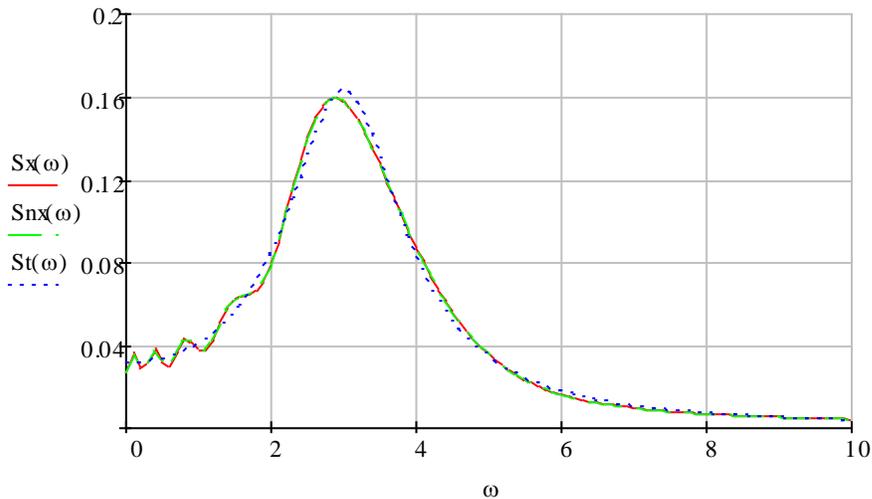
3. Найти модель спектральной плотности мощности по параметрам нормированной корреляционной функции  $b_k$ . Проверить условие нормировки.

$$b_5(k, \gamma) := \beta M_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m [(-1)^s \cdot \beta M_s] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$S_{nX}(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{b_5(k, \gamma)}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2]} + \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2]} \right]$$

$$\omega := 0, 0 + 0.1 \cdot 10$$



Проверка условия нормировки модели нормированной корреляционной функции при ограничении на модель.

$$\sum_{k=0}^m [b_5(k, \gamma) \cdot (-1)^k] = 1$$

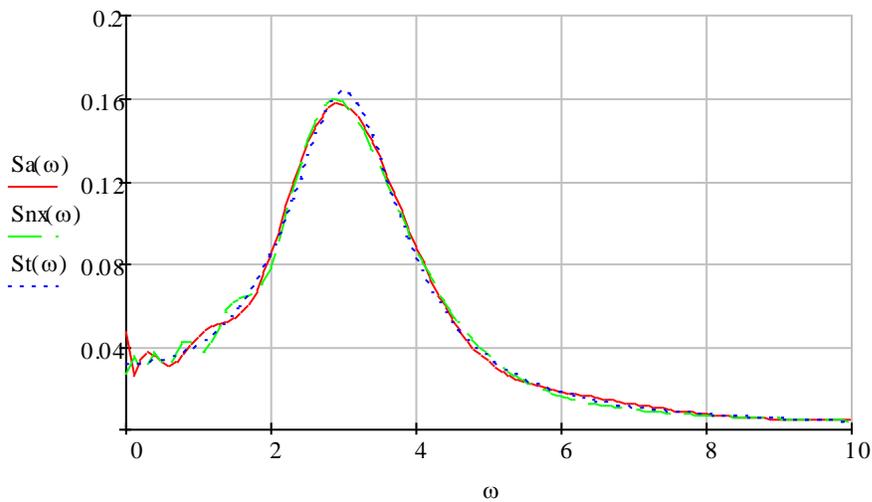
4. Для той же модели спектральной плотности мощности найти корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.

$$\beta_{5s}(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \omega, \gamma) \cdot St(\omega) d\omega$$

$$\beta_{sM}_k := \beta_{5s}(k, \gamma)$$

$$c5(k, \gamma) := \beta_{sM}_k + \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{s=0}^m \frac{\beta_{sM}_s}{s+1}}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{s+1}}$$

$$Sa(\omega) := \sum_{k=0}^m (c5(k, \gamma) \cdot P7(k, \omega, \gamma))$$



Проверка условия нормировки модели спектральной плотности мощности.

$$2 \cdot \sum_{k=0}^m \frac{c5(k, \gamma)}{2\gamma \cdot (k + 1)} = 0.5$$

**ЗАДАНИЕ 10. «АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных функций случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..n$$

$$\gamma := 0.3061$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_5(k) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\beta M_k := \beta_5(k)$$

$$b_5(k) := \beta M_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta M_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

2. Построить спектральную функцию и ее ортогональную модель.

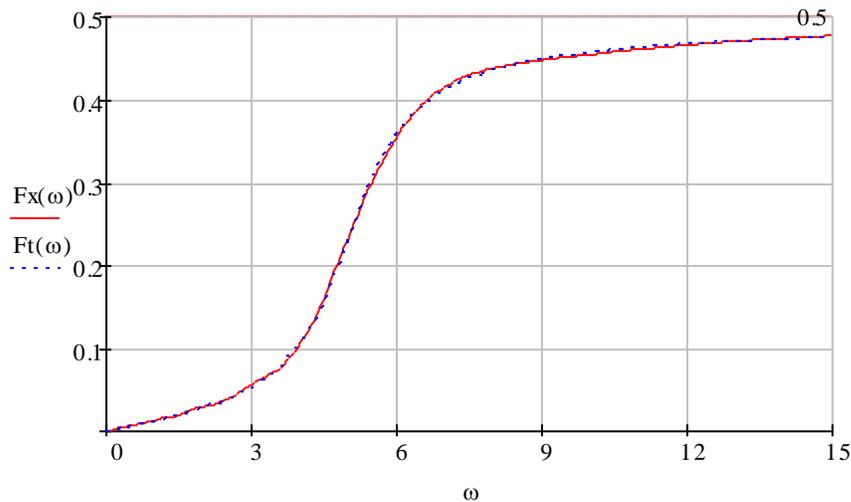
$$\phi_1(\omega) := \text{atan}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\lambda}\right)$$

$$\phi_2(\omega) := \text{atan}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\lambda}\right)$$

$$F_X(\omega) := \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ b_5(k) \cdot \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot \text{atan} \left[ \frac{\omega}{\gamma \cdot (s + 1)} \right] \right] \right]$$

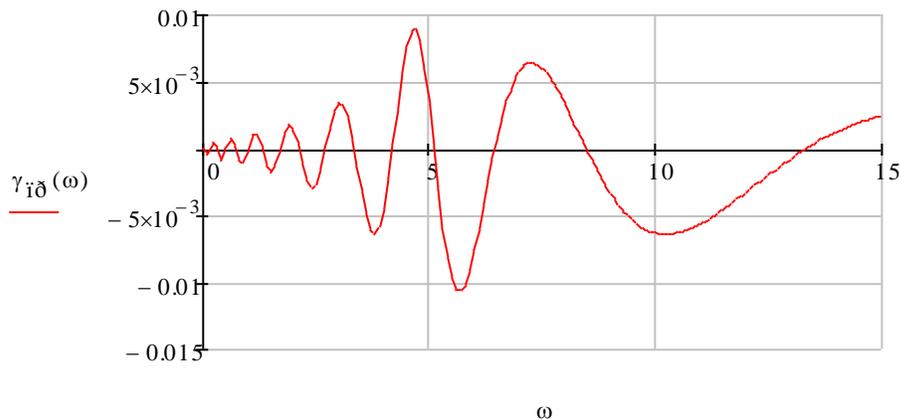
$$F_t(\omega) := \frac{1}{2\pi} \cdot (\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega))$$

$$\omega := 0, 0 + 0.1 : 15$$



3. Найти приведенную погрешность определения спектральной функции ее ортогональной моделью. Построить график.

$$\gamma_{\text{пгр}}(\omega) := \frac{F_X(\omega) - F_t(\omega)}{0.5}$$



**ЗАДАНИЕ 11. «АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ  
КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК»**

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции, выражения для оценки интервалов корреляции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^2 - 1}}$$

$$\gamma := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t}$$

$$\gamma = 0.306$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_5(k) := 2 \cdot \gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\beta_5_k := \beta_5(k)$$

$$b_5(k) := \beta_5_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta_5_s \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\tau_{20k} := \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b5(k)}{k+1}$$

$$\tau_{40k} := \frac{1}{2\gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b5(k)^2}{k+1}$$

2. Определить относительные погрешности оценки интервалов корреляции.

$$\tau_{2k} := \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

$$\tau_{4k} := \frac{2\lambda^2 + \omega^2}{4\lambda(\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\gamma_{1\text{ cm}} := \frac{\tau_{20k} - \tau_{2k}}{\tau_{2k}}$$

$$\gamma_{2\text{ cm}} := \frac{\tau_{40k} - \tau_{4k}}{\tau_{4k}}$$

$$\gamma_{1\text{ cm}} = -0.511$$

$$\gamma_{2\text{ cm}} = -0.011$$

3. Для заданной модели спектральной плотности мощности с использованием параметров модели корреляционной функции определить эквивалентную ширину спектра мощности по аналитическим выражениям и по параметрам ортогональной модели корреляционной функции.

$$\omega_e := \sqrt{(2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}) - \omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\omega_e = 4.999$$

$$\Delta\omega_e := \omega_e + \frac{\pi \cdot [\lambda^2 + (\omega_e - \omega_0)^2] \cdot [\lambda^2 + (\omega_e + \omega_0)^2]}{4\lambda \cdot (\lambda^2 + \omega_e^2 + \omega_0^2)}$$

$$\Delta\omega_e = 6.554$$

$$\phi(\omega, k) := \text{atan} \left[ \frac{\omega}{(k+1)\gamma} \right]$$

$$S_X(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{b5(k)}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$\omega_0_e := 4.996$$

$$\Delta\omega_0_e := \omega_0_e + \frac{1}{Sx(\omega_0_e)} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ b5(k) \cdot (-1)^k - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k,s) \cdot \text{combin}(k+s+1,s+1) \cdot (-1)^s \cdot \text{atan} \left[ \frac{\omega_0_e}{(s+1)\gamma} \right] \right] \right] \right]$$

$$\Delta\omega_0_e = 6.811$$

4. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам модели корреляционной функции.

$$\gamma_{cm}^3 := \frac{\Delta\omega_0_e - \Delta\omega_e}{\Delta\omega_e}$$

$$\gamma_{cm}^3 = 0.039$$

5. Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности и найти корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Определить эквивалентную ширину спектра мощности по параметрам модели спектра мощности.

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$$

$$\beta 5s(k) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \omega, \gamma) \cdot St(\omega) d\omega$$

$$\beta 5s_k := \beta 5s(k)$$

$$c5(k) := \beta 5s_k + \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{s=0}^m \frac{\beta 5s_s}{s+1}}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{s+1}}$$

$$\omega := 0,0 + 0,2 \cdot 20$$

$$Sa(\omega) := \sum_{k=0}^m (c5(k) \cdot P7(k, \omega, \gamma))$$

$$\Delta\omega_{01_e} := \omega_{0_e} + \frac{\int_{\omega_{0_e}}^{\infty} Sa(\omega) d\omega}{Sa(\omega_{0_e})}$$

$$\Delta\omega_{01_e} = 6,738$$

6. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам ортогональной модели спектральной плотности мощности.

$$\gamma^4_{cm} := \frac{\Delta\omega_{01_e} - \Delta\omega_e}{\Delta\omega_e}$$

$$\gamma^4_{cm} = 0,028$$

С.А. Прохоров, И.М. Куликовских

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА  
КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров, И.М. Куликовских  
Лицензия ЛР № от

Подписано в печать. Формат  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л.  
Тираж 100 экз. Заказ №

Самарский научный центр Российской академии наук.  
443001, Самара, Студенческий переулок, 3 А.