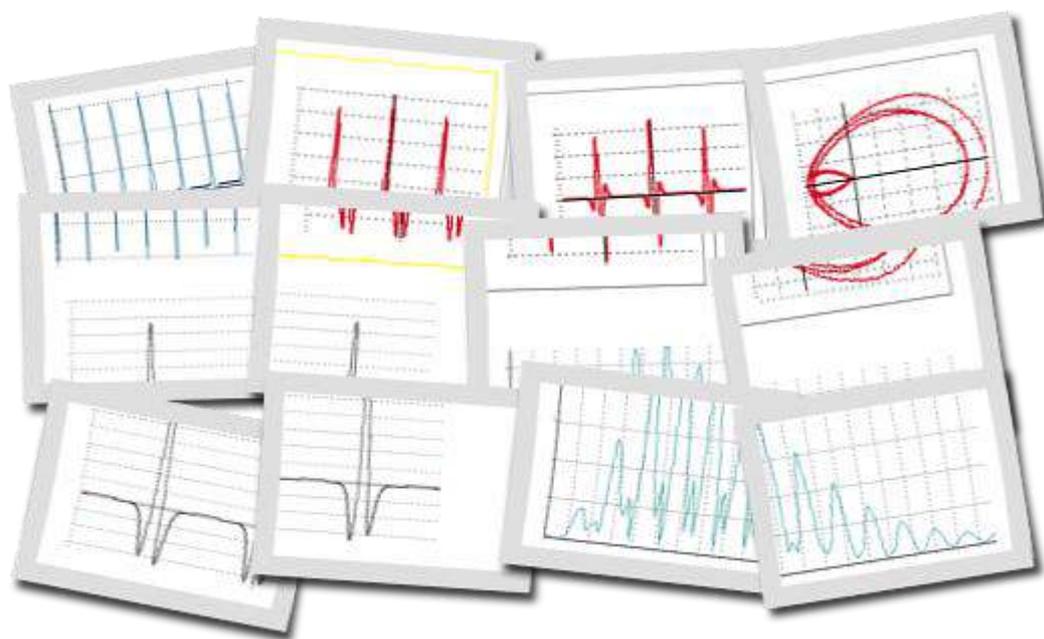


С.А. Прохоров, И.М. Куликовских

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ И
КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО И НАТУРНОГО
ЭКСПЕРИМЕНТОВ**



Самара 2019 г.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/
ББК 32.965я73

Рецензенты:

д. т. н., профессор Бахарева Н.Ф., заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики;

д. т. н., профессор Радченко В.П., заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.

П 10 Прохоров С.А., Куликовских И.М. Численные методы, алгоритмы и комплексы программ для проведения вычислительного и натурального экспериментов/СНЦ РАН, 2019. 206 с., ил.

ISBN – 978-5-93424-283-2

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены вопросы применения численных методов, алгоритмов и комплексов программ для проведения вычислительного и натурального экспериментов, в том числе:

- математического описания и моделирования случайных процессов с заданными корреляционно-спектральными свойствами;
- численных методов аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах, в том числе, нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии, неэквидистантных временных рядов;
- описания комплексов программ для проведения и обработки результатов вычислительного и натурального экспериментов.

Предлагаемые для закрепления теоретического материала лабораторные работы выполняются с использованием комплексов программ - автоматизированных информационных систем, разработанных на кафедре информационных систем и технологий Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

При выполнении лабораторных работ широко применяется технологии математического и имитационного моделирования, а также обработка реальных данных, полученных в ходе экспериментальных исследований образцов авиационно-космической техники, медико-биологических исследований и т.д.

Учебное пособие предназначено для аспирантов, докторантов, преподавателей, научных сотрудников, инженеров как руководство по математическому описанию и моделированию случайных сигналов, а также обработке результатов вычислительного и натурального экспериментов.

ББК 32.965я73

ДОПУЩЕНО

*УМУ ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
в качестве учебного пособия по направлению
09.06.01 Информатика и вычислительная техника,
профиля 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»*

© С.А. Прохоров, 2019
И.М. Куликовских, 2019



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, действительный член Международной академии информатизации, Международной общественной организации «Академия навигации и управления движением», академии телекоммуникаций и информатики, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, лауреат губернской премии в области науки и техники, областной премии Ленинского комсомола, конкурса на лучшую научную книгу 2005, 2007, 2009 годов среди преподавателей высших учебных заведений России, награжден медалями

Келдыша М.В., Гагарина Ю.А., Королева С.П. федерации космонавтики РФ, изобретателя СССР, «За заслуги перед городом Самара», нагрудными знаками «Победитель социалистического соревнования - 1975» «Ветеран космодрома Плесецк», знаками РАЕ «Заслуженный деятель науки и образования», «Основатель научной школы», заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Принимал участие в руководстве и выполнении 36 хозяйственных и госбюджетных НИР.

Подготовил 4 докторов и 27 кандидатов технических наук, по 5 кандидатским диссертациям являлся научным консультантом, являлся руководителем 154 дипломных проектов и работ, 3 магистерских диссертаций. Являлся официальным оппонентом по 42 докторским и 57 кандидатским диссертациям.

Опубликовал 485 научных работ, в том числе, 22 монографии, 13 брошюр, 40 авторских свидетельств, 21 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. Результаты работы обсуждались на 123 международных, Всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

Куликовских Илона Марковна – к.т.н., доцент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева, научный сотрудник Загребского университета (Faculty of Electrical Engineering and Computing) и института Руджер Бошкович (Division of Electronics).

Обладатель грантов Президента РФ (2018-2019), РФФИ (2018-2019), стипендии правительства РФ (2010-2011), победитель программ У.М.Н.И.К. (2010-2011) и СТАРТ (2019-2020), лауреат губернской премии в области науки и техники для аспирантов (2009) и молодых ученых (2013), лауреат конкурса на лучшую научную книгу 2009 годов среди преподавателей высших учебных заведений России.

Являлась руководителем 25 дипломных работ и 10 магистерских диссертаций.

Опубликовала 99 научных работ, в том числе, 5 монографий, 12 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ. Результаты работы обсуждались на 25 международных и всероссийских конференциях.



СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ	17
1.1. Основные понятия и определения	17
1.2. Математическое описание случайных величин	23
1.3. Функции случайных аргументов	25
1.4. Системы случайных величин	26
1.5. Математическое описание случайных сигналов	30
1.6. Корреляционные характеристики	37
1.7. Структурные функции	42
1.8. Спектральные характеристики	45
1.9. Математическое описание случайных потоков событий	51
1.10. Математическое описание неэквидистантных временных рядов	58
1.11. Типовые модели неэквидистантных временных рядов	65
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	77
2.1. Моделирование временных рядов типа «белого» шума	77
2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения	80
2.2.1. Метод обратной функции	80
2.2.2. Приближенный метод моделирования	82
2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами	89
2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей	93
2.5. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции	97
2.6. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой	99
2.7. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций	100
2.8. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального	104
2.9. Генерирование неэквидистантных временных рядов	109
2.10. Генерирование нестационарных временных рядов	112
3. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ	115
3.1. Основные понятия и определения	115
3.2. АИС корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах с использованием метода аналитических разложений SCAN	117
3.3. Автоматизированная система аппроксимативного анализа нестационарных процессов	132
4. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ	143
4.1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции	143
4.1.1. Теоретические основы	143
4.1.2. Задание на самостоятельную работу	143
4.1.3. Содержание отчёта	144
4.1.4. Контрольные вопросы	144
4.2. Построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с помощью автоматизированной информационной системы (АИС)	144
4.2.1. Теоретические основы	144
4.2.2. Задание на самостоятельную работу	145
4.2.3. Содержание отчёта	148
4.2.4. Контрольные вопросы	148
4.3. Моделирование пары коррелированных временных рядов с заданными корреляционно-спектральными свойствами	149
4.3.1. Теоретические основы	149
4.3.2. Задание на самостоятельную работу	149
4.3.3. Содержание отчёта	149
4.3.4. Контрольные вопросы	149

4.4.	Ортогональные модели взаимных корреляционно-спектральных характеристик	150
4.4.1.	Теоретические основы	150
4.4.2.	Задание на самостоятельную работу	152
4.4.3.	Содержание отчёта	152
4.4.4.	Контрольные вопросы	152
4.5.	Анализ методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций с помощью АИС	153
4.5.1.	Теоретические основы	153
4.5.2.	Задание на самостоятельную работу	158
4.5.3.	Содержание отчёта	159
4.5.4.	Контрольные вопросы	159
4.6.	Ортогональные модели нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии	160
4.6.1.	Теоретические основы	160
4.6.2.	Задание на самостоятельную работу	160
4.6.3.	Содержание отчёта	160
4.6.4.	Контрольные вопросы	160
4.7.	Корреляционно-спектральный анализ результатов экспериментальных исследований	160
4.7.1.	Теоретические основы	160
4.7.2.	Задание на самостоятельную работу	168
4.7.3.	Содержание отчёта	168
4.7.4.	Контрольные вопросы	169
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	170
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	171
	ПРИЛОЖЕНИЕ	175
П.1	Типовые законы распределения	175
П.2	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	180
П.3.	Пояснение к автоматизированной системе корреляционно-спектрального анализа SCAN	181
П.4.	Пояснение к автоматизированной системе аппроксимативного анализа нестационарных процессов	185
П.5.	Примеры запоминания информации о центрировании и нормировании	188
П.6.	Формат вводимых и выводимых файлов	189
П.7.	Фазовые портреты СП	190
П.8.	Лабораторная работа № 1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции	191
П.9.	Лабораторная работа № 2. Построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с помощью АИС	194
П.10.	Лабораторная работа № 3. Моделирование пары коррелированных временных рядов с заданными корреляционно-спектральными свойствами	196
П.11.	Лабораторная работа № 4. Ортогональные модели взаимных корреляционно-спектральных характеристик	199
П.12.	Лабораторная работа № 5. Анализ методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций с помощью АИС	201
П.13.	Лабораторная работа № 6 Ортогональные модели нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии	202
П.14.	Лабораторная работа № 7. Корреляционно-спектральный анализ результатов экспериментальных исследований	204

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АСНИ – автоматизированная система научных исследований;
ВКФ – взаимная корреляционная функция;
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;
ВР – временной ряд;
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;
ИИС – информационно-измерительная система;
КФ – корреляционная функция;
НКФ – нормированная корреляционная функция;
ПО – процессор обработки;
ПРИС – процессорно-измерительное средство;
СП – случайный процесс;
 $A_{\Theta} \{ \hat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки вероятностной характеристики Θ ;
 $A_s \{ \hat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки сигнала;
 $C_x(J)$ – интервальная корреляционная функция;
 d – параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 \hat{D}_x – оценка дисперсии;
 $\text{Ent}[]$ – операция взятия целой части числа;
 $F_x(\omega)$ – спектральная функция;
 $gl J$ – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;
 $K_a(\tau)$ – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 $K_{axy}(\tau)$ – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;
 $K_x(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $K_x(t, t')$ – корреляционная функция случайного процесса;
 $K_{xy}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция;
 $\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$ – ортогональная функция k -го порядка;
 $M[]$ – оператор математического ожидания;
 S_d – оператор усреднения;
 Sign – знаковая функция;
 $S_{axy}(\omega)$ – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;
 $S_x(\omega)$ – спектральная плотность мощности процесса $\dot{x}(t)$;
 $S_{xn}(\omega)$ – нормированная спектральная плотность мощности процесса $\dot{x}(t)$;
 $S_{xy}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность мощности;
 $\text{Re } S_{axy}(\omega)$ – действительная часть взаимной спектральной плотности мощности;
 $\text{Im } S_{axy}(\omega)$ – мнимая часть взаимной спектральной плотности мощности;
 $|S_{xy}(\omega)|$ – модуль взаимной спектральной плотности мощности;
 $\Phi[S_{xy}(\omega)]$ – фаза взаимной спектральной плотности мощности;
 $F_x(\omega)$ – спектральная функция;

$W_k(j\omega)$ – частотная характеристика ортогональных функций k -го порядка;
 $x_j(t)$ – j -ая реализация случайного процесса;
 $\bar{x}(\bar{\Theta}, t)$ – реализация случайного процесса;
 β_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 b_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 c_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 Δ – погрешность аппроксимации;
 δ – относительная погрешность аппроксимации;
 Δt_{ji} – интервал дискретизации;
 $\Delta\omega_\phi$ – полоса пропускания фильтра;
 $\Delta\omega_c$ – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 $\gamma_{см}$ – погрешность от смещенности оценки;
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$ – допустимые значения погрешностей оценки;
 γ_m – методическая статистическая погрешность;
 μ – показатель колебательности;
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$ – j -текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\Theta[X(t)], \Theta$ – измеряемая вероятностная характеристика;
 $\bar{\Theta}$ – вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$ – средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}[X(t)]$ – оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$ – t -текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;
 $\rho_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho_x(t, t')$ – нормированная корреляционная функция случайного процесса;
 $\rho_{xy}(\tau)$ – взаимная нормированная корреляционная функция;
 $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)]$ – фазовый портрет нормированной корреляционной функции;
 $\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)]$ – фазовый портрет нормированной взаимной корреляционной функции;
 r_{xy} – коэффициент корреляции;
 $\tau_k^{(i)}$ – интервал корреляции;
 $\tau_{k \max}$ – максимальный интервал корреляции;
 $\bar{\Omega}$ – вектор информативных параметров объекта исследований.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое Вашему вниманию учебное пособие, посвященное изучению численных методов и алгоритмов аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик в ортогональных базисах, подготовлено для аспирантов, докторантов, преподавателей, научных сотрудников и инженеров и дополняет следующие монографии:

1. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 209 с.: ил.

2. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. – 191 с.: ил.

3. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 277 с., ил.

4. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 374 с.: ил.

5. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 329 с., ил.

6. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.

7. Прикладной анализ случайных процессов. Под ред. Прохорова С.А./ СНЦ РАН, 2007. 582 с., ил.

8. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум/ СНЦ РАН, 2008. 301 с., ил.

В пособии рассматриваются вопросы применения численных методов, алгоритмов и комплексов программ для проведения вычислительного и натурального экспериментов с использованием автоматизированных информационных систем (АИС), разработанных на кафедре информационных систем и технологий Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

При выполнении лабораторных работ широко применяется технология имитационного моделирования, а также обработка реальных данных, полученных в ходе экспериментальных исследований образцов авиационно-космической техники, медико-биологических исследований и т.д.

Материалы, представленные в учебном пособии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, естественно-математическом факультете (РМФ) и факультете электротехники и вычислительной техники (FER) Загребского университета, «Центре исследования моря» (СИМ) института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия).

Отдельные разделы учебного пособия использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов, магистров и аспирантов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарском государственном аэрокос-

мическом университете), Самарском государственном университете, Волгоградском государственном университете, Оренбургском государственном университете, Пензенском государственном университете, Саратовском государственном техническом университете, Уфимском государственном авиационно-техническом университете, также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), на естественно-математическом факультете (PMF) и факультете электротехники и вычислительной техники (FER) Загребского университета, Международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете (Китай).

В полном объеме учебное пособие прошло апробацию на кафедре информационных систем и технологий Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева при подготовке аспирантов по направлению 09.06.01 Информатика и вычислительная техника, профиля «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», магистров по направлению 09.04.01 - ИВТ, кафедре безопасности информационных систем Самарском государственном университете при подготовке специалистов по специализации 10.05.01 – компьютерная безопасность, 10.03.01 – информационная безопасность, кафедре радиоэлектроники и телекоммуникаций Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина при подготовке магистров по направлению 11.04.02 - инфокоммуникационные технологии и системы связи и, на наш взгляд, может быть рекомендован для подготовки специалистов по другим направлениям и специальностям, где изучаются вопросы, связанные с обработкой результатов моделирования и экспериментальных исследований.

Авторы выражают благодарность сотрудникам, аспирантам и студентам указанных кафедр за обсуждение материалов учебного пособия, критические замечания которых были учтены.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность рецензентам: д. т. н., профессору Бахаревой Н.Ф. - заведующей кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, д. т. н., профессору Радченко В.П.- заведующему кафедрой прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, - за ценные замечания.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:
Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: sp.prokhorov@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов.

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которое невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

- 1) ставит задачу исследований в терминах предметной области;
- 2) строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
- 3) с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$, с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
- 4) по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$:

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}), -$$

используемое для построения искомой модели объекта;

- 5) анализирует полученные результаты;
- б) если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3, 4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2 - 4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1 - 4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;

3. оценке вектора параметров $\bar{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;
5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса $\bar{\Theta}$, дающие его исчерпывающее описание.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

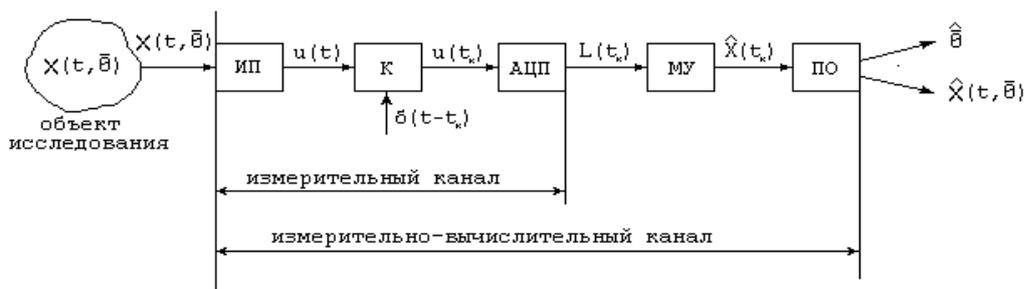


Рисунок В.1 - Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.1 приняты следующие обозначения.

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

Рассмотрим преобразования, происходящие с сигналами в измерительно-вычислительном канале.

Независимо от природы измеряемой физической величины на выходе **ИП** получаем электрический сигнал. При этом, каждому значению физической величины ставится в соответствие вполне определенное значение электрической величины:

$$x(t, \bar{\Theta}) \rightarrow u(t).$$

Основным требованием, предъявляемым к **ИП**, является линейность:

$$u(t) = k x(t, \bar{\Theta}), \tag{B.1}$$

где $k = const$ - коэффициент преобразования.

Следует отметить, что если связь между $u(t)$ и $x(t, \bar{\Theta})$ нелинейная, то производят линеаризацию функции преобразования, воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов [5].

После **ИП** исследуемый сигнал поступает на вход коммутатора.

В коммутаторе непрерывный сигнал $u(t)$ преобразуется в последовательность отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Т.е. выполняется операция **дискретизации**:

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t - t_i) dt, \quad (B.2)$$

$$\text{где } \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases} \text{ - } \delta\text{-функция Дирака.} \quad (B.3)$$

Отметим, что при коммутации возможны два варианта:

- $\Delta t_i = const$ - регулярная дискретизация;
- $\Delta t_i = random$ - нерегулярная дискретизация.

После коммутации сигнал поступает на аналого-цифровое преобразование, где последовательно подвергается процедурам **квантования** и **кодирования**.

Квантование - процедура отнесения непрерывного значения процесса $u(t_i)$ к ближайшему разрешенному целому уровню.

$$L(t_i) = \text{Ent} \left[\left\lfloor \frac{u(t_i)}{\Delta u} + \lambda \right\rfloor \right] = \text{Sign } u(t_i), \quad (B.4)$$

где $\text{Ent} []$ - операция взятия целой части числа;

Δu - шаг квантования по уровню;

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при усечении} \\ 0,5, & \text{при округлении} \end{cases}.$$

$$\text{Sign } u = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u = 0; \\ -1, & \text{если } u < 0; \end{cases} \text{ - знаковая функция.} \quad (B.5)$$

В результате квантования сигнала получим целое число квантов, которое может кодироваться различными способами. При использовании двоичной системы счисления с весами 8-4-2-1 число двоичных разрядов, необходимых для представления $L(t_i)$ определяется выражением:

$$n = \log_2 \max [L(t_i)]. \quad (B.6)$$

Следует подчеркнуть, что в случае одноканальной системы операции коммутации и аналого-цифрового преобразования совпадают. В многоканальных же системах, как правило, применяется один коммутатор на несколько каналов.

После аналого-цифрового преобразователя сигнал поступает на вход масштабирующего устройства, выходной сигнал которого равен:

$$\hat{x}(t_k) = \frac{L(t_k) \Delta u}{k}. \quad (B.7)$$

Т.е. при этом происходит обратное преобразование: приведение электрического сигнала к измеряемой физической величине.

Далее сигнал поступает в процессор обработки - устройство, реализующее тот или иной алгоритм получения оценки параметров физического процесса $x(t, \vec{\Theta})$. При этом возможны два подхода к решению задачи оценки $\vec{\Theta}$:

- 1) в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма A_Θ оценивают вектор неизвестных параметров $\vec{\Theta} = A_\Theta \{ \hat{x}(t_k) \}$;
- 2) в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма A_s получают оценку сигнала $\hat{x}(t, \vec{\Theta}) = A_s \{ \hat{x}(t_k) \}$, записывают его на какой-либо промежуточный носитель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Таким образом, измерительно-вычислительный канал даёт возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов - временные ряды**.

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей (аппроксимативный анализ) исследуемых процессов и их характеристик.

Графическая интерпретация аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов представлена ниже.

1. Оценка вероятностной характеристики:

$$\{x_j(t)\}_{j=0 \dots N}^{t \in [0, T_j]} \Longrightarrow \{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0 \dots N}^{i=1, M, j} \Longrightarrow \hat{\Theta}[X(t)] = S_d g \left[\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0 \dots N}^{i=1, M, j} \right]$$

где $\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0 \dots N}^{i=1, M, j}$ - временной ряд;

2. Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ случайных процессов:

Пусть $\hat{\Theta}[X(t)] = \sigma_x^2 \hat{\rho}_x(\tau)$. Тогда

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\rho}_x(\tau) & \Longrightarrow & \hat{\rho}_{ax}(\tau, \bar{\beta}_m) & \Longrightarrow & \hat{S}_{ax}(\omega, \bar{\beta}_m) & \Longrightarrow & \hat{F}_{ax}(\omega, \bar{\beta}_m) \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta \omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) \end{array}$$

3. Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов:

Пусть $\hat{\Theta}[X(t), Y(t)] = \sigma_{xy}^2 \hat{\rho}_{xy}(\tau)$. Тогда

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\rho}_{xy}(\tau) & \Longrightarrow & \hat{\rho}_{axy}(\tau, \bar{\beta}_m) & \Longrightarrow & \hat{S}_a(\omega, \bar{\beta}_m) & \Longrightarrow & \hat{F}_a(\omega, \bar{\beta}_m) \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta \omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) \end{array}$$

Из представленных рисунков видно, что основой построения систем для анализа вероятностных характеристик случайных процессов, являются алгоритмы аппроксимативного анализа в виде параметрических моделей, к которым относятся и ортогональные модели. Задача в этом случае сводится к определению параметров моделей, удовлетворяющих выбранному критерию приближения.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рис. В.1.

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [111], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.
- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;

- единообразии и простоте построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

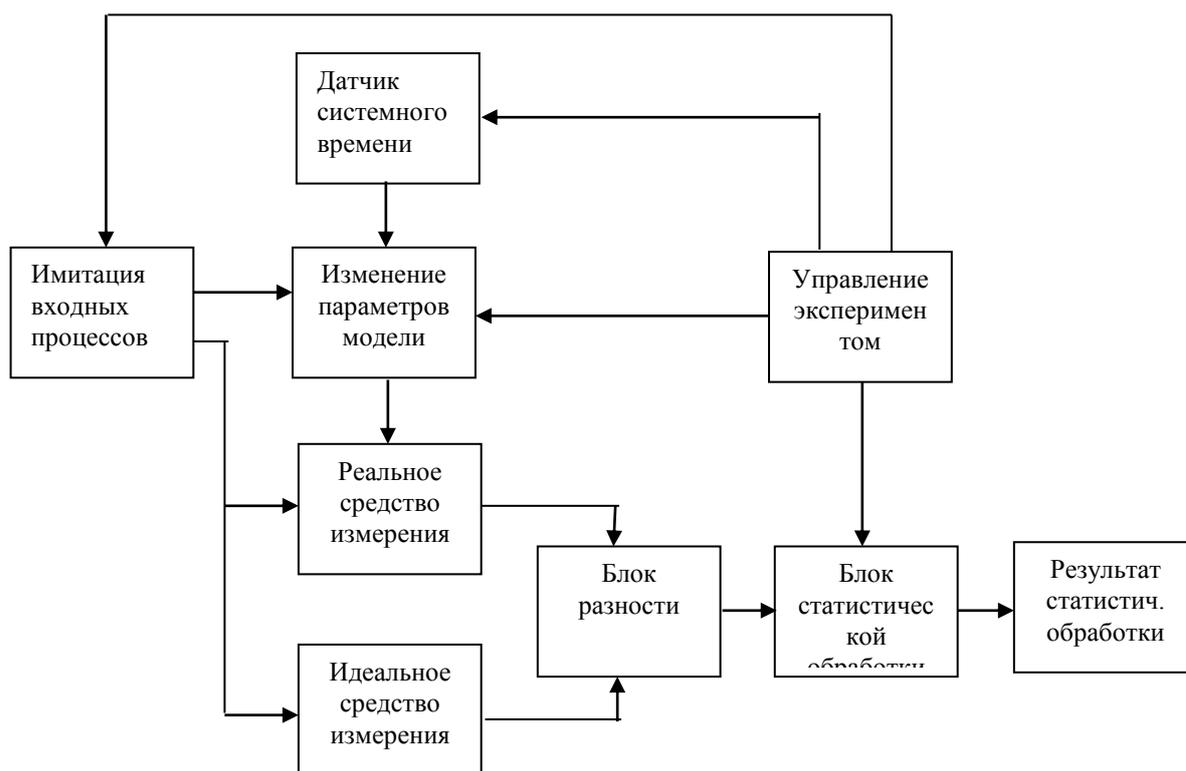


Рисунок В.2 - Функциональная схема имитационного моделирования

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [14], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей

оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \{ |\Delta_j| \} j = 1, \dots, N, \quad (B.8)$$

где N -число испытаний, зависящее от доверительной информации $P_d = 0,95$. Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания вероятностных характеристик случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;

- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

В предлагаемом Вашему вниманию учебном пособии рассматриваются следующие задачи прикладного анализа случайных процессов:

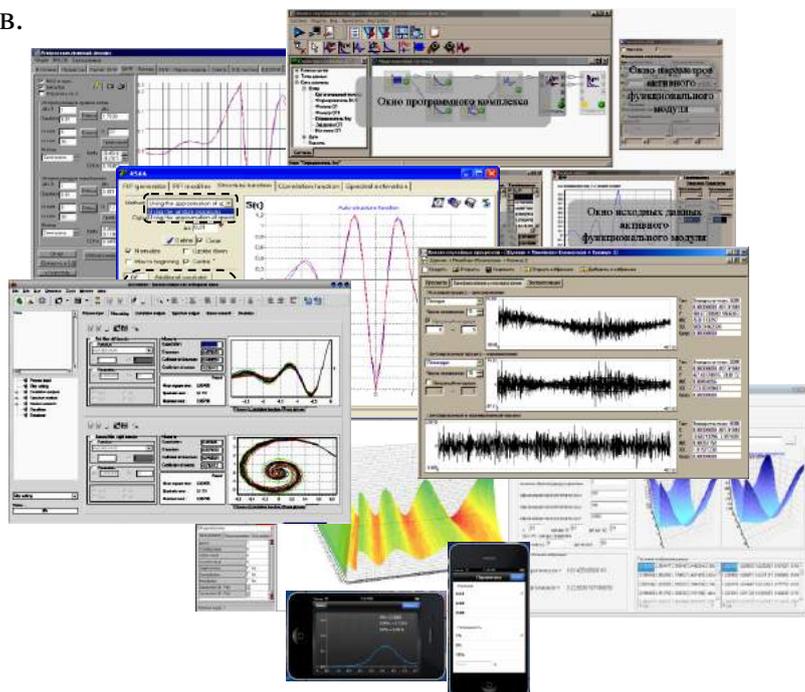
1. математического описания случайных процессов;
2. моделирования случайных процессов с заданными свойствами;
3. идентификации процесса по виду корреляционной функции;
4. оценивания и аппроксимативного корреляционно-спектральных характеристик в ортогональных базисах;
5. аппроксимативного анализа функционально-связанных корреляционно-спектральных вероятностных характеристик.

Все перечисленные задачи могут решаться с помощью автоматизированных систем, разработанных на кафедре информационных систем и технологий Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева,

позволяющих получить аналитические модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов, полученных как методом имитационного моделирования, так и в ходе экспериментальных исследований и комплексных испытаний [18-44]:

1. Прохоров С.А., Кудрина М.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов.
2. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная система взаимного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов.
3. Прохоров С.А., Графкин А.В. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле.
4. Прохоров С.А., Москаленко И.С. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик.
5. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби.
6. Прохоров С.А., Графкин В.В. Автоматизированная система аппроксимативного структурного анализа случайных процессов в ортогональных базисах Дирихле, Лагерра, Лежандра.
7. Прохоров С.А., Станкевич А.И. Автоматизированная система аппроксимативного анализа нестационарных случайных процессов.
8. Прохоров С.А., Посконнова А.А. Автоматизированная информационная система корреляционного анализа нестационарных неэквидистантных временных рядов.
9. Прохоров С.А., Газетова Я.В. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционного анализа в ортогональном базисе Бесселя.
10. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная информационная система исследования обобщенных ортогональных многочленов Якоби.
11. Прохоров С.А., Куликовских И.М., Богданова Я.Ю. Мобильное приложение для спектрального анализа данных на базе IOS.
12. Прохоров С.А., Куликовских И.М., Филиппова Н.С. Программный комплекс интеллектуального анализа данных: модуль обработки фотоплетизмографических сигналов.

Все лабораторные работы для проведения корреляционно-спектрального анализа могут выполняться на любой системе. Однако, на наш взгляд более наглядными системами являются системы 5, 7, 12. Для анализа неэквидистантных временных рядов необходимо использовать системы 1, 2.



1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ

1.1. Основные понятия и определения

Источником информации об измеряемой физической величине является электрический сигнал $x(t, \bar{\Theta})$, где $\bar{\Theta}$ - вектор неизвестных параметров, подлежащий определению с помощью специальных технических средств. Состав этого вектора зависит от класса решаемой задачи и определяется в каждом конкретном случае. Сигналом или процессом считается любая функция времени. При фиксированном моменте времени $t = t_i$ получим мгновенное значение измеряемой величины $x(t_i, \bar{\Theta})$. В зависимости от характера этой величины: **детерминированной** или **случайной**, - исследуемые процессы можно разделить на два класса: **детерминированные**, **случайные** процессы (сигналы).

Детерминированным является такой сигнал, который представляет собой известную функцию времени.

Для детерминированного сигнала, задав модель и числовые значения её параметров, можно определить его мгновенное значение для любого произвольного момента времени (см. рис. 1.1):

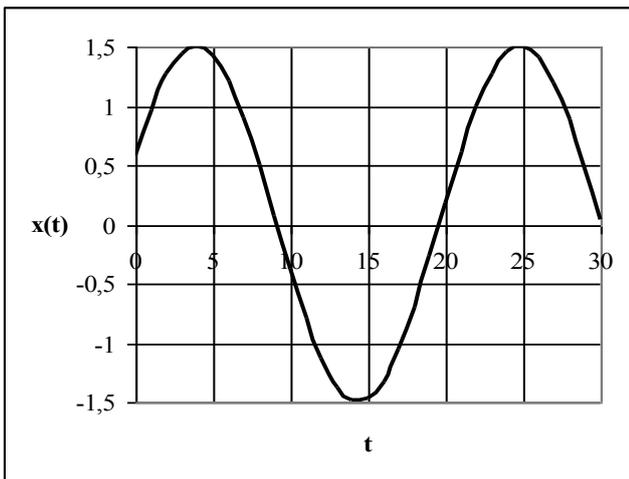


Рисунок 1.1 – Детерминированный сигнал

$$x(t, \bar{\Theta}) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.1)$$

где $\bar{\Theta} = [A_m, \omega_0, \varphi]$ - вектор параметров модели.

В свою очередь, детерминированные сигналы делятся на непрерывные и импульсные. Непрерывные сигналы характеризуются тем, что в заданном диапазоне изменения они могут иметь бесконечное число значений. Для непрерывных сигналов справедливо следующее утверждение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} x(t) = x(t_0). \quad (1.2)$$

Импульсные сигналы существуют на ограниченном интервале времени

$$x(t) = h(t)1(t_1 < t < t_2), \quad (1.3)$$

где $h(t)$ - функция, описывающая форму импульса;

$T_u = t_2 - t_1$ - длительность импульса.

$$1(0 < t < T_u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < T_u; \\ 0, & \text{если } t > T_u. \end{cases} \quad \text{- единичная функция} \quad (1.4)$$

На рис. 1.2 приведен пример импульсного сигнала, представляющего собой выходной сигнал фильтра с импульсной характеристикой

$$h(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left(\cos \omega_0 t + \frac{\sqrt{1 + T^2 \omega_0^2} - 1}{T \omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (1.5)$$

при подаче на его вход сигнала в виде δ -функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = 0; \\ 0, & \text{если } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \quad (1.6)$$

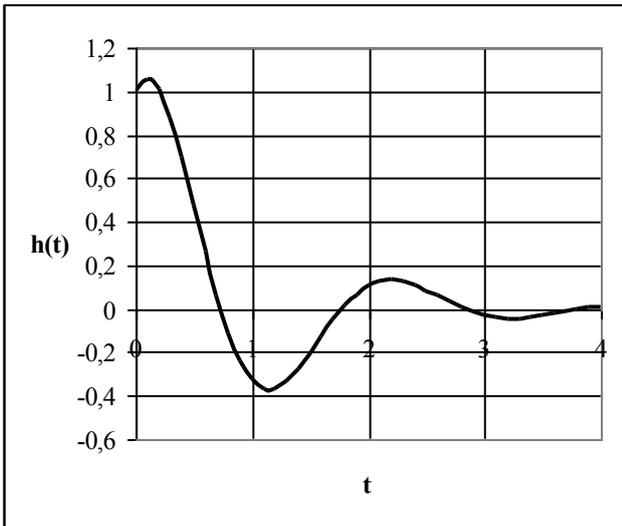


Рисунок 1.2 – Импульсный сигнал

Кроме того, детерминированные сигналы делятся на периодические и непериодические (единичные).

Периодическим называется процесс, для которого справедливо следующее свойство (см. рис. 1.1):

$$x(t + nT) = x(t)1(t < T), \quad (1.7)$$

где T - период процесса, $n = 1, 2, \dots$

Для периодических импульсных сигналов характерно, что:

$$x(t + nT) = x(t)1(0 < t < T) = h(t)1(0 < t < T_u), \quad (1.8)$$

где T - период следования импульсов;
 T_u - длительность импульса.

На рис. 1.3 приведены примеры импульсных периодических сигналов, представляющие собой выходной сигнал генератора импульсов (рис. 1.3 а)), поток регулярных событий (точечный поток), поступающих, например, на вход информационно-измерительной системы (рис. 1.3 б)).

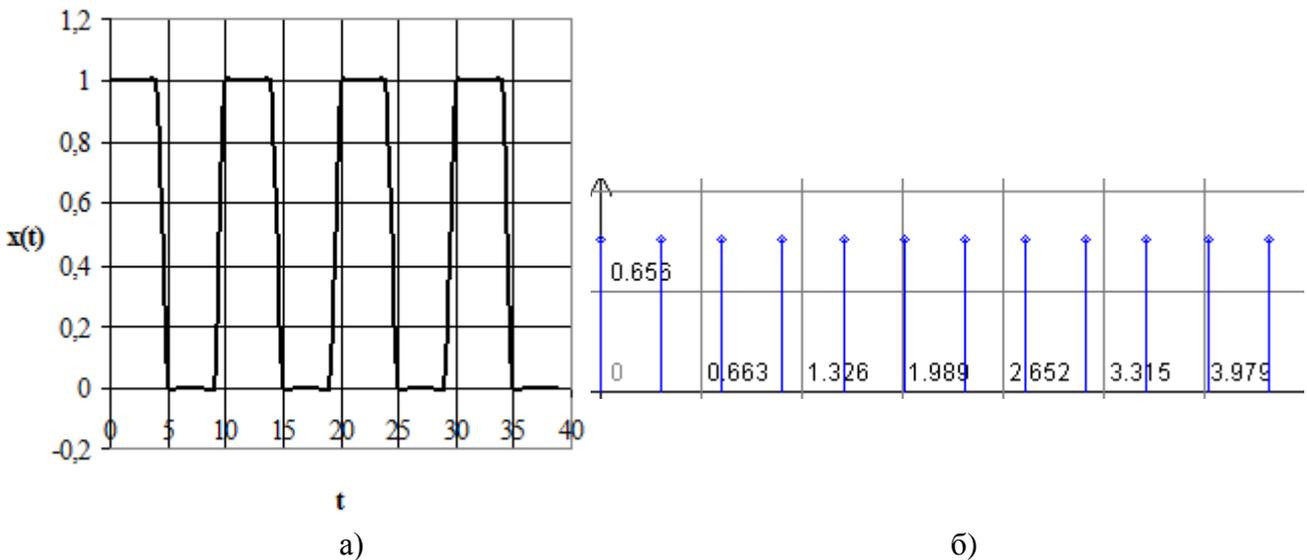


Рисунок 1.3 – Импульсные периодические сигналы

Как правило, в процессе исследования определяются не все параметры, входящие в модель, а только те из них, которые необходимы для решения задачи.

Основные параметры детерминированных сигналов приведены в таблице 1.1.

Параметры детерминированных сигналов

Таблица 1.1

№	Название параметра	Определение
1	среднее значение	$X_{cp} = \frac{1}{T_0} \int_0^T X(t) dt$
2	действующее значение	$X = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^T X^2(t) dt}$
3	амплитудное значение	X_m -наибольшее значение измеряемого сигнала
4	коэффициент амплитуды	$k_a = \frac{X_m}{X}$
5	коэффициент формы	$k_\phi = \frac{X}{X_{cp}}$
6	период сигнала	T -минимальный интервал времени, через который повторяется сигнал
7	частота сигнала	$f = \frac{1}{T}$
8	длительность импульса	T_u - интервал времени от момента появления импульса до его окончания
9	скважность	$Q = \frac{T}{T_u}$

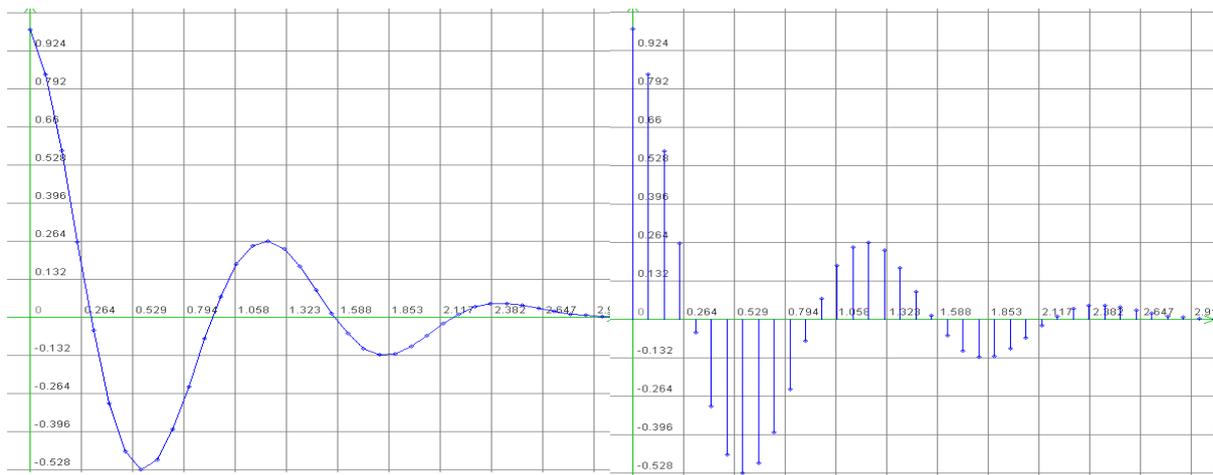
Как следует из таблицы 1.1, между амплитудным (пиковым), действующим и средним значениями существуют определенные соотношения, характеризующие форму сигнала, что даёт возможность решать задачи идентификации сигналов по измеренным значениям k_a и k_ϕ , а также измерять действующее, среднее и амплитудные значения сигналов разной формы с помощью приборов, проградуированных, например для синусоидальных сигналов.

Детерминированный сигнал, подвергнутый аналого-цифровому преобразованию, представляет собой временную последовательность (временной ряд), члены которой отстоят друг от друга на величину интервала дискретизации Δt_0 .

На рис. 1.4 б), в качестве примера, приведена реализация временного ряда импульсного сигнала, а на рис. 1.4 а) - непрерывная реализация того же сигнала.

Случайными называются процессы, численные значения которых невозможно определить (вычислить) для любого заданного момента времени. Отдельное наблюдение случайного процесса называется его **реализацией**. На рис. 1.5 приведен пример реализации случайного процесса.

При фиксации момента времени t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ получаем случайную величину.



а) б)
Рисунок 1.4 - Реализация импульсного сигнала

Введем следующие обозначения: $X(t)$ - случайный процесс; $x_j(t)$ - j -я реализация процесса $X(t)$; $x_j(t_i)$ - мгновенное значение процесса $X(t)$, соответствующее значению j -й реализации в i -й момент времени.

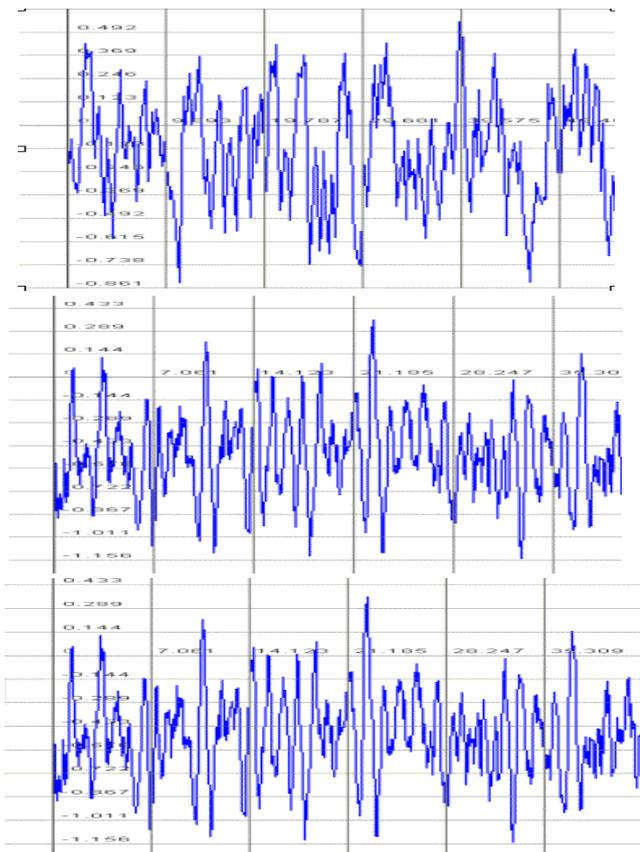


Рисунок 1.5 - Реализация случайного процесса

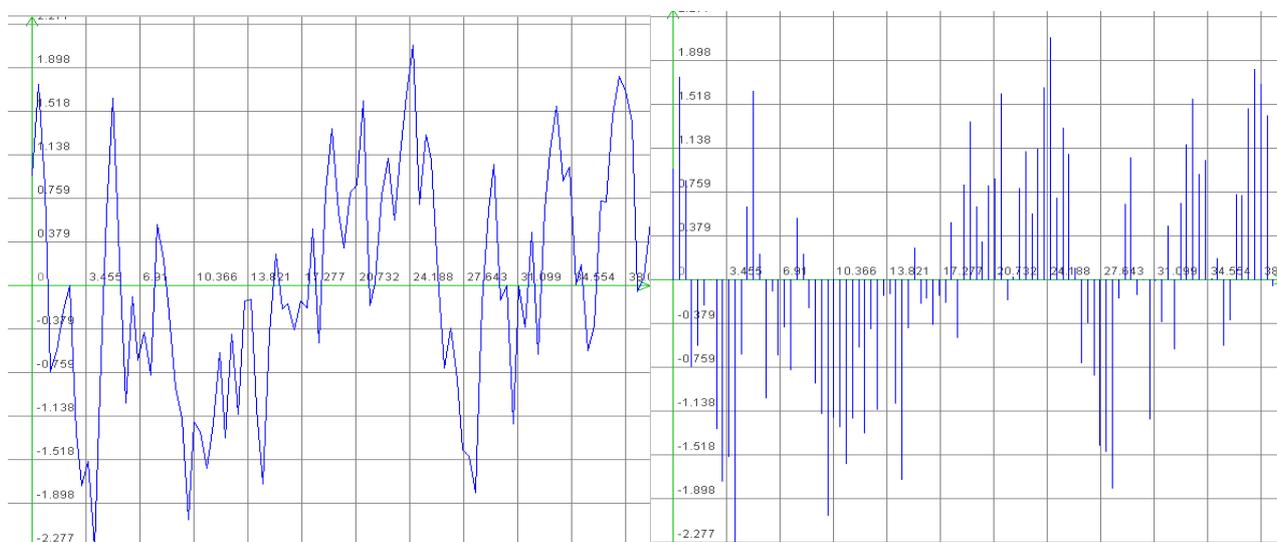
Совокупность мгновенных значений, соответствующих значениям различных реализаций в один и тот же момент времени t_i , назовем i -й последовательностью процесса $X(t)$ и обозначим $x(t_i)$.

Отсюда следует, что в качестве аргументов случайного процесса выступают **время и номер реализации** [57]. Хотя между этими координатами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что время может быть как непрерывным, так и дискретным, а номер реализации принимает только целочисленные значения, в теоретико-вероятностном плане они равноправны.

Следовательно, возможны два подхода к изучению свойств случайных процессов: первый, основанный на анализе множества реализаций, и второй, оперирующий множеством последовательностей.

Для каждого случайного процесса могут быть установлены область определения TN и область существования $X : t \in T, j \in N$ и $x \in X$. При этом T и X могут быть непрерывными, дискретными или смешанными, N - только дискретной [57].

Пример реализации дискретного случайного процесса (временной последовательности, временного ряда), имеющего в заданном диапазоне изменения ограниченное число значений, уровней, представлены на рис. 1.6 б). На рис 1.6 а) представлена соответствующая ему реализация случайного процесса.



а) б)

Рисунок 1.6 - Реализации случайного процесса и временного ряда

В процессе измерения интерес могут представлять как мгновенные значения $x_j(t_i)$, так и сами моменты измерения t_{ji} - потоки событий.

Под **потоком событий** будем понимать временную последовательность, характеризующую моментами наступления отдельных событий, независимо от природы этих событий.

При этом можно выделить два случая:

- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = const$ – регулярный (периодический) поток (см. рис. 1.7 а));
- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = random$ нерегулярный (аперiodический) поток (см. рис. 1.7 б)).



а) Регулярный поток



б) Нерегулярный поток

Рисунок 1.7 - Реализации потоков событий

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс $X(t)$ представлен **неэквидистантным временным рядом**

$$\left[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}, \text{ где } \Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}.$$

Заметим, что индекс i в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов приведены на рис. 1.8.

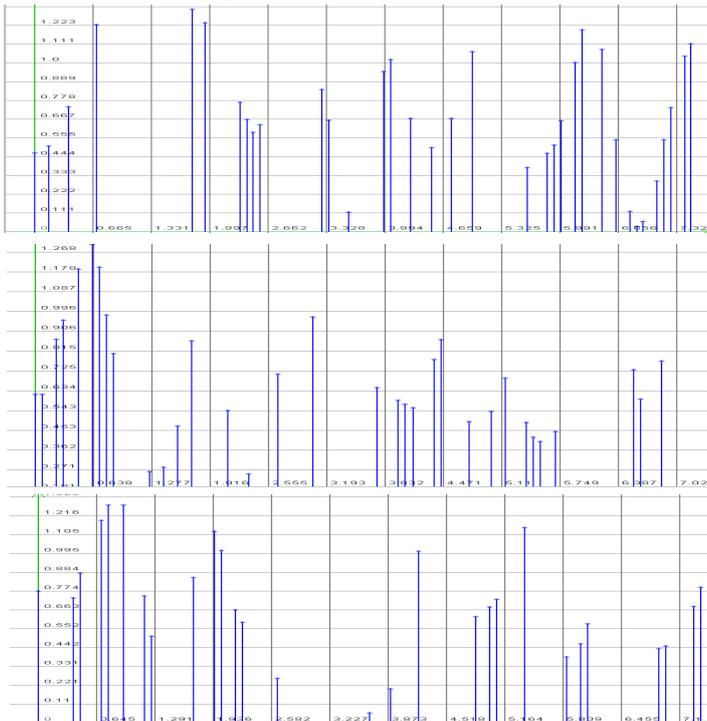


Рисунок 1.8 - Примеры реализаций

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - \varphi_j(t_i);$$

б. случайные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - X_j(t_i)$;

7. регулярный поток событий - $\delta(t - T_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = T_i; \\ 0, \text{ если } t \neq T_i; \end{cases}$

8. случайный поток событий - $\delta(t - t_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = t_i, \\ 0, \text{ если } t \neq t_i, \end{cases}$ где $t_i = \text{random}$.

Выделим восемь классов важнейших процессов, которые встречаются на практике при решении самых разнообразных задач:

1. детерминированные процессы - $\varphi(t)$;
2. случайные процессы - $X(t)$;
3. детерминированные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами $T = \text{const} - \varphi(iT)$;
4. случайные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами $\Delta t = \text{const} - X_j(i\Delta t_0)$, где j - номер реализации;
5. детерминированные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования. Различные комбинации этих процессов дает возможность построить более сложные модели процессов, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

1.2. Математическое описание случайных величин

Основой для математического описания случайных процессов и потоков событий является математическое описание случайных величин.

Для описания случайных величин в практических приложениях наиболее часто применяются [57]:

- законы распределения случайных величин;
- числовые характеристики законов определения.
- характеристические функции.

Законом распределения называется функциональная зависимость, устанавливающая связь между возможным значением случайной величины и вероятностью появления этого значения.

Законы распределения записываются в виде:

- функции распределения вероятностей - $F_x(x) = P(X < x)$;
- плотности распределения вероятностей - $f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$.

Приведем основные свойства законов распределения (см. табл. 1.2).

Свойства законов распределения

Таблица 1.2

	$f_x(x)$	$F_x(x)$
1	$f_x(x) \geq 0$	$F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$
2	$P(x < X, x + dx) = f_x(x)dx$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$
3	$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$	$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x)dx$
4	$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$	$F_x(\infty) = 1$
5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_x(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = 0$	$F_x(-\infty) = 0$

Аналитические выражения наиболее часто встречающихся законов распределения вероятности приведены в приложении П.1.

Законы распределения дают исчерпывающее описание случайной величины. Однако для их экспериментального определения требуется большой объём данных и, следовательно, большие материальные затраты. В большинстве же практических случаев для описания случайных величин применяют приближенные методы, основанные на знании числовых характеристик.

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты k -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор и т.д. [5].

• Начальным моментом k -го порядка называется величина, определяемая выражением:

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx, \quad (1.9)$$

где $M[]$ - операция нахождения математического ожидания.

Из начальных моментов наиболее часто применяются:

1. $\alpha_1 = M[X] = m_x$ - математическое ожидание, характеризующее среднее значение оцениваемой случайной величины;

2. $\alpha_2 = M[X^2]$ - мощность случайной величины.

• Центральные моменты k -го определяются в виде:

$$\mu_k = M\left[\overset{\circ}{X}^k\right],$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ - центрированная случайная величина.

Из них наиболее часто применяются:

1. $\mu_2 = \sigma_x^2$ - дисперсия процесса, характеризующая разброс значений случайной величины относительно математического ожидания;

2. $\mu_3 = M\left[\overset{\circ}{X}^3\right]$ - характеризует симметричность закона распределения. Для устранения зависимости μ_3 от дисперсии вводят коэффициент асимметрии $K_a = \mu_3 / \sigma_x^3$;

3. $\mu_4 = M\left[\overset{\circ}{X}^4\right]$ - характеризует острровершинность закона распределения.

В качестве базового закона (закона сравнения) был выбран нормальный закон, для которого $\mu_4 = 3\sigma_x^4$. Для удобства сравнения ввели понятие коэффициента эксцесса $K_\varepsilon = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3$.

Моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса применяются при решении самых разнообразных прикладных задач, например, для:

1. упрощенного описания случайной величины;

2. идентификации закона распределения случайной величины с использованием кривых Пирсона [5];

3. построения аналитического выражения закона распределения в виде ряда Грамма-Шарлье по той или иной системе ортогональных функций: Эрмита, Лежандра и т. д. [16];

4. определения динамического диапазона случайной величины.

• Мода - Mo - наиболее вероятное значение случайной величины X , определяемое в результате решения уравнения:

$$f'_x(x) = 0. \quad (1.10)$$

• Медиана - Me - определяется из уравнения

$$P\{x < Me\} = 0,5 \quad (1.11)$$

и делит площадь под кривой распределения пополам.

• Коэффициент вариации $\chi = \sigma_x / m_x$, применяемый при метрологическом анализе результатов измерения.

• Коэффициент формы $K_\phi = M\left[\overset{\circ}{x}\right] / \sigma_x$ характеризует форму кривой распределения и применяется, например, при оценке релейной корреляционной функции [21].

• Пикфактор - $\eta = |x_{max}| / \sigma_x$ - применяется при оценке динамического диапазона случайной величины.

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении П.1.

При решении разнообразных задач полезной характеристикой случайной величины является её характеристическая функция - математическое ожидание комплексной случайной величины e^{iux} , рассматриваемое как функция параметра u [50]:

$$\varphi_x(u) = M[e^{iux}]. \quad (1.12)$$

Так как $|e^{iux}| = 1$ при любых действительных u и x , то вследствие основного свойства плотности вероятности характеристическая функция при любом действительном значении u не превосходит по модулю единицы и равна единице при $u = 0$.

Характеристическая функция и плотность распределения вероятности случайной величины связаны парой взаимно обратных преобразований Фурье [50]

$$\varphi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_x(x) dx; \quad (1.13)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \varphi_x(u) du. \quad (1.14)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины также является её полной вероятностной характеристикой.

Зная характеристическую функцию, можно просто определить начальные и центральные моменты случайной величины [50]:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \varphi_x^{(k)}(0), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (1.15)$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [\exp(-iut_x) \varphi_x(u)]_{u=0}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (1.16)$$

1.3. Функции случайных аргументов

При решении разнообразных практических задач часто возникает необходимость в определении закона распределения случайных величин, представляющие собой функции некоторых других случайных величин, имеющих известные законы распределения [2, 16].

Пусть случайная величина Y представляет собой однозначную функцию случайной величины X :

$$y = g(x). \quad (1.17)$$

Задача состоит в определении плотности распределения вероятности $f_y(y)$ по известной плотности распределения вероятности $f_x(x)$.

Вероятность того, что значение ξ заключено в промежутке $[x, x + dx]$, должна быть равна (вследствие однозначной связи между X и Y вероятности того, что значение η заключено в соответствующем промежутке $[y, y + dy]$ [2, 16]

$$P(x < \xi < x + dx) = P(y < \eta < y + dy). \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) представим в виде (см. табл. 1.2)

$$f_x(x) dx = f_y(y) dy. \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что

$$f_y(y) = f_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (1.20)$$

Производную необходимо брать по абсолютному значению, так как плотность распределения всегда неотрицательна. Подставив вместо x в выражение (1.20) обратную функцию $x = \varphi(y)$, окончательно получим

$$f_y(y) = f_x[\varphi(y)] \left| \frac{d}{dx} \varphi(y) \right|. \quad (1.21)$$

Если функция $x = \varphi(y)$ является двузначной, нужно формулу (1.21) применять дважды, т.е. к каждой ветви кривой $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$.

Если требуется определить только моментные характеристики, то задачу можно решить, не определяя плотности распределения вероятности:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^k f_x(x) dx; \quad (1.22)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - m_y)^k f_x(x) dx. \quad (1.23)$$

Функция случайного аргумента применяется при моделировании псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения методом инверсного преобразования.

1.4. Системы случайных величин

В некоторых случаях приходится рассматривать совместно несколько случайных величин. Совокупность n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_m удобно рассматривать как одну m -мерную векторную случайную величину, составляющие которой являются величины x_1, x_2, \dots, x_m .

Часть вероятностных характеристик, описывающих n -мерную случайную величину, по смыслу совпадают и являются обобщением соответствующих характеристик одномерной случайной величины. Другая часть характерна только для векторных случайных величин, например, условные функции и плотности распределения вероятности [50].

К ним относятся:

- функции и плотности распределения вероятности;
- условные функции и плотности распределения вероятности;
- характеристическая функция;
- начальные моменты $r + s$ порядка случайного вектора -

$$\alpha_{rs} = M[x^r y^s];$$

- центральные моменты $r + s$ порядка случайного вектора -

$$\mu_{rs} = M \left[\overset{\circ}{x}{}^r \overset{\circ}{y}{}^s \right].$$

Рассмотрим все характеристики на примере системы, состоящей из двух случайных величин.

Функцией распределения двумерного случайного вектора с составляющими X и Y или совместной функцией распределения двух случайных величин называется

вероятность совместного выполнения неравенств $X < x$, $Y < y$, рассматриваемая как функция двух переменных [50]:

$$F(x, y) = P\left(\begin{matrix} X < x \\ Y < y \end{matrix}\right). \quad (1.24)$$

Плотностью вероятности случайного вектора (X, Y) или совместной плотностью вероятности двух случайных величин X и Y называется предел отношения вероятности попадания его конца в бесконечно малую область к площади этой области при стягивании этой области в точку:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\left(\begin{matrix} x \leq X < x + \Delta x \\ y \leq Y < y + \Delta y \end{matrix}\right)}{\Delta x \Delta y}. \quad (1.25)$$

Зная плотность распределения вероятностей, можно определить функцию распределения случайного вектора:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du \dots dv. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.25) можно получить выражение плотности распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) через его функцию распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.27)$$

На практике часто приходится находить закон распределения одной случайной величины X при условии, что случайная величина Y примет определенное значение y . Этот закон называют условным законом распределения. На основании теоремы умножения плотностей вероятностей [5, 50] совместная плотность вероятности двух случайных величин равна плотности вероятности одной из них, умноженной на условную плотность вероятности другой относительно первой:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y/x) = f_2(y)f_1(x/y). \quad (1.28)$$

Отсюда

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \quad (1.29)$$

Аналогично можно получить

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \quad (1.30)$$

Случайные величины X и Y называются **зависимыми**, если события, заключающиеся в выполнении неравенств $X < x$ и $Y < y$, зависимы хотя бы для одной пары значений x и y . В противном случае случайные величины называются **независимыми**.

Для независимых случайных величин совместная плотность распределения вероятностей равна произведению одномерных плотностей:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \quad (1.31)$$

Следовательно, с учетом выражения (1.31), условные плотности равны:

$$f_1(x/y) = f_1(x), \text{ а } f_2(y/x) = f_2(y).$$

Аналогичным образом можно определить законы распределения векторов, когда $n > 2$.

Характеристическая функция случайного вектора X определяется выражением:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = M[\exp\{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)\}]. \quad (1.32)$$

Формула показывает, что характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности распределения вероятности. Следовательно, плотность распределения вероятности определяется через характеристическую функцию обратным преобразованием Фурье [50, 51]:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)\} \varphi(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n. \quad (1.33)$$

Для практики большое значение имеет раздел теории вероятностей, который ограничивается исследованием моментов первого и второго порядков случайных величин [5, 50, 51, 57]. Так моменты α_{10} и α_{01} равны математическим ожиданиям случайных величин X и Y соответственно. Для двумерного случайного вектора кроме моментов μ_{20} и μ_{02} , представляющих собой дисперсии случайных величин X и Y , существует момент μ_{11} , который называют корреляционным моментом:

$$k_{xy} = \mu_{11} = M \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Этот момент характеризует степень линейной связи случайных величин X и Y .

Случайные величины X и Y называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля. Случайные величины называются **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Независимые случайные величины всегда не коррелированы. Зависимые же случайные величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Следует подчеркнуть, что требование независимости величин является более жестким, чем требование некоррелированности.

На практике часто определяют нормированный корреляционный момент, который называют коэффициентом корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.35)$$

Часто при исследовании погрешностей оценки результатов оценивания той или иной вероятностной характеристики возникает необходимость в оценке моментов высших порядков. Для системы случайных величин, распределенной по нормальному закону, моменты высших порядков определяются через моменты второго порядка [28]. Задача легко решается, если воспользоваться характеристическими функциями (см. таблицу 1.3) [28].

Следует подчеркнуть, что нечётные моменты высших порядков в этом случае равны нулю.

Моменты высших порядков

Таблица 1.3

$M[x_1^2]$	σ_1^2
$M[x_1 x_2]$	$\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$
$M[x_1^4]$	$3\sigma_1^4$
$M[x_1^2 x_2^2]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 + 2\rho_{12}^2)$
$M[x_1^3 x_2]$	$3\sigma_1^3 \sigma_2 \rho_{12}$
$M[x_1^2 x_2 x_3]$	$\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 (2\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23})$
$M[x_1 x_2 x_3 x_4]$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 (\rho_{12}\rho_{34} + \rho_{13}\rho_{24} + \rho_{14}\rho_{23})$
$M[x_1 x_2^2 x_3^3]$	$\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3^3 (3\rho_{13} + \rho_{12}\rho_{13} + \rho_{13}\rho_{23} + 5\rho_{12}\rho_{23} + 5\rho_{13}\rho_{23}^2)$
$M[x_1 x_2 x_3^4]$	$3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^4 (\rho_{12} + 4\rho_{13}\rho_{23})$
$M[x_1^3 x_2^3]$	$\sigma_1^3 \sigma_2^3 (9\rho_{12} + \rho_{12}^2 + 5\rho_{12}^3)$
$M[x_1^2 x_2^4]$	$3\sigma_1^2 \sigma_2^4 (1 + 4\rho_{12}^2)$
$M[x_1 x_2^5]$	$15\sigma_1 \sigma_2^5 \rho_{12}$
$M[x_1^2 x_2^2 x_3 x_4]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_4 (\rho_{34} + 2\rho_{23}\rho_{24} + 4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23} + 4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24} + 2\rho_{13}\rho_{14} + 2\rho_{14}^2 \rho_{34})$
$M[x_1^2 x_2^2 x_3^2]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 (1 + 2\rho_{23}^2 + 8\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} + 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{12})$
$M[x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5]$	$\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 (\rho_{23}\rho_{45} + \rho_{24}\rho_{35} + \rho_{25}\rho_{34} + 2\rho_{14}\rho_{15}\rho_{23} + 2\rho_{13}\rho_{15}\rho_{24} + 2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{25} + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14} + 2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{35} + 2\rho_{12}\rho_{15}\rho_{34})$
$M[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6]$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 (\rho_{14}\rho_{23}\rho_{56} + \rho_{13}\rho_{24}\rho_{56} + \rho_{23}\rho_{15}\rho_{46} + \rho_{13}\rho_{25}\rho_{46} + \rho_{23}\rho_{16}\rho_{45} + \rho_{13}\rho_{26}\rho_{45} + \rho_{14}\rho_{25}\rho_{36} + \rho_{24}\rho_{15}\rho_{36} + \rho_{14}\rho_{26}\rho_{35} + \rho_{16}\rho_{24}\rho_{35} + \rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} + \rho_{35}\rho_{46}\rho_{12} + \rho_{16}\rho_{25}\rho_{34} + \rho_{36}\rho_{45}\rho_{12} + \rho_{12}\rho_{34}\rho_{56})$

1.5. Математическое описание случайных сигналов

Если рассматривается j -я последовательность случайного процесса, то мгновенное значение произвольной реализации в момент t_i , будет случайной величиной с плотностью распределения вероятности $f_x(x/t_i)$. При фиксации номера реализации случайной будет мгновенное значение в произвольный момент времени. Плотность распределения вероятности - $f_x(x/j)$.

Плотности распределения вероятности $f_x(x/j)$ и $f_x(x/t_i)$ позволяют определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику соответствующей случайной величины [57].

Случайные процессы исчерпывающе описываются многомерной функцией распределения вероятности соответствующей мерности.

Так, например, если $t_i \in T = \{t_i\}_{i=1,2,\dots,m}$, то используется m -мерная плотность распределения вероятностей $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$. По известной m -мерной плотности распределения вероятности можно определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику $\Theta[x(t_i)]_{i=1,2,\dots,m}$ случайной последовательности, если эта характеристика может быть представлена как результат некоторого преобразования функции $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$.

На основании общей теории статистических измерений [57] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (1.36)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика;

S_d - оператор идеального усреднения;

d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (1.37)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.38)$$

3. При усреднении по времени и совокупности

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.39)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероят-

ностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)]_{j=1,2,\dots,N} \quad (1.40)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность, состоятельность и эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (1.41)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P\left\{ \left| \hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)] \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (1.42)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [57].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (1.37) - (1.39) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (1.43)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.44)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.45)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t - текущей характеристикой $\hat{\Theta}_t$ [57]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_j$. При усреднении и по времени и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой - $\hat{\Theta}_{cp}$.

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = const$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = const$, где j - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

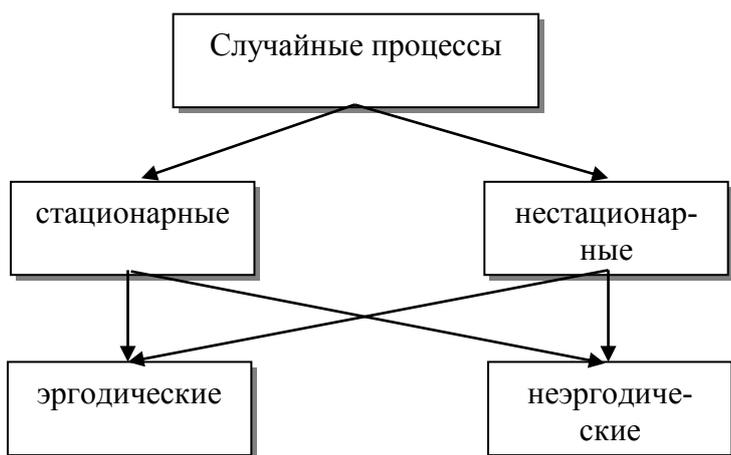


Рисунок 1.9 - Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. 1.9):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса.

В [57] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического - $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого

случайного процесса подробно рассмотрены в [57]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Если, например, модель исследуемого процесса задать в виде:

$$x(t) = \varphi(t) + \eta(t)\overset{\circ}{x}(t), \quad (1.46)$$

где $\varphi(t)$, $\eta(t)$ - детерминированные функции времени, $\overset{\circ}{x}(t)$ - центрированный стационарный эргодический процесс,

- то в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров получим следующие частные модели (см. таблицу 1.4).

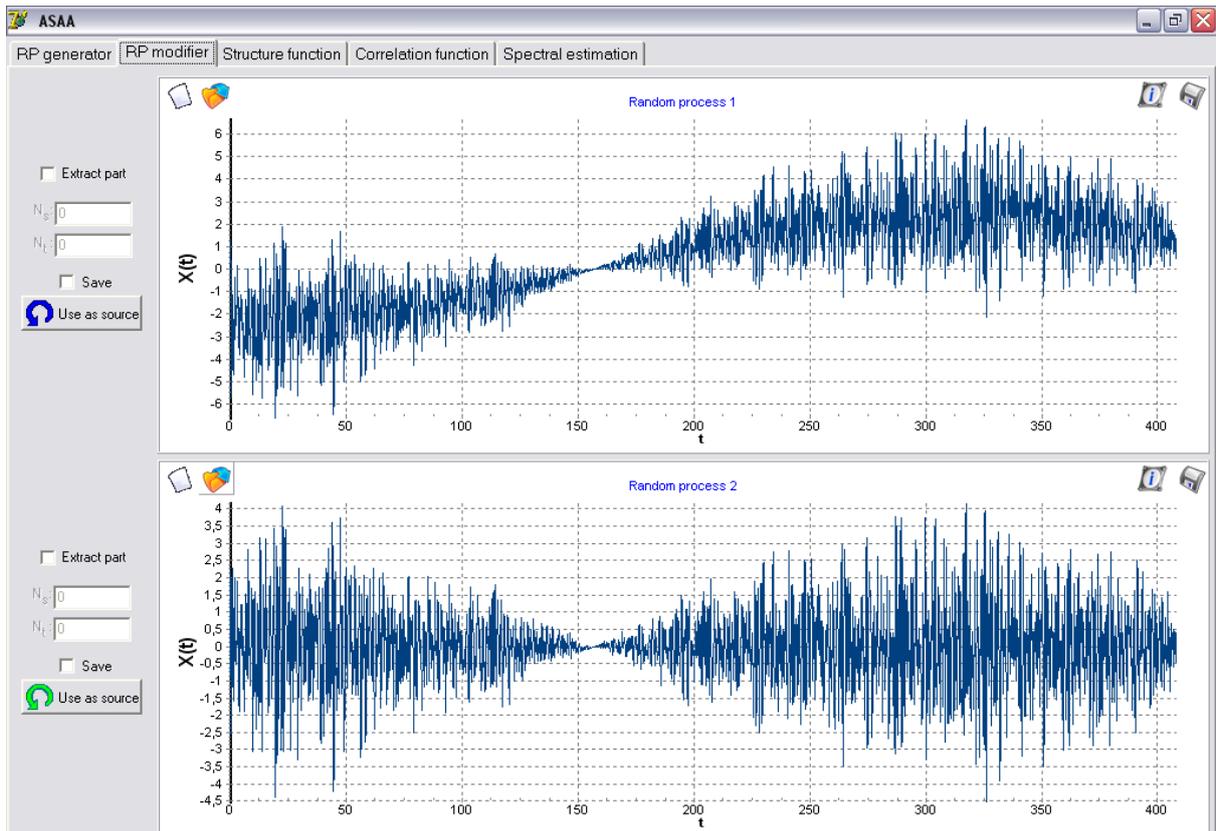
Некоторые модели исследуемых процессов

Таблица 1.4

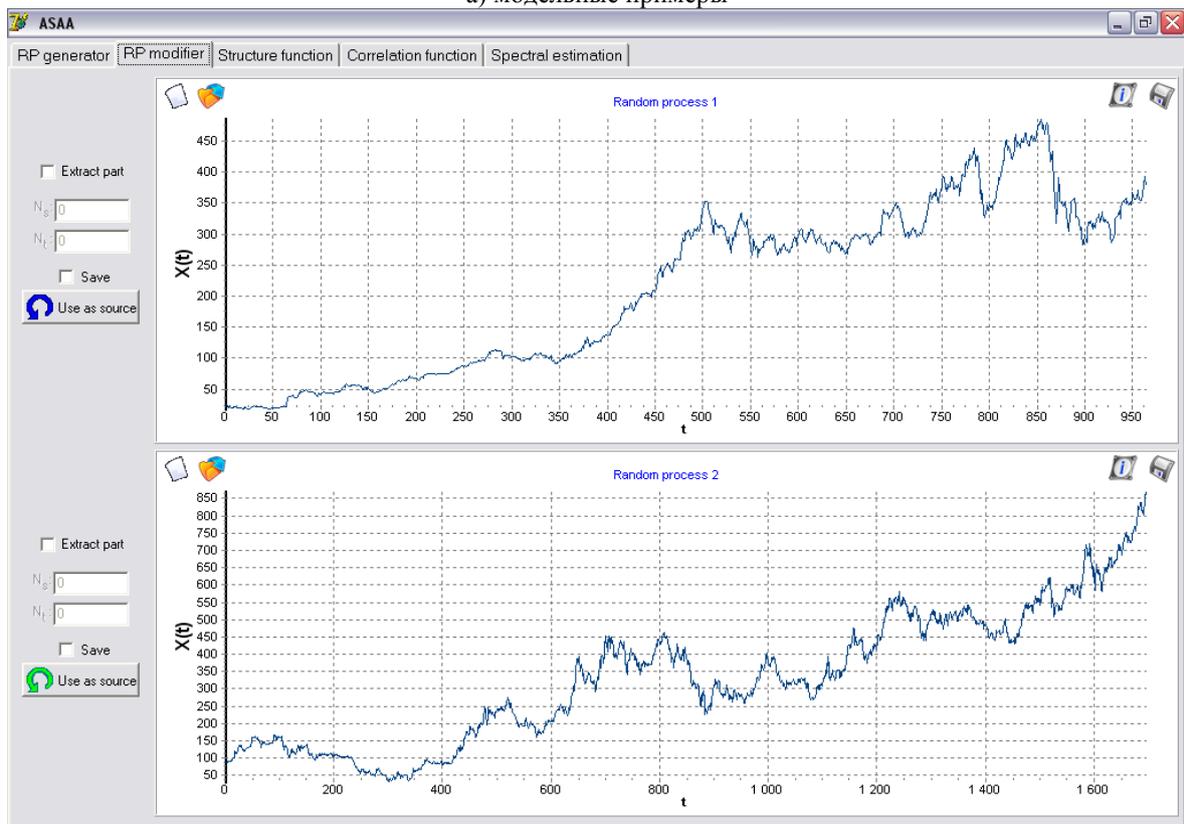
$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t) = \varphi(t) + \eta(t)\overset{\circ}{x}(t)$	Название процесса
$\varphi(t)$	0	$x(t) = \varphi(t)$	детерминированный
m_x	1	$x(t) = m_x + \overset{\circ}{x}(t)$	стационарный
$\varphi(t)$	1	$x(t) = \varphi(t) + \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию
0	$\eta(t)$	$x(t) = \eta(t)\overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по дисперсии
$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t) = \varphi(t) + \eta(t)\overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию и дисперсии

Приведенные модели случайных процессов не являются исчерпывающими, но часто являются достаточными при решении разнообразных прикладных задач в различных предметных областях (см. рис. 1.10).

Наиболее часто в качестве модели первого приближения исследователи выбирают простейшую модель случайного процесса - стационарный эргодический случайный процесс, - и для него определяют необходимые по смыслу задачи вероятностные характеристики. Если по какой-либо причине полученные результаты не устраивают, переходят к более сложной модели.



а) модельные примеры



б) котировки акций компаний Юкос и Лукойл

Рисунок 1.10 - Примеры нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии

Для описания случайных процессов при решении разнообразных практических задач применяются:

- законы распределения, в том числе, многомерные;
- характеристические функции;
- числовые характеристики;
- характеристики взаимосвязи;
- частотные характеристики.

Классификация вероятностных характеристик, описывающих случайный процесс во временной области, представлена на рис. 1.11 [25].



Рисунок 1.11- Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

Первые три вида характеристик подробно рассмотрены в подразделах 1.2 - 1.3 и особой специфики при описании случайных процессов не имеют.

На рис. 1.12 приведены реализации случайных процессов, распределенных по различным законам.

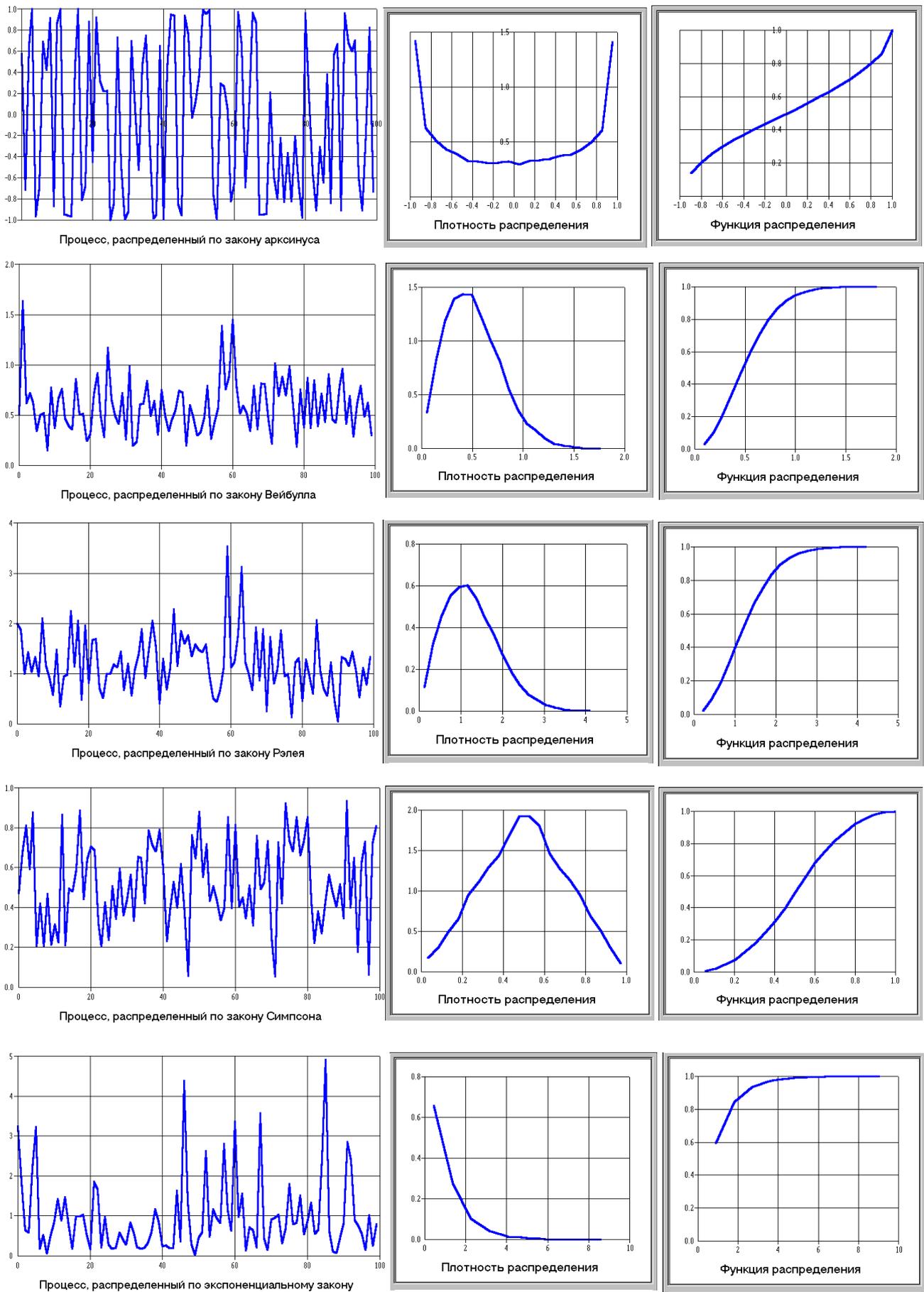


Рисунок 1.12 - Реализации случайных процессов

Следует подчеркнуть аналогию вероятностных характеристик, предназначенных для описания случайных процессов, с характеристиками, описывающими детерминированные процессы (см. таблицу 1.1):

- математического ожидания m_x со средним значением x_{cp} ;
- среднеквадратического отклонения σ_x с действующим значением x ;
- пикфактора η с коэффициентом амплитуды k_a ;
- коэффициента формы случайного процесса k_ϕ с коэффициентом формы детерминированного процесса k_ϕ и т. д.

Остановимся более подробно на характеристиках взаимосвязи и частотных характеристиках.

1.6. Корреляционные характеристики

Основой характеристик взаимосвязи являются корреляционные функции [18, 21, 25, 51, 57].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента t, t' , рассматриваемый как функция t, t' [50]:

$$K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (1.47)$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, а $m_x(t)$ - математическое ожидание случайного процесса в сечении t .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.48)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией $\tau = t - t'$ [50]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.49)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале $[0, \infty)$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.48), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.50)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.51)$$

Типовые модели корреляционных функций приведены в таблице 1.5.

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 1.5

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2 / 3)$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$
6	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$
7	
8	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0\tau + c \sin \omega_0 \tau)$

Классификация корреляционных функций приведена на рис. 1.13.

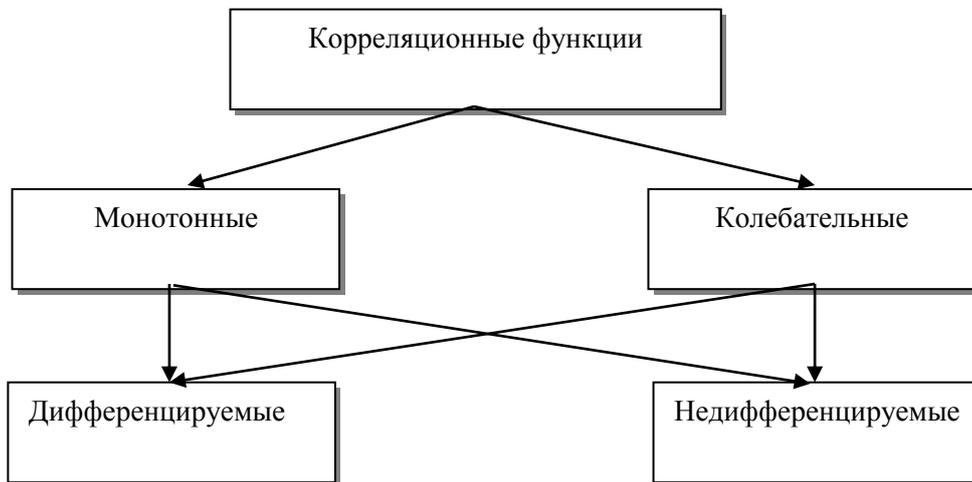


Рисунок 1.13 - Классификация корреляционных функций

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

- 1) монотонные недифференцируемые (модели 1);
- 2) монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
- 3) колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
- 4) колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [25 – 27, 34].

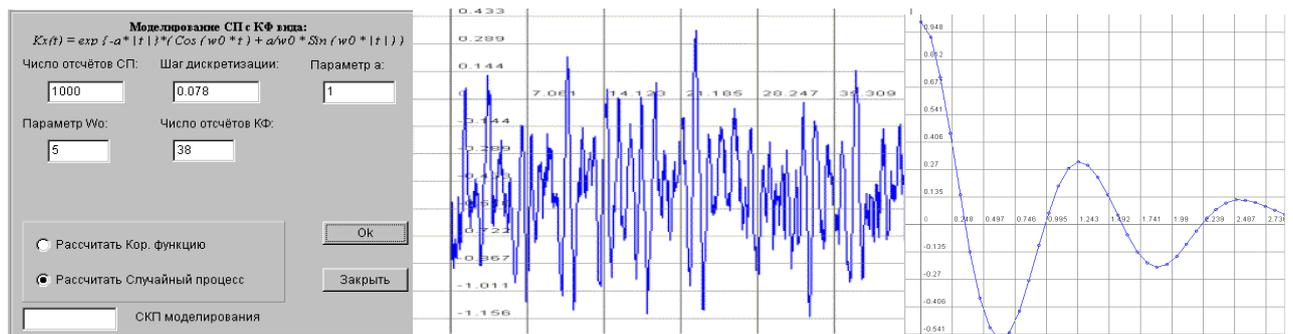
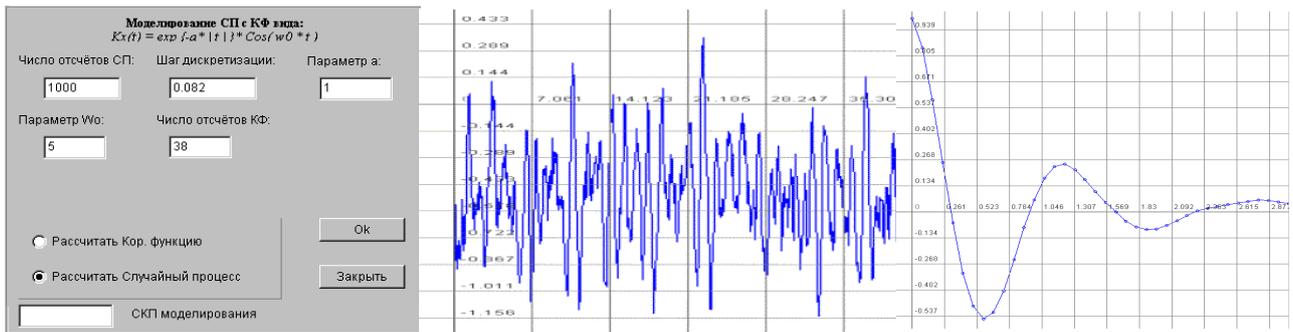
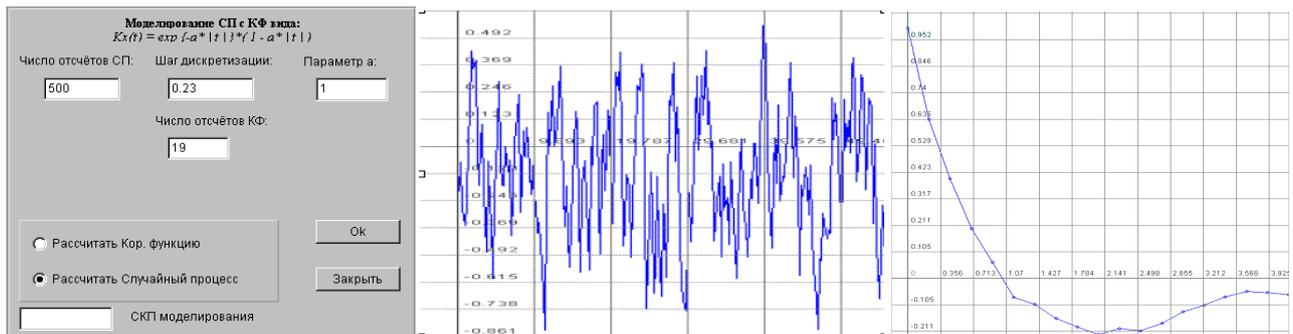
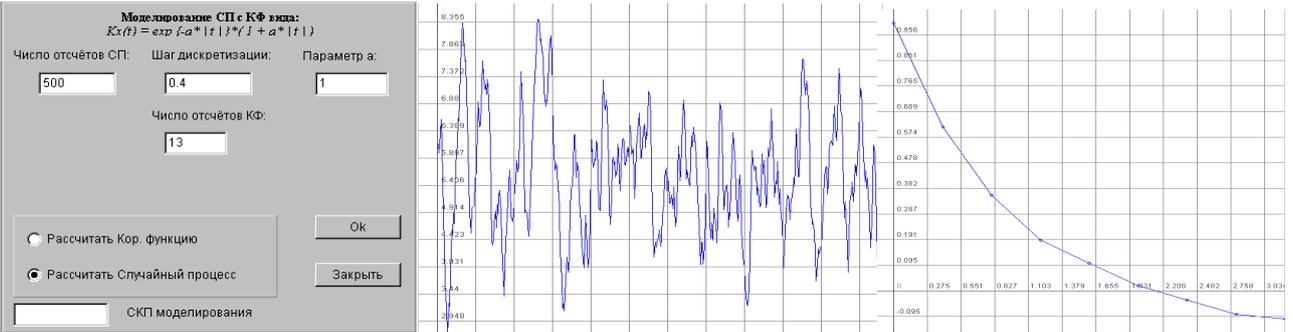
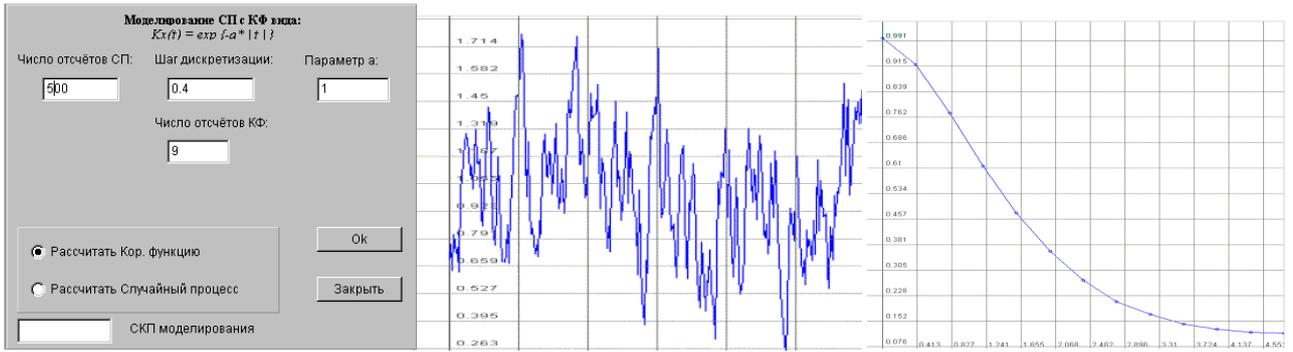


Рисунок 1.14 - Случайные сигналы и их корреляционные функции

Обобщенные корреляционные характеристики:

- показатель колебательности $\mu = \omega_0 / \alpha$ (см. рис.1.15);
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции τ_{kmax} , $\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau$, $\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau$, $\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau$;

- нормированные корреляционные моменты $\mu_k = \int_0^{\infty} \rho_x^k(\tau) d\tau$.

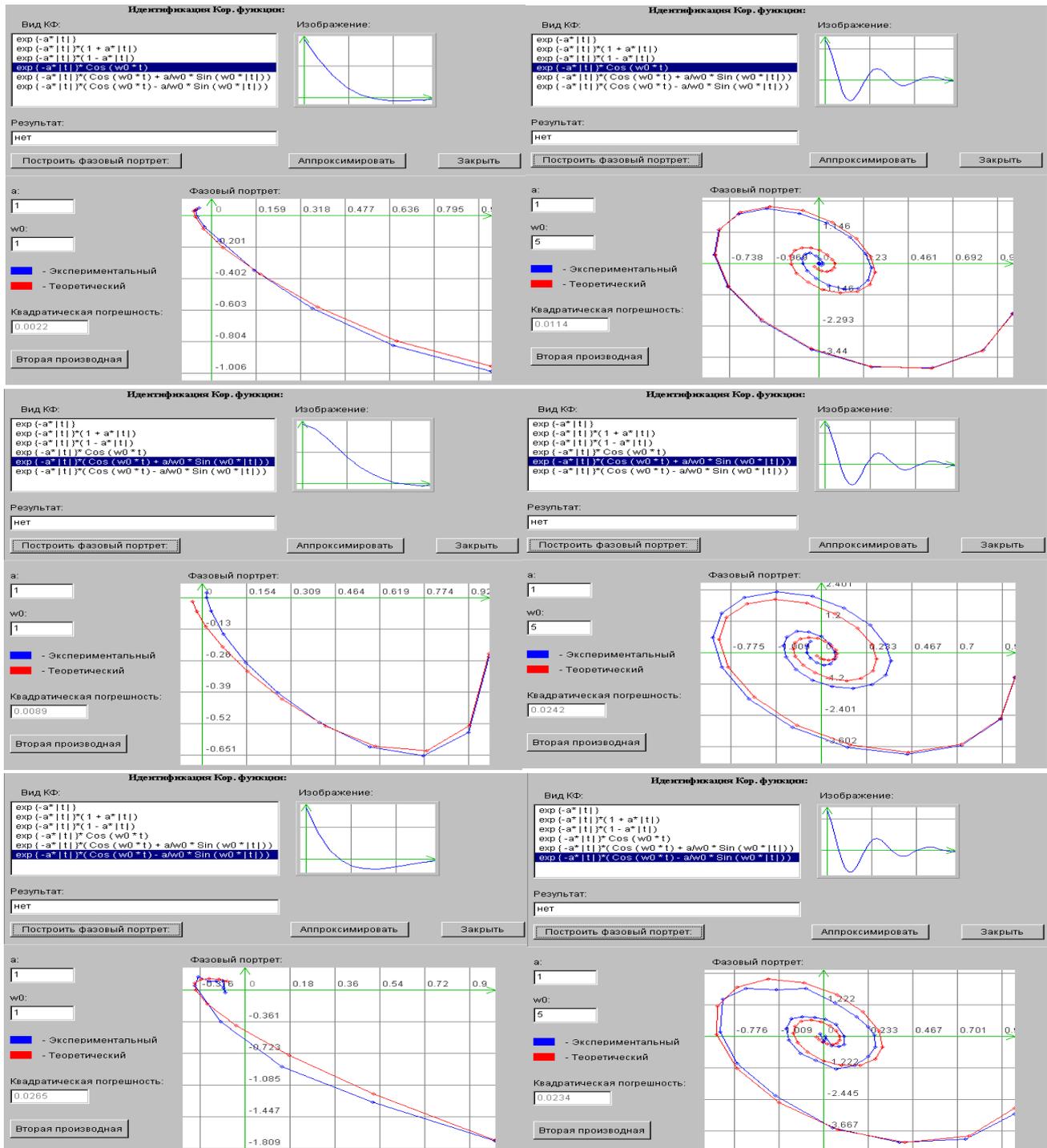


Рисунок 1.15 - Определение показателя колебательности

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $x(t)$ и случайной функции $y(t)$:

$$K_{xy}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right]. \quad (1.52)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

При одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (1.53)$$

Как и в случае корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_y(t')}}. \quad (1.54)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [50] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $\tau = t - t'$. В этом случае нормированная корреляционная функция равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (1.55)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (1.56)$$

Из свойства (1.53) взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций $x(t)$ и $y(t)$, взятых в различных порядках, связаны соотношением (см. рис. 1.16)

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (1.57)$$

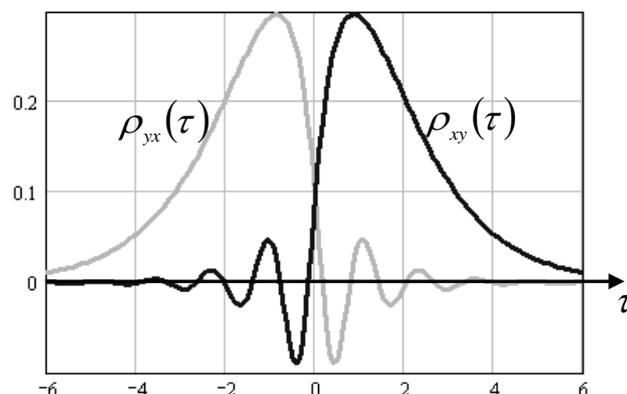


Рисунок 1.16 - Взаимные корреляционные функции

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{kmaxxy}$; (1.58)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$; (1.59)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$; (1.60)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$; (1.61)

- моменты корреляционных функций $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$, (1.62)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик, при определении времени задержки одного сигнала по отношению к другому и т.д. [25].

1.7. Структурные функции

Стационарные случайные процессы являются частным случаем нестационарных случайных процессов.

В том случае, когда $x(t)$ представляет собой нестационарный случайный процесс по математическому ожиданию (1.46), то есть когда $m_x(t)$ меняется с течением времени, можно вместо $x(t)$ рассматривать разность $X_\tau(t) = x(t + \tau) - x(t)$. При небольших значениях τ медленные изменения процесса $x(t)$ будут мало сказываться на значениях $X_\tau(t)$, и тем меньше, чем они медленнее. В результате подавления компонент с очень большими периодами можно считать, что приращение $X_\tau(t)$ стационарно. В этом случае процесс $x(t)$ называют случайным процессом со стационарными первыми приращениями или просто случайным процессом со стационарными приращениями (СПСП) [25, 35, 36].

Основной характеристикой СПСП является структурная функция [25, 35, 36]

$$S_x(t, \tau) = M \{ [x(t) - x(t - \tau)]^2 \}. \quad (1.63)$$

В общем случае для нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии структурная функция будет равна

$$S_x(t, \tau) = m_x^2(t) + m_x^2(t - \tau) - 2m_x(t)m_x(t - \tau) + \sigma_x^2(t) + \sigma_x^2(t - \tau) - 2\sigma_x(t)\sigma_x(t - \tau)\rho_x(\tau). \quad (1.64)$$

Для процесса с нестационарным математическим ожиданием, но стационарным по дисперсии $\sigma_x(t) = \sigma_x$, и выражение (1.64) примет вид

$$S_x(t, \tau) = m_x^2(t) + m_x^2(t - \tau) - 2m_x(t)m_x(t - \tau) + 2\sigma_x^2[1 - \rho_x(\tau)] \quad (1.65)$$

Так как $\rho_x(\tau)$ существует на τ_{kmax} , $S_x(\tau)$ характеризует интенсивность тех флуктуаций $x(t)$, периоды которых меньше или сравнимы с τ_{kmax} .

Представим модель математического ожидания в виде ряда

$$m_x(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k, \quad (1.66)$$

ограничившись линейными членами. В этом случае аргументом структурной функции будет параметр сдвига τ

$$S_x(t, \tau) = a_1 \tau + 2\sigma_x^2 [1 - \rho_x(\tau)]. \quad (1.67)$$

Структурный анализ СПСП приводит к более устойчивым характеристикам по сравнению с корреляционным [25, 36]. К тому же, структурная функция включает в качестве составных параметров корреляционные характеристики, то есть может рассматриваться как результат более общего метода корреляционной обработки случайных процессов.

Структурная функция СПСП служит такой же основной характеристикой, как функция корреляции $K_x(\tau)$ для стационарных процессов. Разумеется, структурную функцию можно определить и в случае стационарности процесса $x(t)$

$$S_x(\tau) = 2[K_x(0) - K_x(\tau)]. \quad (1.68)$$

Если для $x(t)$ выполнено достаточное условие эргодичности ($K_x(\infty) = 0$), то корреляционную функцию можно переписать в виде

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2}[S_x(\infty) - S_x(\tau)]. \quad (1.69)$$

Таким образом, для стационарного эргодического случайного процесса можно пользоваться как функцией корреляции, так и структурной функцией. Кроме того, на погрешность оценки $S_x(\tau)$ не влияют погрешности в определении $m_x(t)$.

На рис. 1.17 представлены результаты определения структурной и корреляционной функции для модельного примера

$$x(t) = (0,1t + 2) \cos 0,1 t + 10 \overset{\circ}{x}(t), \quad (1.70)$$

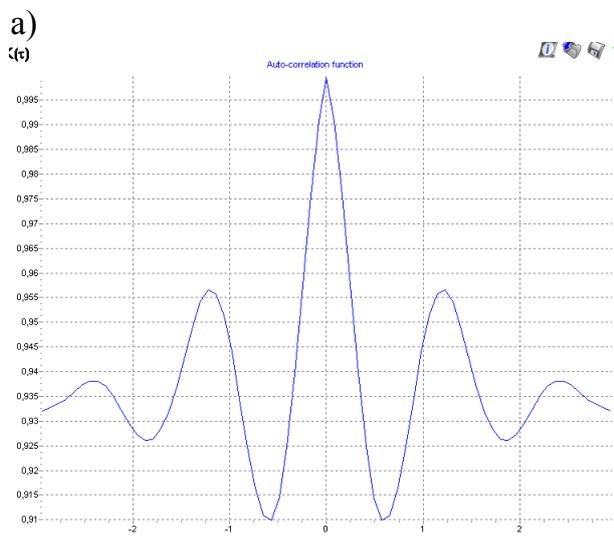
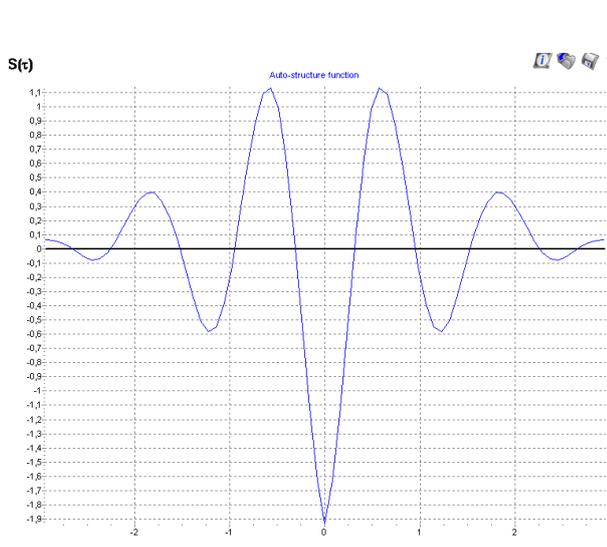
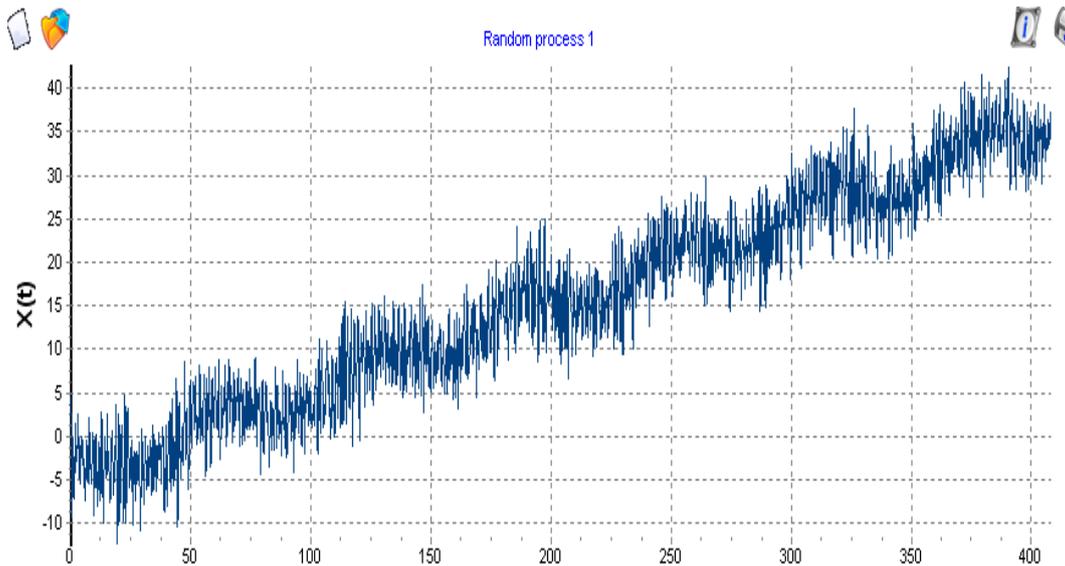
где $\overset{\circ}{x}(t)$ - стационарный случайный процесс с $\rho_x(x) = e^{-|x|} \cos 5x$.

Из рис. 1.17 б) видно, что по структурной функции возможно определение корреляционной функции флуктуирующей составляющей.

Полученные результаты можно обобщить на структурный анализ двух СПСП. В этом случае выражение для оценки взаимной структурной функции примет вид

$$S_{xy}(\tau) = M\{[x(t) - y(t - \tau)]^2\}. \quad (1.71)$$

На рис. 1.18 представлены результаты определения взаимных структурных функций $S_{xy}(\tau)$ и $S_{yx}(\tau)$ для стационарных процессов, корреляционные функции которых имеют вид: $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ и $\rho_y(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 3\tau \pm 0,33 \sin 3|\tau|)$.



б)

в)

Рисунок 1.17 - Случайный процесс со стационарными приращениями (а) и его структурная функция (б), корреляционная функция (в)

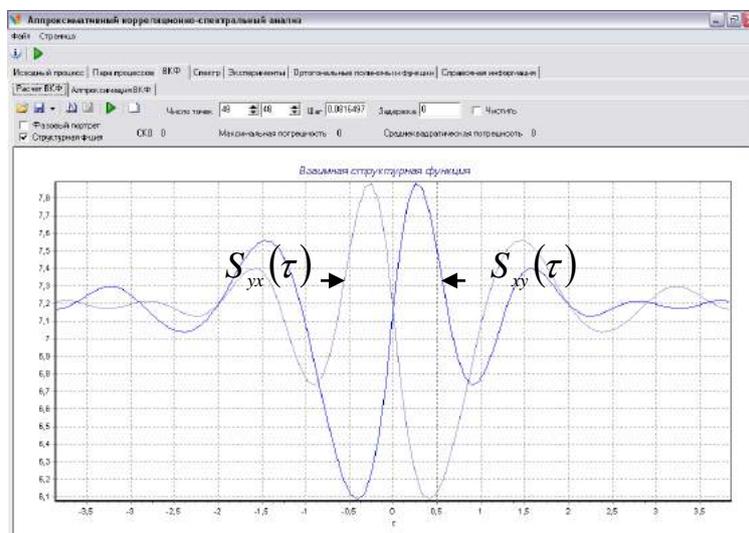


Рисунок 1.18 - Взаимные структурные функции

1.8. Спектральные характеристики

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [50]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.72)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.73)$$

С учетом четности функций $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$, воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (1.72), (1.73) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad (1.74)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (1.75)$$

Типовые модели спектральных плотностей мощности приведены в таблице 1.9. Подставив в выражение (1.75) $\tau = 0$, получим:

$$K_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega, - \quad (1.76)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Подставив в выражение (1.74) $\omega = 0$, получим

$$S_x(0) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \tau_k^{(2)}. \quad (1.77)$$

Отсюда видно, что если значение спектральной плотности мощности «в нуле» равно нулю, то $\tau_k^{(2)} = 0$. Это свойство случайных процессов ограничивает область применения интервала корреляции $\tau_k^{(2)}$.

Спектральная плотность мощности с успехом применяется при анализе линейных динамических систем при случайном входном воздействии.

Пусть на вход линейной динамической системы с частотной характеристикой $|W(j\omega)|$ поступает случайный процесс $x(t)$ со спектральной плотностью мощности $S_x(\omega)$. Спектральная плотность мощности выходного процесса $y(t)$ в этом случае равна [25]:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (1.78)$$

где $|W(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики.

Это фундаментальное выражение позволяет определить:

- дисперсию выходного сигнала;
- найти аналитическое выражение квадрата модуля частотной характеристики и соответствующее ему выражение импульсной переходной характеристики, необходимое для моделирования стационарных случайных процессов с заданным видом

спектральной плотности мощности (корреляционной функции) методом фильтрации [29, 30].

Аналитические выражения для спектральных плотностей мощности типовых моделей корреляционных функций, необходимые для теоретических исследований, приведены в таблице 1.6.

Спектральные плотности мощности типовых моделей

Таблица 1.6

$K_x(\tau)$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8\sigma_x^2 \alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha (\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_x^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + c \omega_0 (\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.79)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.80)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re}S_{xy}(\omega) - j\text{Im}S_{xy}(\omega). \quad (1.81)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re}S_{xy}(\omega) + j\text{Im}S_{xy}(\omega). \quad (1.82)$$

Воспользовавшись соотношениями (1.81) - (1.82), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2\text{Re}S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos\omega\tau d\tau, \quad (1.83)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2\text{Im}S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin\omega\tau d\tau. \quad (1.84)$$

Функция $C_{xy}(\omega)$ является четной, а $Q_{xy}(\omega)$ - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos\omega\tau d\omega; \quad (1.85)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin\omega\tau d\omega. \quad (1.86)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [13, 14]:

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (1.87)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет найти обобщенные спектральные характеристики, широко применяемые в приложениях.

К ним относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** - $\Delta\omega$. Существуют различные способы определения $\Delta\omega$, приведенные, например, в [25].

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 1.19), $\Delta\omega_0$ определяют в виде:

$$\Delta\omega_0 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega)_{\max}} \quad (1.88)$$

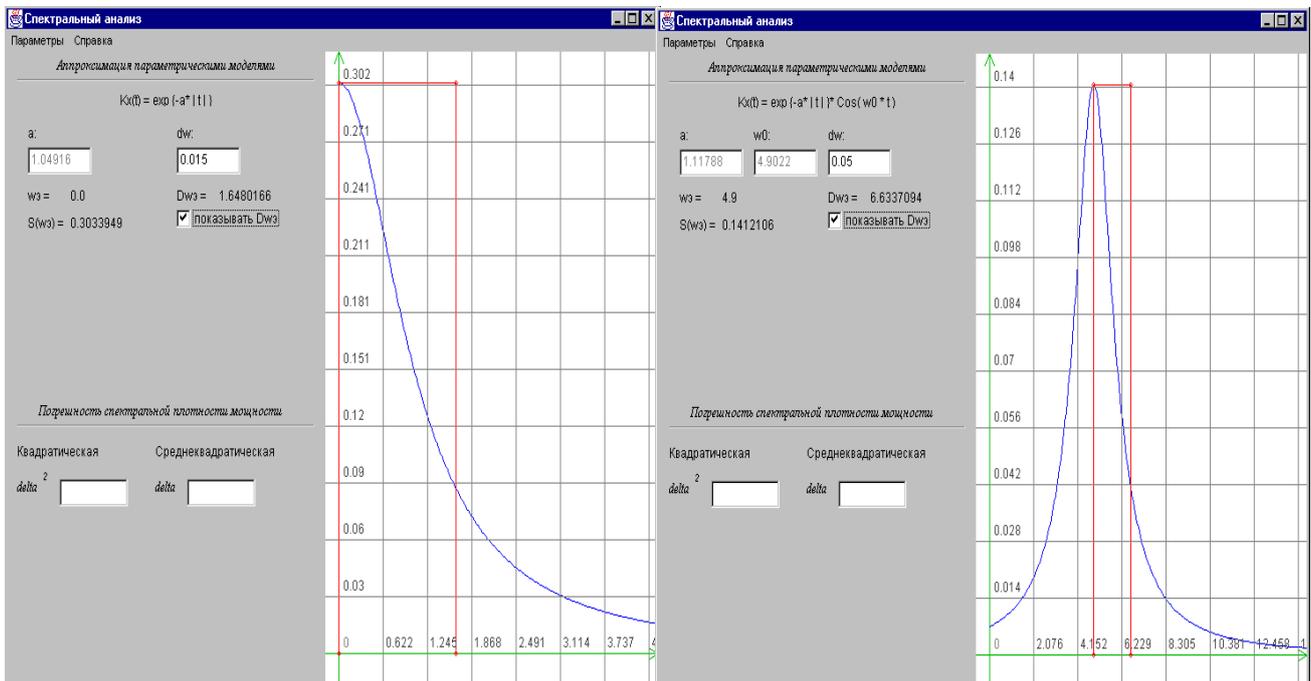
Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности ω_0 (см. рис. 1.19 б), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega_0 / 2. \quad (1.89)$$

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_0$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_0} |W(j\omega)_{\max}|^2, \quad (1.90)$$

где $\Delta\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)_{\max}|^2}$ - полоса пропускания линейной динамической системы.



а) Эквивалентная ширина спектра широкополосного процесса

б) Эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса

Рисунок 1.19 – Эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса

Из выражения (1.90) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией и апериодического звена первого порядка выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \Delta\omega_s \tau_k^{(2)} = \pi / 2; \\ \Delta\omega_c \tau_u^{(2)} = \pi / 2, \end{cases} \quad (1.91)$$

где $\tau_u^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{\max}}$ - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы. Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (1.90) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{\max}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_u^{(2)}}. \quad (1.92)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

Узкополосным случайным процессом называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты ω_0 . Условие узкополосности записывается в виде: $\Delta\omega_s / 2 \ll \omega_0$.

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

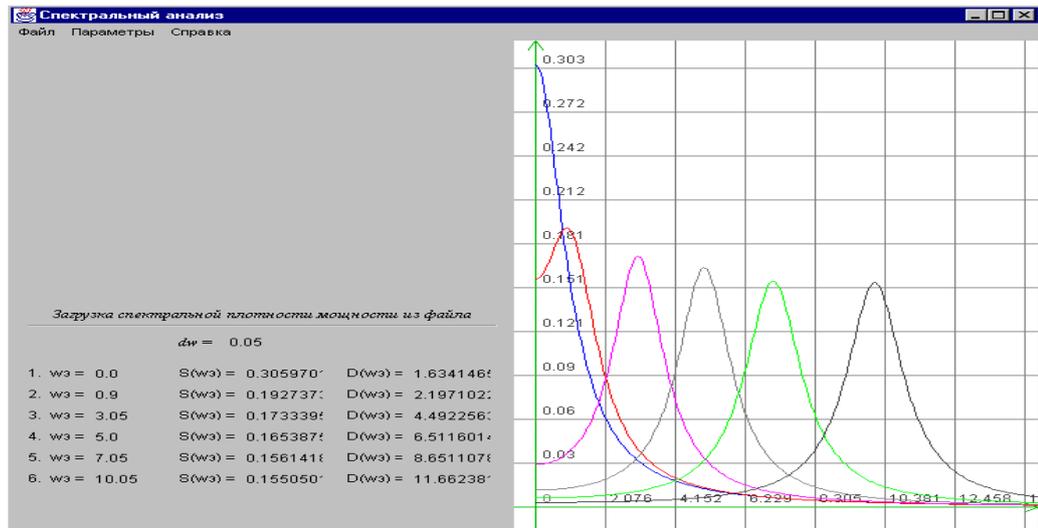
К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности $\mu > 5$ (см. таблицу 1.5, модели 5-8).

К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в таблице 1.5, причем, для моделей 5 - 8 $\mu < 3$.

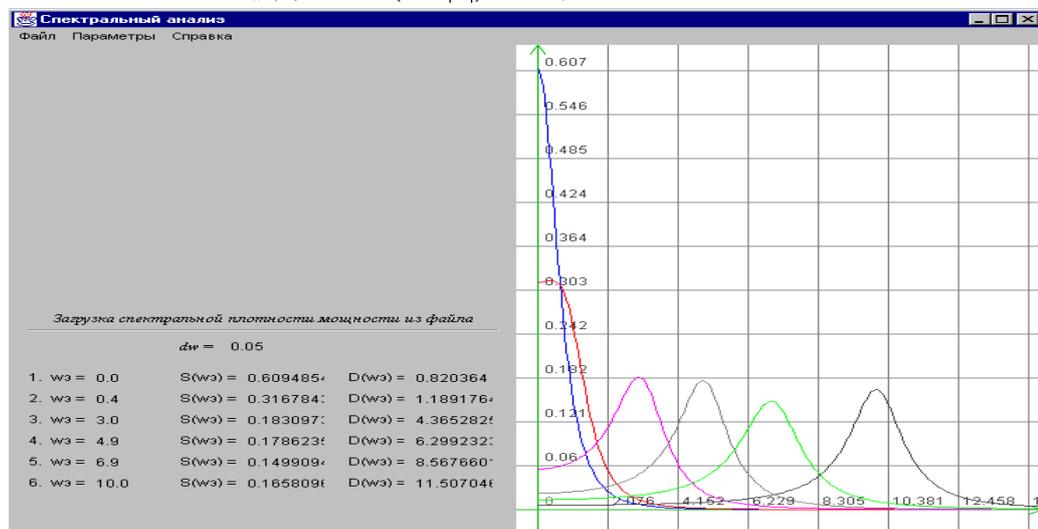
Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 1.20.

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности ω_s . Её можно определить в результате решения уравнения:

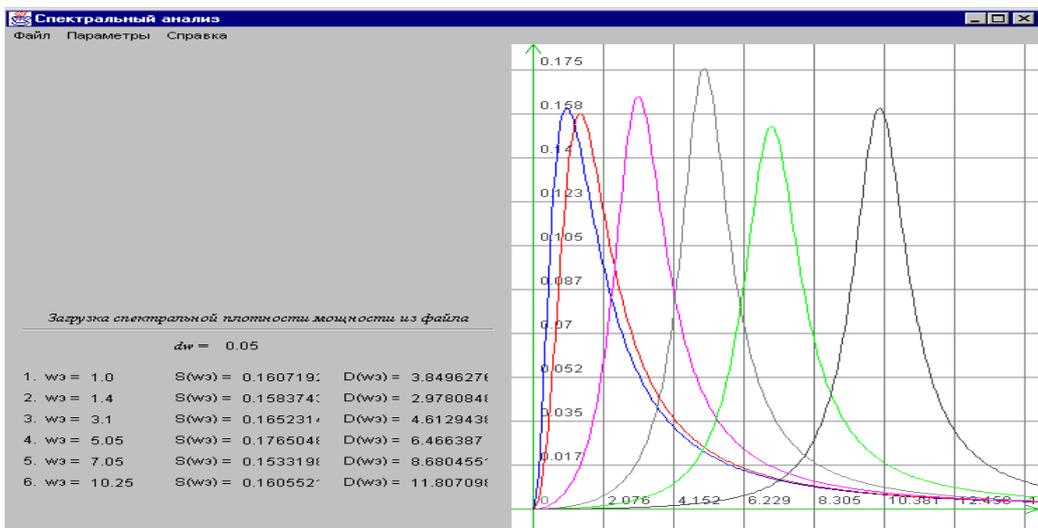
$$S'_x(\omega) = 0. \quad (1.93)$$



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \cos \omega_0 \tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$

Рисунок 1.20 - Спектральные плотности мощности колебатель-

1.9. Математическое описание случайных потоков событий

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [9, 31].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [9,31]

Стационарным называется поток событий, для которого вероятность $P_k(l-t, l)$ появления какого-либо числа k событий на определенном интервале времени $(l-t, l)$ зависит лишь от значения этого интервала t и не зависит от его расположения на оси времени.

Ординарным называется поток, для которого вероятность появления на малом участке δt , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

Последствием потока заключается в зависимости вероятности $P_k(l-t, l)$ от распределения событий на оси времени вне интервала $(l-t, l)$. Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [9], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [9]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разряжением посредством преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью p остается в потоке, а с вероятностью $q=1-p$ выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических

исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [9]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчётами потока;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов $f_{\Delta t}(\Delta t)$ и функция распределения вероятностей интервалов $F_{\Delta t}(\Delta t)$ являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [25].

Плотности распределения прямого V и обратного U времен возвращения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяется в виде [9]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda F(t), \quad (1.94)$$

где $F(t)$ - функция распределения интервала дискретизации;

λ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий [9, 31]. Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

Автокорреляция $C_x(t)$ определяет вероятность появления события в потоке X как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.95)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

Взаимокорреляция $C_{xy}(t)$ применяется в случае двух потоков событий X и Y и определяет вероятность наблюдения события в потоке Y как функцию времени после данного события в потоке X , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.96)$$

Функцию $C_{xy}(t)$ по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом, автокорреляция и взаимокорреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени, предназначенных для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения, определения зависимости в случайных потоках, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

Определим ИКФ событий для конкретных практических случаев. При этом начнем со случайной последовательности, описываемой распределением Пуассона - простейшего потока. Корреляция событий в этом случае будет использована для распознавания системы и определения ее основных свойств.

Практическими интересными случаями являются [31, 59, 60]:

- системы с встроенными генераторами повторяющихся событий;
- системы с задержкой;
- системы с «мертвым» временем;
- периодические события, смещенные случайной девиацией;
- системы с буфером для одного и более событий;
- двойные стохастические пуассоновские процессы;
- разветвляющиеся стохастические процессы.

а) Пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс описывает вероятность появления числа событий r в произвольном интервале длиной t :

$$P(r, t) = [(\lambda t)^r / r!] \exp(-\lambda t), \quad (r = 0, 1, \dots) \quad (1.97)$$

Пуассоновский процесс также дает распределение вероятностей интервалов t между событиями:

$$f(t) = P(r = 0, t) = \exp(-\lambda t).$$

ИКФ событий, основанная на определении (1.95) для пуассоновского процесса, равна среднему числу событий в dt

$$\begin{cases} C_x(0) = 1; \\ C_x(0) = \lambda, \end{cases} \quad (1.98)$$

представлена на рис. 1.21 а).

б) Периодические события.

Для периодических событий выражение (1.95) приводит к

$$\begin{cases} C_x(t) = 1, \text{ для } t = kT; \\ C_x(t) = 0, \text{ для } t \neq kT. \end{cases} \quad (1.99)$$

Результат представлен на рис. 1.21 б).

в) Периодические события, смещенные случайной девиацией («дрожание»).

В этой модели события должны появляться через регулярные интервалы, т.е. периодически, но они смещены относительно требуемого момента появления случайным образом.

Из выражения (1.80) следует, что

$$C_x(t + kT) = g(t) * g(t), \quad (1.100)$$

где $g(t)$ - плотность распределения вероятностей t («дрожание»);

* - операция нахождения композиции законов распределения.

Результат представлен на рис. 1.21 в).

г) Системы с «мертвым» временем.

Модель имеет соответствующее «мертвое» время [59]. После прихода входного события система пропускает это событие на выход и затем закрывается на фиксированное «мертвое» время T , например, на время обработки информации на ЭВМ. ИКФ выходного процесса может быть определена следующим образом [59].

Для $d < t < 2d$, используя выражения (1.95), (1.97), получим:

$$C_x(t)dt = P(1, dt)P(0, t-d) = f(t)P(0, t-d). \quad (1.101)$$

Для $2d < t < 3d$ интервал t может быть сформирован двумя способами.

Первый способ:

$t = d + t_1$ с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi_1(t-d) = f(t). \quad (1.102)$$

Вероятность такого способа формирования t равна $P(0, t-d)$.

Второй способ:

$t = 2d + t_1 + t_2$ с плотностью

$$\varphi_2(t-2d) = f(t) * f(t). \quad (1.103)$$

Вероятность такого способа формирования t равна $P(1, t-2d)$.

Таким образом:

$$C_x(t)dt = P(0, t-d)f(t) + P(1, t-2d)f(t) * f(t). \quad (1.104)$$

Обобщая выражение (1.89) для k способов формирования интервалов, получим:

$$C_x(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} P[k, t-(k+1)d] [f(t) * * * \dots * f(t)]. \quad (1.105)$$

Следует отметить, что многократная композиция законов распределения Пуассона приводит к распределению Эрланга [31, 59]. Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого случая представлена на рис. 1.21 г).

Аналогичным образом можно привести дополнительные примеры взаимодействия случайных последовательностей и систем.

Взаимная корреляция.

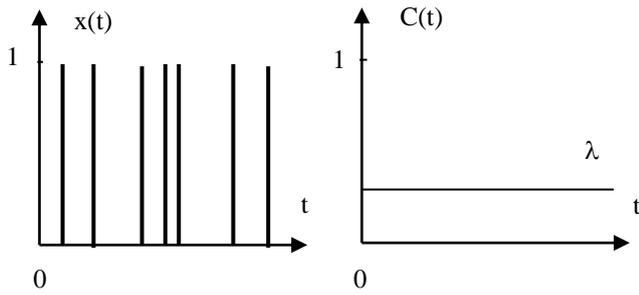
Более общим применением корреляционного анализа потоков событий являются случаи с несколькими потоками событий в системе. Случайные потоки могут наблюдаться в различных точках системы и не взаимодействовать друг с другом. В других случаях потоки «перемешиваются». Это явление получило название суперпозиции потоков [31].

В первом случае ВИКФ позволяет определить степень взаимозависимости потоков. На рис. 1.21 д) приведен пример системы с постоянной задержкой d в обработке информации при подаче на вход простейшего потока. Выражение (1.96) для рассматриваемого примера позволяет определить ВИКФ входного и выходного потоков в виде:

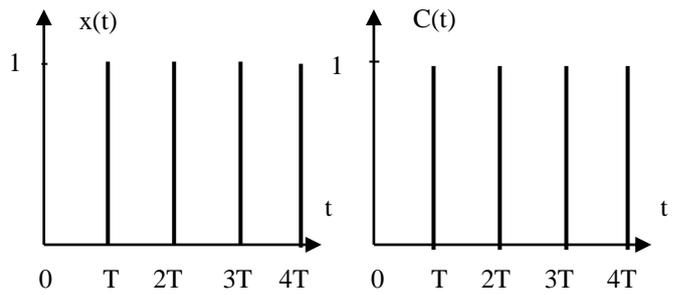
$$\begin{cases} C_{xy}(t) = 1, \text{ для } t = d; \\ C_{xy}(t) = \lambda, \text{ для } t \neq d, \end{cases} \quad (1.106)$$

что позволяет в случае необходимости величину задержки d .

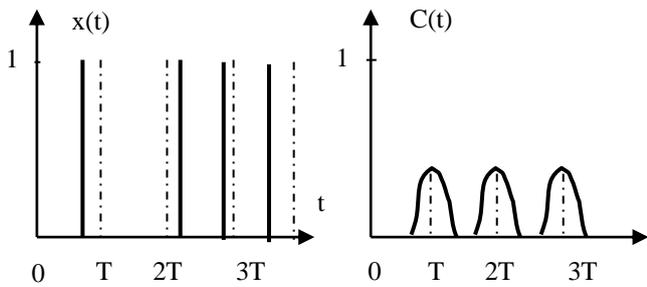
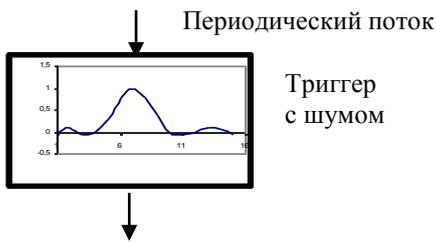
а) Пуассоновский поток



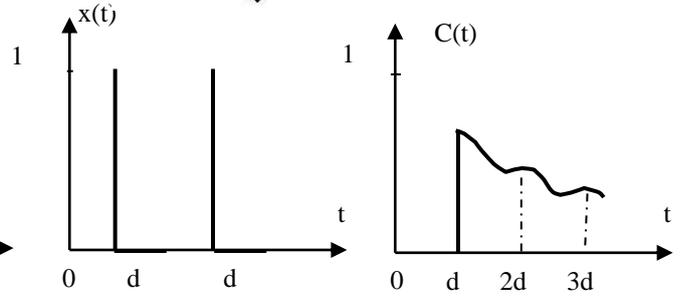
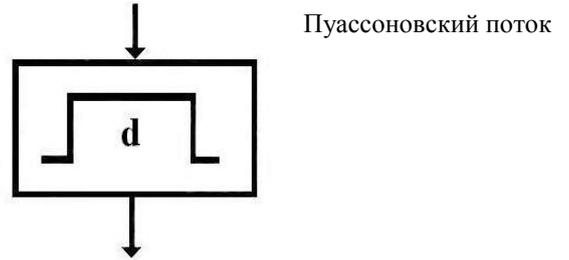
б) Периодический поток



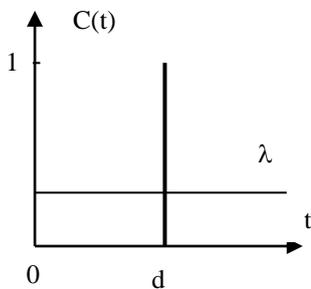
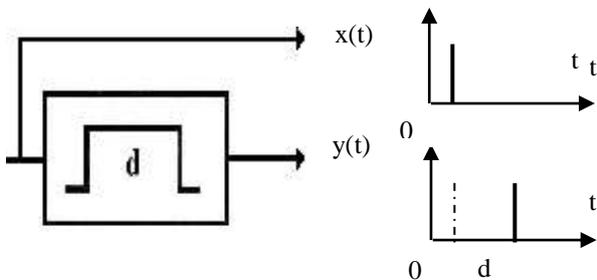
в) Периодический поток с «дрожанием»



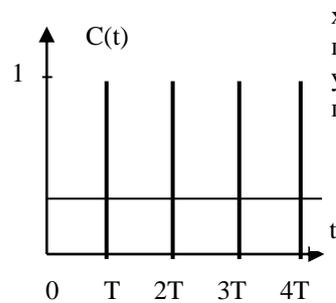
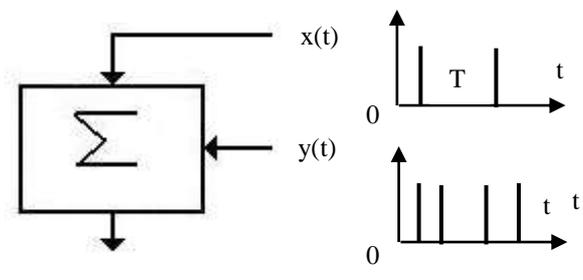
г) Система с «мертвым» временем



д) Взаимная корреляция



е) Суперпозиция



$x(t)$ – Пуассоновский поток;
 $y(t)$ – периодический поток.

Рисунок 1.21 - Интервальные корреляционные функции

Суперпозиция случайных потоков.

Во многих физических и инженерных случаях потоки событий представляют собой суперпозицию некоторых других потоков событий. Например, поток случайных прерываний, приходящий в процессор от нескольких источников. Если поток событий представляет собой смесь двух или нескольких потоков событий, его ИКФ будет равна сумме ИКФ индивидуальных потоков. Так на рис. 1.21 е) показана суперпозиция Пуассоновского и периодического потоков вместе с результирующей ИКФ. Если в ходе проведения эксперимента будет получена похожая ИКФ, то сравнив её с результатами рис. 1.21 е), можно сделать вывод о том, что периодический поток «погружен» в случайный поток.

Для потоков, рассмотренных в примерах 1.21 а) – 1.21 г), можно представить различные суперпозиции. ИКФ в этих случаях поможет различить составляющие потоки, их интенсивность и скорость. Кроме того, ИКФ может быть использована при моделировании и измерении характеристик случайных потоков и процессов с нерегулярным интервалом дискретизации.

Приведем несколько примеров, связанных с функционированием вычислительных систем реального времени.

Сканирование

В вычислительных системах реального времени, основанных на сканировании, программа вычислений определяет время и порядок выполнения операций. Из-за того, что для обработки могут применяться различные алгоритмы, сканирование может представлять процесс, в котором появление событий планируется через регулярные интервалы времени, но благодаря различному времени обработки они будут смещены от времени расписаний. Следовательно, ИКФ процесса сканирования будет похожа на функцию, представленную на рис. 1.21 в). ИКФ в рассматриваемом примере отражает степень нерегулярности процесса сканирования.

Мультиплексирование.

При подключения множества источников информации к мультиплексору его выходной поток будет определяться суперпозицией входных потоков. В этом случае его ИКФ будет являться суммой составляющих ИКФ, как показано на рис. 1.21 е). Даже если составляющие потоки событий являются достаточно периодическими, результирующий поток может быть случайным. Был отмечен интересный факт для нервных клеток, когда нервные импульсы приходят по множеству волокон [59, 60]. Последовательность нервных импульсов, формируемая в результате суперпозиции значительного числа довольно регулярных последовательностей, представляет собой случайную последовательность. ИКФ в этом случае определяет степень регулярности потока.

«Мертвое время».

Если время обработки события T имеет тот же порядок, что и средний интервал между событиями $1/n$, значительное число выходных событий будет потеряно. Потери за счет «мертвого» времени для многих практических случаев найдены Соучеком Б. [53, 66]. Так, например, если «мертвое» время постоянно и равно T , то потери определяются выражением

$$g(T) = nT. \quad (1.107)$$

Выходная последовательность и её ИКФ представлены на рис. 1.21 г).

В измерительных системах реального времени, предназначенных для построения гистограммы исследуемого сигнала, потери «мертвого» времени не внесут искажения в гистограмму. Это объясняется тем, что при кодировании информации применяется импульсная модуляция и импульсы приходят случайным образом, а временные зависимости не учитываются. Ситуация значительно ухудшается при построении гистограмм временных интервалов. В таких системах «мертвое» время должно быть значительно меньше, чем среднее время между событиями потока.

Буферизация.

Если интервал между событиями короче, чем время обработки T , буфер запомнит второе событие, что, в свою очередь, уменьшит потерю событий [53]

$$g_1(T) = nT - [1 - \exp(-nT)]. \quad (1.108)$$

Событие, запомненное в буфере, обрабатывается сразу после «мертвого» времени. Таким образом, буфер «сдвигает» события вдоль временной оси, формируя более регулярные интервалы. ИКФ в этом случае позволяет измерить степень регулярности временных интервалов.

Нейронные импульсы.

Поток нейронных импульсов записывается с помощью микроэлектродов [66]. Результатом анализа потока является ИКФ (корреляционная гистограмма), которая сравнивается с ранее полученными результатами, например, представленными на рис. 1.21, с целью построения наиболее адекватной модели потока. Как показали исследования, наиболее адекватной моделью потока нейронных импульсов является суперпозиция (см. рис. 1.21 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.21 а) и смещенного регулярного потока (см. рис. 1.21 в) [31, 66]. ИКФ в этом случае помогла определить свойства модели рассматриваемой системы.

Коммуникация насекомых.

В работе [66] приведен интересный пример из жизни насекомых-сверчков. В спокойном состоянии периодичность посылок сообщений сверчка случайна. Но стоит их потревожить, как картина резко меняется- появляется некоторая закономерность в посылки их сообщений. Была проанализирована импульсная последовательность сигналов насекомых, используемая ими для коммуникации, и определена ИКФ интервалов между посылками сообщений этих насекомых. Экспериментальные результаты были сравнены затем с результатами, представленными на рис. 1.21. Адекватной моделью для этого случая является суперпозиция (см. рис. 1.21 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.21 а) и потока на выходе системы с фиксированным временем обработки, т. е. системы с «мертвым» временем (см. рис. 1.21 г). ИКФ, как и в предыдущем случае использовалась для построения модели системы.

Таким образом, в рассмотренных примерах для вычислительных систем реального времени и их основных функциональных блоков: сканеров, мультиплексоров, элементов задержки, процессоров обработки («мертвое» время), буферов и т.д., - по результатам оценки ИКФ определялась модель неизвестного потока событий и строилась соответствующая вероятностная модель системы, через которую эти события прошли. Кроме того, ИКФ применялась для анализа и сравнения потоков событий в нейронных сетях и система поведения.

Было показано, что суперпозиция почти периодических потоков событий (мультиплексирование) приводит к появлению на выходе случайного потока. С дру-

гой стороны, процесс обработки, буферизация «сглаживают» случайный поток, преобразуя его в почти периодическую последовательность. Следует отметить, что интервальная корреляционная функция позволяет определить и скрытые модели в экспериментальных данных, а взаимная интервальная корреляционная функция - степень зависимости двух потоков событий.

Это важное обстоятельство: возможность определения степени зависимости событий одного потока (разных потоков) через интервальные корреляционные функции позволяет применять их и для анализа неэквилидистантных временных рядов.

1.10. Математическое описание неэквилидистантных временных рядов

При описании неэквилидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: $[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, Mj}$ - массива мгновенных значений x_{ji} и соответствующих им меток или интервалов времени $t_{ji} / \Delta t_{ji}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений x_{ji} использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности t_{ji} - математический аппарат теории потоков событий [9, 31].

Независимо от особенностей математического описания x_{ji} и t_{ji} неэквилидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- характеристики потока событий t_{ji} не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.22);
- характеристики потока событий t_{ji} полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.23).

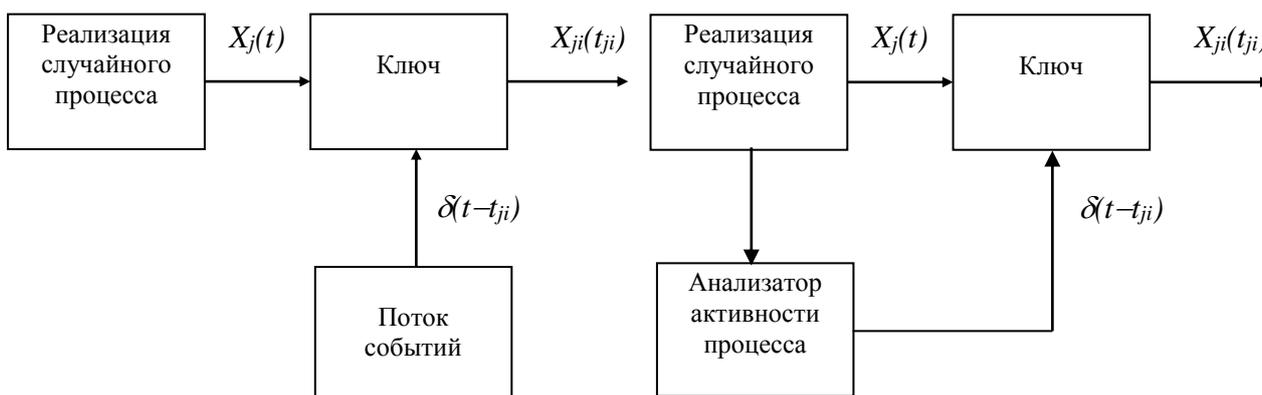


Рисунок 1.22 - Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 1.23 - Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквилидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, не зависящая от желания исследователя, в том числе, и «некачественная» регулярная дискретизация [9, 31]:

- регулярная дискретизация с пропусками наблюдений;
- регулярная дискретизация с «дрожанием»;
- регулярная дискретизация с «дрожанием» и пропускам наблюдений.

Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя [9, 31]. Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизации располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так, например, если $\Delta x_{ji} = const$; $\Delta t_{ji} = random$, то такая дискретизация называется спорадической [31]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Математическое описание потоков событий и его характеристики зависят от способа дискретизации случайного процесса (см. рис. 1.24).

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;
- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.

При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:

- случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
- случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
- случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации (см. подраздел 1.9);
- закона распределения сумм интервалов, требуемые для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик (см. подраздел 1.6);
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности (см. подраздел 1.9);

- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;
- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия $k_{сж}$, характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.



Рисунок 1.24 - Классификация методов дискретизации

Рассмотрим в общем виде определение указанных характеристик без учета конкретных особенностей моделей потоков.

Задаче определения статистических характеристик интервалов между существенными отсчетами, являющейся задачей о первом достижении границ, посвящено большое число работ [31]. Как известно, строгое решение этой задачи, связанное с n -мерным интегрированием n -мерной плотности вероятности процессов при $n \rightarrow \infty$, может быть получено в аналитическом виде только для марковского процесса первого порядка [31]. В остальных же случаях авторы для конкретных способов неравномер-

ной дискретизации при определенных допущениях приводят аналитические выражения $f_{\Delta t}(\Delta t)$, $F_{\Delta t}(\Delta t)$.

Так, в [31] для адаптивно-временной дискретизации, полиномами нулевого и первого порядка при условии постоянства производной на интервале дискретизации, что справедливо лишь при малых погрешностях восстановления (уставки) и известном законе распределения модуля $n+1$ производной, приводятся и анализируются законы распределения интервалов.

Однако, на практике применение такого подхода оказывается проблематичным, так как только для нормального $n+1$ раз дифференцируемого входного процесса возможно аналитическое определение закона распределения модуля $n+1$ производной. В остальных же случаях задача не имеет решения.

В [31] в результате обработки большого экспериментального материала авторы делают вывод о том, что математическая модель интервалов дискретизации для адаптивно-временных дискретизаторов с предсказателем нулевого порядка представляет собой рекуррентный поток с гамма-распределением интервалов:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.109)$$

где λ - интенсивность потока.

Причем, чем меньше корреляционные связи между отсчетами входного процесса источника, тем меньше коэффициент λ , а для безызбыточных выборок он практически равен 1.

Отметим, что при $\alpha = 1$ распределение интервалов становится экспоненциальным:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda\Delta t), \quad (1.110)$$

а поток отсчетов - пуассоновским [9].

На пуассоновский характер потока при различных способах неравномерной дискретизации указывают и другие авторы [31, 66].

В некоторых частных случаях неравномерной дискретизации возможно аналитическое определение закона распределения интервалов, в остальных же случаях полученные результаты для повышения достоверности должны проверяться методом имитационного моделирования и экспериментальными исследованиями [28-30].

Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [25].

Законы распределения сумм интервалов для рекуррентных потоков наиболее целесообразно определить через характеристическую функцию интервалов $\varphi_{\Delta t}(u)$ [31].

В этом случае характеристическая функция $\Theta_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$ равна:

$$\varphi_{\Theta_s}(u) = [\varphi_{\Delta t}(u)]^s \quad (1.111)$$

Отсюда, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для $\varphi_{\Theta_s}(u)$, определим $f_{\Theta_s}(\Theta_s)$ и $F_{\Theta_s}(\Theta_s)$ [31].

При определении числа каналов аппаратно-программных средств возникает необходимость в определении распределения сумм L интервалов дискретизации на заданном интервале наблюдения оцениваемой вероятностной характеристики, например, на максимальном интервале корреляции $\tau_{k\max}$ [31].

$$P(L, \tau_{k \max}) = P(\tau_{k \max} \leq \Theta_L \cap \Theta_{L-1} < \tau_{k \max}) = \\ = F_{L-1}(\tau_{k \max}) - F_L(\tau_{k \max}) \quad (1.112)$$

Значение L_{\max} , обеспечивающего выполнение условия (1.112) с вероятностью P_0 , находится из уравнения:

$$F_{L_{\max}}(\tau_{k \max}) = 1 - P_0. \quad (1.113)$$

Определим вероятность того, что один отсчёт потока отстоит от другого на расстоянии $J\Delta\tau \pm \Delta\tau/2$ без учёта числа прошедших отсчётов.

Введем случайную величину, равную сумме k интервалов дискретизации:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ji}. \quad (1.114)$$

Найдем вероятность того, что случайная величина Θ_{jk} находится в диапазоне $J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}$:

$$P\left\{J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right\} = F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right). \quad (1.115)$$

Вероятность того, что в этот интервал попадет любой из k отсчетов, равна:

$$C_{xj}(J) = C_{xj}(J\Delta\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} \leq \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[F_{jk}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{jk}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right) \right], \quad (1.116)$$

В соответствии с определением (1.95) это и есть интервальная корреляционная функция.

При **преднамеренной неравномерной дискретизации** с целью упрощения аппаратной реализации сжатия данных используются полиномиальные модели восстановления нулевого и первого порядка (см. таблицу 1.7), требующие для реализации сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью, хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн - аппроксимации.

Модели входных сигналов при адаптивной дискретизации

Таблица 1.7

№	Название модели	Аналитическое выражение	Критерий	Δt_0	
				n=0	n=1
1	Интерполяционный полином Лагранжа	$\sum_{m=0}^n a_m t^m$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
2	Ряд Маклорена	$\sum_{m=0}^n \frac{x^{(m)}(0)t^m}{m!}$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
3	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n b_m t^m$	Квадратическое приближение	$\frac{2\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{12\varepsilon}{\mu_2}}$
4	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n c_m t^m$	Интегральное приближение	$\frac{4\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{48\varepsilon}{\mu_2}}$

В рассматриваемых полиномиальных моделях при $n = 0$ и $n = 1$ модели j -ой реализации случайного процесса на i -ом интервале дискретизации записываются в виде

$$x_{ji}^{(m)}(t) = a_{ji}^{(0)} \delta_{ji}^* ; \quad (1.117)$$

$$x_{ju}^{(m)}(t) = (a_{ji}^{(0)} + a_{ji}^{(1)}t) \delta_{ji}^* , \quad (1.118)$$

где $\delta_{ji}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - (1.119)

индикатор состояния, определяющий интервал дискретизации.

Так, при адаптивно-временной дискретизации и критерии равномерного приближения параметры моделей определяются в следующем виде:

1. для предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой:

$$a_{ji}^{(0)} = x_{ji} ; \quad (1.120)$$

2. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по соседним отсчетам равномерной дискретизации, т.е. непосредственно в существенном отсчете:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = x_{ji} - \Delta_{ji} t_{ji} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \Delta_{ji} , \end{cases} \quad (1.121)$$

где $\Delta_{ji} = \frac{x_{j,i} - x_{ji}}{t_{j,i} - t_{ji}}$, а $t_{j,i} = t_{ji} + \Delta t_0$, $x_{j,i} = x_{j,i}(t_{j,i})$, Δt_0 - интервал дискретизации процесса;

3. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по предыдущему и текущему существенным отсчетам сигнала:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{j,i-1} t_{ji} - x_{ji} t_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{ji} - x_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}} ; \end{cases} \quad (1.122)$$

4. для «веерного» интерполятора первого порядка:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{ji} t_{j,i+1} - x_{j,i+1} t_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{j,i+1} - x_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}} . \end{cases} \quad (1.123)$$

Следующей важной характеристикой является минимальный интервал дискретизации, позволяющий восстановить случайный процесс по существенным отсчетам.

Эту характеристику необходимо определять в случаях, когда характеристики потока зависят от характеристик процесса: при адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации и т.д.

Если значение интервала принудительной дискретизации превышает минимальный, то возможны пропуски отсчетов, что, в свою очередь, приводит к увеличению методической погрешности оценки значений вероятностных характеристик.

Существуют различные приближенные методы определения минимального интервала дискретизации, требующие ту или иную априорную информацию о свойствах процесса, модели процесса на интервале дискретизации и ее параметрах, способе неравномерной дискретизации и т.д.

Так для АД, использующих полиномиальные модели, как правило, низких порядков ($n=0, n=1$), необходимо знание максимального значения модуля $n+1$ производной μ_{n+1} на интервале дискретизации. Аналитически эта задача может быть решена только для дифференцируемых процессов с $2(n+1)$ раз дифференцируемой корреляционной функцией, т.е. в ограниченных случаях [31]. В остальных же - возможно применение неравенства Бернштейна, которое справедливо для функций, ограниченных по модулю и имеющих финитную спектральную плотность мощности [31]:

$$\mu_{n+1} = \max |x^{(n+1)}(t)| \leq \omega_c^{n+1} \max |x(t)|, \quad (1.124)$$

где ω_c - верхняя граничная частота спектра входного процесса.

Из выражения (1.124) видно, что для оценки μ_{n+1} необходима информация о законе распределения модуля и спектральной плотности мощности входного процесса.

Воспользовавшись этим выражением, определим минимальный интервал дискретизации [31]:

$$\Delta t_{min} = \frac{\sqrt{\varepsilon k}}{\mu_{n+1}}, \quad (1.125)$$

где ε - погрешность аппроксимации; k - коэффициент, зависящий от вида, степени аппроксимирующего полинома и критерия приближения (см. табл. 1.7).

Следует отметить, что неравенство Бернштейна дает сильно завышенное значение μ_{n+1} . Скорректировать это завышение возможно подбором множителя R в уравнении определения ω_c

$$\int_0^{\omega_c} S_x(\omega) d\omega = R\sigma_x^2. \quad (1.126)$$

Так для нормального входного процесса с КФ $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$

$$\omega_c = \alpha t g R \pi. \quad (1.127)$$

В таблице 1.8 приведены результаты определения Δt_{min} в соответствии с выражением (1.125) для предсказателей нулевого порядка с плавающей апертурой для различных R и результаты имитационного моделирования [31]. Отсюда видно, что хорошее совпадение наблюдается при $R=0,4$.

Минимальный интервал дискретизации

Таблица 1.8

$\gamma = \varepsilon/\sigma_x$	0,25	0,5	0,75	1,0
$R = 0,320$	0,0529	0,1058	0,1587	0,2115
$R = 0,400$	0,0271	0,0542	0,0812	0,1083
$R = 0,475$	0,0066	0,0131	0,0197	0,0262
Результаты имитационного моделирования	0,0288	0,0579	0,0977	0,1465

Аналогичным образом возможно определение Δt_{min} и для других моделей КФ входного процесса.

Интенсивность потока λ - величина, обратная математическому ожиданию интервала дискретизации, как параметр закона распределения используется при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определении коэффициента сжатия.

Существуют различные способы определения коэффициента сжатия [31]. Учитывая, что эта характеристика в дальнейшем будет использоваться при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определим ее в виде:

$$k_{сж} = \frac{N}{M}, \quad (1.128)$$

где N - число отсчетов при равномерной дискретизации;

M - число отсчетов при неравномерной дискретизации при той же длительности реализации и погрешности восстановления.

При известных характеристиках потока выражение (1.128) удобно представить в виде:

$$k_{сж} = \frac{m_{\Delta t}}{\Delta t_{min}} = \frac{1}{\lambda \Delta t_{min}}. \quad (1.129)$$

1.11. Типовые модели неэквидистантных временных рядов

Рассмотрим типовые модели неэквидистантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [25, 31]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений интервал дискретизации $\Delta t_{ji} = t_{j,i+} - t_{ji}$ определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (1.130)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y -случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [25]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1}, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.131)$$

В соответствии с выражением (1.130) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left(\Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (1.132)$$

Плотность и функция распределения вероятностей интервала дискретизации соответственно имеют вид [31]:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \delta[\Delta t - i\Delta t_0] \quad (1.133)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0], \quad (1.134)$$

где $1[\Delta t] = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta t \geq 0 \\ 0, & \text{если } \Delta t < 0 \end{cases}$ - единичная функция.

Для определения моментных характеристик, законов распределения сумм интервалов удобнее воспользоваться характеристической функцией [31]:

$$\varphi_{\Theta}(u) = \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)}. \quad (1.135)$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\begin{cases} m_{\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{p}, \\ \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{\Delta t_0^2 q}{p^2}, \end{cases} \quad (1.136)$$

а плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0]. \quad (1.137)$$

С учетом выражения (1.135) характеристическая функция $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ равна

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \left[\frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)} \right]^n. \quad (1.138)$$

Откуда плотность и функция распределения Z_{nj} определяется в виде:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} = k\Delta t_0) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \delta[Z_{nj} - k\Delta t_0] \quad (1.139)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} \leq k\Delta t_0) = \sum_{r=n}^k C_{r-1}^{n-1} p^r q^{r-n} 1[Z_{nj} - r\Delta t_0] \quad (1.140)$$

С учетом выражения (1.140) L_{max} , обеспечивающее выполнение условия (1.112), находится из уравнения

$$p^{L_{max}} \sum_{r=L_{max}}^m C_{r-1}^{L_{max}-1} q^{r-L_{max}} 1[\tau_{k \max} - r\Delta t_0] = 1 - P_0, \quad (1.141)$$

где $m = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k \max}}{\Delta t_0} \right] + 1$.

На рис. 1.25 приведены результаты расчета плотностей и функций распределения вероятностей в соответствии с выражениями (1.124), (1.125) для $p = 0,8$, $\Delta t_0 = 0,4$, $\tau_{k \max} = 3$ и результаты имитационного моделирования, подтверждающие правильность расчетов. Из рис. 1.25 видно, что для $p = 0,8$ $L_{max} = m$.

Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого потока равна

$$C_x(J) = p, \quad (1.142)$$

а минимальный интервал дискретизации и коэффициент сжатия соответственно равны:

$$\begin{cases} \Delta t_{\min} = \Delta t_0; \\ k_{\text{сж}} = \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.143)$$

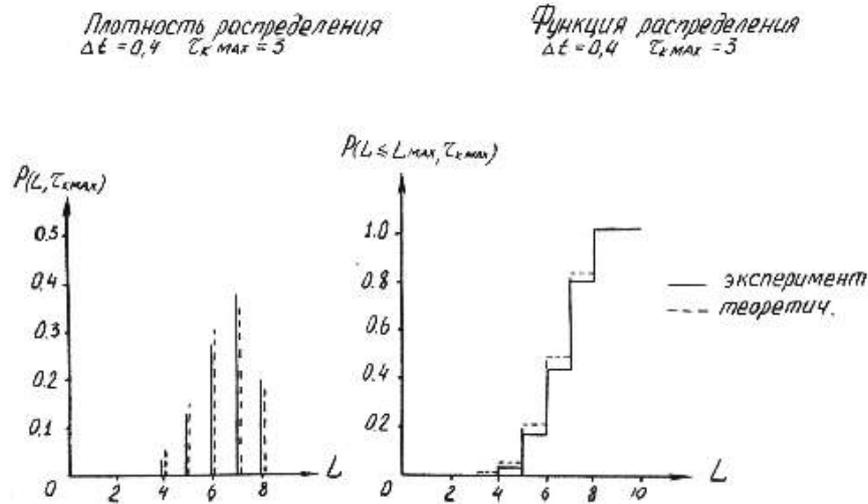


Рисунок 1.25 - Плотность и функция распределения суммы интервалов на $\tau_{k \max}$

Для периодической дискретизации с «дрожанием»

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.144)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$, а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (1.145)$$

Характеристики потока будут зависеть от $f_{\xi}(\xi)$. Рассмотрим пример, когда ξ распределена по нормальному закону с $m_{\xi} = 0$ и $D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2$.

Тогда плотность, функция распределения вероятностей и характеристическая функция соответственно равны:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left(-\frac{(\Delta t - \Delta t_0)^2}{4\sigma_{\xi}^2}\right); \quad (1.146)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = \Phi\left*\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}\right)\right*, \quad (1.147)$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ [5];

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \exp\left(-u^2\sigma_x^2 + iu\Delta t_0\right). \quad (1.148)$$

Откуда $m_{\Delta t} = \Delta t_0$, а $D_{\Delta t} = 2\sigma_{\xi}^2$.

Плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Delta t_0} \Phi * \left(\frac{t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right). \quad (1.149)$$

Характеристическая функция суммы n независимых интервалов $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ с учетом выражения (1.148) запишется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \exp(-n(u^2 \sigma_\xi^2 - iu \Delta t_0)), \quad (1.150)$$

а соответствующие ей плотность и функция распределения вероятностей равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(Z_{nj} - n\Delta t_0)^2}{4n\sigma_\xi^2}\right), \quad (1.151)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \Phi * \left(\frac{Z_{nj} - n\Delta t_0}{\sqrt{2n}\sigma_\xi} \right). \quad (1.152)$$

Для нормального закона распределения ξ L_{max} определяется из уравнения

$$\Phi * \left(\frac{\tau_{kmax} - L_{max} \Delta t_0}{\sqrt{2L_{max}} \sigma_\xi} \right) = 1 - P_\delta, \quad (1.153)$$

которое с учетом свойств $\Phi^*(x)$ приведем к виду:

$$\Phi * \left(\frac{L_{max} \Delta t_0 - \tau_{kmax}}{\sqrt{2L_{max}} \sigma_\xi} \right) = P_\delta. \quad (1.154)$$

Отсюда, после преобразований получим следующее уравнение:

$$L_{max}^2 - \frac{2L_{max}(\Delta t_0 \tau_{kmax} + A^2 \sigma_\xi^2)}{\Delta t_0} - \frac{\tau_{kmax}^2}{\Delta t_0^2} = 0, \quad (1.155)$$

где $A = \arg \Phi^*(P_\delta)$.

Решение этого уравнения, например, для случайного процесса с нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\Delta t_0 = 0,4/\alpha$, $\tau_{kmax} = 3/\alpha$, $P_\delta = 0,99$, $A = 2,3$ дает $L_{max} = 9$.

Заметим, что при равномерной дискретизации $L_{max} = \text{ent} \left[\frac{\tau_{kmax}}{\Delta t_0} + 0,5 \right] + 1 = 9$.

Интервальная корреляционная функция равна

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right] - \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right] \right\}. \quad (1.156)$$

Если $\sigma_\xi = \frac{\Delta t_0}{6}$ и $\Delta = \Delta \dots t_0$, то после промежуточных преобразований получим

$$C_x(J) = \Phi * \left[\frac{3(2J-1)}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow 1. \quad (1.157)$$

Заметим, что для рассматриваемой модели при заданном значении Δt_0 минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, но коэффициент сжатия $k_{сж} = 1$.

Для аддитивной случайной дискретизации

$$\begin{cases} t_{ji} = t_{ji+1} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.158)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $(0, \infty)$.

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (1.159)$$

Наиболее полно вероятностные характеристики этой модели исследованы в [31]. Учитывая, что в практике широко применяется модель простейшего потока и потока с распределением интервалов, подчиненного гамма-распределению, частным случаем которого являются законы Эрланга, экспоненциальное, вырожденное причинное, показательное степенное, Пирсона и т.д. [9], определим их характеристики.

Для гамма-распределения длительности интервалов

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha} \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.160)$$

характеристическая функция равна:

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha}}. \quad (1.161)$$

Отсюда характеристическая функция $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ определяется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha n}}, \quad (1.162)$$

а плотность и функция распределения вероятностей соответственно равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n} Z_{nj}^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha\lambda Z_{nj}), \quad (1.163)$$

$$F_{Z_n}(Z_n) = \frac{1}{\partial(\alpha n)} \nu[\alpha n, \alpha\lambda Z_n] \quad (1.164)$$

где $\nu[\alpha, x] = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ - неполная гамма-функция [10].

Моментные характеристики интервалов равны: $m_{\Delta t} = \frac{1}{\lambda}$, $D_{\Delta t} = \frac{1}{\alpha\lambda^2}$, а коэффициент формы

$$k_{\phi} = \frac{2\alpha^{\alpha-1} e^{-\alpha}}{\partial(\alpha)}. \quad (1.165)$$

Вероятностные характеристики для простейшего потока можно получить из выражений (1.160) - (1.163), положив $\alpha = 1$.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t); \\ F_{\Delta t}(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda \Delta t); \\ \varphi_{\Delta t}(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}; \\ \varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - iu)^n}; \\ \\ f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{\lambda^n Z_{nj}^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda Z_{nj}); \\ F_{Z_{nj}} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k Z_{nj}^k}{k!} \exp(-\lambda Z_{nj}). \end{array} \right. \quad (1.166)$$

При целочисленных значениях $\alpha = k + 1 = 1, 2, 3, \dots$ гамма-распределение вырождается в распределение Эрланга [9].

Для простейшего потока, как следует из выражения (1.166), плотность распределения сумм интервалов на $\tau_{k \max}$ имеет вид

$$f(L, \tau_{k \max}) = P(L, \tau_{k \max}) = \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}), \quad (1.167)$$

а $L_{k \max}$ находится из уравнения

$$\sum_{L=1}^{L_{k \max}} \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}) = P_D. \quad (1.168)$$

Решение уравнения для $\lambda \tau_{k \max} = 6,7766$ и $P_D = 0,99$ дает $L_{k \max} = 14$.

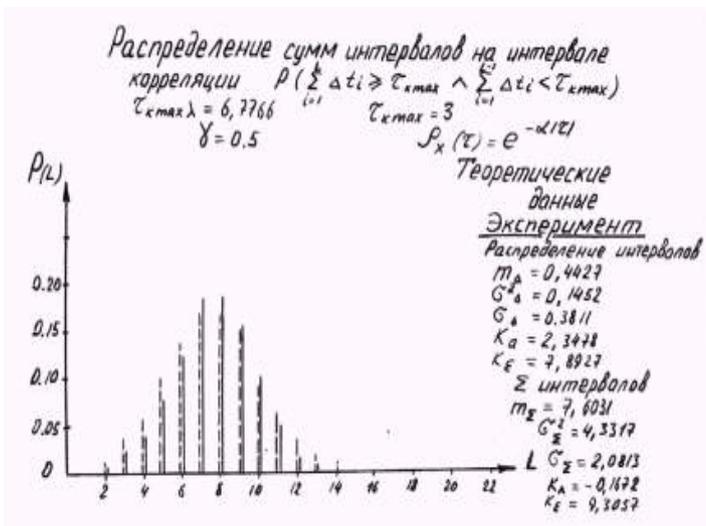


Рисунок 1.26 - Распределение сумм интервалов на максимальном интервале корреляции

На рис. 1.26 приведены для примера законы распределения сумм интервалов на $\tau_{k \max}$ для АВД с плавающей апертурой (ПНП ПА), полученные методом имитационного моделирования, и результаты определения $L_{k \max}$ из уравнения (1.168). Результаты анализа еще раз подтверждают, что для АВД ПНП ПА возможно применение модели простейшего потока.

Для гамма-распределения интервалов $L_{k \max}$ определяется из уравнения

$$\nu \left[\frac{L_{k \max} \alpha, \alpha \lambda \tau_{k \max}}{\alpha L_{k \max}} \right] = 1 - P_D, \quad (1.169)$$

решение которого возможно только численными методами [12].

Интервальная корреляционная функция для простейшего потока примет вид

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \frac{\lambda^r \exp(-J\lambda\Delta t_0)}{r!} \left[\exp\left(-\frac{\lambda\Delta}{2}\right) \left(J\Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)^r - \exp\left(-\frac{\lambda\Delta}{2}\right) \left(J\Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^r \right] \right\}, \quad (1.170)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\vartheta(\alpha k)} \left\{ \nu \left[\alpha k, \alpha \lambda \left(J\Delta t_0 + \frac{\Delta}{2} \right) \right] - \nu \left[\alpha k, \alpha \lambda \left(J\Delta t_0 - \frac{\Delta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (1.171)$$

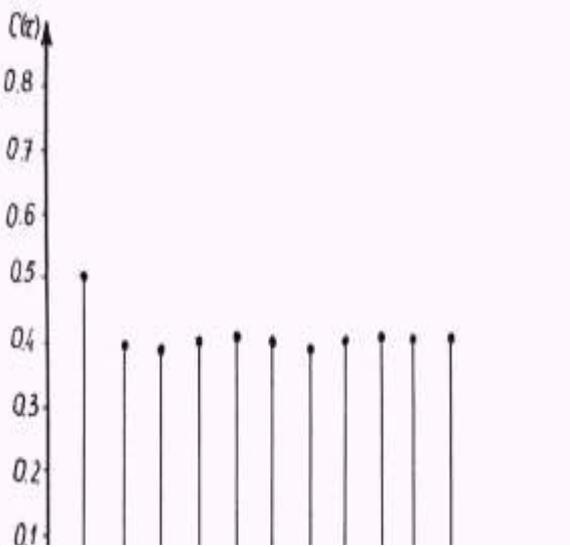


Рисунок 1.27 - Интервальная корреляционная функция

Результаты определения $C_x(J)$ для АВД ПНП ПА для модели КФ входного процесса $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ представлены на рис. 1.27.

Плотность распределения времени возвращения для простейшего потока

$$\varphi(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad (1.172)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\vartheta(\alpha)} \nu[\alpha, \alpha \lambda t] \quad (1.173)$$

Минимальный интервал дискретизации для полиномиальной модели процесса на интервале дискретизации определяется в соответствии с выражением (1.125) с учетом (1.124).

Следует отметить, что если массивы

$\{x_i, \Delta t_i\}_{i=1}^M$ записаны в память ЭВМ, то задачи определения Δt_{min} и λ тривиальны.

Аналитическое же определение интенсивности потока для произвольного вида неравномерной дискретизации, особенно для не дифференцируемых процессов с законами распределения, отличными от нормального, встречает определенные трудности. Следовательно, интенсивность потока необходимо определять для конкретного вида неравномерной дискретизации.

Так, например, для спорадической дискретизации при числе уровней квантования $6 \leq r \leq 300$, как показано в [31] на обработке большого экспериментального материала, удовлетворительная аппроксимация достигается с интенсивностью λ , определяемой выражением

$$\lambda = \frac{\sqrt{-\rho_x''(0)}}{\pi} \sum_{i=1}^r \exp \left[-0,5 \left(\frac{iq - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (1.174)$$

где q - шаг квантования.

Для АВД ПНП с фиксированной апертурой (ФА) поток является простейшим [24] с интенсивностью

$$\lambda = \frac{M \left[\left| \overset{\circ}{x}' \right| \right]}{\varepsilon} = \frac{k_{\phi} \sigma_{x'}}{\varepsilon}, \quad (1.175)$$

где k_{ϕ} - коэффициент формы производной процесса;

$\sigma_{x'}$ - СКО производной процесса.

Из анализа выражения (1.171) видно, что интенсивность при заданном значении уставки ε определяется, в основном, значением $\sigma_{x'}$, т.к. значения k_{ϕ} для произвольных законов изменяются в небольших пределах (см. таблицу 1.9) [31].

Таблица коэффициентов формы и пикфактора
для типовых законов распределения

Таблица 1.9

№	Наименование закона	$k_{\phi} = M \left[\left \overset{\circ}{x}' \right \right] / \sigma_{x'}$	$\eta = x_{\text{пик}} / \sigma_x$	P_d
1	Нормальный	0,7979	3	0,9973
2	Равномерный	0,8660	1,7320	1
3	Треугольный	0,8165	2,4495	1
4	Антимодальный I	0,9428	1,4142	1
5	Антимодальный II	0,9802	1,2603	1
6	Трапецевидный	0,8391	2,3238	1
7	Рэля	1	2,9735	0,995
8	Экспоненциальный	0,7358	5,2983	0,995
9	Лапласа	0,7071	3,7465	0,995

Выражения $\sigma_{x'}$ для типовых дифференцируемых моделей КФ приведены в таблице 1.10.

СКО дифференцируемых процессов

Таблица 1.10

N	$K_x(\tau)$	$\sigma_{x'}$
1	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\alpha \sigma_x$
2	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{3} / 3$
3	$\sigma_x \exp(-\alpha^2 \tau^2)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{2}$
4	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$

Для недифференцируемых случайных процессов в явном виде значение $\sigma_{x'}$ определить нельзя.

Однако воспользовавшись аппроксимативным подходом, возможно определение параметров аппроксимирующего выражения $K_a(\tau)$, удовлетворяющего, например, минимуму квадратической погрешности аппроксимации [12, 26, 27], а затем по параметрам модели определение $\sigma_{x'}$.

Так, например, при аппроксимации $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ моделью вида $K_a(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta^2 \tau^2)$ связь параметров имеет вид $\beta = 0,935 \alpha$. (1.176)

Результаты теоретического определения интенсивности для адаптивно-временной дискретизации предсказателем пулевого порядка с плавающей апертурой (АВД ПНП ПА) λ_T , экспериментального, полученного методом имитационного моделирования λ_m , а также погрешности оценки λ приведены в таблице 1.11.

Интенсивность потока АВД ПНП ПА для случайного процесса

$$c K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{ для } \gamma = \varepsilon / \sigma_x = 0,5$$

Таблица 1.11

№	k_ϕ	λ_T	λ_m	$\delta = (\lambda_m - \lambda_T) / \lambda_m$
1	0,7979	2,1101	2,1778	0,0705
2	0,8148	2,1547	2,1589	0,0019
3	0,8283	2,1747	2,2124	0,0173
4	0,8225	2,1752	2,2247	0,0228
5	0,7954	2,1035	2,1673	0,0303
6	0,7489	1,9805	1,9324	0,0243

Из анализа результатов видно, что независимо от вида закона распределения входного процесса, задаваемого k_ϕ , погрешность оценки λ находится в допустимых пределах.

Аналогичным образом, воспользовавшись подпрограммами аппроксимации КФ параметрическими моделями [26, 27], возможно определение и других моделей КФ.

Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$, разряжены p -преобразованием [31].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{j,i} - \xi_{j,0}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.177)$$

где Y_i - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p в соответствии с выражением (1.131), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{j,i} - \xi_{j,i-1} \quad (1.178)$$

Плотность распределения вероятностей величины Z находится по формуле полной вероятности с гипотезами $H_n (Y = n)$ в виде [31]

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_z^{(n)}(z) p q^{n-1}, \quad (1.179)$$

где $f_z^{(n)}(z)$ - плотность распределения суммы n независимых величин Δt_{ji} .

Пусть ξ распределена по нормальному закону $m_\xi = 0$ и $D_\xi = \sigma_\xi^2$. Тогда выражение (1.164) примет вид:

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n \sigma_\xi}} \exp\left(-\frac{(z - n\Delta t_0)^2}{4n\sigma_\xi^2}\right) p q^{n-1}, \quad (1.180)$$

соответствующая функция распределения -

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n\Delta t_0}{\sqrt{2n\sigma_\xi}}\right), \quad (1.181)$$

а математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\begin{cases} m_z = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_z^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{p} + \frac{\Delta t_0^2}{p^2}. \end{cases} \quad (1.182)$$

Плотность распределения времени возвращения определяется в виде:

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n\Delta t_0}{\sqrt{2n\sigma_\xi}}\right). \quad (1.183)$$

Найдем законы распределения $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$, воспользовавшись ее характеристической функцией

$$\varphi_{\zeta_n}(u) = \left[\frac{p \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)}{1 - q \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)} \right]^n \quad (1.184)$$

Отсюда плотность распределения вероятностей

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k \sigma_\xi}} \exp\left(-\frac{(\zeta_n - k\Delta t_0)^2}{4k\sigma_\xi^2}\right) C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \quad (1.185)$$

а функция распределения примет вид:

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \Phi\left(\frac{\zeta_n - k\Delta t_0}{\sqrt{2k\sigma_\xi}}\right). \quad (1.186)$$

В соответствии с выражением (1.113) L_{\max} определяется из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \Phi\left(\frac{\tau_{k \max} - k\Delta t_0}{\sqrt{2k\sigma_\xi}}\right) = 1 - P_D. \quad (1.187)$$

Интервальная корреляционная функция с учетом выражения (1.112) примет вид:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \Phi\left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \Delta/2}{\sqrt{2r\sigma_\xi}}\right] - \Phi\left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \Delta/2}{\sqrt{2r\sigma_\xi}}\right] \right\}. \quad (1.188)$$

Если $\Delta = \Delta t_0$, то $C_x(J) = p$.

Минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, а коэффициент сжатия равен

$$k_{\text{сж}} = \frac{1}{p}. \quad (1.189)$$

Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой $\Theta_i = \xi_i$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Theta}(\Theta)$ разряжены p -преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (1.190)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{i=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (1.191)$$

Плотность распределения вероятностей Z определяется в соответствии с выражением (1.179).

Пусть ξ распределена по экспоненциальному закону. Тогда $f_z(z)$ с учетом (1.166) примет вид

$$f_z(z) = p\lambda \exp(-\lambda pz). \quad (1.192)$$

Из этого выражения видно, что все вероятностные характеристики аналогичны характеристикам простейшего потока с параметром λp для аддитивной случайной дискретизации (см. выражения (1.151), (1.153), (1.155), (1.157)).

Для гамма-распределения длительности интервалов Θ (см. (1.90)) плотность распределения

$$f_z(z) = p\alpha \lambda \exp(-\alpha \lambda z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha \lambda q z)^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.193)$$

функция распределения

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\nu[n\alpha, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.194)$$

математическое ожидание и дисперсия

$$\begin{cases} m_z = \frac{1}{p\lambda}; \\ \sigma_z^2 = \frac{\sigma_{\xi}^2}{p} + \frac{q}{\lambda^2 p^2}, \end{cases} \quad (1.195)$$

плотность распределения времени возвращения

$$\varphi(t) = \lambda p^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\nu[\alpha n, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.196)$$

Плотность и функция распределения вероятностей суммы n интервалов $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$ соответственно равны:

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{(\alpha \lambda)^{\alpha n} \zeta_n^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha \lambda \zeta_n); \quad (1.197)$$

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda \zeta_n]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.198)$$

С учетом выражений (1.113) и (1.198) L_{max} находится из уравнения

$$\sum_{k=L_{max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{max}-1} p^{L_{max}} q^{k-L_{max}} \frac{v[\alpha L_{max}, \alpha \lambda \tau_{k_{max}}]}{\Gamma(\alpha L_{max})} = 1 - P_D \quad (1.199)$$

с использованием одного из численных методов [12].

Интервальная корреляционная функция определяется в виде:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \frac{v\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} - \frac{v\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} \right\}. \quad (1.200)$$

Интенсивность и минимальный интервал дискретизации определяются как и для модели аддитивной случайной дискретизации, а коэффициент сжатия для рассматриваемых законов равен:

$$k_{сж} = \frac{1}{p \lambda \Delta t_0}. \quad (1.201)$$

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они перекрывают широкий класс практических задач.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

2.1. Моделирование временных рядов типа «белого» шума

Как правило, в качестве первичного случайного процесса, с помощью которого осуществляется моделирование образцовых сигналов, является процесс типа «белого» шума, распределенный по равномерному или нормальному законам. В дальнейшем для получения случайного сигнала с заданными статистическими характеристиками его подвергают различным линейным и нелинейным преобразованиям. Существуют различные способы получения первичного процесса:

- с использованием физических датчиков случайных процессов, построенных на различных физических эффектах;
- с помощью специальных программ формируется достаточно большая последовательность псевдослучайных чисел, удовлетворяющая принятым тестам случайности - программный;
- с использованием таблиц случайных чисел - табличный;
- с использованием специального процессора для генерирования псевдослучайной последовательности - программно-аппаратный.

В таблице 2.1 указаны достоинства и недостатки методов генерирования.

Сравнительная оценка методов генерирования случайных процессов
(последовательностей)

Таблица 2.1

Метод	Достоинства	Недостатки
Датчиков	Запас чисел неограничен. Сверхбыстрое получение	Нестабильность физических генераторов. Невозможность повторения последовательности. Необходимость специальной аппаратуры.
Программный	Проверка однократная. Возможность воспроизведения чисел. Простота реализации. Отсутствие специальной аппаратуры	Запас чисел ограничен (периодичность процесса). Сравнительно малое быстродействие.
Табличный	Высокое быстродействие. Хорошая случайность. Возможность воспроизведения чисел.	Запас чисел ограничен. Большой объем занимаемой памяти.
Программно-аппаратный	Высокое быстродействие. Возможность воспроизведения чисел.	Запас чисел ограничен. Требуется специальный процессор.

Из анализа таблицы 2.1 видно, что программный метод генерирования псевдослучайных последовательностей (ПСП) самый удобный с практической точки зрения.

Обычно современные ЭВМ в математическом обеспечении имеют встроенную функцию генерирования ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне $[0,1]$, используя которую можно решать большинство задач моделирования образцовых сигналов. Но иногда возникает необходимость генерирования независимых случайных процессов. Наилучшие из известных сегодня датчиков случайных чисел представляют частные случаи схемы, предложенной Д.Ч. Леммером [17]:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, \quad (2.1)$$

где $x_0 > 0$ - начальное значение;

$a > 0$ - множитель;
 $c \geq 0$ - приращение;
 m - модуль ($m > x_0, m > a, m > c$).

Обычно m задается на единицу больше максимального числа, которое можно записать в машинном слове.

Такая последовательность называется линейной конгруэнтной последовательностью. Для получения равномерно распределенной в интервале $[0,1]$ последовательности необходимо выполнить преобразование:

$$u_n = \frac{x_n}{m}. \quad (2.2)$$

Конгруэнтные последовательности всегда «зацикливаются». Это свойство присуще всем последовательностям вида $x_{n+1} = f(x_n)$. Повторяющийся цикл называется периодом.

Если $c = 0$, то процесс генерации случайных чисел происходит несколько быстрее, но в то же время ограничение $c = 0$ уменьшает длину периода. Методы генерирования с $c = 0$ и $c \neq 0$ называют соответственно: мультипликативным конгруэнтным и смешанным конгруэнтным методами.

Рекомендации по выбору числа m сводятся к следующему - m необходимо выбрать достаточно большим, так как длина периода не может быть больше m . Другой фактор, влияющий на выбор m , - это скорость выработки чисел. Так как деление - сравнительно медленная операция, то ее можно избежать. Для этого необходимо выбрать m равным размеру слова. При выборе m , равному максимальному целому числу, размещающемуся в машинном слове, младшие разряды числа x намного менее случайны случайных старших. Если m равно максимальному целому числу в машинном слове ± 1 , то такой ситуации не возникает. Но для большинства приложений младшие разряды не существенны, и выбор m равным максимальному целому числу в машинном слове является вполне удовлетворительным, т.е. можно принять $m = 2^l$, где l - длина машинного слова.

Выбор множителя a : для любой последовательности, предназначенной для использования в качестве источника случайных чисел, важен большой период.

Теорема 1. Длина периода линейной конгруэнтной последовательности равна m тогда и только тогда, когда

1. c и m - взаимно простые числа;
2. $b = a - 1$ - кратно p для любого простого p , являющегося делителем m ;
3. b кратно 4, если m кратно 4.

Замечание: когда период имеет длину m , каждое число от 0 до $m - 1$ встречается за период ровно один раз, следовательно, выбор x_0 не влияет в этом случае на длину периода.

Мультипликативный метод

$$x_{n+1} = a x_n \pmod{m}; \quad (2.3)$$

при $m = 2^{l-2}$ получается последовательность с m периодом, алгоритм построения которой приведен ниже [17]:

1. выбрать в качестве x_0 произвольное нечетное число;
2. $a = 8t \pm 3$, где t - любое целое положительное число;

3. вычислить ax_0 ; полученное число содержит не более $2l$ значащих разрядов; взять l младших значений разрядов в качестве x_1 , остальные отбросить;
4. $u_1 = x_1 / m$;
5. $x_{i+1} = l$ младших разрядов ax_i ; вернуться к пункту 4.

Смешанный метод

Преимущество данной процедуры в том, что можно так подобрать a и c , что эта формула определит последовательность, пробегающую все целые значения от 0 до $m-1$. Т.е. если выполняются условия теоремы 1, то можно получить ПСП с периодом, равным 2^l .

С вычислительной точки зрения смешанный метод сложнее на одну операцию сложения мультипликативного метода. Однако свобода выбора параметра c открывает дополнительные возможности уменьшения сериальной автокорреляции.

Общие рекомендации по выбору параметров сводятся к следующему:

1. множитель a не должен быть близок к простому рациональному кратному модуля m , в противном случае возникает сериальная корреляция пар чисел;
2. множитель a не должен быть близок к простому рациональному кратному квадратного корня модуля m ; эта близость приведет к сериальной корреляции троек чисел;
3. не следует выбирать множитель a так, чтобы он содержал мало единиц в двоичном представлении;
4. множитель a должен быть достаточно велик;
5. особенно внимательно надо относиться к выбору множителя a при реализации генератора на ЭВМ с малой длиной слова, чтобы обеспечить хорошие статистические характеристики генератора, в этом случае может понадобиться представление чисел с двойной точностью.

Период линейной конгруэнтной последовательности чрезвычайно велик. Обычно, если m приближается к длине машинного слова, то период $\approx 10^9$ и больше.

Так как генератор «белого шума» является базовым генератором при решении разнообразных задач, связанных с генерированием случайных величин, процессов и последовательностей с заданными статистическими характеристиками проведем его исследование.

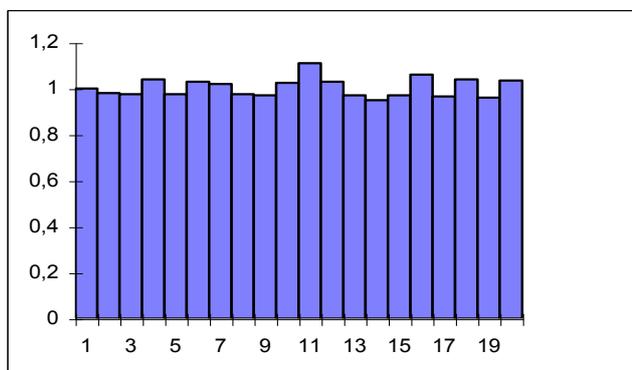


Рисунок 2.1 - Гистограмма «белого» шума

На рис 2.1. представлена гистограмма генератора «белого» шума с равномерным законом распределения в диапазоне $[0,1]$, построенная для $N=10000$.

Результаты обработки данных и параметры закона распределения представлены в таблице 2.2. Вычисленное значение χ^2 соответствует достоверности $P=0,6$.

Δ	x_{min^n}	x_{max}	m_x	D_x	a	b	χ^2
0,05	0,00002	0,9999	0,4999	0,0834	-0,0003	1,003	15,66

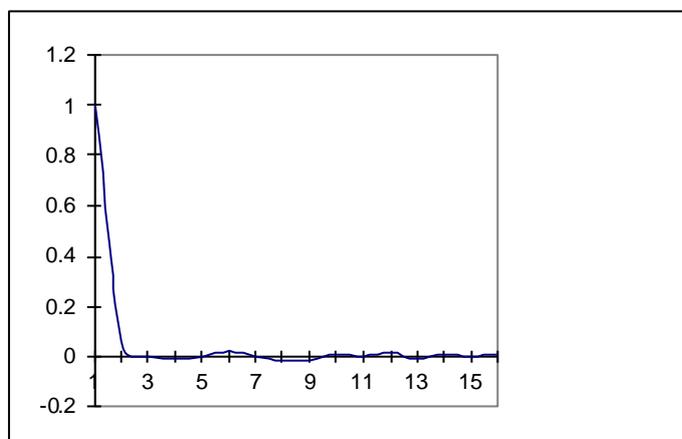


Рисунок 2.2 - Корреляционная функция «белого» шума

Нормированная корреляционная функция генератора «белого» шума представлена на рис. 2.2.

Результаты исследования показывают неидеальность генератора «белого шума». Однако, как показывает практика, точностные характеристики генератора являются достаточными при решении разнообразных задач моделирования входных воздействий [28 - 30].

2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения

Для генерирования ПСП с заданным законом распределения (основные виды моделей приведены в приложении П.1) применяются различные методы [17, 53]:

- метод нелинейного преобразования (обратной функции);
- приближенный метод (метод кусочно-линейной аппроксимации закона распределения);
- метод исключения (метод Неймана) и т.д.

Рассмотрим более подробно первые два.

2.2.1. Метод обратной функции

Для решения задачи моделирования ПСП с заданным законом распределения случайный процесс подвергается нелинейному преобразованию. Теоретической базой для определения вида и характеристик нелинейной функции является теория функций случайного аргумента [50 - 51].

Допустим, случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f_x(x)$, а необходимо получить выходную величину Y с плотностью распределения вероятностей $f_y(y)$. Таким образом, мы должны определить вид нелинейной функции преобразования $y = g(x)$.

Известно, что

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (2.4)$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.5)$$

Допустим, что обратная функция преобразования

$$x = t(y). \quad (2.6)$$

Тогда

$$t'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.7)$$

Если в качестве входной ПСП выбрать «белый шум» с $f_x(x)=1$, то

$$x = t(y) = F_y(y). \quad (2.8)$$

Отсюда можно определить вид нелинейной функции преобразования

$$y = g(x) = F_y^{-1}(x). \quad (2.9)$$

Графическая интерпретация метода инверсного преобразования представлена на рис. 2.3.

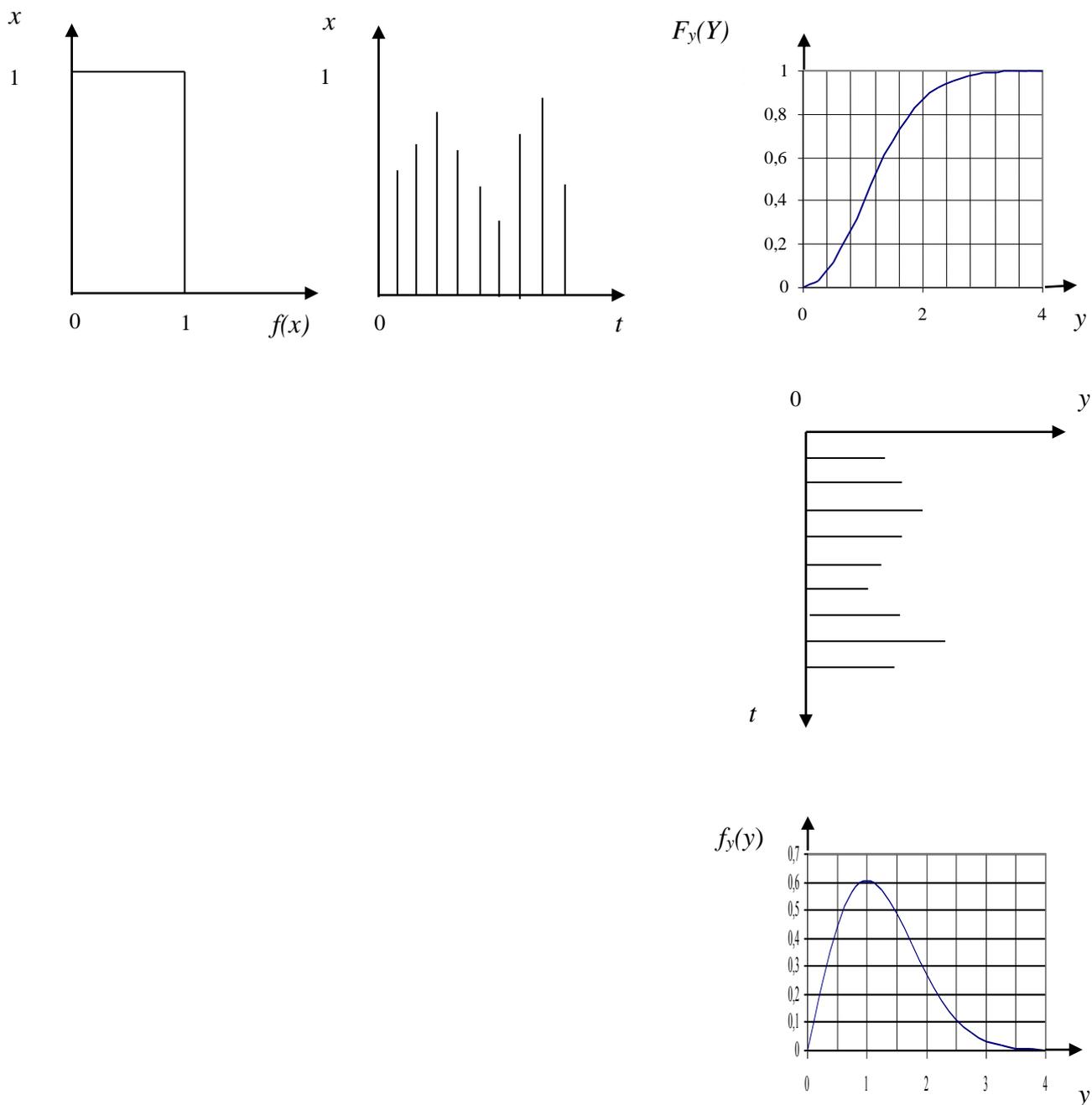


Рисунок 2.3 - Моделирование ПСП с заданным видом закона распределения вероятностей

Обычно можно найти аналитическое решение $F_y^{-1}(x)$ только для ограниченного числа случаев.

2.2.2. Приближенный метод моделирования

Для большинства случаев интегральную функцию нельзя найти аналитически, и тогда применяют приближенный метод моделирования, который основан на использовании ПСП с равномерным законом распределения, кусочно-линейной интерполяции функции распределения и решении задачи обратной интерполяции.

При кусочно-линейной интерполяции функцию распределения представим в виде:

$$F_y(y_i) = \sum_{l=1}^L \left\{ F_y(y_{l-1}) + \frac{y_i - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} [F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})] \right\} \mathbf{1}(y_{l-1} \leq y_i < y_l), \quad (2.10)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$.

Отсюда найдем обратную функцию:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{F_y(y_i) - F_y(y_{l-1})}{F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbf{1}[F_y(y_{l-1}) \leq F_y(y_i) < F_y(y_l)]. \quad (2.11)$$

С учётом того, что при генерировании ПСП $x_i = F_y(y_i)$ получим,

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[y_{l-1} + \frac{x_i - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbf{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l). \quad (2.12)$$

Так как координаты узловых точек $F(y_l)$ рассчитываются заранее, окончательно получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L [y_{l-1} + (x_i - x_{l-1})A_l] \mathbf{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l), \quad (2.13)$$

где $A_l = \frac{y_l - y_{l-1}}{x_l - x_{l-1}}$.

Отсюда следует, что необходимо, задавшись допустимой погрешностью восстановления $F_y(y)$ δ , видом интерполяции, определить узловые точки $\{y_l, F_y(y_l)\}$ и A_l . Затем, воспользовавшись формулой (2.11), сгенерировать ПСП с требуемым законом распределения.

Выбор допустимой погрешности аппроксимации функции распределения $F_y(y)$ определяется в зависимости от N - числа генерируемых чисел ПСП, допустимого уровня значимости P , выбранного критерия и его значения.

Наиболее целесообразно в этом случае применить критерий Колмогорова [5], связанный с погрешностью восстановления:

$$\delta = \max |F_y^{(N)}(y) - F_y(y)|, \quad (2.14)$$

где $F_y^{(N)}(y)$ - функция распределения, определяемая экспериментально на выборке размером N ;

$F_y(y)$ - теоретическая функция распределения.

Для определенной погрешности восстановления δ и объема выборки N определяется

$$\lambda = \delta \sqrt{N}. \quad (2.15)$$

Гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P

$$\lambda < \lambda_{1-P}. \quad (2.16)$$

Задавшись допустимым уровнем значимости, например $P=0,3$, определим $\lambda = 0,97$. Гипотеза принимается, если $\lambda < 0,97$. Так, если необходимо сгенерировать $N = 5000$ чисел, допустимая погрешность восстановления $\delta = 0,01$.

Для расчёта узловых точек функции распределения $F_y(y_l)$ необходимо выбрать вид интерполяции, определить диапазон изменения $y \in [y_{min}, y_{max}]$ при заданной доверительной вероятности, интервал дискретизации аргумента Δy и число узловых точек M :

$$M = \text{ent} \left[\frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y} \right] + 1. \quad (2.17)$$

В случае применения линейной интерполяции

$$\Delta y = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]_{max}}}. \quad (2.18)$$

При генерировании ПСП, т.е. решении задачи обратной интерполяции, возможны три варианта:

1. $\Delta y_l = \text{const}, \Delta x_l = \text{var}$ (см. рис.2.4. а));
2. $\Delta y_l = \text{var}, \Delta x_l = \text{const}$ (см. рис.2.4. б));
3. $\Delta y_l = \text{var}, \Delta x_l = \text{var}$ (см. рис.2.4 в)).

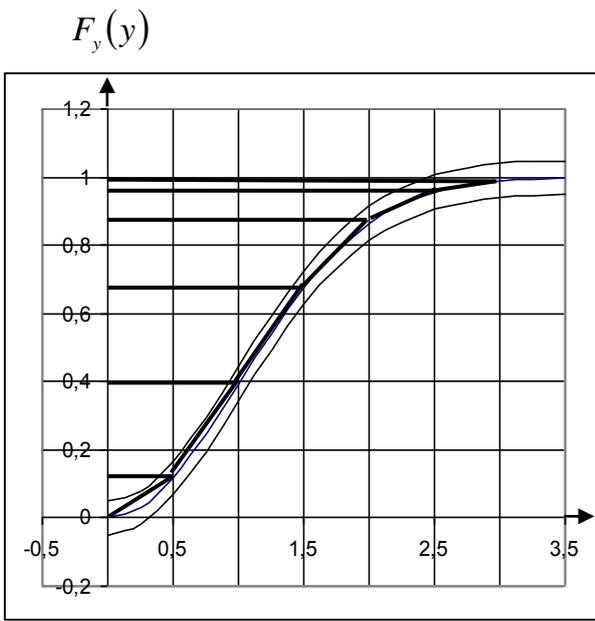
В первом варианте упрощается процедура нахождения узловых точек (интервал дискретизации определяется в соответствии с выражением (2.18)), но больше время генерирования, т.к. необходимо определять участок интерполяции. Во втором - сложнее процедура определения узловых точек, но меньше время генерирования, т.к. упрощается процедура нахождения участка интерполяции. Заметим, что решение третьей задачи аналогично решению задачи адаптивно-временной дискретизации сигнала при выбранной модели восстановления [1]. В этом случае интервал Δy_l определяется в соответствии с выражением:

$$\Delta y_l = \sqrt{\frac{8\delta}{F_y''[(y)]}}. \quad (2.19)$$

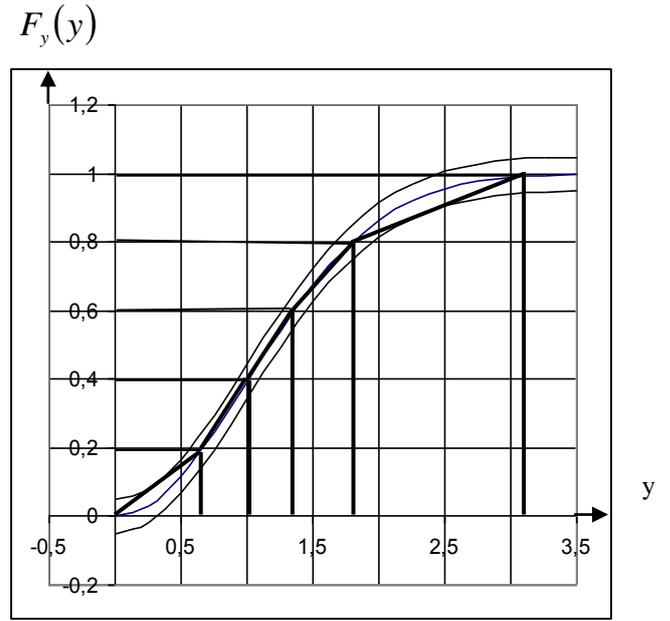
Достоинствами данного метода являются:

- возможность применения его для моделирования случайных величин со сколь угодно сложным законом распределения;
- значительно меньшее время генерирования ПСП по сравнению с методом инверсного преобразования за счёт уменьшения количества интервалов.

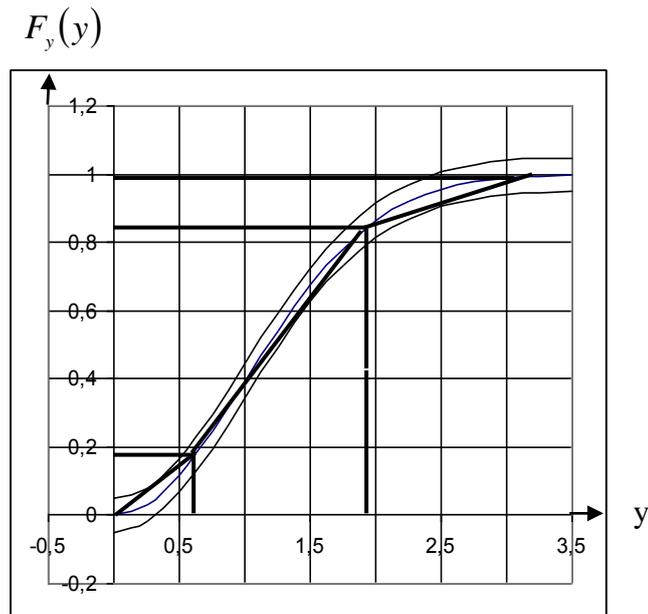
Недостаток - необходимость проведения некоторой подготовительной работы перед непосредственным применением процедуры генерирования ПСП (разбиение области распределения y на интервалы).



а) $\Delta y = const$



б) $\Delta x = const$



в) $\Delta y_i = var, \Delta x_i = var$

Рисунок 2.4 - Формирование параметров кусочно-линейной модели

В качестве примера рассмотрим генерирование ПСП, имеющей распределение модуля многомерного вектора:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \frac{\partial \left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial \left(\frac{n}{2} \right)}, & y > 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\partial \left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2} \right) = \int_0^{\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-t} t^{\left(\frac{n}{2} - 1 \right)} dt. \quad (2.21)$$

Для генерирования ПСП необходимо задать параметры распределения. Пусть $\sigma = 1$, $n = 4$. Тогда выражение (2.20) примет вид:

$$F_y(y) = \int_0^{y^2/2} e^{-t} t dt. \quad (2.22)$$

Результаты расчёта координат узловых точек для приведенной погрешности интерполяции 1% приведены в таблице 2.3.

Координаты узловых точек

Таблица 2.3

y	0	0,7	1,3	2,5	3,1	3,9	4,2	4,3
$F_y(y)$	0	0,026	0,207	0,819	0,952	0,996	0,998	0,999

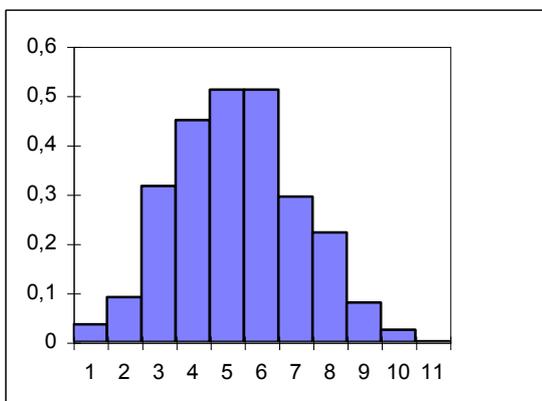


Рисунок 2.5 - Гистограмма ПСП

Из таблицы 2.3 видно, что кривая распределения имеет восемь узлов и семь линейных участков.

Гистограмма сгенерированной ПСП приведена на рис. 2.5.

Для проверки достоверности результатов генерирования использовался критерий Пирсона [5], а сами результаты представлены в таблице 2.4.

Результаты расчётов

Таблица 2.4

J	p_i	p_i^*	p_i^*/h	$(p_i^* - p_i)/p_i$
(0- 0,4)	0,00316	0,015	0,036	0,0114335
(0,4 - 0,8)	0,039	0,036	0,091	0,0001030
(0,8 - 1,2)	0,121	0,126	0,316	0,0002900
(1,2 - 1,6)	0,215	0,181	0,450	0,0056300
(1,6 - 2,0)	0,217	0,205	0,512	0,0007500
(2,0 - 2,4)	0,192	0,205	0,512	0,0008920
(2,4 - 2,8)	0,115	0,118	0,295	0,0000900

(2,8 - 3,2)	0,061	0,088	0,222	0,0012608
(3,2 - 3,6)	0,026	0,032	0,080	0,0010600
(3,6 - 4,0)	0,008	0,010	0,025	0,0003000
(4,0 - 4,4)	0,001	0,0009	0,0013	0,0020000

Рассчитанное значение $\chi^2 = 1,54$, число степеней свободы $k = 11 - 3 = 8$. Так как $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$, сгенерированная ПСП согласуется с требуемым законом распределения.

Для сокращения времени генерирования увеличим погрешность интерполяции до тех пор, пока критерий согласия χ^2 перестанет выполняться.

Численные значения узлов интерполяции для приведенной погрешности 2% представлены в таблице 2.5.

Узлы интерполяции

Таблица 2.5

y	0	0,98	2,55	3,75	4,3
$F_y(y)$	0	0,080	0,850	0,985	0,999

Проведя аналогичные расчёты, получим, что, и условие $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$ выполняется.

Результаты расчёта $\chi^2 = 12,9$ для приведенной погрешности 3% (узлы функции распределения представлены в таблице 2.6), показывают, что условие $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$ выполняется.

Узлы интерполяции

Таблица 2.6

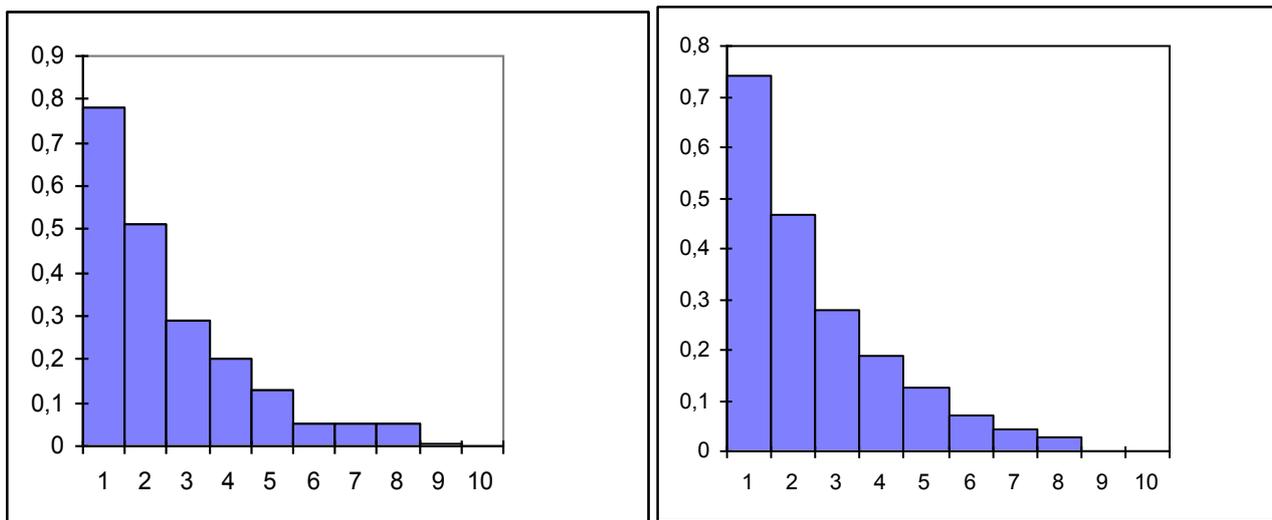
y	0	1,1	3,0	4,3
$F_y(y)$	0	0,12	0,94	0,999

При дальнейшем увеличении приведенной погрешности интерполяции критерий согласия нарушается.

Проведем исследование генераторов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. В отличие от предыдущего примера, в этом случае возможно применения метода инверсного преобразования. Результаты сравним с приближенными методами генерирования.

На рис. 2.6 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием инверсной функции. В этом случае $\chi^2 = 7,579$, $r = 7$, $P = 0,4$.

На рис. 2.6 б) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования ПСП $\Delta x = const$. Для рассматриваемого примера $\chi^2 = 7,054$, $r = 7$, $P = 0,4$.



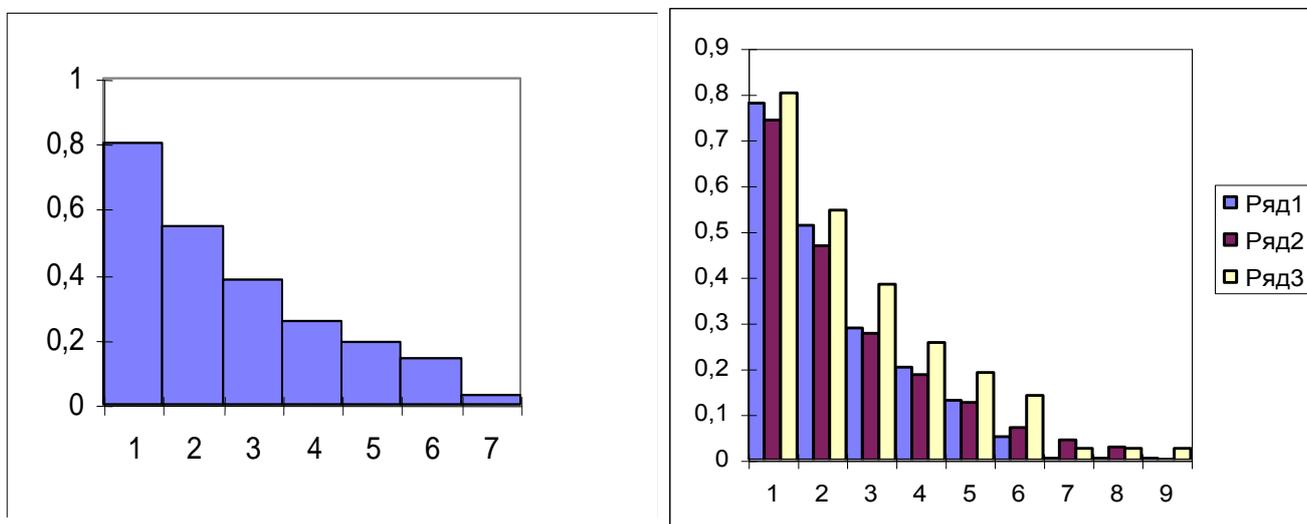
а) с использованием инверсной функции

б) $\Delta x = const$

Рисунок 2.6 - Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.7 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования $\Delta y = const$. Для рассматриваемого примера $\chi^2 = 7,33$, $r = 5$, $P = 0,2$.

На рис. 2.7 б) приведены все три гистограммы, полученные в ходе генерирования с использованием различных методов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. Ряд 1 - инверсный метод преобразования, ряд 2 - $\Delta x = const$, ряд 3 - $\Delta y = const$.



а) $\Delta y = const$

б) сравнение гистограмм

Рисунок 2.7 - Гистограммы экспоненциального распределения

Таким образом, результаты экспериментальных исследований различных генераторов экспоненциального распределения подтверждают возможность применения приближенного метода генерирования ПСП.

Проведенные исследования для других законов распределения показали, что для обеспечения требуемого качества генерирования ПСП (в смысле критерия Пир-

сона) достаточно осуществить интерполяцию функции распределения с приведенной погрешностью 1%. В этом случае количество узлов интерполяции для большинства законов меньше 10, что значительно уменьшает общее время моделирования.

Следует отметить, что в ряде случаев при генерировании ПСП более целесообразно применять более простые методы. Так, например, при генерировании ПСП, распределенной по нормальному закону, можно воспользоваться теоремой Ляпунова [5].

Практика показала, что ПСП можно определить в виде

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n/2}{(n/2)^{1/2}}, \quad (2.23)$$

где x_i - случайная величина, распределенная по равномерному закону, а n находится в диапазоне $6 \leq n \leq 12$.

Для получения временного ряда из сгенерированной ПСП необходимо задать интервал дискретизации Δt_0 . Так как отсчеты ПСП некоррелированы (см. рис. 2.2), интервал дискретизации может быть любым. Его величина устанавливается исследователем самостоятельно в зависимости от характера решаемой задачи.

На рис. 2.8 приведены примеры реализаций ПСП с заданными законами распределения, полученные с помощью автоматизированной системы [26, 27] и соответствующие им гистограммы. Забегая вперед, отметим, что с помощью этой системы возможно определение аналитических выражений законов распределения сгенерированной ПСП и проверка качества генерирования с помощью критериев согласия.

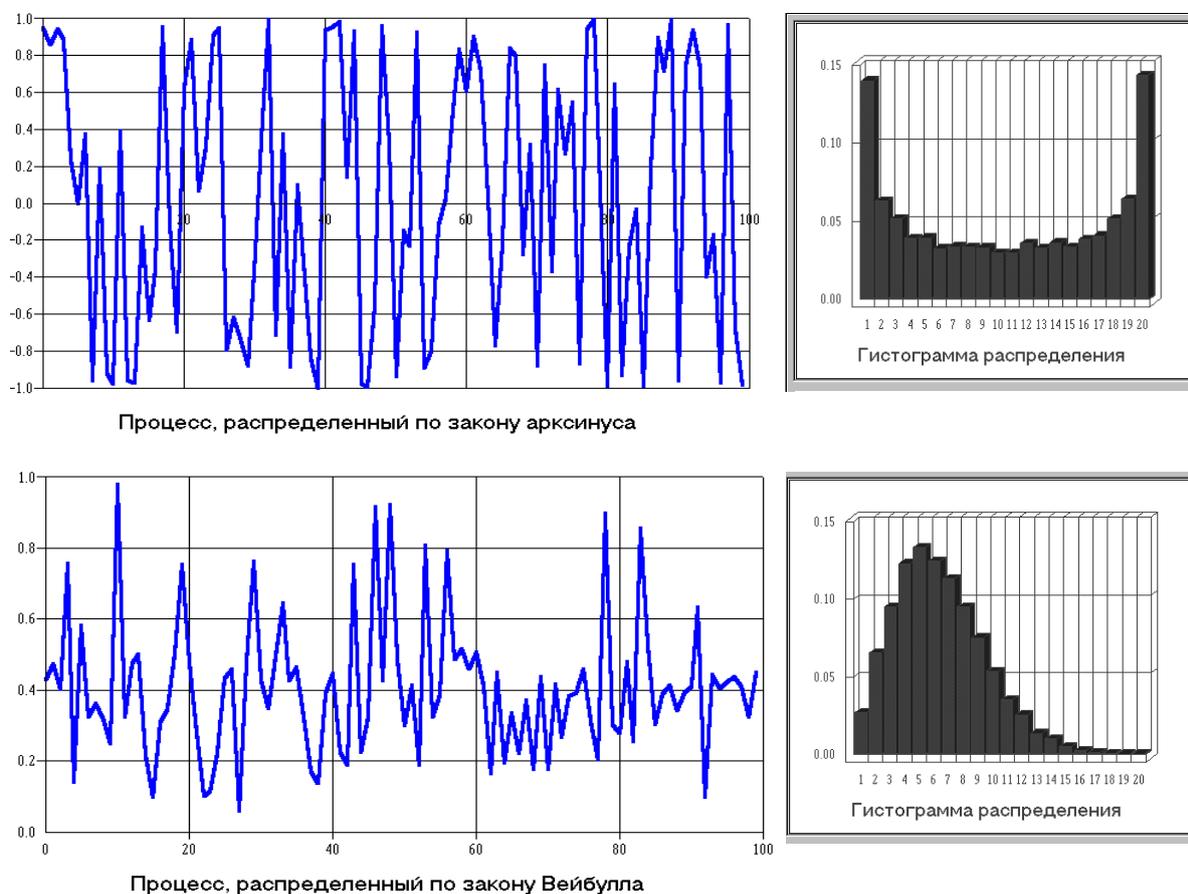


Рисунок 2.8 - ПСП с заданным видом закона распределения

2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами

Приведенные основные соображения, рассмотренные в подразделе 2.2, позволяют легко генерировать на ЭВМ реализации различных однородных потоков событий. Формально моделирование подобных потоков мало, чем отличается от моделирования случайных величин.

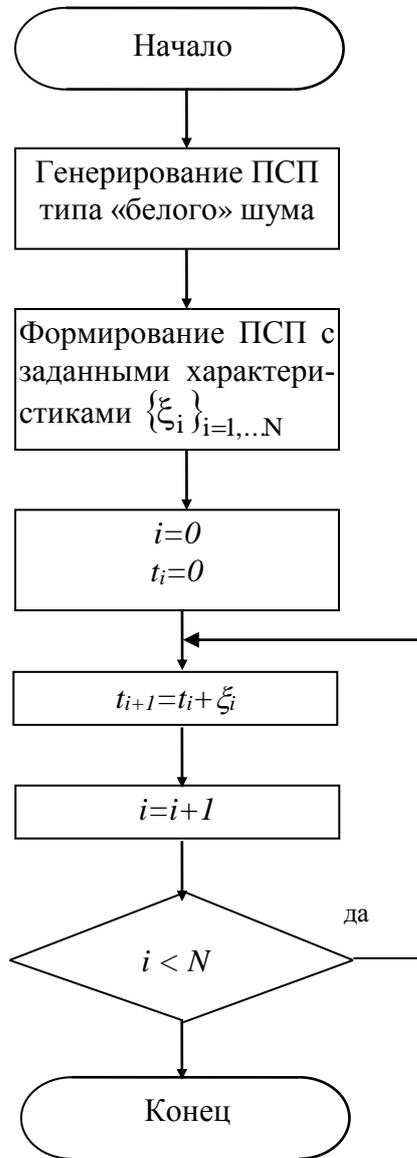


Рисунок 2.9. Блок-схема моделирования потока событий

Для этого необходимо сгенерировать случайные величины $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,N}$ с законом распределения $f_\xi(\xi)$. Суммирование получаемых реализаций позволит определить моменты наступления событий в системе (см. рис. 2.9):

$$t_{i+1} = t_i + \xi_i. \quad (2.24)$$

Отметим, что подобные потоки относятся к классу потоков с аддитивной дискретизацией. В качестве законов распределения $f_\xi(\xi)$ в зависимости от решаемой задачи могут использоваться самые различные законы:

- экспоненциальный;
- распределение Эрланга;
- равномерное распределение;
- треугольное распределение 1-го и 2-го типов и т.п.

Для простейшего потока событий или потока Пуассона, широко применяемого на практике, число событий k , наступивших на интервале времени $[0, t]$ - дискретная случайная величина, определяемая законом распределения Пуассона:

$$P[k] = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

с параметром $a = \lambda t$, λ - интенсивность или параметр потока.

Следует, однако, помнить, что при таком способе моделирования потока разыгрывается лишь общее число событий на интервале $[0, t]$, а не каждое отдельное событие.

Формула (2.25) может быть распространена и на случай интервала времени $[t_1, t_2]$

$$P[k] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}. \quad (2.26)$$

При этом k - число событий, наступивших на интервале времени $[t_1, t_2]$.

Известно, что закон распределения интервалов простейшего потока экспоненциальный [9]:

$$f_\xi(\xi) = \lambda e^{-\lambda\xi}, \quad \lambda > 0, \xi > 0, \quad (2.27)$$

что дает более простой способ генерирования простейшего потока - формирование на ЭВМ дискретной случайной величины с законом распределения (2.27).

Следует заметить, что нередко моделирование случайных величин, определяющих поток событий в системе, проводится с использованием специальных методов. Так, например, моделирование случайных величин, распределенных по нормальному закону, законам Симпсона, более целесообразно проводить путем суммирования случайных величин, распределенных по равномерному закону, а для закона Эрланга - суммированием случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону.

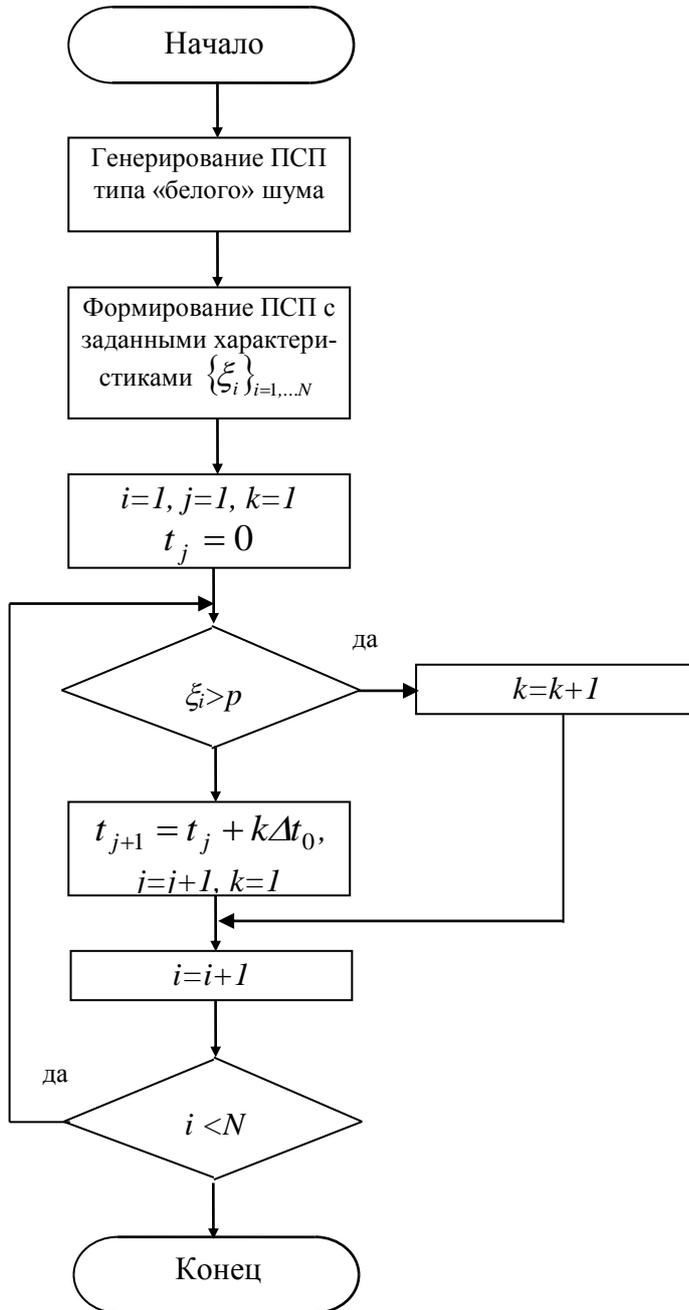


Рисунок 2.10 - Блок-схема моделирования регулярного потока событий с p-преобразованием

(см. рис. 2.11).

Рассмотрим особенности генерирования типовых рекуррентных потоков, модели которых представлены в подразделе 1.8.

- Значение $j+1$ -ого отсчёта регулярного потока с p -преобразованием (периодическая дискретизация со случайными пропусками наблюдений) определяется выражением:

$$t_j = \Delta t_0 \sum_{i=1}^j Y_i, \quad (2.28)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [31]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1}, m = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Выражение для генерирования удобнее представить в следующем виде

$$t_{j+1} = t_j + k\Delta t_0,$$

где k - случайная величина (см. рис. 2.10).

- Значение $i+1$ -ого отсчёта регулярного потока с «дрожанием» равно:

$$t_{i+1} = i\Delta t_0 + \xi_i. \quad (2.30)$$

где ξ_i - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_\xi(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне

$$\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2} \right)$$



Рисунок 2.11 - Блок-схема моделирования регулярного потока с «дрожанием»

модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_i = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$ разряжены p -преобразованием и т.д.

Следует подчеркнуть, что при моделировании потоков с аддитивной дискретизацией на ЭВМ всегда будет наблюдаться процесс «дрожания», обусловленный принудительной дискретизацией интервалов между событиями потока (конечная разрядная сетка). Это обстоятельство, когда им нельзя пренебречь, необходимо учитывать.

Таким образом, применяя в различных сочетаниях разработанные алгоритмы моделирования базовых потоков, можно генерировать более сложные случайные потоки (см. рис. 2.12).

Рассмотренные модели случайных потоков, естественно, не являются исчерпывающими. Часто при решении прикладных задач возникает необходимость в применении альтернирующих потоков, блок-схема программы генерирования которых приведена на рис. 2.13. В этом случае выражения для определения времени отсчёта в потоке определяются следующими выражениями:

Базовые модели рекуррентных потоков событий позволяют путём их сочетания получить более сложные модели потоков:

- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой ξ_i с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$ разряжены p -преобразованием;

- аддитивной случайной дискретизации с «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой ξ_i с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$ подвержены «дрожанию»;

- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений и «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, интервалы которой ξ_i с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$ разряжены p -преобразованием и подвержены «дрожанию»;

- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений, являющейся обобщением

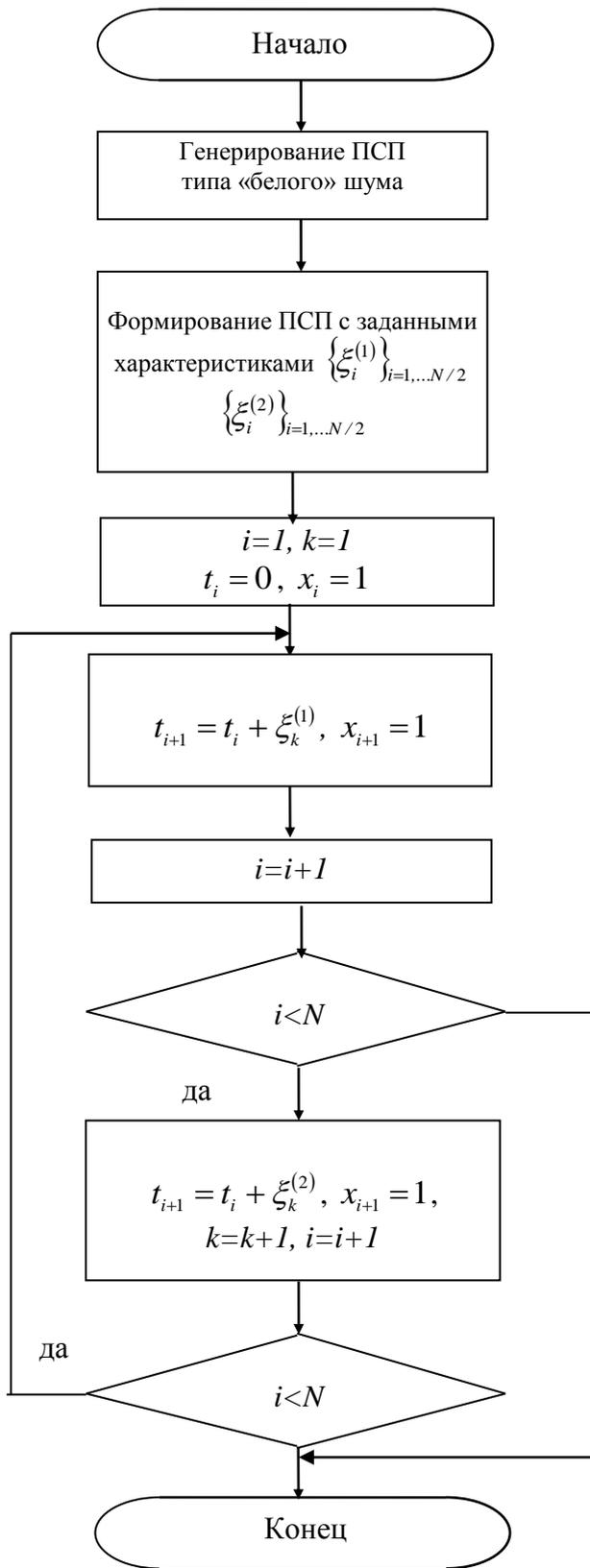


Рисунок 2.13 - Блок-схема моделирования альтернирующего потока событий

$$\begin{cases} t_1 = 0; \\ t_2 = t_1 + \xi_1^{(1)}; \\ t_3 = t_2 + \xi_1^{(2)}; \\ t_4 = t_3 + \xi_2^{(1)}; \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Воспользовавшись базовыми моделями рекуррентных потоков событий, можно получить более сложные модели альтернирующих потоков:

- альтернирующий поток с пропусками наблюдений;
- альтернирующий поток с «дрожанием»;
- альтернирующий поток с пропусками наблюдений и «дрожанием».

Отметим, что случайные потоки применяются при генерировании неэквидистантных временных рядов (см. рис. 1.8). Все рассмотренные модели позволяют описать неэквидистантные временные ряды с непреднамеренной дискретизацией. В случае преднамеренной нерегулярной дискретизации: адаптивно-временной, спорадической, адаптивной коммутации, - характеристики модели случайного потока будут зависеть от характеристик процесса, критерия восстановления, вида модели и т.д.

2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей

Как правило, при решении важных задач методом имитационного моделирования исследователь проверяет качество генерирования псевдослучайной последовательности. Эта задача решается с использованием критериев согласия. Отличие применения этих критериев при оценке качества генерирования от классической задачи сглаживания статистических рядов заключается в том, что исследователь априори задаёт закон распределения и требуемые значения параметров псевдослучайной (сгенерированной) последовательности, а при решении задачи сглаживания необходимо решить задачу идентификации закона распределения.

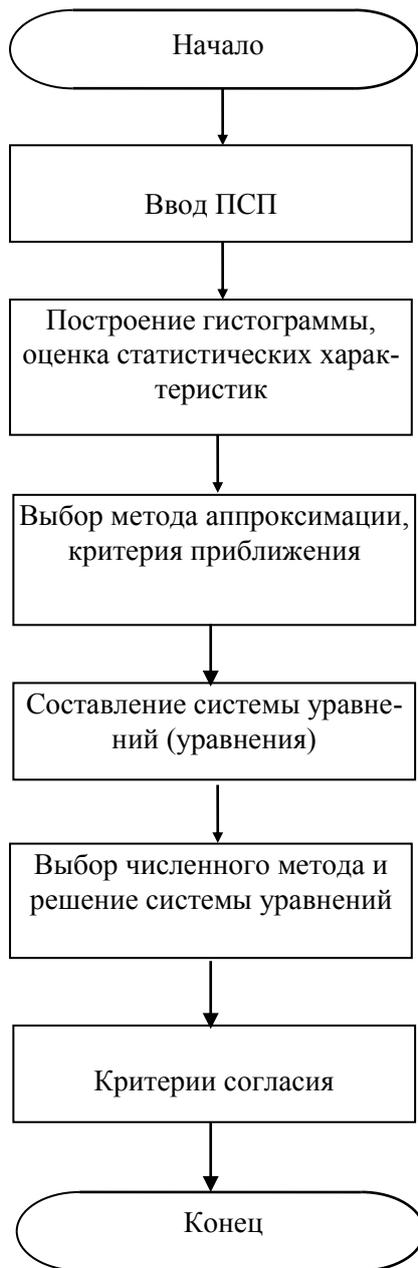


Рисунок 2.14 - Блок-схема проверки качества генерирования ПСП

При оценке качества генерирования псевдослучайной последовательности в качестве теоретического закона распределения возможно использование:

1. заданного закона распределения с заданными параметрами;
2. заданного закона распределения с уточненными параметрами путём решения задачи аппроксимации закона распределения тем или иным способом.

Рассмотрим последовательность этапов решения задачи оценки качества генерирования применительно ко второму случаю, как более общему (см. рис. 2.14).

После ввода исходных данных первым шагом в решении этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_i\}_{i=1}^N$. Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. определить диапазон изменения статистического ряда $x_{min} - x_{max}$.
2. определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{M}, \quad (2.32)$$

где M - количество дифференциальных коридоров [5].

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в j -ый дифференциальный коридор:

$$\hat{p}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{Ent} \left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x} \right] + 1 = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.34)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что $\delta_{i,j+1} = 1/2$, если $x_i = j\Delta x \cap x \neq x_{\min}$, т.е. в этом случае в j и $j+1$ коридоры добавляется по $1/2$.

4. Если частота попадания в какой-либо k -ый дифференциальный коридор мала ($p_i < 0,01 \div 0,02$), для уменьшения влияния случайности его объединяют с $k+1$ коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 2.7), где $\hat{h}_j = \hat{p}_j / \Delta x_j$.

Статистический ряд

Таблица 2.7

\hat{p}_j	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j\Delta x_j$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
\hat{h}_j	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

После построения гистограммы и оценки статистических характеристик решают задачу уточнения параметров распределения, используя тот или иной метод аппроксимации закона распределения [27].

Заключительным этапом решения задачи является проверка качества генерирования с использованием критериев согласия. Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу H , состоящую в том, что случайная величина X подчиняется заданному закону распределения. Введем случайную величину U , являющуюся мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины $f_u(u)$ зависит как от закона распределения случайной величины X , так и от числа опытов N . Если гипотеза H верна, то $f_u(u)$ определяется законом распределения $f_a(x)$ и числом опытов N .

Вычислим вероятность события $P(u \leq U) = P_d$. Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе H .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (\hat{p}_j - p_j)^2, \quad (2.35)$$

где c_j - веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ – теоретические вероятности, соответствующие \hat{p}_j .

Коэффициенты c_j вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность p_j велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить $c_j = N / p_j$, то при большом N $f_u(u)$ не зависит от $f_x(x)$ и N , а зависит только от числа дифференциальных коридоров M . Этот закон при увеличении N приближается к закону χ^2 с r степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [5

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция [10]. (2.37)

В этом случае мера расхождения обозначается χ^2 и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(\hat{p}_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (2.38)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (2.38) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (2.39)$$

где n_j - число попаданий x в j -ый дифференциальный коридор.

Число степеней свободы равно $r = M - k$, где k – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы [5]. Пользуясь ими, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность того, что величина, распределенная по закону χ^2 , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его.

Схема применения критерия сводится к следующему:

1. строится гистограмма входной последовательности
2. определяется мера расхождения χ^2 по формуле (2.38) или (2.39);
3. определяется число степеней свободы $r = M - k$;
4. по r и χ^2 определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 ;
5. если вероятность P_d велика, то гипотеза H принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу H . Если вероятность P_d велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза H не противоречит опытным данным [5].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [5].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max \left| \hat{F}(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right|. \quad (2.40)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения δ ;
- при неограниченном числе испытаний N вероятность неравенства

$\delta \sqrt{N} \geq \lambda$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (2.41)$$

Схема применения этого критерия сводится к следующему:

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется δ ;
3. вычисляется $\lambda = \delta \sqrt{N}$;
4. определяется $P(\lambda)$;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P_d

$\lambda < \lambda_{1-P_d}$;

6. Если вероятность P_d мала, гипотезу H следует отвергнуть.

При сравнительно больших $P(\lambda)$ её можно считать совместимой с опытными данными.

Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения, расчете параметров функций распределения [27]. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение $P(\lambda)$. В этом случае мы рискуем принять неправильную гипотезу.

Если уточнение параметров распределения сгенерированной последовательности не производится, т.е. не решается задача аппроксимации законов распределения, качество генерирования ПСП производится с использованием в качестве теоретического распределения заданного закона с заданными параметрами.

2.5. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимание на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [4] (см. рис. 2.15).

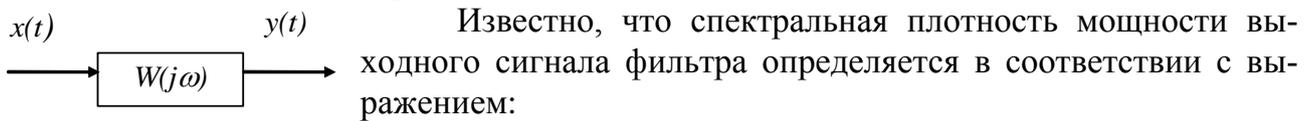


Рисунок 2.15

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (2.42)$$

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности входного сигнала;

нала;

$|W(j\omega)|^2$ - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $|W(j\omega)|^2$ - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega). \end{cases} \quad (2.43)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (2.44)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра $W(j\omega)$ во многом будет определяться видом $S_x(\omega)$. При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с $S_x(\omega) = S_0$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (2.45)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра (см. приложение П.2):

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.46)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i) h(i), \quad (2.47)$$

где $N1$ - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$ - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h_i = h(i\Delta\tau)$ - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции δ и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 2.8.

Минимальное количество ординат корреляционной функции

Таблица 2.8.

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	0,02	0,05	0,1	0,2
$e^{-\alpha \tau }$	9	6	4	3
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	13	9	7	5
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	19	13	10	7
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	10	7	5	4
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$47 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$30 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$21 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$	$15 \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}$

Используя эту таблицу, можно определить интервал дискретизации в виде:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{k \max}}{N1}, \quad (2.48)$$

где $\tau_{k \max}$ - максимальный интервал корреляции (см. таблицу 2.13).

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели исследователей к использованию рекурсивной фильтрации [52]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (2.49)$$

Для нахождения коэффициентов a_i и b_i (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в Z -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. В [28] предлагается методика расчёта рекурсивного фильтра для моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции в Z -плоскости. Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в приложении П.2.

2.6. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой

При исследовании методами имитационного моделирования многоканальных систем возникает необходимость в моделировании N ПСП с заданным видом корреляционной функции с определенными параметрами и некоррелированных между собой.

При решении этой задачи возможно как использование N независимых первичных ПСП, так и одного источника [3].

Более предпочтителен метод моделирования, использующий единственный источник ПСП. Один из подходов к моделированию заключается в применении ортогональных фильтров: Лагерра, Лежандра, Чебышева и т.д. [1, 13, 45, 46, 65]. Учитывая, что в приложениях очень часто применяются ортогональные функции Лагерра:

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}, \quad (2.50)$$

обладающие свойством

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n \end{cases}, \quad (2.51)$$

найдем выходные сигналы ортогонального фильтра Лагерра.

Частотная характеристика фильтра Лагерра равна

$$W_k(j\omega) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k = \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right) W_{k-1}(j\omega). \quad (2.52)$$

Отсюда видно, что фильтр Лагерра имеет каноническую структуру (см. рис. 2.16). Выходные сигналы ячеек фильтра будут иметь вид:

$$y_k(t) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) \dot{x}(t - \tau) d\tau. \quad (2.53)$$

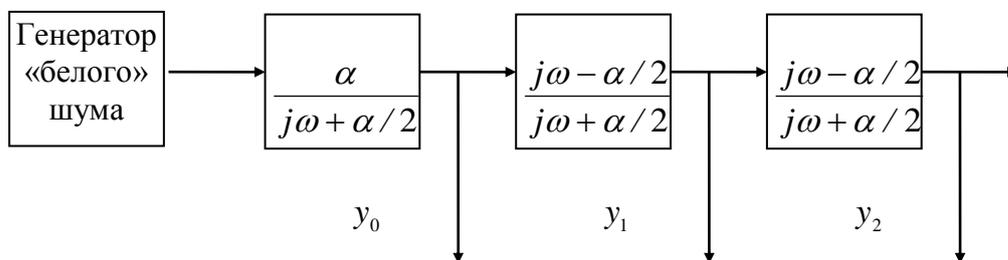


Рисунок 2.16 - Генерирование N некоррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Покажем, что два различных выходных сигнала соответствующих фильтров не коррелированы между собой. В соответствии с определением корреляционный момент между двумя сигналами равен:

$$K_{kn} = \alpha^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau_1, \alpha) K_x(\tau - \tau_1) d\tau d\tau_1. \quad (2.54)$$

Если входной сигнал является «белым» шумом, воспользовавшись свойствами ортогональных функций Лагерра (2.51) и δ -функции, получим:

$$K_{kn} = 2\pi S_0 \alpha^2 \int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = 0. \quad (2.55)$$

Определим вид корреляционных функций выходных сигналов фильтра. Спектральная плотность мощности выходных сигналов фильтра с учётом (2.52) равна:

$$S_{y_k}(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2/4 + \omega^2} S_0. \quad (2.56)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье [14], определим корреляционные функции выходных сигналов фильтра:

$$K_{y_k}(\tau) = 2\pi\alpha S_0 e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}. \quad (2.57)$$

Отсюда видно, что корреляционные функции выходных сигналов соответствующих фильтров Лагерра имеют один и тот же вид и одинаковые параметры. Кроме того, как следует из выражения (2.55), выходные сигналы фильтра некоррелированы между собой.

При реализации алгоритма моделирования на ЭВМ возможно воспользоваться рекуррентной формулой для определения ортогональных функций $n+1$ порядка [1]:

$$L_{n+1}(\tau) = (2n+1-\tau)L_n(\tau) - n^2 L_{n-1}(\tau), \quad (2.58)$$

$$\text{где } \begin{cases} L_0(\tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}; \\ L_1(\tau) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}(1-\alpha\tau). \end{cases} \quad (2.59)$$

Аналогично может быть решена задача и для других ортогональных функций, рассмотренных, например, в [35].

2.7. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций

При исследовании взаимных коррелометров, спектроанализаторов, анализаторов структурных функций возникает необходимость в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций.

Самый простой вариант решения этой задачи заключается в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной функции и её задержке на заданный временной интервал. В качестве критерия качества генерирования ПСП можно также воспользоваться косвенным методом:

- оценить взаимную корреляционную функцию;
- аппроксимировать её заданным аналитическим выражением с параметрами, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации;

- сравнить найденные параметры модели с требуемыми значениями параметров корреляционной функции (см. рис. 2.17).

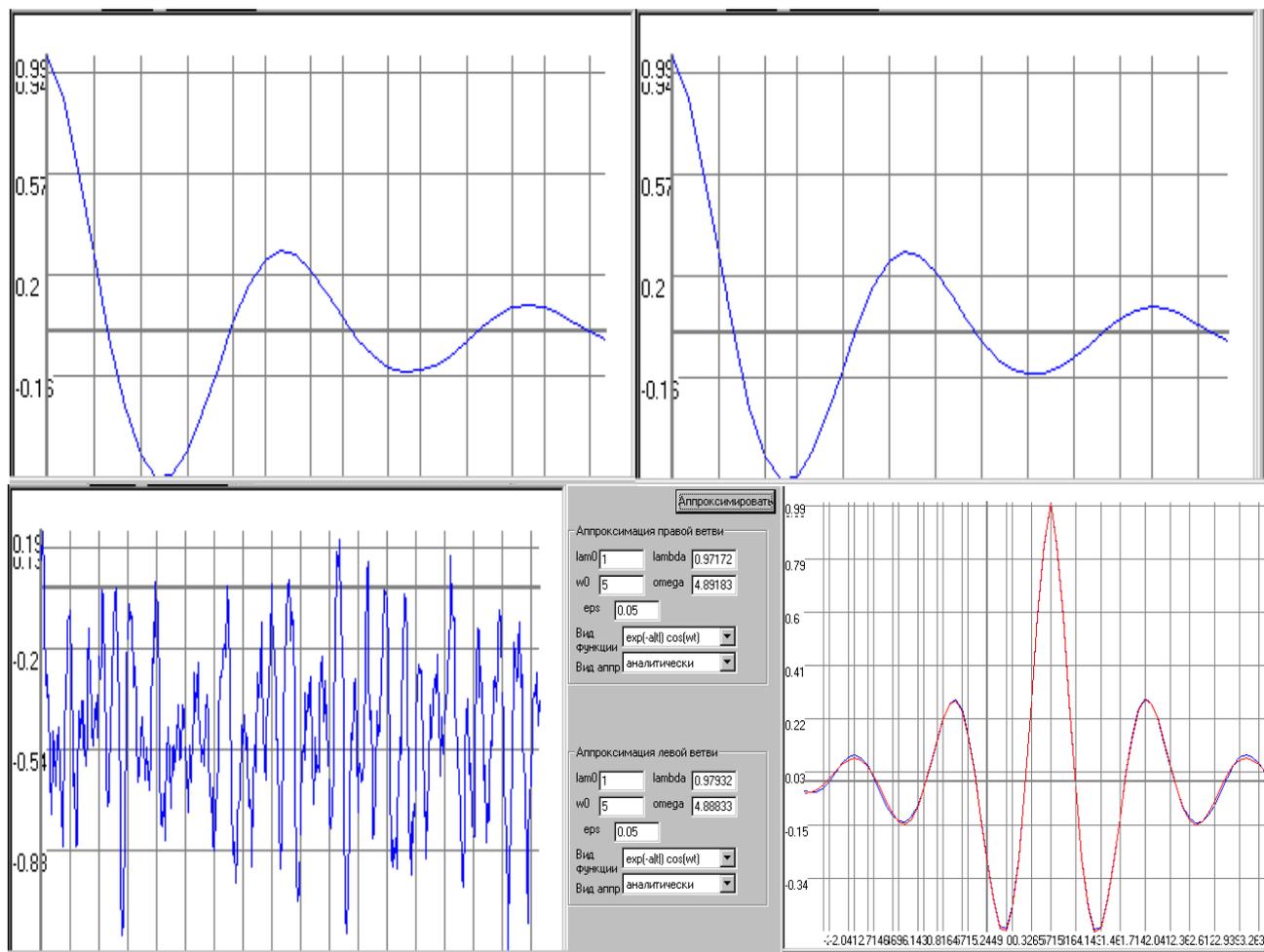


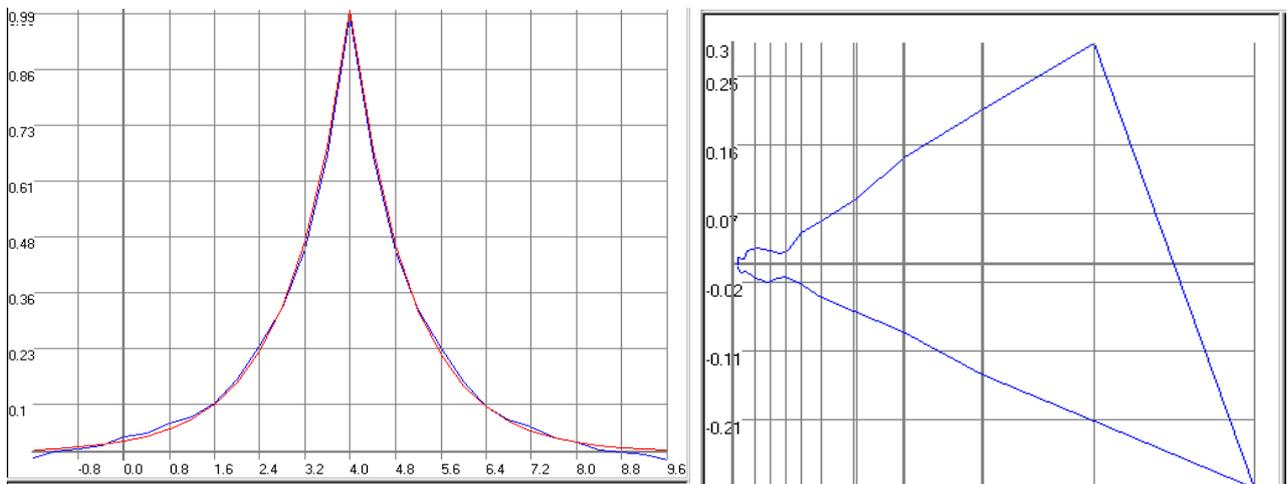
Рисунок 2.17 - Пример генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функции

Вторым методом косвенной проверки качества генерирования двух процессов с заданным видом взаимной корреляционной функции является применение фазовых портретов. Методика проверки заключается в выполнении следующих этапов:

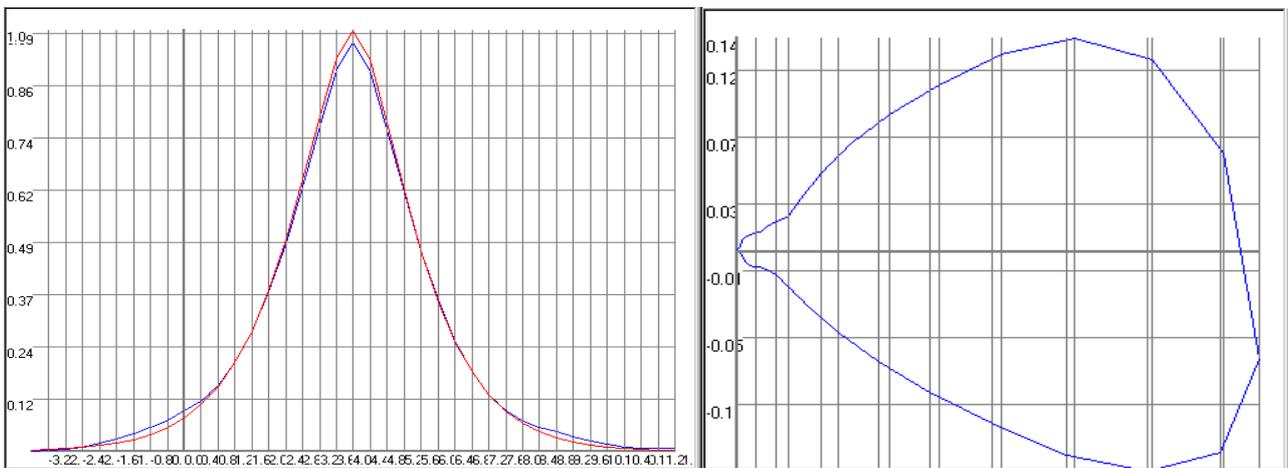
- генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций;
- построения фазового портрета по взаимной корреляционной функции;
- сравнения полученного фазового портрета с эталонным, определенным по аналитической модели требуемой взаимной корреляционной функции.

Преимущество такого способа проверки качества генерирования заключается в простоте, наглядности и отсутствии необходимости решать аппроксимативную задачу. На рис. 2.18 - 2.19 приведены примеры фазовых портретов типовых моделей взаимных корреляционных функций. Для сравнения приведены результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций соответствующими параметрическими моделями.

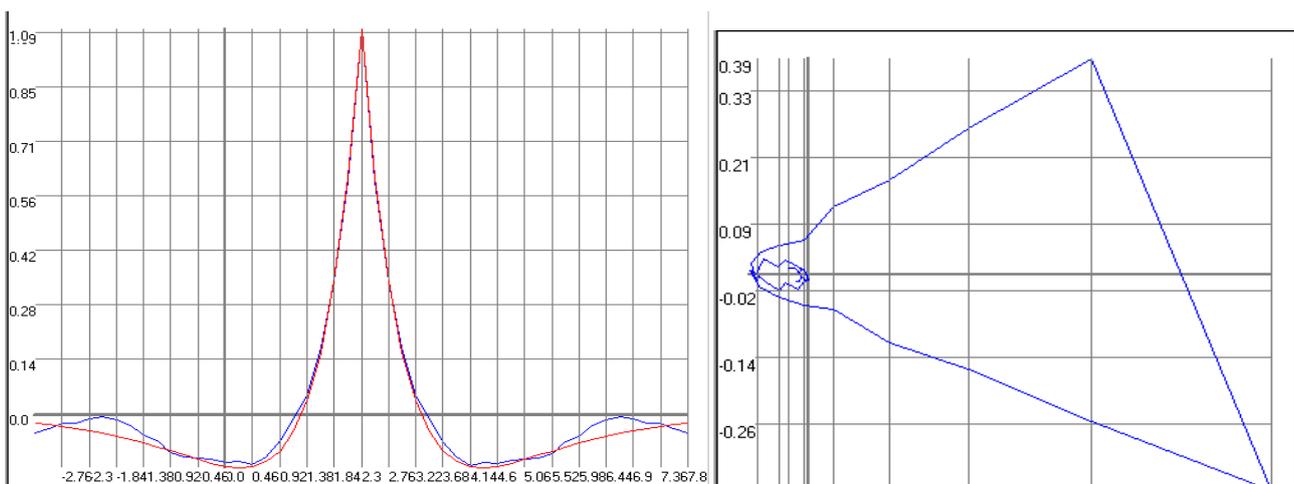
Следует отметить, что задача проверки качества подобным способом требует предварительного определения фазового портрета корреляционной функции для генерируемого процесса.



a) $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau - \tau_m|}$, $\alpha = 1, \tau_m = 10$

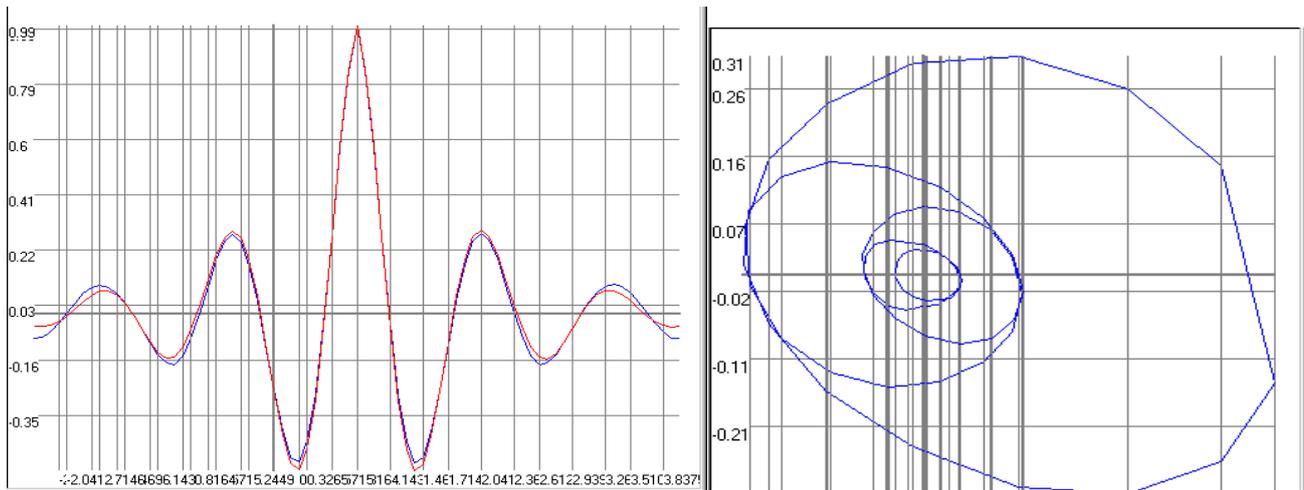


b) $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau - \tau_m|}(1 + \alpha|\tau - \tau_m|)$, $\alpha = 1, \tau_m = 10$

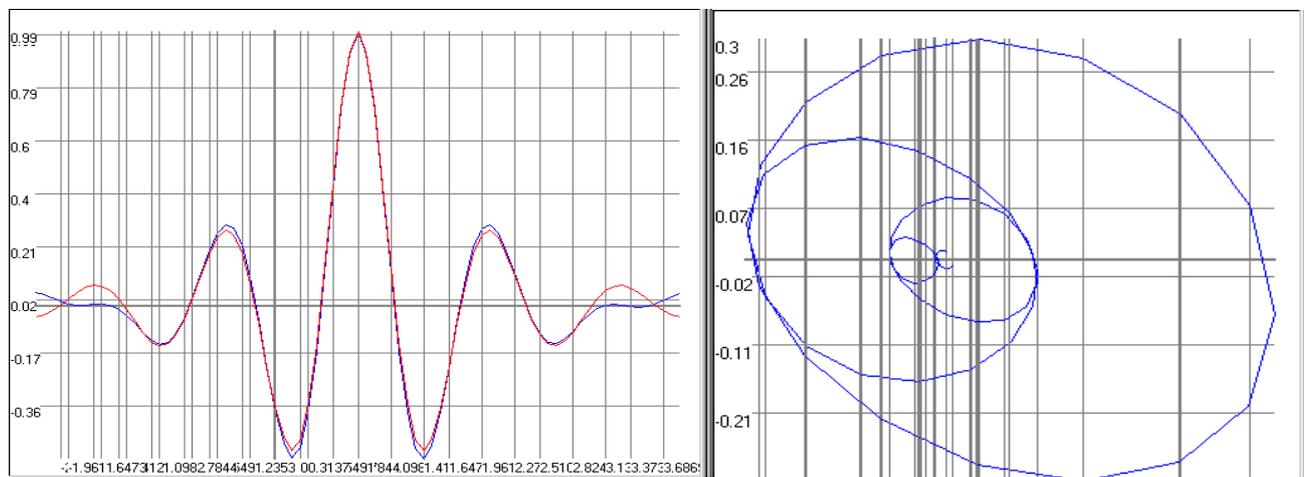


v) $\rho_x(\rho) = e^{-\alpha|\tau - \tau_m|}(1 - \alpha|\tau - \tau_m|)$, $\alpha = 1, \tau_m = 10$

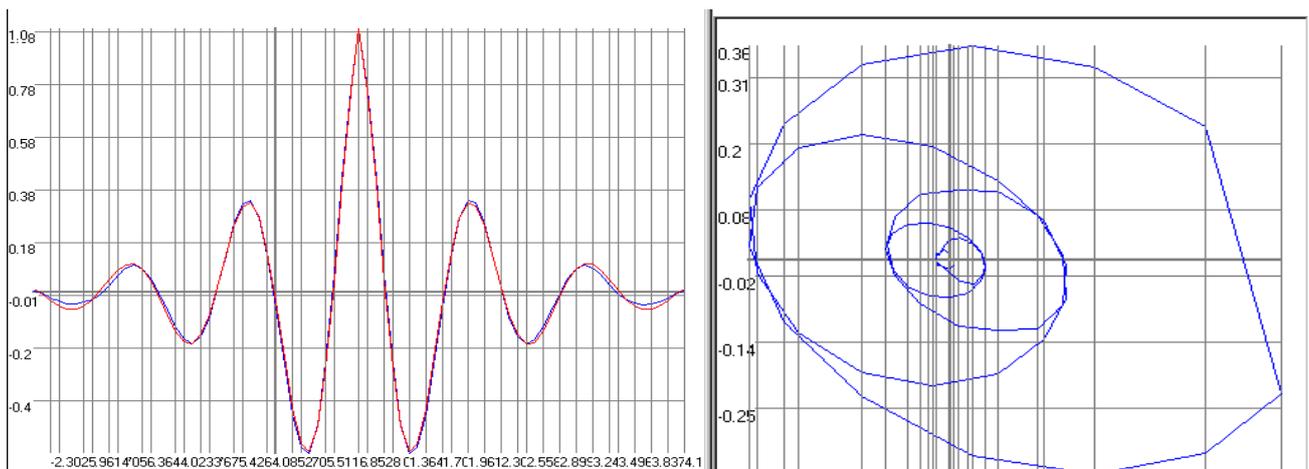
Рисунок 2.18 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты монотонных моделей



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-m|} \cos \omega_0(\tau - \tau_m), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$v) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$

Рисунок 2.19 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты колебательных моделей

Эта задача также может быть решена и методом фильтрации с использованием единственного источника первичного сигнала (см. рис. 2.20).

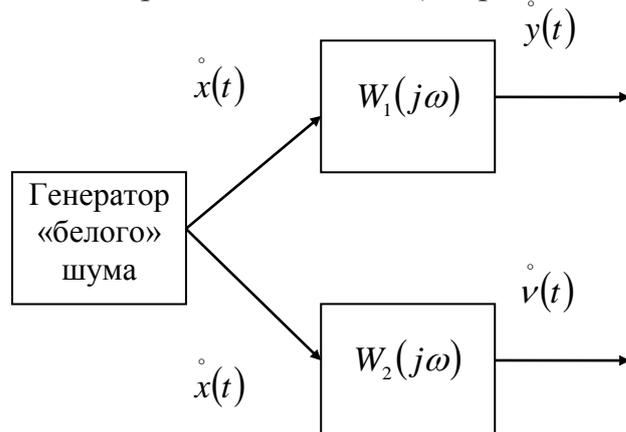


Рисунок 2.20 - Генерирование коррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Спектральные плотности мощности сигналов $\dot{y}(t)$ и $\dot{v}(t)$ соответственно равны:

$$\begin{cases} S_y(\omega) = S_0 |W_1(j\omega)|^2; \\ S_v(\omega) = S_0 |W_2(j\omega)|^2; \\ S_{yv}(\omega) = S_0 W_1(j\omega) W_2(-j\omega); \\ S_{vy}(\omega) = S_0 W_1(-j\omega) W_2(j\omega), \end{cases} \quad (2.60)$$

где $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$ - частотные характеристики формирующих фильтров.

В таблице П.2 для примера приведены выражения для импульсных переходных характеристик формирующих фильтров.

2.8. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального

При решении ряда задач возникает необходимость в анализе нелинейных систем при случайном входном воздействии. Аналитическое решение этой задачи возможно в некоторых случаях только для нормальных входных процессов, и даже в этом случае, как правило, применяют приближенные методы и оценивают погрешность приближения. Эта процедура достаточно сложна и громоздка [28]. Если же входной процесс отличен от нормального, аналитическое решение задачи практически невозможно. Тем не менее, успешное исследование подобных систем возможно методами имитационного моделирования на ЭВМ.

Первым шагом в этом направлении является генерирование ПСП с требуемым видом корреляционной функции и закона распределения. Следует отметить, что в настоящее время удовлетворительного решения этой задачи не найдено. Это объясняется рядом причин. Для генерирования подобных ПСП применяют две процедуры: линейную фильтрацию и нелинейное преобразование. Выходной сигнал фильтра при выполнении условия, а оно для «белого» шума всегда выполняется,

$$\Delta\omega_c \ll \Delta\omega_s, \quad (2.61)$$

где $\Delta\omega_c$ и $\Delta\omega_s$ эквивалентная полоса пропускания фильтра и эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса, распределен по закону близкому к нормальному. Нормализация процесса выполняется тем лучше, чем лучше выполняется условие (2.40). С другой стороны, нелинейное преобразование изменяет форму и значения параметров корреляционной функции.

Однако, как показали исследования, при удачном подборе функции преобразования возможно приемлемое решение задачи [53] (см. рис. 2.21).

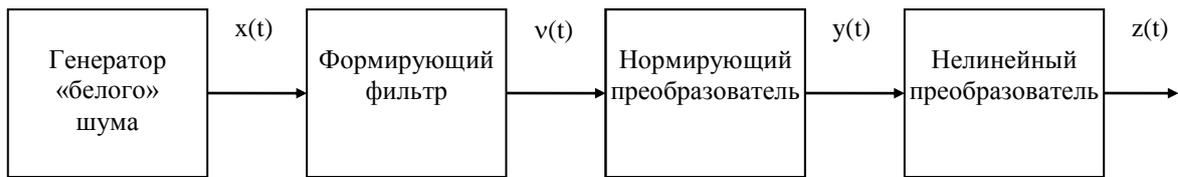


Рисунок 2.21 - Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального

Выходной сигнал генератора «белого» шума $x(t)$ распределен по равномерному закону и $x(t) \in [0,1]$. Выходной сигнал формирующего фильтра $v(t)$ распределен по нормальному закону и находится в диапазоне $v(t) \in [v_{min}, v_{max}]$. Для нормальной работы нелинейного преобразователя необходимо, чтобы $y \in [0,1]$ (см. подраздел 2.2). Следовательно, нормирующий преобразователь должен выполнять преобразование:

$$y(t) = \frac{v(t) - v_{min}}{v_{max} - v_{min}}. \quad (2.62)$$

Предположим, что корреляционная функция выходного сигнала формирующего фильтра известна (импульсная переходная характеристика формирующего фильтра определена), а нелинейная функция преобразования имеет вид:

$$z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t)), \quad y(t) \in [0,1]. \quad (2.63)$$

Разложим экспоненту в ряд Маклорена, ограничившись для простоты тремя членами ряда. Тогда

$$z(t) = \lambda y(t) - \frac{\lambda^2}{2} y^2(t). \quad (2.64)$$

Математическое значение сигнала $z(t)$ равно:

$$m_z = \lambda m_y - \frac{\lambda^2}{2} (m_y^2 + \sigma_y^2). \quad (2.65)$$

Центрированное значение случайной величины $\overset{\circ}{z}(t)$ примет вид:

$$\overset{\circ}{z}(t) = \lambda \overset{\circ}{y}(t) - \frac{\lambda^2}{2} [y^2(t) - m_y^2 - \sigma_y^2]. \quad (2.66)$$

Корреляционная функция сигнала $z(t)$ равна:

$$K_z(\tau) = K_y(\tau)(\lambda^2 - 2\lambda^3 m_y + \lambda^4 m_y^2) - \frac{1}{2} M \left[\dot{y}(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right] (\lambda^3 - \lambda^4 m_y) - \frac{1}{2} M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}(t-\tau) \right] (\lambda^3 - \lambda^4 m_y) + \frac{\lambda^4}{4} M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right] - \frac{\lambda^4}{4} \sigma_y^4. \quad (2.67)$$

Для определения $K_z(\tau)$ необходимо вычислить:

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = M \left[\dot{y}(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right]; \\ \mu_{2,1} = M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}(t-\tau) \right]; \\ \mu_{2,2} = M \left[\dot{y}^2(t) \dot{y}^2(t-\tau) \right]. \end{cases} \quad (2.68)$$

Воспользовавшись результатами таблицы 1.3, определим, что

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = \mu_{2,1} = 0; \\ \mu_{2,2} = \sigma_y^4 + 2K_y^2(\tau) \end{cases} \quad (2.69)$$

Подставив выражения (2.47) в (2.46), окончательно получим:

$$K_z(\tau) = K_y(\tau) \lambda^2 (1 - \lambda m_y)^2 + \frac{\lambda^2}{2} K_y^2(\tau). \quad (2.70)$$

Выражение (2.70) позволяет с некоторым приближением определить корреляционную функцию выходного сигнала.

Следующим шагом является определение закона распределение выходного сигнала. Для рассматриваемого случая, воспользовавшись теорией функции случайного аргумента (см. подраздел 1.3), закон распределения ПСП z равен:

$$f_z(z) = f_y[\psi(z)] \left| \frac{dy}{dz} \right|, \quad (2.71)$$

где

$$\begin{cases} f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}; \\ y = \psi(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-z); \\ \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1}{\lambda(1-z)}. \end{cases} \quad (2.72)$$

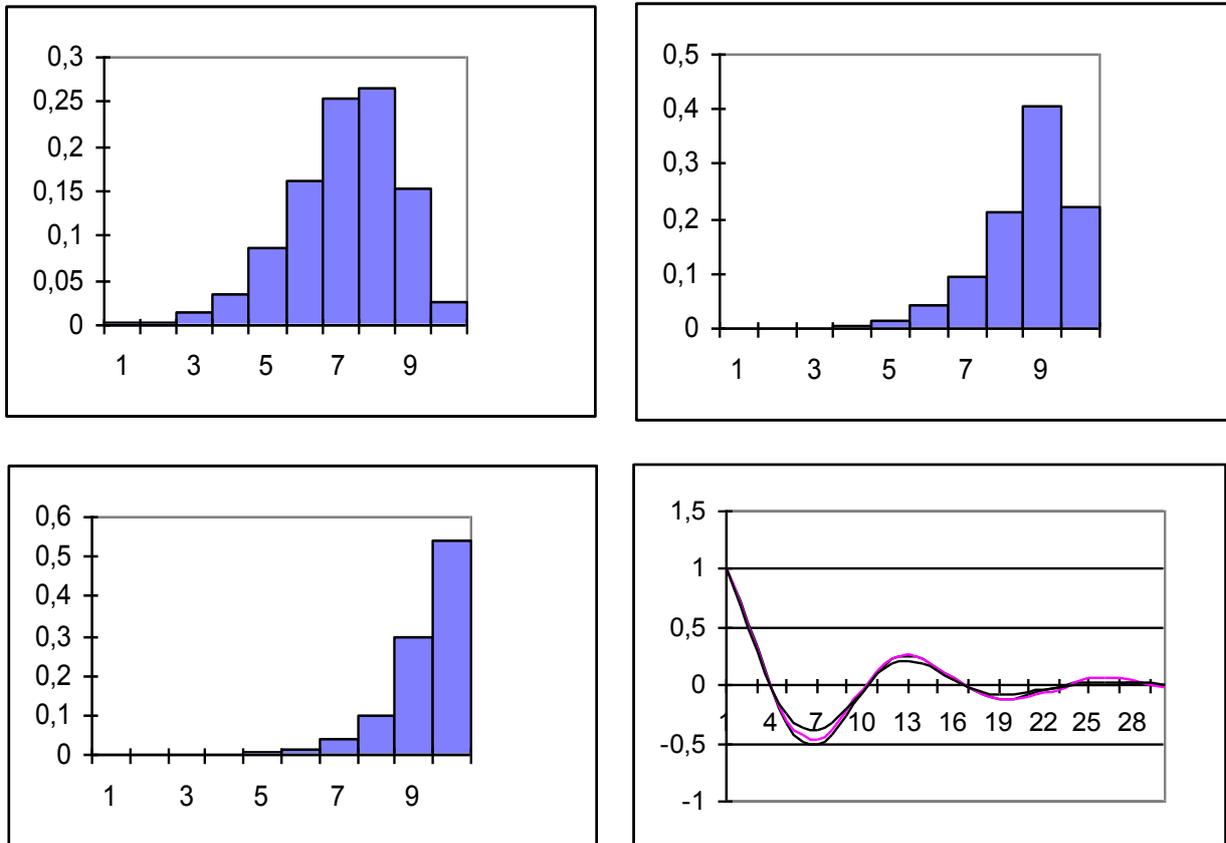
Подставив выражение (2.72) в (2.71), окончательно получим:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_y \lambda \sqrt{2\pi} (1-z)} e^{-\frac{[\ln(1-z)+m_y]^2}{2\lambda^2 \sigma_y^2}}. \quad (2.73)$$

Задаваясь различным видом функций преобразования, значениями их параметров и импульсными переходными характеристиками формирующих фильтров, в соответствии с предложенной методикой можно определить корреляционные функции и плотности распределения вероятностей генерируемой ПСП.

Результаты генерирования ПСП с заданным видом корреляционной функции для различных видов функционального преобразования представлены на рис. 2.22-2.24:

- на рис. 2.22 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha = 1 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_0 = 5 \text{ сек}^{-1}$, $\Delta \tau = 0,1 \text{ сек}$;
 $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))$,
- на рис. 2.23 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t))$;
- на рис. 2.24 - $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $z(t) = 1 - \exp(-\lambda y(t)) (1 + \lambda y(t) + \lambda^2 y(t)^2 / 3)$.



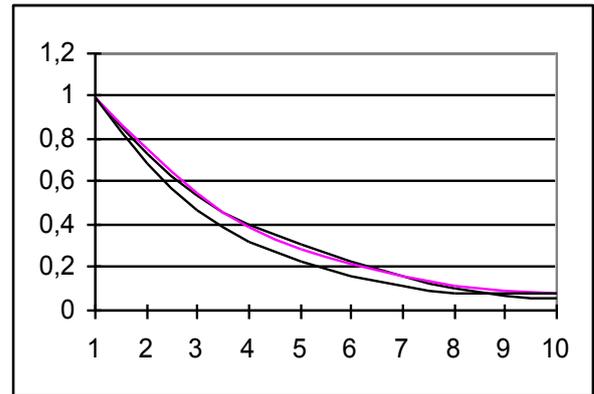
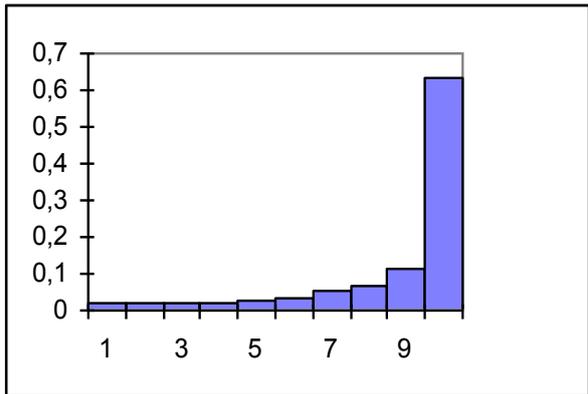
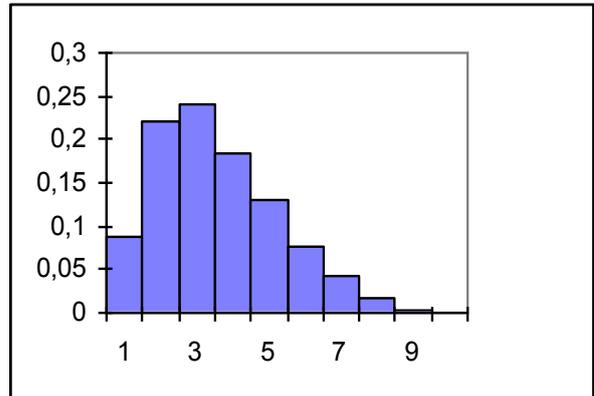
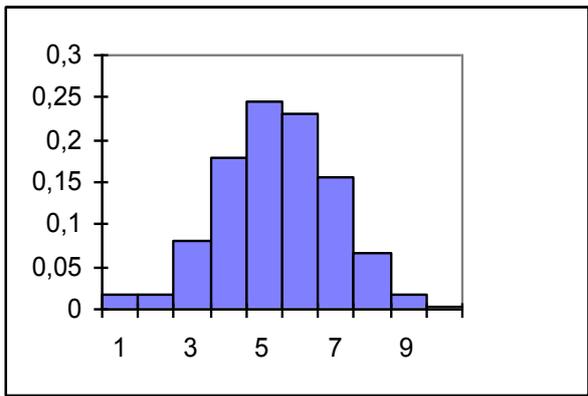
а) б)
 Рисунок 2.22 - Гистограммы и корреляционные функции ПСП

В таблице 2.9 приведены характеристики законов распределения, представленных на рис. 2.22-2.24.

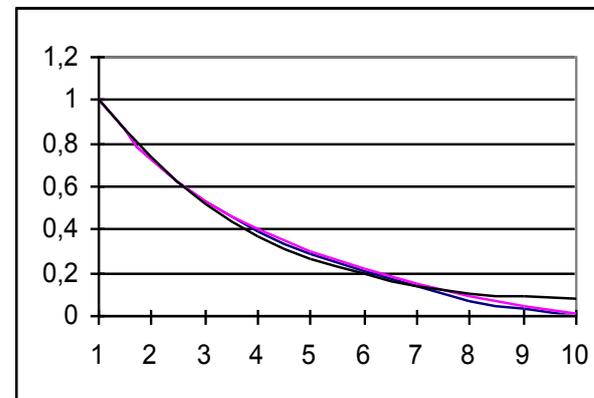
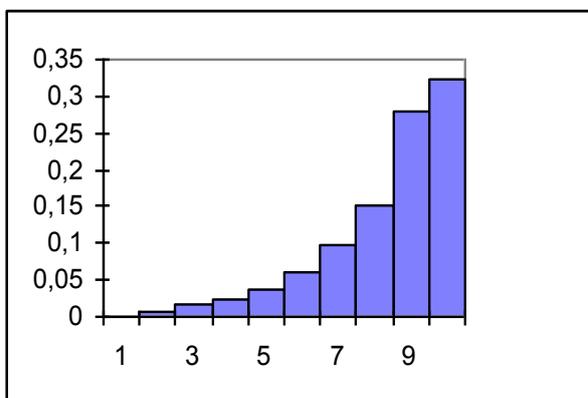
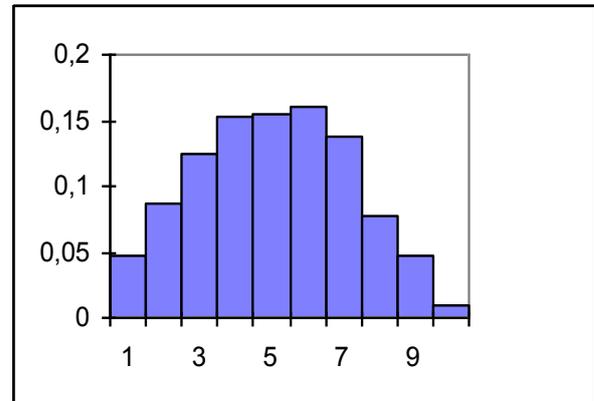
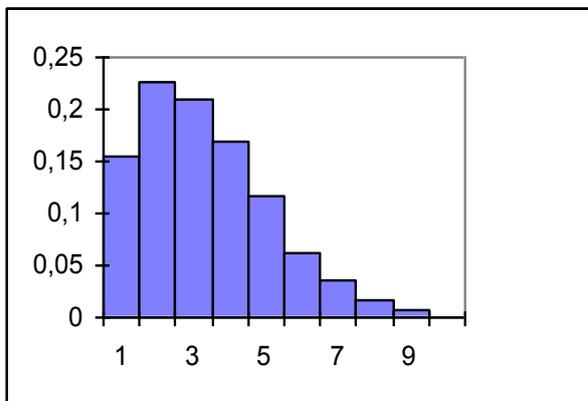
Характеристики законов распределения

Таблица 2.9

№ рисунка	λ	x_{min}	x_{max}	k_a	k_ε
2.22	5	-4,4469	2,2672	-0,6613	0,4969
	10	-6,7074	1,5922	-1,5109	3,5249
	15	-8,3298	1,1531	-2,3375	8,7062
2.23	0,1	-3,2973	3,3879	0,0874	-0,3046
	0,5	-1,8204	4,1507	0,6516	-0,0657
	5	-3,6871	0,06731	-1,8887	2,8578
2.24	1	-1,5769	4,0065	0,7694	0,2326
	5	-2,1405	2,5557	0,0254	-0,7388
	10	-4,3998	1,1921	-1,3581	1,5223



а) б)
Рисунок 2.23 - Гистограммы и корреляционные функции ПСП



а) б)
Рисунок 2.24 - Гистограммы и корреляционные функции ПСП

2.9. Генерирование неэквидистантных временных рядов

Генерирование неэквидистантных временных рядов основано на «прореживании» регулярного ($\Delta t_i = const$) временного ряда с учётом модели потока событий.

При этом выделим два случая:

- регулярный временной ряд и поток событий генерируются независимо;
- характеристики потока событий определяются характеристиками регулярного временного ряда.

В первом случае (см. рис. 1.21) на вход ключа поступает временной ряд, содержащий N отсчётов. На выходе ключа неэквидистантный временной ряд содержит лишь M отсчётов $x(t_i)$ в моменты времени, совпадающими с отсчётами потока событий t_i . При этом $M < N$.

Таким образом, генерируются неэквидистантные временные ряды в случае непреднамеренной нерегулярной дискретизации. Для генерирования регулярных временных рядов, а также потоков событий с заданными характеристиками необходимо воспользоваться результатами подразделов 2.1 и 2.2.

Случай, когда характеристики потока событий определяются характеристиками процесса (регулярного временного ряда) представлен на рис. 1.22.

Как следует из подраздела 1.10 к такому виду нерегулярной дискретизации приводит адаптивная, спорадическая дискретизация и адаптивная коммутация, которые и определяют алгоритм функционирования анализатора активности сигнала.

Неэквидистантные временные ряды используются как для определения их статистических характеристик, так и для проведения метрологического анализа результатов оценивания вероятностных характеристик с применением тех или иных аппаратно-программных средств.

На рис. 2.25 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, полученного в результате p -преобразования регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1$, $\Delta\tau = 0,4$, $p = 0,3$, $N = 5000$.

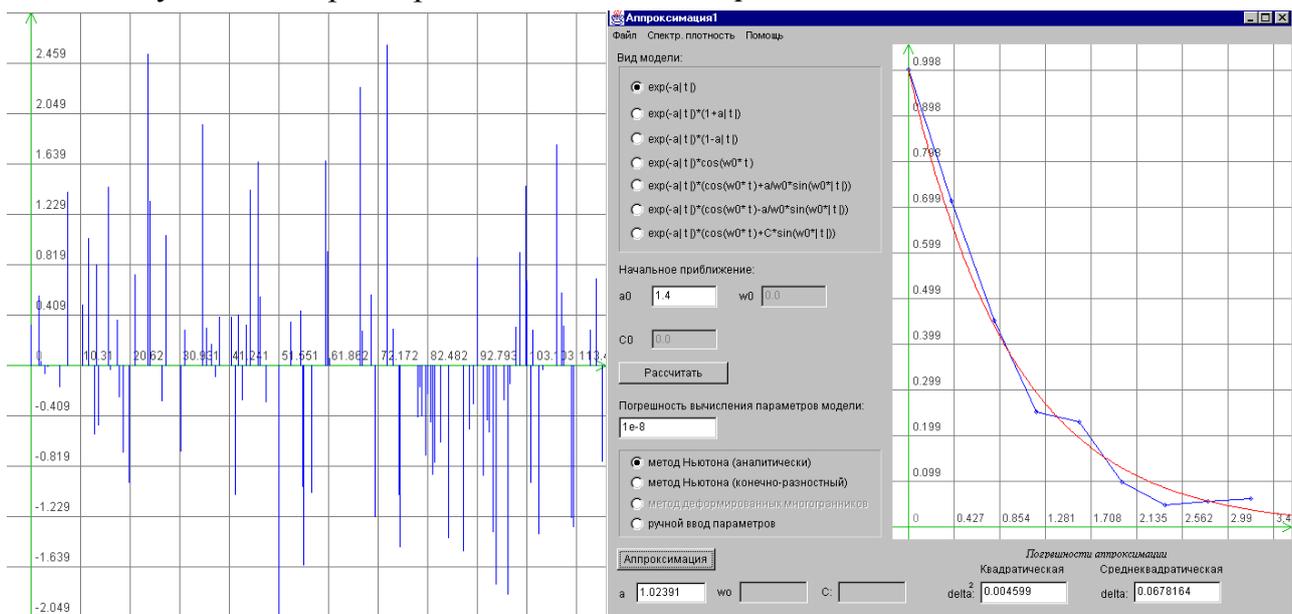


Рисунок 2.25 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (p -преобразование)

На рис. 2.26 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате р-преобразования регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082, p = 0,3, N = 5000$.

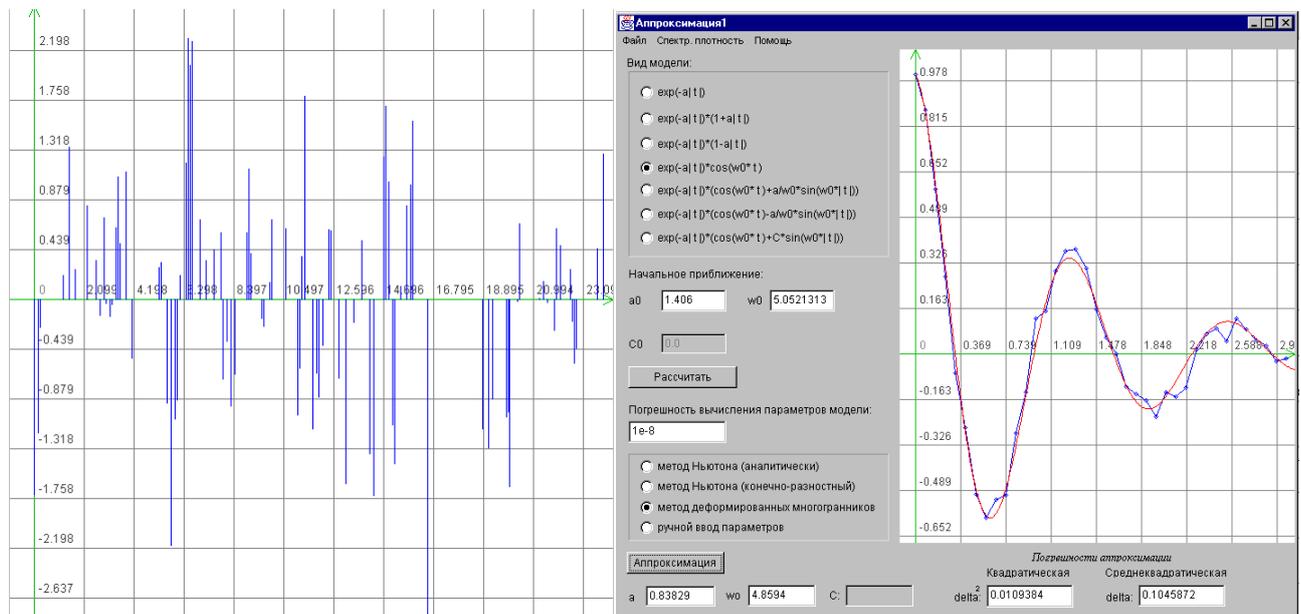


Рисунок 2.26 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (р-преобразование)

На рис. 2.27 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, полученного в результате «дрожания» регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \Delta\tau = 0,4, N = 5000$.

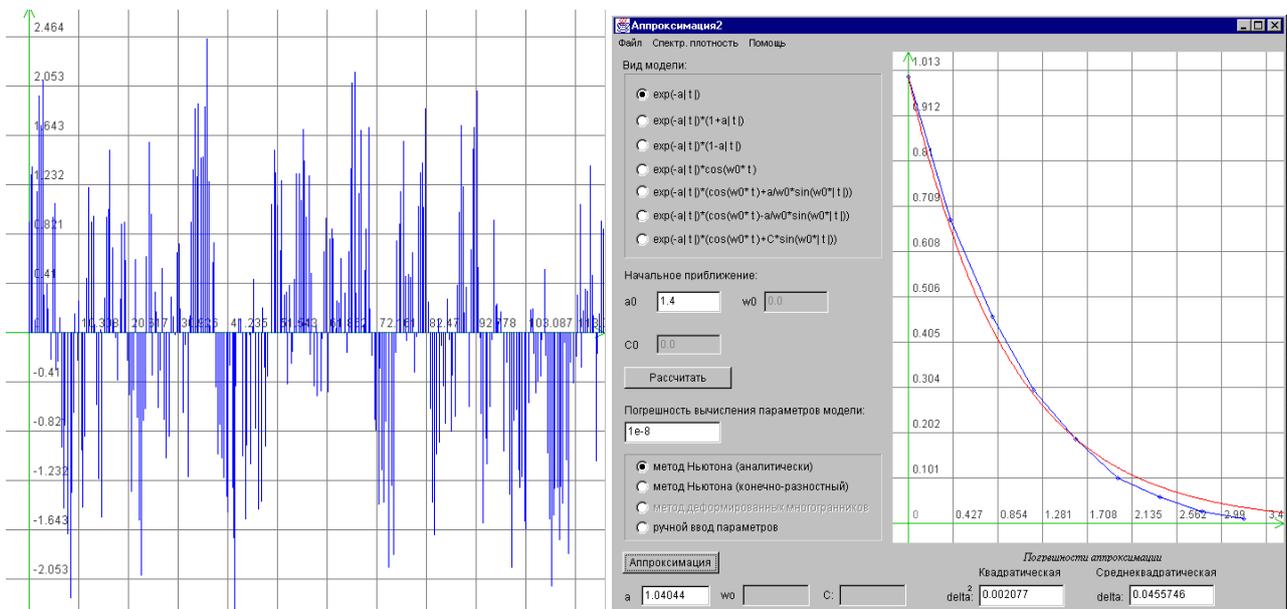


Рисунок 2.27 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

На рис.2.28 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате «дрожания» регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082, N = 5000$.

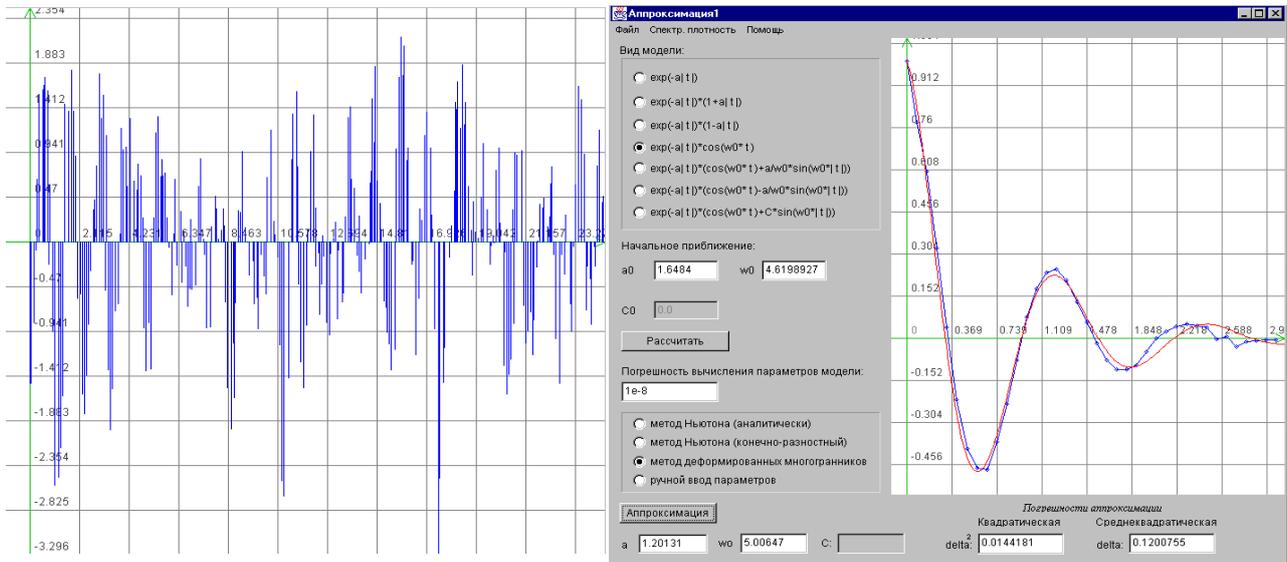


Рисунок 2.28 - Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

На рис. 2.29 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,4, \gamma = 0,5, N = 5000$.

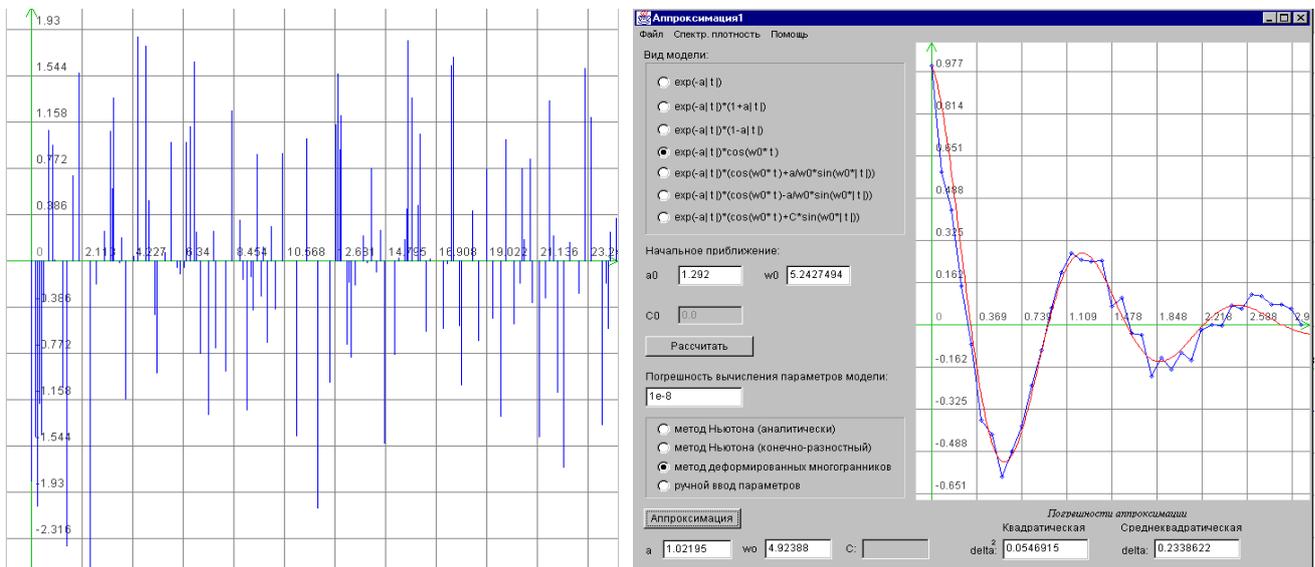


Рисунок 2.29 - Результаты генерирования НВР с адаптивно-временной дискретизацией

На рис. 2.30 приведены результаты генерирования неэквилидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда со следующими параметрами: $\alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,4, \gamma = 0,75, N = 5000$.

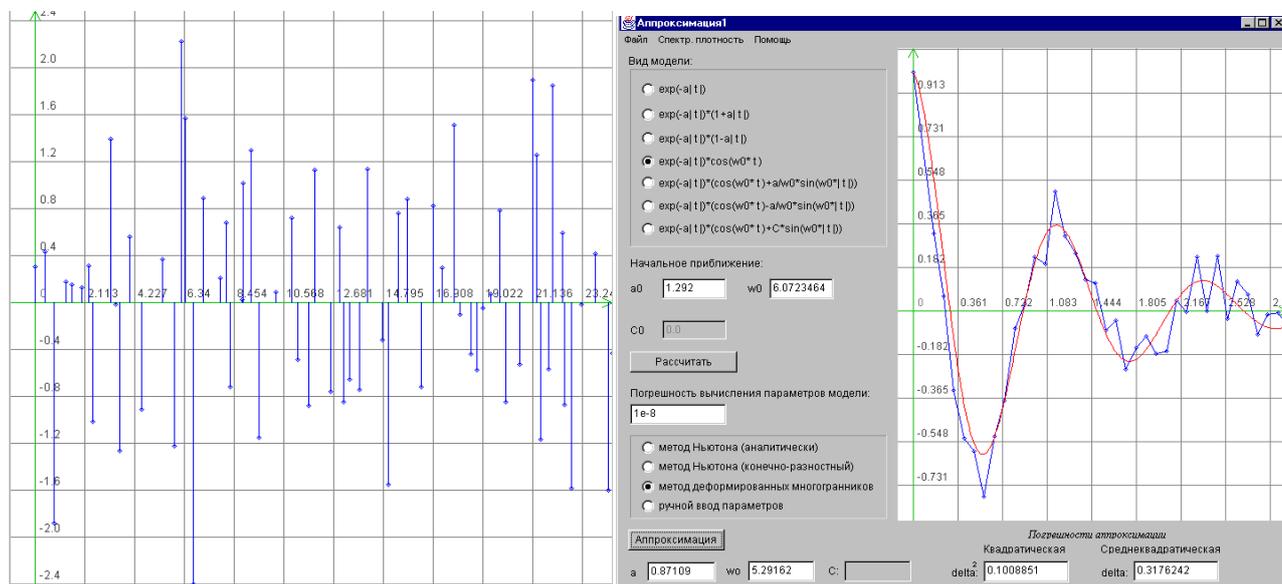


Рисунок 2.30 - Результаты генерирования НВР с адаптивно-временной дискретизацией

Аналогичным образом можно генерировать неэквилидистантные временные ряды и для других моделей нерегулярной дискретизации.

2.10. Генерирование нестационарных временных рядов

Различные комбинации ПСП, рассмотренные в подразделах 2.1, 2.2, 2.5 и т.д. и детерминированных последовательностей дают возможность построить более сложные модели, используемые при моделировании ПСП с заданными свойствами.

Так, представив модель исследуемой последовательности в виде (1.46) в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров, получим следующие частные модели (см. таблицу 1.4.).

Генерирование детерминированных последовательностей сводится к расчёту по формулам и особой сложности не представляет.

Следует отметить, что в некоторых случаях для увеличения быстродействия целесообразно применение рекуррентных формул. Однако при генерировании достаточно продолжительных воздействий возможно накопление вычислительных погрешностей. Для уменьшения этого влияния необходимо как можно точнее вычислять константы рекуррентных формул.

Приведем несколько примеров.

Пусть требуется сгенерировать экспоненциальную последовательность - $x_i = e^{-i\alpha\Delta\tau}$, где α - параметр затухания, $\Delta\tau$ - интервал дискретизации.

Значение экспоненциальной последовательности в $(i+1)$ точке равно:

$$x_{i+1} = e^{-(i+1)\alpha\Delta\tau} = x_i e^{-\alpha\Delta\tau} = A x_i. \quad (2.74)$$

Отсюда видно, что для генерирования требуемой последовательности, необходимо вычислить $A = e^{-\alpha\Delta\tau}$, положить $x_0=1$ и, обратившись, к формуле (2.74), определить x_i для любого значения i .

Часто при решении разнообразных задач требуется генерировать последовательности синусоидальной формы:

$$x_i = A_m \sin i \omega_0 \Delta \tau. \quad (2.75)$$

Проведя необходимые тригонометрические преобразования получим:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i C_0 + y_i S_0; \\ y_{i+1} = y_i C_0 - x_i S_0, \end{cases}$$

где $S_0 = \sin \omega_0 \Delta \tau$, $C_0 = \cos \omega_0 \Delta \tau$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

С использованием рекуррентных формул легко можно генерировать ортогональные последовательности [1]. Так, например, формула для генерирования ортогональных последовательностей Лагерра имеет вид (2.76).

Аналогичным образом могут быть решены и другие задачи генерирования детерминированных последовательностей.

Рассмотрим пример генерирования нестационарной ПСП в соответствии с алгоритмом

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + A \sin(\omega_0 i \Delta \tau + \varphi), \quad (2.76)$$

где $\dot{x}_i = \dot{x}(i \Delta \tau)$ - стационарная ПСП, распределенная по закону отличному от нормального.

Корреляционная функция ПСП равна:

$$K_y(i \Delta \tau) = K_x(i \Delta \tau) + \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 i \Delta \tau. \quad (2.77)$$

Отсюда нормированная корреляционная функция ρ имеет вид:

$$\rho_y(i \Delta \tau) = \frac{K_y(i \Delta \tau)}{\sigma_x^2 + \frac{A^2}{2}}. \quad (2.78)$$

Для генерирования ПСП x_i воспользуемся нелинейным преобразованием

$$x_i = 1 - e^{-\lambda v_i}, \quad (2.79)$$

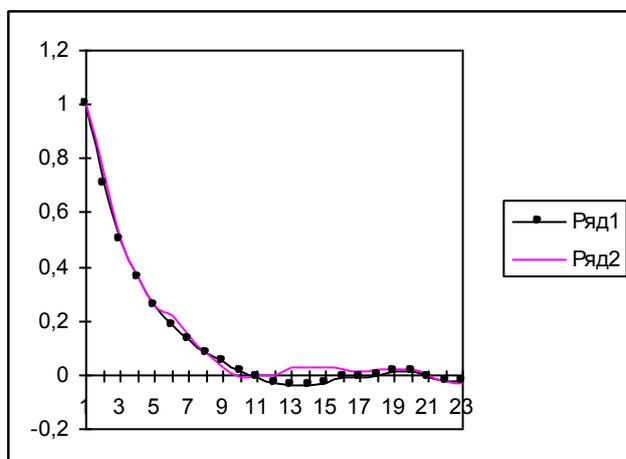


Рисунок 2.31 - Корреляционная функция нестационарной ПСП

где v_i - ПСП с нормированной корреляционной функцией $\rho_v(i \Delta \tau) = e^{-\alpha|i \Delta \tau|}$.

На рис. 2.31 - 2.44 приведены результаты определения нормированной корреляционной функции ПСП ρ для различных параметров модели (2.55).

На рис.2.31 приведены результаты для следующих параметров:

- ряд 1 - $\lambda=0,25$, $\alpha\Delta\tau=0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A=0,1$, $\omega_0=1$, рассчитанные значения - $k_a = -0,3888$, $k_\varepsilon = 0,2286$;
- ряд 2 - $\lambda=0,25$, $\alpha\Delta\tau= 0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A=0,2$, $\omega_0=1$, рассчитанные

значения $-k_a = -0,5564$, $k_\varepsilon = 0,0427$.

Отсюда видно, что при таком сочетании параметров генерирования ПСП u_i представляет собой широкополосную ПСП без выраженной колебательной составляющей.

На рис. 2.32 приведены результаты для следующих параметров:

- ряд 1 - $\lambda = 0,25$, $\alpha\Delta = 0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A = 0,4$, $\omega_0 = 1$, рассчитанные значения - $k_a = 0,6609$, $k_\varepsilon = 0,1067$;

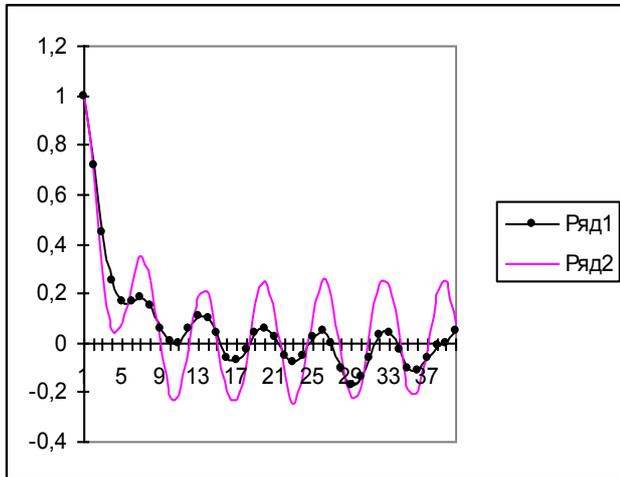


Рисунок 2.32 - Корреляционная функция нестационарной ПСП

На рис. 2.33 приведены результаты для следующих параметров:

- ряд 1 - $\lambda = 0,25$, $\alpha\Delta = 0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A = 2$, $\omega_0 = 1$, рассчитанные значения - $k_a = 0,4950$, $k_\varepsilon = -0,1031$. Выходная ПСП имеет ярко выраженную колебательную составляющую со слабым затуханием.

- ряд 2 - $\lambda = 0,25$, $\alpha\Delta = 0,32$, $\sigma_x^2 = 1$, $A = 0,8$, $\omega_0 = 1$, рассчитанные значения - $k_a = 0,5018$, $k_\varepsilon = 0,2035$. Выходная ПСП имеет колебательную составляющую, более выраженную для второго ряда.

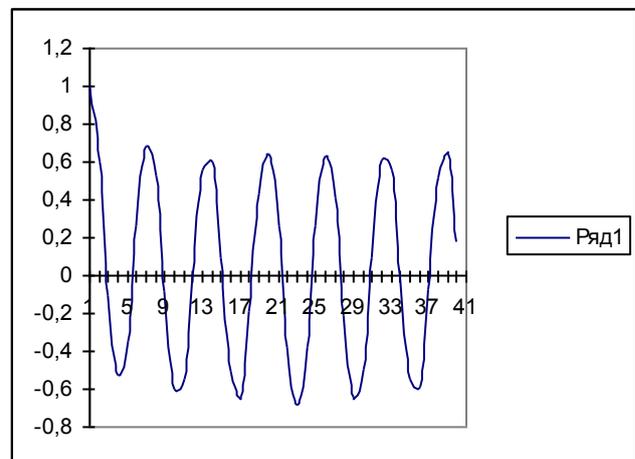


Рисунок 2.33 - Корреляционная функция нестационарной ПСП

Задавая различное сочетание параметров модели, можно определить момент, когда начинает проявляться скрытая колебательность ПСП, и использовать полученные результаты при исследовании реальных сигналов, например, при анализе сезонной изменчивости гидрологических параметров [31].

Воспользовавшись рассмотренной методикой, возможно генерирование нестационарных ПСП и для других моделей нестационарности.

3. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

3.1. Основные понятия и определения

Рассмотренные в первом и втором разделах основные модели корреляционно-спектрального анализа могут быть положены в основу разработки комплексов программ - автоматизированных систем, применение которых позволит как провести дополнительные исследования алгоритмов аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа методом имитационного моделирования, так и обрабатывать результаты экспериментальных исследований образцов новой техники.

Комплекс программ обработки результатов моделирования и экспериментальных исследований содержит как обрабатывающие, так и управляющие программы и состоит из следующих основных блоков [25]:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Первым шагом построения ортогональной модели является выбор метода интегрирования. Исследования показали, что при решении уравнения (1.145) более точный результат дает численно-аналитический подход (метод аналитических разложений) [49].

Представив

$$\hat{\rho}_x(\tau) = \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} (a_j + b_j \tau) \delta_j, \quad (3.2)$$

где $\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ - индикатор состояния;

a_j, b_j - параметры линейной модели $\hat{\rho}_x(\tau)$ на j -том интервале; γ - параметр масштаба ортогональной функции,

получим выражение для определения $\left\{ \hat{\beta}_k \right\}_{k=0, \dots, m}$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{\|\Psi_k\|^2} \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} \left(a_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \Psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau + b_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \Psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau \right). \quad (3.3)$$

Вычисление коэффициентов разложения $\left\{ \hat{b}_k \right\}_{k=0, \dots, m}$, обеспечивающих мини-

мальную погрешность аппроксимации при ограничениях на модель корреляционной функции, определяются в соответствии с выражением (3.3).

Следующим шагом является определение параметра масштаба γ . В [25, 27] рассматривались различные алгоритмы решения этой задачи для различных ортогональных базисов, в том числе, эвристические. Исследование показали, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости (уравнение имеет только один корень) наиболее целесообразно выбрать алгоритм $\beta_0 = 1$. Параметр γ , определенный по этому алгоритму находится вблизи γ_{opt} и обеспечивает допустимую погрешность аппроксимации КФ близкие к минимальной.

Следующим шагом моделирования является выбор интервал дискретизации ортогональной функции. Как правило, интервал дискретизации ортогональной функции выбирают равным интервалу дискретизации входного процесса. Это накладывает ограничение на максимальный порядок ортогональной функции, используемой для построения ортогональной модели.

При определении числа членов разложения ряда m , обеспечивающих минимум квадратической погрешности аппроксимации,

$$m = \arg \min \delta, \quad (3.4)$$

где δ – среднеквадратическая погрешность аппроксимации нормированной корреляционной функции ортогональной моделью, воспользуемся методом перебора.

Таким образом, методика аппроксимации корреляционно-спектральных функций ортогональными функциями заключается в выполнении следующих этапов:

1. определяются ординаты нормированной корреляционной функции $\left\{ \hat{\rho}_x(j\Delta\tau) \right\}_{j=0, \dots, J \max}$;
2. выбирается ортогональный базис $\psi_k(\tau, \gamma)$;
3. определяется параметр ортогональных функций γ в результате решения уравнения $\beta_0 = 1$;
4. определяются коэффициенты разложения $\left\{ \hat{\beta}_k \right\}_{k=0, \dots, m}$ в соответствии с выражением (4.5);
5. определяются коэффициенты разложения $\left\{ \hat{b}_k \right\}_{k=0, \dots, m}$ в соответствии с выражением (4.7);
6. определяется число членов разложения ряда (4.6) m_{opt} , обеспечивающее минимальное значение среднеквадратической погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции δ .
7. по полученным параметрам ортогональной модели определяются параметры ортогональной модели СПМ и ее составляющих;
8. по параметрам моделей КФ и СПМ находятся обобщенные корреляционно-спектральные характеристики;
9. по параметрам модели СПМ строится спектральная функция, позволяющая определить правильность проведения аппроксимативного анализа КФ, а также определить эквивалентную ширину спектра мощности случайного процесса;
10. аналитическим методом и методом имитационного моделирования определяются погрешности аппроксимации, оценки коэффициентов разложения, оценки обобщенных корреляционных характеристик.

3.2. АИС корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах SCAN

В данном разделе будут подробно рассмотрены особенности работы на АИС SCAN при выполнении заданий лабораторного практикума.

Отметим только, что вопросы проектирования АИС, подробно рассмотрены в [25]. В качестве инструментального средства разработки был выбран объектно-ориентированный язык программирования Delphi, а в качестве основного подхода к реализации системы был принят объектно-ориентированный подход.

На рисунке 3.1 представлена структурная схема разработанной АИС, где цифровыми эквивалентами указаны соответствующие ей подсистемы:

1. Подсистема генерации источника случайного процесса;
2. Подсистема настройки оптимальных параметров;
3. Подсистема фильтрации;
4. Подсистема формирования взаимной корреляционной функции;
5. Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции;
6. Подсистема построения модели спектральной плотности мощности;
7. Подсистема построения модели спектральной функции;
8. Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности;
9. Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции;
10. Подсистема построения корреляционных функций специального вида;
11. Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций;
12. Подсистема имитационного моделирования;
13. Подсистема ввода-вывода;
14. Подсистема экспорта данных в MS Word;
15. Подсистема экспорта данных в MS Excel.

Учитывая, что АИС будет применяться для выполнения лабораторных работ, подробно рассмотрим назначения подсистем.

Подсистема генерации источника случайного процесса предназначена либо для моделирования исходного случайного процесса – «Белого шума», либо процесса с заданным видом корреляционной функции по алгоритмам рекурсивной фильтрации [25,33,34]. Подсистема позволяет также исследовать основные характеристики случайного процесса: математическое ожидание, дисперсию, коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса. По полученному процессу строится корреляционная функция и фазовый портрет. Для проверки качества генерирования имеется возможность наложения теоретической кривой с нахождением соответствующих погрешностей: квадратической, среднеквадратической и максимальной.

Подсистема настройки оптимальных параметров позволяет определить рекомендуемые значения интервала дискретизации и числа ординат восстановления корреляционной функции при моделировании случайного процесса с заданным видом корреляционной функции. Данная подсистема не является обязательной (на рисунке обозначена штриховой линией).

Подсистема фильтрации позволяет получить два процесса с заданным видом корреляционной функции в случае взаимной корреляционной функции и один процесс в случае автокорреляционной функции (второй процесс дублируется) (см. рисунок 3.1). Если при генерации случайных процессов использовать подсистему 2,

то в данной подсистеме выбраны функции и оптимальные параметры данных функций. В противном случае все необходимые настройки можно произвести в данной подсистеме. Также провести исследование основных характеристик моделируемого случайного процесса. Для проверки качества генерирования имеется возможность наложения теоретической кривой.

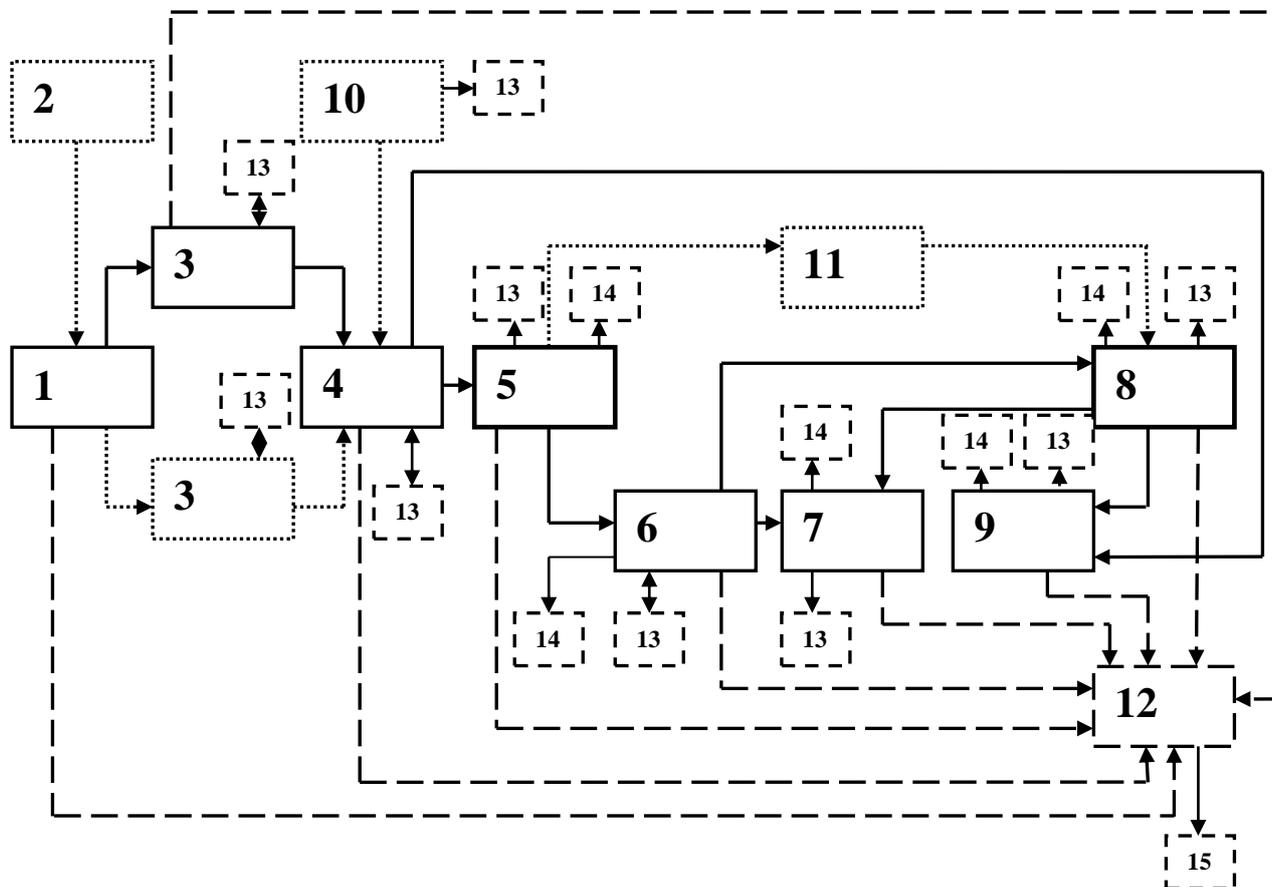


Рисунок 3.1 – Структурная схема АИС SCAN

Подсистема формирования взаимной корреляционной функции позволяет построить взаимную корреляционную функцию (либо автокорреляционную функцию). При этом пара процессов, поступающих из подсистемы фильтрации, центрируется и нормируется. Для проверки качества генерирования также имеется возможность наложения теоретической кривой.

Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции является одной из двух основных в разработанной автоматизированной системе (на рисунке обозначена жирной линией). Подсистема предназначена для аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями из семейств Якоби и Сонина-Лагерра. Всего имеется набор из восьми ортогональных функций с различными параметрами ортогональных базисов: Якоби (-0,5, 0); Якоби (0,5, 0); Якоби (0, 0) (Лежандра); Якоби (1, 0); Якоби (2, 0); Сонина-Лагерра (0) (Лагерра); Сонина-Лагерра (1); Сонина-Лагерра (2).

Диаграмма деятельности (UML). Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями приведена на рис. 3.2.

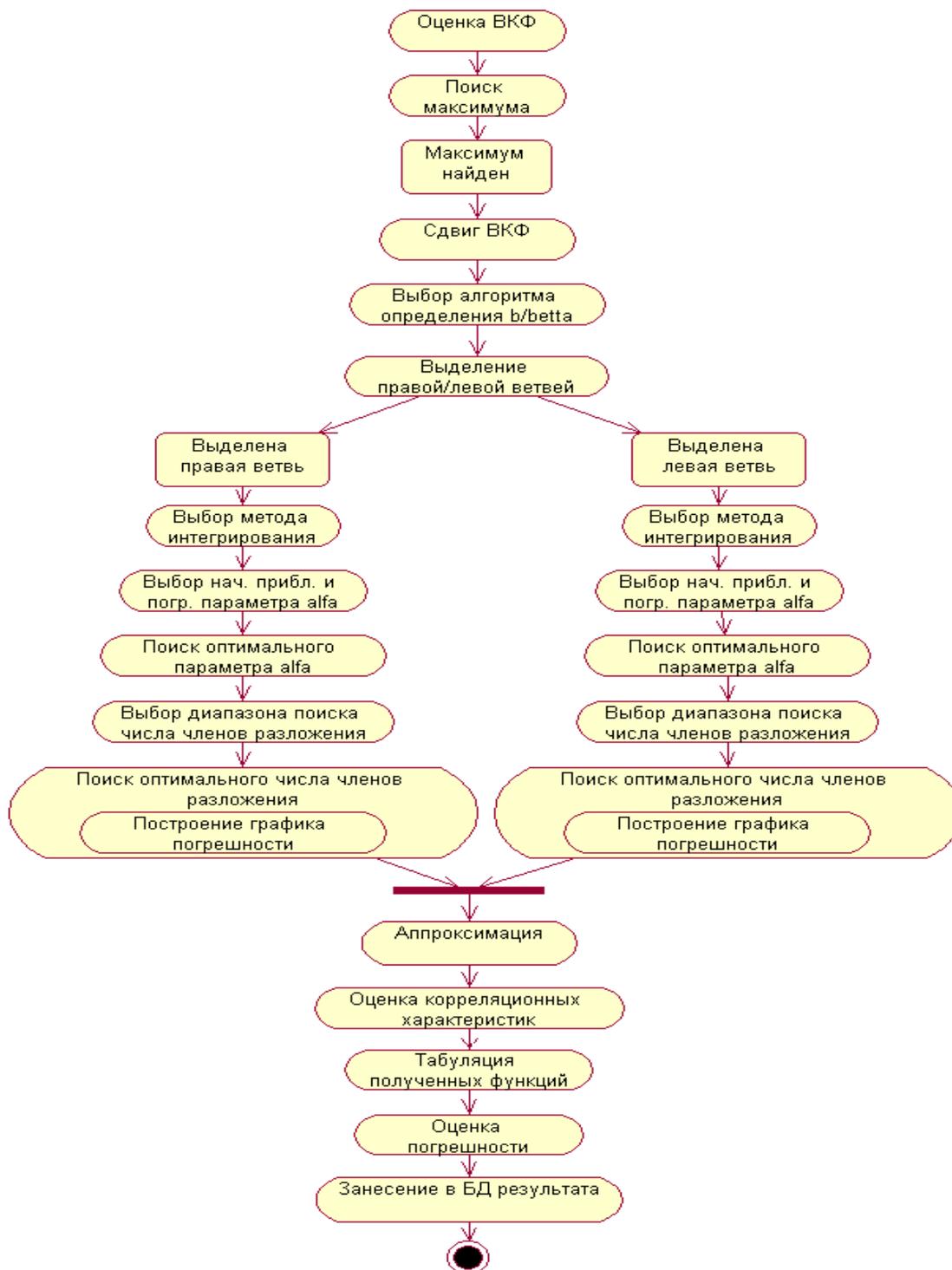


Рисунок 3.2 - Диаграмма деятельности (UML). Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями

Помимо выбора ортогонального базиса можно произвести расчет оптимальных параметров аппроксимации в соответствии с минимумом квадратической погрешности аппроксимации. К параметрам аппроксимации относятся коэффициенты разложения Фурье, параметр масштаба, число членов разложения ряда. Методика

аппроксимации корреляционных функций с помощью ортогональных разложений описана в работах [25 – 27, 33, 34]. По построенной модели определяются обобщенные корреляционные характеристики.

Подсистема построения модели спектральной плотности мощности предназначена для построения взаимной спектральной плотности мощности (ВСПМ) и ее составляющих: реальная компонента, мнимая компонента, фаза и модуль спектральной плотности мощности – по параметрам аппроксимативной модели взаимной корреляционной функции. По построенному спектру определяются обобщенные спектральные характеристики. Для проверки качества аппроксимации имеется возможность наложения теоретической кривой.

Подсистема построения модели спектральной функции предназначена для построения спектральной функции по параметрам модели корреляционной функции и спектральной плотности мощности, а также исследования обобщенных спектральных характеристик.

Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности является второй из двух основных. Подсистема предназначена для аппроксимации выбранной компоненты спектральной плотности мощности (действительной или мнимой). Набор ортогональных функций аналогичен тому, что описан в подсистеме 5. Методика аппроксимации спектральных плотностей мощности с помощью ортогональных разложений описана в работе [25 – 27, 34].

Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции предназначена для восстановления взаимной корреляционной (автокорреляционной) функции по параметрам моделей действительной и мнимой частей спектральной плотности мощности. Имеется возможность наложения как теоретической кривой, если исходная корреляционная функция была сгенерирована, так и взаимной корреляционной функции из подсистемы формирования взаимной корреляционной функции.

Подсистема построения корреляционных функций специального вида позволяет построить корреляционные функции идеального белого шума и идеального полосового шума, которые физически сложно реализуемы, с заданием входных параметров. Передав построенную функцию на подсистему 4, можно изучить ее корреляционно-спектральные характеристики.

Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций предназначена для построения ортогональных полиномов и функции, исследования их поведения на выбранном сегменте ортогональности и общих свойств [25, 35, 46, 54].

Подсистема имитационного моделирования позволяет проводить имитационное моделирование и провести анализ разработанных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа на адекватность и пригодность при обработке экспериментальных данных. Следует заметить, что данная подсистема связана с подсистемами, соответствующими цифровым эквивалентам 1, 3 – 12 (см. рисунок 3.1), из которых экспортируются данные для последующей обработки. Данная подсистема содержит результаты моделирования в виде отчета, а исходные параметры для моделирования можно выбрать в подсистемах, указанных выше.

Подсистема ввода-вывода предназначена для открытия из файла и сохранения в файл определенного формата выбранной функциональной зависимости и ее характеристик.

Подсистема экспорта данных в MS Word предназначена для формирования отчетов определенной структуры из активной в данный момент подсистемы в текстовый редактор, для их последующего редактирования либо печати.

Подсистема экспорта данных в MS Excel позволяет выгружать результаты имитационного моделирования из аналогичной подсистемы в MS Excel для последующего анализа.

Для начала работы программы необходимо запустить файл SCAN.exe. На экране появится форма, изображенная на рисунке 3.3.

Экранную форму можно условно разбить на блоки:

1. Панель кнопок, при нажатии на которые выполняются определенные действия. В зависимости от выбранной закладки (подсистемы) на панели высвечиваются доступные для заданной подсистемы кнопки.

2. Панель-блокнот, позволяющая при работе с автоматизированной системой, не имея под рукой необходимых средств, записать требуемую информацию либо делать заметки.

3. Панель навигации, предназначенная для удобства работы с автоматизированной системой. Предоставляет возможность производить навигацию не только по закладкам, на которых организована система, но и по дереву, имеющему логическую структуру, разработанную на основании структурной схемы системы, и по списку, являющаяся упрощенной схемой навигации по дереву и имеющая идентичную логическую структуру.

4. Панель состояния, предназначенная для отображения этапа и процента выполнения решаемой задачи.

5. Панель расположения подсистем в виде закладок. При выборе подсистемы можно пользоваться как панелью навигации, так и непосредственным переходом по закладкам. На каждой закладке располагаются те кнопки, которые в данный момент активны на панели кнопок, а также компоненты ввода-вывода параметров и отображение результатов работы подсистемы.

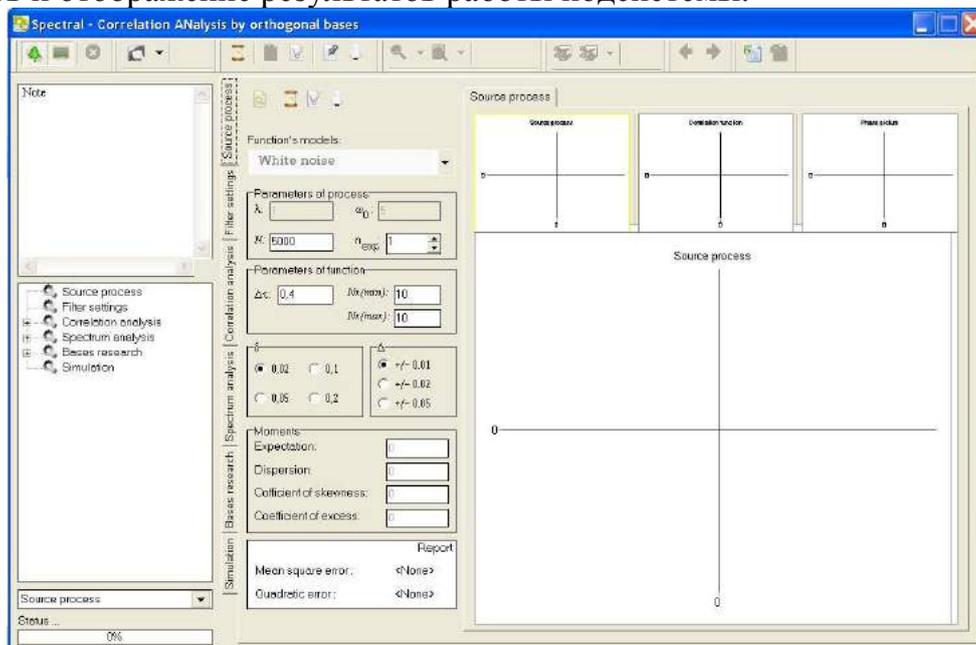


Рисунок 3.3 – Вид экранной формы начала работы (стр.1)

Представим описание кнопок и действий, которые могут производиться при нажатии на соответствующие кнопки (панель кнопок):

 - кнопка, имеющая два состояния: в активном (нажатом) состоянии панель навигации и панель состояния отображены; в неактивном (отжатом) состоянии указанные панели не отображаются;

 - кнопка, имеющая два состояния: в активном состоянии – панель-блокнот отображается, иначе – не отображается;

 - кнопка прерывания, предназначенная для остановки вычислений при работе системы в случае необходимости;

 - кнопка открытия файла (процесса, взаимной корреляционной функции, действительной компоненты спектра, мнимой компоненты спектра);

 - кнопка сохранения файла (процесса, взаимной корреляционной функции, действительной компоненты спектра, мнимой компоненты спектра, модуля и фазы спектральной плотности мощности, спектральной плотности мощности);

 - кнопка генерации источника «белого шума» с передачей параметров на подсистемы 3-8, согласно структурной схеме системы.

 - кнопка построения сгенерированной функциональной зависимости либо открытой из файла;

 - кнопка фиксации функциональных зависимостей, которая при работе в сочетании с кнопкой генерации позволяет перейти в режим имитационного моделирования;

 - кнопка поиска оптимального числа членов разложения m при заданном параметре γ ;

 - кнопка поиска оптимального параметра масштаба γ при заданном числе членов разложения ряда m ;

 - кнопка передачи параметров функциональной зависимости из заданной подсистемы;

 - кнопка формирования левой ветви взаимной корреляционной функции специального вида;

 - кнопка формирования правой ветви взаимной корреляционной функции специального вида;

 - кнопка вызова окна рекомендаций по выбору интервала дискретизации и числа ординат восстановления, располагающаяся на закладке формирования источника.

В Приложении приведена таблица, поясняющая работу всех подсистем.

На первой странице с помощью подсистемы «Рекомендации» выберем вид ВКФ и определим численные значения ее параметров (см. рис. 3.4).

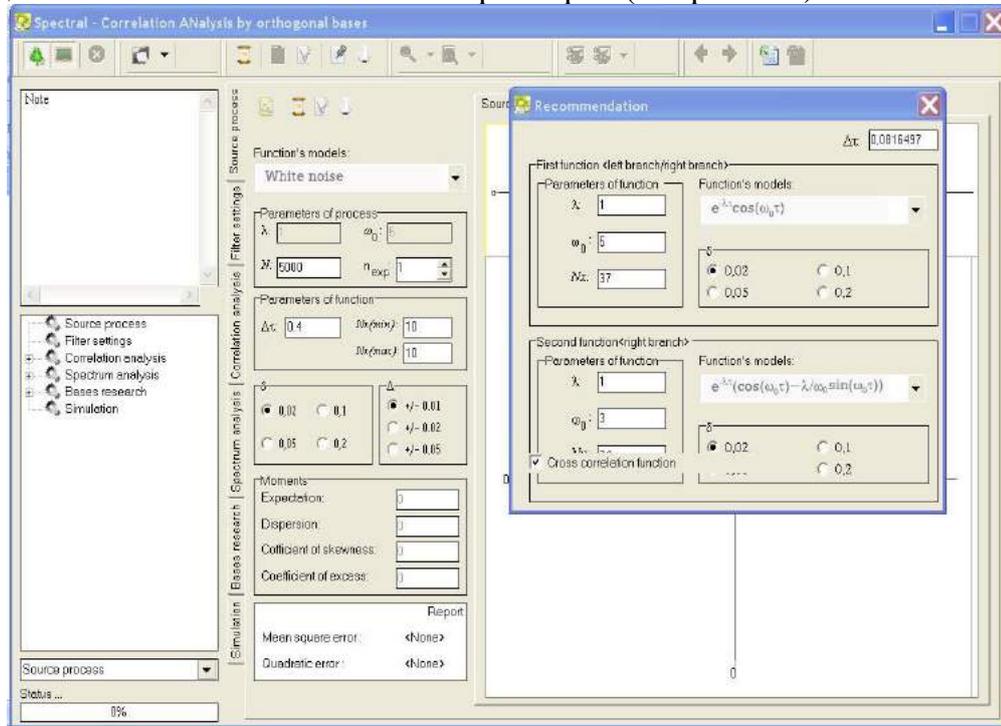


Рисунок 3.4 – Выбор ВКФ и значений ее параметров

Сгенерируем исходную некоррелированную ПСП

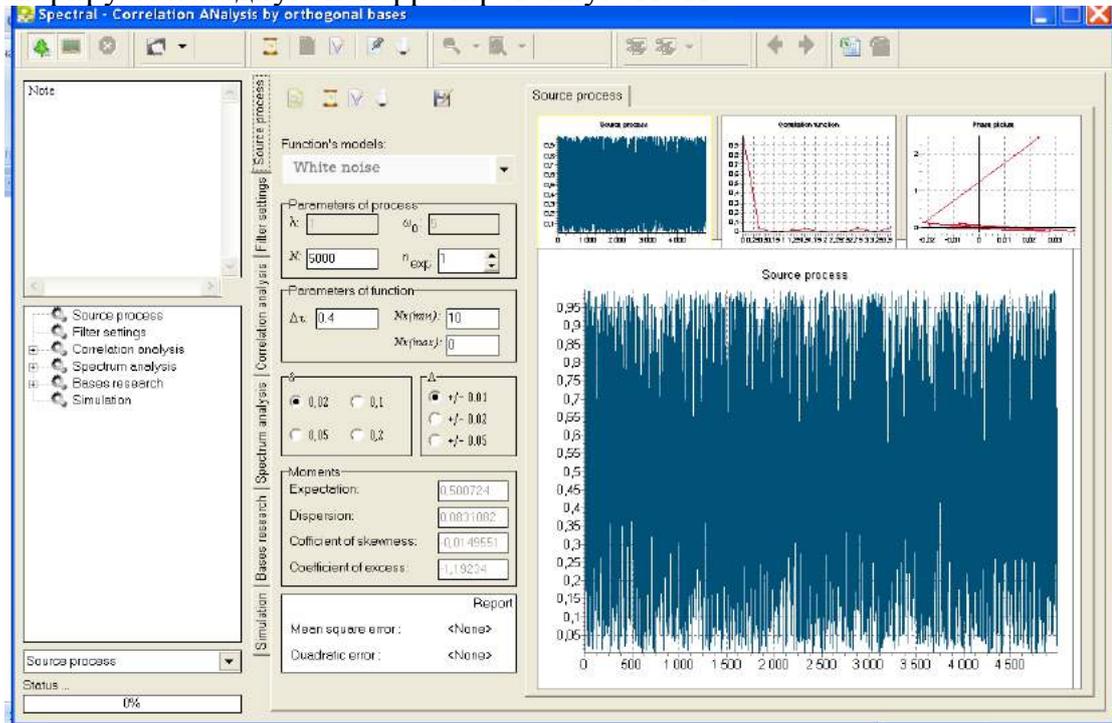


Рисунок 3.5 – Экранная форма 1 - исходная некоррелируемая ПСП

На второй странице представлены результаты фильтрации ПСП и вычисления составляющих ВКФ.

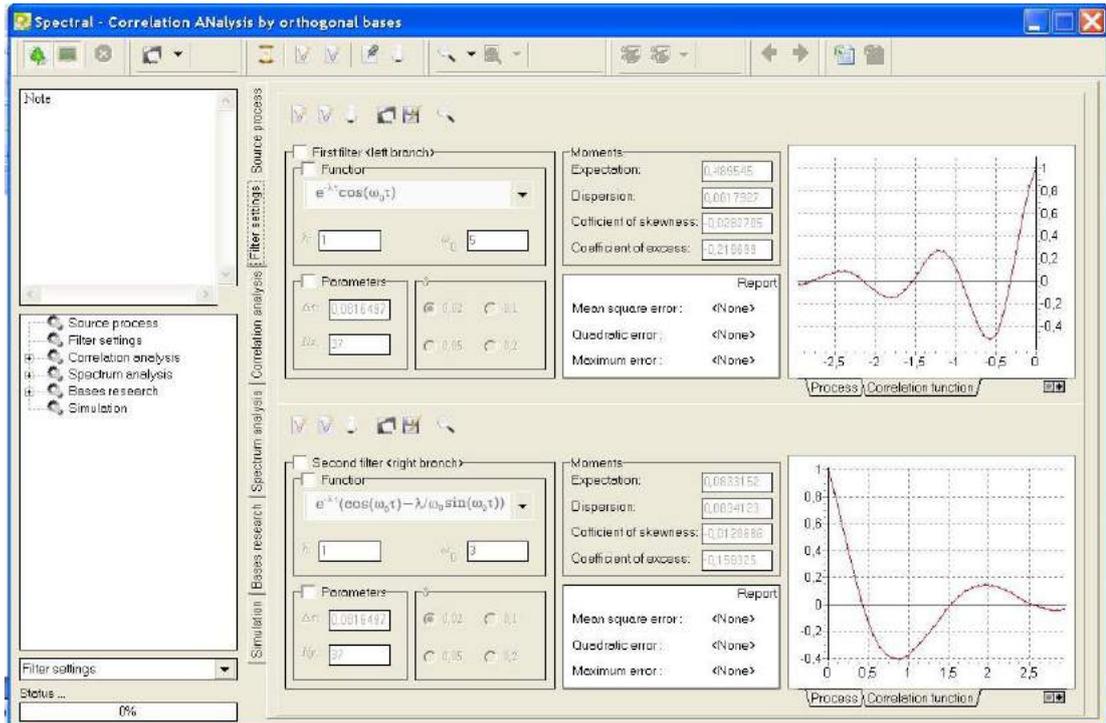


Рисунок 3.6 – Экранная форма 2 – вычисление левой и правой ветвей НКФ/ВКФ

На рисунке 3.7 представлены результаты вычисления и построения ВКФ ее производной, необходимой для построения фазового портрета, и фазовый портрет - $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)]/\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)]$.

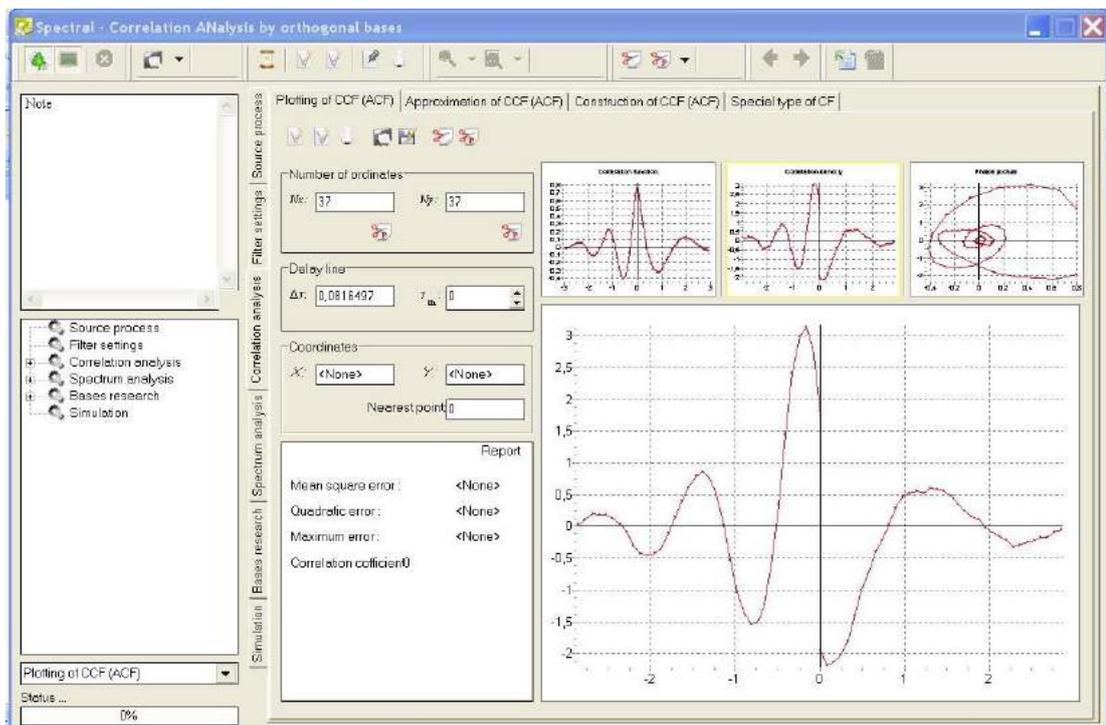


Рисунок 3.7 - Экранная форма 3 – вычисление ВКФ

На рис. 3.8 представлены результаты аппроксимации в выбранном ортогональном базисе.

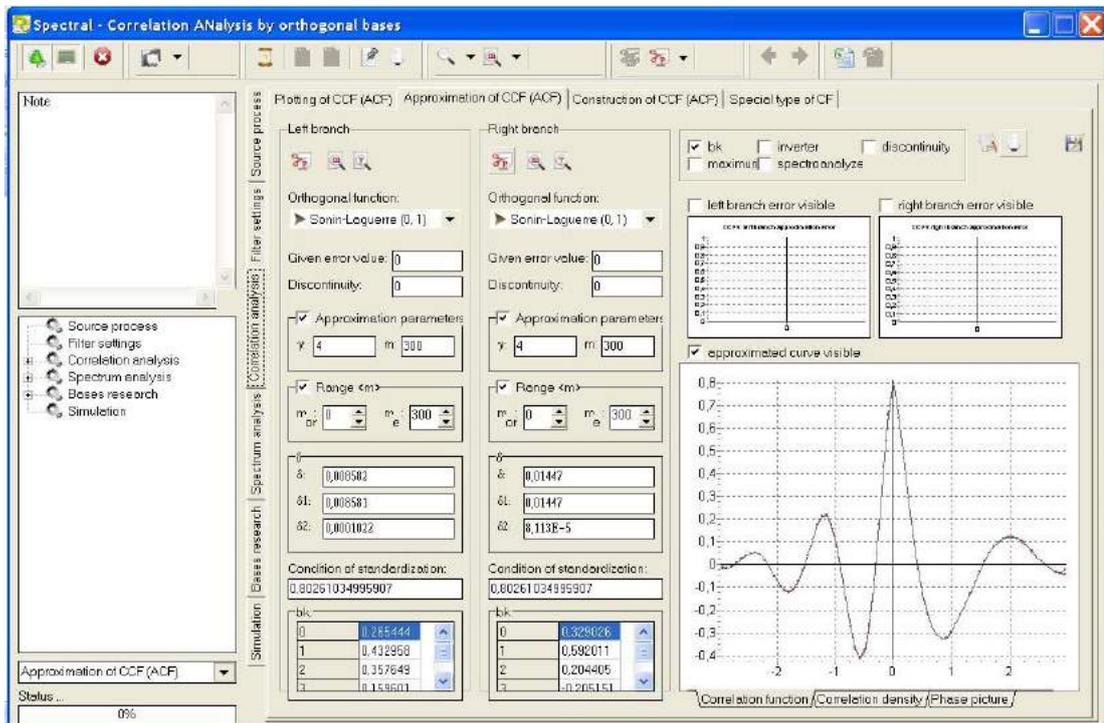


Рисунок 3.8 – Экранная форма 4 - результаты аппроксимации НКФ/ВКФ

На рисунке 3.9 представлены результаты построения модели ВСПМ (экранная форма 5).

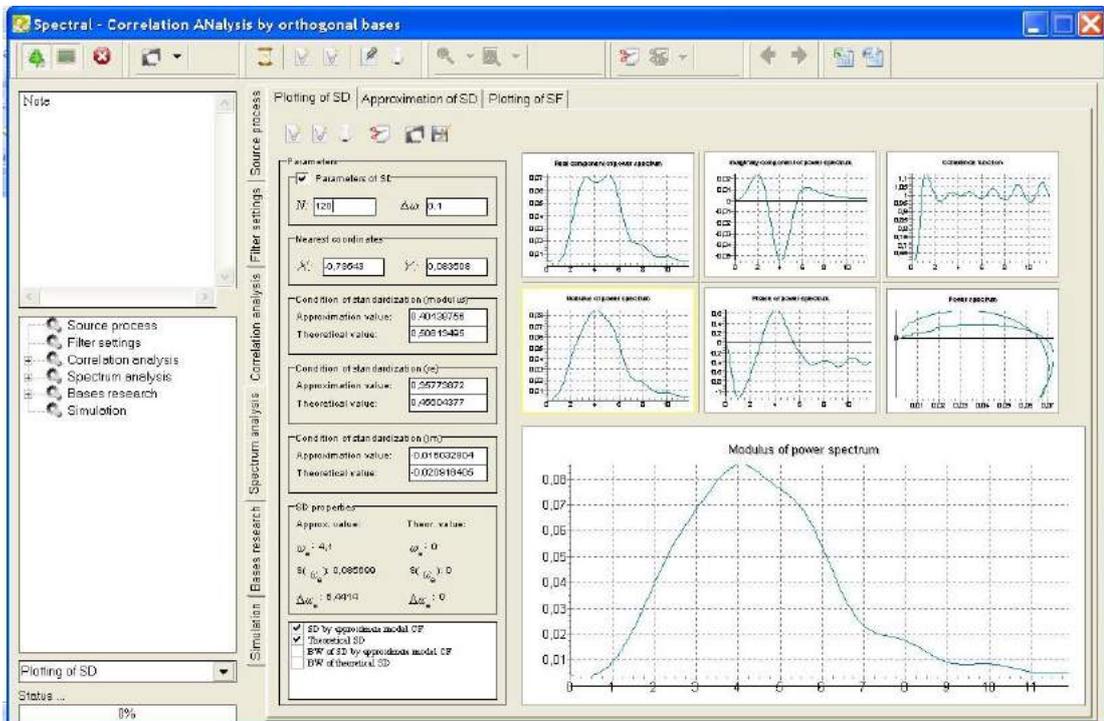


Рисунок 3.9 – Экранная форма 5 – вычисление СПМ и ее составляющих

На рис.3.10 представлены результаты построения спектральной функции.

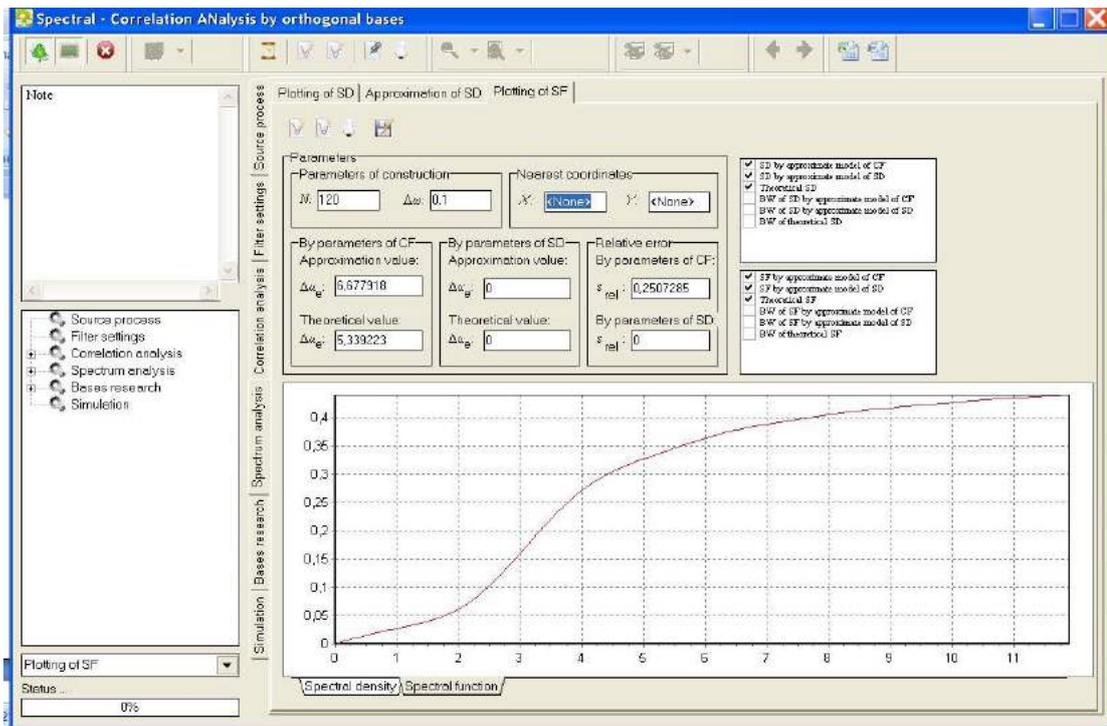


Рисунок 3.10. – Экранная форма 6 - построение спектральной функции

На рис. 3.11. Приведены результаты анализа ортогональных моделей корреляционно-спектрального анализа методом имитационного моделирования.

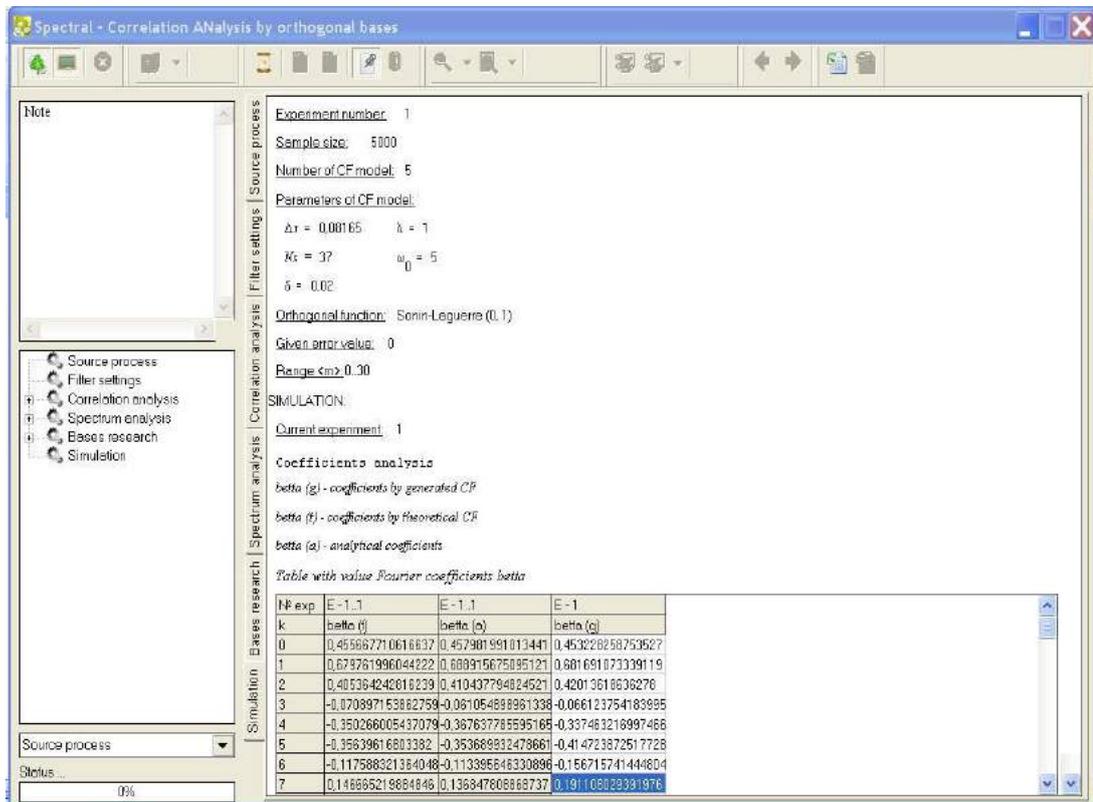


Рисунок 3.11 – Форма 7 - исходные данные имитационного моделирования

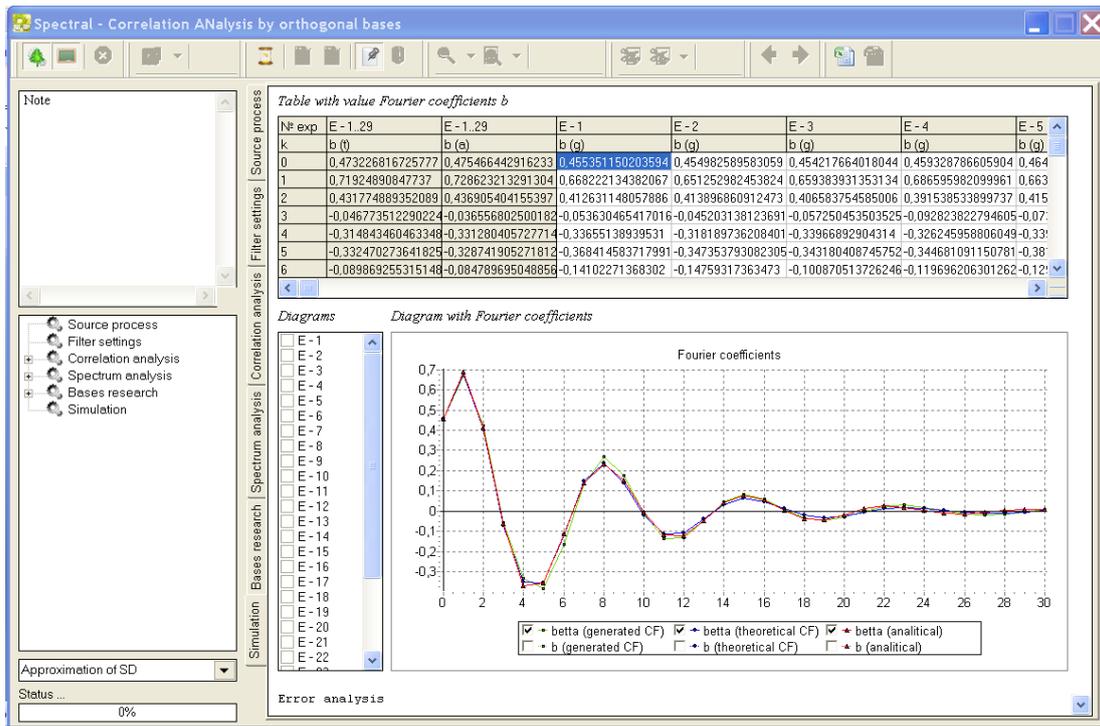


Рисунок 3.12 - Форма 7 - коэффициенты разложения (Фурье, 29 реализаций)

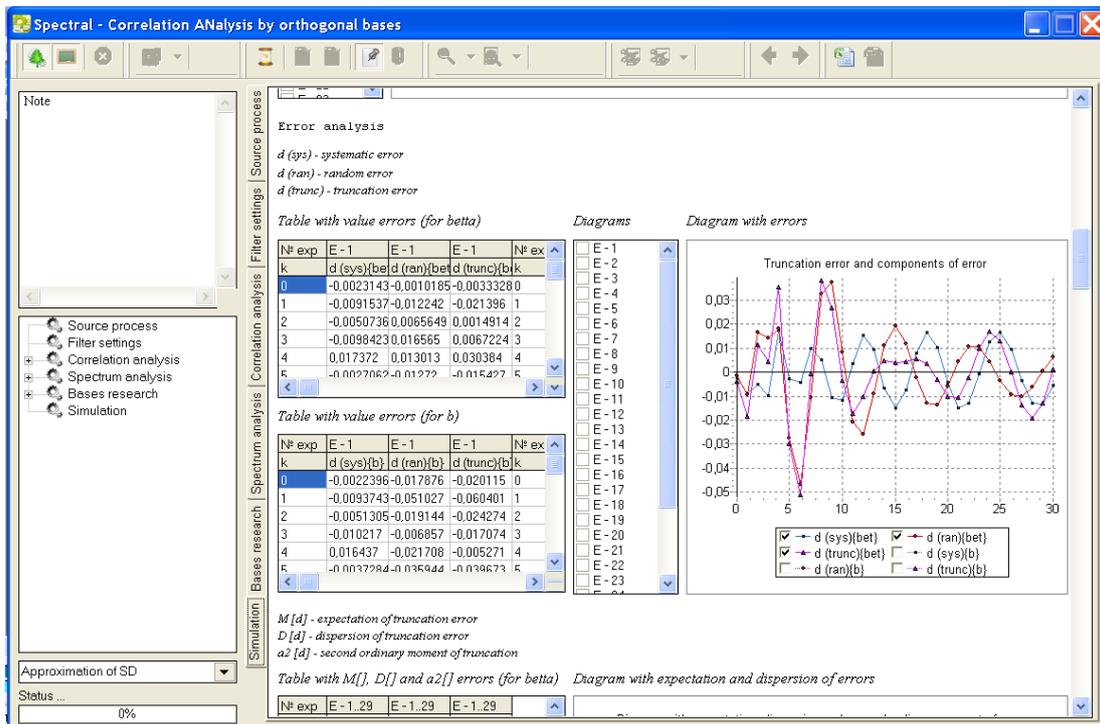


Рисунок 3.13 - Форма 7 - погрешности оценки коэффициентов разложения (29 реализаций)

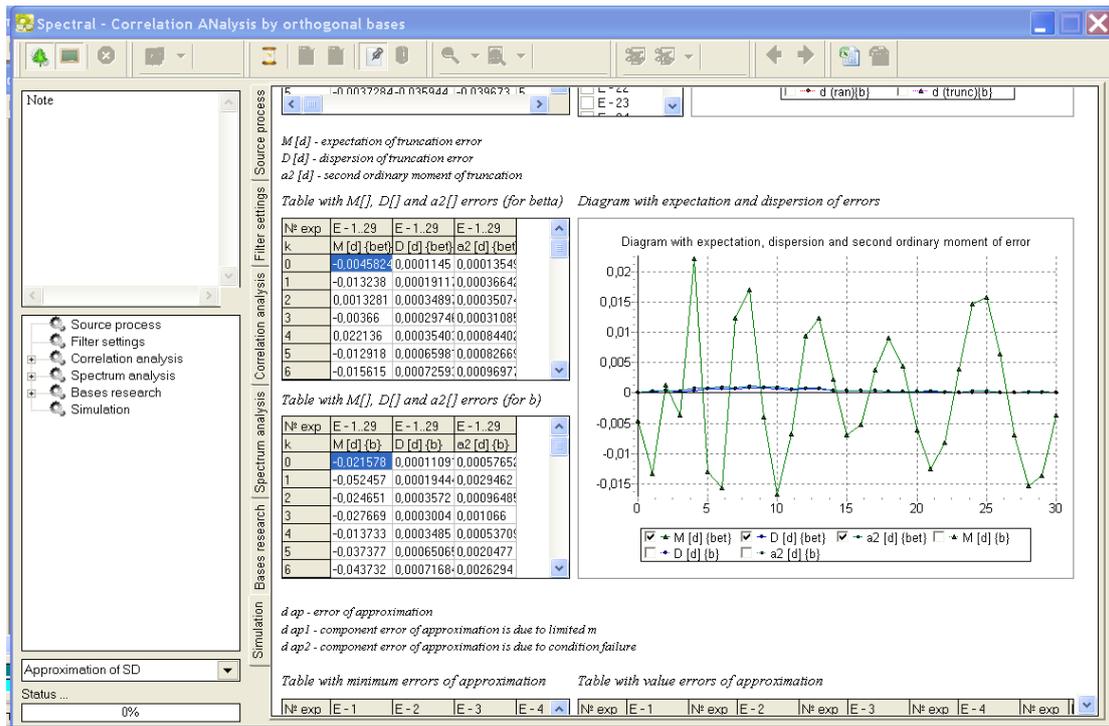


Рисунок 3.14 - Форма 7 - диаграмма математических ожиданий и дисперсии оценок (29 реализаций)

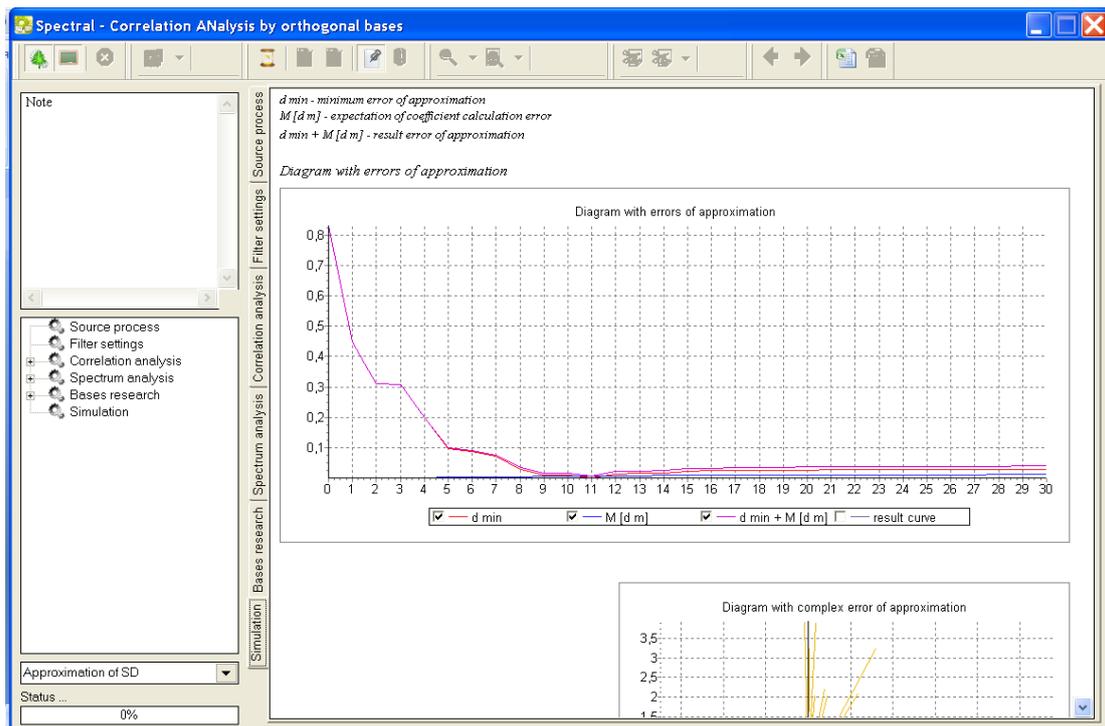


Рисунок 3.15 - Форма 7 - погрешности аппроксимации КФ (29 реализаций)

Результаты вычисления НКФ для объема выборки $N=5000$ по 29 реализациям представлены на рисунке 3.16, а спектральных плотностей мощности и ее составляющих – на рис. 3.17.

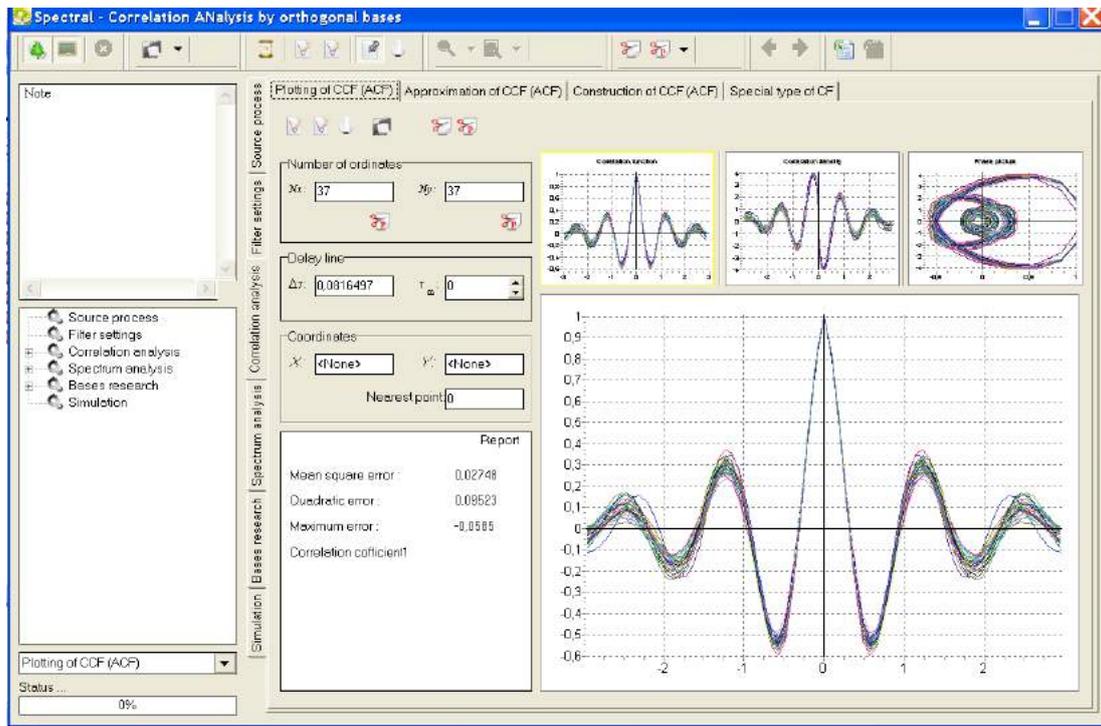


Рисунок 3.16 - Корреляционные функции (29 реализаций)

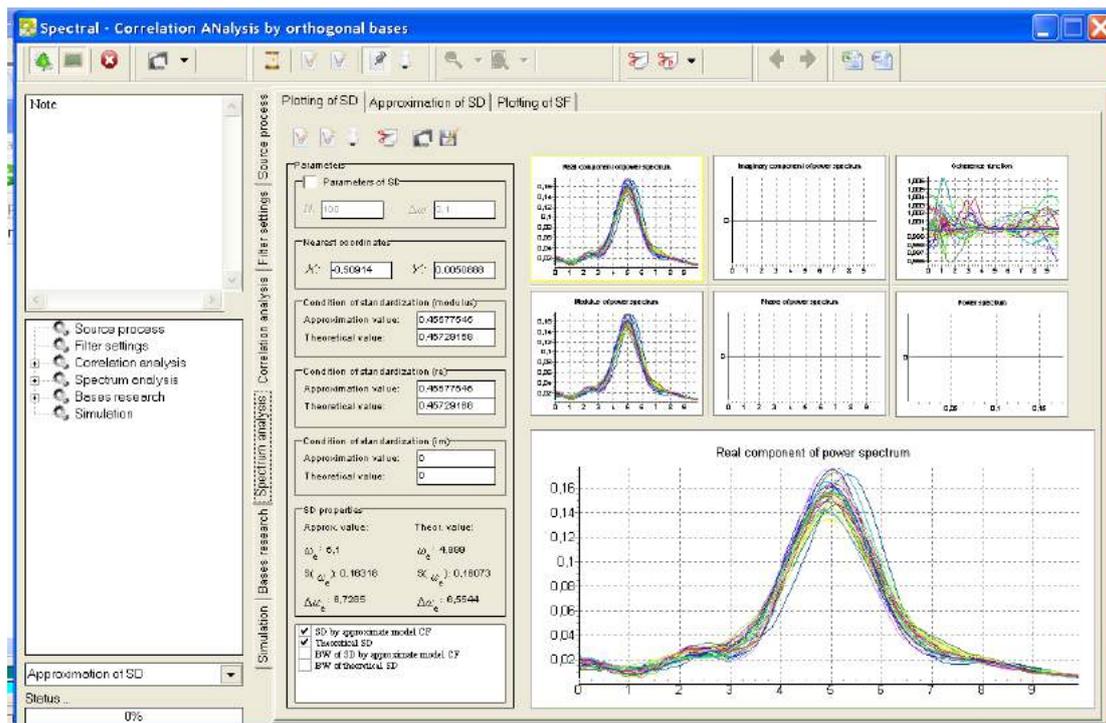


Рисунок 3.17. - Спектральные плотности мощности (29 реализаций)

В качестве демонстрации работы автоматизированной системы, рассмотрим работу системы при решении задачи аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа с использованием корреляционных функций специального вида.

На рисунке 3.18 представлена экранная форма подсистемы построения корреляционной функции специального вида, в качестве которой выбрана корреляционная функция полосового шума.

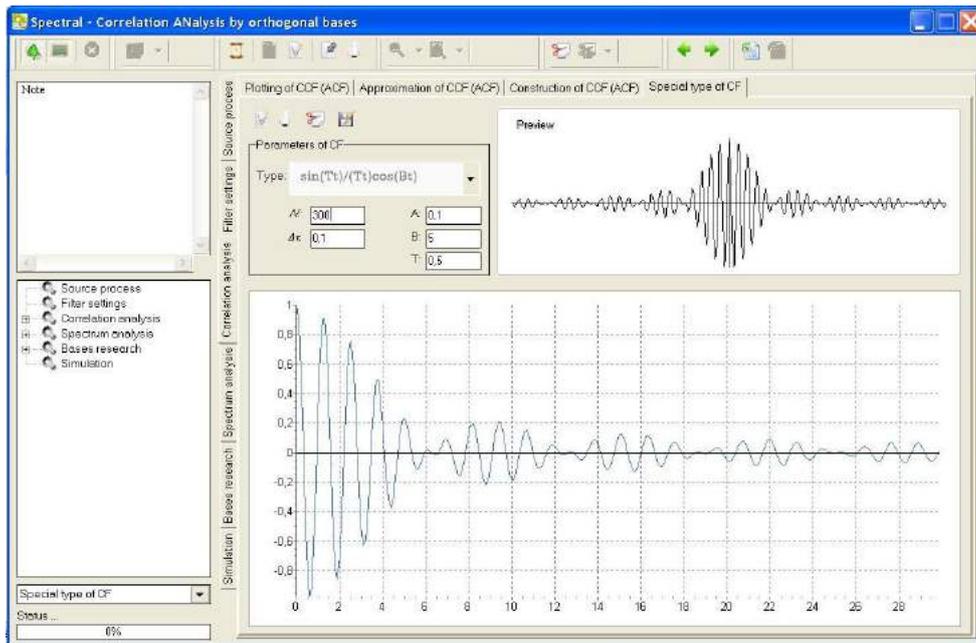


Рисунок 3.18 – Экранная форма подсистемы построения корреляционных функций специального вида

При нажатии соответствующей кнопки передадим сформированную автокорреляционную функцию на подсистемы формирования взаимных корреляционных функций (см. рис. 3.19).

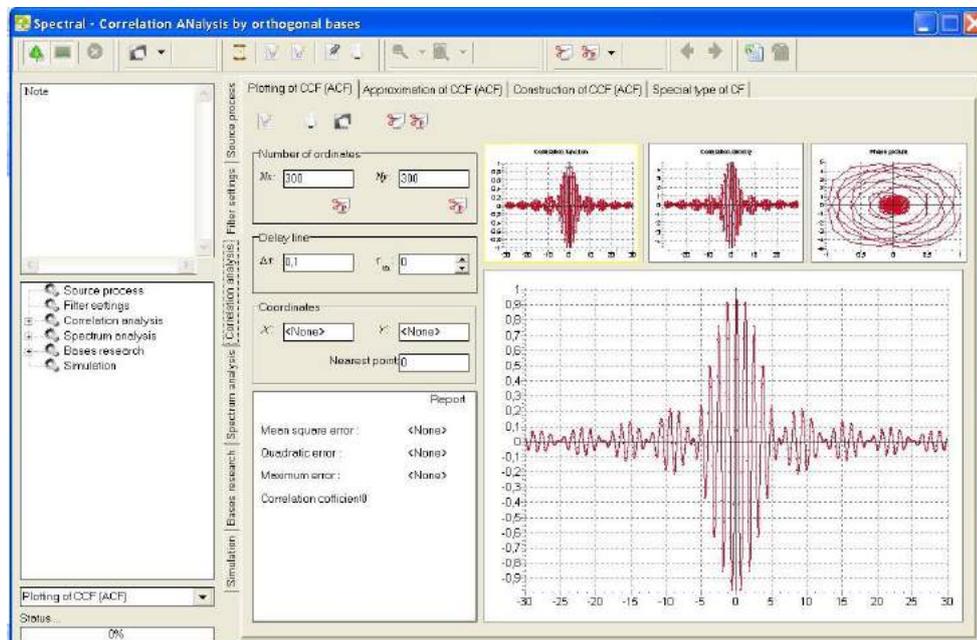


Рисунок 3.19 - Экранная форма подсистемы формирования ВКФ

Настроив параметры аппроксимации, построим аппроксимативную модель сформированной корреляционной функции в выбранном ортогональном базисе (см. рис. 3.20).

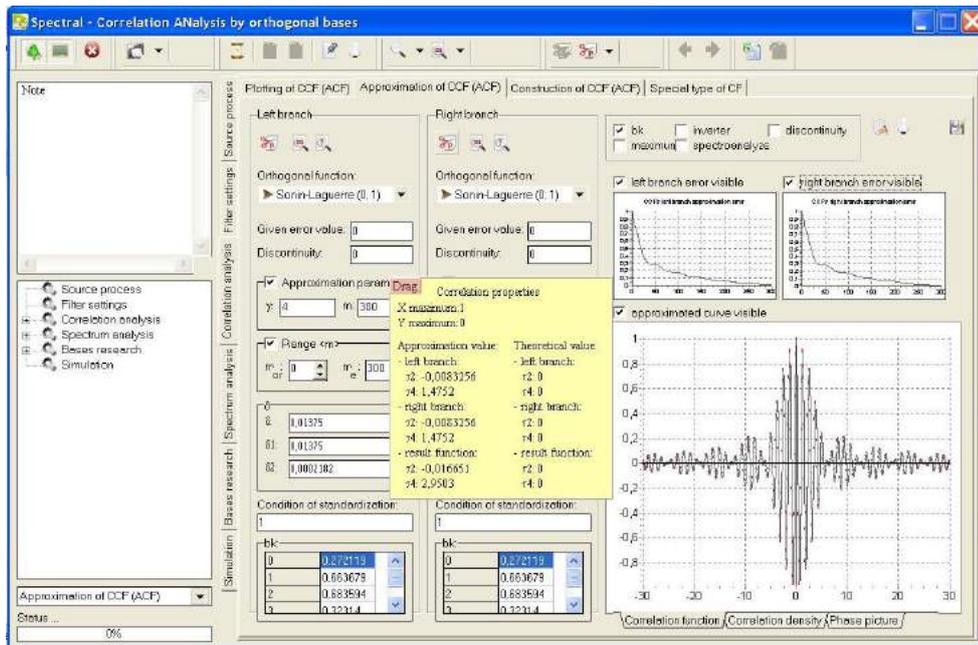


Рисунок 3.20 - Экранная форма подсистемы аппроксимации КФ с отображением результатов эксперимента

Нажатием правой кнопки мыши по графическому плоту, на котором отображается функциональная зависимость и ее ортогональная модель, выгружается информационное окно с обобщенными корреляционными характеристиками.

По параметрам ортогональной модели корреляционной функции оценим модель спектральной плотности мощности. Вид подсистемы построения спектра и его составляющих приведен на рисунке 3.21.

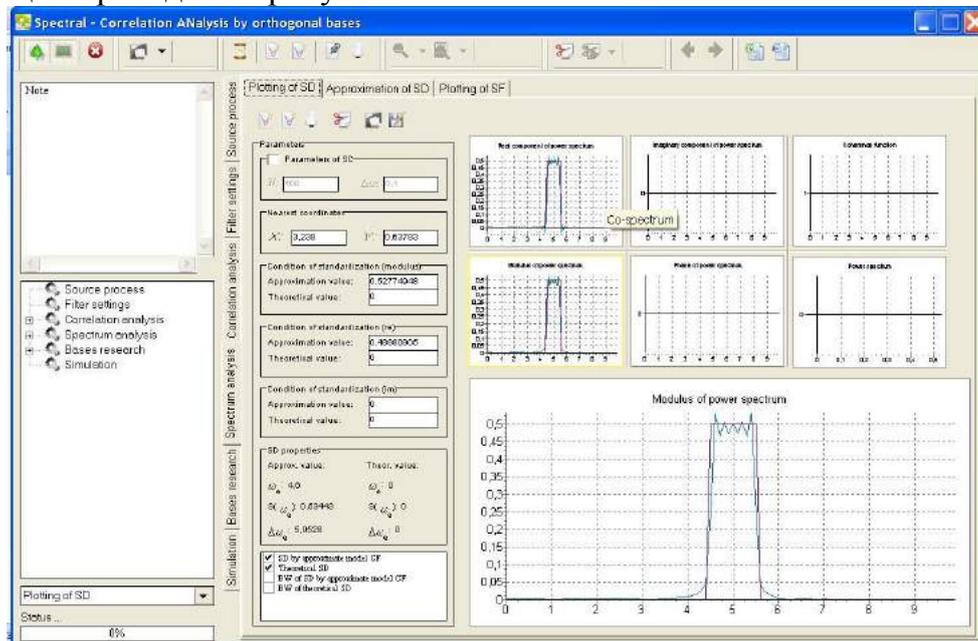


Рисунок 3.21 – Экранная форма подсистемы построения модели СПМ

Нажатием правой кнопки мыши по соответствующим графическим плотам (действительная часть, мнимая часть, модуль СПМ), на которых отображается функциональные зависимости, выгружается информационное окно с обобщенными спектральными характеристиками. Также предоставляются следующие возможности: наложить модуль спектральной плотности мощности и эквивалентную ширину спектра мощности; увеличить масштаб графика мнимой части, действительной части и модуля спектральной плотности мощности.

3.3 Автоматизированная система аппроксимативного анализа нестационарных процессов

Часто при решении прикладных задач исследуемый процесс является нестационарным по той или иной характеристике.

В большинстве случаев для описания нестационарных случайных процессов можно использовать аддитивно-мультипликативную модель:

$$y(t) = \varphi(t) + \sigma_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t), \quad (3.5)$$

где

$\varphi(t)$ – математическое ожидание нестационарного случайного процесса;

$\sigma_x^2(t)$ – дисперсия нестационарного случайного процесса;

$\overset{\circ}{x}(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $M[\overset{\circ}{x}(t)] = 0$ и единичной дисперсией $D[\overset{\circ}{x}(t)] = 1$.

Представим $\varphi(t)$, $\sigma_x^2(t)$ детерминированными функциями времени. Тогда в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров получим следующие частные модели (см. таблицу 3.1, полученную из таблицы 1.4).

Частные модели исследуемых процессов

Таблица 3.1

$\varphi(t)$	$\sigma_x^2(t)$	$x(t) = \varphi(t) + \sigma_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	Название процесса
$\varphi(t)$	0	$x(t) = \varphi(t)$	детерминированный
m_x	1	$x(t) = m_x + \overset{\circ}{x}(t)$	стационарный
$\varphi(t)$	1	$x(t) = \varphi(t) + \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию
0	$\sigma_x^2(t)$	$x(t) = \sigma_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по дисперсии
$\varphi(t)$	$\sigma_x^2(t)$	$x(t) = \varphi(t) + \sigma_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию и дисперсии

Приведенные модели случайных процессов не являются исчерпывающими, но часто являются достаточными при решении разнообразных прикладных задач в различных предметных областях [25].

В соответствии с моделью необходимо:

- 1) определить модель тренда (математического ожидания) $\varphi(t)$ реализации случайного процесса $y(t)$;
- 2) найти центрированную реализацию случайного процесса;
- 3) определить модель дисперсии $\sigma_x^2(t)$ центрированной реализации случайного процесса;
- 4) нормировать центрированную реализацию случайного процесса с использованием полученной модели дисперсии.

Аддитивный тренд представляет собой разложение выборки нестационарного случайного процесса в выбранном ортогональном базисе $\psi_k(x)$ с ограниченным числом коэффициентов разложения β_k :

$$\hat{\phi}(t) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(t). \quad (3.6)$$

В соответствии с выражением (4.5)

$$\beta_k = \frac{1}{\|\Psi_k\|_a^2} \int_a^b y(t) \psi_k(t) \mu(t) dt. \quad (3.7)$$

Операция центрирования случайного процесса с использованием полученной модели будет иметь вид:

$$\overset{\circ}{y}(t) = \sigma_x^2 \overset{\circ}{x}(t) = y(t) - \hat{\phi}(t). \quad (3.8)$$

Построение модели дисперсии (мультипликативного тренда)

$$\hat{\sigma}_x^2(t) = \sum_{k=0}^{m1} \mathcal{G}_k \psi_k(t) \quad (3.9)$$

производится аналогичным образом с той разницей, что в подынтегральном выражении (3.7) вместо исходной реализации случайного процесса стоит квадрат центрированной реализации. Нормированный случайный процесс по СКО определяется выражением:

$$\overset{\circ}{x}(t) = \overset{\circ}{y}_n(t) = \overset{\circ}{y}(t) / \hat{\sigma}_x(t). \quad (3.10)$$

Для вычисления коэффициентов разложения применяется метод, основанный на представлении аппроксимируемой функции в кусочно-линейном виде [40]

$$f(t) = \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} (a_j + b_j t) \delta_j, \quad (3.11)$$

где $\delta_j = \begin{cases} 1, & t_j \leq t \leq t_{j+1}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - индикатор состояния.

Тогда, подставив (3.11) в (3.7), получим:

$$\beta_k = \frac{1}{\|\Psi_k\|_a^2} \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} \left(a_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} t \psi_k(t) \mu(t) dt + b_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \psi_k(t) \mu(t) dt \right). \quad (3.12)$$

Такой способ вычисления коэффициентов позволяет значительно снизить методическую погрешность, возникающую при применении традиционных численных методов интегрирования. Для иллюстрации этого утверждения на рисунке 3.22 приведен график зависимости относительной погрешности аппроксимации от числа членов разложения в ортогональном базисе Лежандра функции $y(t) = \cos(33t)$, заданной 101 точкой, равноотстоящей на интервале $[0,1]$. Вычисление интеграла для определения коэффициентов разложения точно-заданной функции производилось методом трапеций, методом Симпсона и вышеприведенным методом первообразных.

Из графика видно, что использованный метод интегрирования позволяет не только повысить точность вычисления коэффициентов, но и сохранить ее с увеличением числа членов разложения, а следовательно – с усложнением вычислений.

Важным свойством применяемого метода вычисления коэффициентов является то, что он работает не с интервалом дискретизации, а с конкретными временными от-

счетами, то есть может быть в равной степени применен как к эквидистантным, так и к неэквидистантным временным рядам [31].

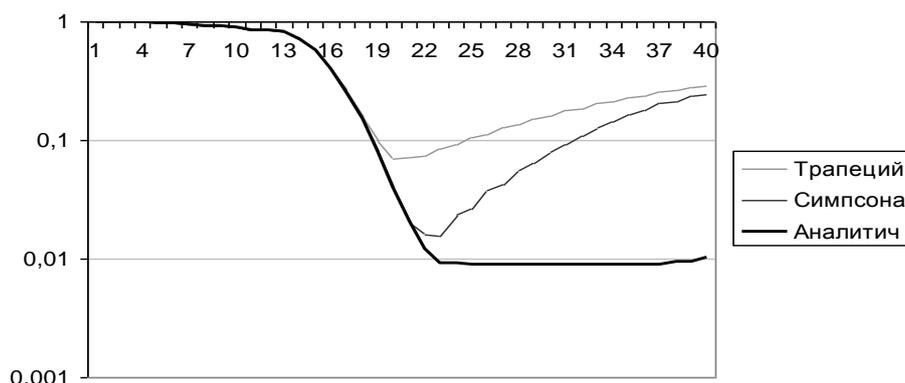


Рисунок 3.22 – Относительная погрешность аппроксимации

Особенность построения ортогональных моделей тренда и дисперсии нестационарного неэквидистантного временного ряда определяется моделью входного процесса

$$[y(t_i)]_{i=1,\dots,N} \quad (3.13)$$

Представив

$$\hat{\varphi}(t_i) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(t_i), \quad (3.13)$$

где β_k определяется выражением (1.8), определим

$$\hat{y}(t_i) = y(t_i) - \hat{\varphi}(t_i), \quad (3.14)$$

$$\hat{\sigma}^2(t_i) = \sum_{k=0}^{m1} \vartheta_k \psi_k(t_i), \quad (3.15)$$

$$\hat{x}(t_i) = \hat{y}_n(t_i) = \hat{y}(t_i) / \hat{\sigma}(t_i). \quad (3.16)$$

Решение перечисленных задач возможно с применением разработанной системы [25].

Для запуска приложения в операционной среде Windows следует открыть папку, содержащую исполняемые файлы приложения и запустить исполняемый файл Approximate.exe. [25].

После запуска приложения открывается основное окно, в верхней части которого находятся кнопки с пиктограммами и подписями, по нажатию на которые выполняется соответствующее действие (рис. 3.23).

Общие принципы работы с системой

Поскольку при работе с системой, когда постоянно приходится иметь дело с выборками, в любой момент по ней может потребоваться некоторая информация (диапазон значений, число отсчетов и т.п.), с правой стороны от графика, на котором она изображена, всегда отображаются следующие данные по выборке:

- тип выборки – эквидистантная/неэквидистантная;
- число отсчетов;
- диапазон значений X;
- диапазон значений Y;
- оценка математического ожидания;

- оценка дисперсии;
- значение критерия серий.

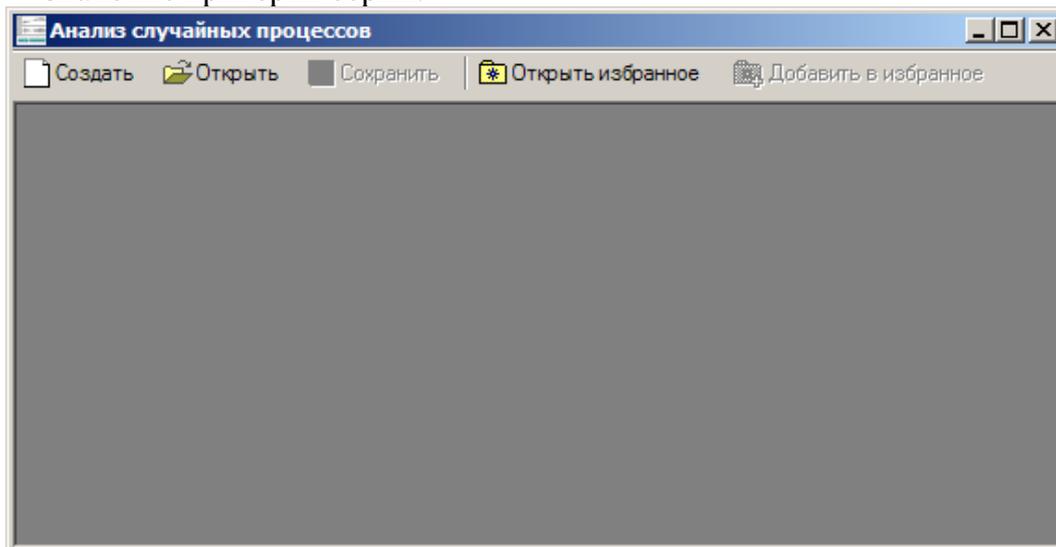


Рисунок 3.23 – Главное окно приложения

В системе также предусмотрена возможность работы с несколькими подсистемами одновременно, при этом каждая подсистема может быть в один момент открыта в неограниченном количестве экземпляров для обработки различных данных. Для быстрого переключения между экземплярами подсистем используется меню в верхней части окна с пиктограммами и подписями: для подсистемы генерации – это значок чистого листа с подписью «Создание выборки», для подсистемы центрирования и нормирования – листок со схематическим изображением выборки и название открытого файла, либо элемента «Избранного».

Работа с подсистемой генерации выборки

По нажатию кнопки «Создать» запускается подсистема генерации выборки нестационарного случайного процесса, исходный вид которой показан на рис. 3.24

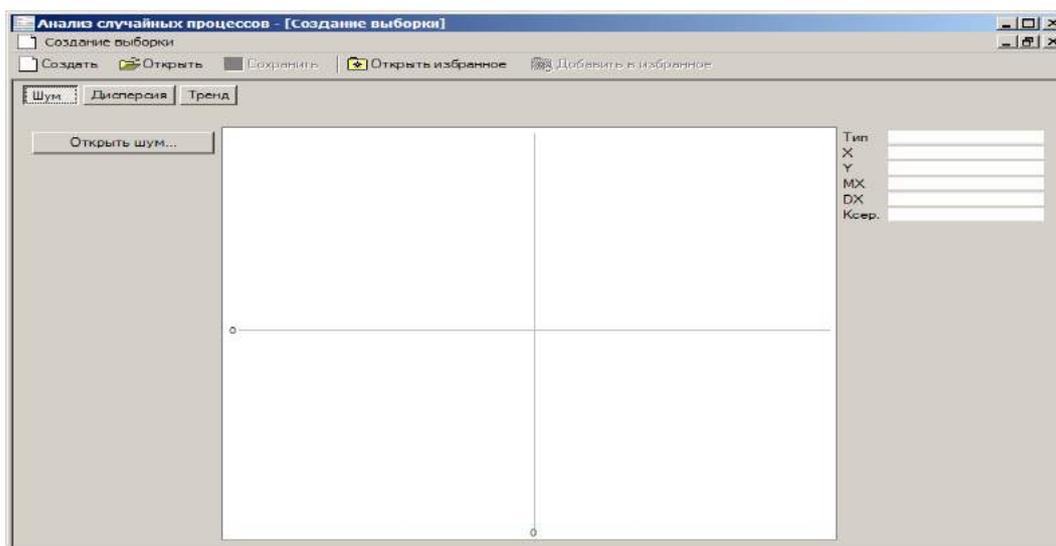


Рисунок 3.24 – Исходный вид подсистемы генерации

По нажатию кнопки «Открыть шум» открывается стандартное диалоговое окно выбора файла с расширением для предварительного просмотра выборки (рис. 3.25)

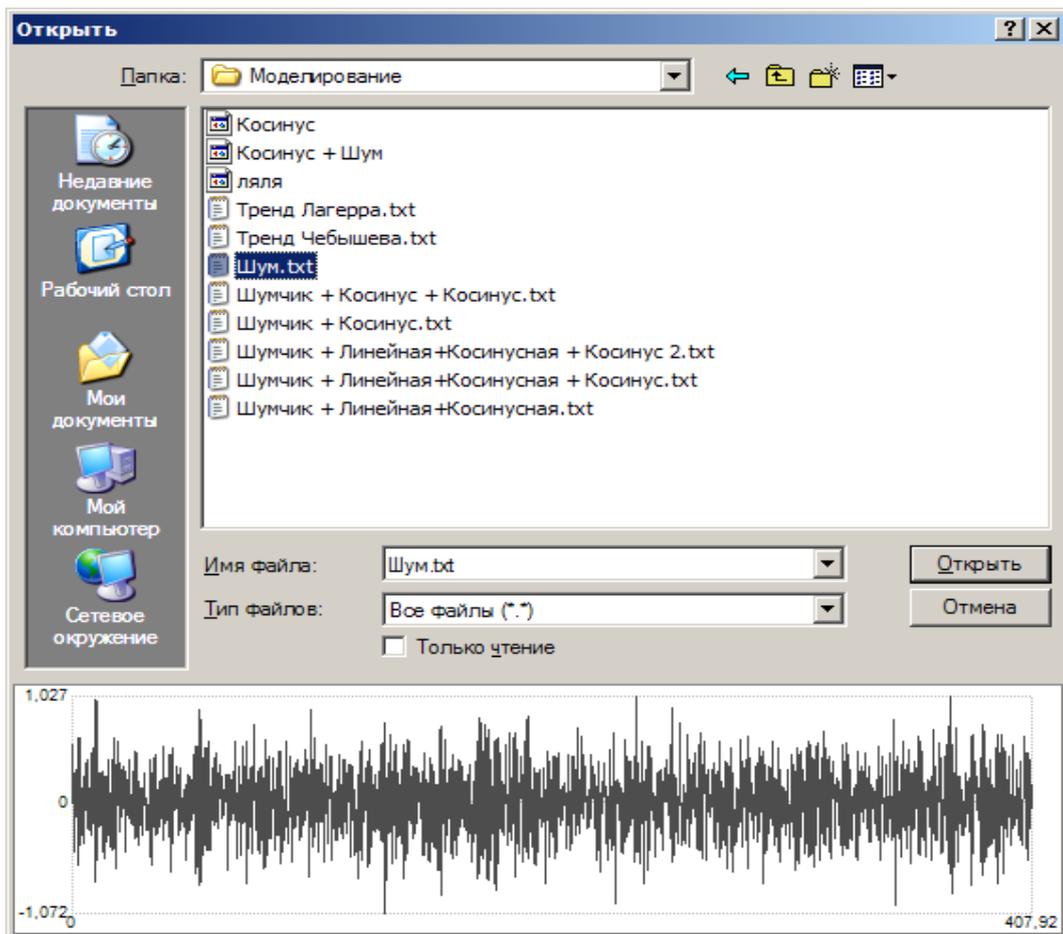


Рисунок 3.25 – Окно выбора файла

При выделении файла, содержащего поддерживаемые программой данные, внизу диалогового окна отображается графическое представление данных, содержащихся в файле. По нажатию кнопки «Открыть» диалоговое окно закрывается, и данные передаются в подсистему генерации (рис. 3.26)

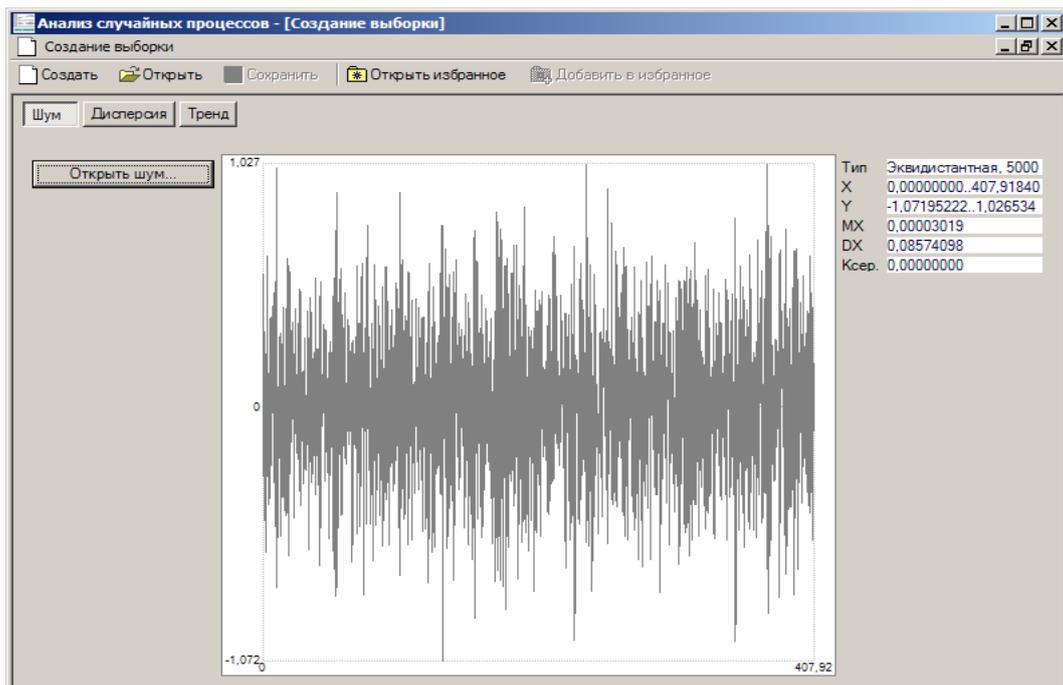


Рисунок 3.26 – Вид подсистемы генерации после загрузки шума

Эти же данные отображаются всюду в системе, где происходит работа с выборкой.

После загрузки в систему данных для перехода к наложению мультипликативного тренда следует нажать на кнопку «Дисперсия» в верхней части окна. В результате окно приложения будет разделено на две части: в верхней части задается функция, представляющая мультипликативный тренд, а в нижней – результат наложения мультипликативного тренда на шум. По умолчанию вид мультипликативного тренда не определен, поэтому в нижней части окна отображаются те же данные, что поступили на вход. Для определения вида функции следует выбрать ее из выпадающего списка, как показано на рис. 3.27.

После выбора вида функции под выпадающим списком появятся поля ввода с подписями, соответствующие параметрам выбранной функции. Для задания значения параметра следует перейти в соответствующее поле, щелкнув по нему мышью, либо нажатием клавиши «Tab», и ввести требуемое значение параметра. По окончании ввода, после нажатия клавиши «Enter», график функции обновится, согласно новым значениям параметра, а также обновится предварительный просмотр в нижней части окна (рис. 3.28).

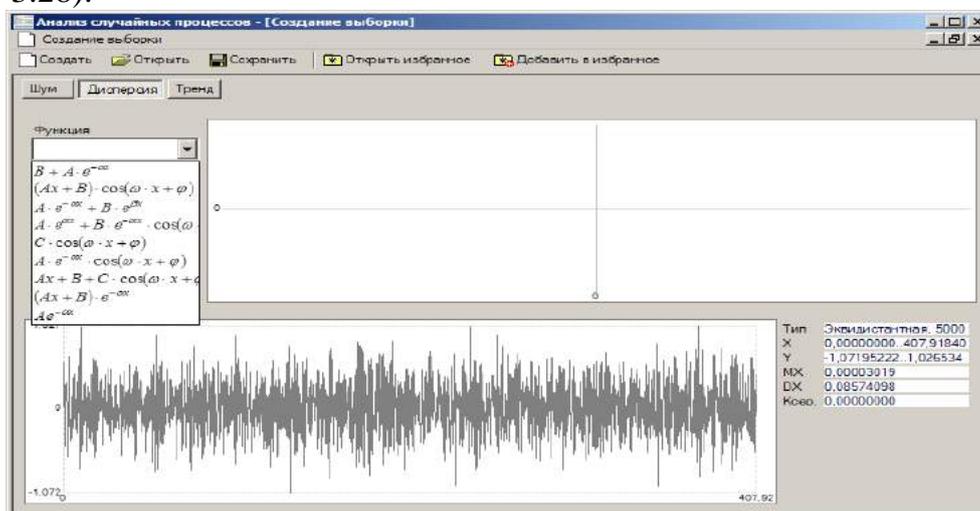


Рисунок 3.27 – Выбор вида дисперсии

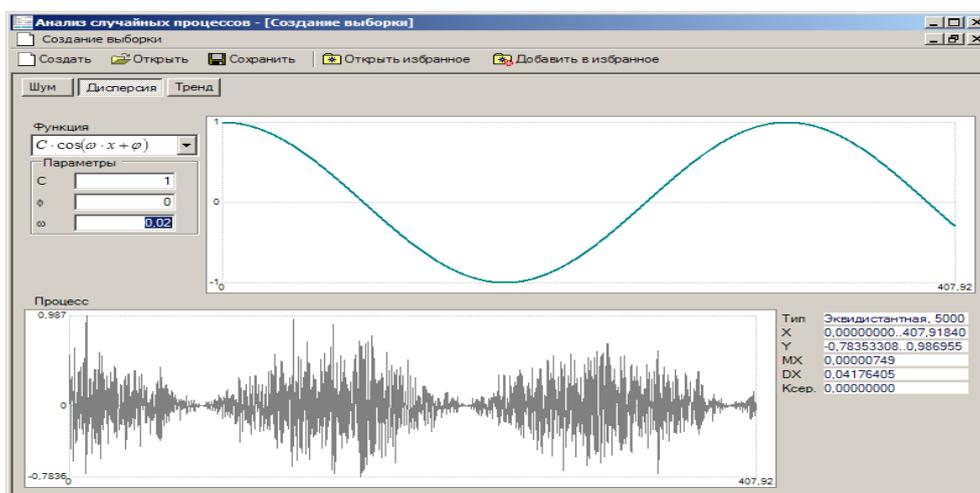


Рисунок 3.28 – Просмотр результата наложения дисперсии

Для применения к полученной выборке аддитивного тренда выполняется переход в подсистему наложения тренда нажатием кнопки «Тренд» рядом с кнопкой «Дисперсия». Работа с подсистемой наложения аддитивного тренда полностью аналогична с подсистемой наложения мультипликативного тренда (рис. 3.29).

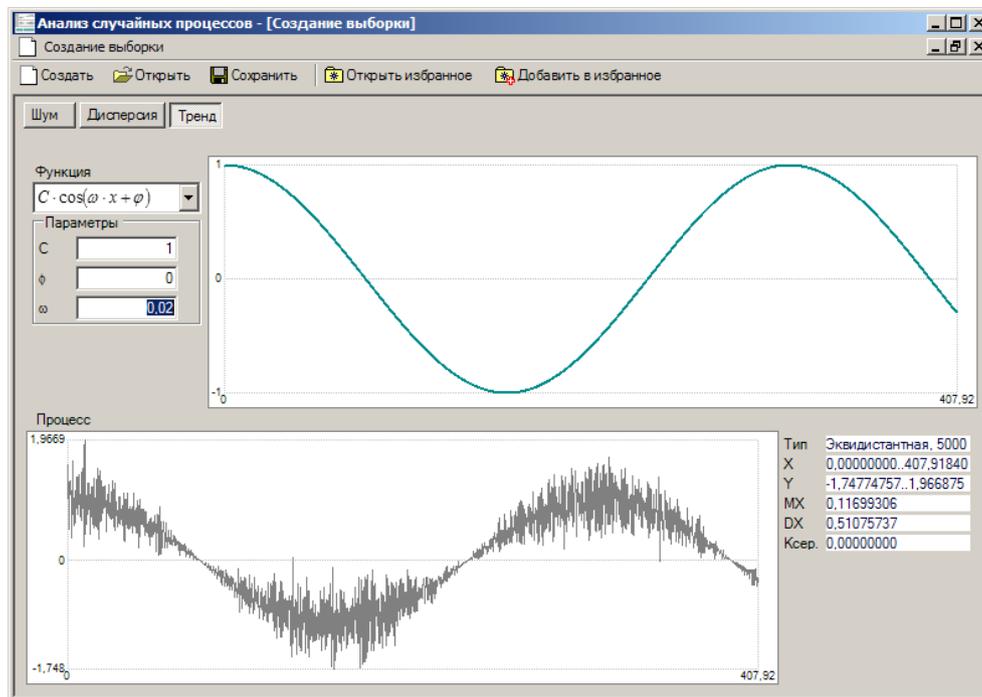


Рисунок 3.29 – Вид подсистемы наложения тренда

Для сохранения результатов наложения в файл следует нажать кнопку «Сохранить» и выбрать из выпадающего меню, что именно следует сохранить: тренд или полученную реализацию нестационарного случайного процесса. Кроме того, в любой момент можно добавить промежуточные результаты моделирования, а также полученный тренд в «Избранное», нажав на кнопку «Добавить в избранное».

Работа с подсистемой аппроксимации нестационарных случайных процессов

Чтобы открыть ранее сохраненные данные, либо данные, полученные из другого источника, следует нажать на кнопку «Открыть» в верхней части окна системы. При нажатии на эту кнопку появится окно открытия файла, показанное на рис. 3.30. После выбора файла с данными в зависимости от их типа запускается подсистема работы с выборкой, либо подсистема просмотра модели.

Вид подсистемы работы с выборкой в начальный момент времени показан на рис. 3.31.

Для перехода в подсистему центрирования и нормирования выборки следует нажать кнопку «Центрирование и нормирование» в верхней части окна. Для перехода к подсистеме экстраполяции следует нажать кнопку «Экстраполяция», расположенную рядом с кнопкой «Центрирования и нормирование».

В подсистеме центрирования и нормирования окно приложения разбито на три горизонтальные части, как показано на рис. 3.32.

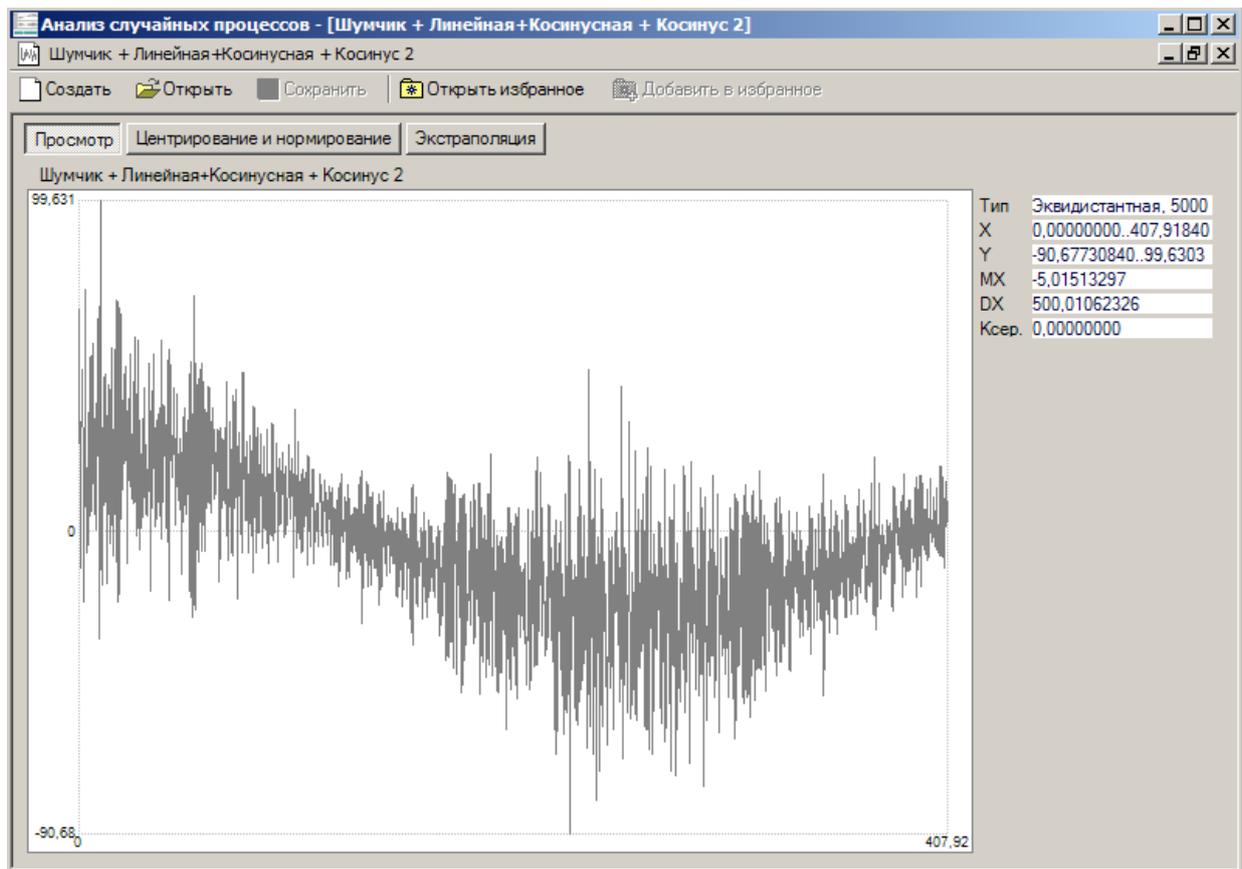


Рисунок 3.30 – Подсистема работы с выборкой

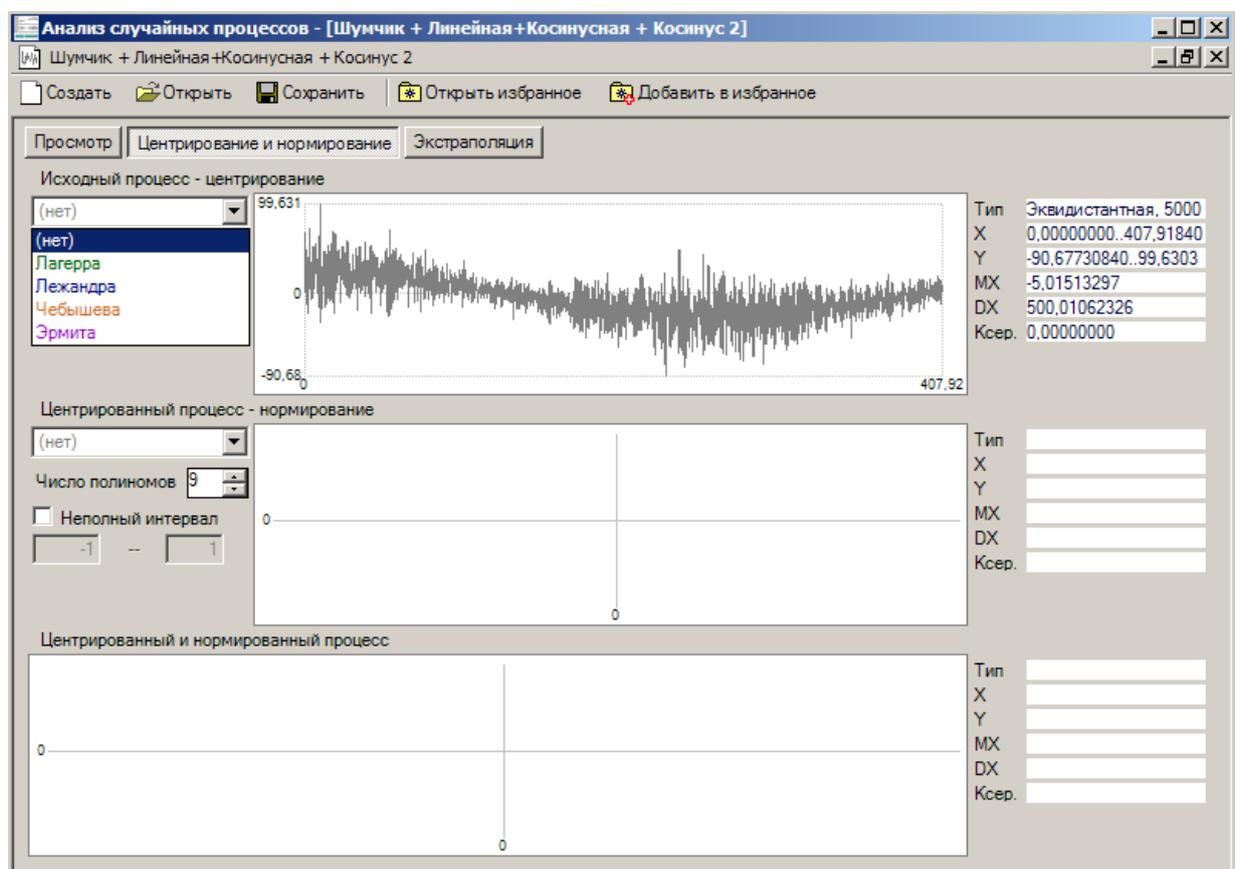


Рисунок 3.31 – Вид подсистемы центрирования и нормирования

На верхнем графике показана выборка, а также график модели выделяемого тренда. Для выбора ортогонального базиса, в котором происходит построение модели тренда, следует щелкнуть на выпадающем списке и выбрать из него название базиса. Для задания числа членов разложения следует перейти к полю, подписанному «Число полиномов», и ввести значение. Кроме того, находясь в этом поле, изменить значение можно последовательно, нажимая кнопки «Вверх» и «Вниз» для увеличения и уменьшения значения соответственно.

Для использования части интервала ортогональности следует отметить галочку «Неполный интервал» и ввести в поля под ней значения для левой и правой границ интервала. По окончании ввода каждого из значений следует нажать клавишу «Enter», либо перейти в другое поле. При выборе базиса Лагерра и Эрмита галочка «Неполный интервал» выбирается автоматически.

Изменении параметров аппроксимации автоматически приводит к вычислению тренда.

Аналогичным образом задаются параметры для выделения мультипликативного тренда.

Вид подсистемы центрирования и нормирования после установки параметров выделения аддитивного и мультипликативного трендов показан на рис. 5.26.

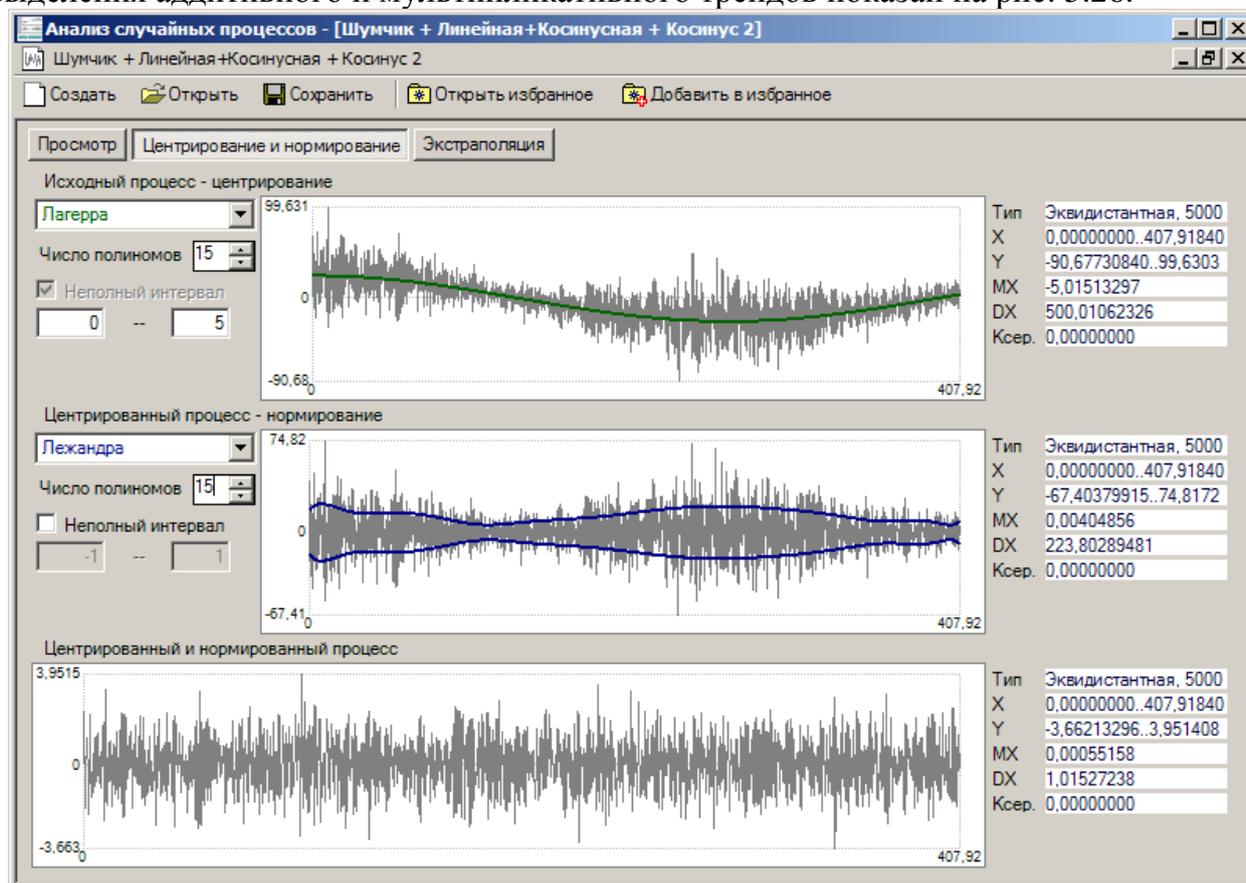


Рисунок 3.32 – Подсистема центрирования и нормирования в действии

Результаты выделения тренда и дисперсии, а также центрирования и нормирования можно сохранить в файл, нажав кнопку «Сохранить», либо добавить к библиотеке избранных данных, нажав кнопку «Добавить в избранное». Во втором случае перед добавлением появляется диалоговое окно, показанное на рис. 3.33.

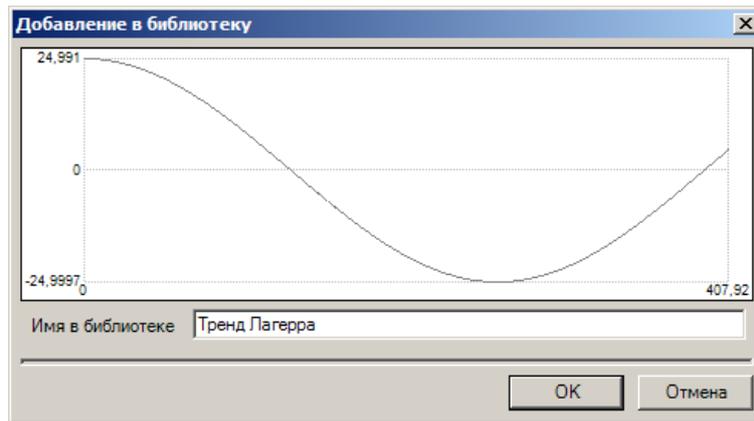


Рисунок 3.33 – Окно добавления в библиотеку

В окне графически отображаются данные, которые будут добавлены в библиотеку, а также предлагается ввести уникальную текстовую метку для добавляемых данных, чтобы упростить в дальнейшем их поиск. По нажатию кнопки «ОК» диалоговое окно закрывается и данные добавляются в библиотеку.

Перехода к подсистеме экстраполяции осуществляется нажатием кнопки «Экстраполяция».

Процесс взаимодействия с этой подсистемой аналогичен процессу выделения тренда и дисперсии, что легко угадывается по ее виду (рис. 3.34).

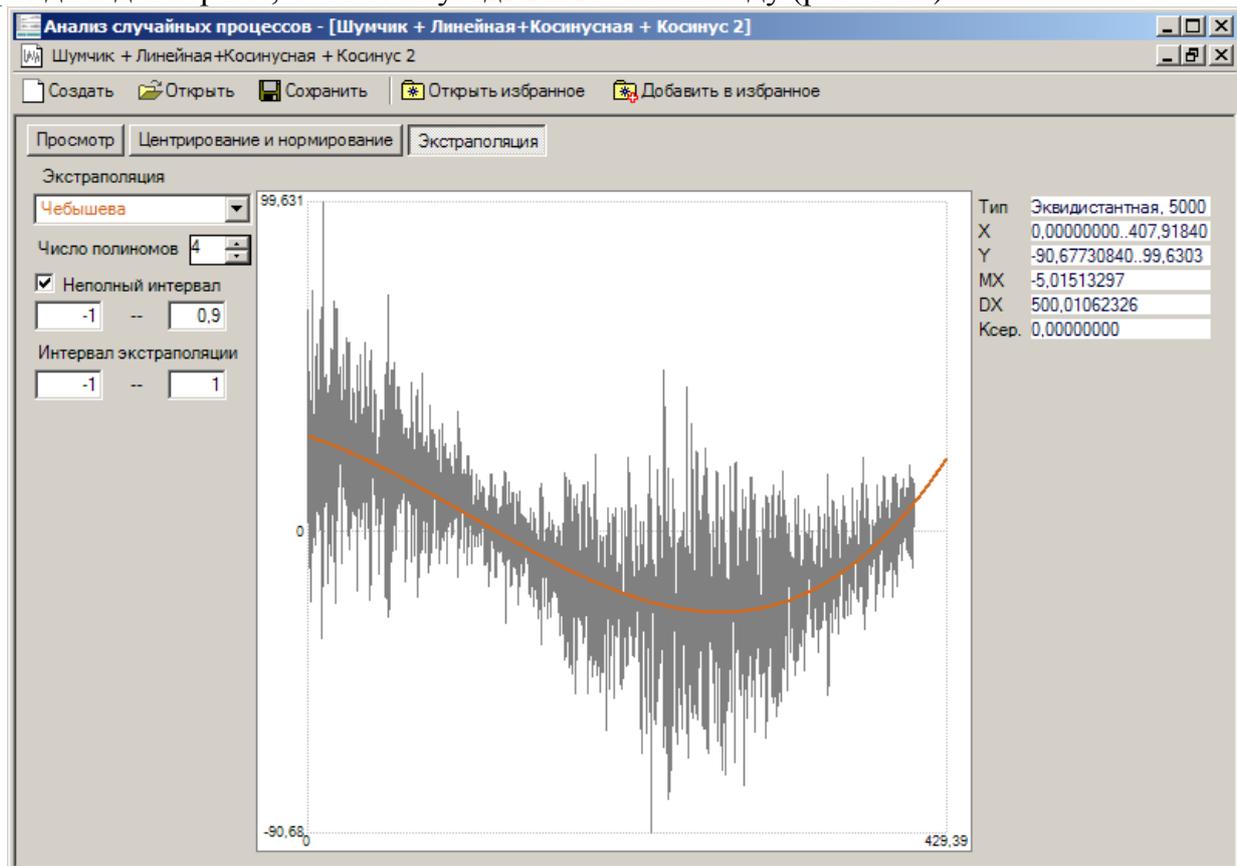


Рисунок 3.34 – Подсистема экстраполяции

Единственным дополнением является пара полей ввода «Интервал экстраполяции». В них указывается интервал, на котором восстанавливаются значения ортогонального разложения. Полученную в результате экстраполяции модель также можно сохранить в файл и добавить в избранное.

По нажатию кнопки «Открыть избранное» открывается окно библиотеки избранных данных (рис. 3.35). В библиотеке хранятся как временные ряды, так и ортогональные разложения.

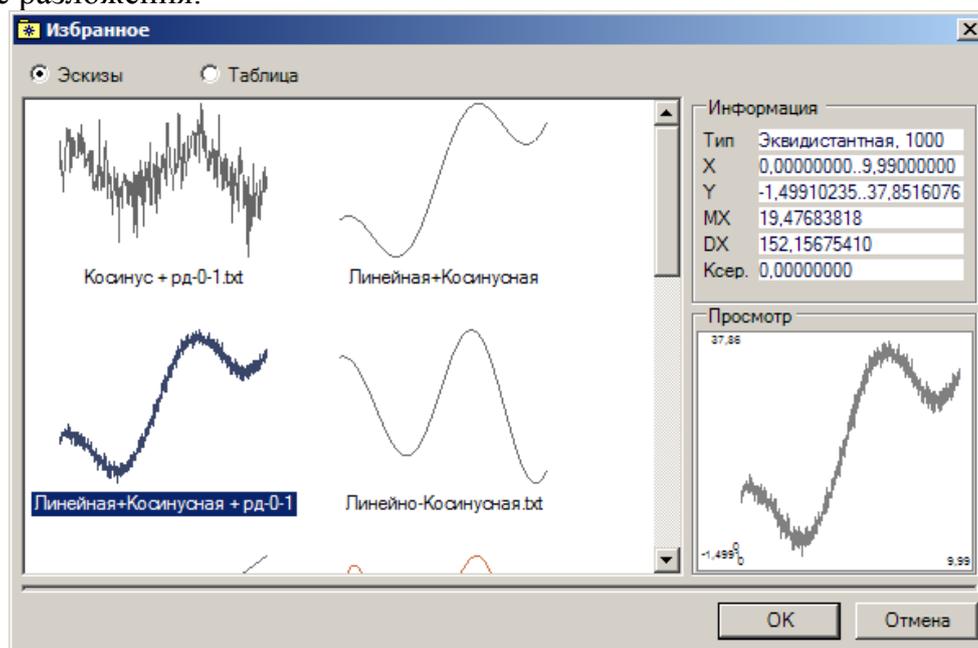


Рисунок 3.35 – Библиотека избранных данных

При выборе элемента библиотеки в правой части окна отображается информация о нем, а также его график. В режиме табличного просмотра (рис. 3.36) отображается список элементов библиотеки и краткое описание. Для перехода в этот режим следует щелкнуть мышкой по надписи «Таблица» в верхней части окна.

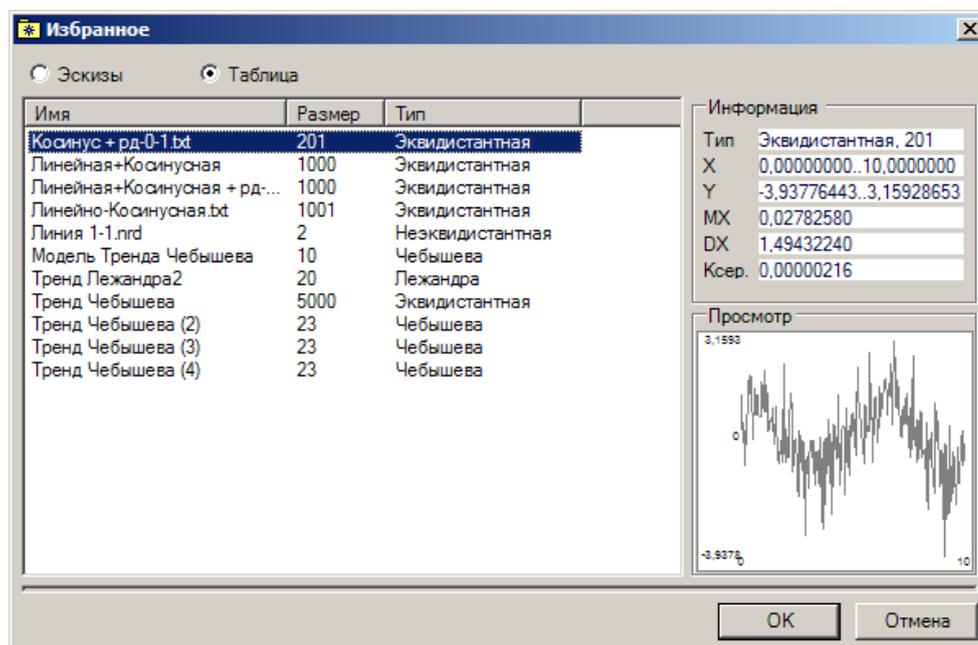


Рисунок 3.36 – Режим табличного просмотра

После выбора элемента и нажатия на кнопку «ОК» в правом нижнем углу диалогового окна оно закрывается, и запускается подсистема, соответствующая типу выбранных данных (подсистема работы с выборкой или подсистема просмотра модели).

4. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

4.1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

4.1.1. Теоретические основы лабораторной работы

Необходимость в решении задачи моделирования временных рядов с **заданным видом корреляционной функции** возникает при исследовании методом имитационного моделирования алгоритмов анализа корреляционных функций, спектральной плотности мощности случайных процессов, а также различных систем сбора и обработки информации: АСНИ, ИИС, ПРИС и т.д.

При формировании случайных процессов с заданным видом корреляционной функции (спектральной плотности мощности), как правило, применяется метод фильтрации.

Теоретическое обоснование метода приведено в разделе 2.5, а параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в Приложении П.2.

Для проверки качества генерирования псевдослучайных последовательностей (ПСП) представляется перспективным использование фазовых портретов. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $\rho_x(\tau)$ и $\rho'_x(\tau)$:

$$\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)]. \quad (4.1)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет.

На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

4.1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид автокорреляционной функции, значения ее параметров. (Параметры алгоритма моделирования определить для погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Задать $N = 5000$.
3. Сгенерировать «белый шум».
4. Получить процесс с заданным видом НКФ, построить ее график и фазовый портрет.
5. Наложить на НКФ и фазовый портрет теоретические значения НКФ и фазового портрета для заданной модели НКФ с заданными параметрами.
6. Задать $N = k 20 \tau_{k \max}$, $k = 1$.

7. Сгенерировать 29 реализаций случайного процесса.
8. Запомнить полученную картину 29 НКФ.
9. Пункты 7 - 8 повторить для $k=2, 3, 5$.
10. Оформить отчет.

4.1.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
 2. Метод и алгоритм и параметры моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом НКФ.
 3. Импульсная характеристика формирующего фильтра (Приложение П. 5).
 4. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объема выборки $N = k 20 \tau_{k \max}$, $k=1,2, 3, 5$ и соответствующих им НКФ и фазовых портретов.
 5. Выводы по работе.
- Пример оформления работы приведен в Приложении П.8.

4.1.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к коррелированным случайным процессам?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?
5. Что такое фазовый портрет корреляционной функции?
6. Какая часть фазового портрета является наиболее информативной?
7. Как отличить фазовый портрет колебательной корреляционной функции?
8. Что характеризует показатель колебательности корреляционной функции?
9. В чем заключается методика оценки качества генерирования случайного процесса с заданным видом корреляционной функции с использованием фазового портрета корреляционной функции?

4.2. Построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с помощью АИС

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

4.2.1 Теоретические основы лабораторной работы

В предлагаемой лабораторной работе решаются основные задачи построения и исследования ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

Выражения для оценки КФ при анализе последовательностей в зависимости от оператора усреднения примут вид [25, 57]:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{K}_{xi}(J\Delta\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} x_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xj}(J\Delta\tau) &= \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xcp}(J\Delta\tau) &= \frac{1}{N(M-J-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}. \end{aligned} \right. \quad (4.2)$$

Следует отметить, что при аппроксимации ВКФ с помощью ЭВМ не важно, какая характеристика аппроксимируется - t -текущая, j - текущая или средняя, - подход один и тот же [57].

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией ($j = const$), при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса [51].

Интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным $\Delta\tau = \Delta t_0$.

Значение интервала дискретизации $\Delta\tau$ зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой погрешности δ и способа восстановления корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции J_{max} при линейной интерполяции и различных погрешностях её восстановления представлено в таблице 4.1 [25].

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

Таблица 4.1

$\rho_x(\tau)$	Δt	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		$\Delta\tau$	J_{max}	$\Delta\tau$	J_{max}
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	9	$\frac{0,632}{\alpha}$	6
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	13	$\frac{0,632}{\alpha}$	9
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\alpha}$	$\frac{0,23}{\alpha}$	19	$\frac{0,365}{\alpha}$	13
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,693}{\alpha}$	10	$\frac{1,095}{\alpha}$	7
$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0\tau + c \sin \omega_0\tau),$ $c = 0, \pm \alpha / \omega_0$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{\mu^2 + 1}}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

Под ортогональной моделью КФ будем понимать выражение

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (4.3)$$

где $\psi_k(\tau, \alpha)$ - семейство ортогональных функций в интервале $[0, \infty)$, характеризующееся интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \psi_n(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \|\psi_k(\alpha)\|^2, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (4.4)$$

α - параметр масштаба, определяется в результате решения уравнения $\beta_0 = 1$ или

$$\alpha = \frac{0,4}{\Delta\tau} \quad [35];$$

β_k - коэффициенты Фурье

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Для выполнения условия нормировки КФ

$$\hat{K}_a(0) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(0, \alpha) = \sigma_x^2 \quad (4.6)$$

коэффициенты разложения модели b_k определяются выражением

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n. \quad (4.7)$$

Число членов разложения ряда m для обеспечения минимальной погрешности аппроксимации определяется методом подбора.

Исследование алгоритмов проводится методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием ПСП, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Методика имитационного моделирования исследуемых алгоритмов представлена на рис. 4.1.

Ортогональная модель СПМ представим в виде [26, 27]:

$$S_a(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega). \quad (4.8)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Якоби и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Следует отметить, что с помощью автоматизированной системы возможен корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных. Для этого необходимо ввести данные в соответствующем формате (см.



Рисунок 4.1 – Методика моделирования

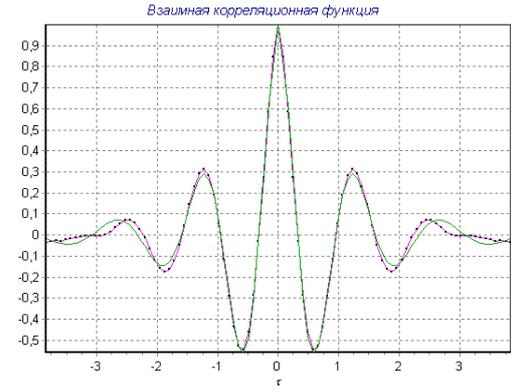
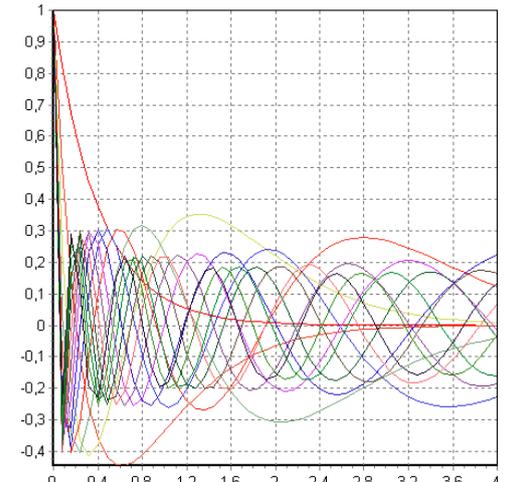
Приложение П.6), используя экранную форму «Filter setting».

В таблице 4.2 приведены, в качестве примеры результаты аппроксимации КФ 5 модели с параметрами $\lambda = 1$, $\omega_0 = 5$ ортогональными функциями Лагерра (правый верхний рисунок): коэффициенты разложения β_k , b_k и т.д. и используемые для этого ортогональные функции 0-14 порядков (правый нижний рисунок).

Рисунок КФ соответствуют выражению (4.6).

Результаты аппроксимации КФ

Таблица 4.2

<p>Коэффициенты β_k</p> <p>Right wing: Lagerr alfa 4.898980000000</p> <p>beta: 14 0.462237730196 0.692460822535 0.407352474010 -0.065327554965 -0.391968942889 -0.354298245907 -0.093490045206 0.183431460274 0.273783713561 0.156346867284 -0.018869110441 -0.103572245483 -0.065515715810 0.032671970204 0.114842160637</p> <p>dt: 0.081649700000</p> <p>MAX x,y,shift: 0.000000000000 0.999800000000</p> <p>0</p> <p>tk2 0.119770668850</p> <p>tk4 0.536635451945</p>	<p>Коэффициенты b_k</p> <p>Right wing: Lagerr alfa 4.898980000000</p> <p>bk: 14 0.446885374329 0.677108466668 0.392000118143 -0.080679910832 -0.407321298756 -0.369650601773 -0.108842401073 0.168079104407 0.258431357695 0.140994511417 -0.034221466308 -0.118924601349 -0.080868071676 0.017319614338 0.099489804771</p> <p>dt: 0.081649700000</p> <p>MAX x,y,shift: 0.000000000000 0.999800000000</p> <p>0</p> <p>tk2 0.107233016562</p> <p>tk4 0.522653892127</p>	<p>Взаимная корреляционная функция</p>  <p>0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.4 -0.5</p> <p>-3 -2 -1 0 1 2 3</p>	 <p>1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.4</p> <p>0 0.4 0.8 1.2 1.6 2 2.4 2.8 3.2 3.6 4</p>
---	---	---	---

4.2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить автоматизированную систему корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах (см. раздел 3.2). Формат вводимых и выводимых данных представлен в Приложении 6.
2. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами - $J_{\max} = \text{ent}[\tau_{k \max} / \Delta\tau]$, $N=5000$, $\delta=0,02$.
3. Построить КФ и её фазовый портрет, сравнить с теоретическими кривыми.
4. Для заданного ортогонального базиса определить параметры модели и погрешность аппроксимации.
5. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
6. Найти корректирующие коэффициенты, обеспечивающие условие нормировки ортогональной модели КФ, и построить модель КФ.
7. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
8. Построить модель спектральной плотности мощности.
9. Определить экстремальную частоту, значение СПМ в точке, соответствующей экстремальной частоте, и эквивалентную ширину спектра мощности. Сравнить полученные результаты с теоретическими характеристиками, найти относительную погрешность оценивания обобщенных характеристик.
10. При исследовании других ортогональных базисов необходимо повторить пункты 3 – 8.
11. Построить КФ «идеального» полосового шума.
12. Построить ортогональную модель КФ.
13. Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности.
14. Пункты 10 – 12 повторить и выбрать наилучший базис.

4.2.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
 2. Задание.
 3. Результаты выполнения работы в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
 4. Расчеты погрешностей оценки обобщенных характеристик, представленных в табличной форме
 5. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы представлен в приложении П.9.

4.2.4. Контрольные вопросы

1. Какой метод положен в основу генерации временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
2. Из каких соображений выбирают численное значение интервала дискретизации временного ряда?
3. Какой метод фильтрации применен в лабораторной работе?
4. Чем отличается метод имитационного моделирования от обработки экспериментальных данных?

5. С какой целью строятся фазовые портреты моделей?
6. Какая часть фазового портрета наиболее информативна?
7. Как по виду фазового портрета определить характер корреляционной функции: монотонная, колебательная?

4.3. Моделирование пары коррелированных временных рядов с заданными корреляционно-спектральными свойствами

Цель работы: изучение метода моделирования пары случайных процессов с заданными корреляционными свойствами.

4.3.1. Теоретические основы лабораторной работы

Теоретическое обоснование лабораторной работы представлено в разделе 2.7.

4.3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание: вид ВКФ, значения их параметров. (Параметры алгоритма моделирования определить для погрешности восстановления корреляционной функции $\delta = 0,02$).
2. Задать $N = 5000$. Сгенерировать «белый шум».
3. Получить процесс с заданным видом ВКФ, построить ее график и фазовый портрет.
4. Наложить на ВКФ и фазовый портрет теоретические значения ВКФ и фазового портрета для заданной модели ВКФ с заданными параметрами.
5. Задать $N = k \cdot 20 \max\{\tau_{xk \max}, \tau_{yk \max}\}$, $k = 1$.
6. Сгенерировать 29 реализаций случайного процесса.
7. Запомнить полученную картину 29 НКФ.
8. Пункты 7 - 8 повторить для $k=2, 3, 5$.
9. Оформить отчет.

4.3.3. Содержание отчета

1. Задание.
 2. Цель работы.
 3. Метод, алгоритм и параметры моделирования коррелированных временных рядов с заданным преподавателем видом ВКФ.
 4. Импульсные характеристики формирующего фильтра (см. Приложение 2).
 5. Примеры реализации коррелированных временных рядов для объема выборки $N = k \cdot 20 \max\{\tau_{xk \max}, \tau_{yk \max}\}$, $k=1, 2, 3, 5$ и соответствующих им ВКФ и фазовых портретов (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29).
 6. Выводы по работе.
- Пример выполнения работ приведен в Приложении П.10.

4.3.4. Контрольные вопросы

1. Какие вероятностные характеристики относятся к характеристикам взаимосвязи?
2. Какие случайные процессы, временные ряды относятся к коррелированным случайным процессам?
3. Какой метод лежит в основе генерирования временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
4. От чего зависит выбор интервала дискретизации случайного процесса?

4.4. Ортогональные модели взаимных корреляционно-спектральных характеристик

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

4.4.1. Теоретические основы лабораторной работы

Основой для построения ортогональных моделей корреляционно-спектрального являются вычисленные значения ВКФ, которые в зависимости от оператора усреднения примут вид [25]

$$\begin{cases} \hat{K}_{xyi}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} y_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xyj}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xycc}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N(M-J-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Приведем основные соотношения, необходимые для построения ортогональной модели ВКФ:

$$K_{axy}(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} 1(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} 1(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_l) \right\}, \quad (4.10)$$

где $1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$ и $1(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 1, & \tau < 0, \end{cases}$ (4.11)

$A_m = \sigma_x \sigma_y$ - наибольшее значение ВКФ.

Для нормированной ВКФ для стационарно связанных процессов коэффициенты разложения ВКФ определяются следующими выражениями

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (4.12)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{yx}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (4.13)$$

Соответственно методическая погрешность аппроксимации будет равна

$$\Delta = \sigma_x \sigma_y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau - \left(\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \right) \right\}. \quad (4.14)$$

Исследования показали [25, 26, 35], что модель (4.10) будет справедлива, если максимум ВКФ будет находиться в «нуле» или вблизи нуля.

Если максимум ВКФ находится в точке τ_m , модель взаимной корреляционной функции необходимо искать в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^m \beta_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (4.15)$$

Коэффициенты разложения для модели (4.14) определяются выражениями:

где
$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau + \tau_m) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (4.16)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau_m - \tau) \psi_n(\tau_m, \alpha_l) d\tau. \quad (4.17)$$

Параметры масштаба определяется в результате решения уравнений

$$\beta_{0,n} = 1 \text{ и } \beta_{0,l} = 1.$$

Число членов разложения ряда для обеспечения минимальной погрешности аппроксимации определяется методом подбора.

Полученные результаты можно обобщить на оценку взаимной спектральной плотности мощности и её составляющих по параметрам ортогональных моделей ВКФ.

Для выполнения условия нормировки представим модель ВКФ в виде [35:

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (4.18)$$

где τ_m - значение аргумента, соответствующего максимуму ВКФ

Определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} 1(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} 1(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (4.19)$$

Введем замену переменных $u = \tau - \tau_m$. Тогда

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_k(u, \alpha_1) \exp(-j\omega u) du + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \int_{-\infty}^0 \psi_k(-u, \alpha_2) \exp(-j\omega u) du \right] =$$

$$= \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{m_1} b_{k,n} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,l} W_k(-j\omega) \right]. \quad (4.21)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} S_{xy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ \cos\omega\tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_1} b_{k,n} \operatorname{Re} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,l} \operatorname{Re} W_k(j\omega) \right] - \sin\omega\tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_1} b_{k,n} \operatorname{Im} W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,l} \operatorname{Im} W_k(j\omega) \right] \right\}, \quad (4.22)$$

$$\operatorname{Im} S_{xy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ -\sin\omega\tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_1} b_{k,n} \operatorname{Re} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,l} \operatorname{Re} W_k(j\omega) \right] + \cos\omega\tau_m \left[\sum_{k=0}^{m_1} b_{k,n} \operatorname{Im} W_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,l} \operatorname{Im} W_k(j\omega) \right] \right\}. \quad (4.23)$$

Следует отметить, что с помощью автоматизированной системы возможен взаимный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных. Для этого необходимо ввести данные в соответствующем формате (см. Приложение П.6), используя экранную форму «Filter setting».

4.4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать СП с заданными видами НКФ.
2. Построить ВКФ и её фазовый портрет, сравнить с теоретическими кривыми.
3. Для заданного ортогонального базиса определить параметры модели ВКФ и погрешность аппроксимации.
4. Найти корректирующие коэффициенты, обеспечивающие условие нормировки ортогональной модели ВКФ, и построить модель ВКФ.
5. Построить модель взаимной спектральной плотности мощности и ее составляющих.
6. Задержать второй процесс на $\tau_m = 50\Delta\tau$, построить модель ВКФ и СПМ.

4.4.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты выполнения работы в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Выводы.

Пример оформления лабораторной работы приведен в Приложении П.11.

4.4.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика аппроксимации взаимных корреляционных функций по сравнению с аппроксимацией автокорреляционных функций?
2. Какие численные методы применяются при аппроксимации взаимных корреляционных функций?

3. Как отличить фазовый портрет колебательной взаимной корреляционной функции от монотонной?
4. Как определяются корректирующие коэффициенты взаимной корреляционной функции, обеспечивающие условие нормировки?
5. Как определяются интервалы корреляции взаимной корреляционной функции?

4.5. Анализ методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций с помощью АИС

Цель работы: изучение методики и приобретение практических навыков анализа методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их характеристик методом имитационного моделирования.

4.5.1. Теоретические основы лабораторной работы

Сопоставляя методы исследования погрешностей и характеристик погрешностей результатов измерений, следует подчеркнуть особую роль имитационного моделирования в определении характеристик погрешностей [25, 57]. Это обусловлено тем, что составляющие погрешности, входящие в полную группу, хотя и обусловлены разными факторами, в общем случае могут быть коррелированными. Это должно учитываться при их исследовании с целью сопоставления, что делает использование аналитического подхода чрезвычайно затруднительным, а применение экспериментальных методов практически невозможным.

С использованием АИС решены следующие задачи имитационного моделирования:

1. Оценка коэффициентов разложения корреляционной функции.
2. Оценка погрешностей оценки коэффициентов разложения.
3. Оценка погрешностей аппроксимации корреляционных функций.
4. Оценка обобщенных корреляционных характеристик.
5. Оценка обобщенных спектральных характеристик.
6. Составление отчета по результатам имитационного моделирования.

Как известно [25, 35], основой ортогональной модели

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha)$$

являются коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$.

Для определения теоретических значений коэффициентов разложения КФ, воспользуемся частотным представлением ортогональных функций [25].

Так, например, НКФ $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, воспользовавшись преобразованием Эйлера, представим в виде

$$\rho_{5,x}(\tau) = \frac{1}{2} [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}], \quad \tau > 0 \quad (4.24)$$

Подставив выражение (4.24) в выражение (4.5), получим для ортогональных функций, у которых $\mu(\tau) = 1$,

$$\beta_{5,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda-j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda+j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (4.25)$$

С учетом выражения

$$W_k(j\omega) = \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.26)$$

(4.26), выражение (4.25) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} &= \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} [W_k(\lambda - j\omega_0) + W_k(\lambda + j\omega_0)] = \\ &= \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \left\{ \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda - j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda + j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{1,k} &= \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad A_{1,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{1}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \\ \operatorname{tg} \varphi_{2,k} &= \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \quad A_{2,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{1}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \\ \varphi_{1,k} &= \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad \varphi_{2,k} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Тогда

$$\beta_k = \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)]}{1 - j \operatorname{tg} \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 - j \operatorname{tg} \varphi_{2,s}}{1 - j \operatorname{tg} \varphi_{1,s}} + \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + j \operatorname{tg} \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 + j \operatorname{tg} \varphi_{2,s}}{1 + j \operatorname{tg} \varphi_{1,s}}. \quad (4.29)$$

Или

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} &= \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} - j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} - j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} - j \sin \varphi_{1,s}} + \\ &+ \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} + j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} + j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} + j \sin \varphi_{1,s}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\text{где } B_s = \frac{A_{1,s} \cos \varphi_{1,s}}{A_{2,s} \cos \varphi_{2,s}}.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned} \beta_{5,k} &= A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] + \\ &+ A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(-j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[-j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] = \\ &= 2A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \cos \left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Математическое описание алгоритмов, реализованных при проведении имитационного моделирования, включающее условные обозначения исследуемых характеристик, введенных при программной реализации, приведено ниже.

1. Определения коэффициентов разложения

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$beta(a)$ $b(a)$	β_k b_k	$\beta_k = \frac{1}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^\infty \rho(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$ $b_k = \beta_k + c_k$
$beta(t)$ $b(t)$	$\hat{\beta}_k^{(2)}$ $\hat{b}_k^{(2)}$	$\hat{\beta}_k^{(2)} = \frac{1}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^{\tau_k \max} \rho(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$ $\hat{b}_k^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} + c_k$
$beta(g)$ $b(g)$	$\hat{\beta}_k^{(3)}$ $\hat{b}_k^{(3)}$	$\hat{\beta}_k^{(3)} = \frac{1}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^{\tau_k \max} \hat{\rho}_x(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$ $\hat{b}_k^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} + c_k$

2. Оценка погрешностей оценки коэффициентов разложения.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$d(sys)$	$\Delta_{cист}$	$\Delta_{cист} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \beta_k$
$d(ran)$	$\Delta_{случ}$	$\Delta_{случ} = \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}$
$d(trunc)$	$\Delta_{мет}$	$\Delta_{мет} = \Delta_{cист} + \Delta_{случ} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k$

3. Оценка погрешностей аппроксимации корреляционных функций.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$d ap1$	δ_1	$\delta_1 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(2)} \ \psi_k\ ^2}{\int_0^\infty \hat{\rho}_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$
$d ap2$	δ_2	$\delta_2 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^m c_k^2 \ \psi_k\ ^2}{\int_0^\infty \hat{\rho}_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$
$d ap$	δ	$\delta = \delta_1 + \delta_2$

4. Составление таблицы по результатам имитационного моделирования.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
n_{exp}	n	$n = 1..10000$
$basis$	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$P_k^{(-0,5,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(0,5,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(0)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$
CF	$\rho(\tau)$	$e^{-\lambda \tau }$ $e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)$ $e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau)$ $e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau + \frac{\lambda^2\tau^2}{3}\right)$ $e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0\tau$ $e^{-\lambda \tau }\left(\cos \omega_0\tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ $e^{-\lambda \tau }\left(\cos \omega_0\tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$
$\omega_0 / lambda$	ω_0 / λ	$\lambda > 0, \omega_0 > 0$
$delta$	δ	0,2; 0,1; 0,05; 0,02
N	N	$N = 1..1000000$
$M[d_{ap}]$	$M[\delta]$	
$MSE[d_{ap}]$	$\sigma[\delta]$	
$ \max(d_{ap}) $	$\max\{\delta_j\}$	$j = 1..n_{exp}$

5. Оценка обобщенных корреляционных характеристик.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$tau2$	$\hat{\tau}_k^{(2)}$	$\hat{\tau}_k^{(2)} = \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(2)}$
$tau2(t)$	$\tau_k^{(2)}$	

τ_k	$\tau_k^{(4)}$	$\tau_k^{(4)} = \sum_{k=0}^m \beta_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(4)}$
$\tau_k(t)$	$\tau_k^{(4)}$	
$\delta_{\tau_k^{(2)}}(\tau_2)$	$\delta_{\tau_k^{(2)}}$	$\delta_{\tau_k^{(2)}} = \frac{\tau_k^{(2)} - \tau_k}{\tau_k^{(2)}}$
$\delta_{\tau_k^{(4)}}(\tau_4)$	$\delta_{\tau_k^{(4)}}$	$\delta_{\tau_k^{(4)}} = \frac{\tau_k^{(4)} - \tau_k}{\tau_k^{(4)}}$

6. Оценка обобщенных спектральных характеристик.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$we(1)$	$\omega_{\vartheta}^{(1)}$	
$S_{\max}(1)$	$S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}^{(1)}$	
$dwe(1)$	$\Delta\omega_{\vartheta}^{(1)}$	$\begin{cases} \Delta\omega_{\vartheta}^{(1)} = \frac{1}{2S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}^{(1)}} \\ \Delta\omega_{\vartheta}^{(1)} = \omega_{\vartheta}^{(1)} + \frac{\Delta\omega_{\vartheta}^{(1)}}{2} \end{cases}$
$we(1)(t)$	$\omega_{\vartheta}^{(1)}$	
$S_{\max}(1)(t)$	$S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}^{(1)}$	
$dwe(1)(t)$	$\Delta\omega_{\vartheta}^{(1)}$	$\begin{cases} \Delta\omega_{\vartheta}^{(1)} = \frac{1}{2S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}^{(1)}} \\ \Delta\omega_{\vartheta}^{(1)} = \omega_{\vartheta}^{(1)} + \frac{\Delta\omega_{\vartheta}^{(1)}}{2} \end{cases}$
$we(2)$	$\omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(1)}$
$S_{\max}(2)$	$S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}^{(2)}$	
$dwe(2)$	$\Delta\omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\Delta\omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(2)} + \frac{\int_{\omega_{\vartheta}^{(2)}}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}^{(2)}}$
$we(2)(t)$	$\omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(1)}$

$S_{\max}(2)(t)$	$S_x^{(2)}(\omega_{\vartheta})_{\max}$	
$dwe(2)(t)$	$\Delta\omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\Delta\omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(2)} + \frac{\int_{\omega_{\vartheta}^{(2)}}^{\infty} S_x^{(2)}(\omega)d\omega}{S_x^{(2)}(\omega_{\vartheta})_{\max}}$
$error(we(1))$	$\delta_{\omega_{\vartheta}}^{(1)}$	$\delta_{\omega_{\vartheta}}^{(1)} = \frac{\omega_{\vartheta}^{(1)} - \hat{\omega}_{\vartheta}^{(1)}}{\omega_{\vartheta}^{(1)}}$
$error(S_{\max}(1))$	$\delta_{S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}}^{(1)}$	$\delta_{S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}}^{(1)} = \frac{S_x^{(1)}(\omega_{\vartheta})_{\max} - \hat{S}_x^{(1)}(\omega_{\vartheta})_{\max}}{S_x^{(1)}(\omega_{\vartheta})_{\max}}$
$error(dwe(1))$	$\delta_{\Delta\omega_{\vartheta}}^{(1)}$	$\delta_{\Delta\omega_{\vartheta}}^{(1)} = \frac{\Delta\omega_{\vartheta}^{(1)} - \hat{\Delta\omega}_{\vartheta}^{(1)}}{\Delta\omega_{\vartheta}^{(1)}}$
$error(we(2))$	$\delta_{\omega_{\vartheta}}^{(2)}$	$\delta_{\omega_{\vartheta}}^{(2)} = \frac{\omega_{\vartheta}^{(2)} - \hat{\omega}_{\vartheta}^{(2)}}{\omega_{\vartheta}^{(2)}}$
$error(S_{\max}(2))$	$\delta_{S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}}^{(2)}$	$\delta_{S_x(\omega_{\vartheta})_{\max}}^{(2)} = \frac{S_x^{(2)}(\omega_{\vartheta})_{\max} - \hat{S}_x^{(2)}(\omega_{\vartheta})_{\max}}{S_x^{(2)}(\omega_{\vartheta})_{\max}}$
$error(dwe(2))$	$\delta_{\Delta\omega_{\vartheta}}^{(2)}$	$\delta_{\Delta\omega_{\vartheta}}^{(2)} = \frac{\Delta\omega_{\vartheta}^{(2)} - \hat{\Delta\omega}_{\vartheta}^{(2)}}{\Delta\omega_{\vartheta}^{(2)}}$

4.5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать параметры имитационного моделирования в соответствующих подсистемах автоматизированной системы:

а. Вид корреляционной функции $\rho_x(\tau, \omega_0/\lambda)$ с параметрами $J_{\max} = \text{Ent}[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$, $\mu = \omega_0/\lambda$, $\delta = 0,05; 0,02; 0,1; 0,2$.

б. Вид ортогональной функции $\psi_k(\tau, \gamma)$.

с. Настройка параметров аппроксимации (выполняемость основного свойства, инвертирование, установка максимума в «нуль», диапазон поиска числа членов разложения).

д. Объем выборки N .

е. Число проводимых экспериментов n_{exp} .

2. Провести имитационное моделирование и выгрузить результаты моделирования в MS Excel.

3. Построить следующие зависимости с помощью MS Excel:

a. Графические зависимости $M[\delta](N/\mu, n_{\text{exp}}), \sigma[\delta](N/\mu, n_{\text{exp}}),$
 $\max\{\delta_j\}(N/\mu, n_{\text{exp}}), \delta_{\tau_k^{(2)}}(N/\mu, n_{\text{exp}}), \delta_{\tau_k^{(4)}}(N/\mu, n_{\text{exp}}), \delta_{\omega_s}^{(1)}(N/\mu, n_{\text{exp}}),$
 $\delta_{\omega_s}^{(2)}(N/\mu, n_{\text{exp}}), \delta_{S_x(\omega_s)_{\text{max}}}^{(1)}(N/\mu, n_{\text{exp}}), \delta_{S_x(\omega_s)_{\text{max}}}^{(2)}(N/\mu, n_{\text{exp}}), \delta_{\Delta\omega_s}^{(1)}(N/\mu, n_{\text{exp}}),$
 $\delta_{\Delta\omega_s}^{(2)}(N/\mu, n_{\text{exp}}).$

b. Графические зависимости $M[\delta](\mu/N, n_{\text{exp}}), \sigma[\delta](\mu/N, n_{\text{exp}}),$
 $\max\{\delta_j\}(\mu/N, n_{\text{exp}}), \delta_{\tau_k^{(2)}}(\mu/N, n_{\text{exp}}), \delta_{\tau_k^{(4)}}(\mu/N, n_{\text{exp}}), \delta_{\omega_s}^{(1)}(\mu/N, n_{\text{exp}}),$
 $\delta_{\omega_s}^{(2)}(\mu/N, n_{\text{exp}}), \delta_{S_x(\omega_s)_{\text{max}}}^{(1)}(\mu/N, n_{\text{exp}}), \delta_{S_x(\omega_s)_{\text{max}}}^{(2)}(\mu/N, n_{\text{exp}}), \delta_{\Delta\omega_s}^{(1)}(\mu/N, n_{\text{exp}}),$
 $\delta_{\Delta\omega_s}^{(2)}(\mu/N, n_{\text{exp}}).$

c. Графические зависимости $M[\delta](n_{\text{exp}}/N, \mu), \sigma[\delta](n_{\text{exp}}/N, \mu),$
 $\max\{\delta_j\}(n_{\text{exp}}/N, \mu), \delta_{\tau_k^{(2)}}(n_{\text{exp}}/N, \mu), \delta_{\tau_k^{(4)}}(n_{\text{exp}}/N, \mu), \delta_{\omega_s}^{(1)}(n_{\text{exp}}/N, \mu),$
 $\delta_{\omega_s}^{(2)}(n_{\text{exp}}/N, \mu), \delta_{S_x(\omega_s)_{\text{max}}}^{(1)}(n_{\text{exp}}/N, \mu), \delta_{S_x(\omega_s)_{\text{max}}}^{(2)}(n_{\text{exp}}/N, \mu), \delta_{\Delta\omega_s}^{(1)}(n_{\text{exp}}/N, \mu),$
 $\delta_{\Delta\omega_s}^{(2)}(n_{\text{exp}}/N, \mu).$

4. Изменить пункты 1.4 и 1.5.

5. Изменить пункт 1.1.

6. Изменить пункт 1.2, повторить пункты 1 - 5 и выбрать наилучший базис.

4.5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Результаты проведения имитационного моделирования в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.

4. Выводы.

Пример выполнения работы приведен в приложении П.12.

4.5.4. Контрольные вопросы

1. Каким образом влияет изменение объема выборки на погрешность аппроксимации? Погрешности оценки обобщенных корреляционно-спектральных характеристик?

2. Каким образом влияет изменение показателя колебательности на погрешность аппроксимации? Погрешности оценки обобщенных корреляционно-спектральных характеристик?

3. Влияет ли на результаты проведенных экспериментов пересчет коэффициентов разложения с учетом выполнения основного свойства?

4. Какое число экспериментов рекомендуется проводить? Почему?

5. Какой из способов оценки интервалов корреляции дает худший результат? Почему?

6. Какой из способов оценки эквивалентной ширины спектральной плотности мощности дает лучший результат? В каких случаях и почему?

4.6. Ортогональные модели нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии

Цель работы: изучение метода моделирования нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии с помощью композиции отдельных имитационных модулей.

4.6.1. Теоретические основы лабораторной работы

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить систему, представленную в разделе 3.3.

4.6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание у преподавателя: вид аддитивной $\varphi(t)$ и мультипликативной $\sigma^2(t)$ составляющих моделей и значения их параметров, характеристики стационарной составляющей модели: вид НКФ и значения ее параметров.
2. Сгенерировать шум с заданным видом НКФ и заданными параметрами.
3. Сгенерировать и запомнить нестационарный случайный процесс по математическому ожиданию и дисперсии.
4. Открыть нестационарный случайный процесс.
5. Определить и запомнить параметры ортогональной модели $\varphi(t)$ в выбранном ортогональном базисе, провести центрирование.
6. Определить и запомнить параметры ортогональной модели $\sigma^2(t)$ в выбранном ортогональном базисе, провести нормирование.
7. Выделить и запомнить центрированную стационарную составляющую $\overset{\circ}{x}(t)$.
8. Вычислить НКФ и сравнить с заданной.
9. Выделить и запомнить центрированную и нормированную стационарную составляющую $\overset{\circ}{x}_n(t)$.
10. Пункты 5-8 выполнить для другого ортогонального базиса.
11. Дать рекомендации по выбору наилучшего базиса, обеспечивающего наименьшие погрешности аппроксимации НКФ.
12. Оформить отчет.

4.6.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
 2. Задание.
 3. Результаты центрирования, нормирования в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм в различных ортогональных базисах.
 4. Графики вычисленной и теоретической НКФ (в различных ортогональных базисах).
 5. Выводы.
- Пример оформления – Приложение П.13.

4.6.4. Контрольные вопросы

1. Какие процессы называются нестационарными?
2. Какие методы усреднения применяются при анализе нестационарных процессов?
3. В чем заключается особенность центрирования нестационарных процессов по математическому ожиданию?
4. В чем заключается особенность нормирования нестационарных процессов по СКО?

4.7. Корреляционно-спектральный анализ результатов экспериментальных исследований

Цель работы: построить ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик при проведении экспериментальных исследований

Особенность построения ортогональных моделей КСА при проведении экспериментальных исследований заключается в том, что неизвестны точные характеристики исследуемого процесса, т.е. полученные модели не с чем сравнивать. В этом случае наиболее целесообразно строить ортогональные модели в разных базисах и сравнивать их между собой.

Пример выполнения лабораторной работы приведен ниже.

4.7.1. Теоретические основы лабораторной работы

Корреляционно-спектральный анализ фотоплетизмограмм

Описание предметной области и постановка задачи

Движение крови в сосудах обусловлено работой сердца. При сокращении миокарда желудочков кровь под давлением изгоняется из сердца в аорту и легочную артерию. Ритмические сокращения миокарда образуют ритмические расширения сосудистой стенки (пульс), которые под действием распространения волн давления от начальной части аорты к артериолам и капиллярам вызывают распространение пульсовых волн. В фотоплетизмографии (ФПГ) участок тканей, в котором исследуется кровоток, например палец руки, располагают на пути луча света между источником излучения и фотоприемником. Поскольку поглощение света в тканях пропорционально объему крови, проходящему через освещаемый участок, то усиливая сигнал фотоприемника, можно зарегистрировать изменения его амплитуды и параметров объемной пульсовой волны, обусловленные артериальной пульсацией сосуда [25].

Решим следующие задачи с использованием автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах:

- 1) определить частоту пульсаций по фотоплетизмограмме с использованием аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах;

2) определить корреляцию параметров пульсовых волн по спектру мощности фотоплетизмограммы;

3) определить корреляцию параметров пульсовых волн по различным реализациям фотоплетизмограммы одного объекта, либо нескольких объектов, относящихся к одной группе.

Перед проведением корреляционно-спектрального анализа, исходный процесс необходимо отцентрировать, например, с применением ортогональных полиномов [13, 25, 35, 54].

Определение частоты пульсаций по фотоплетизмограмме

Для определения частоты пульсаций проведен корреляционно-спектральный анализ. На рисунке 4.2 представлен исходный центрированный процесс FPG - 13.

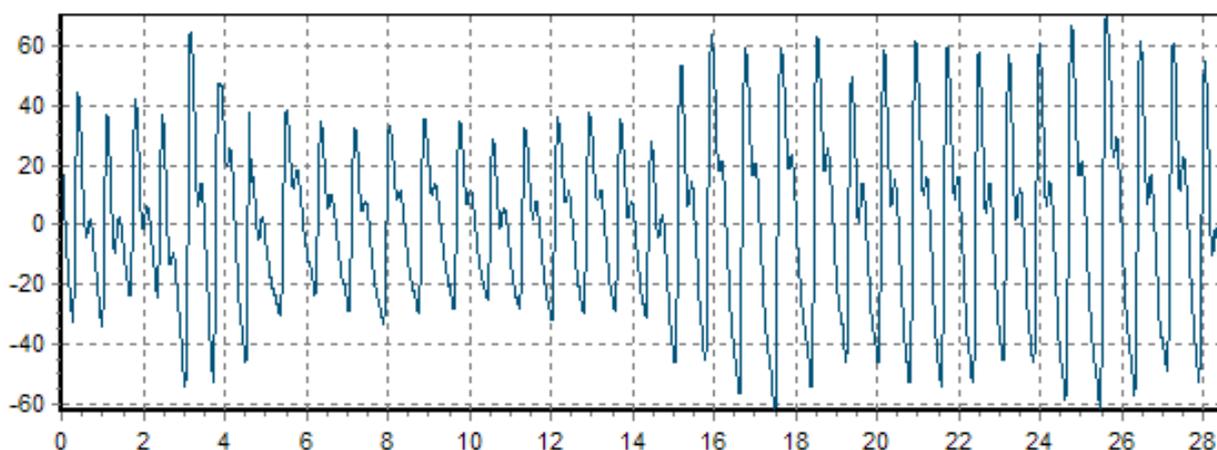


Рисунок 4.2 - Центрированный процесс, полученный с датчика с интервалом в 10 мс, объем выборки - 2854

Ниже на рисунках 4.3 и 4.4 – АКФ с интервалом дискретизации $\Delta\tau = 0,01$ и числом ординат восстановления $N_x = 1500$ и ее фазовый портрет соответственно.

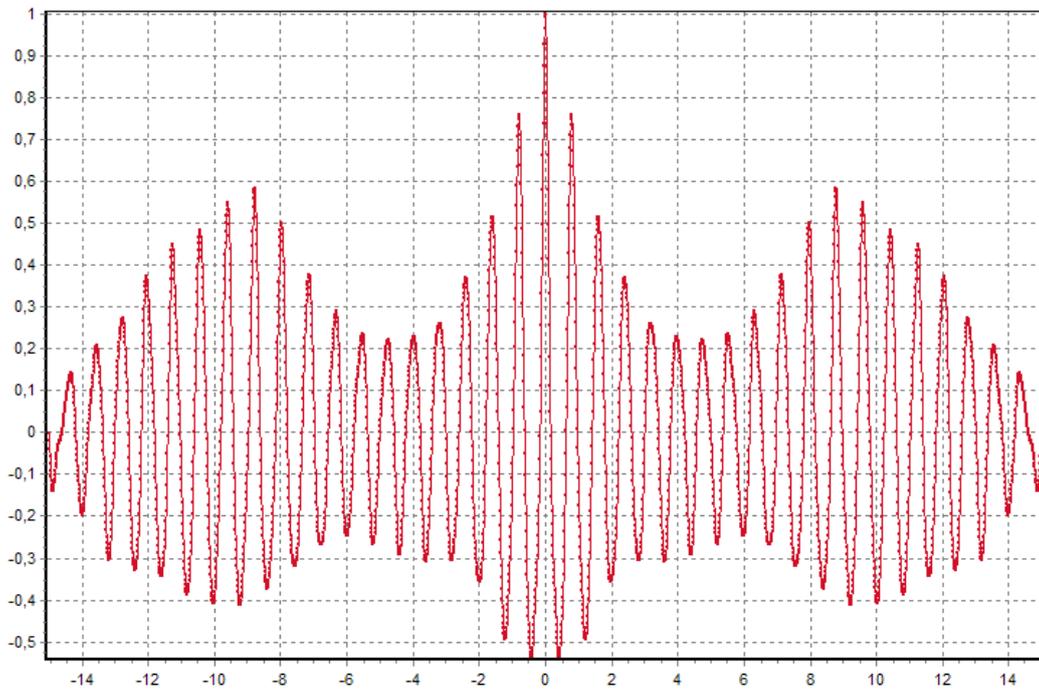


Рисунок 4.3 - АКФ с параметрами $\Delta\tau = 0,01$, $N_x = 1500$

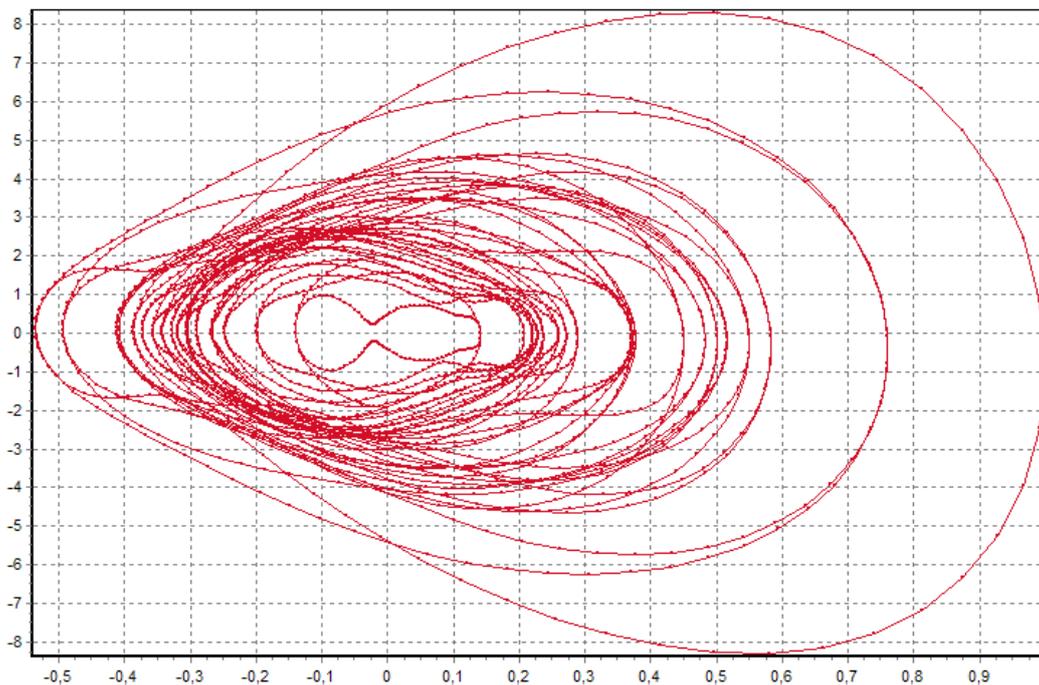


Рисунок 4.4 – Фазовый портрет АКФ

Построим ортогональную модель АКФ с помощью ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) (см. рисунок 4.5).

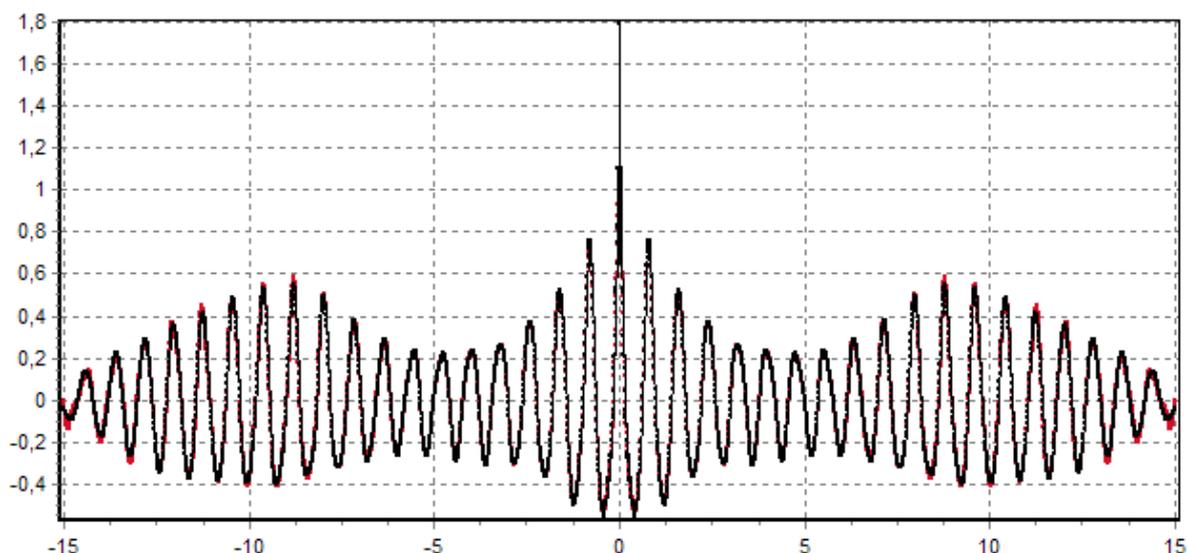


Рисунок 4.5 – Аппроксимация АКФ ортогональными функциями
Сонина-Лагерра (1); $\gamma = 10$, $m = 280$, $\delta = 0,087$

Тогда, по параметрам ортогональной модели АКФ оценим СПМ процесса и определим обобщенные спектральные характеристики. На рисунке построены графики реальной части СПМ и модуля СПМ, а прямоугольником указана найденная эквивалентная ширина.

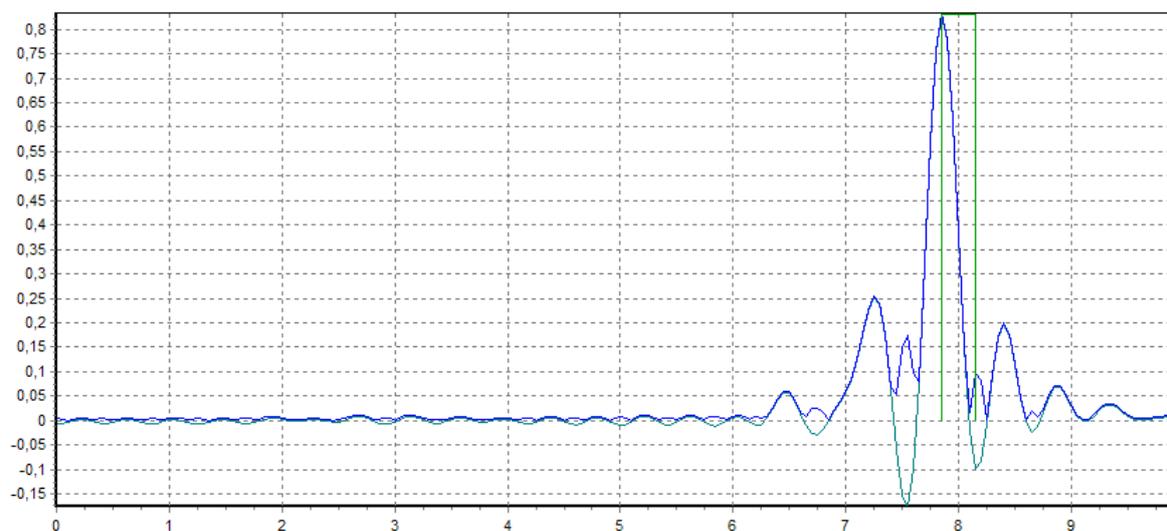


Рисунок 4.6 – Модель СПМ и его составляющие с характеристиками
 $\omega_e = 7,85$, $S(\omega_e) = 0,83047$, $\Delta\omega_e = 8,151$

Известно, что СПМ представляет собой распределение частот процесса. В свою очередь частота пульсаций соответствует экстремальной частоте $\omega_e = 7,85 \text{ рад/с}$. Данное значение представлено в относительных единицах. Следовательно,

$$f_n = \frac{\omega_e}{2\pi} = 1,25 \text{ уд/с} \text{ или } f_n = 75 \text{ уд/мин.}$$

Определение корреляции параметров пульсовых волн по спектру мощности фотоплетизмограммы

Заметим, что разработанная автоматизированная система при необходимости позволяет найти решения обратной задачи, а именно, по имеющейся спектральной плотности мощности, построив ее ортогональную модель в выбранном базисе, восстановить КФ с заданным числом ординат восстановления.

Воспользуемся данной возможностью для определения корреляции различных параметров сигнала (в данном случае параметров объемной пульсовой волны) через определение его корреляционной функции.

В качестве исходных данных используем СПМ, полученную при решении прямой задачи, и построим ортогональную модель ее действительной компоненты в ортогональном базисе Лагерра. На рисунке 4.7 – результаты аппроксимации.

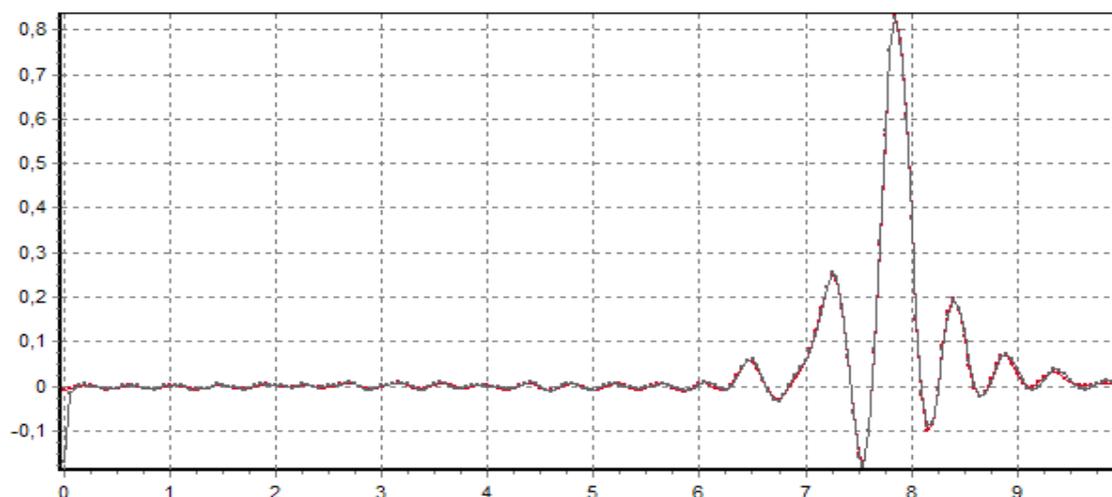


Рисунок 4.7 – Аппроксимация действительной части СПМ ортогональными функциями Лагерра; $\gamma = 5$, $m = 350$, $\delta = 0,0362$

По параметрам ортогональной модели СПМ (мнимая компонента равна нулю) можно оценить КФ и спектральные характеристики (см. рисунок 4.8).

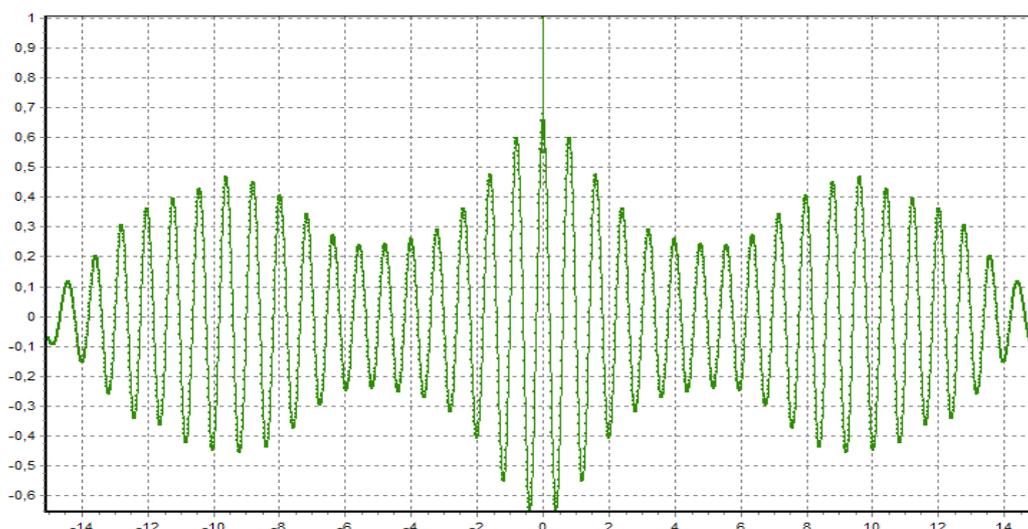


Рисунок 4.8 – Модель КФ, восстановленная по параметрам модели СПМ

Для проверки адекватности предложенных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа и достоверности результатов, получаемых при обработке

реальных сигналов, наложим модель исходной АКФ (см. рисунок 4.8) и модели КФ, полученной при решении прямой и обратной задачи. Результат наложения графиков представлен на рисунке 4.9.

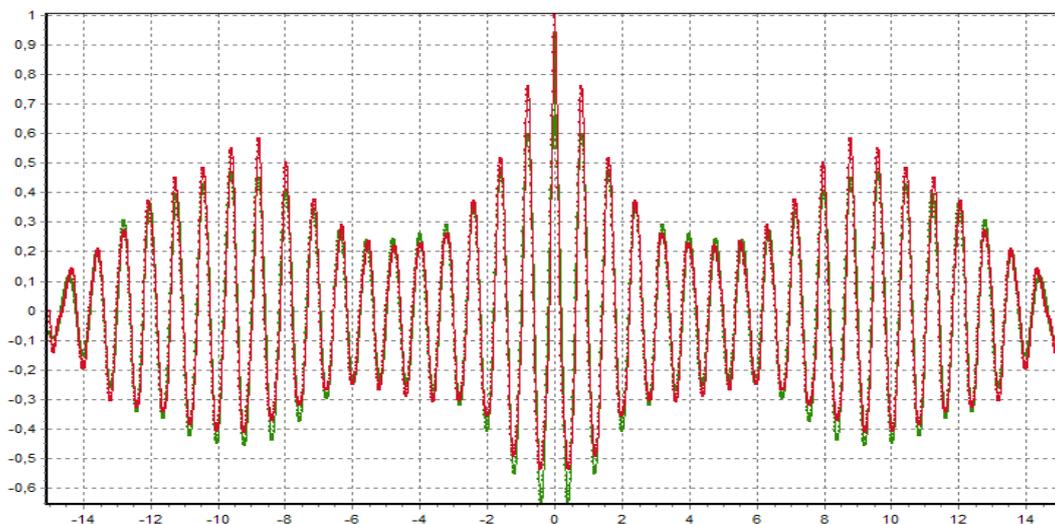


Рисунок 4.9 – Модель КФ, восстановленная по параметрам модели СПМ, и исходная АКФ

Итак, при сравнении полученных таким образом корреляционных функций можно судить об изменении параметров исходного сигнала и об их влиянии друг на друга по спектру мощности, а также о виде сигналов, поступающих на вход по характеру получаемой корреляционной функции: АКФ либо ВКФ.

Определение корреляции параметров пульсовых волн по различным реализациям фотоплетизмограммы

Проведем исследование коэффициента корреляции двух сигналов – различных реализаций фотоплетизмограммы.

Для решения данной задачи необходимо сформировать ВКФ. На рисунках 4.10 и 4.11 представлены результаты построения ВКФ и ее фазового портрета для сигналов FPG – 13 и FPG – 14.

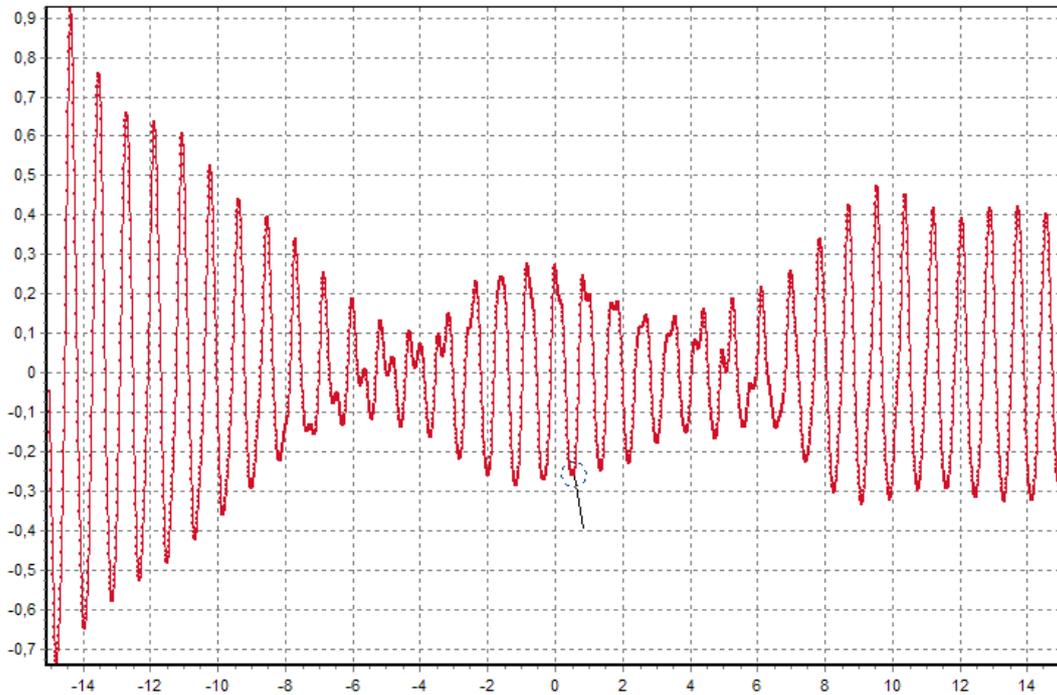


Рисунок 4.10 – Формирование ВКФ

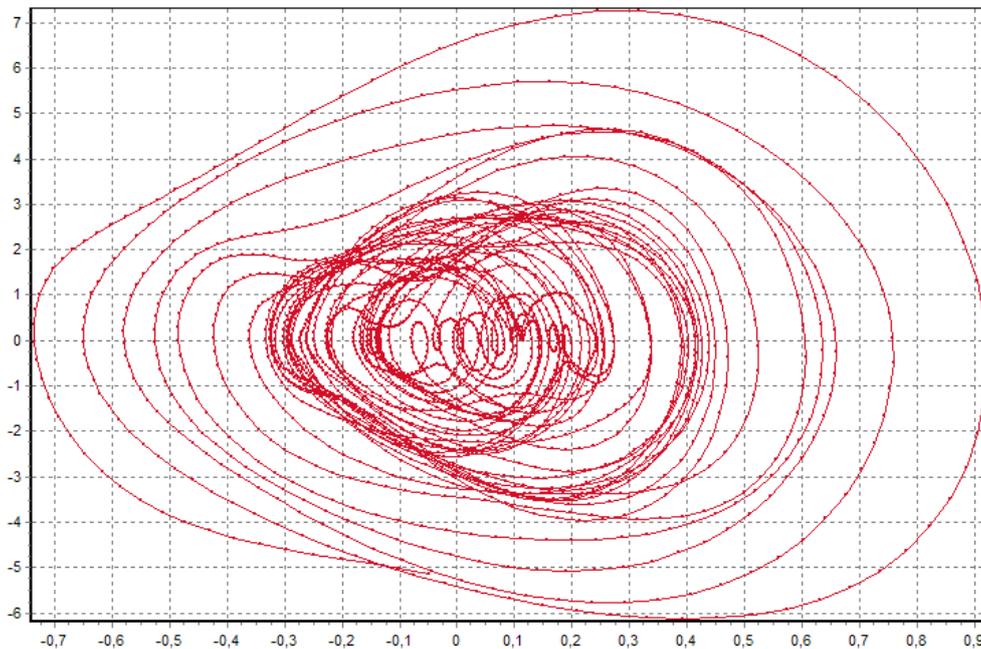


Рисунок 4.11 – Построение фазового портрета сформированной ВКФ

В таблице 4.3 представлены результаты обработки сигналов, снятых с фотоплетизмографа с интервалом в 10 мс, где введены следующие обозначения: «+» - результирующая ВКФ с высоким коэффициентом корреляции; «-» - ВКФ с низким коэффициентом корреляции.

Таблица 4.3

	FPG-1	FPG-2	FPG-3	FPG-4	FPG-5	FPG-6	FPG-7	FPG-8	FPG-9	FPG-10	FPG-11	FPG-12	FPG-13	FPG-14	FPG-15	FPG-16
FPG-1	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-2	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-3	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-4	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+
FPG-5	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
FPG-6	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-
FPG-7	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-8	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
FPG-9	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-
FPG-10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
FPG-11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
FPG-12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
FPG-13	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
FPG-14	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-15	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-16	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	-	+

Заметим, при необходимости можно указать конкретные значения коэффициента корреляции, показывающие степень взаимосвязи параметров объекта исследования друг относительно друга.

4.7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получить задание у преподавателя.
2. Вывести на экран исследуемую реализацию. Определить класс исследуемого процесса. В случае необходимости выделить стационарную составляющую, подлежащую корреляционно-спектральному анализу.
3. Построить ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик, включая обобщенные.
4. Представить результаты обработки в графическом и табличном виде.
5. Оформить отчет.

4.7.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты обработки в графическом и табличном виде.
4. Выводы

Пример оформления – Приложение П.14.

4.7.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные классы анализируемых процессов.
2. Какие процессы относятся к стационарным?
3. В каких случаях можно оценить вероятностную характеристику случайного процесса усреднением по времени?
4. Назовите основные преимущества метода аналитических разложений.
5. К какому классу относятся ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик?
6. Какие характеристики относятся к обобщенным корреляционно-спектральным характеристикам?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены вопросы применения численных методов, алгоритмов и комплексов программ для проведения вычислительного и натурального экспериментов, которые включают:

- 1) математическое описание и моделирование случайных процессов с заданными корреляционно-спектральными свойствами;
- 2) численные методы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах, в том числе, нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии, неэквидистантных временных рядов;
- 3) описание комплексов программ для проведения и обработки результатов вычислительного и натурального экспериментов, разработанных на кафедре информационных систем и технологий Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

При выполнении лабораторных работ широко применяется технология имитационного моделирования, а также обработка реальных данных, полученных в ходе экспериментальных исследований образцов авиационно-космической техники, медико-биологических исследований и т.д.

Отметим, что предлагаемый перечень заданий лабораторных работ отражает лишь опыт и точку зрения автора и может быть существенно расширен как по номенклатуре работ, так и по количеству пунктов исследований в каждой работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров. – М.: Мир, 1965. – 780 с.
2. Билинский И.Я., Микелсон А.К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. – Рига: Зинатне, 1983. – 292 с.
3. Бобнев М.П. Генерирование случайных сигналов. Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: «Энергия», 1971. – 239 с.
4. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.
5. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
6. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционной функции стационарных процессов//ИВУЗов СССР, Радиофизика. – т. ХУІ, N 11. – 1973. – С. 1770-1771.
7. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра //ИВУЗов СССР «Приборостроение». – т. ХVІІ. – №7. – 1974. – С.66-72.
8. Горбацевич Е.Д. Коррелометры с аппроксимацией. – М.: Энергия, 1971. – 125с.
9. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. – М.: Радио и связь, 1982. – 256 с., ил. (стат. теория связи. Вып. 17).
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
11. Дедус Ф.Ф., Махортых С.А., Устинин М.Н. и др. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. – М.: Машиностроение, 1999. – 357 с.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. – 664 с.
13. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. - М.: Главное издательство иностранной литературы, 1974. – 260 с.
14. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. – М.: Мир, 1971. – 320 с.
15. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.2. – М.: Мир, 1972. – 288 с.
16. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. – М.: Связь, 1969. – 447 с.
17. Кнут Д.Е. Искусство программирования для ЭВМ. – М.: Мир, 1976. – 724 с.
18. Котюк А.Ф., Цветков Э.И. Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. – М.: Изд-во стандартов, 1970. – 104с.
19. Куликовских И.М. Многомерная параметрическая модель артериальной пульсовой волны //Биотехнические, медицинские, экологические системы и комплексы (БИО-МЕДСИСТЕМЫ - 2007): Материалы XX Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. – Рязань, 2007. – С. 112-113.
20. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74 //Минприбор. – 1974. – 76 с.
21. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. – М.: Энергия, 1972. – 456 с., ил.
22. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. – 480 с.
23. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985. – 215 с.

24. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. – Новое в жизни, науке и технике. Сер. Мат-ка, киб. – 1983. – №11. – М.: Знание. – 64 с.
25. Прикладной анализ случайных процессов/Под ред. С.А. Прохорова. – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
26. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – Самара, СНЦ РАН, 2001. – 329 с.
27. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп. – СНЦ РАН, 2001. – 380 с., ил.
28. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 209 с.: ил.
29. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. – 191 с.: ил.
30. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп. – СНЦ РАН, 2001. – 277 с., ил.
31. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквилибриальных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 374 с.: ил.
32. Прохоров С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 2. – Самара, 2006. – С. 55–62.
33. Прохоров С.А., Графкин А.В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. – Самара: СНЦ РАН, 2005. – 241 с.
34. Прохоров С.А., Графкин А.В., Графкин В.В. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». – 2005. – С. 329-324.
35. Прохоров С.А., Графкин В.В. Ортогональные модели структурных функций//Автометрия. – 2011. – том 47, №1. – С. 50-58.
36. Прохоров С.А., Графкин В.В. Структурно-спектральный анализ случайных процессов. – СНЦ РАН, 2010. – 147 с., ил.
37. Прохоров С.А., Иващенко А.В., Графкин А.В.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. – СНЦ РАН, 2003. – 286 с., ил.
38. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби //Проблемы автоматизации и управления в технических системах: Материалы международной научно-технической конференции. – ИИЦ ПГУ. – Пенза, 2007. – С. 149-152.
39. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании». – СГТУ, Самара, 2006. – С. 50-53.
40. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей//Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2009, – 2(19). – С. 140-146.
41. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Сонина - Лагерра //Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2008. – №2 (17) – С. 185-191.

42. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Чебышева // Радиотехника и связь: Материалы четвертой международной научно-технической конференции. – Саратов, 2007. – С. 12-17.
43. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби // Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2005. – С. 54-59.
44. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Об одном подходе к уточнению параметра масштаба ортогональных функций в задачах аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа // Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2007. – С. 42-45.
45. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум. – СНЦ РАН, 2008. 301 с., ил.
46. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Основные ортогональные функции и их приложения. Часть 1. Ортогональные функции экспоненциального типа. – Самара, СНЦ РАН, 2013. – 200 с.
47. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные свойства ортогональных функций Якоби // Информационные технологии в высшем профессиональном образовании: сборник докладов второй межрегиональной научно-технической конференции. – Тольятти, 2007. – С. 125-128.
48. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». -2007. - №2 (15) – С. 123-127.
49. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2009, 2(19), С. 140-146.
50. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. – 368 с.
51. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматгиздат., 1962. – 884 с.
52. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов // Пер. с англ./Под ред. Ю.Н. Александрова. - М.: Мир, 1978. – 848 с.
53. Соучек Б. Мини-ЭВМ в системах обработки информации. - М.: Мир, 1976. – 520с.
54. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1976. – 328 с.
55. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1984. – 144 с., ил.
56. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. - М.: Энергия, 1973. – 128с., ил.
57. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. – 256 с.
58. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
59. Soucek B., Prohorov S. Event-Train Correlation and Real-Time Microcomputer Systems // Computer Compacts. – Vol. 1, Issue 1. – 1983. – pp. 51–52. DOI: 10.1016/0167-7136(83)90149-X
60. Soucek B., Prokhorov S. Event - Train Correlation and Real - Time Microcomputer Systems // Microprocessing and Microprogramming. - vol. 1. № 1 – 1983. – pp. 23-29.
61. Volkov I.I., Motov V.V., Prokhorov S.A. A certain method of equipment approximation of the correlation functions of stationary random processes. Radiophysics and Quantum Electronics. Vol. 16, Issue 11. – 1975. – pp. 1370-1371, DOI: 10.1007/BF01080923

62. D.G. Lampard. A new method of determining correlation function stationary time series. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. – vol. 102, № 1. – 1955. – pp. 35 – 41.
63. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique condition for generalized Laguerre functions to solve pole position problem//Signal Processing. – Vol. 108. – 2015. – pp. 25-29. DOI: 10.1016/j.sigpro.2014.08.040.
64. Prokhorov S., Kulikovskikh I. Pole position problem rational Meixner filters//Signal Processing. – Vol. 120. – 2016. – pp. 8–12. DOI:10.1016/j.sigpro.2015.08.009
65. Prokhorov S., Kulikovskikh I. Basic orthogonal functions and its applications. Part I. Orthogonal functions of exponential type. 2013. – 192 p.
66. Soucek B., Carlson A.D. Computers in Neurobiology and Behavior. John Wiley, New York, 1976. – 324 p.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$	
2	Симсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$	
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & (-a < x < a), \\ 1, & (a < x < \infty), \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$	
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся					

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$			$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, & (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, & (\mu < x < \infty), \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	μ	$2/\lambda^2$	$6/\lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24/\lambda^4;$ $3;$	$\mu = \alpha_1;$ $\lambda = \sqrt{2/\mu_2};$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$ $\alpha > 0, \beta > 0$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha)] \times \beta^{-2/\alpha}$	$[\Gamma(1+3/\alpha) - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \Gamma(1+2/\alpha) + 2\Gamma^3(1+1/\alpha)] \times \beta^{-3/\alpha};$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$	$[\Gamma(1+4/\alpha) - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \Gamma(1+1/\alpha) + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - 3\Gamma^4(1+1/\alpha)] \times \beta^{-4/\alpha};$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$	
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \approx 0,43\sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times \sigma^3 \sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4} \sigma^4;$ $\approx -0,3;$	$\sigma \approx 0,8\alpha_1$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	$\alpha = 1/\alpha_1$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0; $\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	a	σ^2	0; 0; $3\sigma^4;$ 0;
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\sigma^2\right) dt, x > 0 \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots)$	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	λ/α	λ/α^2	$2\lambda/\alpha^3;$ $2/\sqrt{\lambda};$
			$3\lambda(\lambda+2)/\alpha^4;$ $6/\lambda;$
			$\alpha = \alpha_1/\mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2/\mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ 0 (0 \leq x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma\sqrt{2\pi}(n-1)!!}{2^{n/2}\Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma\sqrt{2\pi}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[(1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
		α_1	μ_2
	$a + E \sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$	$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$	

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	α/β	α/β^2	$2\alpha/\beta^3;$ $2/\sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2)/\beta^4;$ $6/\alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2/\mu_2;$ $\beta = \alpha_1/\mu_2;$	
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4;$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$	
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$	
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$	

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации

Вид модели	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; a_0 = \sqrt{1 - p^2}; b_1 = p$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p^3(1 + \gamma) - p(1 - \gamma); \alpha_1 = 1 - 4p^2\gamma - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0; \alpha_1 = 1 - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$

ПОЯСНЕНИЕ К АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА SCAN

№ страницы Название	Вводится	Вычисляется	Передается	Запоминается	Отображается
1. Генерация исходного процесса	 Вид $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ $\delta, \lambda, \omega_0$	$\Delta\tau, N_x, N_y$	$\Delta\tau, N_x, N_y$ $\delta, \lambda, \omega_0$	$\Delta\tau, N_x, N_y$ $\delta, \lambda, \omega_0$	$\Delta\tau, N_x, N_y,$ $\delta, \lambda, \omega_0$
	$N,$ $\delta, \lambda, \omega_0, n_{\text{exp}}$	$\hat{m}_x, \hat{\sigma}_x^2 k_a, k_e$ $\{x_i\}_{i=1,\dots,N} / \{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$	Вид $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ $N, \Delta\tau, N_x(\text{min}), N_x(\text{min})$ $\delta, \lambda, \omega_0, n_{\text{exp}},$ $\hat{m}_x, \hat{\sigma}_x^2 k_a, k_e \{x_i\}_{i=1,\dots,N}$	$\{x_i\}_{i=1,\dots,N} /$ $\{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$	$\{x_i\}_{i=1,\dots,N} / \{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N},$ $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)] /$ $\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)]$
2. Фильтрация исходного процесса	$\Delta\tau, N_x, N_y$ $\{x_i\}_{i=1,\dots,N} /$ $\{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ теоретическая $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\Delta\tau, N_x, N_y, \delta$ $\{x_i\}_{i=1,\dots,N} / \{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$	$\{x_i\}_{i=1,\dots,N} /$ $\{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$ $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\{x_i\}_{i=1,\dots,N} / \{x_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}^c$ $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ теоретическая $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ $\hat{m}_x, \hat{\sigma}_x^2 k_a, k_e$, погрешности генерирования процесса с заданным видом $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$
3. Корреляцион ный анализ 3.1 Построение $\rho_x(\tau)/$ $\rho_{xy}(\tau)$	τ_m $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ теоретическая $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ $\rho'_x(\tau)/\rho'_{xy}(\tau),$ $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)] /$ $\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)],$ погрешности от $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ от теоретической	$\Delta\tau, N_x, N_y$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ $\rho'_x(\tau)/\rho'_{xy}(\tau)$ $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)] /$ $\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)],$ погрешности от $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ от теоретической

		$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$			$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$
3. Корреляционный анализ 3.2. Аппроксимация $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$ $m, \gamma, m_{\min}, m_{\max}$ выбор b_k, τ_m , инвертирование, проведение спектрального анализа	$\beta_k, b_k, \gamma, \tau_m$, погрешности аппроксимации левой, правой ветвей $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$, условие стандартизации	$\beta_k, b_k, \gamma, \tau_m$	$\beta_k, b_k, \gamma, \tau_m$ $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ – левой и правой ветвей	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$, $\rho'_x(\tau)/\rho'_{xy}(\tau)$, $\Phi_x[\rho_x(\tau), \rho'_x(\tau)]/$ $\Phi_{xy}[\rho_{xy}(\tau), \rho'_{xy}(\tau)]$, и их модели в $\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$, $\beta_k, b_k, \gamma, \tau_m$ погрешности аппроксимации (левая и правая ветви)
3. Корреляционный анализ 3.3. Восстановление $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\Delta\tau, N_x, N_y$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ погрешности отличия $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ от теоретической $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	Параметры моделей $\text{Re}S_{axy}(\omega)$, $\text{Im}S_{axy}(\omega)$ для построения $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	Параметры моделей $\text{Re}S_{axy}(\omega)$, $\text{Im}S_{axy}(\omega)$ для построения $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$
3. Корреляционный анализ 3.4. Построение $\rho_x(\tau)$ специальног о типа	$\rho_x(\tau)$, параметры: А, В, Т, - $\Delta\tau, N$	$\rho_x(\tau)$	$\rho_x(\tau)$		$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$
4. Спектральный анализ 4.1. Вычисление и построение	$\Delta\omega, N_\omega$, При обработке - $\text{Re}S_{axy}(\omega)$, $\text{Im}S_{axy}(\omega)$,	$\text{Re}S_{axy}(\omega), \text{Im}S_{axy}(\omega)$, $\Phi[S_{xy}(\omega)], S_{xy}(\omega) $, числовые характеристики $S_{axy}(\omega)$,	$\beta_k, b_k, \gamma, \tau_m$	$\text{Re}S_{axy}(\omega)$, $\text{Im}S_{axy}(\omega)$, $ S_{xy}(\omega) $	$\text{Re}S_{axy}(\omega), \text{Im}S_{axy}(\omega)$, $\Phi[S_{xy}(\omega)], S_{xy}(\omega) $, числовые характеристики $S_{axy}(\omega)$,

спектральны х функций	в случае моделирования – $\text{Re} S_{axy}(\omega)$, $\text{Im} S_{axy}(\omega)$, $\Phi[S_{xy}(\omega)]$, $ S_{xy}(\omega) $, $S_{axy}(\omega)$	$S_{axy}(\omega)$ функция когерентности, условие стандартизации координаты $S_{axy}(\omega)$			$S_{axy}(\omega)$, функция когерентности, условие стандартизации координаты $S_{axy}(\omega)$
4. Спектральны й анализ 4.2. Построение $\rho_x(\tau)/$ $\rho_{xy}(\tau)$	$\text{Re} S_{axy}(\omega)$, $\text{Im} S_{axy}(\omega)$, $\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$, параметры ортогональной модели для левой и правой ветвей: m , γ ,	Коэффициенты разложения $\text{Re} S_{axy}(\omega)$, $\text{Im} S_{axy}(\omega)$, β_k , c_k , γ , τ_m . погрешности приближения $\text{Re} S_{axy}(\omega)$, $\text{Im} S_{axy}(\omega)$	Параметры моделей $\text{Re} S_{axy}(\omega)$, $\text{Im} S_{axy}(\omega)$ для построения $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	Значения $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$, теоретическая $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$, погрешности приближения, координаты $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$
4. Спектральны й анализ 4.3. Построение спектрально й функции	$N, \Delta\omega$, $S_{axy}(\omega)$	$F_x(\omega)$, теоретическая $F_x(\omega)$ $\Delta\omega_c$, теоретическое значение $\Delta\omega_c$, относительная погрешность приближения $F_x(\omega)$	$ S_{xy}(\omega) $	$F_x(\omega_i)$	$F_x(\omega)$, теоретическая $F_x(\omega)$, $\Delta\omega_c$, теоретическое значение $\Delta\omega_c$, относительная погрешность приближения, $S_{axy}(\omega)$
5. Исследовани е базисных функций 5.1. Ортогональн ые полиномы	$\psi_k(\tau)$, диапазон изменения k , $N, \Delta\tau$	$\psi_k(\tau_i)$			$\psi_k(\tau_i)$, диапазон изменения k , $N, \Delta\tau$
5. Исследовани е базисных функций	$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$, диапазон изменения k , $N, \Delta\tau$	$\psi_k(\tau_i, \alpha/\gamma)$			$\psi_k(\tau_i, \alpha/\gamma)$, диапазон изменения k , $N, \Delta\tau$

5.2. Ортогональн ые функции					
6. Моделирова ние	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau)$ $\delta, \lambda, \omega_0,$ $N, n_{\text{exp}},$ $\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ $S_{axy}(\omega), \beta_k, b_k, \gamma, \tau_m,$ погрешности их определения, погрешности аппроксимации левой, правой ветвей $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ условие стандартизации, $S_{axy}(\omega), \tau_k^{(i)}, \Delta\omega_c$ и погрешности их определения	Передаются результаты вычисления всех страниц	Все результаты моделирования	$\beta_k, b_k, \gamma, \tau_m,$ погрешности их определения, погрешности аппроксимации левой, правой ветвей $\rho_x(\tau)/\rho_{xy}(\tau),$ условие стандартизации, $S_{axy}(\omega), \tau_k^{(i)},$ $\Delta\omega_c$ и погрешности их определения

**ПОЯСНЕНИЕ К АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ**

№ страницы Название	Вводится	Вычисляется	Передается	Запоминается	Отображается
1. Главное окно Создать	Открыть $\overset{\circ}{x}(t)$, Δt	$RД/НРД, N$; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\overset{\wedge}{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий.	$\overset{\circ}{x}(t), \Delta t$ $RД/НРД, N$; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\overset{\wedge}{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий.	$\overset{\circ}{x}(t)$, $RД/НРД, N$; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\overset{\wedge}{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий	$\overset{\circ}{x}(t), RД/НРД, N$; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\overset{\wedge}{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий
1. Главное окно. создать мультипликативный тренд	$\overset{\circ}{\sigma}_x^2(t)$ $A, B, C, \alpha, \beta,$ φ, ω	$\overset{\circ}{\sigma}_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	$\overset{\circ}{\sigma}_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	$\overset{\circ}{\sigma}_x^2(t)$ $\overset{\circ}{\sigma}_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	$A, B, C, \alpha, \beta, \varphi, \omega, \overset{\circ}{\sigma}_x^2(t), \overset{\circ}{\sigma}_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$ $RД/НРД, N$; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\overset{\wedge}{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий
1. Главное окно, создать аддитивный тренд	$\varphi(t)$ $A, B, C, \alpha, \beta,$ φ, ω	$y(t) = \varphi(t) + \overset{\circ}{\sigma}_x^2(t) \overset{\circ}{x}(t)$	$y(t)$	$\varphi(t), y(t)$	$A, B, C, \alpha, \beta, \varphi, \omega, \varphi(t), y(t)$ $RД/НРД, N$; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ;

					\hat{m}_x ; $\hat{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий
2. Открыть/ открыть избранное, просмотр	$y(t)$				$y(t)$ <i>РД/НРД, N</i> ; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\hat{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий
2. Центрирование	Вид ортогонального полинома, порядок	Коэффициенты разложения $\varphi(t)$, тренд. центрированный процесс	Коэффициенты разложения $\varphi(t)$, центрированный процесс	Тренд, модель тренда, центрированный процесс	$y(t)$, тренд <i>РД/НРД, N</i> ; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\hat{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий
2. Нормирование	Вид ортогонального полинома, порядок, центрированный процесс	Коэффициенты разложения $\sigma_x^2(t)$, тренд. центрированный процесс	Коэффициенты разложения $\sigma_x^2(t)$, центрированный нормированный процесс	Дисперсию, модель дисперсии, центрированный нормированный процесс	Центрированный процесс, <i>РД/НРД, N</i> ; x_{\min}, x_{\max} ; y_{\min}, y_{\max} ; \hat{m}_x ; $\hat{\sigma}_x^2(t)$; значение критерия серий

2. Центрирование и нормирование				Добавить в избранное	<p>Центрированный нормированный процесс, $RД/НРД, N;$ $x_{\min}, x_{\max} ;$ $y_{\min}, y_{\max} ;$ $\hat{m}_x ;$ $\hat{\sigma}_x^2(t);$ значение критерия серий</p>
2. Экстраполяция	Вид ортогонального полинома, порядок, значение интервала			Вид ортогонального полинома, порядок,	<p>Вид ортогонального полинома, порядок, $RД/НРД, N;$ $x_{\min}, x_{\max} ;$ $y_{\min}, y_{\max} ;$ $\hat{m}_x ;$ $\hat{\sigma}_x^2(t);$ значение критерия серий</p>

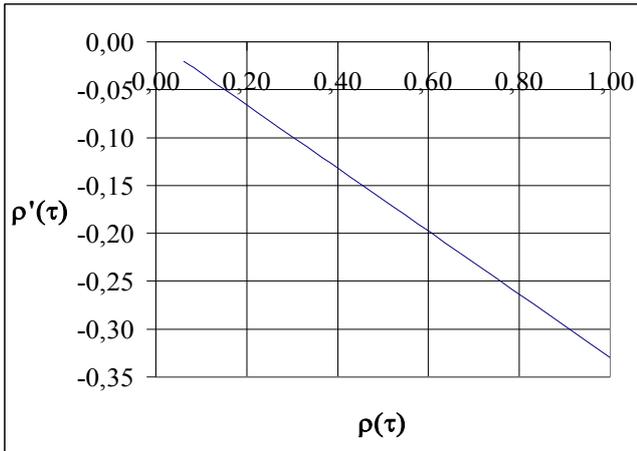
ПРИМЕРЫ ЗАПОМИНАНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ЦЕНТРИРОВАНИИ И НОРМИРОВАНИИ

№	Наименование	Пример	Характеристики процесса
1.	Процесс	5000 0,0816 5,78 7,60157746744421 25,942891016799 19,0242935588612 -2,09348398217758 -57,8476358677977 ...	<i>Эквидистантная, 5000</i> $x_{\min} = 0,00, x_{\max} = 407,91 :$ $y_{\min} = -112,5, y_{\max} = 449 ;$ $\hat{m}_x = 205,34 ;$ $\hat{\sigma}_x^2(t) = 16009 ;$ $Kce = 0$
2	Тренд	5000 - N 0,0816 - Δt -29,364084021077 - $\varphi(0)$ -29,5264044878478	
3	Модель тренда	Лежандра 0 407,9184 7 205,33900407380887 207,95085176403376 ...	
4	Центрированный Лежандра	5000 0,0816 35,144084021077 37,127981955292 ...	<i>Эквидистантная, 5000</i> $x_{\min} = 0,00, x_{\max} = 407,91 :$ $y_{\min} = -89,78, y_{\max} = 89,32 ;$ $\hat{m}_x = 0,0057 ;$ $\hat{\sigma}_x^2(t) = 445,92 ;$ $Kce = 0$
5	Дисперсия	5000 0,0816 1372,68411014404 1367,14478672794...	
6	Модель дисперсии	Чебышева 0 407,9184 7 483,60852987280578 -190,24014064790663 64,757543243102987...	
7.	Центрированный нормированный	5000 0,0816 0,948564627072178 1,00413958704814 1,5075776864234 ...	<i>Эквидистантная, 5000</i> $x_{\min} = 0,00, x_{\max} = 407,91 :$ $y_{\min} = -4,4440, y_{\max} = 3,8560 ;$ $\hat{m}_x = -0,0016 ;$ $\hat{\sigma}_x^2(t) = 0,9879 ;$ $Kce = 0$

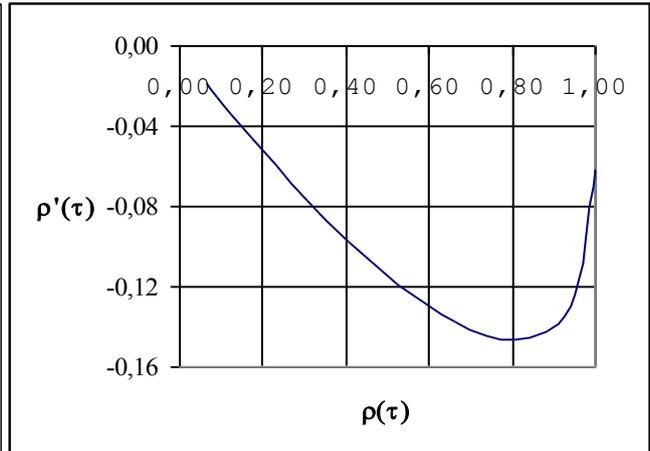
Формат вводимых и выводимых файлов

Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	ВКФ с регулярной дискретизацией *txt	Спектральная плотность мощности (парам. модели) *txt	Спектральная плотность мощности *txt	Параметры ортогональных функций *txt
M	M_j	$J_{\max, \pi}$	$\Delta\omega$	$\Delta\omega$	α_{π}
Δt	$x(1)$	$J_{\max, \lambda}$	ω_{ϑ}	ω_{ϑ}	$\beta_{0, \pi}$
$x(1)$...	$\Delta\tau$	$S_x(\omega_{\vartheta})$	$S_x(\omega_{\vartheta})$...
...	...	$\rho_{x, \pi}(1)$	$\Delta\omega_{\vartheta}$	$\Delta\omega_{\vartheta}$	$\beta_{m1, \pi}$
...	$x(M_j)$...	$S_x(1)$	$S_x(1)$	α_{λ}
...	$t(1)$	$\rho_{x, \pi}(J_{\max, \pi})$	$S_x(2)$	$S_x(2)$	$\beta_{0, \lambda}$
...	...	$\rho_{x, \lambda}(1)$
...
...	$\beta_{m2, \lambda}$
...	τ_m
...	$\rho_{xy\max}$
...	m
...	$\tau_k^{(2)}$
$x(M)$	$t(M_j)$	$\rho_{x, \lambda}(J_{\max, \lambda})$	$S_x(N)$	$S_x(N)$	$\tau_k^{(4)}$

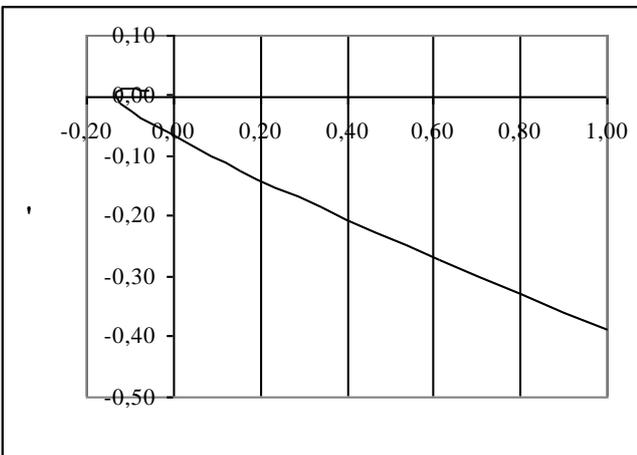
Фазовые портреты СП



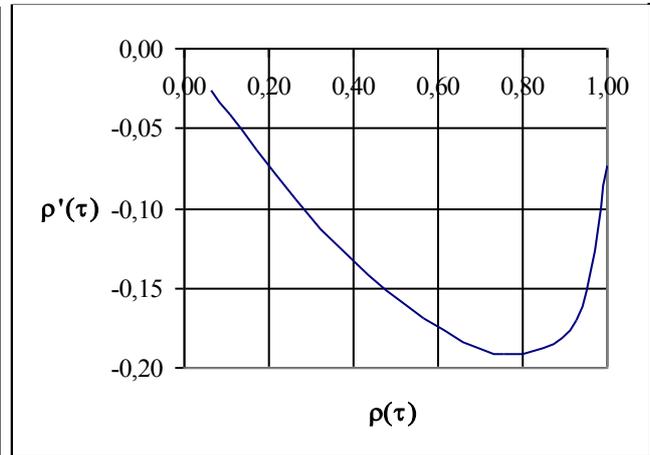
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha\tau = 0,4$



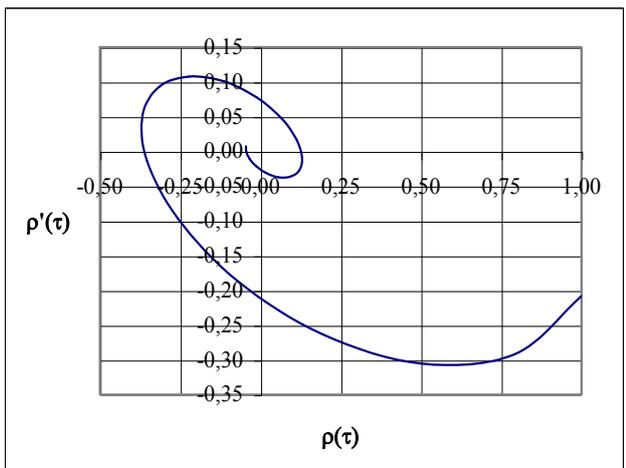
б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,4$



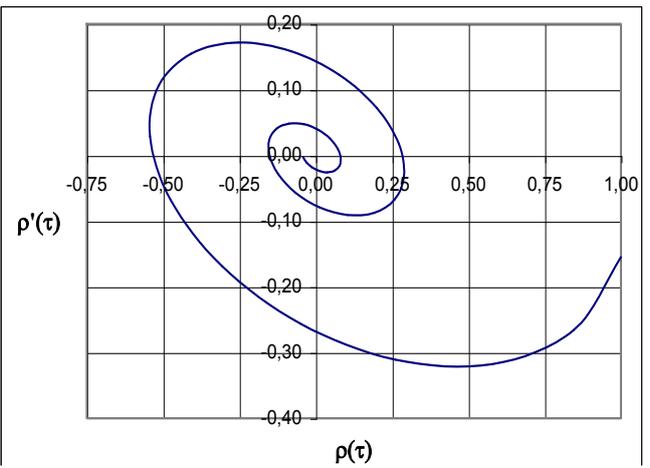
в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,23$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3), \alpha\tau = 0,693$



д) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



е) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$

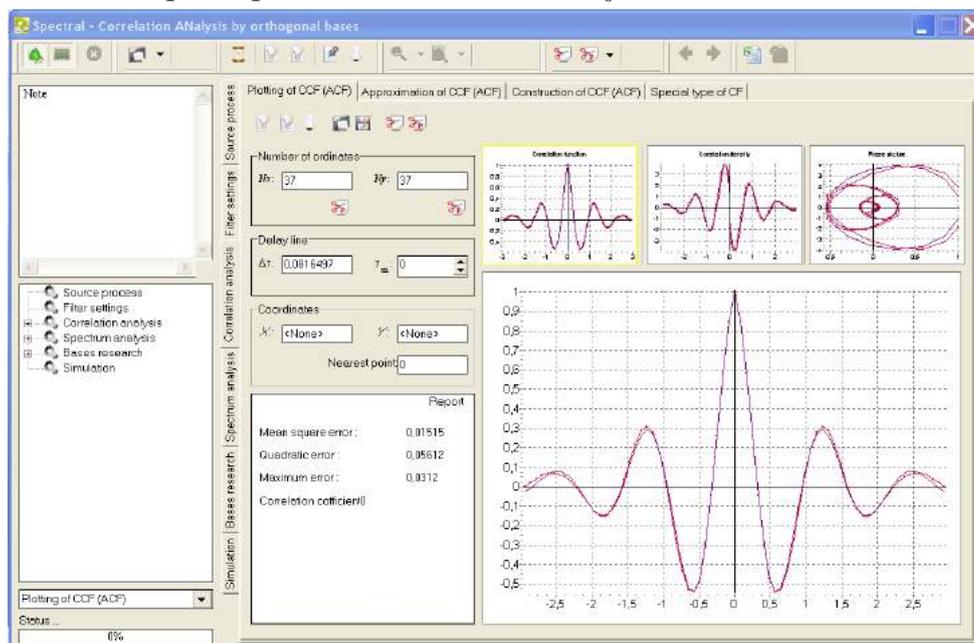
Лабораторная работа № 1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков в генерировании временных рядов с заданным видом корреляционной функции, проверка качества генерирования.

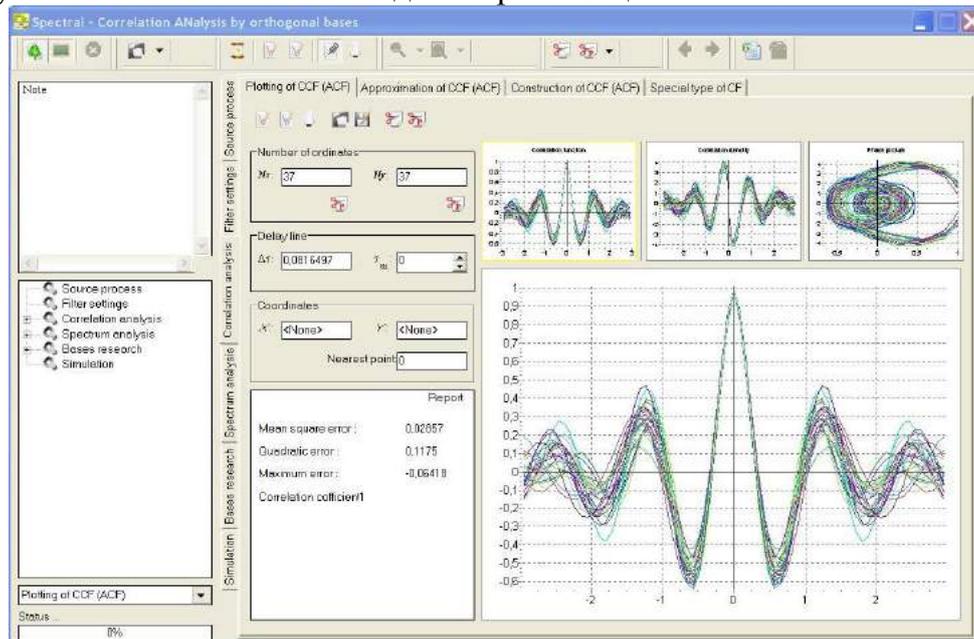
Вид НКФ, ее параметры:

Алгоритм моделирования и его параметры:

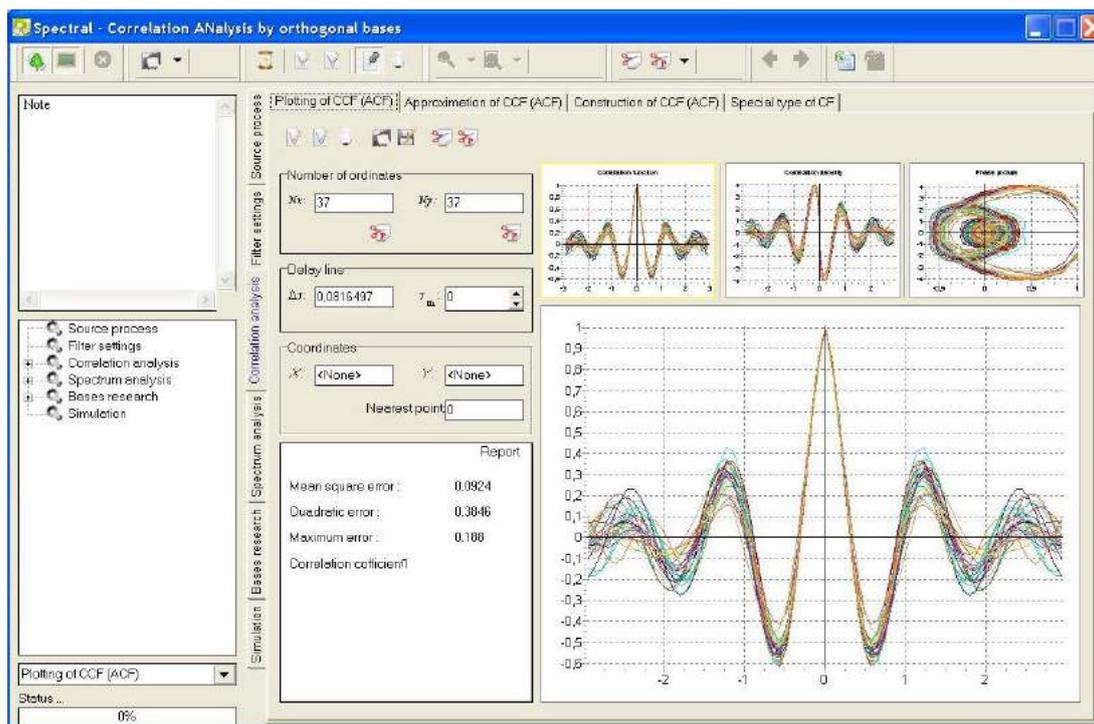
Пример НКФ, фазового портрета и их теоретических значений для 5 модели НКФ с параметрами $N = 5000$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 5$.



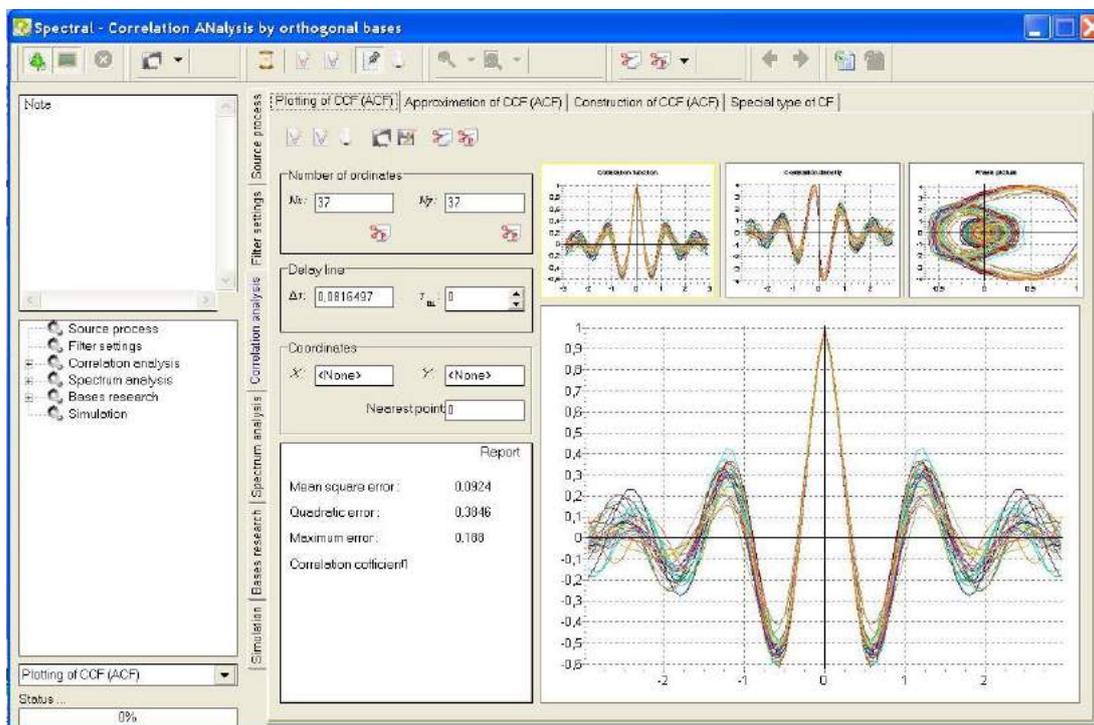
Результаты вычисления НКФ для 29 реализаций $N = 740$.



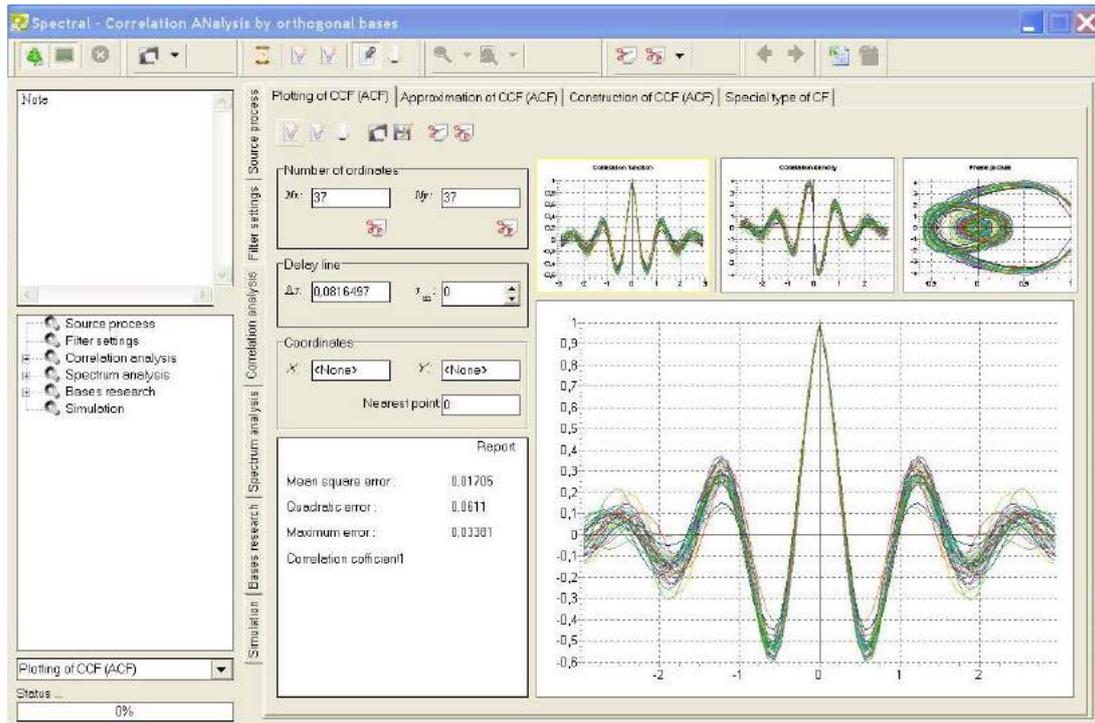
Результаты вычисления НКФ для 29 реализаций $N = 1480$.



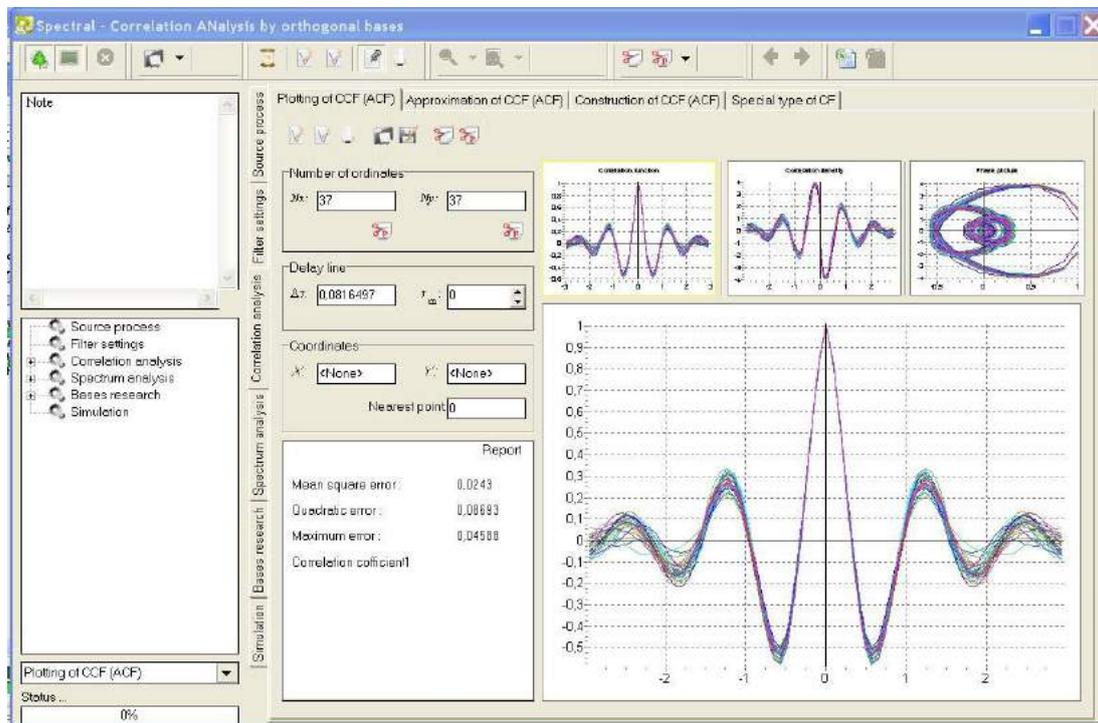
Результаты вычисления НКФ для 29 реализаций $N = 2220$.



Результаты вычисления НКФ для 29 реализаций $N = 2960$.



Результаты вычисления НКФ для 29 реализаций $N = 3700$.



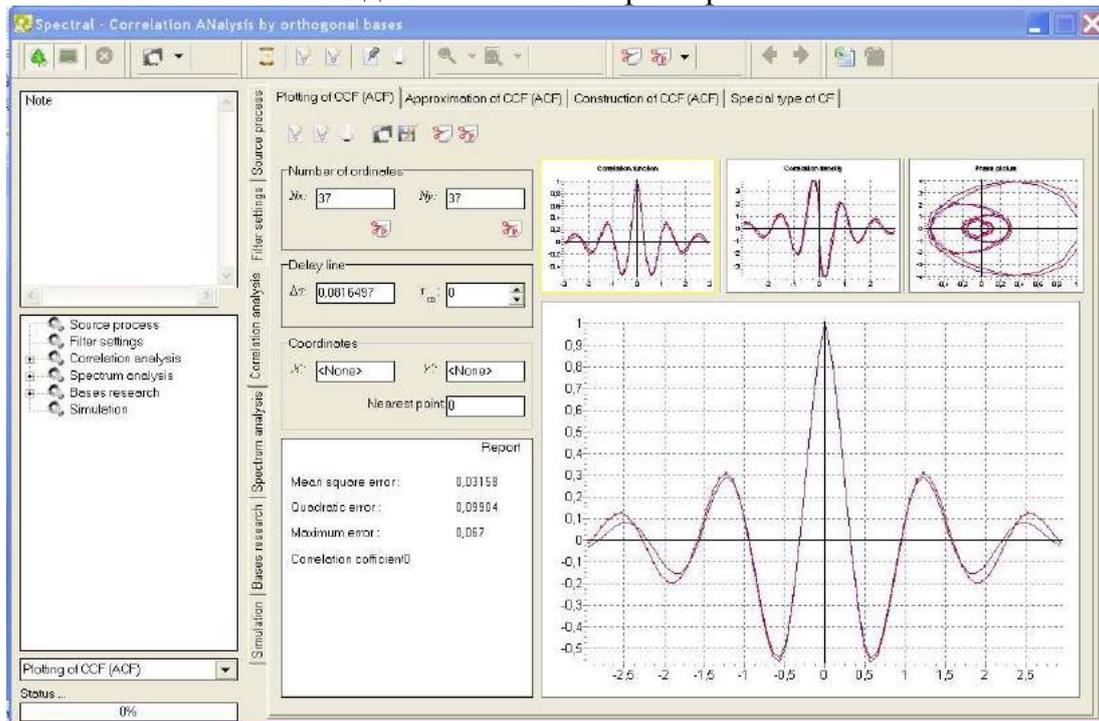
Выводы

1. Разброс НКФ уменьшается с увеличением N .
2. Значения НКФ на начальном участке меньше зависят от объема выборки.

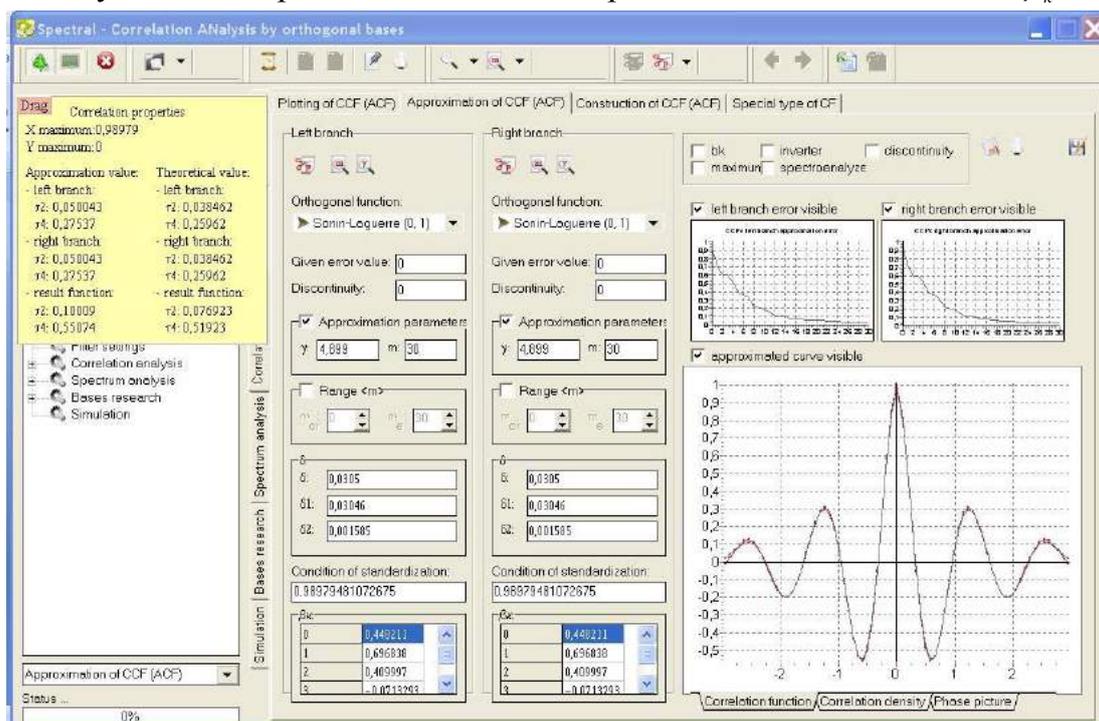
Лабораторная работа № 2. Построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с помощью АИС

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

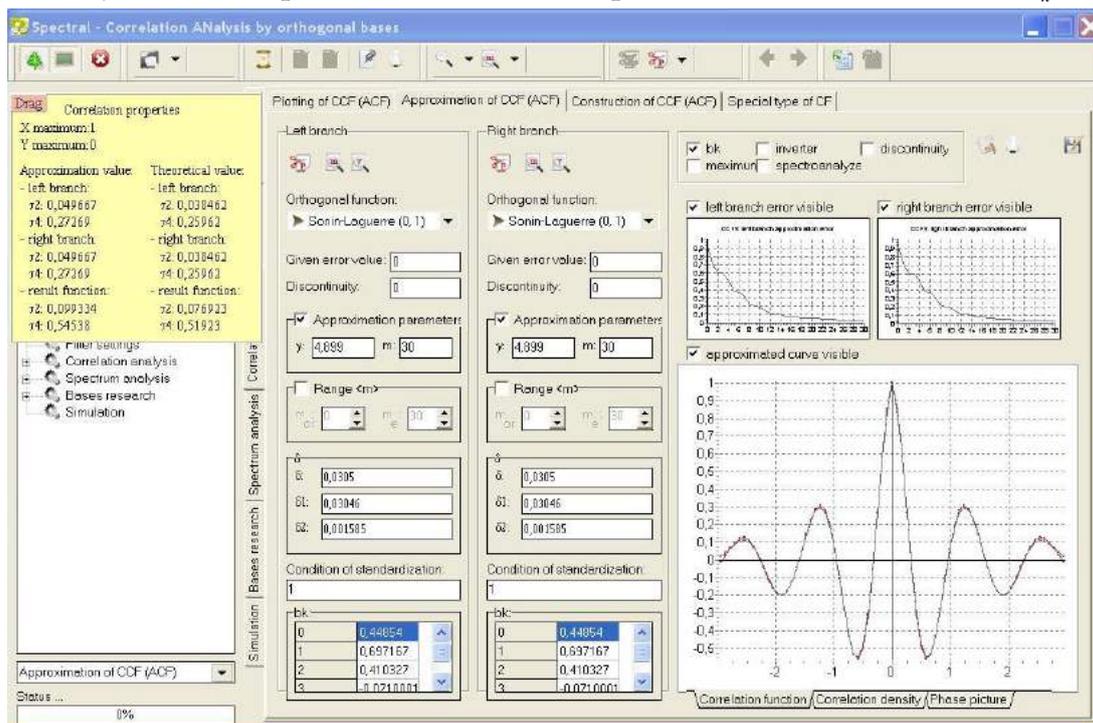
Исходная НКФ и ее характеристики



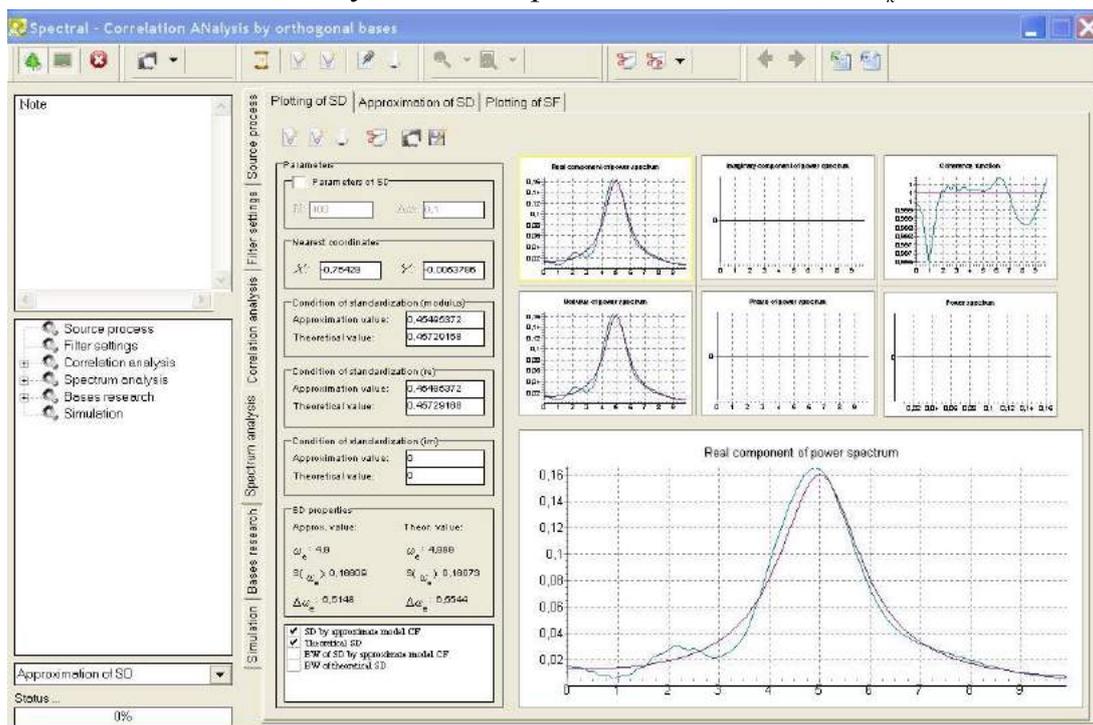
Результаты аппроксимации НКФ выбранным базисом с оценкой β_k .



Результаты аппроксимации НКФ выбранным базисом с оценкой b_k .



Результаты аппроксимации СПМ для b_k .



Результаты оценки погрешностей КСХ - $\delta x = \frac{x - x_T}{x_T}$ для β_k и b_k .

Базис	$\delta \tau_k^{(2)}$	$\delta \tau_k^{(2)}$	$\delta \omega_s$	$\delta S(\omega_s)$	$\delta \Delta \omega_s$
Сонин-Лагерра					
....					
Якоби (0,0)					

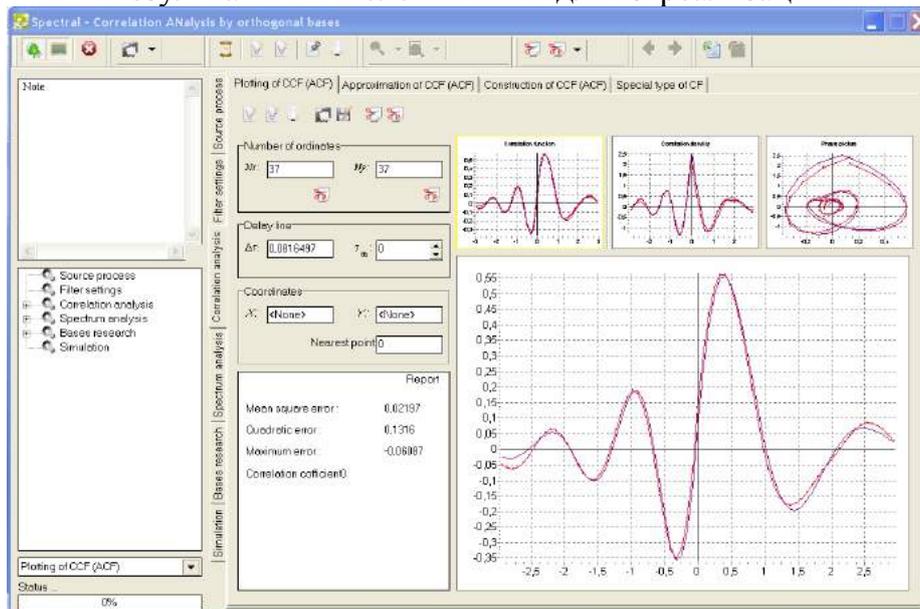
Выводы по работе.

Лабораторная работа № 3. Моделирование пары коррелированных временных рядов с заданными корреляционно-спектральными свойствами

Цель работы: изучение метода моделирования пары случайных процессов с заданными корреляционными свойствами.

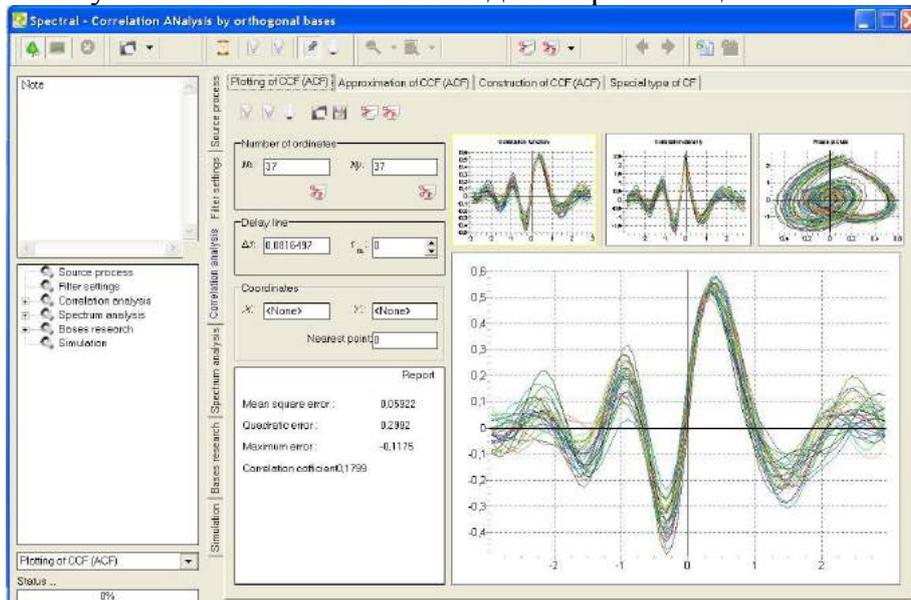
Необходимо ввести вид НКФ $x(t), y(t)$, их параметры. Задать алгоритмы моделирования и их параметры. Ниже приведены примеры ВКФ, фазового портрета и их теоретические значения для заданных моделей НКФ $N = 5000$.

Результаты вычисления ВКФ для 29 реализаций

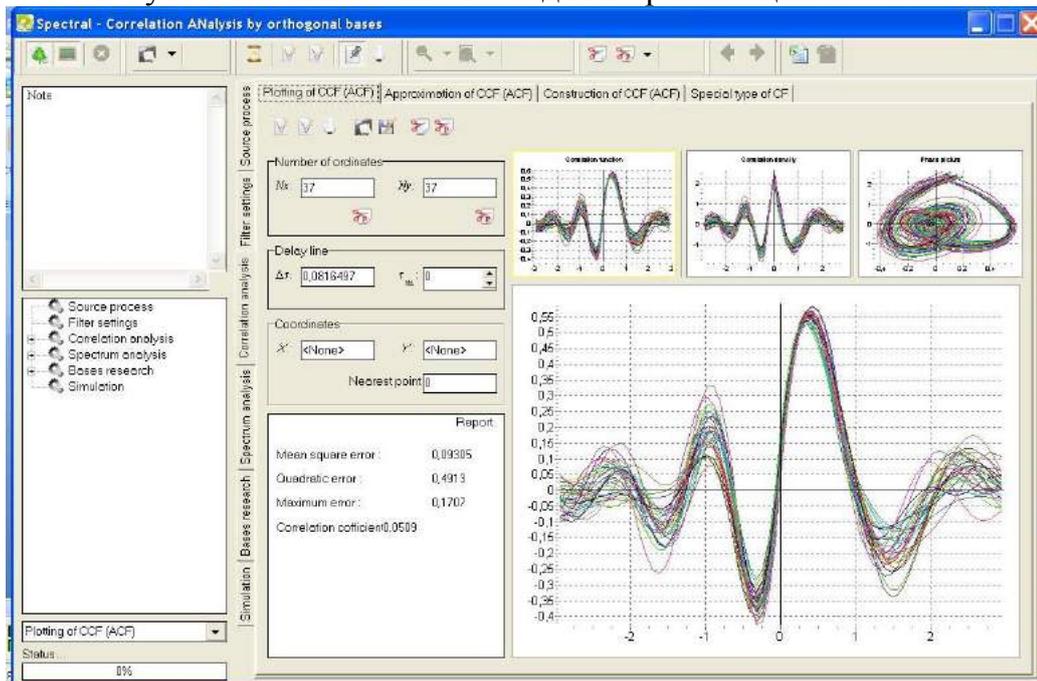


Примеры ВКФ и фазовых портретов для объема выборки $N = k \cdot 20 \cdot \max\{\tau_{xk \max}, \tau_{yk \max}\}$, $k=1, 2, 3, 5$ (количество реализаций для каждого модельного эксперимента равно 29) приведены ниже.

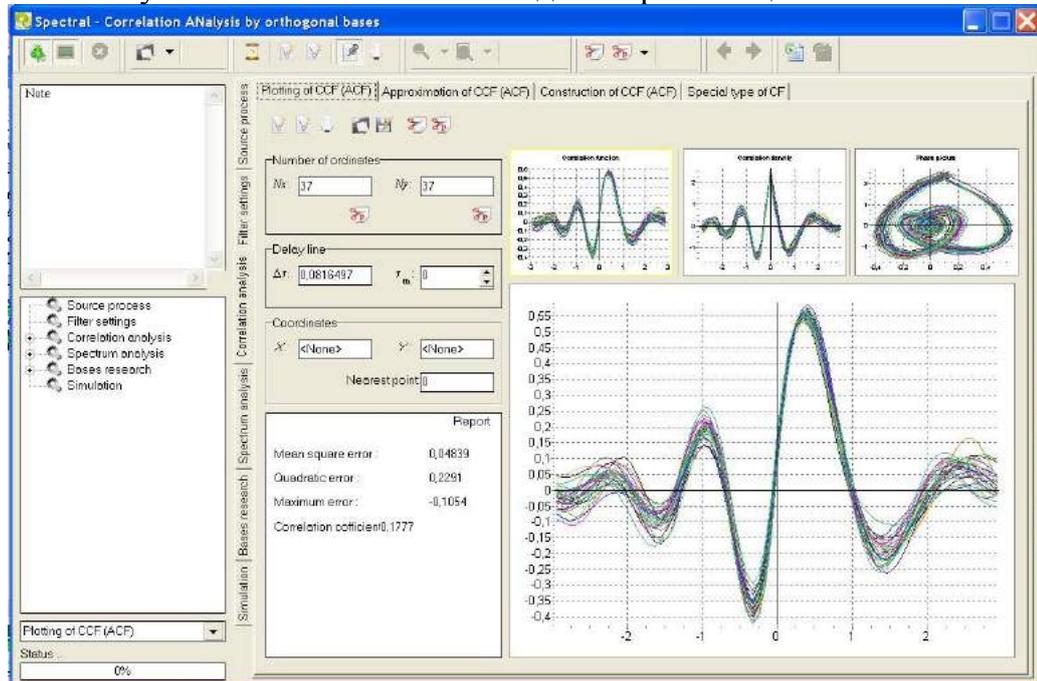
Результаты вычисления ВКФ для 29 реализаций $N = 740$



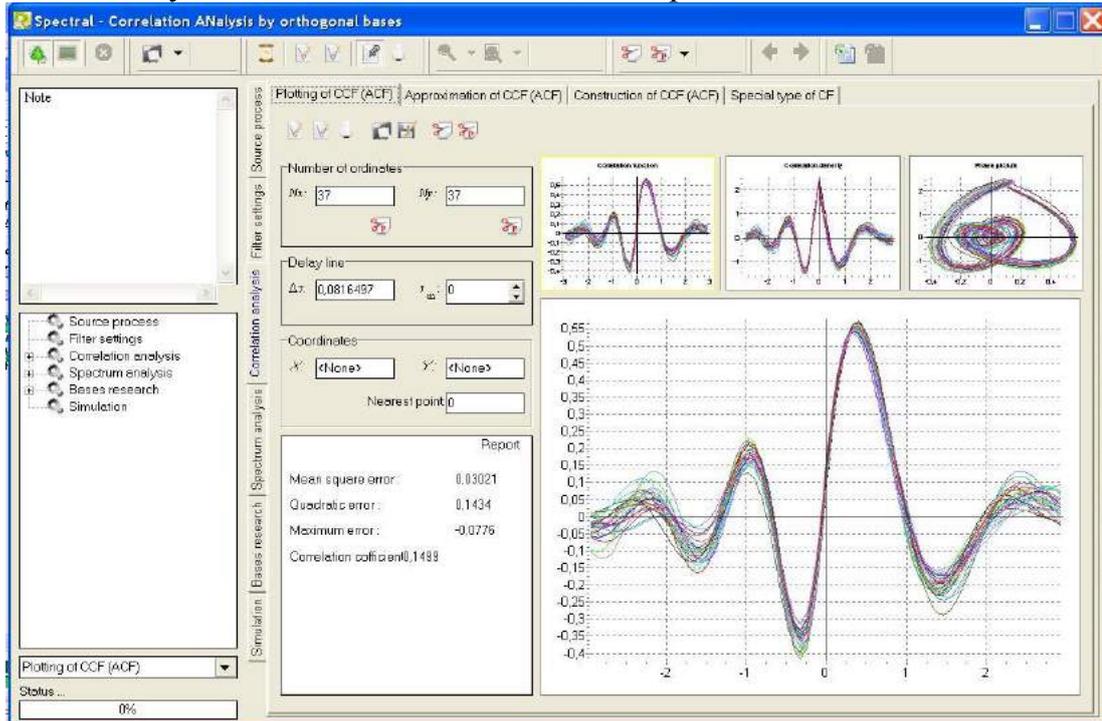
Результаты вычисления ВКФ для 29 реализаций $N = 1480$



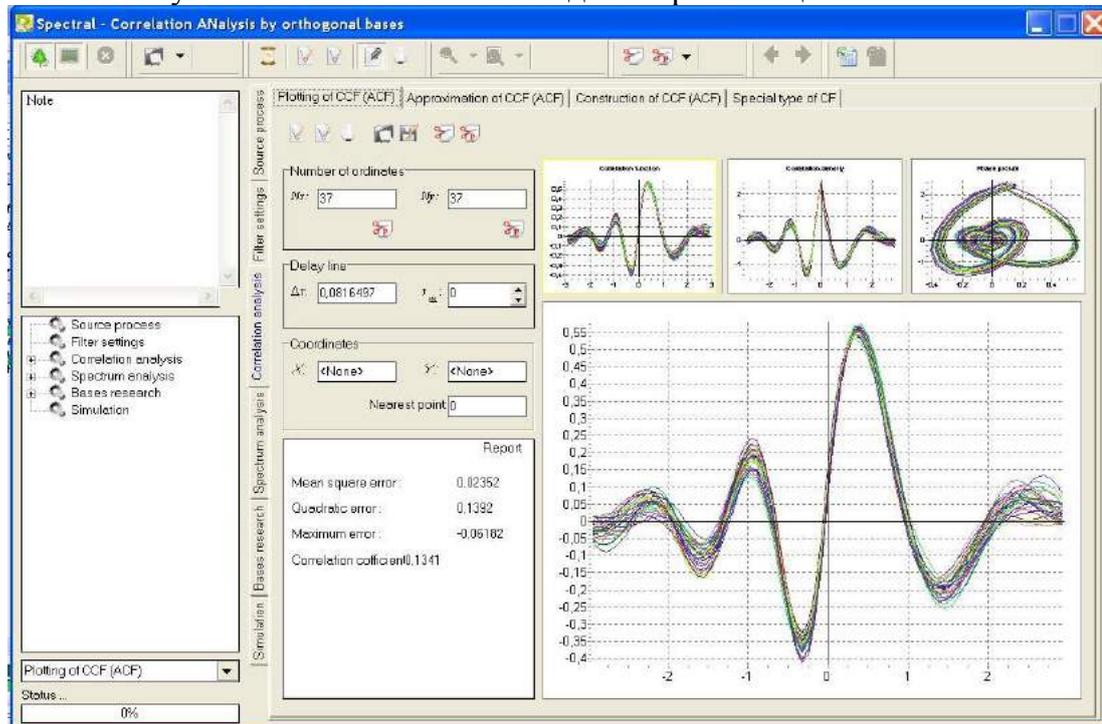
Результаты вычисления ВКФ для 29 реализаций $N = 2220$.



Результаты вычисления ВКФ для 29 реализаций $N = 2960$.



Результаты вычисления ВКФ для 29 реализаций $N = 3700$.

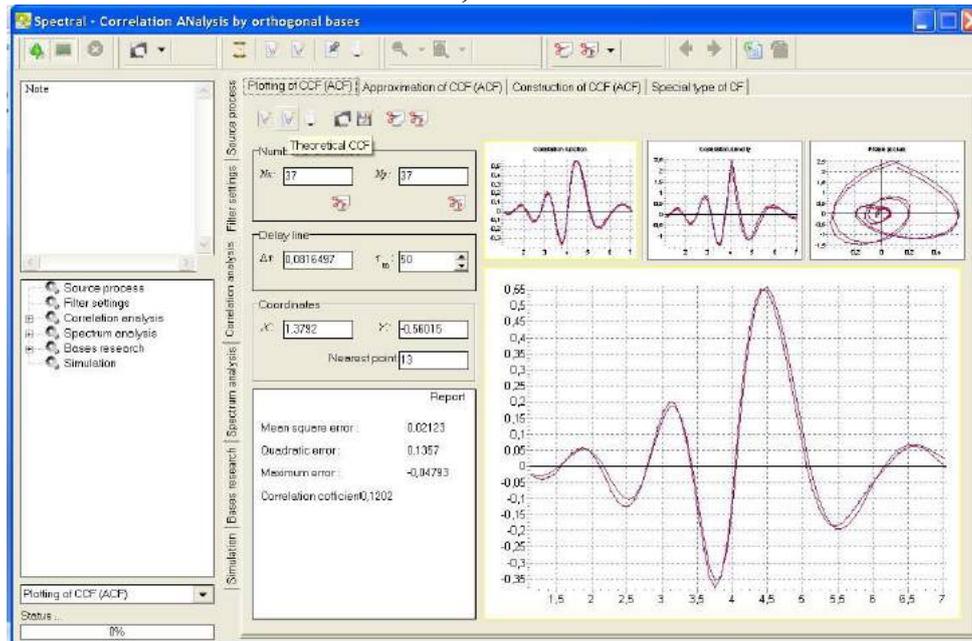


Выводы по работе.

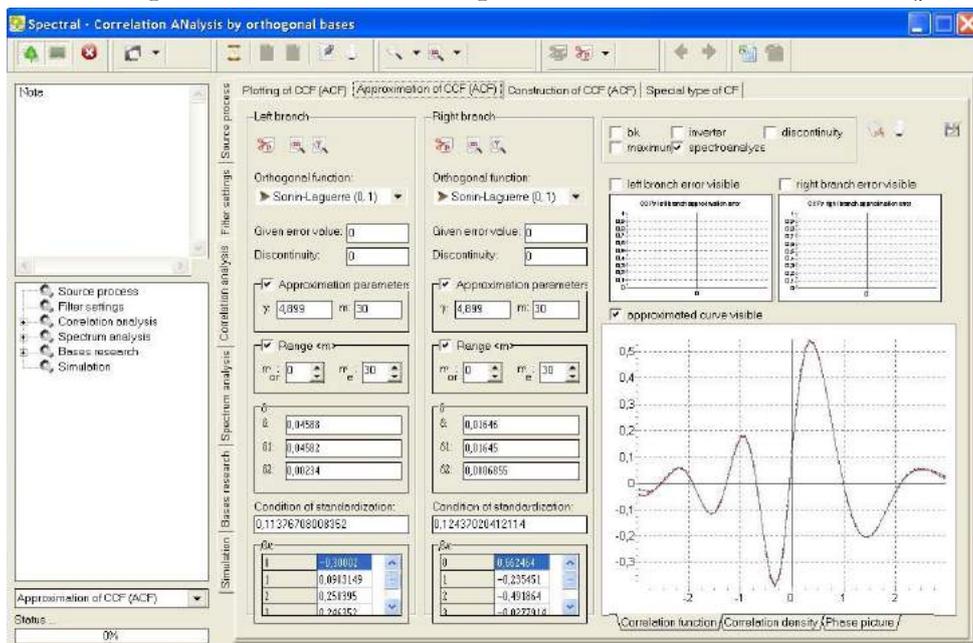
Лабораторная работа № 4. Ортогональные модели взаимных корреляционно-спектральных характеристик

Цель работы: изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

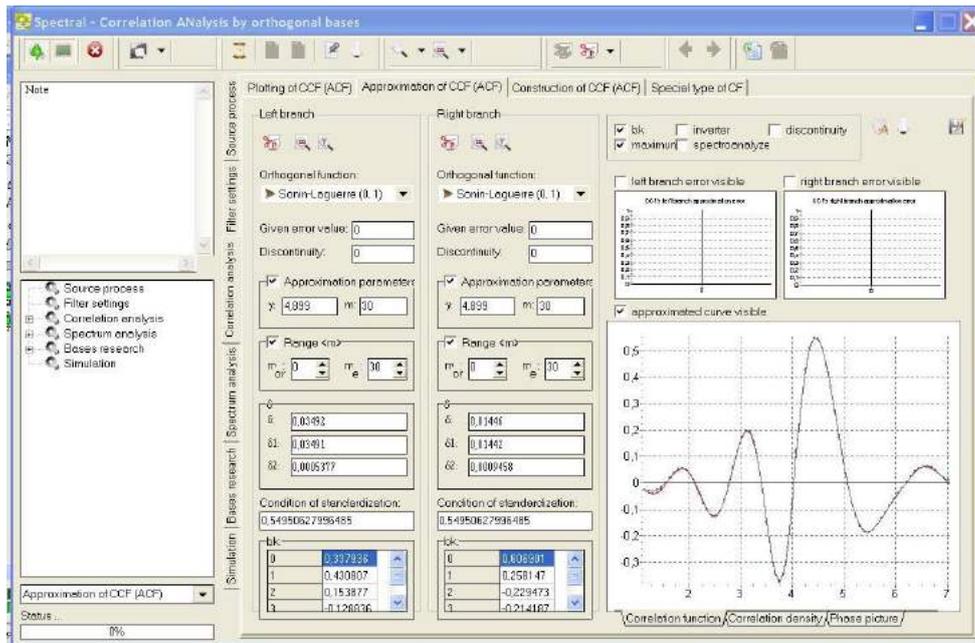
ВКФ, N=5000.



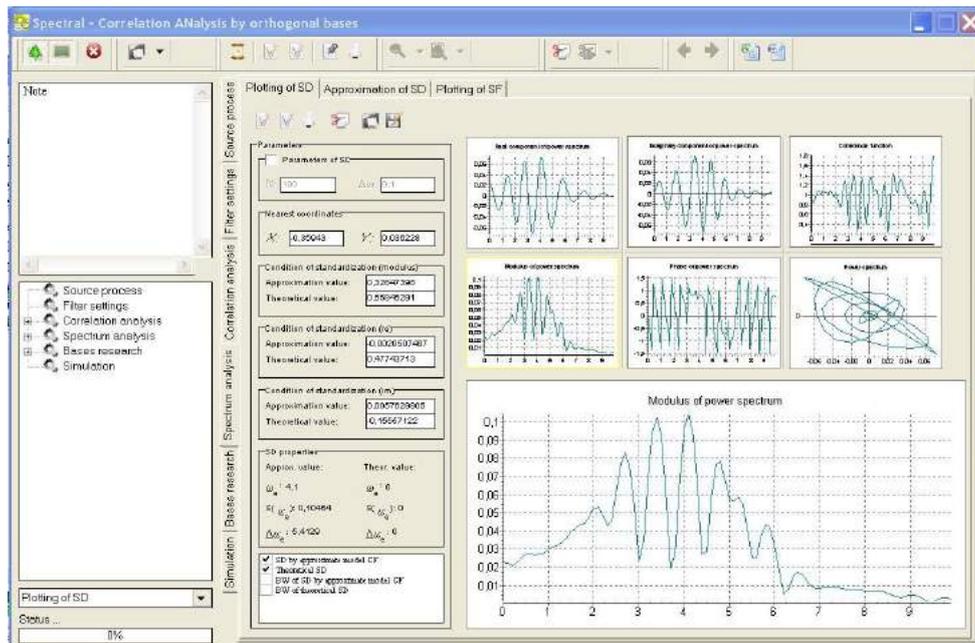
Результаты аппроксимации ВКФ выбранным базисом с оценкой β_k , N=5000.



Результаты аппроксимации НКФ выбранным базисом с оценкой b_k , $\tau_m = 50\Delta\tau$



Ортогональные модели СПМ, $\tau_m = 50\Delta\tau$

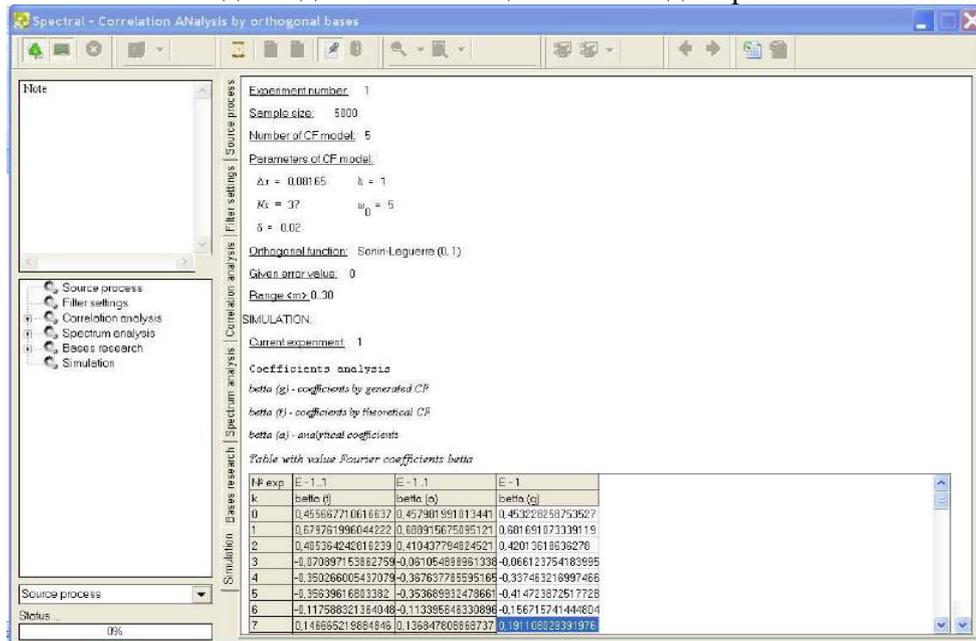


Выводы по работе.

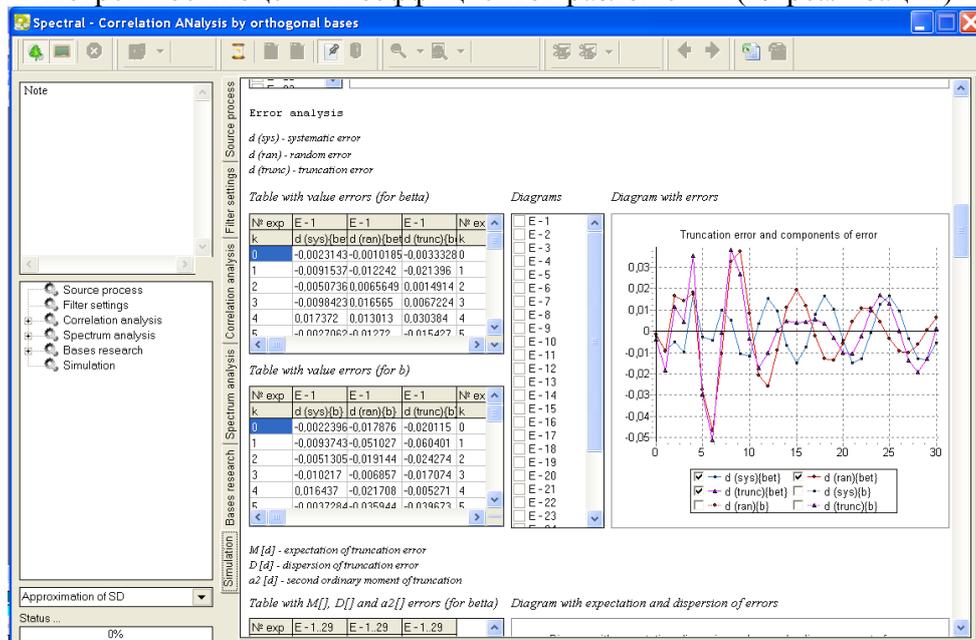
Лабораторная работа № 5. Анализ методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций с помощью АИС

Цель работы: изучение методики и приобретение практических навыков анализа методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их характеристик методом имитационного моделирования.

Исходные данные имитационного моделирования



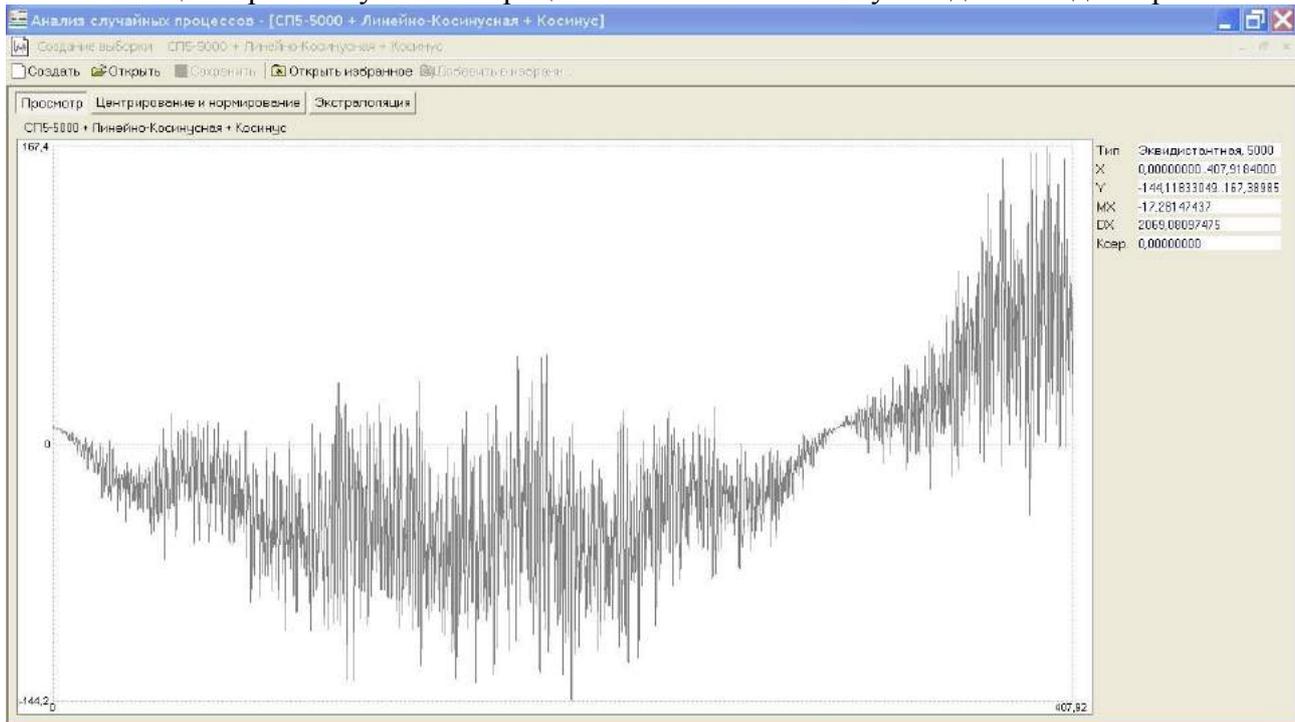
Погрешности оценки коэффициентов разложения (29 реализаций)



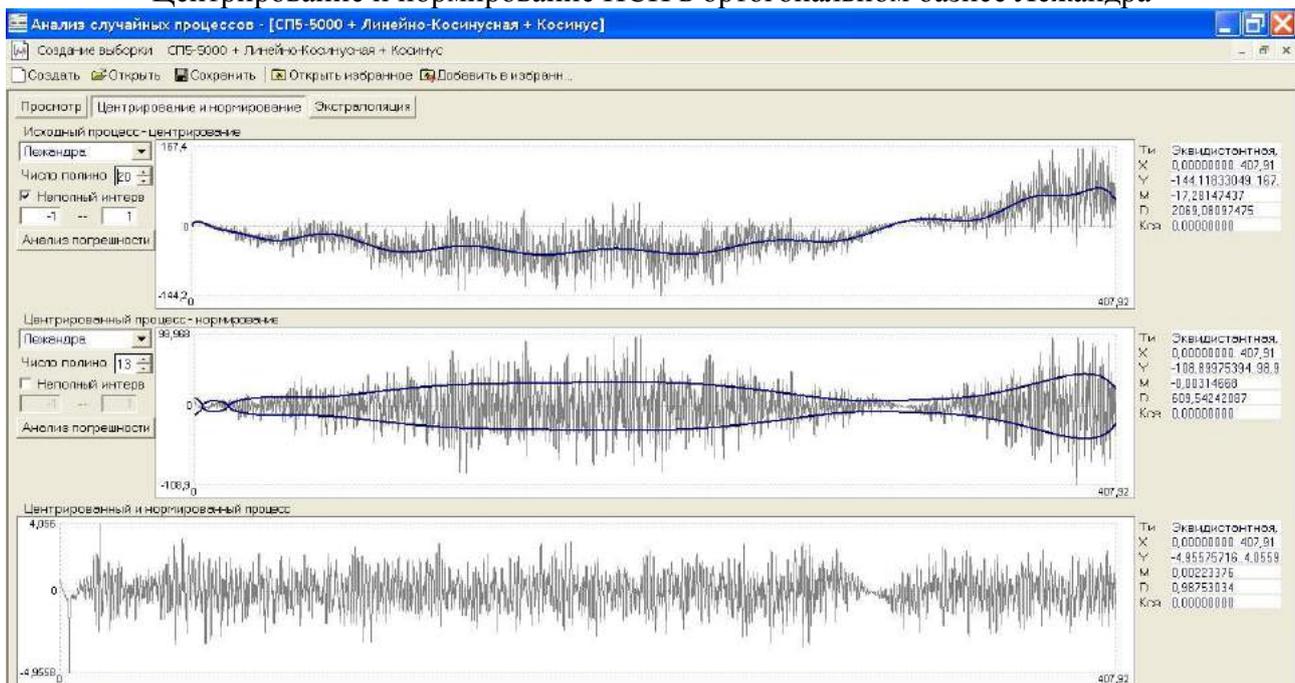
Лабораторная работа № 6. Ортогональные модели нестационарных случайных процессов по математическому ожиданию и дисперсии

Цель работы: изучение методики и приобретение практических навыков анализа методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их характеристик методом имитационного моделирования.

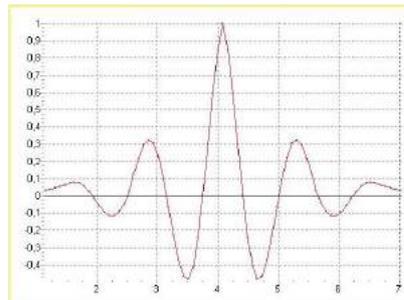
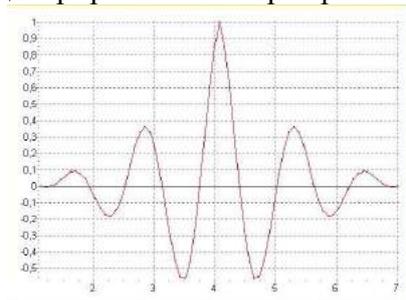
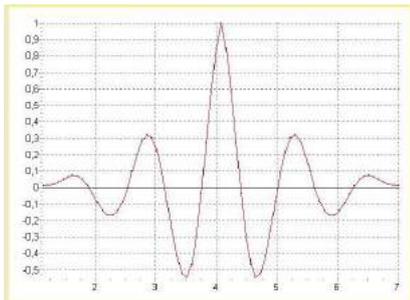
Нестационарный случайный процесс по математическому ожиданию и дисперсии



Центрирование и нормирование НСП в ортогональном базисе Лежандра



НКФ исходного стационарного процесса и стационарной составляющей НСП после центрирования и нормирования



Выводы по работе.

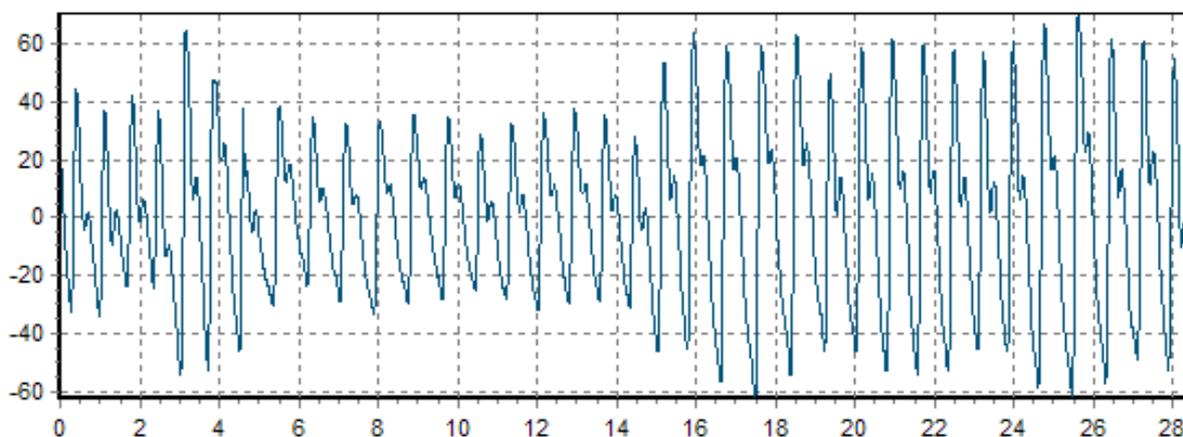
Лабораторная работа № 7. Корреляционно-спектральный анализ результатов экспериментальных исследований

Цель работы: построить ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик при проведении экспериментальных исследований

Корреляционно-спектральный анализ фотоплетизмограмм

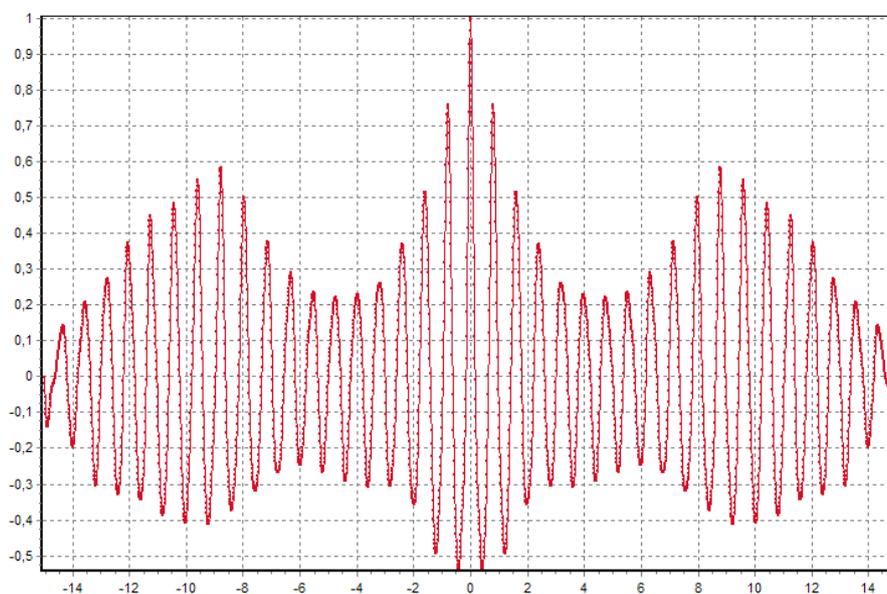
Описание предметной области и постановка задачи

Центрированный процесс, полученный с датчика с интервалом в 10 мс, объем выборки – 2854

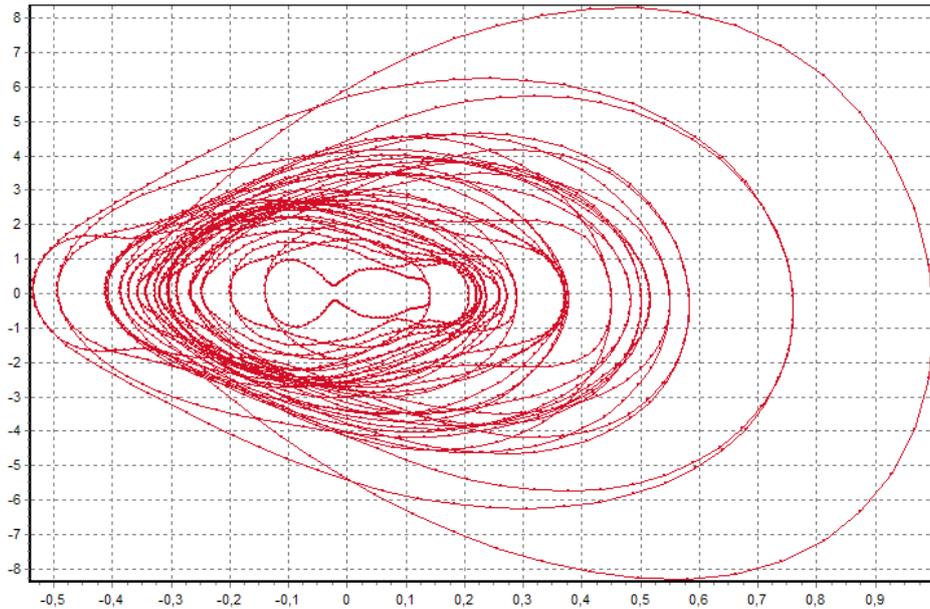


Ниже на рисунках П 13.2 и П 13.3 – АКФ с интервалом дискретизации $\Delta\tau = 0,01$ и числом ординат восстановления $N_x = 1500$ и ее фазовый портрет соответственно.

АКФ с параметрами $\Delta\tau = 0,01$, $N_x = 1500$



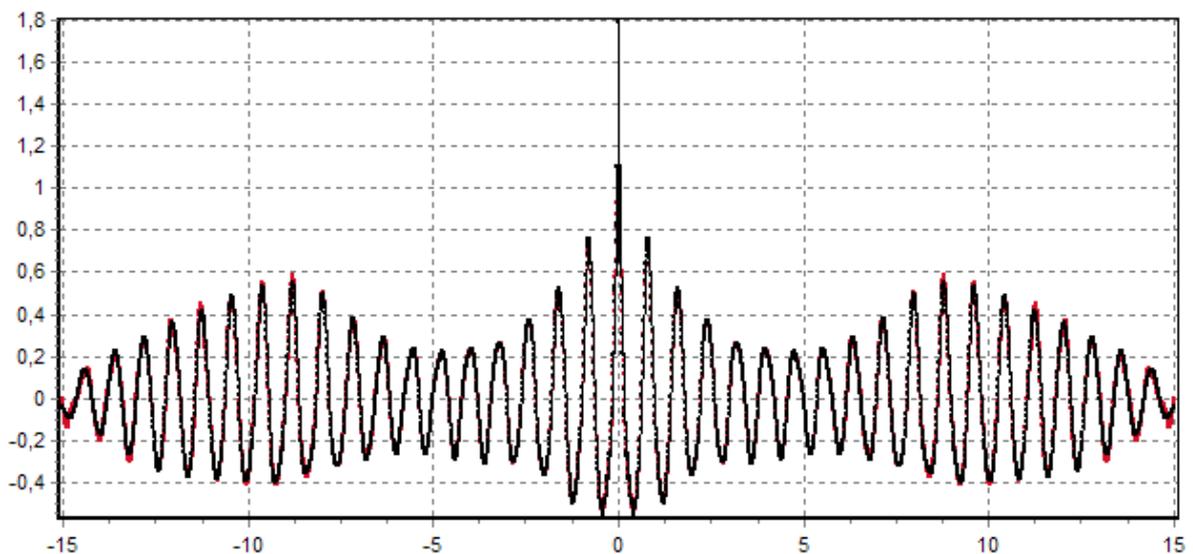
Фазовый портрет АКФ



Построим ортогональную модель АКФ с помощью ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) (см. рисунок П 29.4).

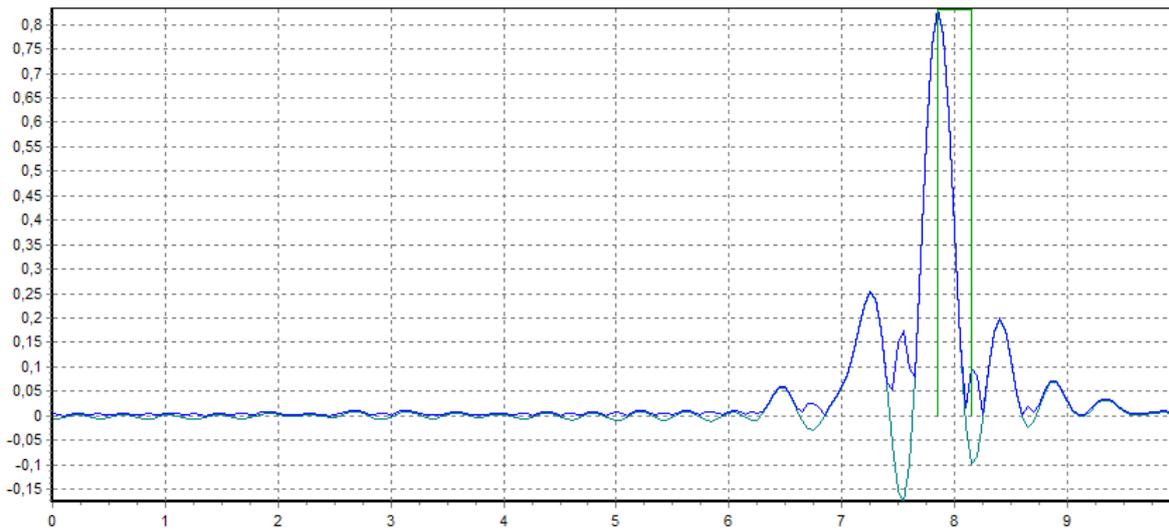
Аппроксимация АКФ ортогональными функциями Сонина-Лагерра (1);

$$\gamma = 10, m = 280$$



Тогда, по параметрам ортогональной модели АКФ оценим СПМ процесса и определим обобщенные спектральные характеристики (см. рисунок П 13.5). На рисунке построены графики реальной части СПМ и модуля СПМ, а прямоугольником указана найденная эквивалентная ширина.

Модель СПМ и его составляющие с характеристиками
 $\omega_e = 7,85$, $S(\omega_e) = 0,83047$, $\Delta\omega_e = 8,151$



Известно, что СПМ представляет собой распределение частот процесса. В свою очередь частота пульсаций соответствует экстремальной частоте $\omega_e = 7,85 \text{ рад/с}$. Данное значение представлено в относительных единицах. Следовательно,

$$f_n = \frac{\omega_e}{2\pi} = 1,25 \text{ уд/с} \text{ или } f_n = 75 \text{ уд/мин.}$$

С.А. Прохоров, И.М. Куликовских

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО И НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров, И.М. Куликовских
Лицензия ЛР № от

Подписано в печать. Формат
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ №

Самарский научный центр Российской академии наук.
443001, Самара, Студенческий переулок, 3 А.