

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического моделирования в механике

И.С. Загузов, К.А. Поляков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
В АЭРОГИДРОМЕХАНИКЕ**

Часть I

Учебное пособие

*Рекомендовано научно-методическим советом
по прикладной математике УМО университетов
в качестве учебного пособия*

Издательство "Самарский университет"
2001

ББК 22.253
3 148
УДК 532.517

Загузов И.С., Поляков К.А. Математические модели в аэрогидромеханике. Ч.1: Учебное пособие. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001. 92 с.

ISBN 5-86465-228-8

В учебном пособии к спецкурсу "Математическое моделирование в аэрогидромеханике" и "Математические модели в механике" даны принципы математического моделирования аэрогидромеханических процессов и математические постановки основных задач о движении вязких жидкостей и газов. Приведены математические модели ламинарного и осредненного турбулентного движения вязкой жидкости в пограничном слое. Рассмотрены решения актуальных задач течений в трубах и обтеканий тонких пластин.

Пособие предназначено для студентов механико-математических факультетов университетов (специальность «прикладная математика») и может быть полезно научным работникам в области аэрогидромеханики.

ББК 22.253

Рецензенты: д-р техн. наук, проф., проректор по научной работе Самарского государственного аэрокосмического университета **Е.В.Шахматов**;
д-р физ.-мат. наук, проф., проректор по научной работе Самарского государственного университета **В.И.Астафьев**

ISBN 5-86465-228-8

© Загузов И.С., Поляков К.А., 2001
© Изд-во «Самарский университет», 2001

ВВЕДЕНИЕ

Механика изучает общие закономерности, связывающие движение и взаимодействие тел, находящихся в различных состояниях – твердом, жидком и газообразном. В соответствии с этим механика подразделяется на следующие части: механика абсолютно твердого тела (теоретическая механика) и механика сплошной среды, включающая в себя механику жидкости и газа и механику деформируемого твердого тела.

Механика, изучая простейшие формы движения и взаимодействия материальных тел, отвлекается от многих их действительных свойств и использует в качестве допустимой абстракции понятия материальной точки и системы материальных точек. Материальная система может быть как дискретной, состоящей из отдельных материальных точек, так и сплошной с непрерывным распределением вещества и физических характеристик его состояния и движения. В последнем случае систему называют сплошной материальной средой или просто сплошной средой. Простейшим случаем сплошной среды является неизменяемая среда или абсолютно твердое тело. Более общий образ изменяемой сплошной среды объединяет в механике как упругие и пластические, так и жидкие и газообразные тела. Помимо обычных материальных тел, подобных воде, воздуху или металлу, в механике сплошной среды рассматриваются также особые среды – поля: электромагнитное поле, поле излучений, гравитационное поле (поле тяготения) и другие.

В теоретической механике изучаются движения материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. Механика сплошной среды – обширная часть механики, посвященная движению газообразных, жидких и твердых деформируемых тел. Здесь с помощью и на основе методов и данных, развитых в теоретической механике, рассматриваются движения таких материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом и расстояния между точками которых во время движения меняются. Одна из важных частей механики сплошной среды, относящаяся к жидким и газообразным средам, носит название механики жидкости и газа, или аэрогидромеханики.

Аэрогидромеханика – наука, изучающая закономерности движения и равновесия жидкостей и газов и их силового взаимодействия с обтекаемыми телами или граничными поверхностями. Механика жидкого тела называется гидромеханикой, механика газообразного тела – аэромеханикой.

Законы движения жидкостей и газов при малых скоростях во многом одинаковы. При сравнительно больших скоростях течения (80–100 м/с) начинает проявляться сжимаемость газа, которая учитывается при решении многих задач. Сжимаемость капельной жидкости принимается во внимание только при решении специальных задач (например, при расчете гидравлического удара или подводного взрыва). Аэромеханика больших ско-

ростей отличается от гидромеханики как методами исследования, так и порядком величин параметров.

Развитие воздухоплавания, авиации и ракетостроения вызвало особый интерес к исследованиям силового взаимодействия воздуха и других газообразных сред с движущимися в них телами (крылом самолета, фюзеляжем, винтом, корпусом ракеты и др.). Область аэрогидромеханики, изучающая законы движения газа, а также законы силового взаимодействия газообразной, в частности воздушной среды с движущимися в ней телами, называется аэродинамикой. Раздел аэрогидромеханики, рассматривающий законы движения газа (воздуха), движущегося с большими дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями, называется газодинамикой. Эти науки имеют большое значение для авиации и ракетостроения и своим развитием обязаны главным образом этим отраслям техники. Аэрогидромеханика совместно с другой наукой – динамикой полета – является теоретической основой авиации и ракетной техники.

Дальнейшее развитие авиационной и ракетной техники положило начало новым разделам аэрогидромеханики – аэродинамике больших скоростей и аэродинамике разреженного газа или, как их принято называть, гиперэроаэродинамике и суперэроаэродинамике.

Аэрогидромеханика является одной из древнейших наук. Если античная механика твердого тела зародилась главным образом в связи с грандиозными строительными работами, то созданию первых идей механики жидкости и газа больше всего способствовали вопросы плавания судов, строительства водопроводов, полета металлических снарядов. Основной гидродинамической проблемой того времени явилось выяснение сущности взаимодействия между движущимся твердым телом и окружающей его средой - водой или воздухом при плавании или полете.

Не все идеи, высказываемые механиками древности, были верными. Так, великий античный философ Аристотель (384 - 322 гг. до н.э.) считал, что снаряд может совершать полет только под действием воздуха, смыкающегося за снарядом и толкающего его вперед. Полет в пустоте невозможен, так как при этом отсутствует материальная среда, приводящая его в движение. В эпоху, когда еще не был известен закон инерции, ошибочность такого объяснения свободного полета тела не должна вызывать удивления. Только открытие в XV веке закона инерции положило конец этим заблуждениям, а общее для всех сред свойство сопротивляемости движению тел было твердо установлено.

Общеизвестны заслуги Архимеда (287-212 гг. до н.э.) в создании гидростатики. Его работы послужили толчком к появлению ряда замечательных гидравлических аппаратов: поршневых насосов, сифонов и т.д. Идеи Архимеда были продолжены Стевином (1548-1620), Галилеем (1564-1642) и Паскалем (1623-1662). Стевин первый строго сформулировал известный в механике принцип затвердения, позволяющий применять в

гидростатике обычные приемы статики твердого тела. Галилей и Паскаль использовали для решения задач гидростатики принцип возможных перемещений. Большое принципиальное значение для дальнейшего развития всей механики жидкости и газа сыграл закон Паскаля о независимости давления жидкости на расположенную внутри нее площадку от ориентации этой площадки в данной точке покоящейся жидкости.

Вопрос о сущности сопротивления среды и выяснение количественных законов сопротивления представляли долгое время непреодолимое затруднение. Основоположник экспериментальной механики Галилей, поставив опыты с колебаниями маятников, вывел заключение о пропорциональности сопротивления первой степени скорости движения относительно среды. Гюйгенс (1639-1695) на основании более точных опытов установил близкий к действительности и широко используемый и поныне закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости. Ньютон (1642-1727) в своих "Началах" приводит теоретический вывод квадратичного закона сопротивления. Полное сопротивление тела, по Ньютону, складывается из сопротивления, зависящего от инертности жидкости (это соответствует современному представлению о сопротивлении давления) и пропорционального квадрату скорости и сопротивления, определяемого трением жидкости о поверхность обтекаемого тела (ныне называемого сопротивлением трения) и зависящего от первой степени скорости.

Фундаментальные открытия Галилея, Гюйгенса и Ньютона привели в конце XVII века к расцвету общей механики и подготовили предпосылки к мощному скачку в развитии аэрогидромеханики. Особое значение имело установление Ньютоном основных законов и уравнений динамики, обобщение которых на сплошные среды привело к образованию самостоятельного раздела теоретической механики - гидродинамики. Честь создания теоретической гидродинамики как специальной науки принадлежит Российской академии наук в лице ее двух академиков - Леонарда Эйлера (1707-1783) и Даниила Бернулли (1700-1782).

Эйлер впервые вывел основную систему уравнений движения идеальной жидкости, положив этим начало аналитической механике сплошной среды. Гидродинамика обязана Эйлеру расширением понятия давления на случай движущейся жидкости. В отличие от ньютоновского взгляда на ударную природу взаимодействия твердого тела с набегающей на него жидкостью, Эйлер выдвигает новое для того времени представление об обтекании тела жидкостью, и давление в данной точке поверхности определяется движением жидкости вблизи ее поверхности (а не наклоном поверхности в данной точке к направлению набегающего потока, как полагал Ньютон). Эйлеру принадлежит первый вывод уравнения сплошности жидкости, общепринятая ныне формулировка теоремы об изменении количества движения применительно к жидким и газообразным средам и многое другое.

Другой петербургский академик, Даниил Бернулли, внес большой вклад в развитие аэрогидромеханики своим трудом "Гидродинамика". С этого времени и появился термин - гидродинамика. Бернулли впервые изложил теорему, устанавливающую связь между давлением, уровнем и скоростью движения тяжелой жидкости. Эта теорема является фундаментальной теоремой гидродинамики. Согласно ей, если в точках потока, находящихся на одном уровне, понижается скорость, то должно возрасти давление. Этот результат вначале казался парадоксальным. Действительно, в то время прочно установился взгляд о возрастании давления жидкости на тело при увеличении скорости набегания её на тело. Это противоречие было легко устранено Эйлером, который отчетливо разъяснил, что теорема Бернулли верна лишь в том случае, если следить за движением частиц одной и той же струи. Эйлер сказал: "Вся сложность понимания этого предложения устраняется, если считать, что здесь сравнение производится не между скоростями двух разных течений, а между разными скоростями вдоль данной струи, которая обтекает поверхность тела". Эти слова Эйлера заслуживают упоминания в любом учебнике по гидродинамике, так как и сейчас эта важная сторона теоремы Бернулли часто ускользает от студентов.

Гениальный русский ученый М.В. Ломоносов (1711-1765) своими исследованиями по упругости газов и теплоте способствовал развитию механики газа. Отличительной чертой Ломоносова было стремление к слиянию теории и практики. Придавая большое значение эксперименту, Ломоносов создал первую в России физико-химическую лабораторию, где провел знаменитые опыты по проверке закона сохранения материи и законов упругости, по выяснению природы тепла, атмосферного электричества (совместно с Рихманом) и др. Большой интерес проявлял Ломоносов к изучению атмосферы. Он создал первый для того времени проект вертолета - винтового летательного аппарата для исследования атмосферы.

Следующий этап истории аэрогидромеханики, относящийся уже к XIX веку, знаменуется, с одной стороны, дальнейшей математической разработкой гидродинамики идеальной жидкости, с другой - зарождением двух новых разделов, имеющих особо важное значение для современной аэрогидродинамики: динамики вязкой жидкости и газовой динамики.

В этот период были созданы два новых раздела гидродинамики идеальной жидкости: волновое и вихревое движения. Теория волнового движения развивалась в связи с вопросами качки, сопротивления корабля на волнении, а также теории приливных волн в каналах и реках. Первые исследования, связанные с приближенной теорией длинных волн на поверхности тяжелой жидкости, принадлежали еще Лагранжу (1781). Имя Лагранжа носит основное дифференциальное уравнение распространения волн и формула скорости их распространения. Классическим трудом, содержащим строгую теорию волн малой амплитуды, является мемуар Коши

(1815). Создателем учения о вихревом движении считают Гельмгольца, разработавшего в 1858 г. основные теоремы о движении вихрей в идеальной жидкости. Анализу вихревого и деформационного движения жидкого элемента посвящен ряд работ Н.Е. Жуковского. Теория вихрей сыграла большую роль в развитии метеорологии, теории крыла самолета, теории пропеллера и корабельного винта и др.

Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены в 1821 г. французским ученым Навье (1785-1836) и получили свое завершение в 1845 г. в работах Стокса (1819-1903), который сформулировал закон линейной зависимости напряжений от скоростей деформации. Он дал в окончательной форме уравнения пространственного движения вязкой жидкости, получившие название уравнений Навье-Стокса. Развитие механики вязкой жидкости отвечало практическим запросам со стороны активно развивавшихся в XIX веке гидравлики и гидротехники, учения о трении в машинах, физики и химии нефтяных и других аналогичных веществ. Основное значение имели теоретические и экспериментальные исследования сопротивления в трубах и каналах при движении в них вязких жидкостей (теоретическое решение этой задачи дал Стокс в 1846 г.). Экспериментальные исследования движения вязкой жидкости в трубках очень малого диаметра (капиллярах) были проведены французским врачом и естествоиспытателем Д. Пуазейлем (1799-1869) в 1840-1942 гг. в связи с изучением движения крови по сосудам. Вопрос о потере устойчивости ламинарного движения в цилиндрических трубах и переходе его в турбулентное был исследован экспериментально в период 1876-1883 гг. английским физиком О.Рейнольдсом (1842-1912), установившим критерий этого перехода, который в настоящее время носит имя Рейнольдса. Практические вопросы уменьшения трения в подшипниках железнодорожных вагонов привели к созданию гидродинамической теории смазки, в области которой работали Н.П. Петров, Рейнольдс, Зоммерфельд и др.

Параллельно с развитием гидродинамики вязкой жидкости создавалась динамика сжимаемого газа. Первоначальные исследования в этой области были тесно связаны с зарождением термодинамики и акустики.

Принципиальные особенности движения газа со сверхзвуковыми скоростями - наличие линий возмущения и ударных волн - были отмечены впервые в 1847 г. Допплером. Позже (1875-1897) эти особенности были экспериментально обнаружены и изучены австрийскими физиками Э. Махом и Л. Махом. Однако, как показали последние исследования, широко известный под именем числа Маха основной критерий подобия газовых потоков был установлен еще в 1745 г. Эйлером. Аналогичным критерием при изучении сопротивления артиллерийских снарядов пользовался в 1868-1869 гг. русский баллистик Н.В. Маневский (1823-1892). Элементарная газогидравлическая теория скачка уплотнения, устанавливающая связь между давлением и плотностью до и после скачка, была дана Рэнкиным в

1870 г. и Гюгонио в 1887 г., явление образования скачков уплотнения в сопле Лавала было изучено Стодола. Полного расцвета газовая динамика достигла в первой половине нашего века в связи со вставшими перед нею запросами авиации, турбостроения и техники реактивного движения.

Конец XIX века ознаменовался активным развитием воздухоплавания. В первых рядах борцов за создание авиации стоят Н.Е. Жуковский (1847-1921), К.Э. Циолковский (1857-1935), Д.И. Менделеев (1834-1907), немецкий воздухоплаватель О. Лилиенталь (1848-1896) и др.

Широко известна роль Д.И. Менделеева в развитии учения о газах при больших и малых давлениях, его теоретические и экспериментальные исследования в области метеорологии высоких слоев атмосферы. Менделеев не отрывал научные интересы в области аэродинамики от практических задач воздухоплавания и не только сам лично создавал проекты и конструкции новых летательных аппаратов (в 1887 г. он поднялся в небо на своем аэростате), но и всемерно поддерживал других изобретателей. Так, в 1877 г. Д.И. Менделеев помог конструктору самолета А.Ф. Можайскому, а в 1890 г. представил Русскому техническому обществу проект цельнометаллического дирижабля К.Э. Циолковского,

Русский ученый и изобретатель К.Э. Циолковский создал в 1896 г. одну из первых аэродинамических труб, на которой проводил опыты по определению сопротивления тел. Ему принадлежит целый ряд смелых технических идей: возможность освоения мирового пространства при помощи ракет, первые проекты ракетопланов, проекты цельнометаллических дирижаблей и др.

Появление авиации наложило отпечаток на всю историю развития аэрогидромеханики в XX веке. Начало века ознаменовалось созданием теории крыла и винта - двух основных элементов самолета. Теория крыла бесконечного размаха в плоскопараллельном потоке идеальной жидкости появилась одновременно в разных странах: в России (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин), в Германии (Кутта), в Англии (Ланчестер). Важно подчеркнуть, что Жуковский дал общую теорию подъемной силы, основанную на идее присоединенного вихря. В 1912 году Н.Е. Жуковский излагает новую вихревую теорию гребного винта. Он не только теоретически определяет суммарные характеристики винта - силу тяги и мощность, но и дает детальную картину явления обтекания лопастей винта. С именем Жуковского связано также зарождение динамики полета. Н.Е. Жуковский является создателем современной экспериментальной аэродинамики. Им был организован ряд аэродинамических лабораторий, он был основателем ЦАГИ, названного затем именем Жуковского. Лаборатории, которыми руководил Н.Е. Жуковский, сыграли огромную роль в создании отечественной авиации, в развитии основных аэродинамических воззрений. В дальнейшем работы по теории крыла продолжил ученик Жуковского и его ближайший сотрудник С.А. Чаплыгин (1869-1942). Ему принадлежат первые исследо-

вания разрезного крыла, крыла с предкрылком и закрылком. Его теоретические исследования содержат продолжение работ по применению метода комплексного переменного к теории крыла в плоскопараллельном потоке. Фундаментальные идеи Жуковского и Чаплыгина были в дальнейшем развиты их прямыми учениками и последователями - советскими аэродинамиками. Гидродинамикой плоского безвихревого потока занимались М.В.Келдыш, М.А. Лаврентьев, Л.И. Седов и другие советские ученые, с успехом применявшие в науке о крыле методы теории функций комплексного переменного. Исследования по обтеканию тел с отрывом струй были обобщены в работах М.А. Лаврентьева, А.И. Некрасова и других. Н.Е. Коши (1900-1944) дал строгое решение задачи об установившемся движении в идеальной несжимаемой жидкости круглого в плане крыла и его колебаниях. Задача об обтекании теоретических профилей, выдвинутая Жуковским и Чаплыгиным, была обобщена на случай обтекания изолированного профиля произвольной формы и произвольной решетки профилей в работах Э.Д. Блоха, Г.С. Самойловича, Л.А. Симонова, Г.Ю. Степанова и других.

Центральное место в современной механике жидкости и газа занимает газовая динамика. Отметим наиболее известные работы. В области теории дозвуковых течений знаменательные достижения принадлежат М.В. Келдышу и Ф.И. Франклю, которые в 1934 г. строго поставили вопрос об обтекании крыла сжимаемым газом. В области теории сверхзвуковых и смешанных течений С.А. Христианович дал общий анализ сверхзвуковых течений вблизи линий перехода дозвукового течения в сверхзвуковое и предложил систематическую классификацию этих течений. Христиановичу принадлежит также методика практического построения безударного сопла Лаваля и другие важные работы.

Л.И.Седов поставил и дал первое решение новой задачи нестационарного движения газа - задачи о распространении взрыва. Важные результаты в этой области, а также и в теории распространения ударных волн принадлежат Я.Б. Зельдовичу.

Теория движения вязкой жидкости за последнее время (последние 80 лет) получила развитие главным образом в направлении изучения движения жидкости и газа в пограничном слое, образуемом вблизи поверхности тела.

Наибольший вклад в теорию пограничного слоя внес Людвиг Прандтль (1875-1963). Им впервые были получены уравнения движения жидкости в пограничном слое, которые легли в основу всей современной теории пограничного слоя. Теория пограничного слоя объяснила существенное для практики и остававшееся долгое время непонятным явление отрыва жидкости от поверхности и научила бороться с этим в большинстве случаев вредным явлением (падение подъемной силы крыла, увеличение его сопротивления).

Важную роль в создании современной теории турбулентного движения сыграл статистический метод А.А. Фридмана и Л.В. Келлера, послуживший основой последующих работ А.Н. Колмогорова, Л.Г. Лойцянского, Л.И. Седова - в Советском Союзе и Дж.Тейлора, Т. Кармана и других за рубежом.

Запросы современной самолетной и ракетной техники потребовали обобщения теории пограничного слоя на случай газа, движущегося с большими до- и сверхзвуковыми скоростями. Это обобщение выполнено трудами таких ученых, как А.А. Дородницын и Ф.И. Франкль в СССР. Т. Карман, Л. Крокко и другие за рубежом.

В последнее время усилия ученых сосредоточены главным образом на углублении фундаментальных представлений об аэрогидромеханических процессах, на более глубоком отражении физико-химических особенностей поведения и взаимодействия тел в экстремальных (как в отношении нагрузок, так и параметров окружающей среды) условиях. Важную сферу для приложений представляет изучение оптимизации различных режимов и процессов. Широким фронтом идут работы, направленные на создание общих методов исследования с использованием вычислительных машин и численным моделированием на них физических процессов. Множество проблем, стоящих перед современными учеными-механиками, требует для их решения сосредоточения усилий больших творческих коллективов и широкого сотрудничества ученых как России, так и мира.

Наконец, аэрогидромеханика проникает в другие науки, образуя на пересечении сфер влияния новые разделы (например, биомеханика). Биомеханика стремится понять механику живого. Это древний предмет, и он охватывает обширную область знаний от субклеточных элементов до отдельных клеток, растений и животных. В последние годы большинство выполненных работ посвящено физиологическим и медицинским приложениям биомеханики.

Известны вклады Галилея в измерения пульса сердца, Декарта (1596-1650) - в исследование глаза, Гука (1635-1703) - в наблюдение клеток, Эйлера - в изучение пульсирующих волн в артериях, Юнга (1773-1829) - в теорию голоса и зрения, Гельмгольца (1821-1894) - в теорию речи, зрения и психофизиологии, Ламба (1849-1934) - в обнаружение высокочастотных волн в артериях. Репутация многих известных физиологов устанавливалась на основе их деятельности, связанной с приложениями механики. Так, Стефан Хейлс (1677-1761) измерил артериальное давление и установил его связь с кровотоком. Он ввел понятие периферического сопротивления при течении крови и показал, что главная часть этого сопротивления падает на мельчайшие сосуды в тканях. Пуазейль (1799-1869) разъяснил понятие вязкости и сопротивления при течении крови, а Отто Франк (1865-1944) - механику сердечной деятельности. Старлинг (1886-1926) предложил закон массопередачи через мембрану и объяснил водный баланс в на-

шем теле. Краф (1874-1949) получил Нобелевскую премию за механику микроциркуляции.

Биомедицинские задачи очень сложны. По-видимому, вскоре потребуются усилия, чтобы привлечь к этим вопросам то же внимание, которое уделили инженеры развитию самолетов и ракет. Действительно, опыт авиационных инженеров учит, что значительное продвижение в проектировании всегда осуществлялось за счет фундаментального продвижения в механике жидкости и газа, и наиболее эффективное образование, которое можно дать молодому специалисту, состоит в том, чтобы обучить его фундаментальным наукам.

Дальнейшее развитие в советское время получили исследования по ракетной тематике. Такие ученые, как К.Э. Циолковский, Ф.А. Цандер (1887-1933) и Ю.В. Кондратюк (1897-1942) рассмотрели ряд важных задач ракетодинамики и теории реактивных двигателей. Под влиянием исследований пионеров ракетной техники в СССР уже в 20-е годы стали создаваться группы по изучению различных вопросов реактивного движения, например в Москве и Ленинграде в 1931 году. В этих организациях начинали свою работу многие инженеры, конструкторы, ставшие впоследствии крупными теоретиками реактивного движения, выдающимися конструкторами космических кораблей.

В московской группе ГИРДа работал С.П. Королев (1906-1966), прославившийся как выдающийся конструктор и ученый в области ракетной и космической техники. Познакомившись непосредственно с Циолковским и его основополагающими трудами, Сергей Павлович Королев благодаря своему могучему таланту и неиссякаемой энергии внес огромный вклад в дело освоения космического пространства - вклад, значение которого трудно переоценить. Уже первая книга С.П. Королева "Ракетный полет в стратосферу", изданная в 1934 году, сыграла важную роль в развитии ракетной техники в то время. «Книжка разумная, содержательная и полезная», - писал о ней К.Э. Циолковский.

Слава С.П. Королева, крупнейшего ученого в области исследования космического пространства, достигла своего апогея в 60-70-е годы XX столетия. Он являлся главным конструктором ракетно-космических систем, на которых были осуществлены запуски искусственных спутников Земли, доставлен советский вымпел на Луну, совершен облет и фотографирование обратной стороны Луны, невидимой с Земли. Под его руководством были созданы пилотируемые космические корабли "Восток" и "Восход", на которых человек впервые в истории совершил полет в космос и осуществил выход в космическое пространство. Оценивая роль С.П. Королева в зарождении и становлении советской ракетной техники, президент АН СССР академик М.В. Келдыш сказал, что с именем С.П. Королева "навсегда будет связано одно из величайших завоеваний науки и техники

всех времен - открытие эры освоения человечеством космического пространства".

Аэромеханика как наука переживает сейчас мощный подъем. Причин этому немало.

Первой из них является использование возможностей, которые открылись в связи с развитием ЭВМ. Стали доступными не только расчеты, ранее немислимые из-за их сложностей, но и эксперименты нового типа - на вычислительных машинах, имеющие ряд преимуществ по сравнению с натурными.

Второй причиной служит значительное расширение арсенала математических средств, применяемых в механике жидкости и газа. Наряду с усовершенствованием старых методов появились новые: теории функций комплексного переменного и теории уравнений с частными производными, рассчитанные на гидродинамические приложения. Все более широкое использование находят методы функционального анализа и современной дифференциальной геометрии.

Третья причина - научно-техническая революция наших дней, бурное развитие техники, широкий размах исследований в изучении макро- и микромира. В результате сейчас перед аэрогидромеханикой встает много новых задач.

Можно выделить наиболее существенные проблемы аэрогидромеханики, решение которых имело и будет иметь большое значение для продвижения научного и технического прогресса:

1. Воздействие жидкости и газа на движущиеся в них тела. Основным стимулом для развития этой проблемы послужили технические задачи о движении самолетов, вертолетов, дирижаблей, снарядов, ракет, кораблей и подводных лодок; задачи о создании водяных и воздушных винтов - движителей и т.д.

2. Движение жидкости и газа по трубам и внутри различных машин. В этих вопросах основное значение имеют законы взаимодействия жидкости с границами потока, явления неравномерности в распределении скоростей и т.п. Эти задачи имеют непосредственное значение для проектирования газопроводов, нефтепроводов, насосов, турбин и других гидравлических машин.

3. Фильтрация - движение жидкости сквозь почву и другие пористые среды. Эти явления необходимо учитывать при постройке фундаментов различных сооружений (плотин, опор мостов, гидростанций), при создании подземных туннелей. Большое значение фильтрация имеет в нефтяном деле.

4. Гидростатика - равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости. Моделирование этих процессов имеет значение для устойчивости кораблей и подводных лодок.

5. Волновые движения. Распространение волн в твердых, жидких и газообразных телах; волны на поверхности моря; волны, вызываемые движением корабля; приливы и отливы; сейсмические процессы; звуковые колебания; общая проблема шума в различных средах и разработка методов его снижения.

6. Неустановившиеся движения газов с химическими превращениями при взрывах, детонации и горении, например в потоке воздуха в цилиндрах поршневых машин или камерах сгорания реактивных двигателей и т.д.

7. Защита твердых тел от сгорания и сильного оплавления, например при входе космического корабля с большими скоростями в плотные слои атмосферы.

8. Моделирование турбулентных движений жидкостей, представляющих собой очень сложные нерегулярные, случайного характера движения, пульсирующие около некоторых средних регулярных процессов. Подавляющее число движений газов и жидкостей в облаках, атмосфере Земли, в реках, каналах, трубопроводах, различных технических сооружениях и машинах имеет турбулентный характер. Исследования по турбулентности до сих пор еще нельзя считать законченными для понимания многих особенностей и закономерностей природы таких сложных движений.

9. Проблемы моделирования движений очень сильно сжатых или разреженных жидкостей и газов с учетом усложненных физических свойств сред в таких состояниях, особенно при наличии высоких температур. Существуют важные отрасли техники, в которых необходимо иметь дело с телами, подверженными большим давлениям (порядка многих тысяч и миллионов атмосфер), например при искусственном изготовлении алмазов, при применении взрывов для штамповки деталей некоторых конструкций и т.д. С другой стороны, очень важны явления, происходящие в сильно разреженных газах. При изучении различных процессов, связанных с движением сред при большом вакууме, например в космическом пространстве, в атмосферах планет и звезд, также требуется применять методы и модели механики жидкости и газа.

10. Магнитная гидродинамика и исследование движений ионизированных сред - плазмы, с учетом их взаимодействия с электромагнитным полем - в настоящее время приобретают первостепенное научное и техническое значение. В частности, решение проблемы использования термоядерной энергии теснейшим образом связано с созданием моделей и разрешением задач о поведении высокотемпературной плазмы в сильных магнитных полях.

11. Наука о прогнозе погоды - метеорология - в значительной степени представляет собой изучение движения воздушных масс в атмосфере Земли и является важным разделом аэрогидромеханики.

12. Проблемы кавитации, характеризующейся образованием и схлопыванием в движущейся жидкости пузырьков и больших каверн, на-

полненных газами и парами жидкости. Моделирование и изучение этих процессов позволяет увеличивать ресурс лопаточных машин.

13. Взаимодействие мощных лазерных лучей с различными телами - задачи нелинейной оптики; взаимодействие движущихся тел с электромагнитными полями, лазерная система "слепой" посадки самолетов.

14. Исследования в области биологической механики, например создание механических моделей, позволяющих описывать распространение возбуждений по нервам, механизмы перемещений вирусов, бактерий и других мелких организмов в различных средах; построение моделей для описания движения крови в живых организмах и сокращения мышц.

В настоящее время возник ряд новых актуальных проблем: снижение сопротивления тел при движении в воде с большими, порядка 100 м/с, скоростями; создание и удержание плазмы с температурой в миллионы градусов; создание гиперзвукового самолета для дальних пассажирских полетов; объяснение общей циркуляции воздуха в атмосфере и т.д.

I. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В АЭРОГИДРОМЕХАНИКЕ

1.1. Основные свойства жидкостей и газов

Для характеристики распределения массы в пространстве, занятом жидкостью, обычно пользуются величиной, называемой плотностью. Среднее значение плотности среды в некотором малом объеме определяется как отношение массы Δm , заключенной в этом объеме, к самому объему ΔV :

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Часто пользуются не средним значением плотности вещества в некотором объеме, а величиной плотности среды в данной точке M , в которой $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$. Единица измерения плотности в системе СИ – кг/м³. Плотность движущейся среды зависит от температуры и от давления, что видно из уравнения Клапейрона для единицы массы идеальных газов

$\frac{P}{\rho} = RT \rightarrow \rho = \frac{P}{RT}$. В общем случае плотность можно представить в виде

функции координат и времени $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Поверхности равных значений плотности в пространстве и соответствующие им линии на плоскости называются соответственно изостерическими поверхностями и линиями. Иногда для характеристики распределения массы в пространстве применяют величину, обратную плотности, называемую удельным объемом $v = 1/\rho$. Для реальных жидкостей связь между плотностью, температурой и давлением устанавливается, например, уравнением Ван – дер – Ваальса

$$(\rho + a/V^2)(V - b) = RT,$$

где a , b – константы для данной среды, R – универсальная газовая постоянная, T – температура среды. Это уравнение, выведенное в кинетической теории газов, является приближенным, но качественно верным.

Если в процессе течения плотность меняется мало, то законы его движения будут мало отличаться от законов движения несжимаемой жидкости. С другой стороны, капельные жидкости, которые в обычных условиях можно считать несжимаемыми, могут сжиматься при достаточно большом повышении давления (например, при взрыве). Поэтому в аэрогидромеханике как газ, так и капельную жидкость именуют жидкостью. В тех случаях, когда эффектом сжимаемости можно пренебречь, вводят понятие *несжимаемой жидкости*. Если же плотность жидкости при изменении давления меняется, то говорят о сжимаемой жидкости.

Что же такое сжимаемость? Сжимаемостью называется способность жидкости или газа уменьшать свой объем под действием сил внешнего

давления. Мерой сжимаемости является так называемый *модуль объемной упругости* E , определяемый из равенства

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (1.1)$$

где $\Delta V/V_0$ означает относительное изменение объема, вызванное повышением давления на величину Δp . Для капельных жидкостей сжимаемость чрезвычайно мала. Так, например, для воды $E=20000 \text{ кГс/см}^2$, т.е. повышение давления на одну атмосферу вызывает относительное изменение объема на $1/20000 = 0,005\%$. То же самое имеет место и для всех других капельных жидкостей. Таким образом, для капельных жидкостей сжимаемость столь мала, что в большей части случаев ею можно пренебречь, и поэтому течения капельных жидкостей могут рассматриваться как несжимаемые.

Для газов, если изменение объема остается сравнительно небольшим и происходит при постоянной температуре, модуль объемной упругости равен давлению p_0 в начальном состоянии, в чем легко убедиться из уравнения состояния произвольного объема идеального газа. В самом деле, из уравнения состояния идеального газа $\frac{pV}{T} = \text{const}$ следует, что при постоянной температуре изменение объема ΔV , вызванное изменением давления Δp , удовлетворяет соотношению

$$(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = p_0 V_0,$$

откуда имеем $\Delta p \approx -p_0 \frac{\Delta V}{V_0}$.

Следовательно, для воздуха в нормальном состоянии, т.е. при давлении, равном 1 атм, и температуре 0°C

$$E=1 \text{ кГс/см}^2.$$

Таким образом, сжимаемость воздуха в 20 000 раз больше сжимаемости воды. Аналогичное соотношение имеет место и для всех газов.

Решение вопроса о том, следует ли при течениях газа учитывать сжимаемость, зависит от того, вызывают ли изменения давления, связанные с движением газа, заметное изменение объема газа или же такого изменения не происходит. Вместо изменения объема можно оценить изменение плотности $\Delta \rho$. На основании закона сохранения массы мы имеем:

$$(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \Delta \rho) = \rho_0 V_0,$$

откуда

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx -\frac{\Delta V}{V_0},$$

и поэтому равенство (1.1) можно переписать в виде

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho_0}. \quad (1.2)$$

Очевидно, что течение жидкости допустимо рассматривать как несжимаемое до тех пор, пока относительное изменение плотности остается весьма малым, т.е. пока $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1$.

Исходя из уравнения Бернулли

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const},$$

где v - величина скорости жидкости, установим, что изменение давления Δp , связанное с процессом течения, имеет величину такого же порядка, что и динамическое давление $q = \rho v^2 / 2$, поэтому из равенства (1.2) следует, что

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\Delta p}{E} \approx \frac{q}{E}. \quad (1.3)$$

Если требуется, чтобы $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$, то на основании равенства (1.3) это равносильно требованию $\frac{q}{E} \ll 1$.

Таким образом, получен следующий результат: течение газа можно рассматривать с хорошим приближением как несжимаемое до тех пор, пока динамическое давление остается весьма малым по сравнению с модулем объемной упругости.

Этот результат можно сформулировать несколько иначе, если ввести в рассмотрение скорость звука a . Согласно формуле Лапласа, скорость звука определяется равенством

$$a^2 = \frac{E}{\rho_0},$$

поэтому, используя соотношение (1.3), условие $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1$ можно переписать в виде

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{q}{E} = \frac{\rho_0 v^2}{2E} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{a} \right)^2 \ll 1 \quad (1.4)$$

Отношение v/a называют числом Маха и обозначают

$$M = \frac{v}{a}.$$

Таким образом, течения газа можно рассматривать как несжимаемые, если (с учетом (1.4))

$$\frac{1}{2} M^2 \ll 1, \quad (1.5)$$

т.е. при условии, что число Маха остается малым по сравнению с единицей, или, другими словами, при условии, что скорость течения мала по сравнению со скоростью звука. Для воздуха, в котором звук распространяется со скоростью $a \approx 330$ м/с, число M при скорости $v = 100$ м/с равно 0,3,

следовательно, из уравнений (1.4) и (1.5) относительное изменение плотности будет

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2} M^2 \approx 0.05.$$

Эту скорость течения ($v=100$ м/с) можно рассматривать как наибольшую, при которой газ еще можно оценивать как несжимаемую жидкость.

Оценить сжимаемость можно еще одним способом.

Количественно сжимаемость среды определяется изменением ее плотности $\Delta\rho$, отнесенной к единице приложенного давления Δp . В механике обычно пользуются обратной величиной, равной квадрату скорости звука a в данной среде:

$$a^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{dp}{d\rho}.$$

Для мало сжимаемых газов и жидкостей при больших изменениях давления Δp изменение плотности $\Delta\rho$ будет малым, а следовательно, скорость звука – большой; и наоборот, для сильно сжимаемых жидкостей при малых изменениях давления Δp изменение плотности $\Delta\rho$ будет большим, а скорость звука – малой. Следовательно, характеристикой сжимаемости жидкостей в *состоянии покоя* служит скорость звука в данной среде. Очевидно, что сжимаемость воды, скорость звука в которой ~ 1500 м/с, значительно меньше сжимаемости воздуха, в котором скорость звука ~ 330 м/с. В несжимаемой среде ($\Delta\rho=0$ при $\Delta p\neq 0$) $a=\infty$, т.е. малые возмущения распространяются мгновенно (в алмазе $a=18$ км/с). В тех же случаях, когда газ или жидкость движется, для оценки сжимаемости пользуются не абсолютным значением скорости звука, а отношением скорости потока v к скорости звука (числом M).

Все реальные жидкости обладают вязкостью, и поэтому их называют вязкими. В некоторых задачах влиянием вязкости можно пренебречь и ввести понятие *идеальная жидкость*, вязкость которой равна нулю [2]. Для всех реальных жидкостей и газов такие физические характеристики, как вязкость, теплоемкость, теплопроводность и т.д., зависят от их параметров, например от температуры. Но во многих задачах с достаточной степенью точности можно полагать эти величины постоянными.

Идеальная жидкость - это жидкость, не обладающая трением. При движении жидкости без трения между отдельными ее соприкасающимися слоями возникают только нормальные силы (давления), касательные же силы (напряжения сдвига) отсутствуют. Это означает, что идеальная жидкость не оказывает изменению формы никакого внутреннего сопротивления.

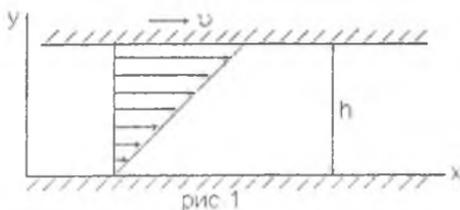
Теория движения идеальной жидкости математически очень глубоко разработана и во многих случаях дает вполне удовлетворительную картину действительных движений. В то же время она совершенно бессильна

для решения проблемы изучения сопротивления тела, движущегося в жидкости, так как в этом случае приводит к результату, что тело, равномерно движущееся в неограниченно распространенной жидкости, не испытывает никакого сопротивления (парадокс Даламбера). Такой совершенно неприемлемый результат теории идеальной жидкости объясняется тем, что в действительных жидкостях между жидкостью и поверхностью обтекаемого тела действуют не только нормальные, но и касательные силы, или, другими словами, силы трения действительных жидкостей, которые связаны как раз с таким свойством жидкости, как *вязкость*.

В идеальной жидкости касательные силы отсутствуют, поэтому на поверхности соприкосновения твердого тела с жидкостью в общем случае имеется разность касательных скоростей, т.е. происходит скольжение жидкости вдоль стенки. Напротив, в действительной жидкости на обтекаемую твердую стенку передаются касательные силы (силы трения), и это приводит к тому, что жидкость прилипает к стенке.

Наличие касательных напряжений (напряжений сдвига) и прилипание жидкости к твердым стенкам существенно отличают действительную жидкость от идеальной. Некоторые жидкости, важные в практическом отношении, например вода и особенно воздух, обладают малой вязкостью. Течения таких *маловязких жидкостей* во многих случаях хорошо совпадают с течениями идеальной жидкости, так как касательные силы в них в общем являются очень малыми. Поэтому в теории идеальной жидкости вязкость совершенно не учитывают, поскольку это приводит к существенному упрощению уравнений движения, что позволяет построить широкую математическую теорию. Необходимо, однако, подчеркнуть, что в жидкостях даже с очень малой вязкостью в противоположность идеальной жидкости прилипание к стенкам все же существует, что является физической причиной указанного выше несоответствия между законами сопротивления для действительной и идеальной жидкостей (парадокс Даламбера).

Сущность вязкости жидкости можно уяснить на опыте Куэтта. Рассмотрим течение между двумя очень длинными параллельными плоскими пластинами, из которых одна, например нижняя, неподвижна, в то время как другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью u (см. рис 1).



Обозначим расстояние между пластинами через h и предположим, что давление во всем пространстве, занимаемом жидкостью, постоянно. Опыт показывает, что жидкость прилипает к обеим пластинам, следовательно, непосредственно около нижней пластины скорость жидкости равна нулю, а непосредственно около верхней пластины она совпадает со скоростью v верхней пластины. Далее опыт показывает, что в пространстве между пластинами имеет место линейное распределение скоростей, т.е. скорость пропорциональна расстоянию "у" от нижней пластины и выражается формулой

$$v(y) = \frac{y}{h} v.$$

Для того чтобы существовало такое состояние движения, к жидкости со стороны верхней пластины должна быть приложена касательная сила в направлении движения, уравнивающая *силы трения* жидкости. На основании результатов опыта эта сила (отнесенная к единице площади пластины) пропорциональна скорости v верхней пластины и обратно пропорциональна расстоянию h между пластинами. Следовательно, сила трения τ , отнесенная к единице площади, т.е. касательное напряжение, пропорционально отношению v/h , вместо которого можно взять отношение dv/dy . Множитель пропорциональности между τ и dv/dy , обозначенный через μ , зависит от природы жидкости. Он мал для так называемых маловязких жидкостей, например для воды и спирта, и напротив велик для очень вязких жидкостей, например для масла и глицерина. Таким образом, имеем элементарный закон трения жидкости в следующем виде:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}.$$

Величина μ [Па·с] называется *динамическим коэффициентом вязкости* и представляет собой физическую характеристику жидкости. Закон трения, выражаемый вышеприведенным равенством, называют *законом Ньютона*.

Необходимо подчеркнуть, что рассмотренное нами движение представляет очень простой, частный случай. Течение, изображенное на рис. 1, называется *движением чистого сдвига*.

Во многих движениях жидкости, где наряду с силами вязкости действуют также силы инерции, важную роль играет отношение вязкости μ к плотности ρ , называемое *кинематическим коэффициентом вязкости*:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \left[\frac{\text{см}^2}{\text{с}} - \text{стокс} \right].$$

Необходимо отметить, что динамическая вязкость сильно зависит от температуры, причем для жидкостей при повышении температуры она уменьшается, а для газов - возрастает. Давление мало влияет на значения μ .

Аэрогидромеханика в своей общей части строится на двух основных свойствах жидких и газообразных сред: непрерывности и текучести. Свойства эти являются следствием внутренних процессов в действительных жидкостях и газах и обусловлены особенностям их молекулярной структуры. Механика жидкости и газа отвлекается от этих явлений, изучением внутренних (молекулярных) движений жидкостей и газов занимается специальный раздел физики - кинетическая теория жидкости и газа.

Основываясь на свойстве непрерывности распределения физических (механических, термодинамических и др.) характеристик состояния и движения в сплошной среде, аэрогидромеханика с целью упрощения рассмотрения некоторых специальных явлений допускает в ряде случаев существование особых точек, линий и поверхностей, где непрерывность может нарушаться. Таковы, например, ударные волны, схематизированные в идеальных газах поверхностями разрыва параметров состояния и движения газа. К числу такого рода исключений относятся вихревые слои, представляющие поверхности скачкообразного изменения скорости в потоке, и другие поверхности разрыва.

Характерными элементами сплошной среды являются жидкие линии к поверхности, образованные во время движения одними и теми же частицами. Особого положения требует понятие жидкого элементарного объема. Под бесконечно малым, или элементарным объемом, в механике жидкости и газа понимают объем, линейные размеры которого, с одной стороны, ничтожно малы по сравнению с размерами канала или обтекаемых тел, но, с другой стороны, достаточно велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. В противном случае теряет смысл прием статистического осреднения молекулярных процессов, приводящий к представлению о жидкости и газе как о сплошной среде. Так, например, в сильно разреженных газах (атмосферный воздух на очень больших высотах и др.) длина свободного пробега молекул становится того же порядка, что и размеры обтекаемых тел. При этом обычные законы аэрогидромеханики теряют свою силу, так как приходится отказываться от рассмотрения газа как сплошной среды. Точно так же при рассмотрении движений жидкостей в пленках молекулярных размеров (например, в гидродинамической теории смазки подшипников) необходимо считаться с возможностью нарушения обычных законов вязкости.

Основное отличие представления о жидкости или газе от соответствующего представления о твердом, упругом, пластичном теле, которое также схематизируется изменяемой сплошной средой, заключается в легкой подвижности, или текучести. Как газ, так и особенно жидкость оказывают значительное противодействие деформации всестороннего сжатия, но слабо сопротивляются деформации сдвига, т.е. взаимному скольжению слоев среды. И свойство текучести заключается в том, что противодействие движению сдвига, точнее говоря, возникающие при этом касатель-

ные напряжения тем меньше, чем меньше относительная скорость взаимного скольжения слоев.

Свойством легкой подвижности объясняется известный факт, что сопротивление, оказываемое жидкостями и газами, поступательно и равномерно движущимся в них твердым телам, зависит от скорости движения тел и убывает до нуля с уменьшением этой скорости. В отличие от случая взаимного скольжения твердых (шероховатых) несмазанных поверхностей, сопровождаемого возникновением силы сухого трения, слабо зависящей от относительной скорости движения, при движении жидкости постоянная составляющая силы сопротивления отсутствует. Аналогично, с уменьшением пропускаемого сквозь трубу секундного расхода жидкости убывает до нуля и сопротивление трубы.

Обладая общими свойствами непрерывности и легкой подвижности, жидкости и газы отличаются друг от друга по физическим свойствам, связанным с различием в их внутренней молекулярной структуре. В отличие от газа, молекулярные расстояния в жидкости крайне малы, что приводит к возникновению значительных молекулярных сил сцепления, особенно интенсивно проявляющихся на верхних границах, отделяющих данную жидкость от других жидкостей или газов. Под действием этих сил жидкость подвергается столь сильному сжатию, что влияние сравнительно малых изменений давлений, возникающих при движении жидкости, почти не сказывается на изменении объема жидкости. Вот почему, в отличие от газов, жидкости можно считать малосжимаемыми, а иногда и просто несжимаемыми.

В газах межмолекулярные расстояния велики, а силы взаимодействия между молекулами малы. В связи с этим газы обладают свойством значительной по сравнению с жидкостями сжимаемости. Газ с достаточной степенью приближения можно рассматривать как несжимаемый в случае сравнительно слабых перепадов давлений, малых скоростей движения и отсутствия нагревания. Отвлекаясь от специфических для жидкости явлений поверхности натяжения (капиллярности) и кавитации, в механике жидкости и газа сосредотачивают внимание лишь на одном (основном) различии между жидкостью и газом - степени их сжимаемости. В связи с этим, имея в виду общие для жидкости и газа свойства непрерывности и текучести, будем в дальнейшем, как это общепринято, и жидкость, и газ называть одним и тем же словом - "жидкость", различая, когда это существенно, несжимаемую и сжимаемую жидкости. Иногда различают гидродинамику как динамику несжимаемой жидкости и аэродинамику - динамику сжимаемой жидкости.

Предполагая отсутствие внутреннего трения, приходят к модели идеальной (невязкой) жидкости, которая оказывается пригодной для описания многих важных сторон явления обтекания тел или движения жидкости в каналах. Но такая модель не может объяснить происхождение сопротивле-

ния тел, потерь энергии в каналах, разогревания жидкостей и газа за счет диссоциации механической энергии в тепло и др. Для описания этих явлений используется более сложная модель вязкой жидкости. Простейшей и наиболее употребительной моделью вязкой жидкости является ньютоновская вязкая жидкость, в которой касательные и нормальные напряжения выражаются линейным образом, соответственно, через скорости сдвига и относительного удлинения.

1.2. Основные методы и модели аэрогидромеханики

Большинство современных аэрогидромеханических процессов столь сложно, что при современном состоянии науки очень редко удастся создавать их универсальную теорию, действующую все время и на всех участках рассматриваемого процесса. Вместо этого нужно посредством экспериментов и наблюдений постараться понять ведущие факторы, которые в тот или иной отрезок времени управляют процессом на том или ином участке. Выделив эти факторы, следует абстрагироваться от других, менее существенных, и для данного участка и данного отрезка времени построить возможно более простую математическую модель процесса, которая учитывает лишь выделенные факторы.

Модель любого процесса должна отображать его основные качественные стороны и допускать достаточно простое математическое описание. Этим требованиям в аэрогидромеханике удовлетворяет модель сплошной среды.

Качественным критерием применимости модели сплошной среды может служить неравенство

$$\frac{\ell}{L} \ll 1.$$

Здесь ℓ - длина свободного пробега молекул, L - характерный размер задачи.

Это неравенство выполняется с хорошей точностью при обтекании тел потоком жидкости или газа в обычных условиях. Действительно, в этих условиях для воздуха $\ell = 10^{-5} - 10^{-6}$ см. При характерном размере обтекаемого тела $L > 1$ см, неравенство имеет порядок $10^{-5} - 10^{-6}$.

Для космических задач разработана специальная механика разреженных сред, и для вывода космических тел в космос это условие соблюдается. Зная основы моделирования в механике сплошных сред, можно освоить и небесную механику. Для космической задачи ℓ - размер космического корабля, L - длина траектории. Для небесной механики ℓ - размер звезд, L - расстояние между звездами.

В аэрогидромеханике элементарный объем dV должен быть больше

объема, занимаемого молекулой dV_m . Следовательно, имеем дело с конечными размерами, но поскольку объем молекулы мал, то мы можем использовать математический аппарат бесконечно малых величин операции интегрирования и дифференцирования. Но надо иметь в виду, что это условие модели сплошной среды можно использовать в определенных пределах. Эта простота неприменима для описания более сложных явлений в жидкости и газе (например там, где теряется сплошность).

Математическое описание движений сплошной среды общими дифференциальными уравнениями, учитывающими все физические свойства жидкости, является сложной задачей. Если даже ограничиться учетом только вязкости и сжимаемости, то и тогда уравнения, выражающие общие законы сохранения, оказываются настолько сложными, что до сих пор не удалось разработать общих аналитических методов их решения. Применение численных методов интегрирования таких уравнений на базе современных ПЭВМ также связано со значительными трудностями. Поэтому в аэрогидромеханике широко используют различные упрощенные модели сплошной среды. Под моделью сплошной среды понимают такую среду, в которой учтены только те некоторые ее физические свойства, которые являются существенными при решении конкретной рассматриваемой задачи. Другие же, малосущественные для этой задачи свойства среды в модели просто не рассматриваются.

Одной из основных моделей в гидромеханике является модель идеальной несжимаемой жидкости. Если не учитывать сжимаемость и вязкость жидкости, то можно существенно упростить математическое описание задачи и получить многие решения в конечном замкнутом виде. Несмотря на такие значительные упрощения, теория идеальной несжимаемой жидкости во многих случаях дает не только качественные, но и количественные, подтвержденные опытным путем результаты, полезные для практических приложений. Но главное значение такой модели заключается в том, что она является базой для других моделей, более полно учитывающих физические свойства реальных сред.

Более полно свойства реальных жидкостей учитываются в модели идеальной сжимаемой жидкости. При скоростях, близких к скорости распространения звука в газе или превышающих ее, сжимаемость существенно влияет на характер гидродинамических явлений, и учитывать ее бывает зачастую более важно, чем даже вязкость. Движение газов с учетом их сжимаемости составляет объект изучения в газовой динамике.

Большое значение имеют модели вязкой несжимаемой жидкости. Теория вязкой несжимаемой жидкости лишь в ограниченном числе случаев позволяет получить точные решения системы дифференциальных уравнений. Наибольшее значение в этой модели имеют приближенные уравнения и их решения. Такие уравнения получают путем отбрасывания в исходных уравнениях тех членов, которые незначительно влияют на соответ-

ствии теоретических решений результатам опыта (т.е. пока задача имеет физический смысл). Как известно, капельные жидкости являются мало-сжимаемыми средами, поэтому для широкого круга прикладных задач пренебрежение сжимаемостью вполне оправдано и мало влияет на вид получаемых решений и степень совпадения теоретических результатов с экспериментальными данными.

Но все-таки существует ряд задач, которые невозможно достаточно точно решить, если в реальной жидкости не учитывать сжимаемость (например, гидравлический удар в трубах). Поэтому для таких процессов необходимо использовать наиболее сложную модель вязкой сжимаемой жидкости.

Для решения стоящих перед нею задач механика жидкости и газа применяет точные и приближенные математические методы интегрирования основных дифференциальных уравнений или другие эквивалентные (например, прямые вариационные) методы. Для получения характеристик явлений используют общие теоремы и законы механики: теоремы количества и моментов количеств движения, законы сохранения массы и энергии и др. Невозможность непосредственного использования уравнений гидродинамики для изучения хаотических, заключающих в себе характерные черты случайности, турбулентных движений жидкости привела к созданию статистических методов изучения такого рода движений.

Значительная сложность явлений побуждает аэрогидромеханику широко использовать эксперимент, обобщение результатов которого приводит к эмпирическим закономерностям, а иногда и полуэмпирическим теориям. Данные отклонения от методов классической механики вполне естественны для такой науки, как современная механика жидкости и газа, столь быстро развивающейся в связи с растущими потребностями промышленности.

Гидроаэродинамический эксперимент прочно вошел в обиход лабораторий НИИ, заводов и вузов. Сейчас изучают теоретически лишь простые случаи движения жидкости или газа, выясняют на них принципиальную сущность явления и основные тенденции в его развитии. Что же касается более сложных, ближе подходящих к реальным условиям движений, представляющих значительные трудности для теоретического расчета, то здесь на помощь приходит научно поставленный эксперимент. Теория учит, как ставить эксперимент, как наиболее точно проводить измерения и, что особенно важно, как обобщать результаты отдельных экспериментов на целые классы явлений. В этом непрерывном взаимодействии теории и эксперимента заключается мощь методов современной механики жидкости и газа, причина ее быстрого развития в тесной связи с практическими запросами.

Многие области техники используют методы и модели гидроаэродинамики. Авиация и кораблестроение, основные проблемы которых - полет,

устойчивость и управляемость самолета; ходкость, остойчивость и управляемость судна - неразрывно связаны с аэродинамикой и гидродинамикой. Важное значение гидро- и газодинамика имеют в турбостроении. От правильного гидродинамического расчета формы профилей и конструкции лопаток рабочих колес зависит достижение требуемой мощности машины, ее высокого КПД. Широко использует модели аэрогидромеханики современная теплотехника, занимающаяся интенсификацией процессов горения в топках паровых котлов, камерах сгорания реактивных двигателей, вопросами охлаждения поверхностей, подвергающихся действию горячих газов. Актуальные задачи ставят перед аэрогидромеханикой химическая и металлургическая индустрии. Современная метеорология широко использует механику сжимаемой жидкости, теорию турбулентного движения воздуха над поверхностью Земли и т.д.

1.3. Принципы математического моделирования аэрогидромеханических процессов

Суть математического моделирования наиболее полно отражается в триаде «модель – алгоритм – программа». И если создание алгоритмов зависит в наибольшей степени от уровня развития прикладной математики в области численного моделирования, а создание программ расчета – от имеющихся средств программирования, то этап разработки математических моделей полностью находится во власти исследователя, и он же является ключевым в этой триаде.

С математическими моделями тесно связано понятие вычислительного эксперимента, которому в настоящее время отводится значительная роль на этапах проектирования и доводки перспективных аэрогидродинамических систем (самолетов, ракет, наземных энергетических установок, перекачивающих станций, подводных лодок и т.д.).

1.3.1. Задание математической модели процесса

Задать математическую модель аэрогидромеханического процесса – значит задать полную (т.е. замкнутую) систему уравнений, позволяющую описать движение или равновесие среды.

Полная система уравнений для любой модели среды состоит из:

а) универсальных уравнений, выполнение которых требуется для всех сред. Они выражают законы сохранения массы, изменения количества движения и момента количества движения, сохранения энергии и энтропии;

б) соотношений, задающих свойства конкретной среды. Эти соотношения называются определяющими. Среди них могут быть связи между

равновесными параметрами состояния – тогда их называют уравнениями состояния (например, связь $\frac{P}{\rho} = RT$ для совершенного газа), и соотноше-

ния между параметрами, описывающими процесс, тогда их называют кинетическими соотношениями (например, связь между напряжениями и скоростями деформаций в вязкой жидкости). При записи определяющих соотношений часто используют опытные данные о поведении среды;

в) условий однозначности решений, т.е. из начальных и граничных (краевых) условий, необходимых для выделения единственного из множества решений уравнений, составляющих математическую модель исследуемого процесса.

Рассмотрим применительно к сплошным деформируемым средам общие или универсальные, т.е. выполняющиеся для всех сред физические «законы сохранения» и вытекающие из них свойства характеристик, описывающих состояние и движение всевозможных сред, а также уравнения, которыми они удовлетворяют.

В ньютоновской механике такими законами являются:

- закон сохранения массы;
- закон изменения количества движения;
- закон изменения момента количества движения;
- закон сохранения энергии (первый закон термодинамики);
- закон сохранения энтропии (второй закон термодинамики).

Эти законы обычно записываются в интегральной форме для конечных индивидуальных объемов среды. Интегральные уравнения являются наиболее общими, они допускают рассмотрение как дозвуковых, так и сверхзвуковых потоков (т.е. течений с разрывами - скачками уплотнения и ударными волнами). Но решаются интегральные уравнения плохо, и нужно каждый раз искать свое конкретное построение решений интегрального уравнения. Для движений, описываемых гладкими функциями, законы сохранения приводят к дифференциальным уравнениям, выполняющимся в каждой точке области, занятой средой. Если в этой области имеются поверхности разрыва параметров среды, то в силу законов сохранения эти разрывы параметров связаны между собой определенными соотношениями, называемыми условиями на поверхности разрыва.

Универсальные законы сохранения для произвольного объема сплошной среды записываются в следующем виде:

- 1) закон сохранения массы - масса индивидуального объема постоянна:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0,$$

т.е. изменение массы по времени равно нулю,

2) закон изменения количества движения - скорость изменения количества движения индивидуального объема равна сумме действующих на него внешних сил:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_S \vec{P}_n dS,$$

3) закон изменения момента количества движения - скорость изменения момента количества движения индивидуального объема равна сумме моментов действующих на него сил:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{v}) dV = \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{P}_n) dS,$$

4) закон сохранения энергии - скорость изменения полной энергии индивидуального объема равна притоку в единицу времени энергии извне (в форме работы внешних сил, тепла и других):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dV = \int_V (\rho \vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \int_S (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) dS + \int_V \rho \frac{dq}{dt} dV,$$

5) закон сохранения энтропии - скорость изменения энтропии индивидуального объема равна сумме притока энтропии извне и производства энтропии внутри объема в единицу времени (только для необратимых процессов):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt}; \quad \frac{dS_2}{dt} \geq 0.$$

В этих соотношениях использованы следующие обозначения: V – индивидуальный объем, S – внешняя поверхность (граница) объема V ; \vec{F} – массовая плотность внешних по отношению к объему V массовых сил, действующих на среду; \vec{P}_n – поверхностная плотность поверхностных сил, действующих на границе S ; \vec{r} – радиус – вектор точки; u – массовая плотность внутренней энергии; s – массовая плотность энтропии; q – массовая плотность притока энергии тепла; S_1 – приток энтропии к объему V извне; S_2 – производство энтропии в объеме V ; ρ – плотность среды; \vec{v} – скорость среды и т.д.

Для гладких движений эти законы эквивалентны следующим дифференциальным уравнениям:

1) уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

2) уравнение движения для несжимаемой среды:

а) идеальной (уравнение Эйлера) $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p,$

б) вязкой (уравнение Навье – Стокса) $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{v};$

3) уравнение энергии

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho \frac{dq}{dt},$$

где P – вектор напряжений;

4) уравнение энтропии

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho \frac{ds_1}{dt} + \rho \frac{ds_2}{dt}, \text{ где } \rho \frac{ds_2}{dt} \geq 0.$$

1.3.2. Начальные и граничные условия

Уравнение, описывающее физический процесс, например уравнение с частными производными, имеет бесчисленное множество решений. При рассмотрении конкретного процесса необходимо из множества решений уравнения, описывающего общий закон, выделить единственное, для чего надо подчинить полученные решения дополнительным условиям, называемым условиями однозначности. Эти условия в зависимости от их физического смысла разделяют на начальные и граничные.

Начальные условия в случае нестационарных процессов задают значениями искомой функции или ее производных во всей рассматриваемой области в начальный момент времени. Так, в задаче о распространении тепла может быть задано распределение температур $T(M, t)$ в исследуемой области в начальный момент времени $t=t_0$, т.е. $T(M, t_0)=\varphi(M)$.

В задачах о процессах в ограниченных областях могут быть известны значения искомой функции, ее производных или соотношения между ними на границе области в любой момент времени. Такие условия называют граничными или краевыми.

Задачи для нестационарных процессов в ограниченных областях, в которых дополнительно к уравнению задаются как начальные, так и граничные (краевые) условия, называют начально-краевыми задачами для данного уравнения. В случае нестационарных процессов во всем пространстве задают начальные условия и задачу называют начальной задачей. Для стационарных процессов имеет смысл ставить лишь краевые задачи.

В ряде случаев при решении задач аэрогидромеханики, кроме начальных и краевых задач, приходится накладывать другие дополнительные ограничения или условия, например условия на бесконечности.

1.3.3. Корректность постановки задач аэрогидромеханики

Любая задача механики поставлена корректно, если начальные и краевые условия обеспечивают:

- а) существование решения в рассматриваемой области;
- б) единственность решения;

в) непрерывную зависимость решения от начальных и краевых условий. Это означает, что малые изменения начальных и краевых условий вызывают малые изменения решения в области.

Прежде чем создавать математическую модель исследуемого процесса, весьма существенным является выявление корректности поставленной задачи. Выясняя, существует ли решение, смотрят, не переопределена ли задача, не являются ли наложенные на решения условия противоречивыми. Исследуя вопрос о единственности решения рассматриваемой задачи, выясняют, не является ли задача неопределенной, когда наложенные условия оказываются недостаточными для обеспечения решения. Наконец, установление непрерывной зависимости решения от начальных и краевых условий важно для определения устойчивости решения, а следовательно, и устойчивости задачи. Дело в том, что если коэффициенты уравнения, которое, как правило, выводится на основе физических законов сохранения, являются точными константами или функциями, то функции, входящие в начальные или краевые условия, находятся приближенно (как правило, из эксперимента). Поэтому задача, в которой малая ошибка в экспериментальных данных вызывает большие изменения решения, практически бесполезна т.к. является неустойчивой.

1.4. Математические постановки задач о движении вязких жидкостей (газов)

1.4.1 Задача о движении жидкости между параллельными стенками (опыт Куэтта)

Уравнения движения для идеальной несжимаемой жидкости имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \text{ (уравнение Эйлера);} \\ \text{div} \vec{v} = 0 \text{ (уравнение неразрывности)} \end{cases} \quad (1.6)$$

В идеальной жидкости отсутствуют касательные напряжения, в ней существуют лишь нормальные напряжения (или давление). В вязкой жидкости действуют касательные напряжения или напряжения трения τ (на площадке, параллельной направлению течения потока), определенные из известного закона трения $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$, где μ - динамический коэффициент вязкости.

Соответственно этому уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье – Стокса) отличаются от уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости наличием в первом уравнении слагаемого, учитывающего влияние вязкости, и имеют вид

альной сжимаемой жидкости наличием в первом уравнении слагаемого, учитывающего влияние вязкости, и имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p + \nu \Delta \bar{v}, \text{ где } \Delta \bar{v} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}, \\ \text{div} \bar{v} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

(справедливо и для вязких потоков)

здесь $\nu = \mu/\rho$ - кинематический коэффициент вязкости.

В системе уравнений (1.7) параметры ρ , μ предполагаются известными и постоянными, массовые силы \bar{F} заданными, так что система является замкнутой, так как содержит две неизвестные функции $\bar{v}(x,y,z,t)$ и $p(x,y,z,t)$. Пусть $\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$. Упростим задачу. Если рассматривать прямолинейное движение жидкости, параллельное ОХ, и пренебречь действием массовых сил, то в уравнениях (1.7) следует положить

$$v_y = 0, v_z = 0, \bar{F} = 0. \quad (1.8)$$

В результате уравнение неразрывности $\text{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ примет вид $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, и, следовательно, величина v_x не зависит от x и является функцией $v_x = v_x(y, z, t)$.

Учитывая соотношения (1.8), в силу которых $\bar{v} = v_x \bar{i}$; $\frac{dy}{dt} = 0$; $\frac{dz}{dt} = 0$, уравнение движения системы (1.7) запишется как

$$\frac{dv_x}{dt} \bar{i} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (1.9)$$

где $\text{grad}p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k}$, $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)v_x$;

$$(\bar{v} \cdot \nabla)v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Так как $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ и $v_y = v_z = 0$, то $(\bar{v} \cdot \nabla)v_x = 0$ и, следовательно, $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t}$.

Тогда уравнение (1.9) можно получить в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.10)$$

и $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ (в силу обращения в нуль уравнения движения в проекциях на оси y и z).

Как видно, $p = p(x, t)$, но $v_x = v_x(y, z, t)$, следовательно, для устранения противоречивых условий будем считать, что уравнение (1.10) возможно тогда, когда $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(t)$, в результате чего приходим к уравнению

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f(t). \quad (1.11)$$

Это уравнение по своему виду совпадает с уравнением теплопроводности. Таким образом, любые прямолинейные движения вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил описываются уравнением (1.11), в котором $v_x = v_x(y, z, t)$.

Если же начальные и краевые условия не будут зависеть от y , то и решение v_x уравнения (1.11) не будет зависеть от y , и тогда при $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (т.е. при постоянном давлении) получим уравнение

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}; \quad v_x = v_x(z, t), \quad (1.12)$$

описывающее плоскопараллельное и прямолинейное движение вязкой жидкости.

Рассмотрим для этого уравнения начально-краевую задачу. Пусть покоящаяся жидкость заключена в канале конечной высоты h с твердыми параллельными стенками бесконечной длины и ширины. Предположим, что в начальный момент времени верхняя стенка ($z=h$) приходит в движение с постоянной скоростью v_{x0} , нижняя стенка ($z=0$) остается неподвижной. В аэрогидромеханике эта задача называется задачей или опытом Куэтта. Задача состоит в установлении закона развития поля скоростей в жидкости. Принимая движение плоскопараллельным и прямолинейным, со скоростью $\vec{v} = v_x \vec{i}$, $v_x = v_x(z, t)$, а давление постоянным, получаем, что v_x должна удовлетворять уравнению (1.12) и следующим начальным и граничным условиям: $v_x|_{t=0} = 0$; $v_x|_{z=0} = 0$; $v_x|_{z=h} = v_{x0} = v_0$.

Граничное условие $v_x|_{z=0} = 0$ соответствует в силу наличия вязкого трения прилипанию жидкости к нижней стенке, а граничное условие $v_x|_{z=h} = v_0$ - прилипанию вязкой жидкости к верхней стенке, движущейся со скоростью v_0 .

1.4.2. Задача о движении жидкости в круглом цилиндре конечной длины

Пусть в круглом цилиндре длины h и радиуса $r=a$, ось которого совпадает с осью Ox , находится в состоянии покоя вязкая жидкость. В момент времени $t=0$ внезапно на торцах цилиндра создается перепад давления $p_1 - p_2 > 0$, который в дальнейшем сохраняется постоянным. Требуется определить возникающее в жидкости поле скоростей.

Примем движение жидкости прямолинейным, а градиент давления постоянным $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{h}$. Воспользуемся уравнением (1.11), описывающим прямолинейное движение вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f(t); \quad v_x = v_x(y, z, t),$$

где $f(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{\rho h} = \text{const}$.

Это уравнение должно решаться при следующих начально-краевых условиях: $v_x|_{t=0} = 0$; $v_x|_{r=a} = 0$, где краевое условие соответствует прилипанию вязкой жидкости к неподвижным твердым стенкам трубы.

1.4.3. Задача об обтекании тела жидкостью или газом при наличии теплообмена

Для решения этой задачи необходимо учесть все три уравнения законов сохранения массы, энергии и изменения количества движения.

1). Уравнение неразрывности (закон сохранения массы):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0.$$

Уравнение неразрывности является скалярным, поскольку $\text{div} \vec{v}$ - это скаляр, следовательно, имеем одно уравнение.

2). Уравнение движения (закон изменения количества движения):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad}(p + \frac{2}{3} \mu \text{div} \vec{v}) + \text{div}(2\mu S),$$

где $S = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = 1, 2, 3$ - тензор скоростей деформаций.

Уравнение движения является векторным, поэтому в проекциях на декартовы оси координат получаем три уравнения.

3). Уравнение энергии:

$$\rho \frac{dh}{dt} = P \cdot (\nabla \vec{v}) + p \cdot \text{div} \vec{v} + \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dq}{dt},$$

где h - энтальпия.

Уравнение энергии является скалярным, т.е. имеем одно уравнение.

Таким образом, получили систему из пяти дифференциальных уравнений с шестью неизвестными величинами: p , ρ , v_x , v_y , v_z , T . Надо добавить шестое уравнение - скалярное уравнение состояния:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{k-1}{k} h; \quad \left[\frac{p}{\rho} = RT = \frac{R}{c_p} c_p T = \frac{c_p - c_v}{c_p} h = \frac{k-1}{k} h \right],$$

Здесь $k=c_p/c_v$; c_p , c_v - теплоемкости соответственно при постоянном давлении и постоянном объеме, R - универсальная газовая постоянная; $h=c_p T$; $R=c_p-c_v$.

В результате получаем замкнутую систему уравнений из шести с шестью неизвестными. Все эти уравнения нелинейные, так как

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v};$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)h,$$

а выражения $(\vec{u}\nabla)\vec{b}$ и $(\vec{u}\nabla)h$ являются типично нелинейными. Кроме того, при интегрировании получаем постоянные интегрирования, которые пробегают весь числовой ряд от $-\infty$ до ∞ .

Задача получается неоднозначной, следовательно, надо к исходным уравнениям добавить условия однозначности. Таковыми являются:

- 1) геометрические характеристики обтекаемого тела,
- 2) теплофизические характеристики потока,
- 3) начальные и граничные условия задачи.

Но и в этом случае задача не будет корректной, т.к. включает в себя только физические процессы, имеющие место в обтекаемом потоке, и ничего не говорится о том, что происходит в самом обтекаемом теле. Чтобы сделать задачу корректной, надо добавить еще условия энергообмена или теплообмена обтекаемого твердого тела. Теплообмен между стенкой и средой математически описывается взаимосвязью между соотношением Фурье, характеризующим передачу тепла теплопроводностью в теле, и ньютоновым законом охлаждения, характеризующим теплообмен между стенкой и средой:

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \text{ - закон теплопроводности Фурье;}$$

$$Q = \alpha(T_w - T) \text{ - закон Ньютона.}$$

Здесь λ - коэффициент теплопроводности, α - коэффициент теплообмена, T - температура среды, T_w - температура стенки. Тогда граничные условия будут следующие:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = \alpha (T_w - T),$$

где $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w$ - температурный градиент у поверхности обтекаемого тела (на стенке); $(T_w - T)$ - перепад температур между стенкой и средой.

Теперь задача поставлена корректно.

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В конце XIX столетия наука о движении жидкости распалась на две ветви, почти не связанные между собой. С одной стороны, достигла большого совершенства *теоретическая гидродинамика*, исходившая из уравнений Эйлера для движения идеальной жидкости. Однако результаты этой так называемой классической гидромеханики во многом противоречили опыту. Особенно резкое противоречие наблюдалось в весьма важных вопросах о потере давления в трубах и каналах и о сопротивлении, которое оказывает жидкость движущемуся в ней телу; поэтому классическая гидромеханика имела для практики лишь небольшое значение, что и побудило создать для решения важных проблем, выдвигавшихся быстро развивавшейся техникой, свою собственную науку о движении жидкости, так называемую *гидравлику*. Эта наука, принявшая резко выраженный эмпирический характер, опиралась на большое число экспериментальных результатов и очень сильно отличалась от теоретической гидродинамики как своими методами, так и своей целью.

В начале настоящего столетия Л.Прандтль нашел путь, позволивший вновь соединить в одно целое указанные выше далеко отошедшие друг от друга ветви науки о движении жидкости. Кроме того, связав теорию с практикой, Л.Прандтль положил начало направлению, дальнейшего развитие которого в современной гидродинамике привело на протяжении первой половины настоящего столетия к неожиданным успехам. В этом состоит большая заслуга Л.Прандтля. Правда, уже давно было известно, что резкое расхождение между результатами классической гидродинамики и действительностью возникало в очень многих случаях вследствие пренебрежения в теоретических исследованиях вязкостью жидкости. Тогда же были составлены уравнения движения жидкости с учетом трения, так называемые уравнения Навье - Стокса для движения вязкой жидкости. Однако их вследствие больших математических трудностей не удалось применить к теоретическому исследованию движений жидкости с трением (за исключением немногих частных случаев). Между тем для воды и воздуха, т.е. для жидкостей, особенно важных в технике, коэффициент вязкости весьма мал, и, следовательно, силы трения, обусловленные вязкостью, получаются в целом очень небольшими по сравнению с остальными силами (силою тяжести и силами давления); поэтому долгое время не удавалось понять, каким образом малые силы трения, которые в классической теории считались возможным отбрасывать, оказывали тем не менее решающее влияние на процесс движения.

В 1904 г. Л. Прандтль в своем докладе "О движении жидкости при очень малом трении", прочитанном на математическом конгрессе, указал путь, сделавший доступными теоретические исследования течений жидко-

сти с трением в практически важных случаях. Исходя из теоретических соображений и некоторых простых экспериментов Л. Прандтль показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением. Свои теоретические соображения Л. Прандтль уже тогда подтвердил некоторыми очень простыми опытами в небольшом, построенном им самим гидроканале. Таким образом, гипотеза Л. Прандтля положила начало восстановлению утраченной связи между теорией и практикой. Теория пограничного слоя Прандтля оказалась чрезвычайно плодотворной и сразу же после своего опубликования дала мощный толчок к дальнейшему развитию теоретических исследований [1]. Под влиянием задач, поставленных в нашем столетии расцветом авиационной и космической техники, новая теория весьма быстро развивалась и вскоре превратилась вместе с другими важными теориями - теорией крыла и теорией движения газа при больших скоростях - в основу современной механики жидкости и газа.

В качестве областей применения теории пограничного слоя упомянем о вычислении сопротивления, возникающего при обтекании тела вследствие трения жидкости о поверхность тела (корабля, профиля крыла, фюзеляжа самолета или корпуса ракеты и т.д.). Особенностью пограничного слоя является его свойство допускать при некоторых обстоятельствах возникновение возвратного течения в непосредственной близости от стенки. С этим свойством связаны отрыв пограничного слоя от тела и возникновение более или менее сильных вихрей на кормовой части обтекаемого тела. Эти явления обуславливают значительное изменение распределения давления вдоль поверхности обтекаемого тела по сравнению с распределением давления в потоке без трения, что приводит к возникновению так называемого сопротивления давления обтекаемого тела. Теория пограничного слоя указывает путь к вычислению этого сопротивления. Далее теория пограничного слоя дает ответ на важный вопрос о том, какую форму должно иметь обтекаемое тело для того, чтобы не возникало вредного отрыва потока от тела, которое, однако, возможно не только при обтекании тела, но и при течении жидкости в канале. Следовательно, теория пограничного слоя дает возможность исследовать особенности течения в межлопаточных каналах гидравлических и газовых машин (насосов, турбин). Только на основе теории пограничного слоя могут быть объяснены явления, возникающие при достижении подъемной силой крыла максимального значения и также связанные с отрывом потока. Наконец, теплопередача между

телом и обтекающей его жидкостью (или газом) также связана с особенностями течения в пограничном слое.

Вначале теория пограничного слоя развивалась главным образом в отношении к ламинарным течениям несжимаемой жидкости. Эта область применения теории пограничного слоя была в дальнейшем столь глубоко развита в многочисленных исследованиях, что в настоящее время ее можно считать в основных чертах исчерпанной. Позже она была распространена также на практически более важные случаи несжимаемых турбулентных течений в пограничных слоях. Существенный успех в этой области был достигнут только после введения Л. Прандтлем понятия пути перемешивания. Введение этого понятия наряду с выполнением систематических опытов позволило применить теорию пограничного слоя для теоретического исследования турбулентных течений. В дальнейшем, под влиянием сильного возрастания скоростей в аэрокосмической технике, были тщательно исследованы пограничные слои для движений сжимаемой среды. При таких движениях, наряду с динамическим пограничным слоем, образуется температурный пограничный слой, играющий большую роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. При больших числах Маха тепло, выделяющееся вследствие трения между движущимся телом и средой, приводит к сильному нагреванию поверхности обтекаемого тела. Расчет этого нагревания представляет собой трудную проблему, особенно для ракет и искусственных спутников ("тепловой барьер").

2.1. Основные сведения о пограничном слое

Под *пограничным слоем* понимают тонкую при известных условиях в поперечном направлении к потоку область течения, где, в отличие от окружающего ее безвихревого потока, движение является вихревым и характеризуется сосредоточенными в этой области резкими изменениями *скорости* (скоростной пограничный слой), *температуры* (температурный пограничный слой), *концентрации* примеси (концентрационный или диффузионный пограничный слой). Скоростным (или динамическим) пограничным слоем называют тонкий слой жидкости, прилегающий к поверхности обтекаемого тела и заторможенный вследствие трения. Температурным (или тепловым) пограничным слоем называется примыкающая к поверхности тела область течения, в которой температура жидкости изменяется от ее значения на стенке до значения температуры внешнего потока жидкости. При этом температура стенки и температура жидкости у стенки принимаются равными друг другу. Диффузионным пограничным слоем называется область течения вблизи стенки, в которой происходит изменение концентрации примеси от ее значения на стенке до значения во внешнем потоке.

Различают *ламинарные* и *турбулентные* пограничные слои в зависимости от ламинарного или турбулентного режима течения в них. Основным условием образования скоростных ламинарных погранслоев является *малая вязкость* жидкости, или, точнее, большое значение числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{v \cdot \ell}{\nu}$$

(v - скорость потока; ℓ - характерный размер), не достигающее, однако, той критической величины, при которой режим течения в пограничном слое становится *турбулентным*. Аналогично для температурных слоев подобным условием становится достижение больших значений числа Пекле $Re = Pr \cdot Re$ (число Прандтля $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$, где λ - коэффициент теплопроводности, c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении), для концентрационных слоев - больших значений диффузионного числа Пекле Pe_d .

Физическая картина образования пограничных слоев на твердых поверхностях состоит в следующем. Однородный безвихревой поток, достигнув поверхности твердого тела, "прилипает" к нему частицами, непосредственно соприкасающимися с поверхностью тела, в то время как соседние слои продолжают двигаться с резко увеличивающимися по мере удаления от поверхности скоростями, что приводит к завихренности потока. Образовавшиеся вблизи поверхности вихри, с одной стороны, сносятся набегающим потоком, участвуя в *конвекции*, а с другой - *диффундируют* в жидкость, окружающую тело. Если конвекция *велика* по сравнению с диффузией (что соответствует *большим* числам Рейнольдса), на поверхности сохраняется весьма тонкий слой заметно завихренной жидкости - так называемый *пристенный пограничный слой*.

Имея некоторую начальную завихренность, возникшую при выходе из сопла или сходе с поверхности обтекаемого тела, аналогично образуются "свободные" пограничные слои: "затопленные струи" и "следы" за кормой тела.

Под толщиной пограничного слоя δ подразумевают расстояние от поверхности обтекаемого тела до такой точки в потоке ($y=\delta$), где практически с заданной степенью приближения можно принять продольную скорость в пограничном слое равной ее значению в той же точке внешнего безвихревого потока. Геометрическое место таких точек дает приближенное представление о *внешней границе* пограничного слоя.

Необходимо отметить, что безразмерная толщина пограничного слоя $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\ell} \ll 1$, что эквивалентно $\delta \ll \ell$, т.е. поперечные размеры в пограничном слое значительно меньше продольных (ℓ - продольный размер обтекаемого тела). Исходя из предположения, высказанного Прандтлем, что силы

инерции и силы вязкости внутри пограничного слоя одинакового порядка, и учитывая, что порядок сил вязкости на единицу объема внутри пограничного слоя будет равен $\mu \frac{\nu}{\delta^2}$ (по формуле $\frac{\tau}{\delta} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{1}{\delta}$), а порядок сил инерции - $\rho \frac{\nu^2}{\ell}$ (в соответствии с выражением $\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$), получим

$$\mu \frac{\nu}{\delta^2} \cdot \frac{\rho \nu^2}{\ell} \sim 1 \text{ или } \frac{\mu \nu \ell}{\delta^2 \rho \nu^2} \sim 1, \text{ откуда } \frac{\delta^2}{\ell^2} \sim \frac{\nu}{\nu \ell} = \frac{1}{\text{Re}}$$

(где знак \sim означает порядок величины).

В результате получаем первое основное свойство ламинарного пограничного слоя: $\bar{\delta} = \frac{\bar{\delta}}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$, т.е. безразмерная толщина пограничного слоя обратно пропорциональна $\sqrt{\text{Re}}$.

Полученное равенство выражает общий для всех плоских, стационарных ламинарных пограничных слоев закон изменения их относительных толщин обратно пропорционально корню квадратному из рейнольдсова числа потока.

Опыт показывает, что в потоках вязких жидкостей или газов около поверхности твердого тела действие сил вязкости в разных областях течения проявляется неодинаково. Оно заметно там, где возникают большие поперечные градиенты скорости и, как следствие, касательные напряжения велики. По мере увеличения расстояния от стенки действие сил вязкости ослабевает и становится малым на сравнительно небольшом удалении. В обычных условиях течения скорость частиц жидкости v относительно обтекаемой поверхности на самой поверхности равна нулю. (Необходимо заметить, что область течения, в которой газ можно рассматривать как сплошную среду, прилипающую к обтекаемой поверхности, характеризуют условием $M < 0.01\sqrt{\text{Re}}$. В сильно разреженных газах скорость на стенке не равна нулю.) С увеличением расстояния от стенки скорость обтекания быстро увеличивается, приближаясь к скорости внешнего потока v_∞ , где поперечные градиенты скорости практически равны нулю, а касательные напряжения, возникающие вследствие трения, пренебрежимо малы. Течение в области, удаленной от поверхности, можно считать совпадающим с потенциальным течением идеальной жидкости и применять к нему закономерности теории идеальной жидкости. В пределах пограничного слоя касательное напряжение от трения очень велико даже при малой вязкости, поскольку очень значителен градиент скорости в направлении, перпендикулярном поверхности тела. Во внешнем потоке инерционные силы преобладают над силами вязкости, поэтому уравнения Навье - Стокса переходят в уравнения движения идеальной жидкости.

Уравнения движения реальной, вязкой несжимаемой жидкости отличаются от уравнений движения идеальной жидкости наличием члена $\mu \nabla^2 v$, представляющего влияние вязкости. С математической стороны этот член

меняет общий характер дифференциальных уравнений движения, повышает их порядок. Кроме того, что особенно существенно, к граничному условию непроницаемости твердых стенок (нормальная скорость относительно стенки равна нулю) прибавляется новое граничное условие - отсутствие скольжения жидкости на стенке (составляющая скорости в касательной плоскости к стенке равна нулю). Можно показать, что уравнения Эйлера вообще не имеют решений, удовлетворяющих последнему граничному условию, однако опыты показывают, что распределение давлений по поверхности хорошо обтекаемого крылового профиля и картина линий тока вокруг него мало отличаются от теоретически рассчитанных по формулам безвихревого обтекания идеальной жидкостью. Этот важный экспериментальный факт объясняется тем, что при сравнительно больших числах Re , характерных для практических (в авиации, кораблестроении, турбостроении и т.д.) обтеканий тел, область потока, в которой проявляется влияние вязкости, сводится к весьма тонкому по сравнению с размерами обтекаемого тела пограничному слою, расположенному непосредственно вблизи поверхности тела и распространяющемуся вниз по потоку за телом в виде так называемого *аэродинамического следа* (рис. 2).



рис. 2

Вне тонкого, постепенно увеличивающегося по толщине вниз по потоку пограничного слоя реальная жидкость ведет себя как идеальная; характер движения в ней (*слабая по сравнению с пограничным слоем и аэродинамическим следом завихренность*) не может привести к сколь угодно значительным проявлениям сил вязкости. Наоборот, в пограничном слое, где касательные к стенке составляющие скорости резко меняются от нуля до величины порядка скорости набегающего потока, за счет больших величин производных от скорости по нормали к поверхности тела возникают значительные силы вязкости ($\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$), оказывающие резкое влияние на общий характер движения жидкости в пограничном слое. В аэродинамическом следе нет тормозящего влияния твердых стенок, но в нем происходит также связанное с вязкостью вырождение созданного на про-

тяжении пограничного слоя течения в однородный поток вдалеке за телом.

Принимая жидкость вне пограничного слоя и аэродинамического следа за идеальную, можно считать движение в этой области безвихревым, потенциальным. Только пройдя сквозь область пограничного слоя на поверхности обтекаемого тела, поток становится вихревым и затем, уже оставив тело и попав в область аэродинамического следа, постепенно теряет полученную завихренность, исчезающую вследствие диффузии, причем энергия вихрей превращается в тепло, рассеивающееся благодаря теплопроводности.

Как показывают непосредственные измерения, пограничный слой при тех больших значениях чисел Re , с которыми приходится иметь дело на практике, очень тонок. Возрастая по толщине от носка крыла к его хвосту, пограничный слой даже в точке максимальной толщины слоя вблизи хвоста крыла достигает обычно лишь порядка сотых частей хорды. Так, на крыле самолета с хордой 1,5-2 м пограничный слой на режиме максимальной скорости имеет порядок нескольких сантиметров, а на корабле, длина которого имеет порядок 100 м, может достигать толщины 1 м. Такой тонкий сравнительно с размерами тела слой не может произвести значительных возмущений во внешнем по отношению к нему безвихревом потоке, чем и объясняется совпадение картин обтекания тел реальной и идеальной жидкостью. Важно отметить, что характерная для движения вязкой жидкости в тонких слоях *неизменность давления в поперечном к потоку направлении* приводит к тому, что давление на внешней границе пограничного слоя передается сквозь пограничный слой без изменений на поверхность обтекаемого тела.

В приведенном рассуждении терминам *границы* и *толщины* пограничного слоя не придается точного количественного смысла. Эти понятия лишь качественно характеризуют поперечный размер области, где скорости от нулевого значения на стенке изменяются до величины порядка скоростей внешнего потока. Так, например, под *толщиной* погранслоя можно подразумевать такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости внешнего потока на 1%. По свойству вязкости жидкости тормозящее влияние стенки распространяется на всю область движущейся жидкости, однако влияние это имеет асимптотический характер и практически исчезает на конечном расстоянии от поверхности тела, что и позволяет в допустимом приближении говорить о *толщине* пограничного слоя и о его внешней границе. Следует обратить внимание на то, что эта граница не совпадает с какой-нибудь линией тока. Линии тока внешнего безвихревого потока входят в пограничный слой, пересекая его границы.

Малость толщины пограничного слоя по сравнению с протяженностью обтекаемого тела позволяет упростить уравнения Стокса движения вязкой жидкости в области погранслоя, заменив их некоторой приближенной системой уравнений.

Уравнения плоского движения вязкой жидкости в пограничном слое были получены впервые Прандтлем. Рассмотрим эти уравнения применительно к ламинарному пограничному слою в несжимаемой жидкости. Он образуется при больших числах Re , при которых уравнения движения Навье-Стокса превращаются в уравнения Эйлера. При этом порядок уравнений Эйлера ниже, чем у уравнений Стокса. Такой прием можно использовать для внешней (вне пограничного слоя) области потока с обычными для уравнений Эйлера граничными условиями равенства нулю нормальной составляющей скорости на поверхности тела (условие непроницаемости поверхности) и задания скорости в бесконечном удалении от тела. Это означает, что во внешней области жидкость рассматривается как идеальная (невязкая). В пограничном же слое, имеющем поперечную к потоку толщину порядка $\delta \sim 1/\sqrt{Re}$, происходит падение скорости потока, и главным граничным условием является равенство нулю касательной составляющей скорости на поверхности обтекаемого тела (условие "прилипания"). Падение скорости в погранслое обуславливается вязкостью жидкости, которой здесь пренебречь нельзя, несмотря на большие значения чисел Re . Математически это проявляется в том, что градиенты скорости в погранслое велики, и поэтому вязкие члены в уравнениях движения, содержащие производные от скорости по координатам, конечны, несмотря на малость коэффициента вязкости μ . Поэтому во внутренней (определяемой погранслоем) вязкой области потока порядок уравнений, определяемый наличием вязких членов, должен быть сохранен, и граничное условие "прилипания" жидкости к твердой стенке должно быть удовлетворено. Оценка сравнительной величины отдельных членов уравнений Стокса во внутренней области потока показывает, что в ней уравнения Стокса, относящиеся к *эллиптическому* типу, могут быть упрощены и сведены к уравнениям *параболического* типа, что правильно отражает особенности движения вязкой жидкости в погранслое.

В классической постановке теории пограничного слоя предполагается, что движение невязкого потока во внешней области заранее рассчитано, а внутреннее решение (для погранслоя) подчинено условию "прилипания" вязкого потока на твердой стенке и должно асимптотически переходить во внешнее решение при удалении от стенки.

Тот факт, что влияние вязкости жидкости должно сказываться лишь вблизи самой обтекаемой поверхности, был указан еще Д.И.Менделеевым в 1880 году в его исследованиях по сопротивлению жидкостей движущимся телам. Математическая теория пограничного слоя была дана Л.Прандтлем в 1904 году.

Изучение движения вязкой жидкости в области пограничного слоя основывается на интегрировании уравнений пограничного слоя, выведенных Прандтлем. Решение этих уравнений (как будет показано ниже) представляется *первым членом разложения решения уравнений Стокса* в ряд

по степеням малого безразмерного параметра (отношения масштаба толщины пограничного слоя к характерному для потока в целом масштабу обтекаемого тела, например хорде крыла), имеющего порядок $1/\sqrt{Re}$.

Пограничный слой играет основную роль в процессах динамического (сопротивление, подъемная сила) и термодинамического (тепло- и массообмен) взаимодействия потока реальной жидкости или газа с омываемым ими твердым телом.

2.2. Математическая модель ламинарного движения вязкой жидкости в пограничном слое

Выведем уравнения пограничного слоя в случае плоского движения несжимаемой вязкой жидкости, отвлекаясь для простоты от действия объемных (массовых) сил. Кроме того, пользуясь малостью толщины пограничного слоя по сравнению с размерами твердого тела ($\delta \ll L$, это концепция Прандтля), а тем самым и радиусами кривизны его поверхности, будем считать сетку параллельных контуру тела кривых и нормалей к ним (см. рис.3) прямолинейной декартовой прямоугольной системой координат (x, y) ; начало координат поместим в переднюю критическую точку 0 обтекаемого тела.

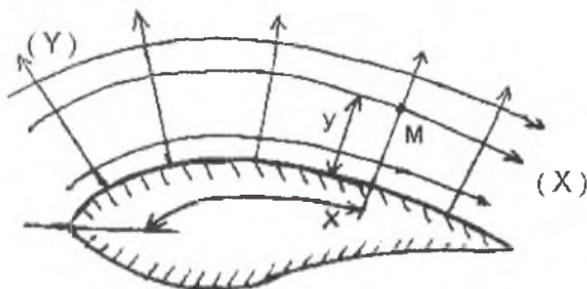


рис. 3

Тогда уравнения Навье-Стокса в этой системе координат будут иметь обычный для стационарного плоского движения несжимаемой жидкости вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (2.1)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

Левые части первых двух уравнений - нелинейные, что делает задачу весьма сложной. Вводя теорию пограничного слоя, можно в значительной части упростить математическую формулировку задачи плоского обтекания тела дозвуковым потоком.

Используем далее метод аффинных преобразований, у которых собственные масштабы продольных и поперечных координат будут различными (в отличие от подобных преобразований, где существует один собственный масштаб по всем координатам).

Обозначим собственный масштаб продольных величин через ℓ_x , собственный масштаб поперечных величин - через ℓ_y . Соответственно этому масштабы для чисел Маха запишутся как $M_{x,\infty}$ и $M_{y,\infty}$, а для скоростей потока - $v_{x,\infty}$; $v_{y,\infty}$. Тогда

$$x = \ell_x \cdot x_1; \quad y = \ell_y \cdot y_1; \quad v_x = v_{x,\infty} \cdot v_{x1}; \quad v_y = v_{y,\infty} \cdot v_{y1}.$$

Введем также значение $p = p_\infty \cdot p_1$. Параметры $x_1, y_1, v_{x1}, v_{y1}, p_1$ - безразмерные величины.

Подставляя эти выражения в систему уравнений (2.1) - (2.3), получим:

$$\frac{v_{x,\infty}^2}{\ell_x} v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + \frac{v_{x,\infty} v_{y,\infty}}{\ell_y} v_{y1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial y_1} = - \frac{p_\infty}{\rho \ell_x} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{v_{x,\infty}}{\ell_x^2} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x_1^2} + \frac{v_{y,\infty}}{\ell_y^2} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial y_1^2}; \quad (2.4)$$

$$\frac{v_{x,\infty} v_{y,\infty}}{\ell_x} v_{x1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty}^2}{\ell_y} v_{y1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} = \frac{p_\infty}{\rho \ell_y} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{v_{y,\infty}}{\ell_x^2} \frac{\partial^2 v_{y1}}{\partial x_1^2} + \frac{v_{x,\infty}}{\ell_y^2} \frac{\partial^2 v_{y1}}{\partial y_1^2}; \quad (2.5)$$

$$\frac{v_{x,\infty}}{\ell_x} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty}}{\ell_y} \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} = 0. \quad (2.6)$$

Приведем систему уравнений (2.4)-(2.6) к безразмерному виду, используя правило Бертрана, которое гласит, что если уравнение описывает физический процесс, то размерности правой и левой частей уравнения одинаковы. Тогда, разделив уравнение (2.4) на член $\frac{v_{x,\infty}^2}{\ell_x}$, уравнение (2.5) -

на $\frac{v_{x,\infty} v_{y,\infty}}{\ell_x}$, а уравнение (2.6) - на $\frac{v_{x,\infty}}{\ell_x}$, получим безразмерную систему

уравнений:

$$v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty} \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y} v_{y1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial y_1} = \frac{p_\infty}{\rho v_{x,\infty}^2} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{v}{\ell_x v_{x,\infty}} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x_1^2} + \frac{v \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y^2} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial y_1^2}; \quad (2.7)$$

$$v_{x1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty} \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y} v_{y1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} = \frac{p_\infty \cdot \ell_x}{\rho \cdot \ell_y v_{x,\infty} v_{y,\infty}} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{v}{\ell_x v_{x,\infty}} \frac{\partial^2 v_{y1}}{\partial x_1^2} + \frac{v \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y^2} \frac{\partial^2 v_{y1}}{\partial y_1^2}; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\ell_x v_{y,\infty}}{\ell_y v_{x,\infty}} \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} = 0. \quad (2.9)$$

Для того, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности (2.9), необходимо, чтобы в нем $\frac{\ell_x v_{y,\infty}}{\ell_y v_{x,\infty}} = 1$. Поскольку для пограничного слоя $\ell_x = \ell$,

$$\ell_y = \delta, \text{ то получим } \frac{v_{y,\infty} \cdot \ell}{v_{x,\infty} \cdot \delta} = 1 \text{ или } \frac{v_{y,\infty}}{v_{x,\infty}} = \frac{\delta}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

Это второе основное свойство ламинарного пограничного слоя, в соответствии с которым поперечная скорость в области поперечного слоя имеет тот же порядок, что и толщина слоя.

Продолжим вывод уравнений Прандтля.

Поскольку на величины ℓ_y и $v_{y,\infty}$ не наложено ограничений, их можно выбрать такими, чтобы в уравнениях (2.7) и (2.8) $\frac{\ell_x v_{y,\infty}}{\ell_y v_{x,\infty}} = 1$ и $\frac{v \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y^2} = 1$. Тогда из уравнения (2.7) получим следующее:

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2}. \quad (2.10)$$

Здесь учтено, что число $Re_\infty = \frac{v_{x,\infty} \cdot \ell_x}{\nu}$; число Эйлера $Eu_\infty = \frac{p_\infty}{\rho \cdot v_{x,\infty}^2}$.

Уравнение (2.8) преобразуется к следующему виду:

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty Re_\infty \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2}. \quad (2.11)$$

Здесь проведены следующие преобразования для первого члена в правой части уравнения (2.8):

а) из условия $\frac{v \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y^2} = 1 \rightarrow \ell_y^2 = \frac{v \ell_x}{v_{x,\infty}} \cdot \frac{\ell_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x^2}{Re}$, следовательно, $\ell_y = \frac{\ell_x}{\sqrt{Re}}$.

Это выражение аналогично первому основному свойству ламинарного пограничного слоя $\delta/\ell \sim 1/\sqrt{Re}$, т.к. $\ell_y \sim \delta$, $\ell_x \sim \ell$;

б) из условия $\frac{\ell_x v_{y,\infty}}{\ell_y v_{x,\infty}} = 1 \rightarrow v_{y,\infty} = \frac{\ell_y v_{x,\infty}}{\ell_x} = \frac{v_{x,\infty}}{\sqrt{Re}}$;

в) тогда член $\frac{p_\infty \cdot \ell_x}{\ell_y \cdot v_{y,\infty} v_{x,\infty} \rho} = \frac{p_\infty \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt{Re}}{\rho \cdot v_{x,\infty} v_{x,\infty}} = Eu \cdot Re_\infty$.

Уравнение (2.9), как было сказано выше, вновь приобретает вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = 0. \quad (2.12)$$

Известно, что ламинарный погранслой образуется при очень больших числах Re . Если число $Re \rightarrow \infty$, то уравнения (2.10), (2.11) приобретут вид (т.к. $1/Re \rightarrow 0$)

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y_1^2}; \quad (2.13)$$

$$v_x \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty Re_\infty \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2}. \quad (2.14)$$

В уравнении (2.14) присутствует член $(-Eu_\infty Re_\infty \frac{\partial p_1}{\partial y_1})$, для упрощения разделим все члены этого уравнения на Re_∞ , тогда оно примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0 \quad (\text{т.к. } Eu_\infty \neq 0). \quad (2.15)$$

Получили систему уравнений (2.13), (2.15), (2.12).

Вернемся вновь к размерным параметрам.

Используем для этого уже известные соотношения

$$x_1 = \frac{x}{\ell_x}; \quad y = \frac{y}{\ell_y}; \quad v_{x_1} = \frac{v_x}{v_{x,\infty}}; \quad v_{y_1} = \frac{v_y}{v_{y,\infty}}; \quad Eu_\infty = \frac{p_\infty}{\rho v_{x,\infty}^2}; \quad p_1 = \frac{p}{p_\infty}.$$

Подставим эти соотношения в уравнение (2.13):

$$v_{x_1} \left(\frac{\ell_x}{v_{x,\infty}^2} \right) \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + v_{y_1} \left(\frac{\ell_y}{v_{x,\infty} \cdot v_{y,\infty}} \right) \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y} = -\frac{p_\infty}{\rho v_{x,\infty}^2} \left(\frac{\ell_x}{p_\infty} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\ell_y^2}{v_{x,\infty}} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y^2};$$

разделим полученное уравнение на $\left(\frac{\ell_x}{v_{x,\infty}^2} \right)$:

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + v_{y_1} \left(\frac{v_{x,\infty} \cdot \ell_y}{v_{y,\infty} \cdot \ell_x} \right) \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\ell_y^2 \cdot v_{x,\infty}}{\ell_x} \right) \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y^2}.$$

Так как было принято, что $\frac{\ell_x v_{y,\infty}}{\ell_y v_{x,\infty}} = 1$ и $\frac{v \cdot \ell_x}{v_{x,\infty} \cdot \ell_y} = 1$, откуда $v = \frac{v_{x,\infty} \cdot \ell_y}{\ell_x}$,

то с учетом этого получим окончательно

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y^2}. \quad (2.16)$$

Теперь подставим известные аффинные соотношения в уравнение (2.12):

$$\left(\frac{\ell_x}{v_{x,\infty}} \right) \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + \left(\frac{\ell_y}{v_{y,\infty}} \right) \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y} = 0.$$

Разделим оба члена на $\left(\frac{\ell_x}{v_{x,\infty}} \right)$, тогда $\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + \left(\frac{v_{x,\infty} \cdot \ell_y}{v_{y,\infty} \cdot \ell_x} \right) \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y} = 0$.

Так как было принято, что $\frac{v_{x,\infty} \cdot \ell_y}{v_{y,\infty} \cdot \ell_x} = 1$, то получим окончательно

$$\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y} = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.15) преобразуется к виду $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Как видно, система уравнений упрощается. В уравнении (2.16) пропадает член $v \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y^2}$, бывший до аффинного преобразования в уравнении (2.1),

уравнение (2.2) пропадает из рассмотрения вовсе, так как остается только условие $\partial p / \partial y = 0$; сохраняется лишь уравнение неразрывности (2.3) или (2.17).

Выражение $\partial p / \partial y = 0$ является условием, означающим физически, что перепада давления в направлении нормали к обтекаемому телу нет, имеется перепад давления только вдоль обтекаемого тела (вдоль оси X). Это *третье* основное свойство погранслоя: во всех точках данного, нормального к поверхности тела сечения погранслоя давление имеет одно и то же значение. Однако, несмотря на упрощение системы уравнений, остаются следующие трудности:

- а) уравнение (2.16) нелинейно за счет первого члена в левой части;
- б) имеем три неизвестные величины u_x , u_y , p , а уравнений только два, т.е. задача в математическом отношении является некорректной (неопределенной).

Прандтль преодолевает эти трудности следующим образом: условие $\partial p / \partial y = 0$, означающее постоянство давления во всех точках данного, нормального к поверхности тела сечения пограничного слоя, позволяет, во-первых, заменить частную производную $\partial p / \partial x$ полной, т.е. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$, и, во-вторых, считать, что распределение давления $p(x)$ вдоль пограничного слоя совпадает с распределением давления во внешнем безвихревом потоке. Это распределение по теореме Бернулли, справедливой для набегающего на тело безвихревого потока идеальной жидкости, можно связать со скоростью u_∞ во внешнем потоке. Благодаря тонкости пограничного слоя можно снести эту скорость на поверхность, положив ее равной той, зависящей только от продольной координаты X скорости скольжения $u_{x,\infty}$ жидкости по поверхности тела, которая имела бы место в идеальной жидкости, т.е. при отсутствии пограничного слоя. Таким образом, имеет место обтекание Эйлера типа, и согласно уравнению движения Эйлера для стационарных условий обтекания и отсутствия массовых сил получим

$$u_{x,\infty} \frac{\partial u_{x,\infty}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{или} \quad u_{x,\infty} u'_{x,\infty} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (2.18)$$

Это условие зависимости давления только от координаты X (условие на бесконечности). Оно получается из уравнения Эйлера для идеальной среды, которое в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\vec{v}_\infty}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_\infty}{\partial t} + (\vec{v}_\infty \cdot \nabla) \vec{v}_\infty = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P,$$

а в проекции на ось X

$$\frac{\partial u_{x,\infty}}{\partial t} + u_{x,\infty} \frac{\partial u_{x,\infty}}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

При $\partial v_{x,\infty} / \partial t = 0$ и $F_x = 0$ получаем исходное уравнение (2.18). Внося условие (2.18) в уравнение (2.16), получим окончательную систему уравнений ламинарного пограничного слоя:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v'_{x,\infty} v_{x,\infty} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Эти уравнения, представляющие систему нелинейных уравнений в частных производных второго порядка *параболического* типа, были получены Прандтлем в 1904 г. Согласно идее Прандтля *внешняя скорость* $v_{x,\infty}$, входящая в первое уравнение, считается заданной, заранее рассчитанной по теории плоского безвихревого обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью. В такой постановке задачи предполагается, что пограничный слой по всему контуру обтекаемого тела настолько тонок, что его искажающее влияние на внешний поток пренебрежимо мало. Можно сказать, что в этом случае *не учитывается обратное влияние* пограничного слоя на внешний безвихревой поток. Необходимо отметить, что в некоторых случаях (например, плавное обтекание тонких тел) такое пренебрежение обратным влиянием пограничного слоя на внешний поток вполне допустимо, а в других случаях оно может быть настолько велико, что внешнюю скорость $v_{x,\infty}$ приходится вычислять по формуле

$$v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

используя экспериментально замеренное распределение давления по контуру тела.

Граничными условиями для решения полученной системы уравнений являются следующие:

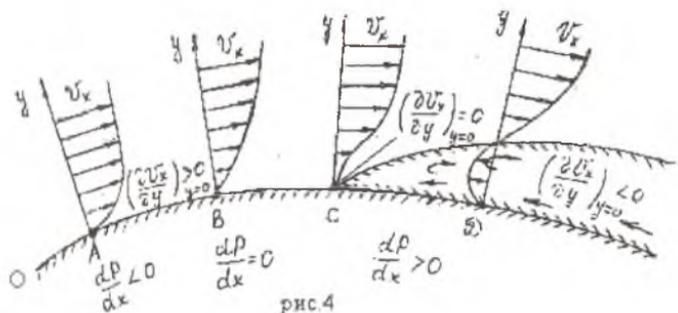
1) граничное условие на стенке при $y=0$ $v_x=v_y=0$. Оно выражает условие *прилипания* вязкой жидкости к твердой стенке ($y = 0$) - контуру обтекаемого тела;

2) при $y \rightarrow \infty$ $v_x \rightarrow v_{x,\infty}$. Это требование асимптотического стремления продольной скорости v_x в области пограничного слоя к скорости $v_{x,\infty}$ на границе пограничного слоя с безвихревым потоком. Второе граничное условие можно интерпретировать как операцию "сращивания" решения уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в пограничном слое с решением уравнений Эйлера для безвихревого обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью.

Теория пограничного слоя позволила объяснить природу явления *отрыва потока от твердой поверхности тела плавной формы* [3]. Явление это тесно связано со свойствами прилипания вязкой жидкости к твердой поверхности обтекаемого ею тела и образованием на ней пограничного слоя. Если рассмотреть стационарный отрыв, то он является результатом

взаимодействия трех факторов:

- а) инерции потока;
- б) вязкого взаимодействия между смежными слоями жидкости и твердой поверхностью;
- в) обратного перепада давления, направленного в сторону, противоположную движению.



ОВ - конфузорный участок; ВД - диффузорный участок.

На рис. 4 показаны профили скоростей в потоке, обтекающем тело. Точки А и В находятся в конфузорной области, где отрыв невозможен, так как здесь $v'_{x,w} > 0$ (скорость вниз по потоку возрастает), а $\frac{dp}{dx} < 0$, т.е. давление по потоку убывает. Следовательно, давление в каждой последующей точке будет меньше, чем в предыдущей. Такой градиент давления на стенке будет содействовать движению жидкости в пограничном слое, а не противодействовать ему. В кормовой (диффузорной) области профили вниз по течению за точкой минимума давления В (см. рис. 4) $v'_{x,w} < 0$ (поток замедляется), а также происходит возрастание давления на стенке $\frac{dp}{dx} > 0$, и в каждой последующей точке оно больше, чем в предыдущей. Такой градиент давления противодействует потоку, и жидкость в пограничном слое движется из области меньшего давления в область большего давления против подтормаживающего ее перепада давлений. Если бы жидкость была идеальна и скорость на поверхности тела не равнялась бы нулю, то запас кинетической энергии жидкости оказался бы достаточным для преодоления тормозящего поля давлений. В пограничном слое поле давлений, как уже известно, не отличается от поля давлений в идеальной жидкости, между тем как скорости в непосредственной близости к поверхности тела очень малы, а следовательно, и кинетическая энергия частиц жидкости ничтожна. В этих условиях торможение может вызвать остановку, а далее и обрат-

ное (см. рис. 4) движение под действием перепада давления, направленно-го против движения. Встреча набегающего потока с обратно движущейся в пограничном слое жидкостью приводит к резкому оттеснению линий тока от поверхности тела, к утолщению пограничного слоя и к отрыву его от поверхности тела. До точки отрыва С (т. А, В), как видно из рис. 4,

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} > 0, \text{ за точкой отрыва (т. Д)} \rightarrow \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} < 0.$$

В самой точке С будет иметь условие отрыва:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

Математически точка отрыва С определяется как точка, в которой трение на стенке равно нулю, т.е.

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \text{ или просто } \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

Приведенное объяснение явления вязкого отрыва показывает, что отрыв потока может возникнуть только в *диффузорной области* пограничного слоя, где вязкие взаимодействия в жидкости сосуществуют с обратным по отношению к направлению потока перепадом давлений. Таким образом, точка отрыва С всегда располагается ниже по течению, чем точка В минимума давления (максимума внешней скорости).

Тормозящее влияние обратного перепада давления является *необходимым условием отрыва пограничного слоя с поверхности тела*. Так, при постоянстве давления вдоль пограничного слоя отрыв произойти не может. Условие постоянства давления возникает, например, при обтекании тела тонкой сравнительно с размерами тела струей. Внешняя граница такой струи является свободной поверхностью, т.к. граничит с неподвижной средой, в которой давление повсюду одинаково. Отрыв пограничного слоя от поверхности тела в такой струе не происходит, тонкие струи прилипают к поверхности тела, вдоль которой они распространяются. Это любопытное часто наблюдаемое явление иногда называют *эффектом Коанда* по имени румынского инженера А.Коанда, который обратил внимание на это явление в 1910 году.

Отрыв пограничного слоя обычно относят к числу вредных явлений, вызывающих резкое повышение сопротивления обтекаемых жидкостью тел, опасные вибрации их, а в случае внутренних течений по трубам и каналам, проводящие к уменьшению полезного расхода жидкости, возрастанию потерь энергии и уменьшению КПД (коэффициента полезного действия) системы.

2.3. Метод интегральных соотношений для решения задачи ламинарного обтекания пластины вязкой жидкостью

Существует несколько приближенных методов расчета ламинарного пограничного слоя, которые по наглядности результатов расчета и физичности самого процесса расчета конкурируют с численными методами расчета на ЭВМ. Один из них - метод интегральных соотношений - значительно упрощает решение системы (2.19) уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое:

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v'_\infty u_\infty + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Здесь введено обозначение $u_{x_\infty} = u_\infty$; $v'_{x_\infty} = v'_\infty$, т.к. считаем направление потока на бесконечности параллельным оси ОХ

Умножим второе уравнение на u_x

$$u_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0$$

и введем этот член, равный нулю, в первое уравнение системы (2.20)

$$u_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v'_\infty u_\infty + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

или

$$2u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v'_\infty u_\infty + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2) = 2u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}(u_x v_y) = u_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y}$, то первое уравнение системы (2.20) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x v_y) = v'_\infty u_\infty + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \quad (2.21)$$

Второе уравнение системы (2.20) - уравнение неразрывности - можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\infty v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_\infty v_y) = v'_\infty u_x. \quad (2.22)$$

Покажем это:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u_\infty v_x) &= u_\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = u_\infty v'_x + v_x \frac{\partial u_\infty}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}(u_\infty v_y) &= u_\infty \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial u_\infty}{\partial y} = u_\infty \frac{\partial v_y}{\partial y}, \end{aligned}$$

поскольку $v_x = v_{x\infty}$ не зависит от y , и, следовательно, $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$. Сложив оба последних равенства, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_x v_y) = v_x v'_x + v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right).$$

Второй член в правой части этого уравнения равен нулю, т.к. выражение

$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ - это исходное уравнение неразрывности, равное нулю.

Таким образом, приходим к уравнению (2.22).

Уравнения (2.21) и (2.22) определяют уравнения ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Для решения задачи о пограничном слое выведем *интегральное соотношение Кармана*, выражающее теорему количеств движения (теорему импульсов) в применении к потоку жидкости в области пограничного слоя.

Преобразуем оба уравнения в одно, для чего вычтем по отдельности из левой и правой частей уравнения (2.22) уравнение (2.21):

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_x(v_x - v_x)] + \frac{\partial}{\partial y}[v_y(v_x - v_x)] + v'_x(v_x - v_x) = -v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Произведем почленное интегрирование по y от $y=0$ до $y=\infty$, при этом будем пользоваться обычными производными (т.к. производную по времени мы опустили в силу стационарности процесса):

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dx}[v_x(v_x - v_x)] dy + \int_0^{\infty} \frac{d}{dy}[v_y(v_x - v_x)] dy + \int_0^{\infty} v'_x(v_x - v_x) dy = - \int_0^{\infty} v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy. \quad (2.23)$$

В первом члене левой части уравнения (2.23) воспользуемся правилом допустимости перемены порядка дифференцирования и интегрирования, т.е. получаем $\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} v_x(v_x - v_x) dy$.

Второй член левой части уравнения (2.23) имеет после интегрирования вид:

$$v_y(v_x - v_x) \Big|_{y=0}^{y=\infty}.$$

Используя граничные условия, в соответствии с которыми при $y=0$ $v_x=0$ и $v_y=0$, а при $y=\infty$ $v_x=v_{x\infty}$, получаем, что этот член уравнения

$$v_y(v_x - v_x) \Big|_{y=0}^{y=\infty} = 0.$$

Тогда уравнение (2.23) примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} [v_x(v_x - v_x)] dy + v'_x \int_0^{\infty} (v_x - v_x) dy = -v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=\infty}.$$

Поскольку при $y=\infty \rightarrow v_x=v_\infty$, то $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\infty} = 0$, т.к. v_∞ не зависит от y .

Тогда получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty [v_x(v_\infty - v_x)] dy + v_\infty' \int_0^\infty (v_\infty - v_x) dy = v \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (2.24)$$

Используя выражение для напряжения трения на твердой поверхности обтекаемого тела $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}$ и учитывая, что $\nu = \mu/\rho$, получим в правой части уравнения (2.24) τ_w/ρ .

Введем в рассмотрение так называемые интегральные толщины пограничного слоя:

$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy$ — толщина вытеснения масс в пограничном слое, учитывающая смещение линий тока из-за наличия вязкости (торможение жидкости в пограничном слое [4]);

$\delta'' = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy$ — толщина потери импульса, учитывающая потерю количества движения на преодоление трения.

Преобразуем уравнение (2.24) следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \left[v_\infty^2 \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) \right] dy + v_\infty' v_\infty \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}.$$

Введем интегральные толщины: $\frac{d}{dx} (v_\infty^2 \delta'') + v_\infty' v_\infty \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$.

Разделив обе части последнего уравнения на v_∞^2 , получим

$$\frac{1}{v_\infty^2} \frac{d}{dx} (v_\infty^2 \delta'') + \frac{v_\infty'}{v_\infty} \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}. \quad (2.25)$$

Дифференцируя первый член левой части уравнения (2.25), получим:

$$\frac{d\delta''}{dx} + 2\delta'' \frac{v_\infty'}{v_\infty} + \delta^* \frac{v_\infty'}{v_\infty} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}$$

или окончательно

$$\frac{d\delta''}{dx} + \frac{v_\infty'}{v_\infty} (2\delta'' + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}. \quad (2.26)$$

Это интегральное соотношение или уравнение импульсов впервые было выведено учеником Прандтля Карманом и носит название *интегрального соотношения Кармана*.

В выводе этого соотношения есть одна некорректность, т.к. используем уравнение Эйлера $v_\infty' v_\infty = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ (см. уравнение (2.21)) на произвольном расстоянии от обтекаемого тела ($0 \leq y < \infty$). Но эта некорректность

пропадает, если в интеграле $\int_0^{\infty} dy$ вместо ∞ взять верхним пределом δ - внешнюю границу пограничного слоя, т.е. $\int_0^{\delta} dy$.

Тогда интегральные толщины пограничного слоя будут таковы:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_x}{u_{\infty}}\right) dy; \quad \delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u_x}{u_{\infty}}\right) dy, \quad (2.27)$$

и граничные условия следующие:

1) граничное условие на стенке: $y=0$; $u_x=0$ (как и было ранее)

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{u_{\infty} - u_x}{\ell};$$

2) на внешней границе пограничного слоя $y=\delta$; $u_x=u_{x,\infty}=u_{\infty}$; $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$.

Необходимо отметить, что если для ламинарного пограничного слоя метод интегрального соотношения не является единственным, то для турбулентного погранслоя этот метод является единственным методом решения задачи.

В общем случае все задачи о ламинарном пограничном слое могут решаться двумя путями. В первом случае решают дифференциальные уравнения погранслоя с соответствующими граничными условиями и обычно получают значение скоростей во всей области пограничного слоя, т.е. $u_x(x,y)$ и $v_y(x,y)$, а следовательно, и трение на стенке. Такой способ называется *точным методом решения задачи* о ламинарном погранслое. Во втором случае пользуются не дифференциальными уравнениями, а интегральными соотношениями. При этом задаются некоторой формой профиля скоростей в пограничном слое и, используя интегральное соотношение Кармана, определяют напряжение трения τ_w на обтекаемой поверхности, а также такие интегральные величины, как толщина пограничного слоя δ , толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса δ^{**} . Такой способ решения называют *приближенным методом*.

Рассмотрим приближенную математическую модель продольного обтекания вязкой жидкостью плоской бесконечно тонкой пластины. Очевидно, в этом случае давление во всей области потока, как и величина скорости вне пограничного слоя, будут величинами постоянными.

Граничные условия будут следующие:

а) при $y=0$ $u_x=v_y=0$.

Если рассмотреть первое дифференциальное уравнение пограничного слоя (2.20) - уравнение движения

$$u_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = u'_{\infty} v_{\infty} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

то т.к. для бесконечно тонкой плоской пластины $v'_x = 0$ $\left(\frac{dv_x}{dx} = 0\right)$ скорость потока не изменяется вдоль оси x , при $y=0$ имеем $v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

Таким образом, при $y \rightarrow 0$ $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

б) при $y=\delta$ $v_x=v_\infty$; $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ и тогда $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

Уравнение импульсов (или интегральное соотношение Кармана) для этой задачи имеет вид:

$$\frac{d\delta''}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}, \quad (2.28)$$

т.к. $v'_x = 0$ для тонкой плоской пластины.

Идея интегрального соотношения состоит в задании неизвестного поля скоростей простейшим полиномом:

$$v_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n.$$

Значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, \dots могут быть найдены из граничных условий, причем для определения одного коэффициента полинома требуется одно граничное условие. Таким образом, количество членов полинома должно соответствовать количеству поставленных граничных условий.

Воспользуемся для начала тремя граничными условиями:

а) на стенке при $y=0 \rightarrow v_x=0$,

б) на границе слоя при $y=\delta \rightarrow v_x=v_\infty$; $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$.

Подставив эти граничные условия в полином, в котором берем три первых члена $v_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$, получим:

1) при $y=0$, $v_x = 0 \rightarrow a_0=0$,

2) при $y = \delta$, $v_x = v_\infty \rightarrow v_\infty = a_1 \delta + a_2 \delta^2$,

3) при $y = \delta$, $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = a_1 + 2a_2 y = a_1 + 2a_2 \delta = 0$.

Из последних двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 \delta &= \frac{v_\infty}{\delta} \\ a_1 + 2a_2 \delta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

находим $a_1 = 2 \frac{v_\infty}{\delta^2}$ и $a_2 = -\frac{v_\infty}{\delta^2}$.

Следовательно, поле скоростей будет иметь вид:

$$v_x = 2v_\infty \frac{y}{\delta} - v_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \quad \text{или в безразмерном виде} \quad \frac{v_x}{v_\infty} = 2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Зная $\frac{v_x}{v_\infty}$, можно найти δ^* , δ^{**} , τ_w :

$$\delta^* = \int_0^\delta \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 \left[\frac{v_x}{u_\infty} - \left(\frac{v_x}{u_\infty}\right)^2 \right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) =$$

$$= \delta \left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \delta;$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 \left[\frac{v_x}{u_\infty} - \left(\frac{v_x}{u_\infty}\right)^2 \right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) =$$

$$= \delta \int_0^1 \left[2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] - \left[2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{2}{15} \delta.$$

Отсюда видно, что $\delta > \delta^* > \delta^{**}$, т.е. толщина пограничного слоя больше толщины вытеснения, а та в свою очередь больше толщины потери импульса.

Из полученных значений δ^* и δ^{**} определим $\frac{\delta^*}{\delta} = 3$ и $\frac{\delta^{**}}{\delta} = 2.5$.

Величина напряжения трения на стенке определяется формулой

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Найдем $\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}$, продифференцировав выражение для поля скоростей

$$v_x = 2v_\infty \frac{y}{\delta} - v_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \text{ по "y":}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2v_\infty}{\delta} - \frac{2y}{\delta^2} v_\infty, \text{ откуда } \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2v_\infty}{\delta}, \text{ и, следовательно,}$$

$$\tau_w = \mu \frac{2v_\infty}{\delta}.$$

Тогда уравнение импульсов $\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}$ приобретет вид: $\frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx} = \frac{2\mu}{\rho v_\infty \delta}$

или $\delta d\delta = 15 \frac{\nu}{v_\infty} dx$ (т.к. $\mu/\rho = \nu$), откуда после интегрирования имеем

$$\delta^2 = 30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty} + C, \text{ и } \delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty}} + C_1.$$

Считая, что при $x=0 \rightarrow \delta=0$, получим $C_1=0$.

Окончательно будем иметь $\delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty}}$ или $\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{5.48}{Re_x}}$,

где $Re_x = \frac{v_\infty \cdot x}{\nu}$ - местное значение числа Рейнольдса.

Из формулы $\delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty}}$ видно, что толщина пограничного слоя на

пластине увеличивается пропорционально \sqrt{x} , т.е. $\delta \sim \sqrt{x}$; и тогда $\delta^* \sim \sqrt{x}$; $\delta^{**} \sim \sqrt{x}$.

Зная выражение для толщины пограничного слоя δ , можно найти зависимость для напряжения трения на стенке:

$$\tau_w = 2\mu \frac{v_\infty}{\delta} = \sqrt{\frac{4}{30} \cdot \frac{v_\infty^3 \mu^2}{v \cdot x}} = \sqrt{\frac{2}{15} \cdot \frac{v_\infty^3 \nu \rho^2}{x}} = \frac{0.361 \rho v_\infty^2}{\sqrt{Re_x}}$$

Таким образом, $\tau_w \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, т.к. $\tau_w = \sqrt{\frac{2}{15} \cdot \frac{v_\infty^3 \mu \rho}{x}} = 0.361 \sqrt{\frac{v_\infty^3 \mu \rho}{x}}$.

Полное сопротивление (в данном случае полное сопротивление трения) можно определить для одной стороны пластины по формуле

$$R_x = b \int_0^{\ell} \tau_w dx,$$

где b - ширина пластины, ℓ - длина пластины.

Если принять ширину пластины $b=1$, то R_x для одной стороны пластины будет $R_x = \int_0^{\ell} \tau_w dx$, а для двух сторон

$$R_x = 2 \int_0^{\ell} \tau_w dx.$$

Для пластины в целом величина трения будет определяться удвоенной величиной (две стороны пластины), т.е. $R_x = 2b \int_0^{\ell} \tau_w dx$

или $R_x = 0.722 b \sqrt{v_\infty^3 \mu \rho} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1.444 b \sqrt{v_\infty^3 \mu \rho} \sqrt{x} \Big|_0^{\ell} = 1.444 b \sqrt{v_\infty^3 \mu \rho \ell}$.

При $b=1$ $R_x = 1.444 \sqrt{v_\infty^3 \mu \rho \ell}$.

Коэффициент сопротивления трения равен: $C_f = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot S}$,

(2.29)

где $S=2b \cdot \ell$ - площадь поверхности с двух сторон пластины.

При $b=1 \rightarrow C_f = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot 2 \cdot \ell} = \frac{1.444 \sqrt{v_\infty^3 \mu \rho \ell}}{\rho v_\infty^2 \cdot \ell} = \frac{1.444 \sqrt{v_\infty^3 \nu \ell}}{v_\infty^2 \cdot \ell} = \frac{1.444}{\sqrt{Re}}$,

где $Re = \frac{v_\infty \ell}{\nu}$.

Как видно, $C_f \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$, т.е. коэффициент сопротивления обратно пропорционален \sqrt{Re} .

Еще раз напоминаем, что этот метод для ламинарного погранслоя был открыт Карманом и разработан далее Рэлеем. В действительности скорости течения на практике так велики, что ламинарное движение переходит в

турбулентное, где метод интегральных соотношений является единственным, позволяющим получить конечные результаты.

2.4. Математическая модель ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе

Рассмотрим установившийся ламинарный поток в круглой цилиндрической трубе, предположив линии тока прямыми, параллельными оси трубы (см. рис. 5). Будем рассматривать стационарный процесс, для которого

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0,$$

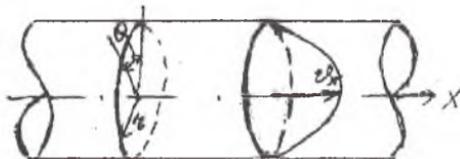


Рис. 5

Предположим также, что среда несжимаема, т.е. $\rho = \text{const}$. Кроме того, будем считать, что скорость потока и профиль скоростей не зависят от продольной координаты. Это так называемое стабилизированное движение, имеющее место в цилиндрической трубе на значительном расстоянии от входа. Следовательно, если направление движения совпадает с осью X, то проекции скоростей на оси y и z будут равны нулю:

$$v_y = v_z = 0; \quad v_x = v.$$

Используя уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, получаем, что $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial v_x^2}{\partial x^2} = 0$, следовательно, скорость в трубе не зависит от координаты X (условие стабилизированного течения), т.е. $v_x = v_x(y, z) = v(y, z)$.

Тогда уравнения движения Навье - Стокса вязкой несжимаемой жидкости, имеющие вид

а) в векторной форме $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \vec{v}$,

б) в проекциях на оси декартовых координат

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x; \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y; \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z; \end{cases}$$

после подстановки значений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0; \\ v_x = v_z = 0; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{т.е. } \nabla^2 v_y = 0); \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{т.е. } \nabla^2 v_z = 0); \\ v_x = v; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

и отбрасывания внешних сил $F_x = F_y = F_z = 0$ преобразуются к виду

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует:

1) величина давления не зависит от поперечных координат y и z и есть функция только координаты x , т.е. в частности, в круглой трубе давление меняется только вдоль оси, а следовательно, постоянно в каждом сечении и не зависит от радиуса r ;

2) так как левая часть первого уравнения зависит только от y и z , а правая часть не зависит ни от y , ни от z , то следовательно, правая и левая части этого уравнения должны быть равны одной и той же постоянной величине, т.е.

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.}$$

Таким образом, уравнение Навье - Стокса для стабилизированного движения жидкости в цилиндрической трубе вдоль оси X будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (2.30)$$

Если прямоугольную систему координат заменить на цилиндрическую, в которой $x=x$, $y=r \cdot \cos(\theta)$; $z=r \cdot \sin(\theta)$, то уравнение (2.30) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (2.31)$$

Предполагая, что поток в трубе обладает осевой симметрией, заключаем, что все параметры не зависят от переменной θ , т.е. $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Так как $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$, то уравнение Навье - Стокса переписывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Выполним последовательно двойное интегрирование.

После первого интегрирования получим:

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}.$$

Проинтегрируем еще раз: $v = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2.$ (2.32)

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Для круглой трубы с радиусом R они могут быть записаны так: при $r=R$ (внутренний радиус трубы) скорость $v=0$; при $r=0$ скорость v - конечная величина.

Так как скорость потока в трубе должна иметь конечное значение (или нулевое при $r=R$), а при $r \rightarrow 0$ формула (2.32) дает бесконечное значение скорости на оси, то физически реальный результат получим лишь при $C_1 = 0$. Используя первое граничное условие, найдем

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2, \quad \text{и тогда} \quad v = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2). \quad (2.33)$$

Таким образом, для круглой трубы имеем параболическое распределение скоростей по сечению (рис. 6).

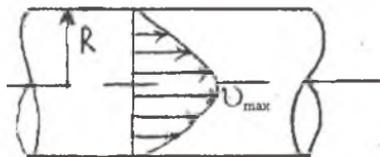


Рис.6

На оси трубы, т.е. при $r=0$, скорость потока достигает максимального значения:

$$v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2.$$

Тогда $v = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$

или в безразмерном виде

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

Очевидно, что пространственная эпюра скоростей представляет собой параболоид вращения с основанием πR^2 и высотой v_{\max} . Для цилиндрической трубы можно записать

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\ell} = \text{const},$$

где Δp - перепад давления в трубе длиной ℓ .

Определим среднюю расходную и максимальную скорости в круглой трубе. Объемный расход жидкости равен:

$$Q = 2\pi \int_0^R v r dr = 2\pi v_{\max} \int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr = \pi R^2 \frac{v_{\max}}{2}.$$

Этот результат получается следующим образом:

$$\int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr = \int_0^R r \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4}.$$

$$\text{Тогда } Q = 2\pi v_{\max} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \pi R^2 \frac{v_{\max}}{2}.$$

Поскольку расход Q связан со средней скоростью \bar{v} формулой $Q = \pi R^2 \bar{v}$, то $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2}$, т.е. при ламинарном режиме течения в круглой трубе максимальная скорость жидкости вдвое больше средней. Это очень важное свойство ламинарного установившегося движения жидкости в круглой трубе. Отсюда

$$\bar{v} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} R^2 = \frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{\ell} R^2, \quad Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{\ell} R^4, \quad v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\ell} R^2.$$

Перепад давлений на участке трубы длиной ℓ определяется как

$$\Delta p = \frac{8\mu \ell \bar{v}}{R^2} = \frac{32\mu \ell \bar{v}}{D^2},$$

где D - внутренний диаметр трубы.

Это формула Пуазейля, исследовавшего законы движения крови по капиллярным сосудам.

С другой стороны, для установившегося движения в цилиндрических трубах перепад давления определяется по формуле Дарси - Вейсбаха:

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{\ell}{D}, \quad \text{где } \lambda - \text{коэффициент трения.}$$

Приравнивая оба равенства, получим $32\sqrt{\rho} \frac{\ell}{D^2} = \lambda \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{\ell}{D}$, откуда

$$\lambda = 64 \frac{v}{\bar{v} D} = \frac{64}{\text{Re}},$$

где $\text{Re} = \frac{\bar{v} D}{v}$ - число Рейнольдса, составленное по средней (расходной) скорости \bar{v} и диаметру трубы D .

Выражение коэффициента сопротивления λ как функции числа Рейнольдса ($\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$) называется законом сопротивления ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе. Необходимо отметить, что полученные соотношения пригодны для ламинарного течения только лишь на определенном расстоянии от входа в трубу, после исчезновения начального участка ламинарного потока (см. рис. 7).

Если вход в трубу из резервуара выполнен достаточно плавно, то в начальном сечении 1-1 устанавливается практически равномерное распределение скоростей. По мере движения жидкости тормозящее влияние стенок распространяется на всё большую толщу потока. На некотором участке, называемом начальным, поток имеет ядро, где сохраняется равномерное распределение скоростей, и пристенный пограничный слой, где скорости распределяются неравномерно. Сечение ядра вниз по течению убывает, а толщина пограничного слоя возрастает. В конце начального участка ℓ_n пограничный слой смыкается на оси трубы, и ниже по течению устанавлива-

ется параболическое распределение скоростей в соответствии с полученными соотношениями.

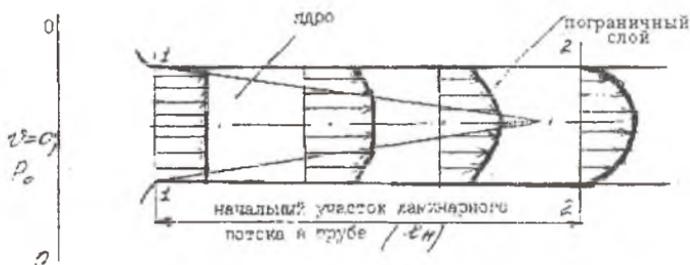


Рис. 7

Этот характер течения и соответствующие ему зависимости имеют место только при устойчивом ламинарном режиме, т.е. при $Re < Re_{кр}$. При Re , немного меньших $Re_{кр}$, в ламинарном потоке периодически появляются кратковременные очаги турбулентности, которые могут на отдельных участках заполнять все сечение потока, образуя "турбулентные пробки".

При возрастании числа Re турбулентный режим в каждом сечении существует все более длительное время, и, наконец, поток становится турбулентным. Появление турбулентных очагов наступает тем раньше, чем больше возмущений испытывает поток при входе в трубу. Если вход сделать плавным и устранить другие источники возмущений, то ламинарный режим можно получить и при больших числах Re (например 20 000). Однако такие "затянутые" ламинарные режимы оказывались неустойчивыми, т.е. внесение в поток даже очень малых возмущений приводило к турбулизации. Поэтому критические значения числа Re следует понимать как границу устойчивого ламинарного режима в том смысле, что при $Re < Re_{кр}$ любые внешние возмущения, вносимые в поток, будут с течением времени затухать и поток сохранит ламинарный характер. При $Re > Re_{кр}$ в зависимости от условий опыта может существовать ламинарный или турбулентный режим. Для круглых труб $Re_{кр} = 2300$. Такое определение $Re_{кр}$ соответствует так называемому нижнему критическому числу Re . *Верхним* критическим числом Re называют то его значение, при котором устанавливается стабильный турбулентный режим.

2.5. Переход ламинарного течения в турбулентное

Исторически первыми научными наблюдениями турбулентного движения были опыты английского физика О. Рейнольдса, в которых он в 1893 году изучал движение воды в круглой цилиндрической трубе [5]. При по-

вышении скорости ламинарно движущейся жидкости было замечено, как на подкрашенную и хорошо видимую вначале прямолинейную струйку начинают накладываться волны, распространение которых вдоль струйки говорит о появлении возмущений в ранее спокойном прямолинейном движении. Постепенно с ростом скорости воды число таких волн и их амплитуда возрастают, пока, наконец, струйка не разобьется на нерегулярные, перемешивающиеся между собой более мелкие струйки, хаотический характер которых позволяет судить о переходе ламинарного движения в турбулентное. Таким образом, с возрастанием скорости ламинарное движение *теряет свою устойчивость*, при этом случайные возмущения, которые вначале вызывали лишь колебания струек относительно устойчивого их прямолинейного положения, быстро развиваются и приводят к новой форме движения жидкости - турбулентному движению.

Если местная скорость \vec{v} явно зависит от времени, т.е. изменяется с течением последнего, то движение и соответствующее ему поле скоростей называют неустановившимся или нестационарным. Если в каждой точке пространства вектор \vec{v} имеет постоянное во времени значение, то движение и поле скоростей будет установившимся или стационарным. Если ламинарные течения могут быть как установившимися, так и неустановившимися, то турбулентные течения, строго говоря, всегда являются неустановившимися. Неупорядоченное движение частиц в турбулентном потоке создает резкие изменения местных скоростей во времени, называемые пульсациями скорости.

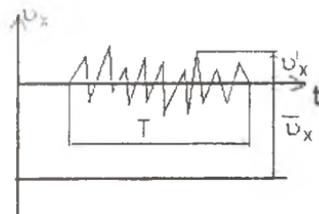


Рис.8

На рис. 8 приведено изменение местной мгновенной скорости v_x турбулентного потока. Видно, что местная скорость изменяется во времени достаточно резко, однако ее значение колеблется около некоторого среднего. Поскольку использование в расчетах мгновенных скоростей приводит к трудностям, вводится понятие местной осредненной скорости:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt,$$

где v_x - мгновенная местная скорость, T - период осреднения. Такой способ осреднения не является единственным, но благодаря простоте его широко применяют в гидромеханике. При этом можно предположить, что для каждого турбулентного движения существует такой достаточно большой по сравнению с периодом турбулентных пульсаций постоянный период осреднения T , что сглаживание по времени приводит к осредненной величине, при повторном сглаживании уже не изменяющейся, т.е. $\bar{\bar{v}}_x = \bar{v}_x$. Если в результате осреднения, проведенного в данной точке в разные моменты времени t , будут получаться одни и те же значения v_x , то осредненное

движение называется стационарным, а само турбулентное движение - квазистационарным. Разницу скоростей v_x и \bar{v}_x называют пульсационной скоростью или просто пульсацией: $v'_x = v_x - \bar{v}_x$. Нетрудно убедиться, что осредненное значение пульсации равно нулю:

$$\bar{v}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T v'_x dt = \frac{1}{T} \int_0^T (v_x - \bar{v}_x) dt = \bar{v}_x - \bar{\bar{v}}_x = 0.$$

По правилу осреднения также следует, что среднее значение производной от скорости по координате равно производной от среднего значения скорости по той же координате, т.е. $\overline{\frac{\partial v_x}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$, т.к. операции дифференцирования по координате и интегрирования по времени независимы.

Таким же свойством обладает и производная по времени, т.е. $\overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$.

Все вышесказанное относится и к другим проекциям скорости v_y и v_z .

Правила осреднения обладают еще и следующими свойствами [6]:

$$\overline{v_x + v_x} = \bar{v}_x + \bar{v}_y; \quad \overline{v_x \cdot v_x} = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_y;$$

$$\overline{v_x \cdot v_x} = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_y; \quad \overline{v_x \cdot v_x} = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_y \text{ и т.д.}$$

В своих опытах Рейнольдс впервые обнаружил, что переход ламинарного движения в турбулентное обусловливается достижением критического значения некоторого безразмерного числа, или *критерия*, которое в дальнейшем получило его имя. По опытам самого Рейнольдса критическое число оказалось равным

$$Re_{кр} = \left(\frac{v_{ср} d}{\nu} \right)_{кр} = 1.3 \cdot 10^4;$$

здесь $v_{ср}$ - средняя по расходу скорость, d - диаметр трубы. Впоследствии им же было открыто существование *нижнего критического* значения $Re_{кр} \approx 2000$, такого, что при $Re < Re_{кр}$ движение в трубе оставалось ламинарным, каковы бы ни были введенные в течение возмущения. Вместе с тем было замечено, что путем удаления возмущений на входе в трубу или уменьшения их начальной интенсивности можно искусственно затян timer ламинарное движение в область значительно больших значений числа Re , например, до $5 \cdot 10^4$. Конечно, такое затянутое ламинарное движение не терпит появления даже очень небольших возмущений и сразу же переходит в турбулентное.

Явление перехода ламинарного движения в турбулентное в круглой цилиндрической трубе распространяется и на движение вязкой жидкости в пограничных слоях на поверхности твердых тел, в струях и в следах за телами. Если условиться количественно сопоставлять скорость на внешней границе пограничного слоя со скоростью на оси трубы, а толщину погранслоя с радиусом трубы, то можно ввести в рассмотрение число

Re_{δ} пограничного слоя $Re_{\delta} = \frac{u \cdot \delta}{\nu}$, характеризующее поток в данном сечении слоя.

Многочисленные опыты по определению критического числа для пограничного слоя на пластине привели к значениям, близким к критическому числу трубы. Тот же порядок $Re_{кр}$ был найден и при обтекании круглого цилиндра, шара и крыловых профилей. При этом было обнаружено, что относительное положение *критического* сечения пограничного слоя, в котором ламинарный слой переходит в турбулентный, существенно зависит от степени возмущенности набегающего на тело внешнего потока. При изменении этого фактора изменяется и критическое число Рейнольдса пограничного слоя.

Наличие того или иного режима движения в пограничном слое обусловлено развитием течения *вдоль* пограничного слоя. Так, начальный участок слоя обычно бывает ламинарным, за ним располагается переходная область, где одновременно сосуществуют турбулентные зоны потока с ламинарными, и, наконец, *область развитого турбулентного потока*, состоящая из *турбулентного ядра* и *тонкого вязкого ламинарного подслоя*, граничащего с твердой стенкой.

2.6. Математическая модель осредненного турбулентного движения вязкой жидкости в пограничном слое

Пусть имеем систему уравнений пограничного слоя:

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Так как первый член в правой части первого уравнения системы (2.34) записан как $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, а не $u'_x \cdot u'_x$, то надо оставить и второе уравнение $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, чтобы сохранилась корректность системы уравнений пограничного слоя.

Для описания турбулентного движения Рейнольдс предложил следующий прием. Регистрируя во времени скорости и давления в данной точке потока, можно их представить как

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y; \quad p = \bar{p} + p'$$

где u_x, v_y, p - действительно существующие в потоке мгновенные (актуальные) проекции скорости и давления; $\bar{u}_x, \bar{v}_y, \bar{p}$ - осредненные во времени их значения; u', v', p' - пульсации проекций скорости и давления.

Под осредненным значением параметра понимается обычное интегральное среднее по времени t за промежуток T , называемый *периодом осреднения*:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt; \quad \bar{v}_y = \frac{1}{T} \int_0^T v_y dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

В турбулентном движении добавляется пульсационная составляющая скорости (рис. 9), в результате чего наблюдается вихревое движение, при котором сопротивление значительно возрастает. Таким образом, турбулентное течение обладает большим сопротивлением по сравнению с ламинарным движением.

Предложение Рейнольдса имеет физический смысл, поскольку турбулентное движение жидкости характеризуется непрерывными случайными пульсациями давления, компонент скорости и других гидродинамических величин. При этом каждая реализация турбулентного движения в одних и тех же условиях индивидуальна, т.е. процесс является случайным (недетерминированным).

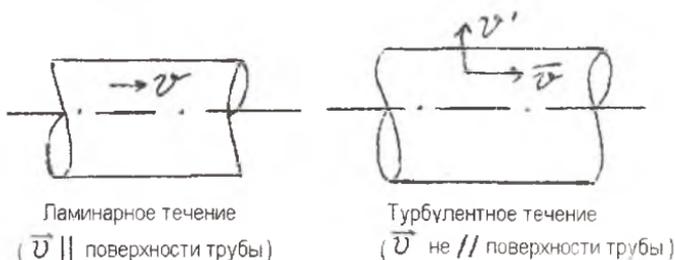


Рис. 9

Поскольку все пульсирующие величины можно разложить на средние по ансамблю реализаций турбулентного течения математические ожидания (обозначаемые черточками сверху) и собственно пульсации (обозначаемые штрихами), то и приходим к рейнولدсову представлению случайного поля:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'.$$

(Если ограничиться несжимаемой однородной жидкостью, то $\rho = \text{const}$ и, следовательно, $\rho' = 0$; $\rho = \bar{\rho}$.)

Поле осредненных величин называется *осредненным движением*, а поле мгновенных значений - *актуальным движением*. Если осредненное движение не меняется со временем, поток называется *установившимся*, или стационарным. В силу эргодического свойства стационарных случайных полей в установившемся потоке результат осреднения той или иной гидродинамической переменной по реализациям турбулентного движения

совпадает с результатом осреднения по времени для любой одной реализации.

В настоящее время турбулентное движение принято характеризовать осредненным по времени значением величин. В уравнениях сохранения массы, количества движения и энергии в потоке вязкой жидкости истинные (мгновенные) величины заменяются осредненными во времени их значениями следующим образом. Истинные величины в данной точке турбулентного потока раскладываются на осредненные и пульсационные их значения, что соответствует физическому представлению турбулентного движения. Тогда уравнения неразрывности, движения и энергии для осредненного турбулентного движения несжимаемой жидкости в общем случае получаются из исходных уравнений после замены в них истинных значений переменных осредненными их значениями и пульсациями с последующим осреднением этих параметров по времени. При введении в действие новых переменных добавляется три неизвестных: u'_x, v'_y, p' , и задача переходит в разряд неопределенных. Для устранения неопределенности и применяется усреднение по времени.

Рассмотрим решение задачи. Возьмем, например, уравнение

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x.$$

Проведя операцию осреднения, его можно записать следующим образом: $\bar{u}_x = \bar{\bar{u}}_x + \bar{u}'_x$ или $\frac{1}{T} \int_0^T u_x dt = \bar{\bar{u}}_x + \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt$ (здесь $\bar{\bar{u}}_x = \bar{u}_x$, т.к. второе осреднение по условию не меняет результата). Так как левая часть уравнения равна \bar{u}_x , то $\bar{u}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt = 0$. По аналогии $\bar{v}'_y = \frac{1}{T} \int_0^T v'_y dt = 0$; $\bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0$.

Следовательно среднее значение пульсационных составляющих равно нулю (но надо учесть, что $\frac{1}{T} \int_0^T u'^2_x dt \neq 0$; $\frac{1}{T} \int_0^T u'_x v'_y dt \neq 0$ и т.д.). Применяя вышесказанное к исходной системе уравнений (2.34), можно после определенных преобразований получить уравнения турбулентного пограничного слоя в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Здесь а) $\bar{p} = p - p'$; б) $\bar{u}_x = u_x - u'_x$; в) $\bar{v}_y = v_y - v'_y$;

$$\text{г) } \tau_{xy} = -\rho \overline{u'_x v'_y}, \text{ где } \overline{u'_x v'_y} = \frac{1}{T} \int_0^T u'_x v'_y dt, \text{ д) } \tau_{xx} = -\rho u'^2_x,$$

$$\text{где } \overline{v_x'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v_x'^2 dt.$$

Видно, что уравнения такие же, как и для ламинарного пограничного слоя, только с добавкой напряжений от турбулентных пульсаций τ_{xx} и τ_{xy} , называемых *рейнольдсовыми напряжениями*.

Для вывода уравнений турбулентного пограничного слоя надо осреднить исходные уравнения погранслоя, несколько преобразовав первое уравнение - уравнение движения (аналогично случаю ламинарного пограничного слоя).

Для этого уравнение неразрывности умножим на v_x :

$$v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0;$$

и добавим его в левую часть первого уравнения системы (2.34):

$$\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

В результате преобразований (как и в случае ламинарного погранслоя - уравнение (2.21)) первое уравнение системы (2.34) получим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v_x v_y) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial x} (v_x v_x) = 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y} (v_x v_y) = v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Проведем над обеими частями этого равенства операцию осреднения:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_x v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_x v_y}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} \quad (2.36)$$

$\overline{v_x v_x} = (\overline{v_x} + v_x') \cdot (\overline{v_x} + v_x') = \overline{v_x}^2 + 2\overline{v_x} v_x' + v_x'^2 = \overline{v_x}^2 + 2\overline{v_x} \overline{v_x'} + \overline{v_x'^2}$ (для первого члена используется правило осреднения $\overline{\overline{v_x} v_x'} = \overline{v_x} \overline{v_x'} = \overline{v_x}^2$). Так как $\overline{v_x'} = 0$, то

$$\overline{v_x v_x} = \overline{v_x}^2 + \overline{v_x'^2};$$

$$\overline{v_x v_y} = (\overline{v_x} + v_x') \cdot (\overline{v_y} + v_y') = \overline{v_x} \overline{v_y} + \overline{v_x} v_y' + \overline{v_x'} v_y + \overline{v_x' v_y'} = \overline{v_x} \overline{v_y} + \overline{v_x'} v_y + \overline{v_x} v_y' + \overline{v_x' v_y'}.$$

Так как $p = \overline{p} + p'$, то $\overline{p} = \overline{\overline{p} + p'} = \overline{p}$ (т.к. $\overline{p'} = 0$). Аналогично

$$v_x = \overline{v_x} + v_x' \text{ и } \overline{v_x} = \overline{\overline{v_x} + v_x'} = \overline{v_x}, \text{ т.к. } \overline{v_x'} = 0.$$

Подставляя значения $\overline{v_x v_x}$ и $\overline{v_x v_y}$ в уравнение (2.36), получим:

$$\frac{\partial \overline{v_x}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x} \overline{v_y}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{v_x'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial y} \quad (2.37)$$

Учитывая уравнение неразрывности в осредненном виде

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} = 0, \quad (2.38)$$

можно уравнение движения (2.37) записать так:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{v_x^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v_x v_y}}{\partial y}. \quad (2.39)$$

С этой целью левая часть уравнения (2.37) преобразовывается с учетом уравнения неразрывности следующим образом:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \bar{v}_x \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right) = \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}.$$

Уравнения (2.38) и (2.39) входят в систему дифференциальных уравнений Рейнольдса осредненного турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости, которую можно окончательно представить в виде

$$\begin{cases} \rho \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \rho \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{v_x^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v_x v_y}) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Эта система имеет одинаковый вид как для основного течения жидкости, так и для течения жидкости в погранслое.

Сопоставим первое уравнение системы (2.40) с уравнением движения вязкой жидкости в напряжениях, которое выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right).$$

В случае одномерного стационарного движения и отсутствия массовых сил это уравнение имеет вид

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}. \quad (2.41)$$

Сравнивая уравнение Рейнольдса с уравнением движения в напряжениях, можно представить себе правую часть уравнения Рейнольдса как результат подстановки в уравнение в напряжениях вместо величин p_{xx} и p_{xy} суммы вязких напряжений, определяемых обобщенным законом Ньютона, и дополнительных турбулентных напряжений p'_{xx} и p'_{xy} , возникших за счет наличия в потоке пульсаций, т.е.

$$p_{xx} = -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + p'_{xx}, \quad p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) + p'_{xy}.$$

В нашем случае

$$a) \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} \quad (\text{т.к. в уравнении Прандтля пограничного слоя пропадает}$$

член $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ при стремлении $Re_\infty \rightarrow \infty$).

$$p'_{xx} = \tau_{xx} = -\rho \overline{v_x^2}. \quad \text{Тогда} \quad \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{v_x^2});$$

б) $\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial p'_{xy}}{\partial y}$ (т.к. в уравнении Прандтля пограничного слоя про-
падает член $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$ при стремлении $Re_\infty \rightarrow \infty$). $p'_{xy} = \tau_{xy} = -\overline{\rho v'_x v'_y}$. Тогда
 $\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{\rho v'_x v'_y} \right)$.

Таким образом получаем полную тождественность уравнений движения в напряжениях (2.41) и Рейнольдса (2.40).

В общем случае трехмерного движения эти дополнительные турбулентные напряжения p'_{xx} , p'_{xy} и т.д. образуют так же, как и вязкие напряжения, симметричный тензор второго ранга:

$$P' = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v'^2_x} & -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v'_x v'_z} \\ -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v'^2_y} & -\overline{\rho v'_y v'_z} \\ -\overline{\rho v'_x v'_z} & -\overline{\rho v'_y v'_z} & -\overline{\rho v'^2_z} \end{bmatrix}$$

называемый тензором турбулентных напряжений с компонентами $p'_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$, которые называются рейнольдсовыми напряжениями.

Итак, приходим к выводу: уравнения осредненного турбулентного движения могут быть написаны в той же форме, что и уравнения действительного движения, если только, помимо вязких (ньютоновских) напряжений, учесть еще дополнительные турбулентные напряжения.

Назовем *тензором полного (суммарного) напряжения* тензор P , равный

$$P = -\bar{p}E + 2\mu\bar{S} + P'$$

и имеющий компоненты

$$p_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \left(-\overline{\rho v'_i v'_j} \right)$$

Не только вид уравнений движения, но и вид уравнений импульсов (интегральное соотношение Кармана) в турбулентном пограничном слое остается таким же, как и для ламинарного пограничного слоя:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'_w}{v_\infty} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2},$$

только значения δ , δ^* , δ^{**} и τ_w (напряжение трения на твердой стенке) будут иными:

а) толщина вытеснения масс в пограничном турбулентном слое

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{v}_x}{v_\infty} \right) dy;$$

б) толщина потери импульса в турбулентном погранслое

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\bar{v}_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{\bar{v}_x}{v_\infty} \right) dy;$$

в) напряжение трения на твердой стенке $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)_{y=0}$.

Граничные условия будут следующими:

а) на стенке: $y = 0$; $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$; $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \approx \frac{v_\infty - \bar{v}_x}{\ell}$;

б) на внешней границе турбулентного пограничного слоя:

$$y = \delta$$
; $\bar{v}_x = v_\infty$; $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} = 0$.

Необходимо учесть, что уравнение Эйлера $-\rho \frac{\partial p}{\partial x} = \rho v'_x v'_x$ в случае обтекания плоской пластины преобразуется к виду $v'_{x\infty} = 0$ (т.к. в этом случае $v_\infty = v_{x,\infty}$ постоянна вдоль оси X и тогда $v'_{x\infty} = v'_{x,\infty} = 0$ - нет изменения скорости вдоль пластины) и $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Для плоской пластины уравнение импульсов имеет вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}. \quad (2.42)$$

Рассмотрим главную особенность турбулентного движения около твердой стенки, так называемую двухслойную схему пристенной турбулентности [7]. Расположим ось координат так, чтобы ось x была направлена вдоль пластины, а ось y - по нормали к ней (рис. 10). При такой идеализации течения, когда поток совершает плоское стационарное осредненное движение при отсутствии массовых сил, любые два сечения, перпендикулярные линиям тока, идентичны в кинематическом и динамическом смысле. Это позволяет полагать все производные по X равными нулю, компоненты скорости $v_y = v_z$, а составляющая скорости v_x и другие элементы движения зависят только от Y: $v_x = v_x(y)$; $p = p(y)$.

Сравним между собой ламинарное и осредненное турбулентное движения такого типа.



Рис. 10

Замечая, что $u_x = u_x(y)$; $u_y = u_z = 0$; $p = p(y)$, получим уравнения Навье - Стокса ламинарного движения в виде

$$\begin{aligned} \text{а) } \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= 0; \\ \text{б) } \frac{dp}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Проинтегрируем эти уравнения, преобразовав (2.43) к виду

$$\text{а) } \frac{d}{dy} \mu \frac{du_x}{dy} = 0, \quad \mu \frac{du_x}{dy} \Big|_{y=0} = C_1 = \tau_w - \text{здесь в качестве постоянной интегрирования принято напряжение трения на стенке;}$$

$$\text{б) } p = \text{const.}$$

После повторного интегрирования уравнения (2.43) распределение скоростей $u_x(y)$ в ламинарном потоке будет:

$$u_x = \frac{\tau_w}{\mu} y + C_2.$$

При $y=0$ $u_x=0$, т.е. на стенке скорость обращается в нуль, что дает постоянную интегрирования $C_2=0$.

Тогда получаем следующее распределение скоростей $u_x(y)$ в ламинарном потоке: $u_x = \frac{\tau_w}{\mu} y$.

Это свидетельствует о *линейном* профиле скоростей в ламинарном потоке и о постоянстве напряжения трения между любыми слоями в осредненном движении, равного напряжению трения на стенке:

$$\mu \frac{du_x}{dy} = \text{const} = \tau_w.$$

Перейдем теперь к *турбулентному движению*, описываемому в нашем случае уравнением Рейнольдса. Будет считать, что для безграничной пластины все параметры потока не зависят от x . Отбросив черточки над осредненными величинами скоростей (поскольку рассматривается осредненное движение), получим уравнение Рейнольдса осредненного движения несжимаемой вязкой жидкости.

В исходном виде уравнение Рейнольдса движения несжимаемой вязкой жидкости имеет вид

$$\rho \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \rho \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u_x^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u_x u_y}).$$

Так как все производные по X равны нулю (поскольку все параметры потока не зависят от X); $u_y=0$ для тонкой пластины, то, опуская черточки над u_x , получаем

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u_x u_y}) = 0$$

ИЛИ

$$\frac{d}{dy} \left[\mu \frac{dv_x}{dy} + \tau \right] = 0,$$

где $\tau = -\overline{\rho v'_x v'_y}$ - напряжение турбулентного трения.

После интегрирования получим

$$\mu \frac{dv_x}{dy} + \tau = C_3.$$

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся граничными условиями на стенке, т.е. при $y=0$. На стенке напряжение турбулентного трения $\tau = -\overline{\rho v'_x v'_y}$ равно нулю, т.к. на стенке не могут существовать нормальные к ней скорости пульсаций v'_y . Тогда при $y=0$

$$C_3 = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = \tau_w$$

и, следовательно, получаем

$$\mu \frac{dv_x}{dy} + \tau = \tau_w. \quad (2.44)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое. Напряжение вязкого трения $\mu \frac{dv_x}{dy}$ будет иметь значительную величину в непосредственной близости от стенки, и с увеличением расстояния от стенки оно будет убывать. Напряжение турбулентного трения τ , наоборот, вблизи стенки мало и по мере удаления от стенки растет. Область вблизи стенки, в которой напряжения полностью определяются вязким трением, а турбулентное трение пренебрежимо мало, называют *ламинарным подслоем* (см. рис. 10).

В целях изучения профиля скоростей в области преобладания турбулентных напряжений трения рассмотрим область, в которой $\mu \frac{dv_x}{dy}$ становится пренебрежимо малой величиной по сравнению с τ . Тогда в соответствии с уравнением (2.4)

$$\tau = \tau_w = -\overline{\rho v'_x v'_y}. \quad (2.45)$$

По аналогии с вязким трением турбулентное напряжение можно представить в виде

$$\tau = A \frac{dv_x}{dy} = \rho \varepsilon \frac{dv_x}{dy},$$

где A и $\varepsilon = \frac{A}{\rho}$ - аналоги динамического и кинематического коэффициентов вязкости, будем называть их соответствующими коэффициентами турбулентного переноса. По своей физической сущности коэффициенты A и ε , являясь аналогами коэффициентов молекулярного переноса μ и ν , существенно отличаются от последних. В то время как коэффициенты молекулярного переноса (μ и ν) однозначно определяются физическими свойствами жидкостей и газов и их состоянием (температурой и давлением), но не за-

висят от динамических свойств потоков, коэффициенты турбулентного переноса определяются прежде всего статистическими свойствами движения.

Чтобы вывести формулу для турбулентного напряжения трения, Прандтль использовал некоторые физические предпосылки и теорию размерностей. Можно считать, что по аналогии с вязким трением величина турбулентного трения зависит от градиента скорости $\frac{dv_x}{dy}$, является функцией расстояния y от стенки и зависит от плотности жидкости ρ (формула (2.45)). Тогда формула для турбулентного напряжения трения, называемая формулой Прандтля, имеет вид

$$\tau = \tau_w = \rho \ell^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2, \quad (2.46)$$

где ℓ - длина перемешивания, характеризующая собой масштаб турбулентности (т.е. средний размер связанных объемов жидкостей, участвующих в турбулентном переносе).

Замечая, что расстояние "y" данной точки от твердой стенки представляет собой единственную характерную для этой точки в безграничном потоке длину, Прандтль предложил наиболее простую зависимость

$$\ell = \alpha \cdot y,$$

где α - коэффициент пропорциональности (числовая константа, определяемая из опыта). Необходимо отметить, что эта формула имеет место лишь в *пристеночной* области. Подставив эту зависимость в формулу (2.46), получим

$$\tau = \tau_w = \alpha^2 \rho y^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2.$$

Решая это уравнение относительно $\left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2$ и интегрируя по "y", получим профиль скоростей при турбулентном движении:

$$v_x = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C. \quad (2.47)$$

Этот так называемый логарифмический профиль скоростей в турбулентном потоке существенно отличается от ламинарного *линейного* распределения скоростей вблизи стенки.

Так как последняя формула была выведена в предположении, что исследуется движение на некотором расстоянии от стенки, то она может и не удовлетворяться при $y=0$, и, следовательно, нельзя находить произвольную постоянную "C" из граничных условий на стенке. Действительно, при $y = 0$ скорость v_x должна быть равна нулю, а по уравнению при $y=0$ будет $v_x \rightarrow \infty$. Поэтому для определения постоянной интегрирования "C" приходится выделять вблизи твердой границы тонкий "вязкий под-

слой" с линейным профилем скоростей, а затем произвести сращивание логарифмического решения с линейным.

Согласно прежним рассуждениям, будем искать такое расстояние от стенки $y=\delta_n$, для которого при $y<\delta_n$ существенно преобладает вязкое трение, а при $y>\delta_n$ - турбулентное трение, т.е. при $y<\delta_n$ движение будет ламинарным, а при $y>\delta_n$ - турбулентным. Величина δ_n называется толщиной ламинарного вязкого подслоя. В действительности такой резкой границы между пристеночным подслоем ламинарного движения и областью турбулентного движения не существует. С физической точки зрения весь поток можно разделить по вертикали к пластине на три области: 1) область, непосредственно прилегающую к стенке с резким преобладанием вязкого трения; 2) область на некотором удалении от стенки с преобладанием турбулентного трения; 3) промежуточную или переходную область, в которой вязкое (молекулярное) и турбулентное трение соизмеримы. Эксперимент подтверждает наличие этих трех областей.

Если для удобства ограничиться все-таки наличием лишь двух областей: вязкого подслоя и турбулентного ядра, и воспользоваться методом размерностей, считая толщину подслоя степенной одночленной функцией от величин, ее определяющих - вязкости μ , плотности среды ρ и напряжения трения на стенке τ_w , то получим

$$\delta_n = \alpha \mu^a \cdot \rho^b \cdot \tau_w^c.$$

Используя размерности μ , ρ , τ_w и имея в виду, что α - безразмерная константа, будем иметь уравнение для размерностей в следующем виде:

$$[M] = \left[\frac{H \cdot c}{M^2} \right]^a \cdot \left[\frac{K \Gamma}{M^3} \right]^b \cdot \left[\frac{H}{M^2} \right]^c$$

или

$$[M] = \left[\frac{K \Gamma M}{c^2} \cdot \frac{c}{M^2} \right]^a \cdot \left[\frac{K \Gamma}{M^3} \right]^b \cdot \left[\frac{K \Gamma M}{c^2 \cdot M^2} \right]^c = \left[\frac{K \Gamma}{c \cdot M} \right] \cdot \left[\frac{K \Gamma}{M^3} \right]^b \cdot \left[\frac{K \Gamma}{c^2 \cdot M} \right]^c.$$

Сравнивая показатели степеней в уравнении справа и слева (приравнивая их), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \text{для } [M] \quad 1 &= -a - 3b - c, \\ \text{для } [K\Gamma] \quad 0 &= a + b + c, \\ \text{для } [c] \quad 0 &= -a - 2c. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение: $a = 1$, $b = c = -1/2$. Отсюда окончательно получим, что толщина ламинарного подслоя равна

$$\delta_n = \alpha \frac{\mu}{\sqrt{\rho \tau_w}} = \alpha \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w / \rho}}.$$

Для получения общепринятых формул введем следующие обозначения:

$$v_* = \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}; \quad v_* = \ell_* = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w / \rho}}. \quad (2.48)$$

Величина v_* , имеющая размерность скорости, по своей природе состоит из динамических величин: напряжения трения и плотности, и называется *динамической скоростью*. Величина l_* , имеющая размерность длины, - *динамической длиной*. Для облегчения запоминания этих важных величин заметим, что если принять динамическую длину и динамическую скорость за масштабы длин и скоростей, то составленное с их помощью число Рейнольдса ($Re = \frac{v_* l_*}{\nu}$) всегда равно единице.

Если воспользоваться введенными обозначениями (2.48), то толщина подслоя

$$\delta_n = \alpha \frac{\nu}{v_*} = \alpha l_* = \alpha \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}, \quad (2.49)$$

Полагая, что в подслое величина скорости есть линейная функция от "у", и пользуясь формулой $v_x = \frac{\tau_w}{\mu} y$ - определенной для ламинарного потока вдоль пластины, получим значение скорости на границе подслоя v_{xn} , равной

$$v_{xn} = \frac{\tau_w}{\mu} \delta_n = \alpha \frac{\tau_w}{\mu} \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$$

или

$$v_{xn} = \alpha \sqrt{\tau_w/\rho} = \alpha v_*.$$

Таким образом, получены граничные условия (при $y = \delta_n = \alpha l_*$; $v_x = v_{xn} = \alpha v_*$), и теперь можно найти постоянную интегрирования "С", введя эти условия в формулу (2.47) логарифмического профиля скоростей при турбулентном движении:

$$v_{xn} = \frac{v_*}{\alpha} \ln \delta_n + C.$$

Отсюда

$$C = v_{xn} - \frac{v_*}{\alpha} \ln \delta_n = v_* \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \frac{\nu}{v_*} \right) = v_* \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right) - \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{\nu}{v_*}.$$

Подставив значение "С" в формулу (2.47), получим

$$v_x = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + v_* \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right) - \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{\nu}{v_*}.$$

Разделив обе части равенства на v_* , получим

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\nu}{v_*} + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right).$$

Так как $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, то

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \left(\ln y - \ln \frac{\nu}{v_*} \right) + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right)$$

или окончательно

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y v_*}{\nu} + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right).$$

Переходя от натуральных к десятичным логарифмам, будем иметь

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{2.303}{\alpha} \lg \frac{y v_*}{\nu} + \left(\alpha - \frac{2.303}{\alpha} \lg \alpha \right).$$

Таким образом, учитывая, что α и α - константы, получим закон распределения скоростей в турбулентном потоке:

$$\frac{v_x}{v_*} = A \cdot \lg \frac{y v_*}{\nu} + B,$$

где A и B - некоторые постоянные, определяемые через универсальные постоянные турбулентного движения α и α следующим образом:

$$A = \frac{2.303}{\alpha}; \quad B = \alpha - \frac{2.303}{\alpha} \lg \alpha.$$

2.7. Математическая модель турбулентного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе

При ламинарном движении полученные теоретические решения для труб хорошо совпадают с результатами опытов. Для турбулентного движения в трубах точного теоретического решения не существует, и все закономерности получены либо из опытов, либо имеют полуэмпирический характер.

Рассмотрим профили скоростей при турбулентном движении в цилиндрической трубе. Между законом сопротивления и характером профиля скоростей в трубе существует однозначная связь, т.е. каждому профилю скоростей соответствует свой закон сопротивления, и наоборот.

Для получения закона распределения скоростей по радиусу трубы будем полагать, что так же, как и для плоской стенки, в непосредственной близости от стенки трубы имеет место ламинарный подслой, в котором скорость - линейная функция от "y":

$$v_x = \frac{\tau_w}{\mu} y = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{\rho}{\mu} y = v_*^2 \frac{y}{\nu} = v_* \frac{y v_*}{\nu},$$

и что профиль скоростей в остальной части трубы подчиняется закону

$$\frac{v_x}{v_*} = A \cdot \lg \frac{y v_*}{\nu} + B,$$

где A и B выражаются через универсальные газовые постоянные α и α .

Известный ученый Никурадзе из анализа опытов с турбулентным потоком в круглой трубе при числах $Re = \frac{\bar{v} D}{\nu}$ (где \bar{v} - средняя расходная скорость, D - диаметр трубы), достигавших $3 \cdot 10^6$, нашел численные значения

постоянных $\alpha=0.4$ и $\alpha=11.5$. Таким образом был получен логарифмический закон профиля скоростей:

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* y}{\nu} + 5.5. \quad (2.50)$$

Из опытов установлено, что нижний предел $\frac{v_* y}{\nu} \approx 5.0$, а верхнее предельное значение ≈ 70 . Это означает, что в пределах $5 \leq \frac{v_* y}{\nu} \leq 70$ имеет место переходная область, в которой вязкое и турбулентное трения соизмеримы. При $5 < \frac{v_* y}{\nu}$ будет только вязкое (или ламинарное) трение, а при $\frac{v_* y}{\nu} > 70$ только турбулентное трение. Далее следует, что толщина ламинарного подслоя с учетом формулы (2.49) может быть определена из условия

$$\delta_n = 11.5 \frac{\nu}{v_*}.$$

Измерения показали, что вблизи центра трубы распределение скоростей несколько отлично от логарифмического, но это отличие не очень существенно и в практических расчетах не учитывается. Можно считать, что логарифмический профиль скоростей является *универсальным*, пригодным для широкого диапазона чисел Re.

Вычислим далее так же, как и для ламинарного движения, максимальную v_{\max} и среднюю \bar{v} скорости и расход жидкости при логарифмическом законе распределения скоростей. Очевидно, максимальная скорость v_{\max} будет на оси трубы, т.е. при $y=R$. Подставив это значение в формулу для (2.50), получим

$$\frac{v_{\max}}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* R}{\nu} + 5.5.$$

Вычитая из этой формулы значение $\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* y}{\nu} + 5.5$, получим так называемый *дефект скорости*:

$$\frac{v_{\max} - v_x}{v_*} = -5.75 \cdot \lg \frac{y}{R}$$

или

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} + 5.75 \cdot \lg \frac{y}{R} = \frac{v_{\max}}{v_*} + \frac{5.75}{2.303} \ln \frac{y}{R} = \frac{v_{\max}}{v_*} + 2.5 \cdot \ln \frac{y}{R} = \frac{v_{\max}}{v_*} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y}{R}.$$

Здесь $\alpha=0.4$ по Никурадзе. Тогда $\frac{v_{\max} - v_x}{v_*} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \lg \frac{y}{R}$.

Величина средней скорости \bar{v} может быть определена как отношение объемного расхода Q к площади поперечного сечения трубы, т.е.

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_x 2\pi(R-y) dy = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R v_x (R-y) dy = 2 \int_0^1 v_x \left(1 - \frac{y}{R}\right) \left(\frac{y}{R}\right) dy.$$

Подставив под интеграл величину скорости по формуле

$$v_x = v_{\max} + \frac{v_x}{\alpha} \lg \frac{y}{R}$$

и разделив обе части выражения для \bar{v} на v_x , получим

$$\frac{\bar{v}}{v_x} = \frac{v_{\max}}{v_x} + \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \ln \frac{y}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{v_{\max}}{v_x} - 3.75.$$

Таким образом, имеем зависимость

$$\frac{v_{\max} - \bar{v}}{\bar{v}} = 3.75.$$

Если взять выражение для $\frac{v_{\max}}{v_x}$ и разделить его на выражение для $\frac{\bar{v}}{v_x}$,

то получим отношение максимальной скорости (на оси трубы) к ее среднему (расходному) значению по сечению трубы:

$$\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{5.75 \lg \frac{v_x R}{v} + 5.5}{\frac{v_{\max}}{v_x} - 3.75}.$$

В отличие от ламинарного движения в круглой трубе, при котором $\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = 2$, в турбулентном движении это отношение уменьшается с ростом числа Re от 1.3 (при Re = 5000) до 1.15 (при Re = 3·10⁶). При Re → ∞ указанное отношение как бы стремится к единице. Это говорит о резком отличии формы профиля скоростей в турбулентном движении от параболы скоростей в ламинарном движении и объясняется тем, что профили скоростей при переходе от ламинарного движения к турбулентному *становятся более полными*, причем *степень их заполненности* возрастает с увеличением числа Re.

Более простым, но далеко не универсальным профилем скоростей при турбулентном движении в трубе является так называемый степенной профиль:

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n.$$

Этот степенной профиль скоростей при числах Re ≈ 5·10⁴ имеет вид

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

и получил название закона *одной седьмой*.

Экспериментально было показано, что величина показателя степени "n" зависит от числа Re и с его увеличением падает. Оказалось возможным каждому числу Re подобрать такой показатель степени "n", чтобы полу-

ченный профиль скоростей наилучшим образом совпадал с результатами эксперимента.

Отношение максимальной к средней по сечению скорости при степенном профиле может быть найдено следующим образом. Определив \bar{v} по формуле

$$\bar{v} = 2v_{\max} \int_0^1 \frac{v_x}{v_{\max}} \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right),$$

найдем

$$\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 2 \int_0^1 \left(\frac{y}{R}\right)^n \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

или окончательно

$$\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Результаты расчетов при различных "n" можно свести в таблицу:

n	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$\frac{v_{\max}}{\bar{v}}$	1.264	1.224	1.194	1.173	1.156

Необходимо отметить, что отношения v_{\max}/\bar{v} , полученные по степенному и логарифмическому законам, практически совпадают.

Аналогично обычному степенному закону можно ввести степенное распределение скоростей в виде

$$\frac{v_x}{v_*} = A \left(\frac{yv_*}{v}\right)^n.$$

Значение коэффициента A можно определить из граничных условий на границе ламинарного подслоя: при $y=\delta_n$ скорость $v_x=v_{x_n}$ и постоянная $A = \frac{v_{x_n}}{v_*} \left(\frac{v}{\delta_n v_*}\right)^n$. Но так как $\frac{v_{x_n}}{v_*} = \alpha$, а $\delta_n = \alpha \frac{v}{v_*}$, то $\frac{\delta_n v_*}{v} = \alpha$ и тогда $A = \alpha \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{1-n}$.

Зная величину α и задавая показателем n, можно получить численное значение постоянной A. Если $\alpha=11.5$, то при $n=1/7$ $A=8.74$, и следовательно,

$$\frac{v_x}{v_*} = 8.74 \left(\frac{yv_*}{v}\right)^{1/7}.$$

Надо отметить, что такое распределение скоростей при $n=1/7$ хорошо совпадает с экспериментом лишь в области $Re \leq 10^5$, в то время как логарифмический профиль скоростей, который является универсальным законом, дает хорошее совпадение с экспериментом во всем диапазоне скоростей.

Рассмотрим законы сопротивления при турбулентном движении в трубах. Как уже было сказано, между профилем скоростей в трубе и зако-

ном сопротивления существует однозначная связь, т.е. каждому профилю скоростей соответствует свой закон сопротивления, и наоборот.

Блазиус предложил степенной закон сопротивления в виде

$$\lambda = \frac{a}{\text{Re}^m},$$

где λ - коэффициент сопротивления; $a = 0.3164$; $m = 0.25$ (при $\text{Re}_{\text{кр}} < \text{Re} < 5 \cdot 10^4$).

Более поздние опыты показали, что численные значения в законе сопротивления зависят от числа Re . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим связь динамической скорости v с коэффициентом сопротивления λ . При равномерном установившемся движении жидкости в трубе перепад ΔP полностью определяется величиной τ_w напряжения трения на стенке, так что безотносительно к характеру движения жидкости в трубе (ламинарному или турбулентному) можно написать следующее равенство:

$$\Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau_w \cdot \pi D \ell, \quad (2.51)$$

означающее, что движущийся перепад уравнивается сопротивлением трения. С другой стороны,

$$\Delta P = \lambda \frac{\ell}{D} \cdot \rho \frac{\bar{v}^2}{2}. \quad (2.52)$$

В этих формулах ΔP - перепад давления на участке трубы длиной ℓ ; D - диаметр трубы; \bar{v} - средняя скорость.

Подставив ΔP из формулы (2.52) в формулу (2.51), получим

$$\tau_w \cdot \pi D \ell = \Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \lambda \frac{\pi}{4} \ell \cdot D \cdot \rho \frac{\bar{v}^2}{2};$$

откуда величина напряжения на стенке τ_w равна

$$\tau_w = \frac{1}{4} \frac{D}{\ell} \Delta P = \frac{1}{2} \frac{R}{\ell} \Delta P$$

$$\text{или } \tau_w = \lambda \rho \frac{\bar{v}^2}{8}.$$

Из последней формулы следует, что

$$\frac{\tau_w}{\rho} = v_*^2 = \frac{\lambda}{8} \bar{v}^2,$$

$$\text{тогда } \frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}; \quad \frac{v}{\bar{v}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}.$$

Если применить формулу степенного профиля скорости $\frac{v_x}{v_{\text{max}}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n$

для границы ламинарного подслоя, где при $y = \delta_n = \alpha \frac{v}{v_*}$ скорость

$v_x = v_{*n} = \alpha \cdot v_*$, то получим

$$\frac{\alpha v_*}{v_{\text{max}}} = \left(\frac{\alpha v}{v_* R}\right)^n,$$

откуда
$$\frac{v_*}{v_{\max}} = \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{v_* R} \right)^n.$$

После преобразования найдем:

$$\frac{v_*}{\bar{v}} \frac{\bar{v}}{v_{\max}} = \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{v_* R} \right)^n = 2^n \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{2v_* R} \right)^n = 2^n \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{2\bar{v}R} \right)^n \left(\frac{\bar{v}}{v_*} \right)^n.$$

Отсюда
$$\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 2^n \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{2\bar{v}R} \right)^n \left(\frac{\bar{v}}{v_*} \right)^{n+1}.$$

Воспользовавшись выражениями, полученными ранее:

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}; \quad \frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

после простых преобразований получим

$$\lambda = \frac{2^{\frac{(n+1)}{n+1}} \alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{1}{n+1}}}{\text{Re}^{\frac{2n}{n+1}}}.$$

Сравнивая это выражение с формулой Блазиуса $\lambda = \frac{a}{\text{Re}^m}$, получим

$$\begin{cases} a = 2^{\frac{(n+1)}{n+1}} \alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}, \\ m = \frac{2n}{n+1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что закону сопротивления Блазиуса, в котором $m=1/4$, соответствует закон одной седьмой для профиля скорости.

Более универсальным, пригодным для всего диапазона чисел Re является логарифмический закон сопротивления. Он соответствует логарифмическому профилю скоростей и легко может быть получен.

Представим формулу для максимальной скорости турбулентного движения при логарифмическом профиле скоростей

$$\frac{v_{\max}}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* R}{v} + 5.5$$

в виде
$$\frac{v_{\max} - \bar{v}}{v_*} + \frac{\bar{v}}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* R}{v} + 5.5 = 5.75 \cdot \lg \left(\frac{\bar{v} D}{v} \cdot \frac{v_*}{2\bar{v}} \right) + 5.5.$$

Так как $\frac{v_{\max} - \bar{v}}{v_*} = 3.75$, а $\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$, то

$$\begin{aligned} 3.75 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} &= 5.75 \lg \left(\text{Re} \frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}} \right) + 5.5 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{5.75}{2\sqrt{2}} \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - \frac{5.75}{2\sqrt{2}} \lg(4\sqrt{2}) + \frac{5.5 - 3.75}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &\approx 2 \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 2 \cdot 0.7 + 0.6 \approx 2 \cdot \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8. \end{aligned}$$

Окончательно логарифмический закон сопротивления имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_1 \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) + B_1,$$

где $A_1 \approx 2$, $B_1 \approx -0.8$.

Многочисленные опыты Нуссельта, Никурадзе и др. подтверждают эту формулу с округленными коэффициентами:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8.$$

Эта формула для использования неудобна, так как зависимость λ от числа Re дана в неявном виде. Никурадзе предложил пользоваться следующей явной зависимостью:

$$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{\text{Re}^{0.237}}$$

(для напоминания: при ламинарном движении $\lambda = 64/\text{Re}$).

Один из вариантов расчета установившегося движения жидкости в круглой трубе таков:

а) задаются длина ℓ и диаметр трубы D , кинематический коэффициент вязкости жидкости ν и потребный расход жидкости Q ,

б) по расходу и диаметру определяем среднюю скорость $\bar{v} = \frac{Q}{\pi D^2/4}$ и

$$\text{число Рейнольдса } \text{Re} = \frac{\bar{v} \cdot D}{\nu},$$

в) находим коэффициент сопротивления: $\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{\text{Re}^{0.237}}$,

г) рассчитываем перепад давления ΔP на заданном участке трубы длины ℓ :

$$\Delta P = \lambda \cdot \frac{\ell}{D} \cdot \rho \frac{\bar{v}^2}{2},$$

д) находим сопротивление трения $\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{v}^2$ и динамическую скорость

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \bar{v},$$

е) определяем логарифмический профиль скоростей в трубе по формуле

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \lg \frac{v_* \cdot y}{\nu} + 5.5$$

Задача решена.

Наряду с законами сопротивления, соответствующими степенному профилю скоростей $\frac{v_x}{v_{\text{max}}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n$ и логарифмическому профилю скоростей

$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \lg \frac{v_* \cdot y}{\nu} + 5.5$, *практический интерес* представляет степенной профиль

вида

$$\frac{v_x}{v_*} = A \left(\frac{v_* \cdot y}{\nu} \right)^n,$$

$$\text{где } A = \alpha^{1-n} = \left(\frac{v_{\text{ср}}}{v} \right)^{1-n} = \left(\frac{\delta_n v_*}{v} \right)^{1-n}.$$

Запишем данную зависимость для оси трубы ($y=R$):

$$\frac{v_{\text{max}}}{v_*} = A \left(\frac{R v_*}{v} \right)^n = A \left(\frac{v_{\text{max}} R}{v} \right)^n \left(\frac{v_*}{v_{\text{max}}} \right)^n,$$

$$\left(\frac{v_*}{v_{\text{max}}} \right)^{n+1} = \frac{1}{A} \left(\frac{v_{\text{max}} R}{v} \right)^n.$$

Вспомоная выражение для $v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, получим

$$\left(\frac{\tau_w}{\rho v_{\text{max}}^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{\text{Re}_{\text{max}}^n}{A}, \text{ где } \text{Re}_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}} R}{v}.$$

Тогда закон сопротивления будет иметь вид

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\text{max}}^2} = \frac{1}{A^{\frac{2}{n+1}}} \cdot \text{Re}_{\text{max}}^{\frac{-2n}{n+1}}.$$

В результате получаем для так называемого коэффициента местного сопротивления

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_{\text{max}}^2}{2}} = \frac{2}{A^{\frac{2}{n+1}}} \cdot \text{Re}_{\text{max}}^{\frac{-2n}{n+1}} = \zeta \cdot \text{Re}_{\text{max}}^{\frac{-2n}{n+1}},$$

$$\text{где } \zeta = \frac{2}{A^{\frac{2}{n+1}}}.$$

Для наиболее распространенного профиля скоростей - закона одной седьмой ($n=1/7$; $A=8.74$) - закон сопротивления будет иметь вид

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_{\text{max}}^2}{2}} = 0.045 \cdot \text{Re}_{\text{max}}^{-1/4}, \quad (2.53)$$

или

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\text{max}}^2} = 0.0225 \cdot \text{Re}_{\text{max}}^{-1/4}.$$

В отличие от предыдущих законов сопротивления, в которых дана зависимость $\lambda(\text{Re})$, в формуле (2.53) представлена зависимость местного ко-

эффициента сопротивления $C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_{\text{max}}^2}{2}}$ от числа Рейнольдса.

Практика показывает, что законы сопротивления при турбулентном движении в трубах круглого сечения можно использовать и для расчета потерь в трубах любого поперечного сечения, если число Re выражать через гидравлический радиус $\text{Re}_r = \frac{R_r \cdot \bar{v}}{v}$, где $R_r = \frac{S}{\Pi}$, S - площадь поперечного сечения трубы, Π - его периметр.

2.8. Математическая модель турбулентного обтекания пластины вязкой жидкостью

В основу полуэмпирической теории турбулентного пограничного слоя положена аналогия между турбулентным движением жидкости в трубе и в пограничном слое на плоской стенке. При рассмотрении задачи о движении жидкости в трубе и в ламинарном пограничном слое на стенке было установлено, что:

- а) давление зависит от продольной координаты и не зависит от радиуса трубы и от расстояния по нормали к стенке в пограничном слое;
- б) скорости на стенке в обоих случаях равны нулю;
- в) в трубе скорость достигает наибольшего своего значения на оси, а в пограничном слое на стенке – на его внешней границе.

Отсюда можно заключить, что радиусу трубы и скорости на оси в трубе соответствует толщина слоя δ и скорость v_∞ на внешней границе в пограничном слое на стенке. Эти соотношения можно применить и к осредненному турбулентному движению. Тогда профили скоростей в турбулентном пограничном слое на пластине могут быть представлены в виде степенного или логарифмического законов, полученных ранее для труб.

- 1). Найдем сопротивление продольно обтекаемой пластины, воспользовавшись степенным законом

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n.$$

Введя обозначение $\eta_1 = \frac{y}{\delta}$, получим величину δ^{**} , необходимую для уравнения импульсов:

$$\begin{aligned} \delta^{**} &= \delta \int_0^1 \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_\infty} - \frac{v_x^2}{v_\infty^2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 (\eta_1^n - \eta_1^{2n}) d\eta_1 = \\ &= \delta \left(\frac{\eta_1^{n+1}}{n+1} - \frac{\eta_1^{2n+1}}{2n+1}\right) \Big|_0^1 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \delta. \end{aligned}$$

При $n=1/7$, т.е. при законе одной седьмой $\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$, получим

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta.$$

Для установления связи между τ_w и δ воспользуемся степенным законом сопротивления, полученным для турбулентного движения в трубе.

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\max}^2} = 0.0225 \cdot \text{Re}_{\max}^{-1/4}.$$

Заменив в этом уравнении R на δ и v_{\max} на v_∞ , получим

$$\tau_w = 0.0225\rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty \delta}{\nu}\right)^{-1/4}.$$

Подставив полученные выражения для δ^{**} и τ_w в уравнение импульсов (2.42), будем иметь:

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{v_\infty \delta}{\nu}\right)^{-1/4}.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\delta^{5/4} d\delta = \frac{72}{7} \cdot 0.0225 \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/4} dx.$$

Теперь проинтегрируем его, используя следующее граничное условие: при $x=0$ $\delta=0$, означающее, что турбулентный пограничный слой начинается с передней кромки пластины.

$$\frac{\delta^{5/4}}{5/4} = 0.232 \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/4} \cdot x + C.$$

При $x=0$ $\delta=0$, следовательно, $C=0$, и тогда

$$\delta^{5/4} = 0.29 \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/4} \cdot x; \quad \delta = (0.29)^{4/5} \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/5} \cdot x^{4/5},$$

или окончательно получим

$$\delta = 0.37 \cdot x \cdot \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/5} = 0.37 \cdot \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/5} \cdot x^{4/5}$$

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta = 0.036x \cdot \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/5} = 0.036 \cdot \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/5} \cdot x^{4/5}.$$

Видно, что для турбулентного пограничного слоя характерные толщины слоя пропорциональны $x^{4/5}$, в то время как для ламинарного пограничного слоя они пропорциональны \sqrt{x} (см. формулу $\delta = \sqrt{30 \frac{v_\infty x}{\nu}}$ для ламинарного подслоя). Следовательно, турбулентный слой растет по x более интенсивно, чем ламинарный. Зная δ , найдем теперь напряжение трения τ_w :

$$\tau_w = 0.0225\rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty \delta}{\nu}\right)^{-1/4} = 0.0225 \cdot (0.37)^{-1/4} \cdot \rho v_\infty^2 \left[\frac{v_\infty}{\nu} \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{-1/5}\right]^{-1/4} \cdot (x^{4/5})^{-1/4};$$

$$\tau_w = 0.0288 \left(\frac{v_\infty x}{\nu}\right)^{-1/5} \cdot \rho v_\infty^2 = 0.0288 \rho v_\infty^2 \text{Re}_x^{-1/5}.$$

Коэффициент местного сопротивления трения пластины будет иметь вид:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}} = 0.0576 \left(\frac{v_\infty \cdot x}{\nu}\right)^{-1/5} = 0.0576 \cdot \text{Re}_x^{-1/5},$$

т.е.

$$C_{fx} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = \frac{0.0576}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

Определим величину полного сопротивления R_x пластины (с двух сторон). Оно равно

$$R_x = 2b \int_0^{\ell} \tau_w dx,$$

где b - ширина пластины.

Подставляя выражение для τ_w в виде

$$\tau_w = 0.0288 \cdot \rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty}{v} \right)^{-1/5} \cdot x^{-1/5},$$

получим

$$R_x = 2b \int_0^{\ell} 0.0288 \cdot \rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty}{v} \right)^{-1/5} \cdot x^{-1/5} dx.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\begin{aligned} R_x &= 0.0576 \cdot \rho v_\infty^2 b \left(\frac{v_\infty}{v} \right)^{-1/5} \cdot \int_0^{\ell} x^{-1/5} dx = 0.0576 \cdot \rho v_\infty^2 b \left(\frac{v_\infty}{v} \right)^{-1/5} \cdot \left. \frac{x^{4/5}}{4/5} \right|_0^{\ell} = \\ &= 0.072 \rho v_\infty^2 b \cdot \ell^{4/5} \left(\frac{v_\infty}{v} \right)^{-1/5}. \end{aligned}$$

Окончательно: $R_x = 0.072 \rho v_\infty^2 b \ell Re^{-1/5}$, где $Re = \frac{v_\infty \ell}{\nu}$.

Коэффициент полного сопротивления (см. формулу (2.29)) равен

$$C_f = \frac{R_x}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot 2b \cdot \ell}.$$

Подставляя значение R_x , получаем

$$C_f = 0.072 \left(\frac{v_\infty \ell}{\nu} \right)^{-1/5} = 0.072 Re^{-1/5} = \frac{0.072}{\sqrt[5]{Re}}.$$

Сравнение с экспериментом показало, что в последней формуле лучше взять коэффициент не 0.072, а 0.074, т.е.

$$C_f = 0.074 Re^{-1/5} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}}.$$

Сравнение коэффициентов полного сопротивления турбулентного ($C_{fr} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}}$) и ламинарного ($C_{fn} = \frac{1.444}{\sqrt{Re}}$) пограничных слоев показывает, что при одинаковых числах Re коэффициент полного сопротивления при турбулентном погранслое намного больше, чем при ламинарном ($C_{fr} > C_{fn}$).

Например, при $Re = 10^6$ $C_{fn} = \frac{1.444}{10^3} = 0.00144$;

$$C_{fr} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{10^6}} = \frac{0.074}{10 \sqrt[5]{10}} = \frac{0.074}{15.8} = 0.00469, \text{ т.е. } C_{fr}/C_{fn} = 3.25.$$

Отсюда следует важный практический вывод: для уменьшения сопротивления трения обтекаемого тела необходимо добиться увеличения участка ламинарного пограничного слоя (рис. 11) и уменьшения участка турбулентного, т.е. необходимо затягивать как можно дальше ламинарное обтекание профиля [8].

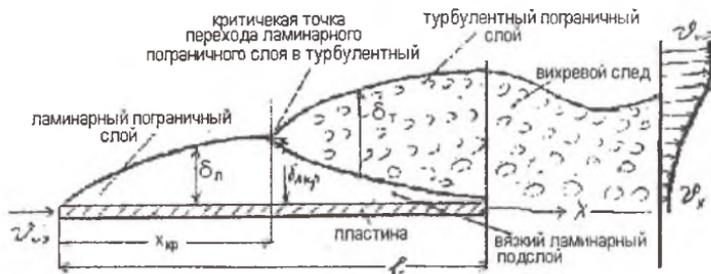


Рис.11

Связь между коэффициентом сопротивления трения при турбулентном погранслое и общим коэффициентом сопротивления трения обтекаемого тела C_f можно выразить как $C_{fr} = C_f \left(\frac{\ell - x_{кр}}{\ell} \right)$, откуда $C_{in} = C_f \left(1 - \frac{x_{кр}}{\ell} \right)$.

Это выражение можно записать по другому:

$$C_{fr} = C_f \left(1 - \frac{Re_{x_{кр}}}{Re} \right), \text{ где } Re_{x_{кр}} = \frac{v_{\infty} \cdot x_{кр}}{\nu}.$$

Толщина ламинарного пограничного слоя $\delta_n = \sqrt{30 \frac{v_{\infty} \cdot x}{v_{\infty}}}$ или

$$\frac{\delta_n}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}$$

Отсюда

$$\delta_{лкр} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_{x_{кр}}}} \cdot x_{кр}$$

Величина $x_{кр}$, а следовательно, и $\delta_{лкр}$ определяется из выражения для числа $Re_{x_{кр}} = \frac{v_{\infty} \cdot x_{кр}}{\nu}$, которое является известным.

2). Логарифмический профиль скоростей для турбулентного пограничного слоя на пластине, полученный по аналогии с турбулентным движением в трубе, имеет вид

$$\frac{v_{\infty} - v_x}{v_*} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right).$$

Закон сопротивления, соответствующий логарифмическому профилю скоростей, довольно сложен. Коэффициент местного сопротивления трения в данном случае выражается зависимостью

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = \frac{2}{(5.75 \cdot \lg(\text{Re}^*) + 3.8)^2}.$$

Коэффициент полного сопротивления трения

$$C_f = \frac{R_x}{\frac{\rho u_\infty^2}{2} \cdot 2b \cdot \ell} = \int_0^\ell \frac{\tau_w dx}{\frac{\rho u_\infty^2}{2} \cdot \ell}, \text{ где } R_x = 2b \int_0^\ell \tau_w dx.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л.И.* Об основных моделях в механике. – М.: МГУ, 1992. 151 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. I, II. М.: Наука, 1984. I – 536 с. II – 560 с.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1954. 795 с.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
6. *Бай Ши-И.* Турбулентное течение жидкостей и газов. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 344 с.
7. *Кутателадзе С.С.* Пристенная турбулентность. – Новосибирск: Наука, 1993. 227 с.
8. *Загузов И.С., Поляков К.А.* Математическое моделирование течений вязкой жидкости вблизи твердых поверхностей: Учебное пособие. – Самара: Изд-во "СамГУ", 2000. 92 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
I. Основы математического моделирования в аэрогидромеханике..	15
1.1. Основные свойства жидкостей и газов.....	15
1.2. Основные методы и модели аэрогидромеханики.....	23
1.3. Принципы математического моделирования аэрогидромеханических процессов.....	26
1.3.1. <i>Задание математической модели процесса</i>	26
1.3.2. <i>Начальные и граничные условия</i>	29
1.3.3. <i>Корректность постановки задач аэрогидромеханики</i> ...	29
1.4. Математические постановки задач о движении вязких жидкостей (газов).....	30
1.4.1. <i>Задача о движении жидкости между параллельными стенками (опыт Куэтта)</i>	30
1.4.2. <i>Задача о движении жидкости в круглом цилиндре конечной длины</i>	32
1.4.3. <i>Задача об обтекании тела жидкостью или газом при наличии теплообмена</i>	33
II. Математические модели в теории пограничного слоя.....	35
2.1. Основные сведения о пограничном слое.....	37
2.2. Математическая модель ламинарного движения вязкой жидкости в пограничном слое	43
2.3. Метод интегральных соотношений для решения задачи ламинарного обтекания пластины вязкой жидкостью	51
2.4. Математическая модель ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе	58
2.5. Переход ламинарного течения в турбулентное	62
2.6. Математическая модель осредненного турбулентного движения вязкой жидкости в пограничном слое	65
2.7. Математическая модель турбулентного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе	77
2.8. Математическая модель турбулентного обтекания пластины вязкой жидкостью	85
Библиографический список.....	90

Игорь Степанович Загузов,
Константин Анатольевич Поляков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
В АЭРОГИДРОМЕХАНИКЕ**

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Н.А.Волынкина
Компьютерная верстка, макет Т.В.Кондратьева

ЛР. № 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 19.06.2001. Формат 60x84/16. Бумага
офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,35., уч.-изд. л.5,75. Тираж 200 экз.

Заказ № 669

Издательство «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.